

# Chapitre C-X

## Formulation relativiste de l'électromagnétisme.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site [joelsornette.fr](http://joelsornette.fr)

## RÉSUMÉ :

*L'objectif est de reformuler les grandeurs et lois de l'électromagnétisme dans le contexte quadridimensionnel de la mécanique relativiste, sans reprendre les démonstrations de la présentation classique.*

*On introduira donc les quadrivecteurs courant et potentiel, la matrice quadridimensionnelle antisymétrique du champ et celle symétrique de l'énergie-impulsion, les équations quadridimensionnelles traduisant la conservation de la charge, les équations de Maxwell, la condition de jauge de Lorentz, les équations de Poisson, la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.*

*On profite de l'occasion pour étudier la transformation du champ électromagnétique dans un changement de référentiel.*

# Table des matières

<b>C-X Formulation relativiste de l'électromagnétisme.</b>	<b>1</b>
1 Point de vue adopté. . . . .	4
2 Rappels. . . . .	4
2.a Transformation de Lorentz. . . . .	4
2.b Construction de quadrivecteurs. . . . .	5
2.c Remarques sur l'équation de propagation. . . . .	6
3 Charges et courants. . . . .	6
3.a Quadrivecteur courant. . . . .	6
3.b Conservation de la charge. . . . .	7
3.c Introduction à l'analyse vectorielle à quatre dimensions. . . . .	7
4 Force de Lorentz. . . . .	8
4.a Champ électromagnétique. . . . .	8
4.b Transformation du champ dans un changement de référentiel. . .	10
5 Première équation relativiste de Maxwell. . . . .	12
5.a Préalable mathématique. . . . .	12
5.b Application à l'électromagnétisme . . . . .	12
6 Quadrivecteur potentiel. . . . .	13
6.a Préalable mathématique. . . . .	13
6.b Application à l'électromagnétisme . . . . .	14
7 Seconde équation relativiste de Maxwell. . . . .	15
8 Tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique. . . . .	16

## 1 Point de vue adopté.

L'électromagnétisme a contribué à la naissance de la relativité restreinte et il est donc logique de reformuler ses lois dans un contexte quadridimensionnel. Les choses ne se font proprement que dans le cadre de l'algèbre tensorielle, elle-même fréquemment adaptée aux tenseurs antisymétriques (pour donner l'algèbre extérieure) ; mais on va essayer ici de présenter les choses comme elles viennent, sans prononcer les mots qui fâchent. Ceux qui connaissent ces théories mathématiques sauront comment aller plus loin à condition de lire la remarque suivante qui leur est spécialement destinée. J'espère toutefois, qu'à la fin de ce chapitre, le lecteur qui ne les connaît pas encore aura envie d'aller les explorer.

Remarque pour les grands initiés : Les choses ne se passent pas en fait toujours aussi simplement qu'on l'espère car là où l'on attend un tenseur contravariant, on trouve parfois le tenseur covariant associé. La métrique formelle adoptée ici, qui prend comme coordonnée temporelle non pas  $ct$  mais  $ict$ , a pour coefficients  $\delta_{ij}$  valant 1 si  $i = j$  et 0 sinon ; ainsi un tenseur contravariant et le tenseur covariant associé ont des composantes égales, ce qui permet de les confondre et de s'abstenir de jongler avec des indices en haut et en bas. Par ailleurs, nous n'emploierons pas ici la convention de sommation d'EINSTEIN.

## 2 Rappels.

### 2.a Transformation de Lorentz.

Ce chapitre ne peut être abordé sans avoir lu les chapitres relatifs à la mécanique relativiste. Toutefois, pour faciliter la lecture de celui-ci, on commence par rappeler, brièvement et sans démonstration, les résultats utiles de ceux-là.

Un événement est la donnée d'un point  $M$  par l'intermédiaire de  $\vec{M} = \overrightarrow{OM}$  et d'un instant  $t$  ; on lui associe un quadrivecteur noté <sup>1</sup>, dans ce cours,  $\vec{M} = (ict, \vec{M})$  de composantes  $x_0 = ict$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  et  $x_3 = z$ . La pseudo-norme définie par  $s^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  est invariante dans un changement de référentiel galiléen. Dans le changement de référentiel galiléen entre un référentiel  $Oxyz$  et un référentiel  $Ox'y'z't'$  mobile dans le premier avec un mouvement de translation à la vitesse  $\vec{V} = V\vec{e}_x$ , les coordonnées se transforment par l'intermédiaire d'une matrice, dite matrice de LORENTZ, dont il n'est pas utile à ce stade de donner l'expression.

Un volume élémentaire de cotés  $dx_0$ ,  $dy_0$  et  $dz_0$  dans le référentiel qui lui est lié et appelé référentiel propre, s'il est animé d'une vitesse  $\vec{v} = v\vec{e}_x$  par rapport au référentiel du laboratoire, a, dans celui-ci, pour cotés  $dx = dx_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ,  $dy = dy_0$  et  $dz = dz_0$ . Ce phénomène est connu sous le nom de « contraction des longueurs ».

Dans le même contexte, un phénomène élémentaire qui dure  $dt_0$  dans son référentiel

---

1. notation inspirée de celle de mon ami Louis C.

propre dure, dans le référentiel du laboratoire,  $dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ . Ce phénomène est connu sous le nom de « dilatation du temps ».

Conséquence : On remarque aisément que le quadrivolume élémentaire  $dx dy dz dt$  est invariant dans un changement de référentiel galiléen.

## 2.b Construction de quadrivecteurs.

Le quadrivecteur élémentaire  $\overleftarrow{dM} = (i c dt, \overrightarrow{dM})$ , différence de deux quadrivecteurs infiniment proches, en est un autre ; mais pas  $\frac{\overleftarrow{dM}}{dt}$  car  $dt$  dépend du référentiel. Par contre le temps propre  $dt_0$  a une signification intrinsèque et  $\frac{\overleftarrow{dM}}{dt_0}$  est un quadrivecteur, appelé quadrivecteur vitesse, noté  $\overleftarrow{v}$ . Grâce à la relation  $dt_0 = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  (cf supra), on a :

$$\overleftarrow{v} = \frac{\overleftarrow{dM}}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{(i c dt, \overrightarrow{dM})}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( i c, \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (i c, \overrightarrow{v})$$

dont on remarquera que le carré de pseudo-norme est constant et égal à  $\overleftarrow{v}^2 = -c^2$

On définit le quadrivecteur énergie-impulsion d'une masse ponctuelle de masse  $m$  par  $\overleftarrow{p} = m \overleftarrow{v}$  ; on note  $\overleftarrow{p} = (i \frac{E}{c}, \overrightarrow{p})$  d'où les expressions relativistes de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$\overrightarrow{p} = \frac{m \overrightarrow{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

et la remarque précédente sur la pseudo-norme de  $\overleftarrow{v}$  permet d'affirmer que  $E$  et  $\overrightarrow{p}$  sont liés par la relation :

$$E^2 + \overrightarrow{p}^2 = m^2 c^4$$

Avec la même philosophie que celle qui a présidé à la construction de  $\overleftarrow{v}$ , on définit le quadrivecteur force  $\overleftarrow{F}$  par :

$$\overleftarrow{F} = \frac{\overleftarrow{dp}}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{(i \frac{dE}{c}, d\overrightarrow{p})}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( i \frac{dE}{c} \frac{1}{dt}, \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( i \frac{\mathcal{P}}{c}, \overrightarrow{F} \right)$$

en définissant puissance et vitesse par  $\mathcal{P} = \frac{dE}{dt}$  et  $\overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt}$ . En différentiant la relation  $\overleftarrow{p}^2 = -m^2 c^2$ , on déduit que  $\overleftarrow{F} \cdot \overleftarrow{p} = 0$  d'où  $\frac{dE}{dt} = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}$  soit le résultat classique.

On retiendra :

$$\begin{cases} \overleftarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} (i c, \vec{v}) \\ \overleftarrow{p} = (i \frac{E}{c}, \vec{p}) \\ \overleftarrow{F} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} (i \frac{P}{c}, \vec{F}) \end{cases}$$

## 2.c Remarques sur l'équation de propagation.

L'équation de propagation :

$$\square f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

peut se réécrire de façon symétrique :

$$\square f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 0$$

Quant à ses solutions propagatives en  $\exp i [\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}]$ , elle se réécriront  $\exp \left[ -i \left( \overleftarrow{k} \cdot \overleftarrow{r} \right) \right]$

avec  $\overleftarrow{k} = (i \frac{\omega}{c}, \vec{k})$ , ce qui du reste permet d'établir aisément l'effet DOPPLER

## 3 Charges et courants.

### 3.a Quadrivecteur courant.

Soit une charge  $dq$  occupant un volume élémentaire  $dV = dx dy dz$  et animée d'une vitesse  $\vec{v}$ . On définit, de façon classique, la charge volumique  $\rho$  par  $dq = \rho dV = \rho dx dy dz$ . On l'étudie pendant un temps  $dt$  où elle se déplace de  $\overrightarrow{dM}$  associé au quadrivecteur  $d\overrightarrow{M} = (i c dt, \overrightarrow{dM})$ . Attention ! On veillera à ne pas confondre  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ , côtés du volume élémentaire, avec les composantes du déplacement élémentaire  $\overrightarrow{dM}$ . Par contre c'est le même  $dt$  qui intervient dans le déplacement et dans l'évolution du volume.

Par conservation de la masse  $dq = \rho dV$  est un invariant et l'on a vu plus haut que  $d\overrightarrow{M}$  d'une part,  $dV dt = dx dy dz dt$  d'autre part, en sont aussi. Si l'on multiplie les deux premiers et que l'on divise par la troisième, on obtient donc un nouvel invariant dont l'expression est :

$$\frac{dq d\overrightarrow{M}}{dV dt} = \frac{\rho dV (i c dt, \overrightarrow{dM})}{dV dt} = (i c \rho, \rho \vec{v})$$

On appelle cet invariant le quadrivecteur courant, noté  $\overleftarrow{j}$  et avec  $\vec{j} = \rho \vec{v}$ , on a :

$$\overleftarrow{j} = (i c \rho, \vec{j})$$

et l'on pourra noter ses composantes  $j_0 = i c \rho$ ,  $j_1 = j_x$ ,  $j_2 = j_y$  et  $j_3 = j_z$ .

Attention au piège :  $\overleftarrow{j}$  n'est pas lié à  $\overleftarrow{v} = \frac{d\overleftarrow{M}}{dt_0}$  mais à  $\frac{d\overleftarrow{M}}{dt}$  ; le facteur  $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  n'apparaît pas ; c'est le calcul ci-dessus qui l'affirme.

### 3.b Conservation de la charge.

La formulation classique  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$  va se reformuler ainsi

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{\partial(i c \rho)}{\partial(i c t)} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{\partial j_0}{\partial x_0} + \frac{\partial j_1}{\partial x_1} + \frac{\partial j_2}{\partial x_2} + \frac{\partial j_3}{\partial x_3}$$

qui fait apparaître une divergence quadridimensionnelle.

On écrira ici, pour éviter d'inventer de nouvelles notations :

$$\sum_{i=0}^{i=3} \frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0$$

### 3.c Introduction à l'analyse vectorielle à quatre dimensions.

Considérons un volume  $\Omega(t)$  de surface  $\Sigma(t)$  entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  ; on peut considérer cette donnée comme un hyper-volume  $\tilde{\Omega}$  à quatre dimensions, d'hyper-surface  $\tilde{\Sigma}$  à trois dimensions. Le théorème de GREEN-OSTROGRADSKI, appliqué au quadrivecteur  $\overleftarrow{j}$ , se généralise à quatre dimensions sous la forme :

$$\iiint \overleftarrow{j} \cdot d\tilde{\Sigma} = \int \iiint \sum_{i=0}^{i=3} \frac{\partial j_i}{\partial x_i} d\Omega dx_0$$

soit, ici, puisque la divergence quadridimensionnelle de  $\overleftarrow{j}$  est nulle :

$$\iiint \overleftarrow{j} \cdot d\tilde{\Sigma} = 0$$

résultat qu'il nous faut interpréter.

Une partie d'hypersurface est  $\Omega(t_2)$  à l'instant  $t_2$  qui est bien tri-dimensionnelle et que l'on découpera en petits morceaux ; comme elle est contenue dans l'hyper plan  $t = t_2$ , son hyper-vecteur surface est normal à cet hyper-plan donc parallèle à l'axe du temps, dirigé vers l'extérieur de l'intervalle  $[t_1, t_2]$  donc dans le sens des temps croissants. Le produit  $\overleftarrow{j} \cdot d\tilde{\Sigma}$  se résume alors à  $j_0 \Omega(t_2) \|\vec{e}_0\|$ . Il suffit d'éviter le piège de la définition de  $\vec{e}_0$  ; puisque de façon classique, on écrirait pour une durée élémentaire quelque chose comme

$\vec{dt} = dt \vec{e}_t$  qu'on doit identifier à  $d(ict) \vec{e}_0$  donc le produit  $\overleftarrow{j} \cdot \overleftarrow{d\tilde{\Sigma}}$  se résume alors à  $j_0 \Omega(t_2) \|\vec{e}_0\| = ic \rho \Omega(t_2) \frac{1}{ic}$ . Bref, après découpage et en travaillant à l'intuition<sup>2</sup>, une première partie de l'hyper-flux est :

$$\iiint_{\Omega(t_2)} \rho(M, t_2) d\Omega$$

où l'on reconnaît la charge  $Q_2$  de  $\Omega(t)$  à l'instant  $t_2$ .

Une autre partie d'hypersurface est  $\Omega(t_1)$  à l'instant  $t_1$  et l'on procède de même, à ceci près qu'en  $t_1$  l'extérieur de  $[t_1, t_2]$  est dans le sens des temps décroissants et l'hyper flux sera  $-Q_1$ , charge de  $\Omega(t)$  à l'instant  $t_1$  changée de signe.

Enfin, l'hyper-surface que l'on pourrait qualifier de latérale est la somme des surfaces  $\Sigma(t)$  pendant des intervalles  $dt$  découpées en éléments  $d\Sigma dt$  dont les vecteurs unitaires normaux sont orthogonaux à  $\vec{dt}$ , donc à l'axe du temps et donc contenus dans l'espace tridimensionnel et se confondent donc avec les vecteurs normaux classiques. Le produit  $\overleftarrow{j} \cdot \overleftarrow{d\tilde{\Sigma}}$  puisque le vecteur surface n'a pas de composantes dans la direction du temps s'identifie à  $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} dt$  et par sommation sur  $\Sigma(t)$  puis sur le temps, le troisième et dernier terme de l'hyper-flux est :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iint \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} = \int_{t_1}^{t_2} I(t)$$

où l'on a reconnu l'intensité qui sort de  $\Omega(t)$  à travers  $\Sigma(t)$ .

La somme des trois contributions à l'hyper-flux est nulle (cf supra), ce que l'on peut écrire :

$$Q_1 = Q_2 + \int_{t_1}^{t_2} I(t)$$

qui est bien une formulation naturelle de conservation : ce qui est au début est somme de ce qui reste à la fin et de ce qui est sorti.

Je ne chercherai pas à réitérer dans la suite du chapitre ce genre de présentation qui était là pour ouvrir des perspectives au lecteur curieux, à charge pour lui de les explorer.

## 4 Force de Lorentz.

### 4.a Champ électromagnétique.

Dans la présentation relativiste de l'électromagnétisme, l'interaction d'une charge  $q$  avec toutes les autres se traduit tout naturellement par un quadrivecteur force proportionnel à la charge et l'on note  $\overleftarrow{F} = q \overleftarrow{E}$ .

---

2. Je ne cherche pas ici la rigueur, mais cherche à faire sentir les choses à peu près naturellement.



Comme en électromagnétisme classique, le quadrivecteur force donc le quadrivecteur  $\overleftarrow{E}$  est lié à la vitesse de la charge, donc dans le formalisme relativiste à son quadrivecteur vitesse  $\overleftarrow{v}$  et nous postulons que c'est de la façon la plus simple possible à savoir une relation linéaire que nous noterons  $\overleftarrow{E} = (E) \overleftarrow{v}$  où  $(E)$  est une matrice  $4 \times 4$ .

On a rappelé plus haut que le quadrivecteur force  $\overleftarrow{F}$  égal ici à  $q \overleftarrow{E}$  est orthogonal au quadrivecteur  $\overleftarrow{p} = m \overleftarrow{v}$  donc, quelque soit  $\overleftarrow{v}$ , on a  $\overleftarrow{E} \cdot \overleftarrow{v} = 0$ . Si nous notons  $\overleftarrow{E} = (E) \overleftarrow{v}$  sous la forme  $E_i = \sum_{j=0}^{j=3} E_{ij} v_j$  et  $\overleftarrow{E} \cdot \overleftarrow{v} = \sum_{i=0}^{i=3} E_i v_i$ , on en déduit que, quelque soit  $\overleftarrow{v}$ , on a  $\sum_{i=0}^{i=3} \sum_{j=0}^{j=3} E_{ij} v_j v_i = 0$ .

Le cas particulier  $v_0 = 1$  et  $v_1 = v_2 = v_3 = 0$  conduit à  $E_{00} = 0$  et de même pour  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  et  $E_{33}$ ; l'autre cas particulier  $v_0 = v_1 = 1$  et  $v_2 = v_3 = 0$ , compte tenu des résultats du précédent, conduit à  $E_{01} + E_{10} = 0$  et analogues; la matrice  $(E)$  est donc antisymétrique.

En utilisant les expressions de  $\overleftarrow{F}$  et  $\overleftarrow{v}$  et après simplification par  $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ , on arrive en prenant une écriture de  $(E)$  qui tient compte<sup>3</sup> de l'antisymétrie :

$$\begin{pmatrix} \frac{i\mathcal{P}}{c} \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 0 & E_{01} & E_{02} & E_{03} \\ -E_{01} & 0 & E_{12} & -E_{31} \\ -E_{02} & -E_{12} & 0 & E_{23} \\ -E_{03} & E_{31} & -E_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

En développant les trois dernières lignes, on retrouve  $F_x = q(-i c E_{01} + E_{12} v_y - E_{31} v_z)$  et analogues et l'on retrouve l'expression de la force de LORENTZ  $\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$  sous réserve de noter :

$$\begin{cases} E_{01} = \frac{i}{c} E_x & E_{02} = \frac{i}{c} E_y & E_{03} = \frac{i}{c} E_z \\ E_{12} = B_z & E_{23} = B_y & E_{31} = B_x \end{cases}$$

Le développement sur la première ligne conduit alors à  $\mathcal{P} = q \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{v}$  soit  $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}$  car  $(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{v}$  est nul; c'est le résultat classique. Retenons donc l'expression de la matrice  $(E)$  :

$$(E) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{c} E_x & \frac{i}{c} E_y & \frac{i}{c} E_z \\ -\frac{i}{c} E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{i}{c} E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{i}{c} E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui définit, dans l'approche relativiste, le champ électromagnétique est une matrice  $4 \times 4$  antisymétrique; comme elle a six coefficients linéairement indépendants, il se conçoit que sa traduction classique s'exprime en deux vecteurs à trois composantes, mais on voit

---

3. non au hasard mais en ayant préparé le travail au brouillon !

ici pourquoi ces deux vecteurs résultent d'une entité unique qui est, de façon naturelle, cette matrice antisymétrique.

Remarque : avec un peu de connaissance d'algèbre tensorielle, on peut en déduire que deux grandeurs sont invariantes dans un changement de référentiel galiléen ; la première est :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{i=3} \sum_{j=0}^{j=3} E_{ij}^2 = \vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}$$

et la seconde  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  (c'est plus délicat, on admet ici).

#### 4.b Transformation du champ dans un changement de référentiel.

Dans un référentiel galiléen, le lien entre quadrivecteur force et le quadrivecteur vitesse s'écrit  $\overleftarrow{F} = q(E) \overleftarrow{v}$  où  $(E)$  est une matrice anti-symétrique et l'on vient d'établir le lien entre ses termes et les composantes des champs électrique et magnétique.

Dans un second référentiel galiléen se déplaçant en translation uniforme à la vitesse  $\vec{V} = V \vec{e}_x$ , le quadrivecteur vitesse de la charge devient  $\overleftarrow{v}'$  avec  $\overleftarrow{v} = (L) \overleftarrow{v}'$  et  $\overleftarrow{v}' = (L)^{-1} \overleftarrow{v}$  où  $(L)$  est la matrice de LORENTZ et  $(L)^{-1}$  l'inverse de la matrice de LORENTZ, en pratique sa transposée (voir chapitre de mécanique relativiste) ; le lien entre les expressions du quadrivecteur force est géré de la même façon.

On a donc :

$$\overleftarrow{F} = q(E) \overleftarrow{v}$$

d'où :

$$(L) \overleftarrow{F}' = q(E) (L) \overleftarrow{v}'$$

et enfin :

$$\overleftarrow{F}' = q(L)^{-1}(E)(L) \overleftarrow{v}'$$

qui doit s'identifier avec la relation  $\overleftarrow{F}' = q(E') \overleftarrow{v}'$  qui doit être valable dans le second référentiel ; la loi de transformation des champs s'écrit donc  $(E') = (L)^{-1}(E)(L)$ . C'est simple mais on aimerait aussi savoir ce que deviennent les expressions des champs électrique

et magnétique. Développons donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{c} E'_x & \frac{i}{c} E'_y & \frac{i}{c} E'_z \\ -\frac{i}{c} E'_x & 0 & B'_z & -B'_y \\ -\frac{i}{c} E'_y & -B'_z & 0 & B'_x \\ -\frac{i}{c} E'_z & B'_y & -B'_x & 0 \end{pmatrix} = \dots \\
\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & \frac{-i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{c} E_x & \frac{i}{c} E_y & \frac{i}{c} E_z \\ -\frac{i}{c} E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{i}{c} E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{i}{c} E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue le produit des trois matrices<sup>4</sup>, le détail des calculs importe peu et l'on trouve :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{c} E'_x & \frac{i}{c} E'_y & \frac{i}{c} E'_z \\ -\frac{i}{c} E'_x & 0 & B'_z & -B'_y \\ -\frac{i}{c} E'_y & -B'_z & 0 & B'_x \\ -\frac{i}{c} E'_z & B'_y & -B'_x & 0 \end{pmatrix} = \dots \\
\dots = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{c} E_x & \frac{i}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \left( \frac{E_y}{c} - \frac{V B_z}{c} \right) & \frac{i}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \left( \frac{E_z}{c} + \frac{V B_y}{c} \right) \\ -\frac{i}{c} E_x & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \left( B_z - \frac{V E_y}{c^2} \right) & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \left( -B_y - \frac{V E_z}{c^2} \right) \\ -\frac{i}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \left( \frac{E_y}{c} - \frac{V B_z}{c} \right) & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \left( -B_z + \frac{V E_y}{c^2} \right) & 0 & B_x \\ -\frac{i}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \left( \frac{E_z}{c} + \frac{V B_y}{c} \right) & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \left( B_y + \frac{V E_z}{c^2} \right) & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

d'où par identification terme à terme :

$$\begin{cases} E'_x = E_x & E'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} (E_y - V B_z) & E'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} (E_z + V B_y) \\ B'_x = B_x & B'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} (B_y + \frac{V E_z}{c^2}) & B'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} (B_z - \frac{V E_y}{c^2}) \end{cases}$$

---

4. à la main ou à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Le résultat classique a été détaillé dans le chapitre consacré à l'induction, au paragraphe 1.d, il donne  $\vec{B}' = \vec{B}$  et  $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}$  soit, avec  $\vec{V} = V \vec{e}_x$

$$\begin{cases} E'_x = E_x & E'_y = E_y - V B_z & E'_z = E_z + V B_y \\ B'_x = B_x & B'_y = B_y & B'_z = B_z \end{cases}$$

et l'on constate, comme d'habitude, qu'en faisant tendre  $c$  vers l'infini dans le résultat relativiste, on retrouve le résultat classique.

## 5 Première équation relativiste de Maxwell.

### 5.a Préalable mathématique.

Soit  $(M)$  une matrice antisymétrique de coefficients  $M_{ij}$  ; associons lui une entité à trois indices<sup>5</sup>  $N$  tel que pour tout triplet d'indice  $ijk$ , son coefficient soit :

$$N_{ijk} = \frac{\partial M_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_k}$$

On remarque très aisément que  $N_{ijk} = N_{jki} = N_{kij}$  et, à peine moins aisément, grâce à l'anti-symétrie de  $(M)$ , que

$$N_{ikj} = N_{jik} = N_{kji} = -N_{ijk} = -N_{jki} = -N_{kij}$$

Un corollaire en est que si deux indices sont égaux, le coefficient correspondant est nul, propriété classique d'une grandeur qui s'avère être anti-symétrique vis-à-vis de tout couple d'indices.

En quatre dimensions, il n'y a que quatre arrangements de trois indices deux à deux distincts donc quatre valeurs indépendantes, au signe près, pour les  $N_{ijk}$ .

Remarque : dans la théorie mathématique des « formes différentielles extérieures »,  $(N)$  est la « différentielle extérieure » de  $(M)$  et l'on note  $(N) = D(M)$ .

### 5.b Application à l'électromagnétisme

Appliquons ce qui précède à la matrice du champ électromagnétique  $(E)$ .

Pour le triplet d'indices 123 aux permutations près :

$$N_{123} = \frac{\partial E_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial E_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial E_{12}}{\partial x_3} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \text{div } \vec{B} = 0$$

---

5. un tenseur en fait.

où la toute dernière égalité résulte de la première équation de MAXWELL classique.

Pour le triplet d'indices 012 aux permutations près :

$$N_{012} = \frac{\partial E_{12}}{\partial x_0} + \frac{\partial E_{20}}{\partial x_1} + \frac{\partial E_{01}}{\partial x_2} = \frac{\partial B_z}{\partial(i\,c\,t)} - \frac{i}{c} \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{i}{c} \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{i}{c} \left[ \frac{\partial B_z}{\partial t} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \right]$$

et analogues pour  $N_{023}$  et  $N_{032}$ , soit en regroupant en un vecteur colonne :

$$\begin{pmatrix} N_{012} \\ N_{023} \\ N_{032} \end{pmatrix} = -\frac{i}{c} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot } \vec{E} \right) = \vec{0}$$

où la toute dernière égalité résulte de l'équation de MAXWELL-FARADAY.

Les deux premières lois de MAXWELL classiques se résument en une seule loi quadridimensionnelle :

$$\forall \{i, j, k\} \quad \frac{\partial E_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial E_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} = 0$$

ou, en introduisant la différentielle extérieure (cf supra),  $D(E) = 0$ .

## 6 Quadrivecteur potentiel.

### 6.a Préalable mathématique.

Soit un champ vectoriel de composantes  $A_i$  ; associons-lui une matrice  $(M)$  de coefficients :

$$M_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}$$

qui est manifestement antisymétrique. Associons-lui de plus la transformation précédente :

$$N_{ijk} = \frac{\partial M_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_k}$$

On alors, en utilisant trois fois le théorème de SCHWARZ sur les dérivées croisées :

$$N_{ijk} = \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 A_j}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 A_j}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k \partial x_j} = 0$$

Inversement, on peut démontrer une réciproque : si une matrice  $(M)$  antisymétrique est telle que les  $N_{ijk} = \frac{\partial M_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_k}$  sont identiquement nuls, alors il existe un champ vectoriel tel que  $M_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}$ .

Remarque : dans la théorie mathématique des « formes différentielles extérieures »,  $(M)$  est la « différentielle extérieure » de  $(A)$  (version passage de 1 à 2 indices) et l'on note  $(M) = D(A)$  et  $(N)$  est la « différentielle extérieure » de  $(M)$  (version passage de 2 à 3 indices) et l'on note  $(N) = D(M) = DD(A) = 0$  qui est un théorème important de cette théorie : l'application successive de deux fois la différentielle extérieure conduit à un résultat nul, avec la réciproque suivante : si  $D(M) = 0$  alors il existe  $(A)$  tel que  $(M) = D(A)$ .

## 6.b Application à l'électromagnétisme

On vient de monter que :

$$N_{ijk} = \frac{\partial E_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial E_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} = 0$$

donc il existe un champ vectoriel tel que  $E_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}$  (formule qui généralise  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ ), ce qui donne, après exploitation de l'antisymétrie, six relations ; les trois premières sont :

$$E_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x_0} - \frac{\partial A_0}{\partial x_1} \quad \text{soit} \quad \frac{i}{c} E_x = \frac{\partial A_1}{\partial (i c t)} - \frac{\partial A_0}{\partial x}$$

et deux analogues que l'on regroupe, dans une présentation vectorielle, successivement en :

$$\frac{i}{c} \vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial (i c t)} - \text{grad } A_0$$

où  $\vec{A}$  est le vecteur à trois dimensions de composantes  $A_1, A_2$  et  $A_3$ , soit encore :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + i c \text{ grad } A_0$$

que l'on identifie avec la relation classique  $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  à condition d'identifier  $A_0$  à  $\frac{iV}{c}$  et  $\vec{A}$  (notation provisoire) à...  $\vec{A}$  (potentiel vecteur).

Les trois dernières relations sont :

$$E_{23} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \quad \text{soit} \quad B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

et deux analogues que l'on regroupe vectoriellement en la relation classique  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  ;

Cette approche quadridimensionnelle fait donc apparaître un quadrivecteur potentiel  $\vec{\bar{A}}$ , par nature une entité unique électromagnétique regroupant les deux potentiels classiques, d'expression  $\vec{\bar{A}} = (\frac{iV}{c}, \vec{A})$ .

Remarque : la condition de jauge de LORENTZ  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$  va s'écrire ici

$$0 = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \left(\frac{iV}{c}\right)}{\partial (i c t)} = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

où l'on retrouve (cf supra la conservation de la charge) une divergence quadridimensionnelle.

Remarque : les équations de POISSON, en présentation quadrivectorielle et en projetant l'équation vectorielle, sont

$$\begin{aligned} \square V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \\ \square A_1 + \mu_0 j_1 &= \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_3^2} + \mu_0 j_1 = 0 \\ \square A_2 + \mu_0 j_2 &= \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_3^2} + \mu_0 j_2 = 0 \\ \square A_3 + \mu_0 j_3 &= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_3^2} + \mu_0 j_3 = 0 \end{aligned}$$

multiplions la première pour faire apparaître  $A_0 = \frac{i}{c} V$ , elle devient successivement, grâce à  $j_0 = i c \rho$  et  $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$  :

$$\begin{aligned} \square A_0 + \frac{i \rho}{\varepsilon_0 c} &= \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_3^2} + \frac{i \rho}{\varepsilon_0 c} = 0 \\ \square A_0 + \frac{j_0}{\varepsilon_0 c^2} &= \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_3^2} + \frac{j_0}{\varepsilon_0 c^2} = 0 \\ \square A_0 + \mu_0 j_0 &= \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_3^2} + \mu_0 j_0 = 0 \end{aligned}$$

et l'on peut donc écrire :

$$\forall i \in [0, 3] \quad \mu_0 j_i + \sum_{k=0}^3 \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2} = 0$$

où encore

$$\square \overleftarrow{A} + \mu_0 \overleftarrow{j} = \overleftarrow{0}$$

## 7 Seconde équation relativiste de Maxwell.

Considérons à partir de la matrice du champ électromagnétique de coefficients  $E_{ij}$  le quadrivecteur<sup>6</sup>, noté provisoirement  $\overleftarrow{W}$ , de composantes  $W_j = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_i}$  (qui est, dans

---

6. En algèbre tensorielle, c'est le contracté du tenseur  $\frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k}$  sur les indices  $i$  et  $k$

le chapitre précédent, appelé, de façon personnelle, la divergence de la matrice et noté, en passant à quatre dimensions,  $\overleftarrow{W} = \text{div}(\overleftarrow{E})$ .

Pour l'indice  $j = 0$ , on a, en remarquant que  $E_{00} = 0$  :

$$W_0 = \frac{i}{c} \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \frac{i}{c} \text{div} \overrightarrow{E} = \frac{i \rho}{\varepsilon_0 c} = i \mu_0 c \rho = \mu_0 j_0$$

en utilisant l'équation de MAXWELL-GAUSS, la relation  $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$  et la définition du quadrivecteur courant et de sa première composante.

Pour l'indice 1, on a :

$$W_1 = \frac{\partial(-\frac{i}{c} E_x)}{\partial i c t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}$$

et analogues que l'on regroupera aisément, avec  $\overrightarrow{W}$  le vecteur tri-dimensionnel de composantes  $W_1$ ,  $W_2$  et  $W_3$ , en :

$$\overrightarrow{W} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} + \text{rot} \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$$

en utilisant l'équation de MAXWELL-AMPÈRE.

Sous forme quadrivectorielle, on a donc  $\overleftarrow{W} = \mu_0 \overleftarrow{j}$  (ou  $\text{div}(\overleftarrow{E}) = \mu_0 \overleftarrow{j}$ ), ce qui regroupe deux équations classiques en une.

## 8 Tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique.

On a vu dans le chapitre consacré aux équations de MAXWELL que la conservation de l'énergie s'écrit, en ajoutant ici un indice 0 :

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + \text{div} \overrightarrow{\Pi}_0 + \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} = 0$$

où  $u_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \overrightarrow{E}^2 + \frac{1}{2 \mu_0} \overrightarrow{B}^2$  est la densité volumique d'énergie et  $\overrightarrow{\Pi}_0 = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}$  le vecteur de POYNTING.

On peut introduire y une divergence quadridimensionnelle en reformulant ainsi :

$$\frac{\partial(i c u_0)}{\partial(i c t)} + \frac{\partial \Pi_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{0y}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{0z}}{\partial z} + \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} = 0 = 0$$

et puisque  $\overleftarrow{j} = (i c \rho, \overrightarrow{j})$  et que la première ligne de la matrice  $(E)$  est  $(0, \frac{i}{c} \overrightarrow{E})$ , on a, en notant  $x_0 = i c t$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  et  $x_3 = z$  :

$$\sum_{k=0}^{k=3} \frac{\partial \Pi_{0k}}{\partial x_k} - \sum_{k=0}^{k=3} i c j_k E_{0k} = 0$$



où, par la force des choses, on a  $\Pi_{00} = i c u_0$

Maintenons cela au chaud.

De la même façon, la conservation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{div}(\Pi) + \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{E} = 0$$

où  $\vec{u} = \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$  et la densité volumique de quantité de mouvement et  $(\Pi)$  une matrice  $3 \times 3$  (dont on définit la divergence de façon formelle) dont l'expression est complexe.

En projection sur  $x = x_1$  et grâce à l'expression des coefficients de la matrice  $(E)$ , les derniers termes donnent :

$$\rho E_x + j_y B_z - j_z B_y = (i c \rho) \left( -\frac{i E_x}{c} \right) + j_x \cdot 0 + j_y B_z - j_z B_y = \sum_{k=0}^{k=3} j_k E_{1k}$$

et, en notant, comme pour l'énergie  $\Pi_{x0} = i c u_x$  et analogues, la conservation s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{k=3} \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + \sum_{k=0}^{k=3} j_k E_{ik} = 0$$

pour  $i = 1, i = 2$  et  $i = 3$ , ce qui amène à multiplier par  $\frac{i}{c}$  de la loi établie plus haut avec l'indice 0 (conservation de l'énergie) pour une analogie parfaite, d'où  $\Pi_{00} = i c u_0$  devient  $\Pi_{00} = -u_0$  et le vecteur de POYNTING  $\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$  et remplacé par  $\frac{i}{c} \mu_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$ .

Remarquons que le vecteur  $i c \vec{u}$ , déduit de la densité volumique de quantité de mouvement, que l'on a introduit ci-dessus par ses composantes, s'écrit  $i \varepsilon_0 c \vec{E} \wedge \vec{B}$ , égale au remplaçant du vecteur de POYNTING que l'on vient de calculer, puisque  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ .

Résumons, on peut construire une matrice  $4 \times 4$  construite par blocs :

$$(\tilde{\Pi}) = \begin{pmatrix} -u_0 & \vdots & i \varepsilon_0 c \vec{E} \wedge \vec{B} \\ \dots & & \dots \\ i \varepsilon_0 c \vec{E} \wedge \vec{B} & \vdots & (\Pi) \end{pmatrix}$$

où l'on a pas reporté l'expression de  $u_0$  ni celle de la matrice  $(3 \times 3)$  notée  $(\Pi)$ . Les deux occurrences de  $i \varepsilon_0 c \vec{E} \wedge \vec{B}$  sont écrites une fois en vecteur ligne et une fois en vecteur colonne. Comme  $(\Pi)$  est une matrice symétrique, on voit qu'il en est de même pour  $(\tilde{\Pi})$ .

Désormais la loi de conservation d'énergie et de quantité de mouvement (ou impulsion) s'écrit globalement et de façon quadrivectorielle

$$\forall i \in [0, 3] \quad \sum_{k=0}^{k=3} \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + \sum_{k=0}^{k=3} j_k E_{ik} = 0$$

ou encore, avec les notations du chapitre précédent, adapté aux quatre dimensions :

$$\overleftarrow{\text{div}}(\tilde{H}) + (E)\overleftarrow{j} = \overleftarrow{0}$$

avec  $(E)\overleftarrow{j}$  considéré comme produit matriciel de  $(E)$  et du vecteur colonne  $\overleftarrow{j}$ .

Cette matrice  $(\tilde{H})$  est appelé tenseur énergie-impulsion électromagnétique.

Remarque : la trace de cette matrice (somme de quatre coefficients diagonaux) est nulle, ce qui est aisé à vérifier en allant rechercher l'expression de  $(H)$  dans le chapitre précédent.