Introduction aux Ondelettes

Luc Claustres

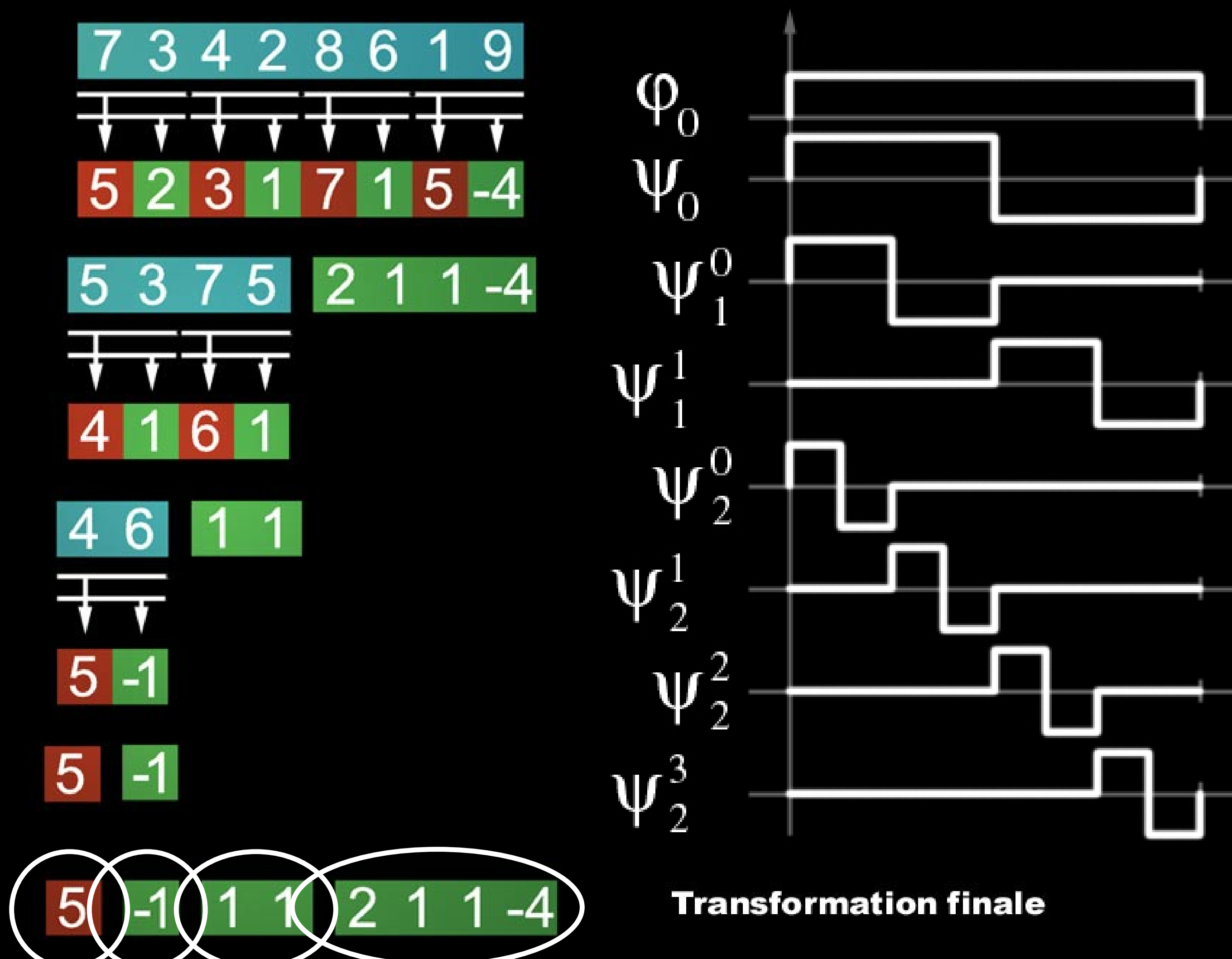
claustre@irit.fr

DESS2IN 2002-2003

Un peu d'histoire

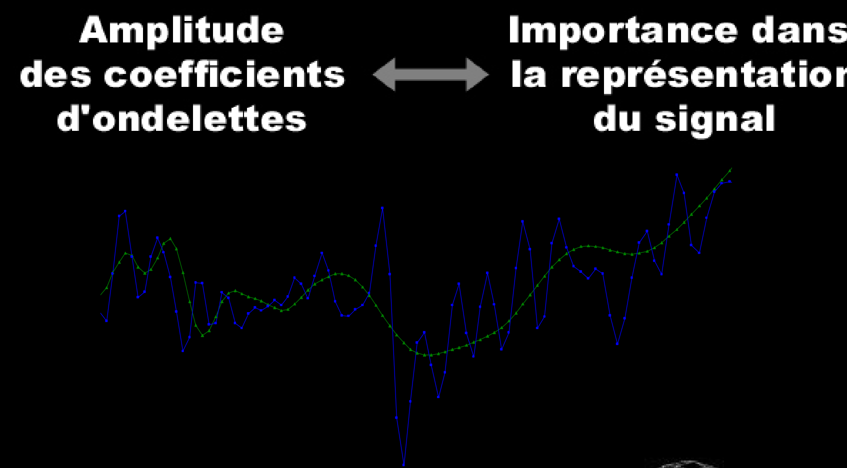
- 1805 : Analyse de Fourier
- 1965 : Transformée de Fourier rapide
- 1980 : Début des ondelettes *« ad hoc »*
  pourquoi/quand cela marche (physique,vision,parole) ?
- 1983 : Analyse d'image multirésolution (Burt)
- 1985 : Transformée continue (Morlet & Grossman)
  reconstruction sans redondance ?
- 1986-87 : Unification des travaux disparates (Mallat)
  - analyse multirésolution
  - transformée discrète
- 1988 : Classe d'ondelettes (Daubechies)
  - compactes
  - orthogonales
  - nombre de moments quelconques
- 1990 : Les ondelettes attirent théoriciens et ingénieurs, le décollage !
- 1992 : Paquets d'ondelettes (Coifman)

Ondelettes par la pratique



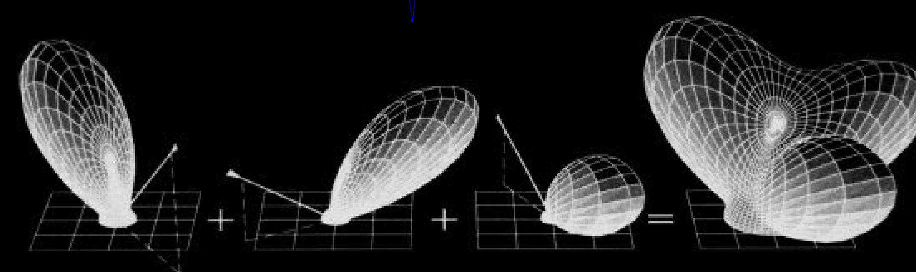
Propriétés

- Compression

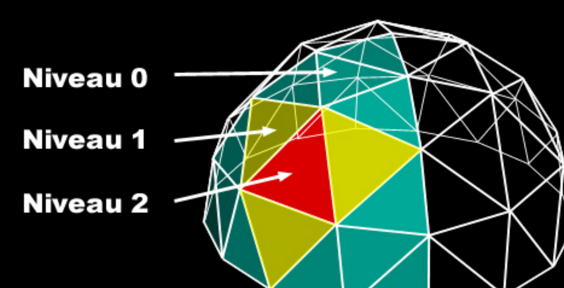


- Débruitage

- Linéarité



- Multirésolution



Quelques remarques

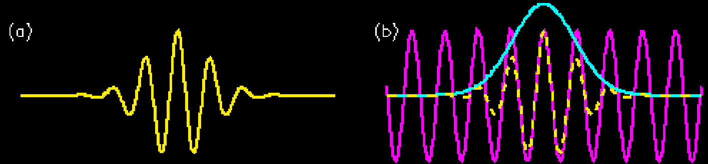
- Pourquoi compresser ?
  - Image : 512x512 => 0.75Mo - pellicule 35mm/12µm => 18Mo
  - Vidéo : 1s de PAL => 27Mo
  - De + en + de données numériques
- Pourquoi multirésolution ?
  - Simplification des calculs
  - Transmission/Reconstruction progressive
- Pourquoi linéaire ?
  - Calculs direct sur la transformée (compressée)
- Pourquoi ça marche ?
  - Les données réelles sont généralement corrélées *localement* (fréquence,temps,espace)

Définition

- Une fonction est dite *ondelette* ou *ondelette mère* si

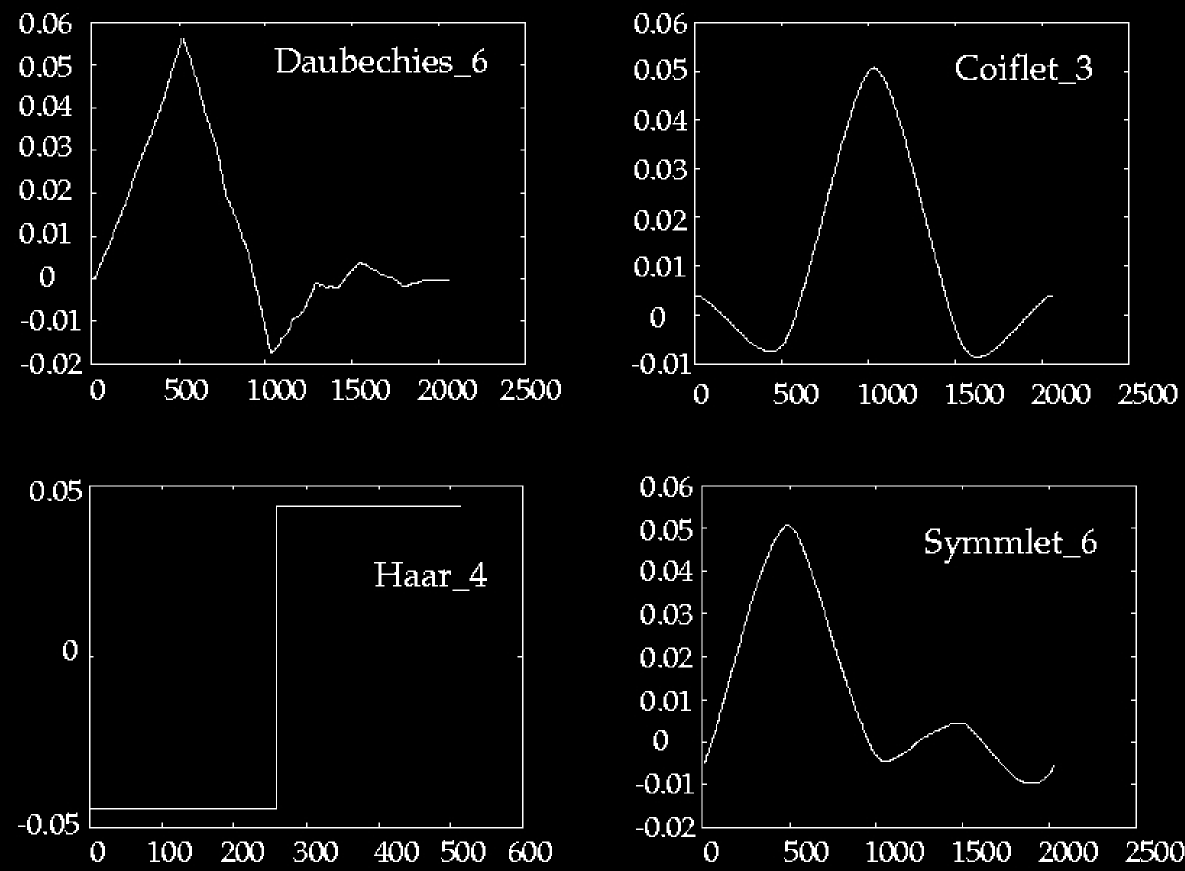
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\,dt = 0$$

(ondulations)



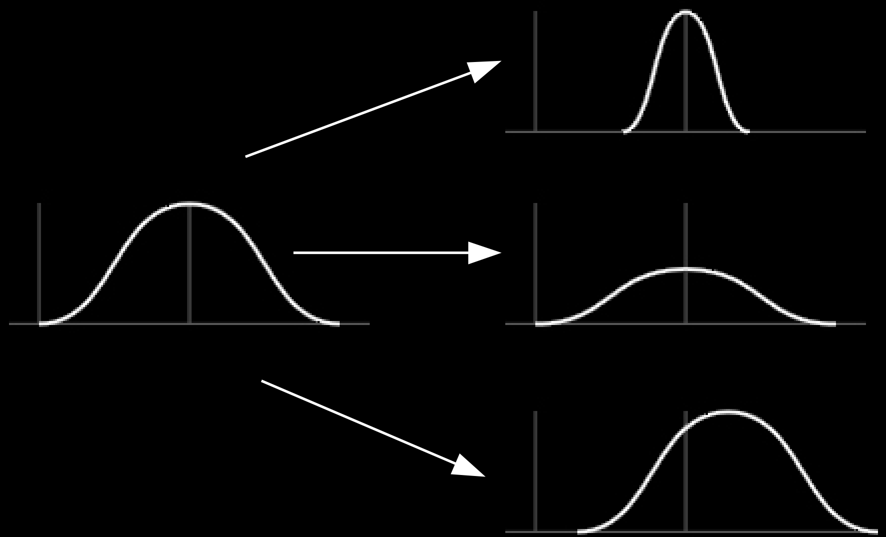
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi(t)\right|^2 dt < \infty$$

(énergie finie)



- On appelle *atomes*

$$\psi_s^u(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$



- Transformée

$$f^*(u,s) = \left\langle f, \psi_s^u \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)dt$$

- Transformée inverse

$$f(t) = \frac{1}{C}\int_{a=-\infty}^{+\infty}\int_{b=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|s|^2}f^*(u,s)\psi_s^u(t)\,da\,db \qquad C = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\psi(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega < \infty$$

condition d'admission

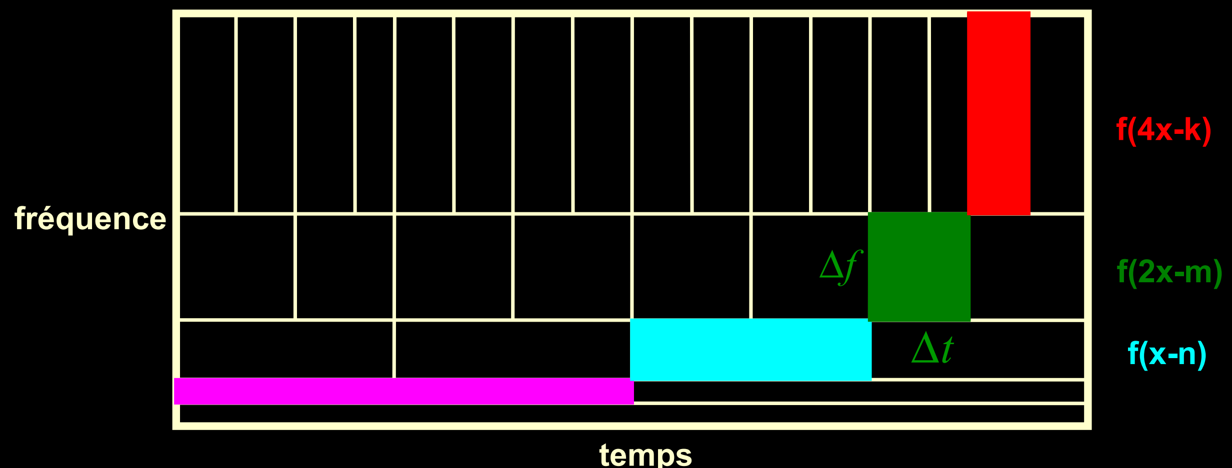
Transformée discrète

- La transformation continue est redondante mais il est possible de reconstruire à partir de *valeurs discrètes* de *u* et de *s*
- En général on utilisera un échantillonnage *dyadique*

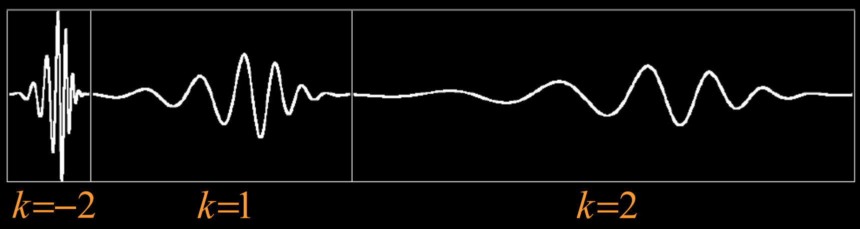
$$s = 2^k$$

$$u = 2^k l$$

k, l *entiers*



$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2^{-k/2} d_k^l \psi(2^{-k} t - l)$$



- *Principe d'incertitude d'Heisenberg*

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq 2\pi$$

Espaces vectoriels linéaires

- Espace vectoriel linéaire = ensemble V muni de deux opérations

  - une addition $+ : V \times V \rightarrow V$
  - une multiplication scalaire $\times : R \times V \rightarrow V$

- Satisfaisant aux propriétés suivantes

$$\forall x, y \in V : x + y = y + x$$

$$\forall x, y, z \in V : x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$\exists!\, 0 \in V \;\middle|\; \forall x \in V : x + 0 = 0 + x = x$$

$$\forall x \in V : \exists! -x \;\middle|\; x + (-x) = 0$$

$$\forall \alpha \in R, \forall x_1, x_2 \in V : \alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$$

$$\forall x \in V : 1.x = x$$

Espaces vectoriels linéaires

- Exemple d'espace vectoriel linéaire : R^n

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in R^n$$
$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\forall \alpha \in R, \alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

- Sous-espace vectoriel = ensemble M tel que

$$M \subset V$$
$$\forall x, y \in M : x + y \in M$$
$$\forall \alpha \in R, \forall x \in M : \alpha x \in M$$

- Espace vectoriel normé = espace vectoriel muni d'une fonction à valeur réelle définie sur V et notée ||.|| telle que

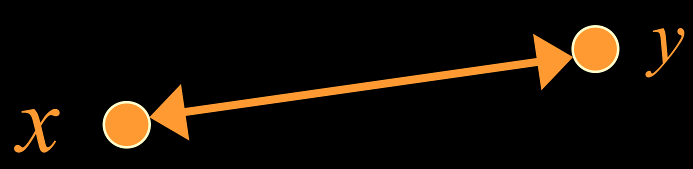
$$\forall x \in V : \|x\| > 0$$

$$\forall x \in V : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\forall \alpha \in R, \forall x \in V : \|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$$

$$\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- Distance entre deux éléments ou vecteurs x et y = ||x-y||



Espaces normés

- Exemple d'espace vectoriel normé : R^n

$$\|x\| = \left(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

- Différents espaces vectoriels normés pour les différentes valeurs de p

  – Norme L_1 $\quad \|x\| = |x_1| + \ldots + |x_n|$

  – Norme L_2 $\quad \|x\| = \sqrt{x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2}$

  – Norme L_∞ $\quad \|x\| = \max(|x_i|)$

Produit scalaire

- Produit scalaire = fonction $< x|y >: V \times V \to R$ telle que

$$\forall x, y, z \in V : \langle x|(y+z)\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$$

$$\forall x, y \in V, \forall \alpha \in R : \langle x|\alpha y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle$$

$$\forall x \in V : \langle x|x\rangle \geq 0$$

$$\forall x \in V : \langle x|x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- Tout espace muni d'un produit scalaire définit un espace vectoriel normé en posant

$$\forall x \in V : \|x\| = \langle x|x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

- Une telle norme vérifie *l'inégalité de Schwartz*

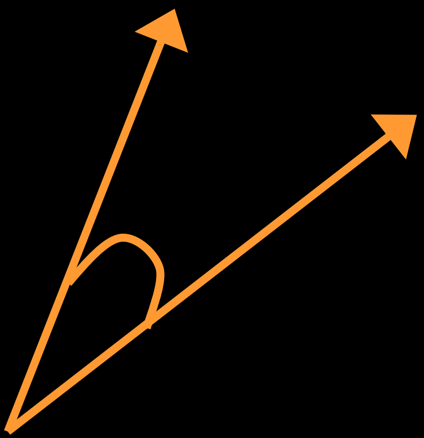
$$\forall x, y \in V : \langle x|y\rangle \leq \|x\|.\|y\|$$

Produit scalaire

- Exemple avec R^n

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$



- Exemple avec $L_2(R)$ espace des fonctions de carré intégrable définies sur [a,b]

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b fg\,dt$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f|^2 dt}$$

Espace de Hilbert

- Espace de Hilbert
  - espace vectoriel linéaire muni d'un produit scalaire dont l'espace vectoriel normé associé est *complet*
  - toute séquence d'éléments qui converge, converge vers un élément de l'espace

- Par exemple Q, l'ensemble de nombre rationnels, n'est pas un espace de Hilbert

$$S_1 = 1$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{!n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = e \notin Q$$

Analyse multirésolution

- Analyse multirésolution = séquence $V_0 \subset V_1 \subset \ldots$ d'espaces de Hilbert fermés et emboîtés telle que

$$V_j \subset V_{j+1} \text{ dense dans } L_2$$

$$\bigcup_j V_j$$

$$\exists \left\{ \varphi_j^k \ , k \in K(j) \ \right\} \text{ est une base de Riesz de } V_j$$

$$K(j) \subset K(j+1)$$

- La première propriété implique l'*équation de raffinement*

$$\varphi_j^k = \sum_{l \in K(j+1)} h_j^{k,l} \varphi_{j+1}^k \quad , \quad k \in K(j)$$

- Une fonction d'échelle de niveau j s'exprime comme une somme pondéré des fonctions de niveau supérieur

Analyse multirésolution

- Espace vectoriel des fonctions constantes par morceaux sur $[0,1]$
- V_j fonctions composées d'un ensemble de 2^j intervalles

$$\left\{ \varepsilon_j^i = \left[\frac{i}{2^j}, \frac{i+1}{2^j} \right], 0 \le i \le 2^j - 1 \right\}$$

- V_0 = espace des fonctions constantes sur $[0,1]$
- V_1 = espace des fonctions à deux coefficients, constantes par morceaux sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Analyse multirésolution

- Toute fonction de $V_{j-1} \in V_j$, il suffit d'affecter la valeur de la fonction sur chaque intervalle ε_{j-1}^{i} aux deux sous intervalles ε_j^{2i} , ε_j^{2i+1}

- Les fonctions carrées définies sur ε_j^{i} forment une base de V_j

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \,, x \in [0,1] \\ 0 \,, x \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\varphi_j^i(x) = \varphi(2^j x - i) \,, i = 0,\ldots,2^j - 1$$

V_2

Analyse multirésolution

- On peut projeter une fonction $f \in V_j$ sur cette base

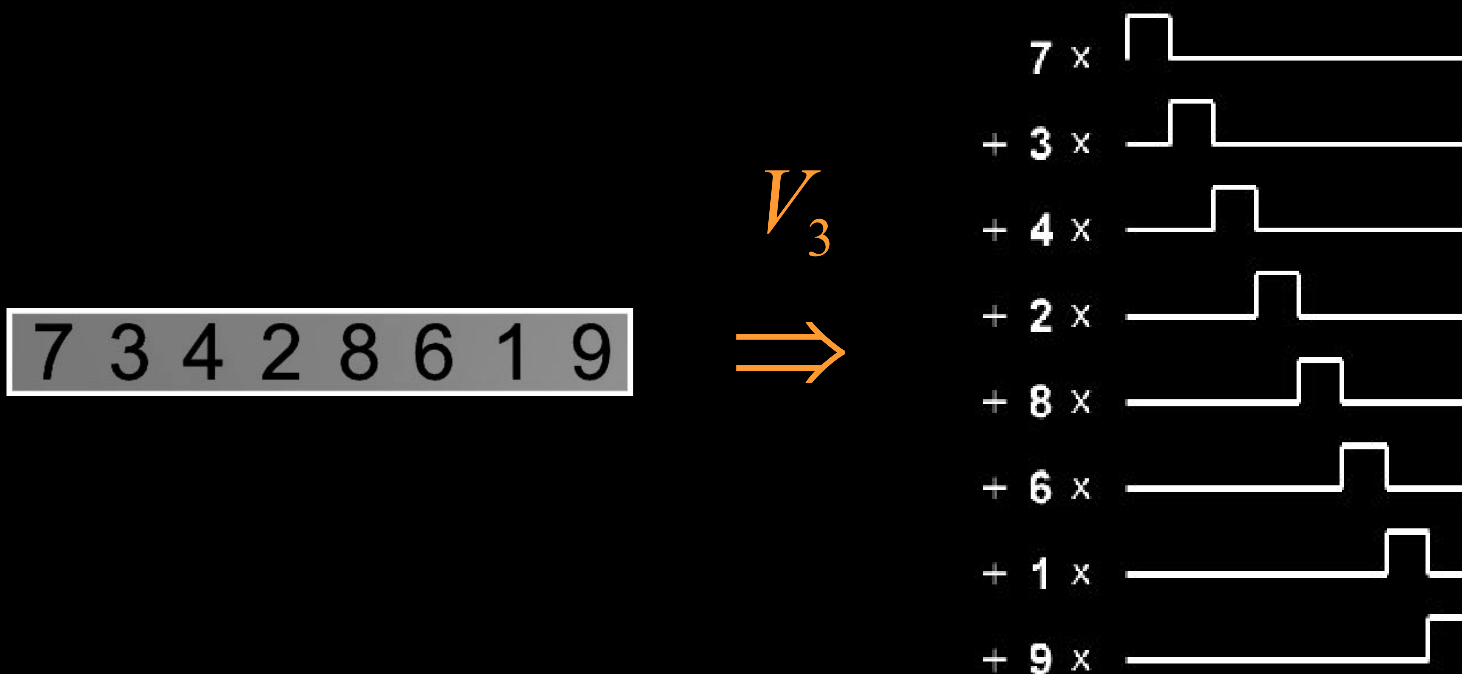
$$f = \sum_k a_j^k \varphi_j^k \quad , \quad a_j^k = \left\langle f \middle| \varphi_j^k \right\rangle$$ *coefficients d'échelle*

- A partir de l'équation de raffinement les coefficients de la projection pour les niveaux inférieurs se calculent

- Décomposition *hiérarchique* ou *multirésolution*
  - *approximations* de *f* à différents niveaux
  - comme $V_j \subset V_{j+1}$ mais pas la réciproque, de l'information manque pour la reconstruction inverse (du + bas au + haut niveau)

Analyse multirésolution

- Exemple des fonctions constantes par morceaux



Analyse multirésolution

- Les ondelettes encodent les *détails*

$$f = \sum_m d_j^m \psi_j^m \quad , \quad d_j^m = \left\langle f \middle| \psi_j^m \right\rangle \qquad \textit{coefficients d'ondelettes}$$

- Elles forment une base $\left\{ \psi_j^m , m \in M(j) \right\}$ du complémentaire de V_j dans V_{j+1} :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

- Equation similaire à l'équation de raffinement car $W_j \subset V_{j+1}$

$$\psi_j^m = \sum_{l \in M(j+1)} g_j^{m,l} \varphi_{j+1}^l \quad , \quad m \in M(j)$$

- Exemple des fonctions constantes par morceaux

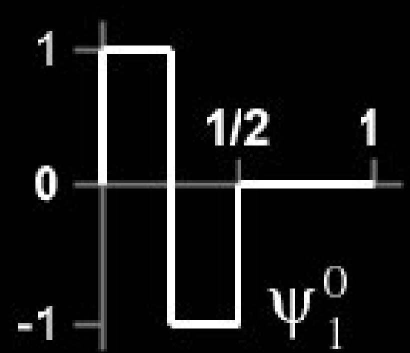
$$\psi(x) = \begin{cases} 1 \;, x \in [0, 1/2] \\ -1 \,, x \in [1/2, 1] \\ 0 \quad , x \notin [0,1] \end{cases}$$

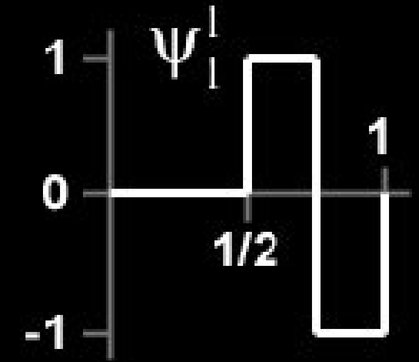
Ondelette de Haar

$$\psi_j^i(x) = \psi(2^j x - i)\,, i = 0, \ldots, 2^j - 1$$

$$V_2 = V_1 \oplus W_1$$

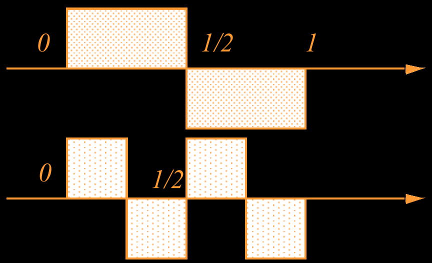
W_1





- Filtres

g(0) = 1/2, g(1) = -1/2



$$\psi(x) = 2g(0)\varphi(2t) - 2g(1)\varphi(2t-1)$$

- Une fonction d'échelle de niveau *j+1* peut s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions d'échelle et d'ondelettes plus grossières (niveau *j*)

$$\varphi_{j+1}^{l} = \sum_{k \in K(j)} \tilde{h}_j^{k,l} \varphi_j^k + \sum_{m \in M(j)} \tilde{g}_j^{m,l} \psi_j^m \quad , \quad l \in K(j+1)$$

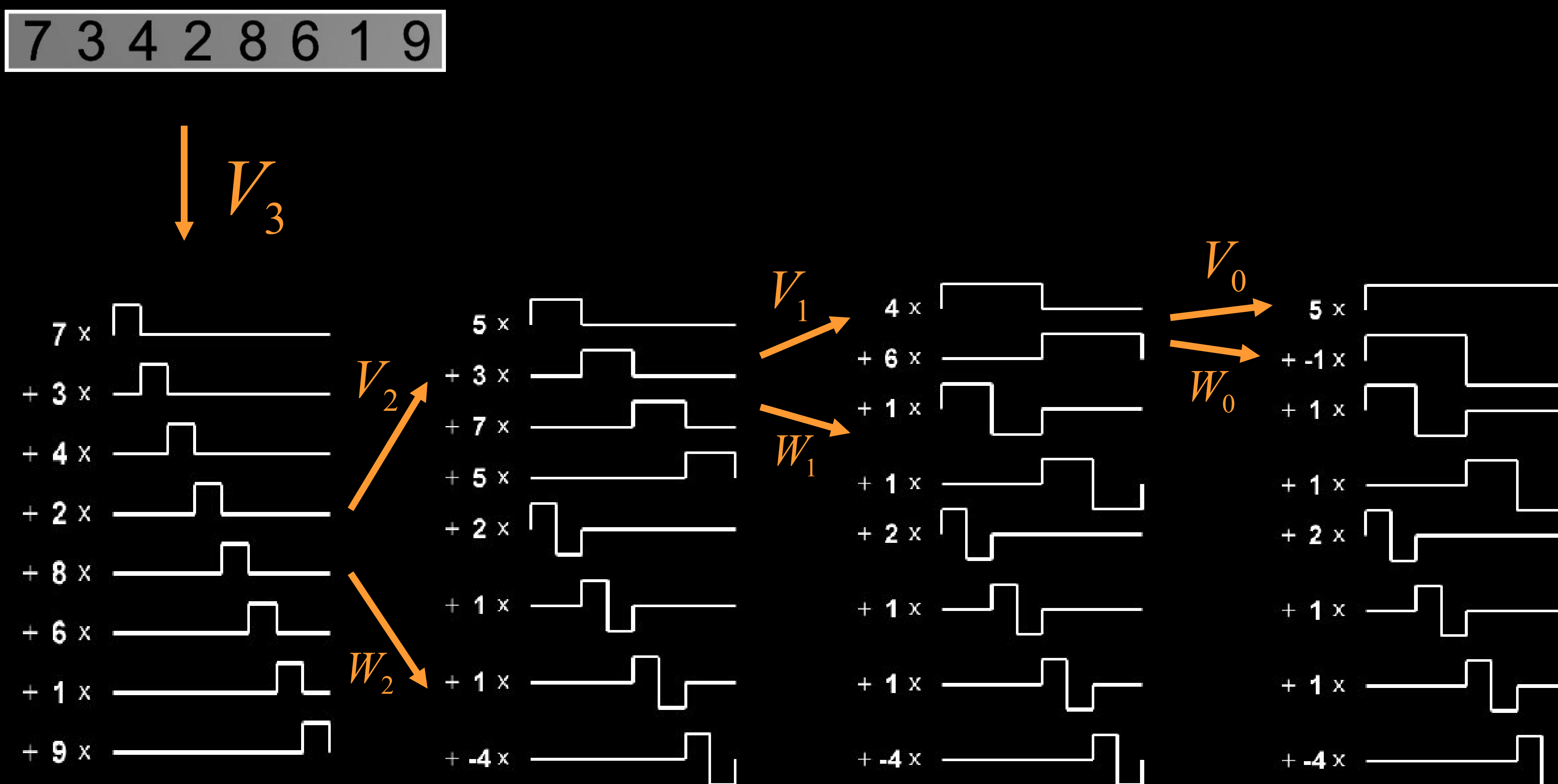
- Au final une fonction $f \in V_n$ peut s'écrire

$$f = \sum_{k \in K(0)} a_0^k \varphi_0^k + \sum_{j=0}^{n} \sum_{m \in M(j)} d_j^m \psi_j^m$$

- Dans le cas fini, la transformée par ondelettes se résume à un *filtrage* ou une *convolution* (notation matricielle)

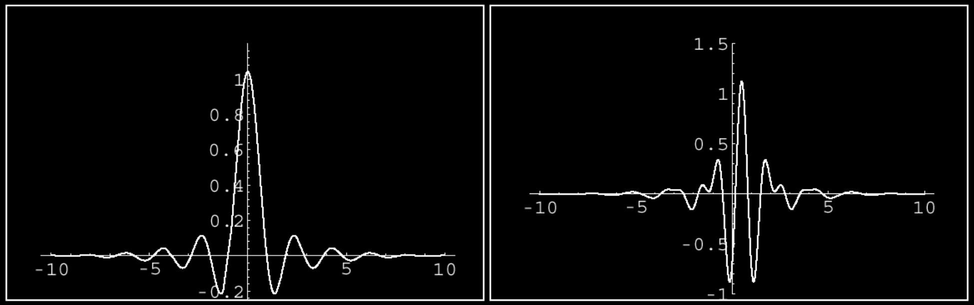
Analyse multirésolution

- Exemple des fonctions constantes par morceaux

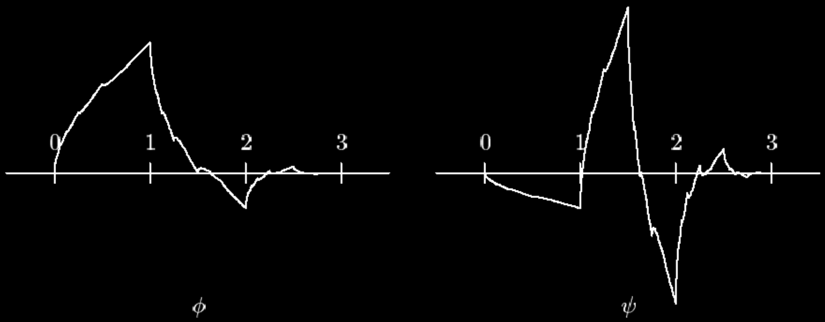


Analyse multirésolution

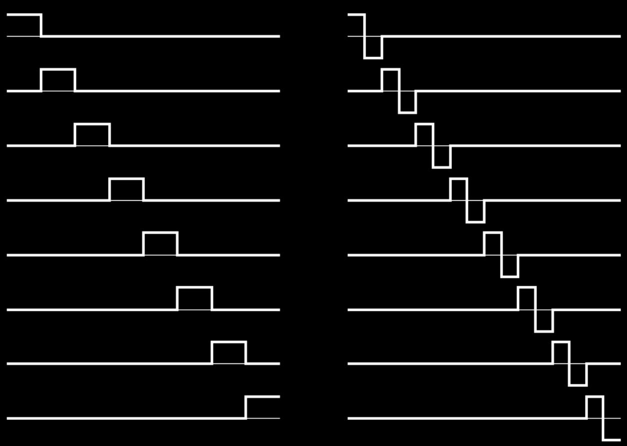
- Il existe de nombreuses *familles* d'ondelettes



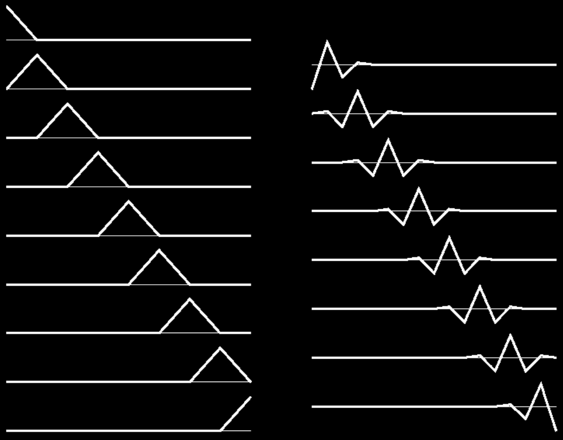
Meyer



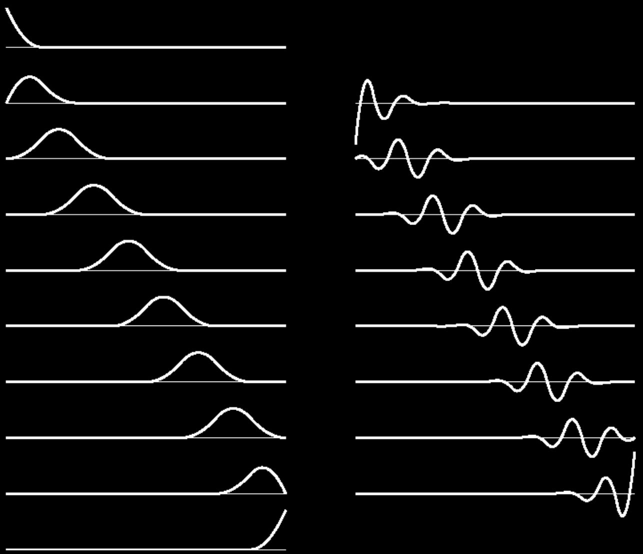
Daubechies



Haar



Bspline linéaire



Bspline quadratique

Processus d'analyse/synthèse

- Etape de la transformée ou du *processus d'analyse*

$$a_j^k = \sum_{l \in K(j)} \tilde{h}_j^{k,l} a_{j+1}^l$$

$$d_j^m = \sum_{l \in M(j)} \tilde{g}_j^{m,l} a_{j+1}^l$$

- Le filtre défini par les $\tilde{h}_i$ est un filtre *passe-bas* encodant les approximations du signal (basses fréquences)
- Le filtre défini par les $\tilde{g}_i$ est un filtre *passe-haut* encodant les détails du signal (hautes fréquences)

- Etape de la transformée inverse ou du *processus de synthèse*

$$a_{j+1}^l = \sum_{k \in K(j)} h_j^{k,l} a_j^k + \sum_{m \in M(j)} g_j^{m,l} d_j^m$$

Notation matricielle

$$\Phi_j(x) = \left[\varphi_j^0(x), \ldots, \varphi_j^n(x)\right]$$

$$\Psi_j(x) = \left[\psi_j^0(x), \ldots, \psi_j^m(x)\right]$$

Equations de raffinement

$$\Phi_{j-1}(x) = \Phi_j(x) H_j$$

$$\Psi_{j-1}(x) = \Phi_j(x) G_j$$

$$\left[\Phi_{j-1}(x) \middle| \Psi_{j-1}(x)\right] = \Phi_j(x)\left[H_j \middle| G_j\right]$$

Analyse

$$A_{j-1} = \widetilde{H}_j A_j$$

$$D_{j-1} = \widetilde{G}_j D_j$$

Synthèse

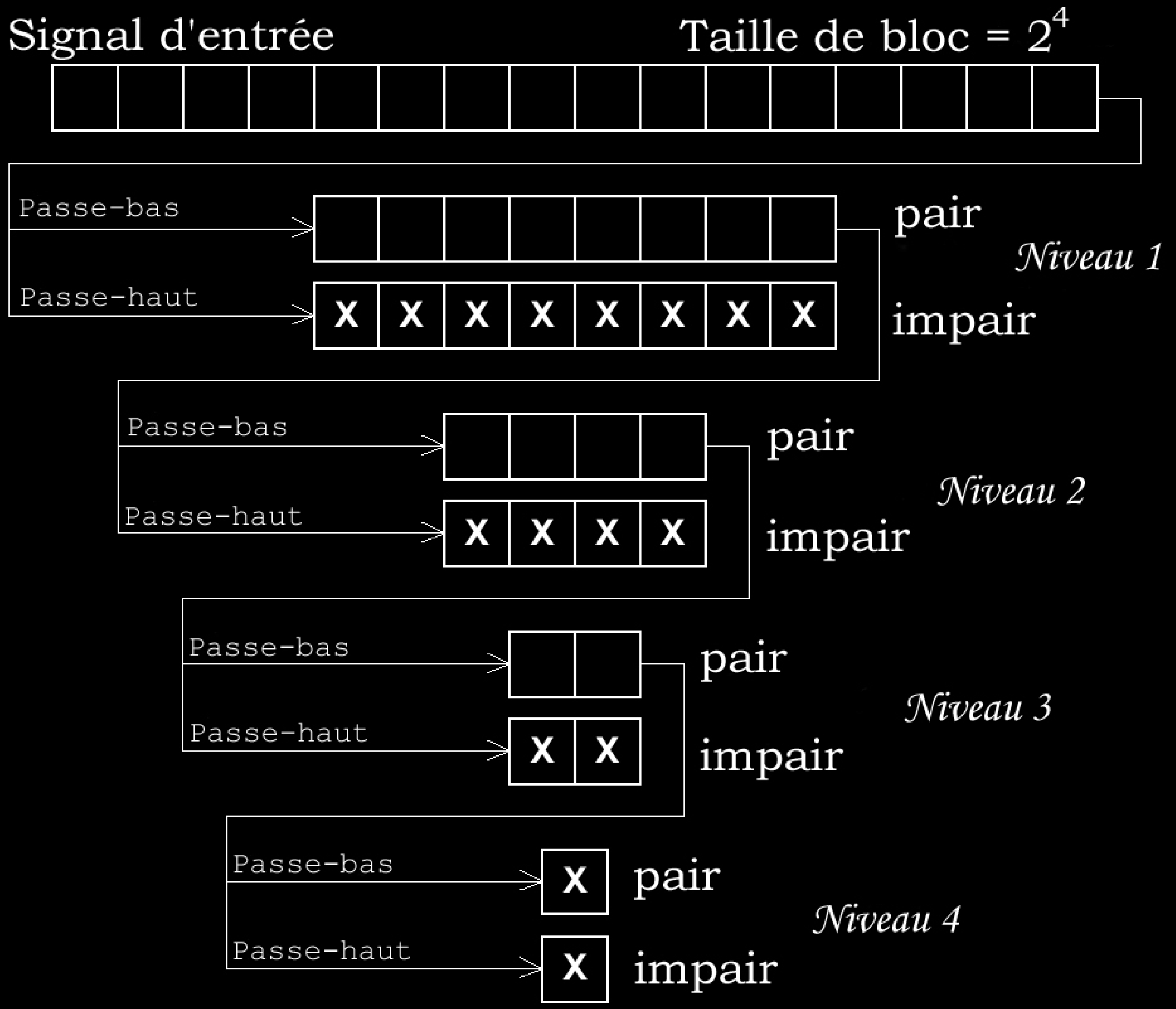
$$A_j = H_j A_{j-1} + G_j D_{j-1}$$

Haar

$$H^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad G^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{H}^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{G}^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Transformée rapide



Aussi appelé algorithme pyramidal de Mallat ou transformée par banque de filtres

Caractéristiques d'une ondelette

- Moment = représentation des fonctions m-dérivables

$$m_i = \left\langle f \middle| x^i \right\rangle = \int f\, x^i dx \,,\; i = 0,\ldots,n-1$$

- En général moments ~ capacité de compression ~ complexité
- Symétrie/Régularité
- Expression analytique
- Support compact => filtres courts => transformée rapide
- Orthogonalité – Semiorthogonalité – Biorthogonalité $\forall\ j,k,l$

$$\begin{cases} \left\langle \varphi_j^k \middle| \varphi_j^l \right\rangle = \delta_{k,l} \\ \left\langle \psi_j^k \middle| \psi_j^l \right\rangle = \delta_{k,l} \\ \left\langle \varphi_j^k \middle| \psi_j^l \right\rangle = 0 \end{cases} \qquad \left\langle \varphi_j^k \middle| \psi_j^l \right\rangle = 0 \qquad \begin{cases} \left\langle \varphi_j^k \middle| \tilde{\psi}_j^l \right\rangle = 0 \\ \left\langle \psi_j^k \middle| \tilde{\varphi}_j^l \right\rangle = 0 \end{cases}$$

Chaque atome encode une information non représentable par un autre => décomposition unique

$$\tilde{h} = h^T$$

$$\tilde{g} = g^T$$

Filtres orthogonaux => simplification

- Construction / certaines propriétés : *Lifting Scheme*

Compression

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i(x)$$

Amplitude des coefficients d'ondelettes ⟺ **Importance dans la représentation du signal**

1. Ordonnancement des coefficients d'ondelettes, permutation π

$$\left\| c_{\pi(1)} \right\| \geq \ldots \geq \left\| c_{\pi(m)} \right\| \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_{\pi(i)} u_{\pi(i)}(x)$$

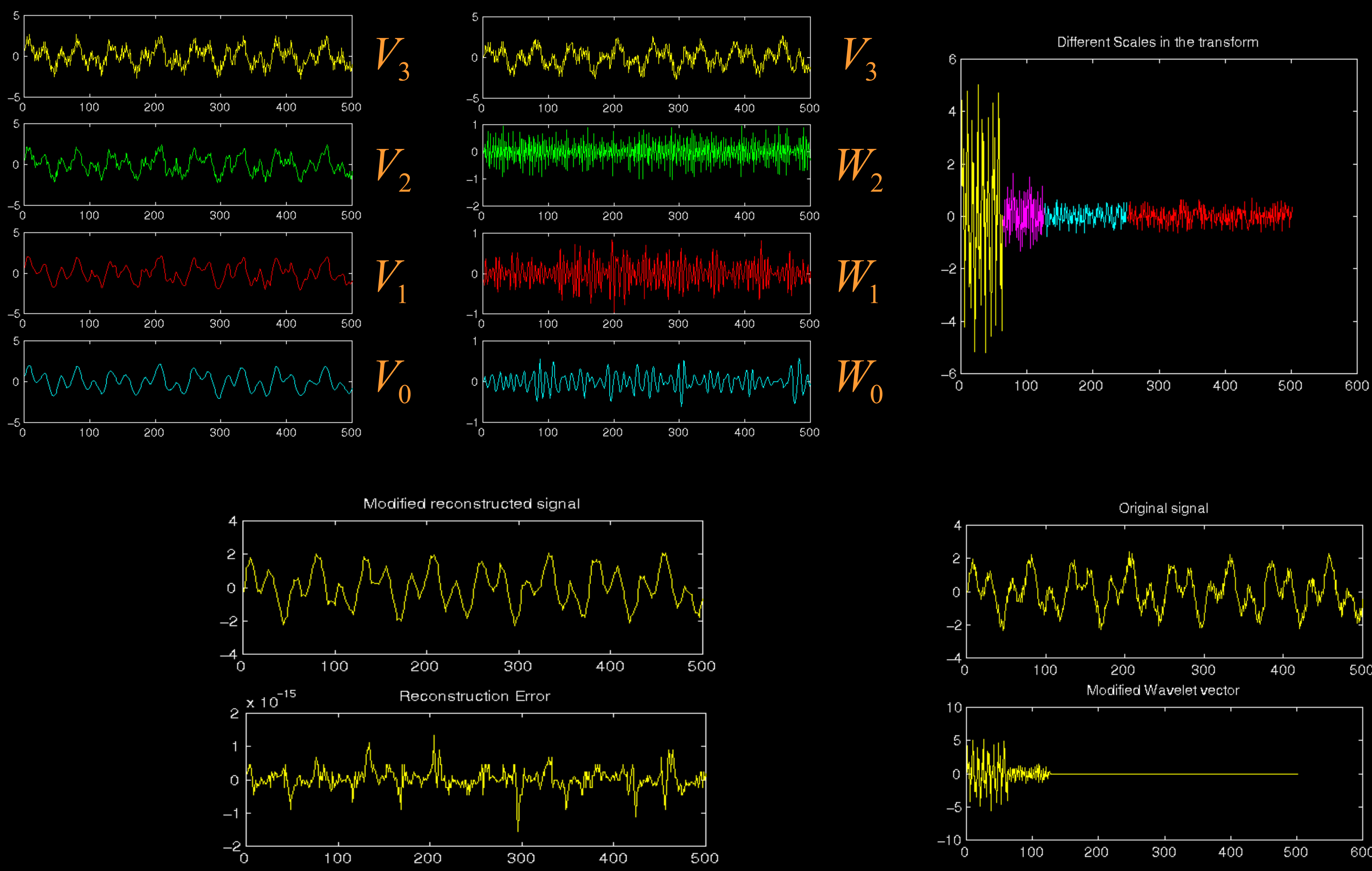
2. Définition d'un *seuil* $\varepsilon \Leftrightarrow$ définition d'un indice $\hat{m}$

$$\sum_{i=\hat{m}+1}^{m} \left\| c_{\pi(m)} \right\|^2 \leq \varepsilon^2 \qquad \hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{\hat{m}} c_{\pi(i)} u_{\pi(i)}(x)$$

3. Suppression des coefficients inférieur au seuil (~ 0)
4. Calcul de l'erreur (compression avec perte)

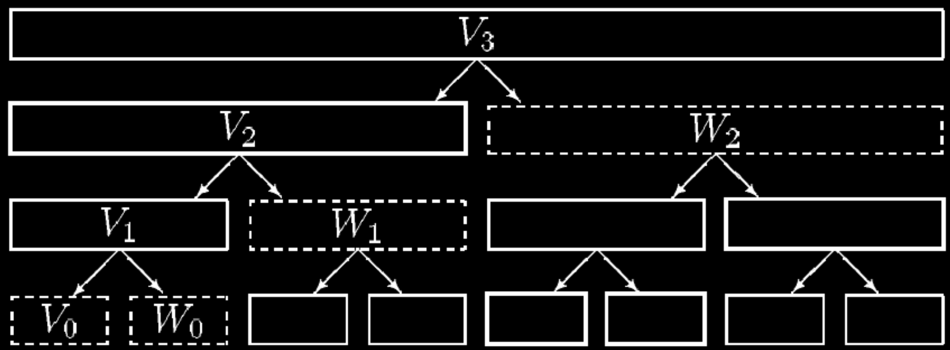
$$\left\| f - \hat{f} \right\|^2 = \sum_{i=\hat{m}}^{m} \left\| c_{\pi(i)} \right\|^2$$

Exemple de compression

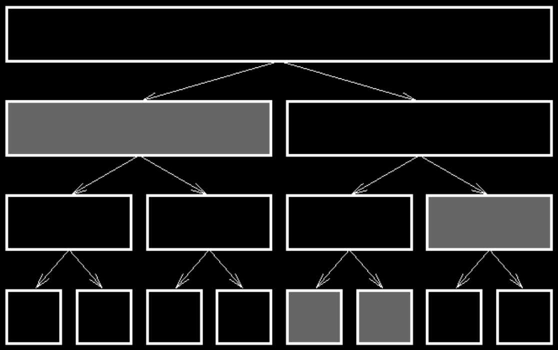


Les paquets d'ondelettes

- Décomposition des V_j et des W_j



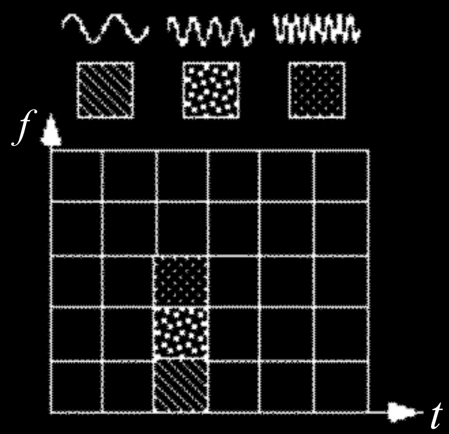
- Choix de la base optimale pour représenter le signal
- Estimation d'après une fonction de coût



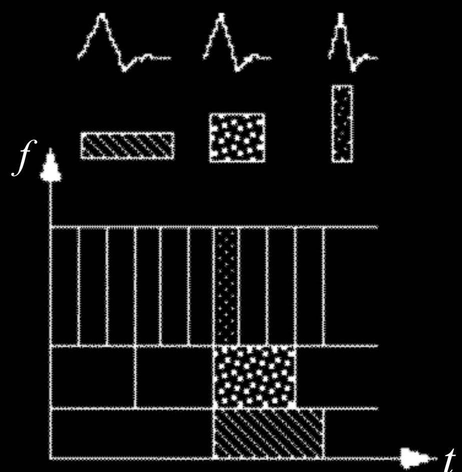
- Augmente la complexité

Comparaison avec Fourier

- Fourier
  - atomes à support global
  - sinusoïde progression arithmétique en fréquences
  - analyse en fréquence
  - complexité O(n log n)



- Fourier + fenêtrage
  - atomes à support local
  - analyse temps/fréquence (largeur de fenêtre fixe)
- Ondelettes
  - atomes à support local
  - forme indépendante de l'échelle
  - fréquences en progression géométrique
  - analyse temps/fréquence (largeur de fenêtre variable)
  - complexité O(n)

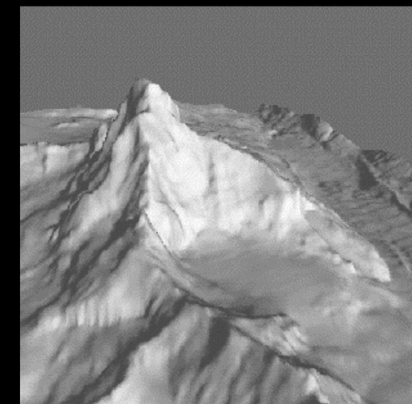


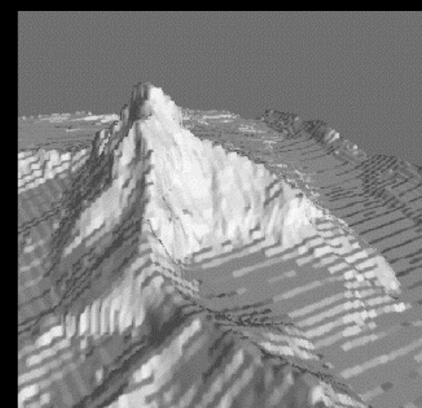
Applications générales

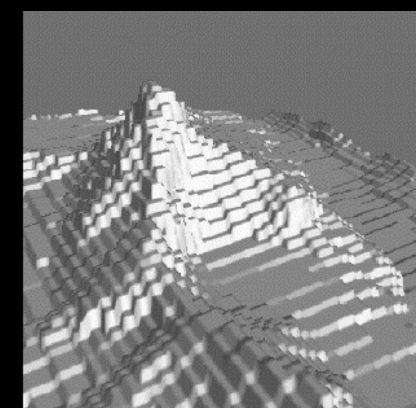
- Astrophysique
- Physique quantique
- Analyse fractale
- Analyse des turbulences/chaos
- Débruitage
- Analyse de la parole/acoustique
- Analyse du système visuel/auditif
- Analyse sismologique

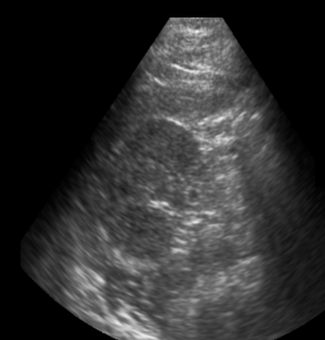
Applications en informatique graphique

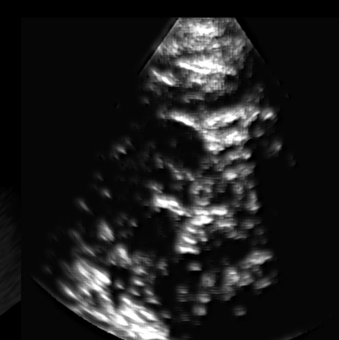
- Compression d'images
  - JPEG 2000
  - FBI
- Analyse d'image
  - suppression de bruit
  - détection des contours
  - reconnaissance
- Compression vidéo
- Maillages (édition/compression)
- Rendu volumique
- Rendu réaliste (radiosité,BRDF)
- Imagerie médicale
- Et beaucoup d'autres choses !



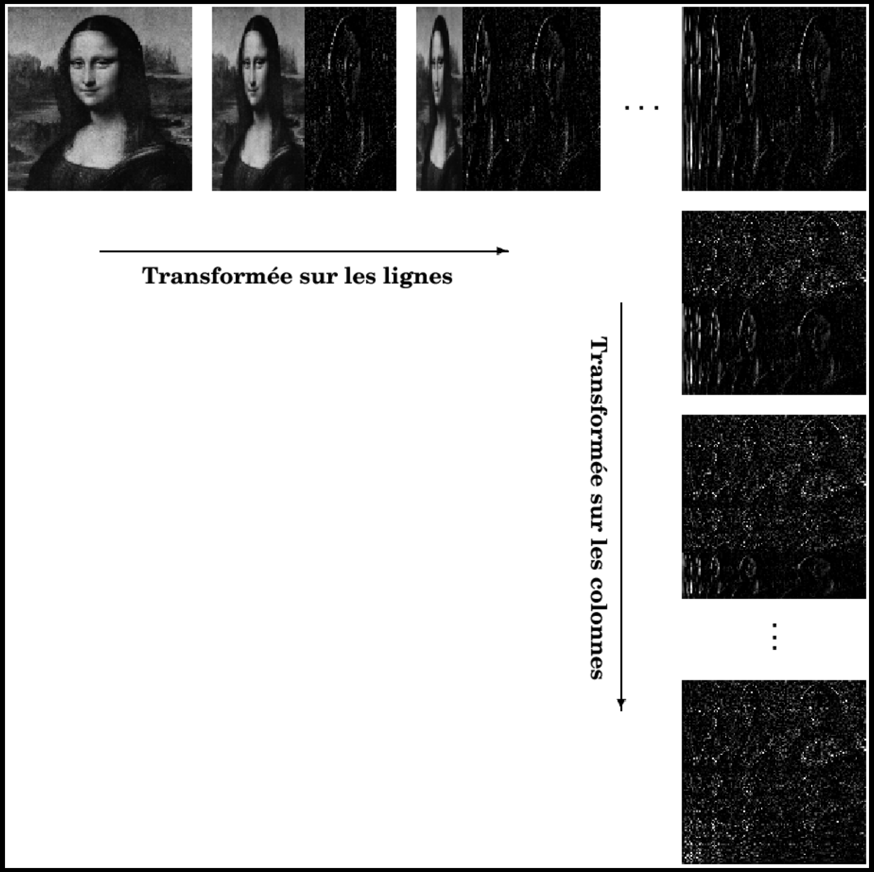


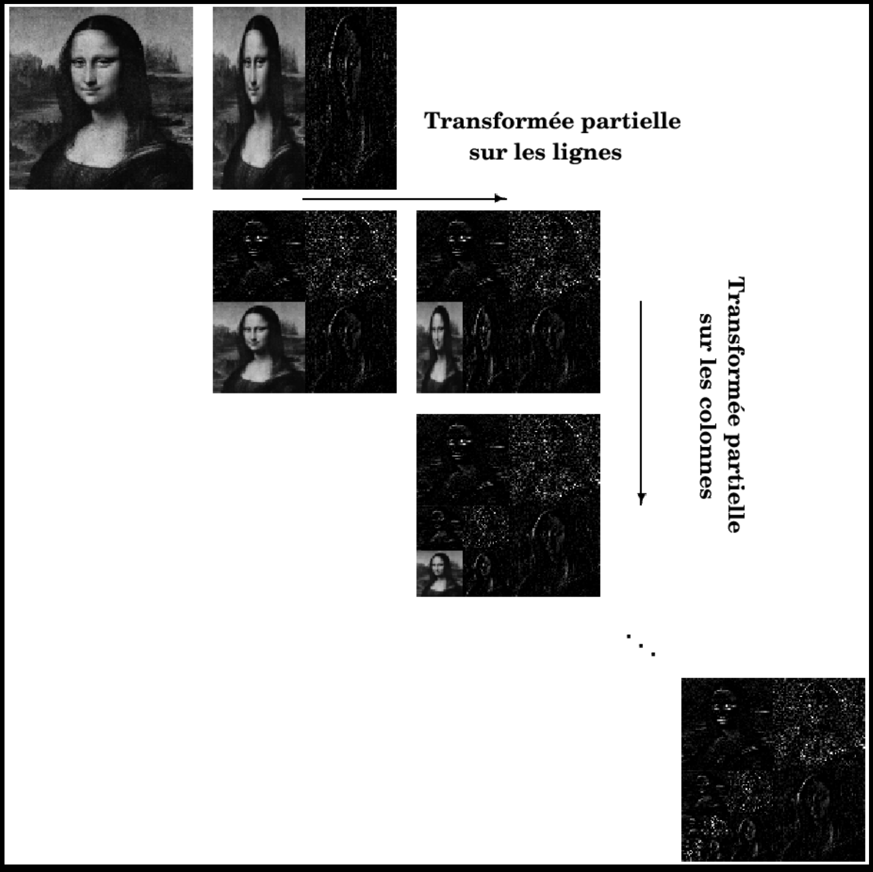




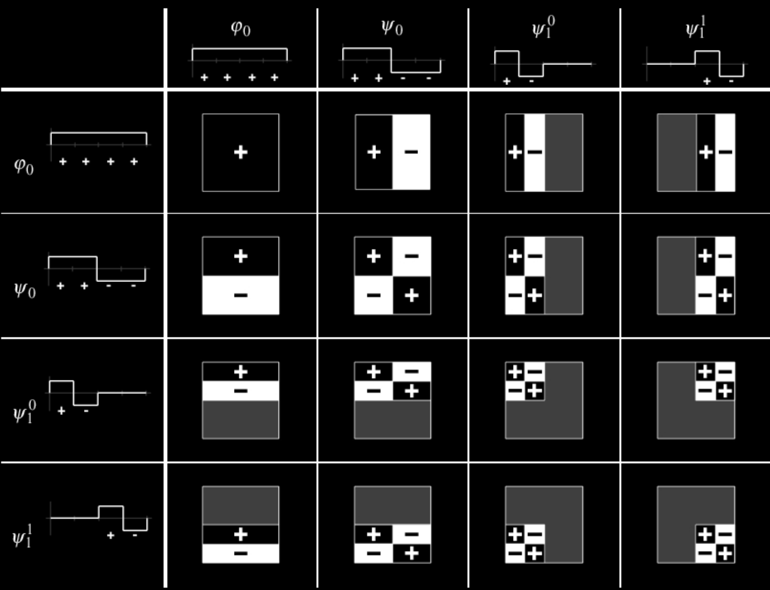


- 2D => deux décompositions possibles
  - standard = composition de transformées
  - non-standard = transformée multidimensionnelle



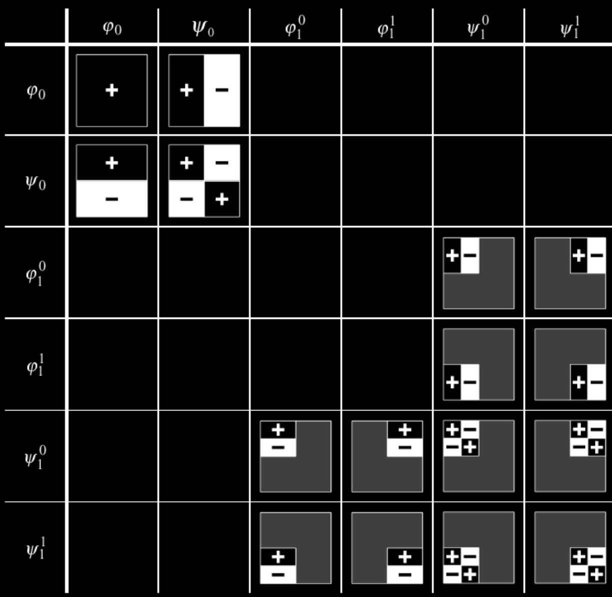


Fonctions de base multidimensionnelles



$$\varphi\varphi(x,y) \equiv \varphi(x)\varphi(y)$$

$$\begin{cases} \varphi\psi(x,y) \equiv \varphi(x)\psi(y) \\ \psi\varphi(x,y) \equiv \psi(x)\varphi(y) \\ \psi\psi(x,y) \equiv \psi(x)\psi(y) \end{cases}$$



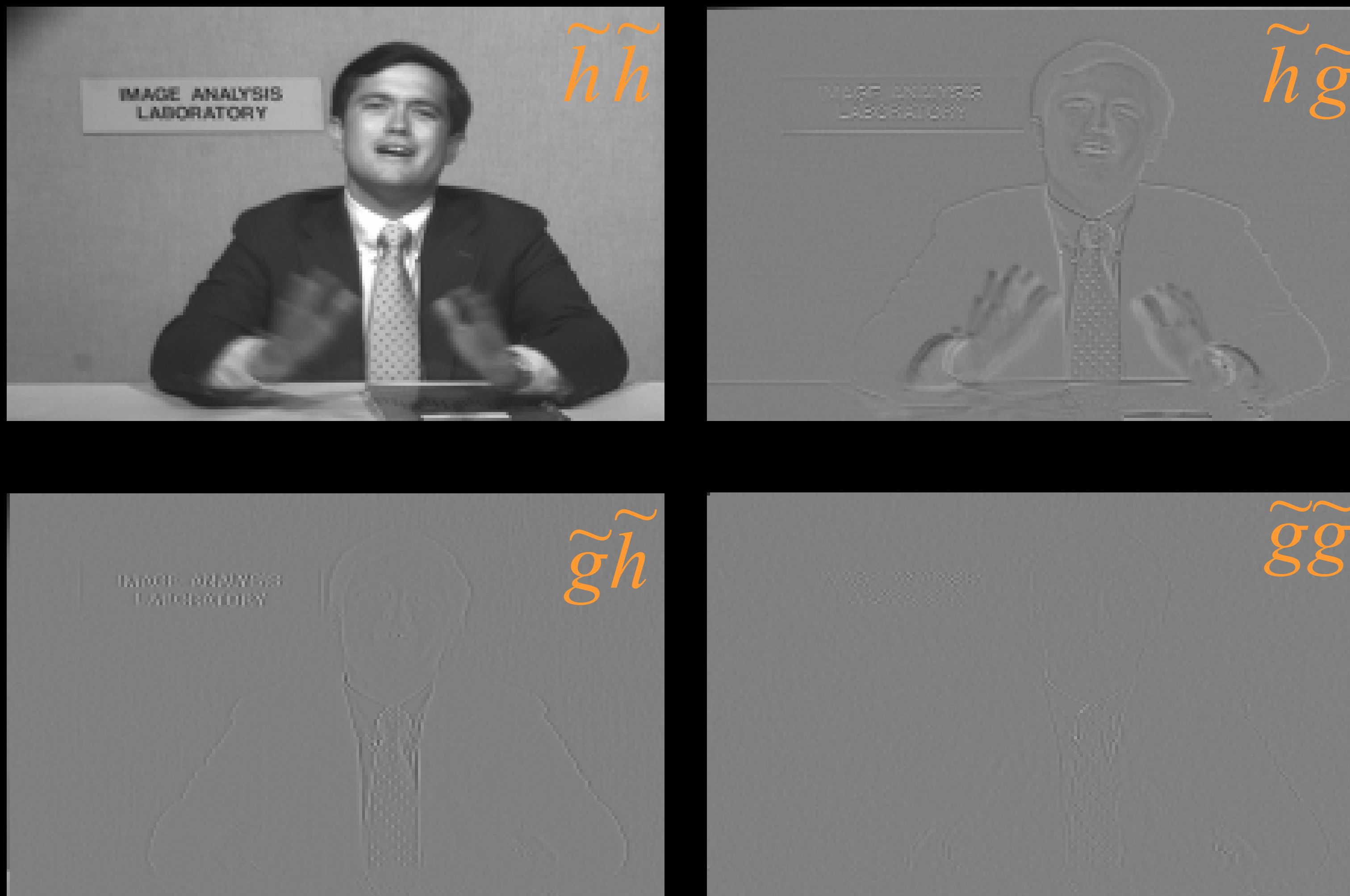
standard | *non-standard*

mise en place simple
\+ coûteuse
supports variables

$$\frac{8}{3}(n^2-1) > 4(n^2-n)$$

mise en place complexe
\+ rapide
supports carrés

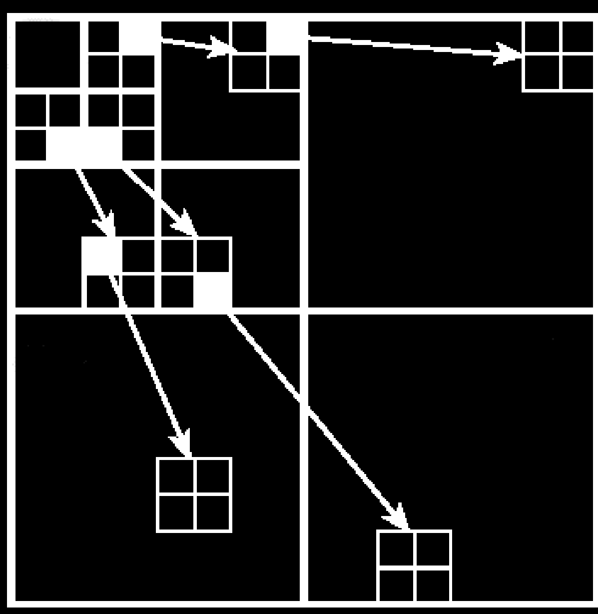
Images

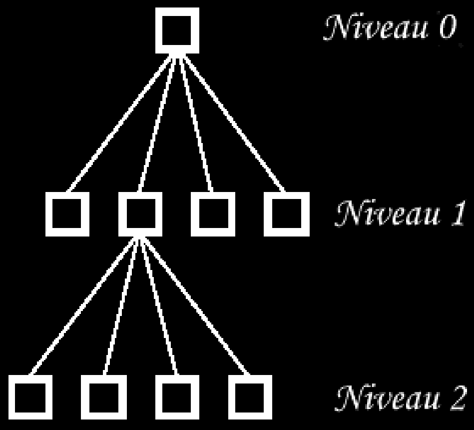


$\tilde{h}\tilde{h}$
IMAGE ANALYSIS
LABORATORY
$\tilde{h}\tilde{g}$
$\tilde{g}\tilde{h}$
$\tilde{g}\tilde{g}$

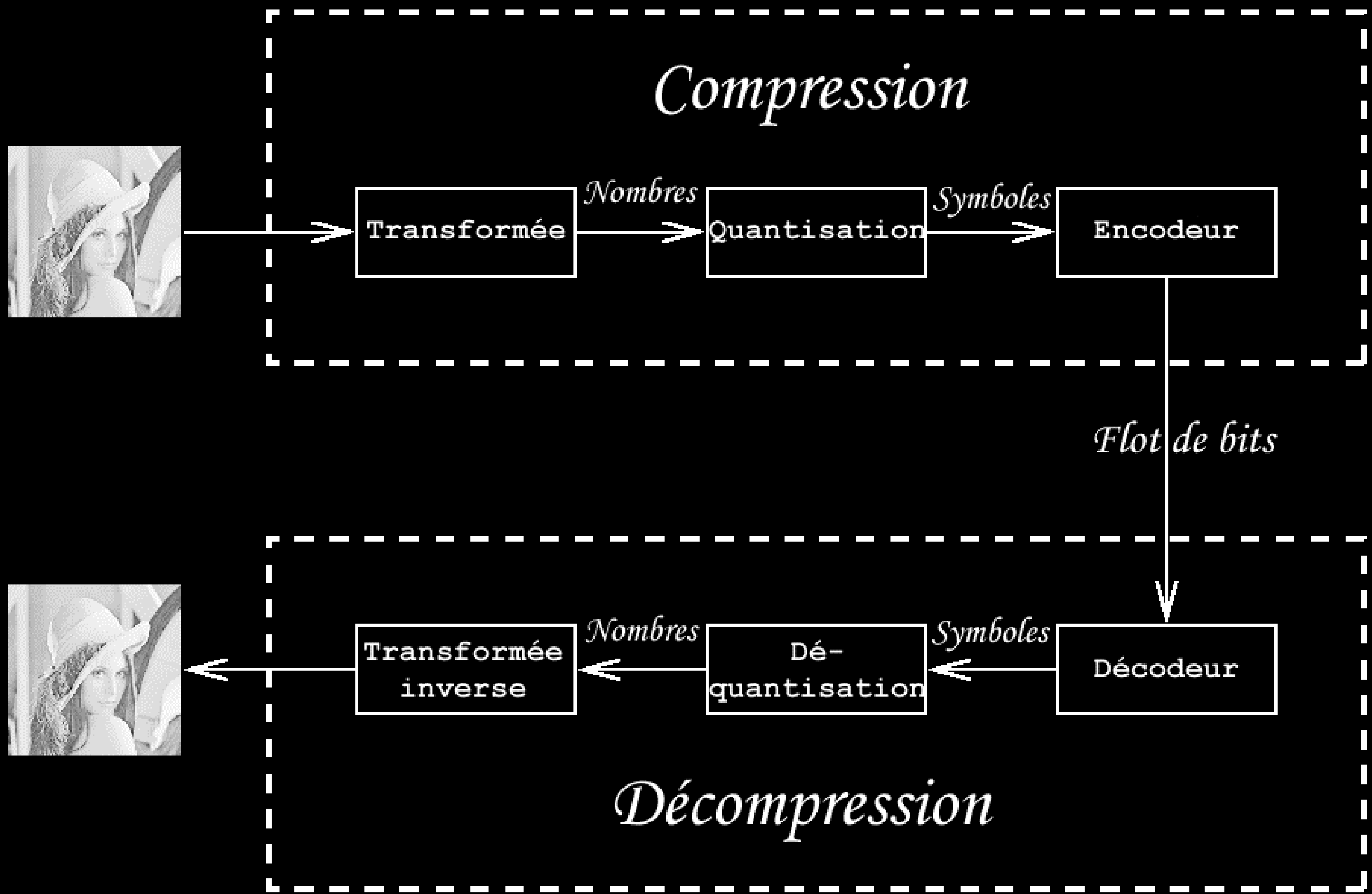
Arbres-Zeros

- Structure adaptée à la représentation *creuse* fournie par les ondelettes
- Sous forme d'arbre
  - 1D : binaire
  - 2D : quaternaire
- Suppression des branches « vides »





Système général



Images

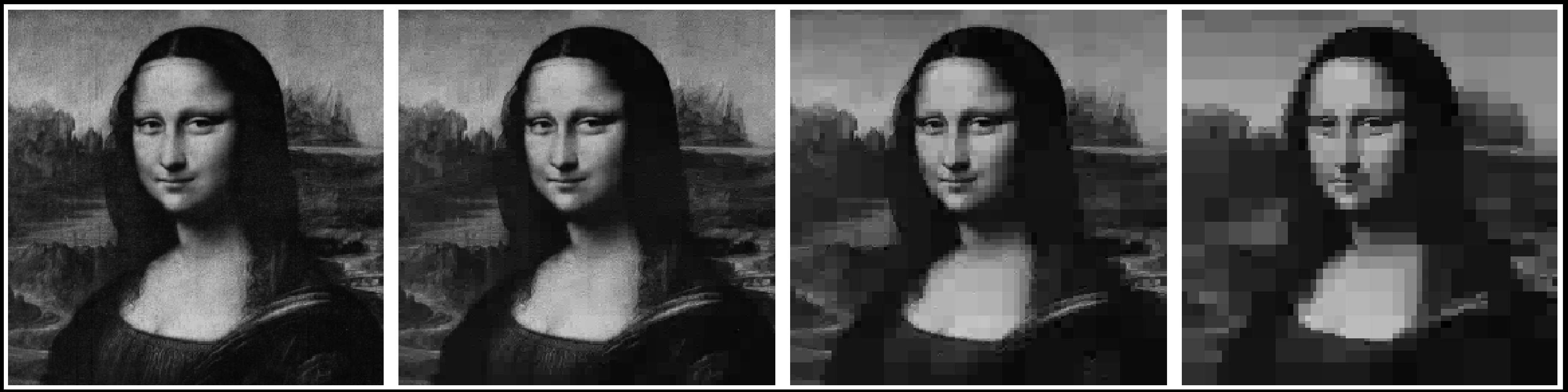


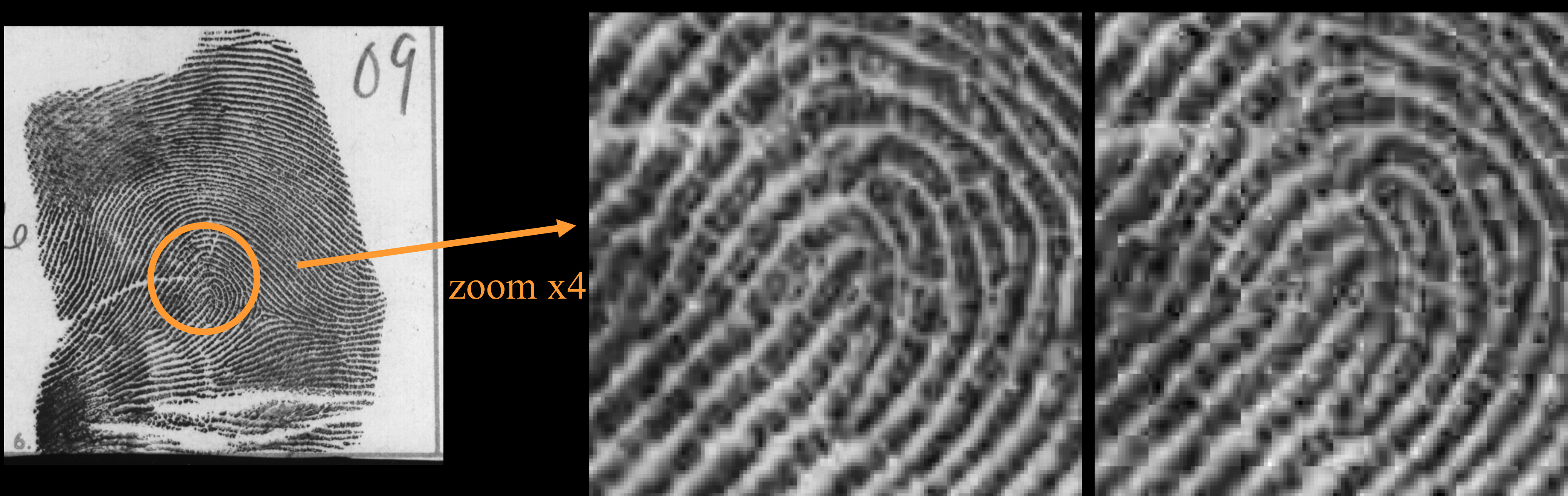
image originale | 21% - 5% | 4% - 10% | 1% - 15%

contour = maxima à toutes les échelles

FBI

- Base de donnée d’empreintes digitales
  - 500 points par inch => 1 empreinte ~ 10Mo
  - OK j’ai un gros disque dur !

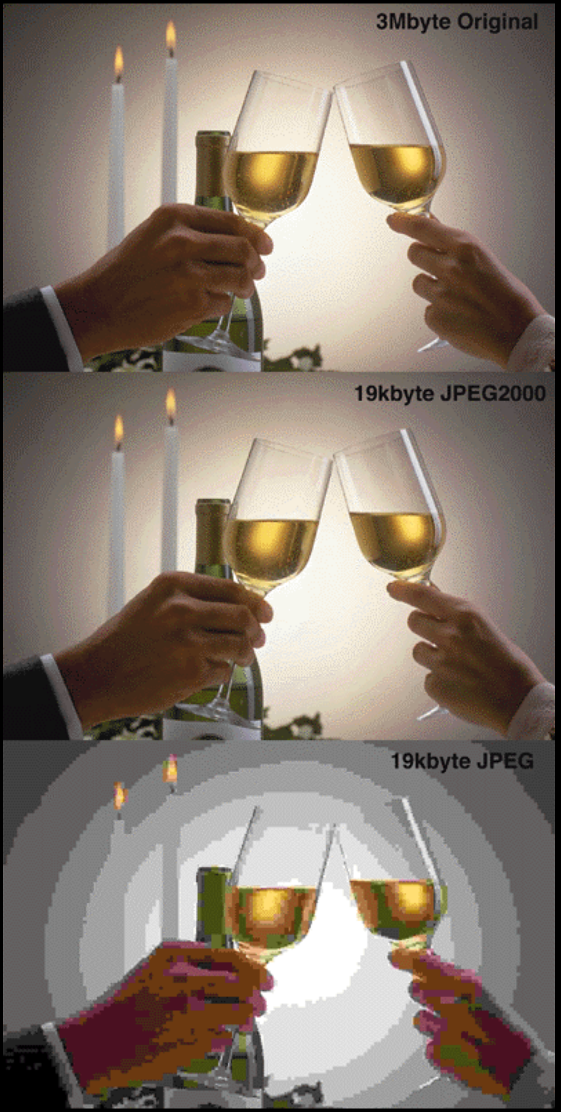
    Oui mais moi j’ai 200,000,000 d’empreintes !



ondelettes | JPEG standard

JPEG 2000

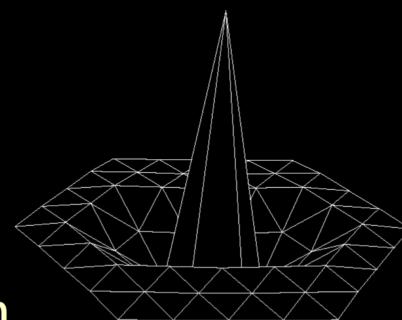
- Compression par ondelettes
  - Filtres Daubechies 9/7
- Evite les écueils de l'ancien standard
  - Pas de découpage en blocs constants 8x8
  - Décodage progressif
  - Régions d'intérêt
  - Encode le Gamma/Copyright
- Pourquoi encore méconnu
  - Payant



JPEG 2000

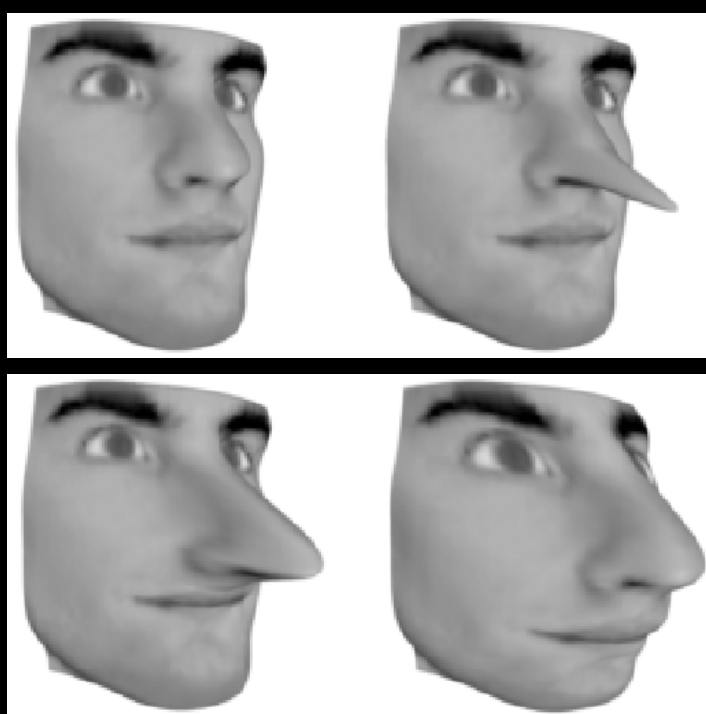
Maillages

- Ondelettes définies sur les triangles ou les sommets
- Compression
- Edition multirésolution



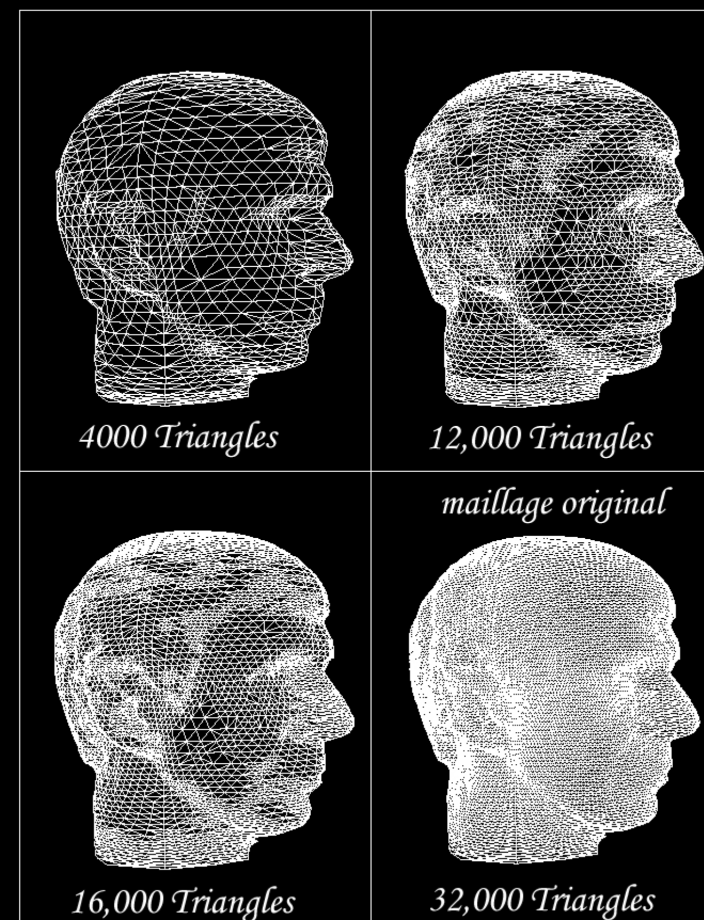
original

résolution fine

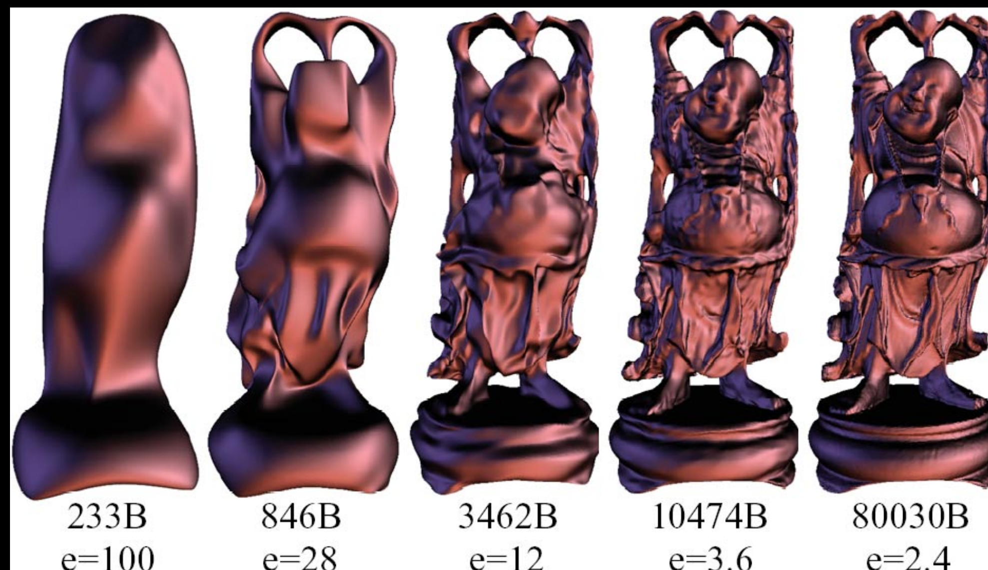


résolution moyenne

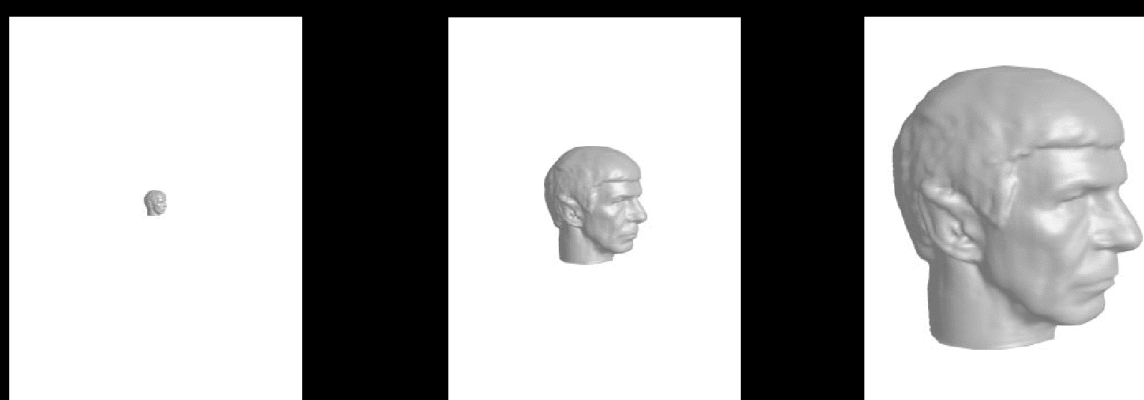
résolution grossière



- Transmission progressive (web)

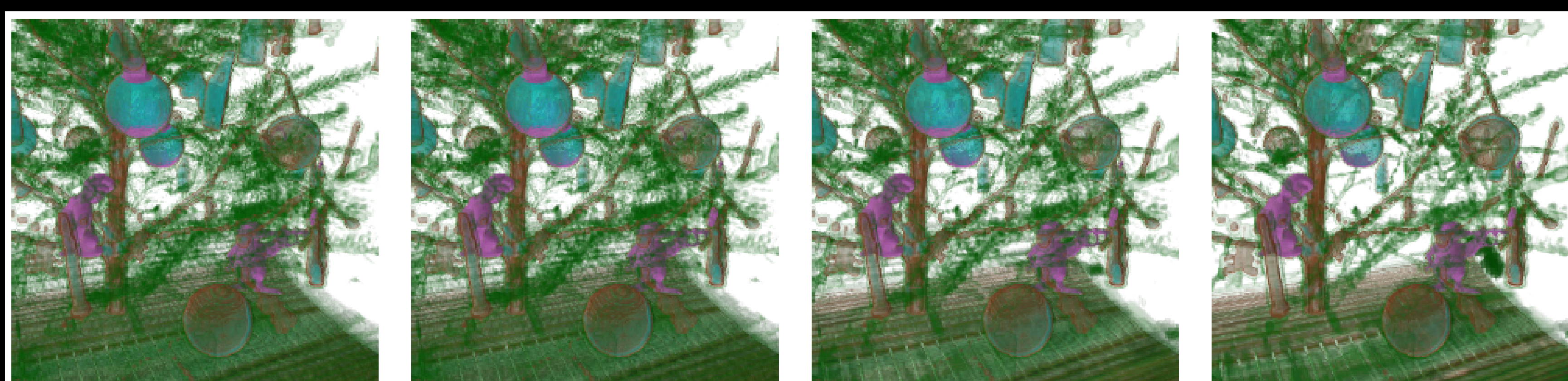


- *Level Of Detail* (LOD) ~ Multirésolution



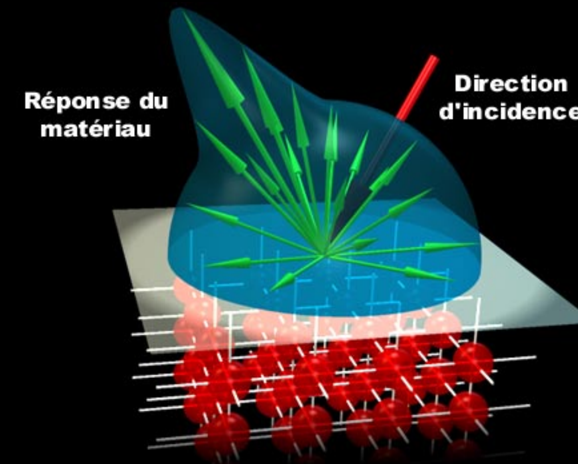
Rendu Volumique

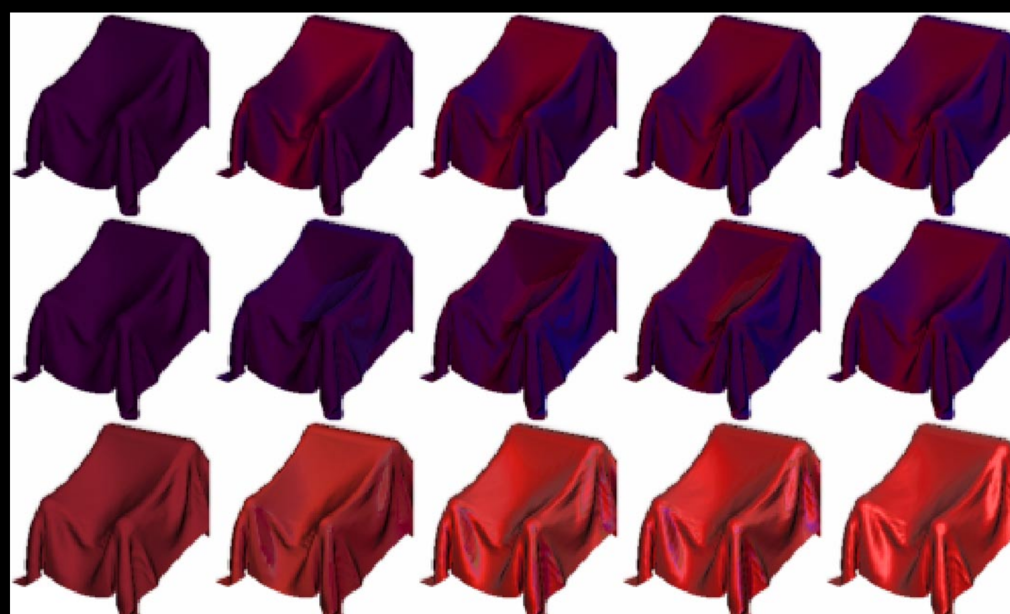
- Jeux de données très importants
  - place disque/mémoire (512^3 => au moins 128Mo)
  - LOD
  - coût d'affichage (software)



données originales | 8.8:1 – 3.3fps | 66:1 – 6.6fps | 195:1 – 9.5fps

- Compression de données physiques
  - Spectres
  - BRDFs
  - Emissions
- Optimise la résolution de l’équation du rendu
  - Inversion numérique rapide





Satin

Velours

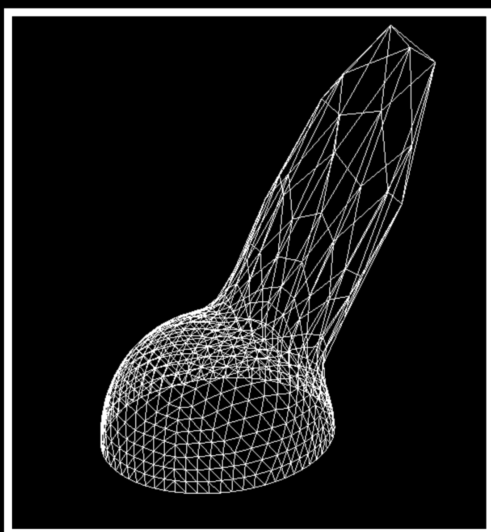
Spline

Haar

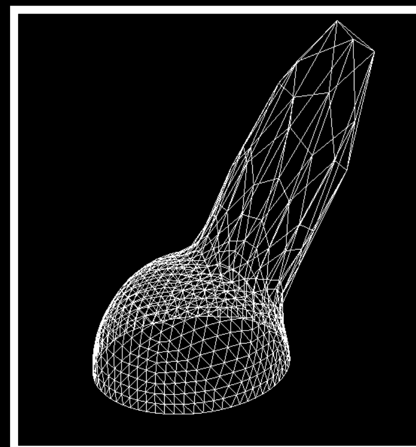
Spline

compression

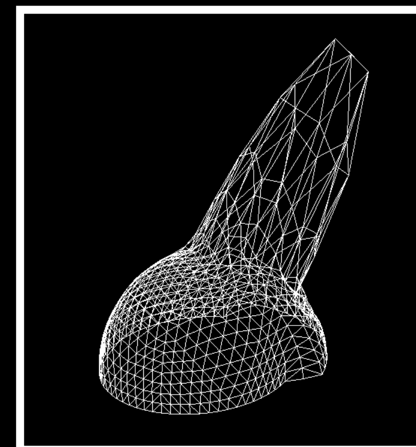
Rendu réaliste



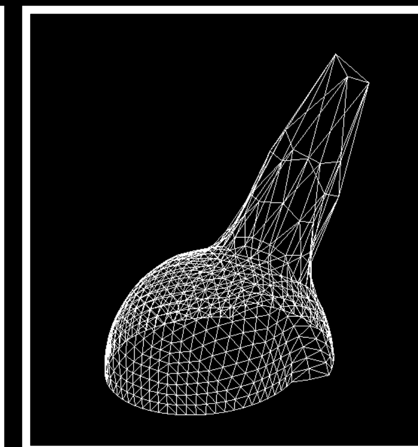
BRDF
originale



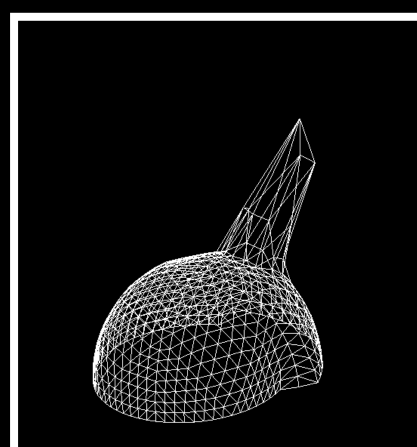
90%
0.0027



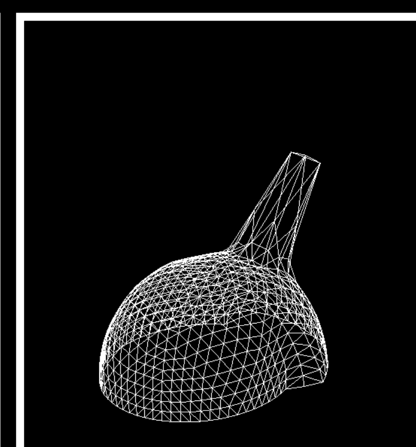
95%
0.016



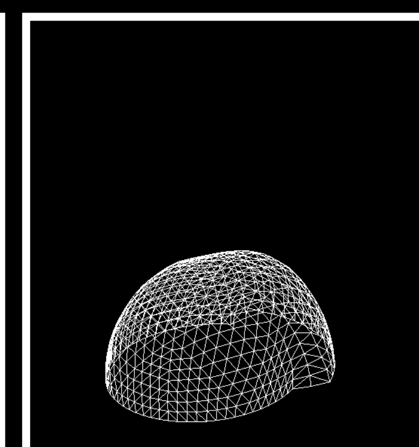
97%
0.021



98%
0.03



99%
0.037



100%
0.042

- Projection sur une base d'ondelettes
  - luminance
  - radiosité

That's all folk !

- Lire

  « Ten Lectures on Wavelets » , Ingrid Daubechies

  « A Wavelet Tour of Signal Processing » , Stéphane Mallat

  « Wavelets for Computer Graphics » , Eric J. Stollnitz

- Consulter

  http://www.wavelet.org

  http://www.ondelette.com

  http://www.amara.com/current/wavelet.html

  http://stat.stanford.edu/~wavelab

  http://www.multires.caltech.edu/

  http://www.cs.nyu.edu/cs/faculty/mallat/

  http://faculty.gvsu.edu/aboufade/web/dw.htm