



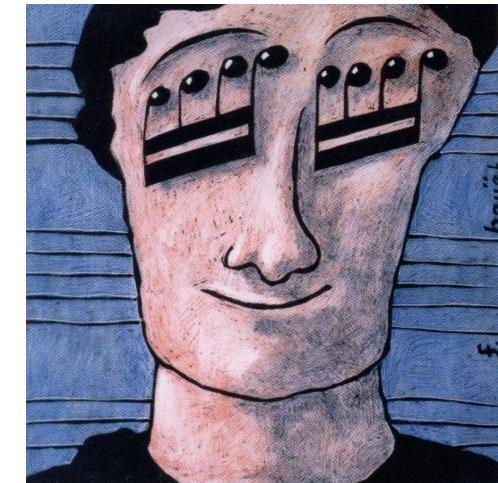
$$(3/2)^{12} \approx 2^7$$

La musique : quelle complexité?

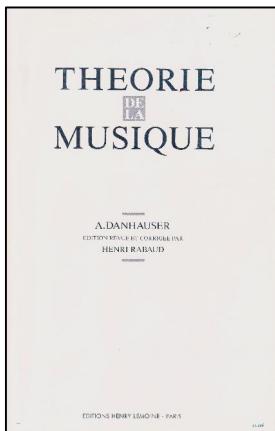
Introduction

2. Une évolution pluri millénaire
3. De Pythagore à Messiaen et Schoenberg en passant par Zarlino
4. Mathématiciens et Musique
5. Vous avez dit complexité?
6. Exemple: le jazz

Philippe Picard, le 7 octobre 2013



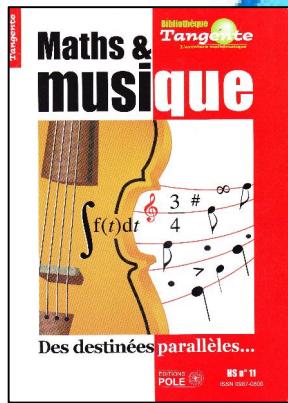
Quelques sources



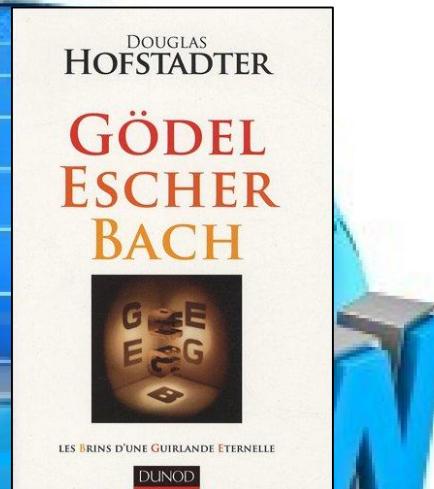
Solfège
1929

Algèbre et
informatique
1968

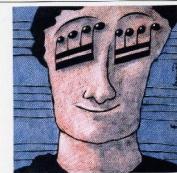
Vulgarisation
2005



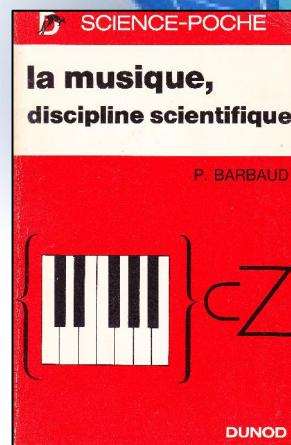
Grand
classique
1985



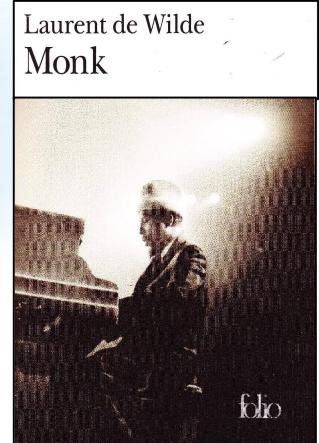
Pierre Lemarquis
Sérénade pour
un cerveau musicien



Cerveau et
musique
2013



Jazz
1996

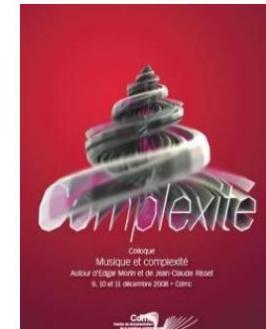


Quelques sources

Colloque

Musique et Complexité

AUTOUR D'EDGAR MORIN ET JEAN-CLAUDE RISSET



- Emergence et musique, **Geoffroy Drouin**, compositeur, chercheur EHESS
- Musique contemporaine et complexité de Kolmogorov, par **Patrick Loiseleur**, compositeur et ingénieur
- Complexité grammatical et complexité aperceptive en musique, **Fabien Lévy**, thèse EHSS
- Complexity and Music Generation, **Adrian Johnson**, The MITRE Corporation
- Modélisation du style musical par apprentissage statistique : une application de la théorie de l'information à la musique, **Olivier Lartillot**, Université Pierre et Marie Curie , Paris VI
- Musique algorithmique , Théories de la composition musicale au xx^e siècle, **Andreatta Moreno**
- Aspects mathématiques et cognitifs de la modélisation des structures Musicales, **Marc Chemillier**, Université Paris 7

Qu'est ce que la musique ?

■ Larousse

- **Art qui permet à l'homme de s'exprimer par l'intermédiaire des sons.**
- **Science des sons considérés sous le rapport de la mélodie et du rythme.**

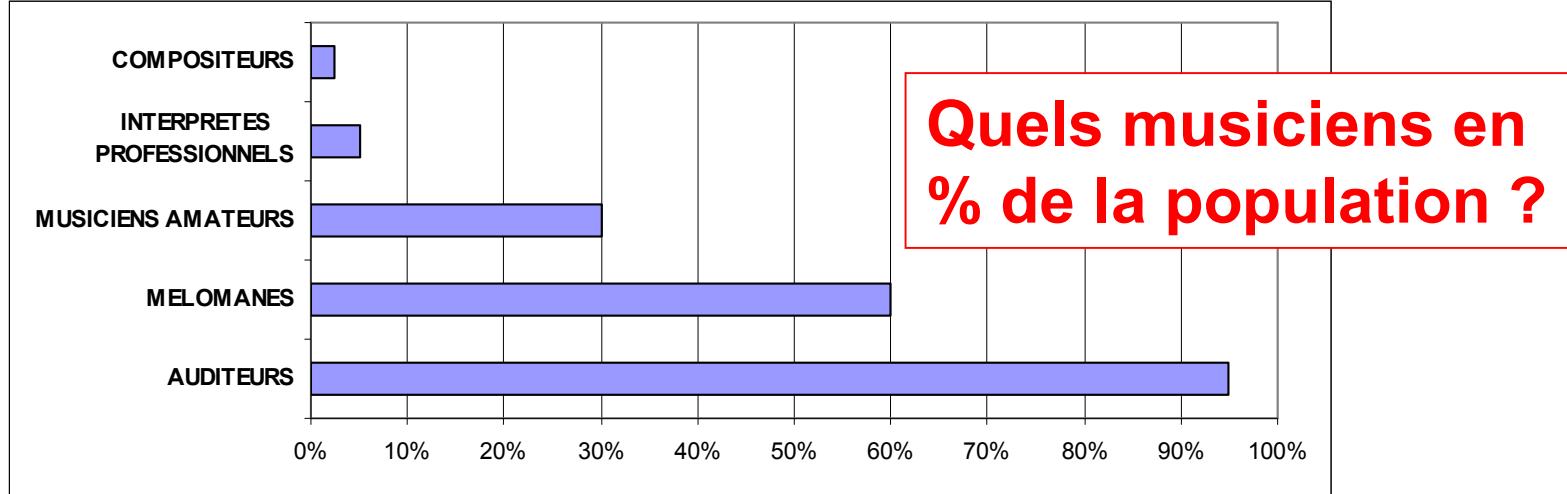
■ Oxford

- **Art ou science de combiner les sons de la voix ou des instruments en visant la beauté ou la cohérence formelle et l'expression des émotions.**

Qu'est ce que la musique ?

- **Un art, procurant de l'émotion et du plaisir**
- **Un langage, sa grammaire, sa syntaxe, sa notation**
- **Une discipline rigoureuse et d'apprentissage difficile, à la fois intellectuelle et gestuelle**
- **Une discipline scientifique et son algorithme**
- **Une technologie: mécanique, pneumatique, électrique, électronique, informatique...**
- **Une mystique et un accompagnement religieux**
- **Un outil social: défilés militaires, charges de cavalerie, manifestations, etc...**
- **Une thérapie**
- **Un secteur économique important**

Les musiciens et la musique



Musiciens éduqués et entraînés

Auditeurs, mélomanes

Théorie

Vocabulaire et Grammaire

Composition

interprétation

Ecoute, émotions

Improvisation

Domaine intemporel

Contrainte temporelle

Où est la complexité de la musique ?

- La perception de la complexité de la musique dépend de la relation de chaque individu avec la musique :
 - Emotions
 - Cognition et interaction avec le cerveau
 - Chaîne d'audition et d'acquisition
 - Exécution et coordination multicanaux
 - Acoustique
 - Physique des vibrations
 - Mathématiques
 - Computational et algorithmique
 - Emergence: du bruit à la musique

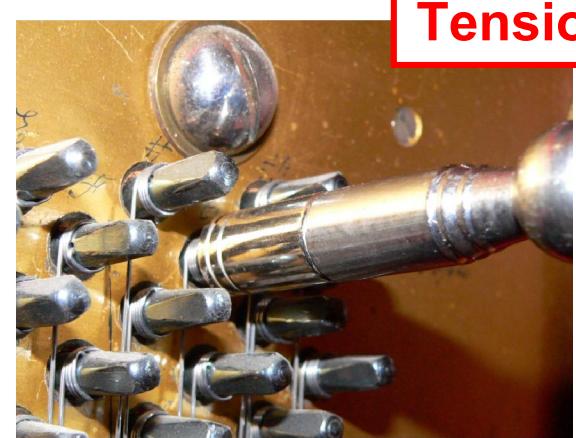
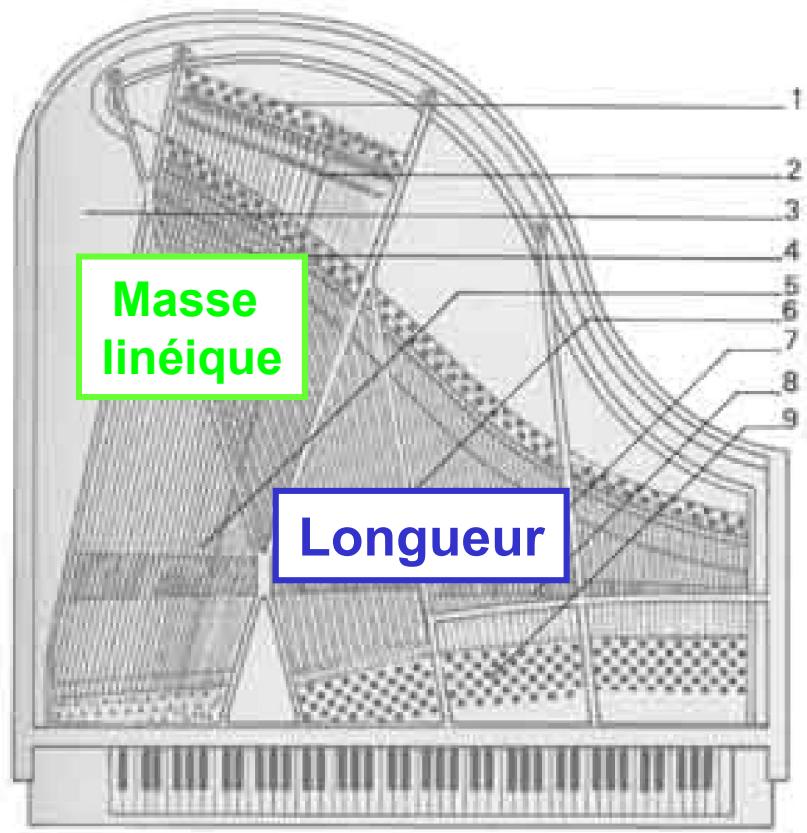
Rappel: cordes vibrantes

La fréquence f d'une corde vibrante dépend de 3 paramètres :

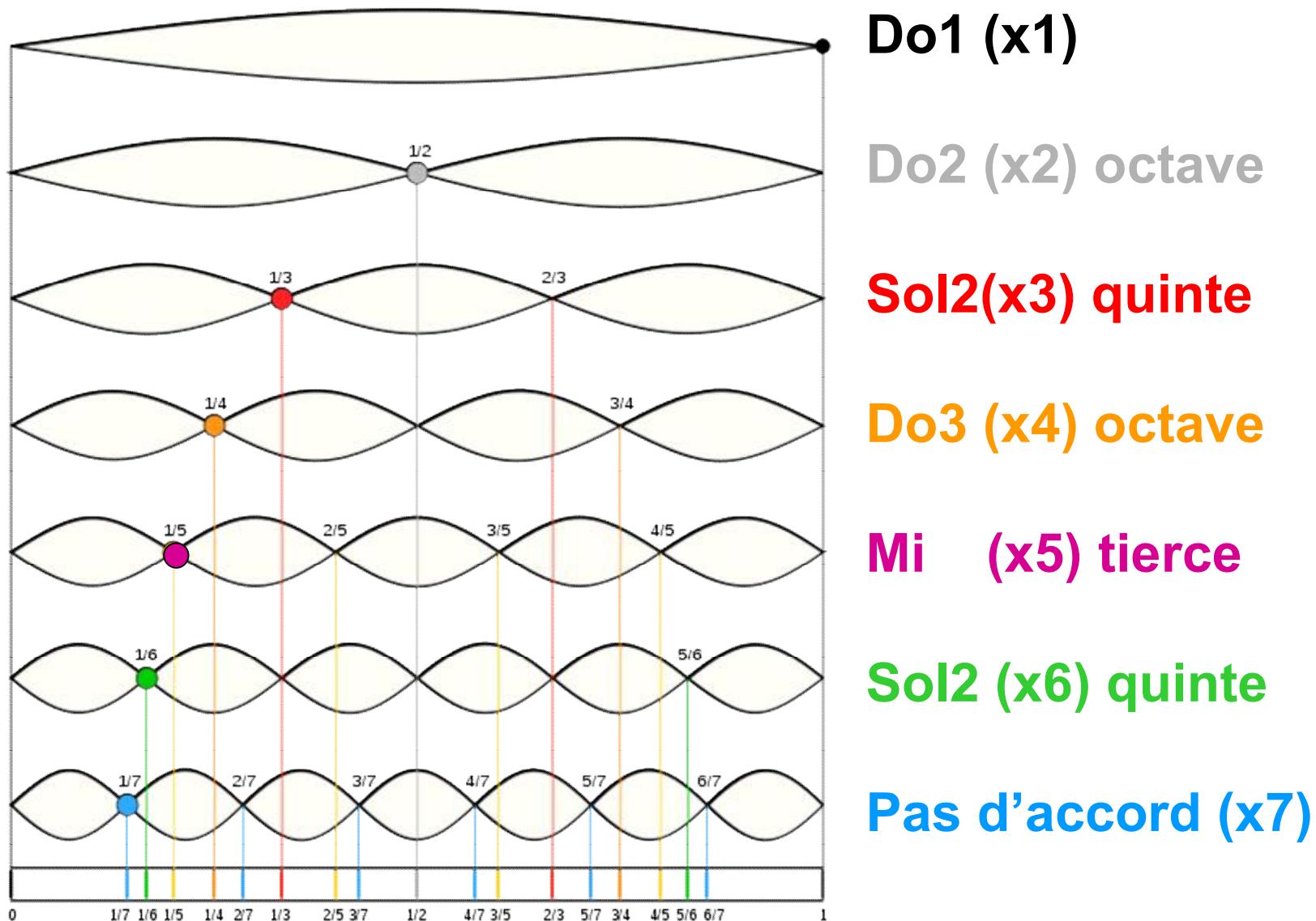
- L, la longueur
- T, la tension
- μ , la masse linéique

$$f_n = n \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

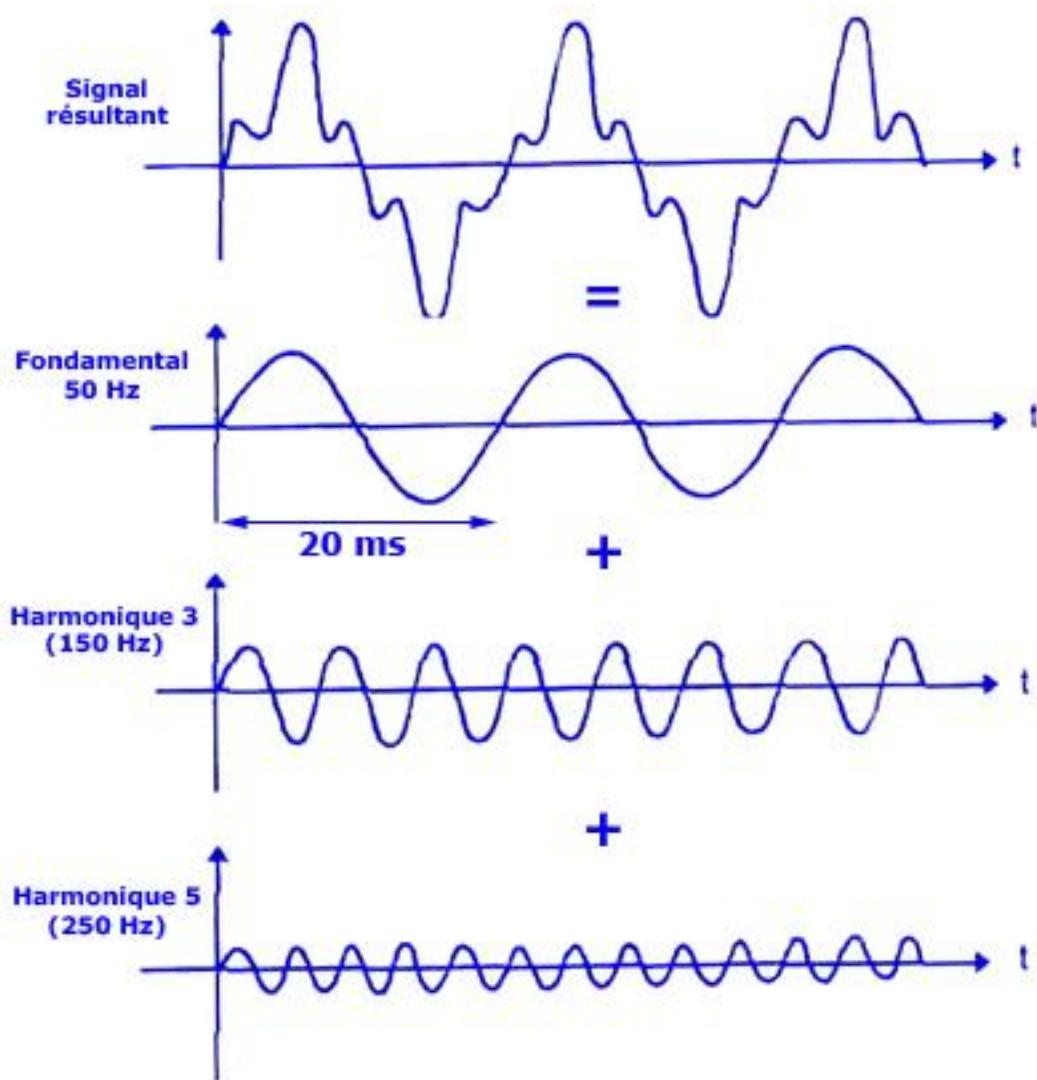
n est le n° d'harmonique



Rappel: fabrication des notes



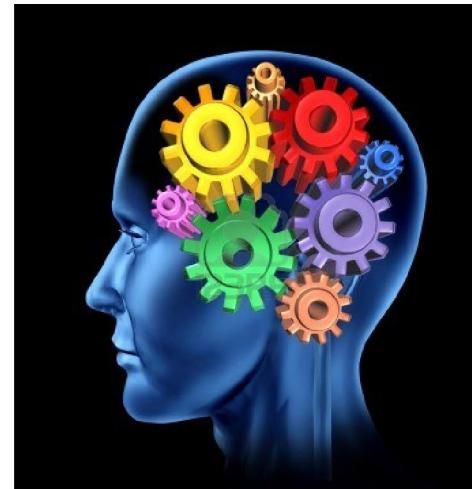
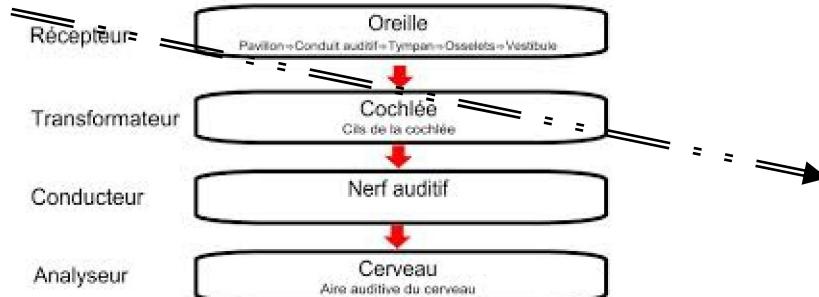
Rappel: harmoniques



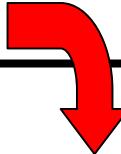
- La proximité de deux fréquences se traduit par un petit **PPCM**
- L'addition de fréquences en rapport simple donne des sons agréables dits **harmoniques**
- L'addition de fréquences très voisines donne des sons désagréables, les **battements**

PPCM: Plus Petit Commun Multiple

Interaction entre cerveau et acoustique



Chaîne complexe de l'acquisition du son, de l'oreille au cerveau



- **Sensibilité aux phénomènes acoustiques:**
 - Hauteur
 - Timbre, harmoniques, battements
 - Intensité
 - Durée et attaque, transitoires

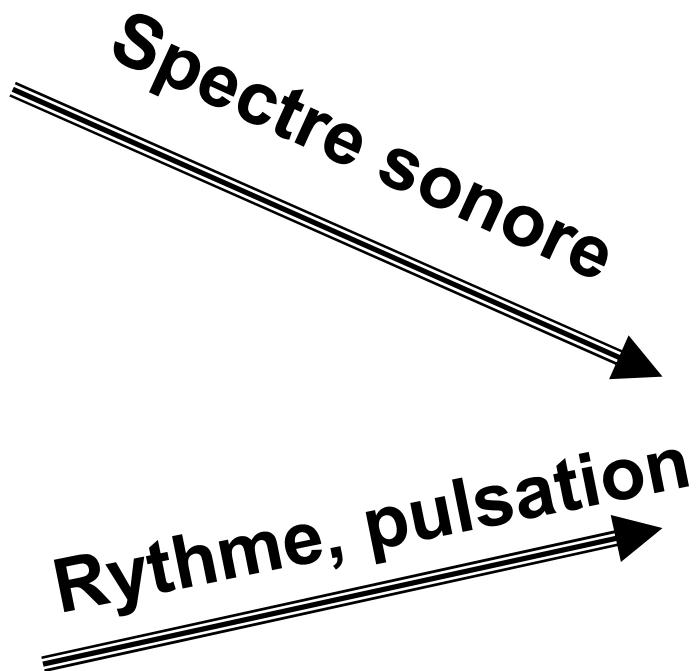
Musique: deux dimensions indissociables



Fréquences audibles,
résonnances
naturelles: cordes,
tuyaux



rythme cardiaque,
marche

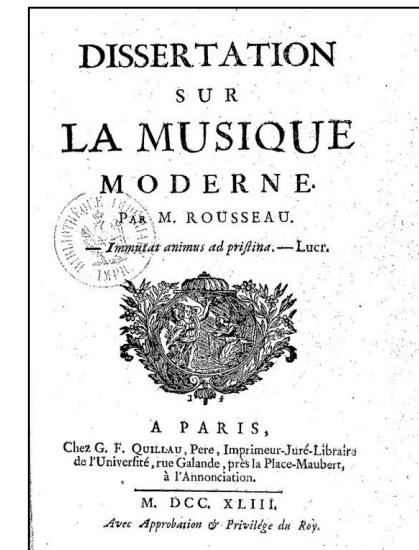


sons
organisés
en musique

Musique et langage: similarités

- La parole et l'exécution musicale instrumentale doivent s'apprendre très jeune
- A l'origine, le langage et la musique (le chant) ont été de tradition orale, avec la même chaîne complexe de transmission sonore, de cognition et d'apprentissage
- Crédit progressive de notation écrite pour la mémorisation: notation analogique (hiéroglyphes), puis analytique pour le langage
- Evolution similaire pour la musique mais beaucoup plus tardive

J.J. Rousseau: "Essai sur l'origine des langues, ou il est parlé de la mélodie et de l'imitation musicale"



Rythme: ~~génétique~~ ou culturel ?



Leçon de djembé au Mali



Gamelan balinais

Les cultures rythmiques de la musique occidentale populaire sont **rudimentaires** par rapport à de nombreuses autres musiques du monde: africaine, arabe, indonésienne, etc.
Plusieurs itinéraires d'apprentissage: à l'oreille, avec solfège, etc.



Fanfare municipale

La musique : quelle complexité?

- 1.** Introduction



Une évolution pluri millénaire

- 3.** De Pythagore à Messiaen et Schoenberg en passant par Zarlino
- 4.** Mathématiciens et Musique
- 5.** Vous avez dit complexité?
- 6.** Exemple: le jazz

Musique préhistorique



A l'origine, musique, danse et poésie étaient sans doute confondues, sur la base d'un son rythmé. Des indices probables de plus de 40 000 ans existent.

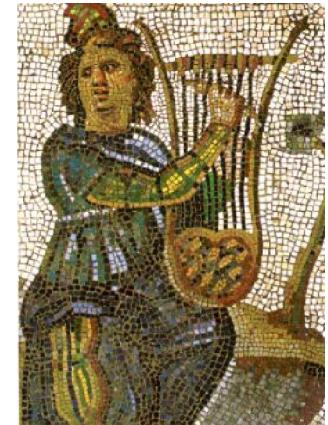
Des démarches universelles



Egypte



Grèce



Rome



Chine

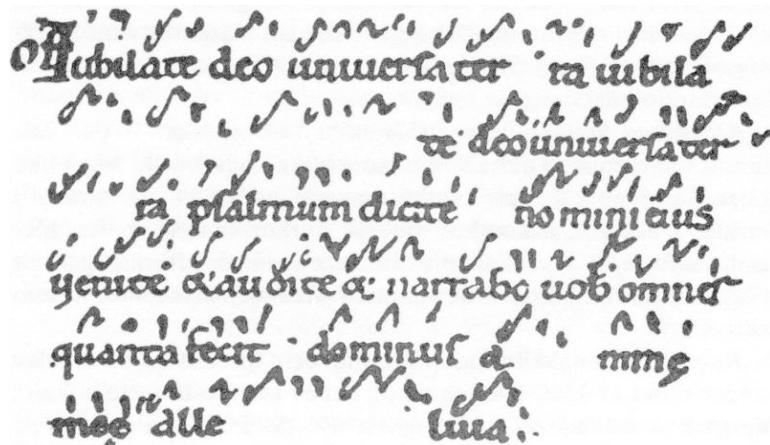
Toutes les civilisations ont générés des systèmes musicaux découlant des mêmes principes de base, physique des sons et propriétés du cerveau



Afrique

Notation musicale: une longue gestation

Neumes, IXème siècle



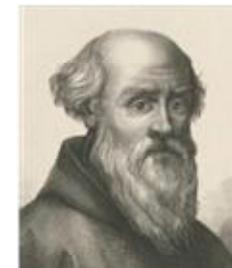
Solmisation

Ut queant laxis	C
Re sonare fibris	D
Mir a gestorum	E
Fam uli tuorum	F
Solv e polluti	G
Lab ii reatum	A

Ut qué-ant láxis re-soná-re fibris

Mí-ra gestó-rum fámu-li tu-ó-rum.

Sól-ve pollú-ti lábi- i re-á-tum, Sáncte Jo-ánnes.



Guido d'Arezzo (990-1033): portées

Francon de Cologne (1210-1270): durée

Notation musicale: une longue gestation

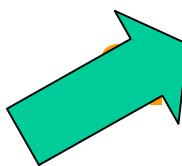
■ Les deux dimensions de la notation musicale actuelle:

- Rythme parfaitement mathématisé :
 - Découpage binaire et tertiaire
 - Symbolique claire pour la structure des mesures
- Hauteur des sons avec 5 portées et altérations : système consacré par l'habitude mais discutable (*)

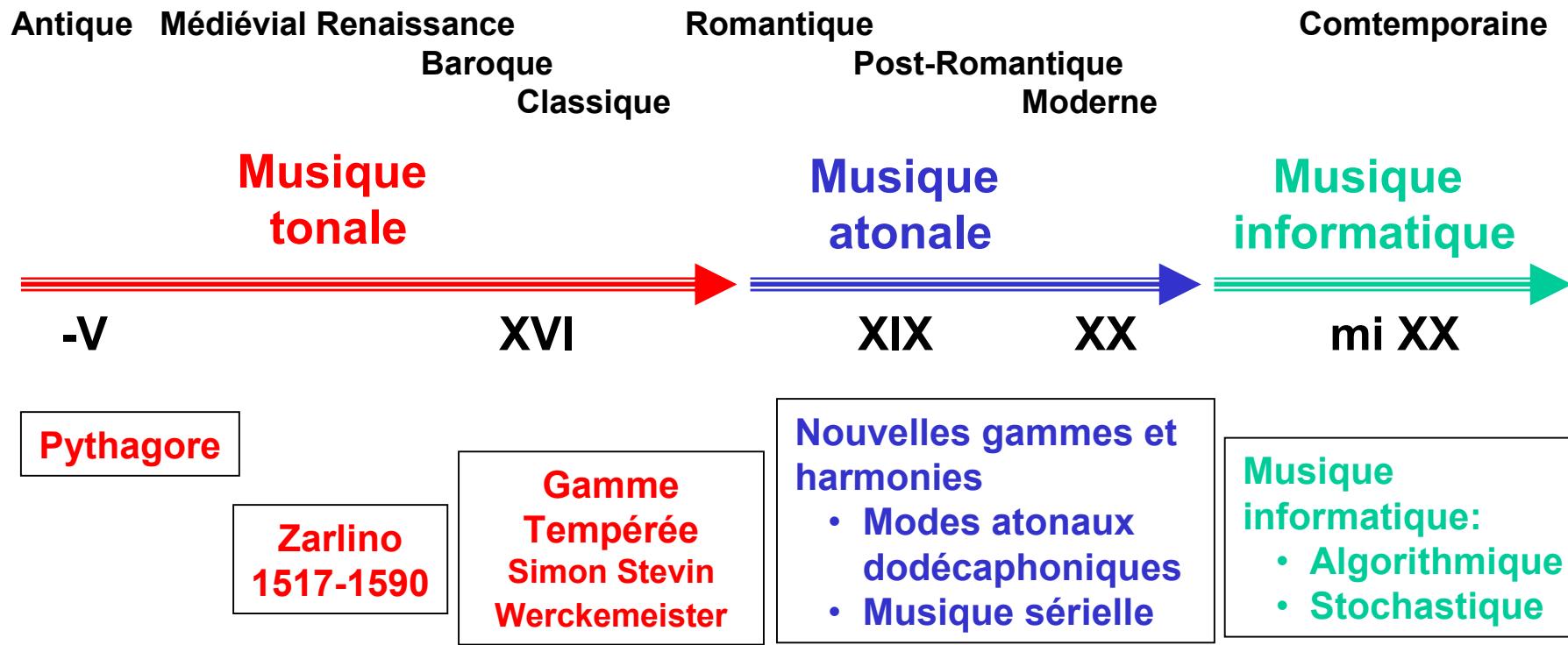
■ Multiples notations informatiques (midi)

(*) Voir critiques de J.J. Rousseau

La musique : quelle complexité?

- 1. Introduction**
- 2. Une évolution millénaire**
**De Pythagore à Messiaen et Schoenberg en passant par Zarlino**
- 4. Mathématiciens et Musique**
- 5. Vous avez dit complexité?**
- 6. Exemple: le jazz**

Les grandes périodes conceptuelles de la musique occidentale



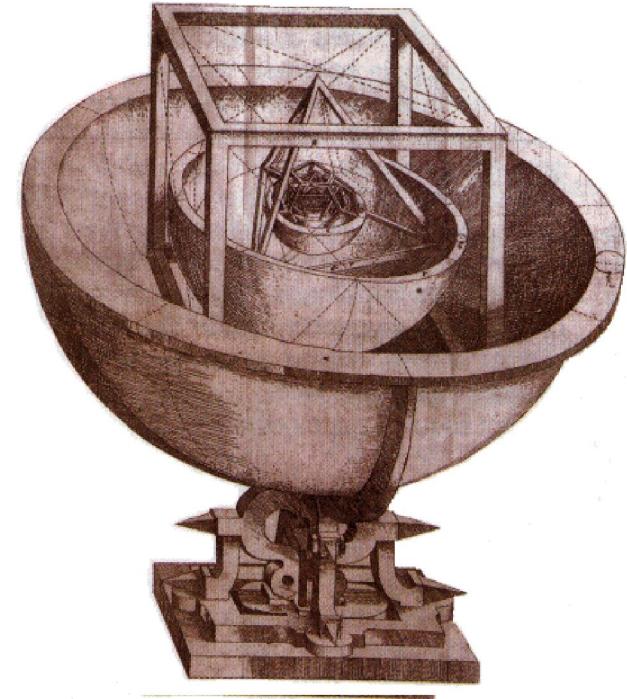
L'instrumentation musicale a suivi cette évolution.

L'orgue et le piano forte (5000 pièces) sont les instruments mécaniques parmi les plus compliqués.

L'électronique et l'informatique ont révolutionné l'instrumentation.

Pythagore et la musique

- Selon la légende, convergence de trois démarches:
 1. **Mystique des nombres et musique des sphères**
 2. **Math et physique**
 3. **Agrément des sons**
- Démarche encore reprise par Kepler (mélodie des planètes)



Lune	Mercure	Vénus	Soleil	Mars	Jupiter	Saturne
ré	do	si	la	sol	fa	mi

Gammes par quintes (Pythagore)

Grèce antique, Moyen âge, Chine, Indonésie,...

$\times \frac{3}{2}$							
Fa	Do	Sol	Ré	La	Mi	Si	
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2})^2$	$(\frac{3}{2})^3$	$(\frac{3}{2})^4$	$(\frac{3}{2})^5$	
$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2})^2/2$	$(\frac{3}{2})^3/2$	$(\frac{3}{2})^4/4$	$(\frac{3}{2})^5/4$	
			$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{3^5}{2^7}$	

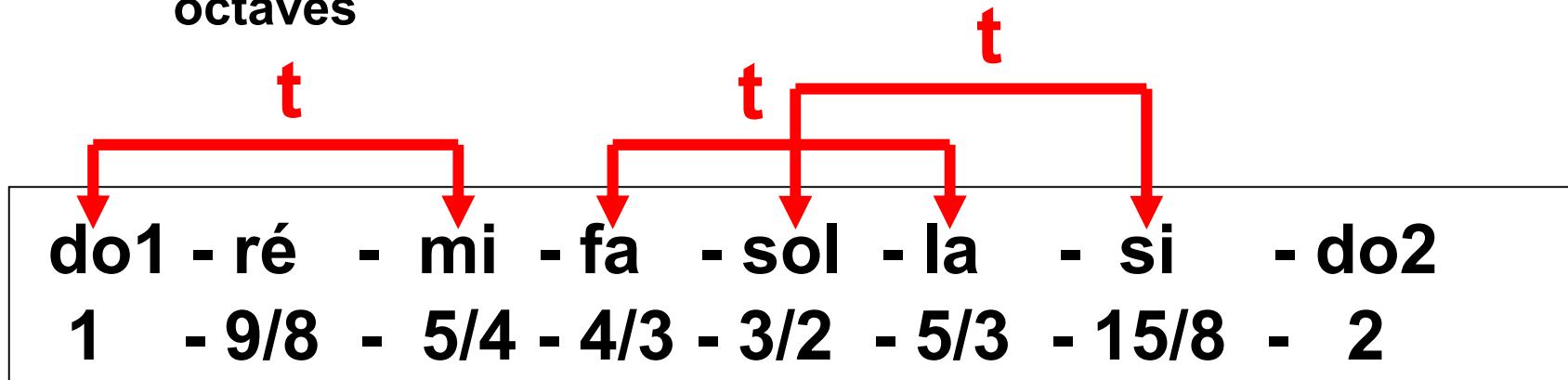
En continuant le système, on génère les 5 notes altérées F#, C#, G#, D#, A# puis on retombe sur F

Notes pythagoriciennes rangées dans l'octave

Note	C Do	D Ré	E Mi	F Fa	G Sol	A La	B Si
n	0	2	4	-1	1	3	5
$(\frac{3}{2})^n$	1/1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128

Les accords parfaits (Zarlino)

- Plus et moins de la gamme Pythagoricienne:
 - Par construction, quintes parfaites
 - Par contre, tierces (Do- Mi) dissonantes ($81/64$) et éloignées d'un accord simple $5/4$ dit de tierce majeure
- La gamme dite naturelle (Zarlino, XVIème siècle):
 - Privilégie les harmoniques simples: la **tierce dite parfaite** (Do-Mi, Fa-La, Sol-Si) et la quinte Do-Sol, Mi-Si, Fa-Do, Sol-Ré, **Ré-La**
 - Rapports entre notes basés sur des fractions avec multiples des premiers nombres premiers : 2, 3, 5
 - Permettre une polyphonie autre que par quintes et octaves



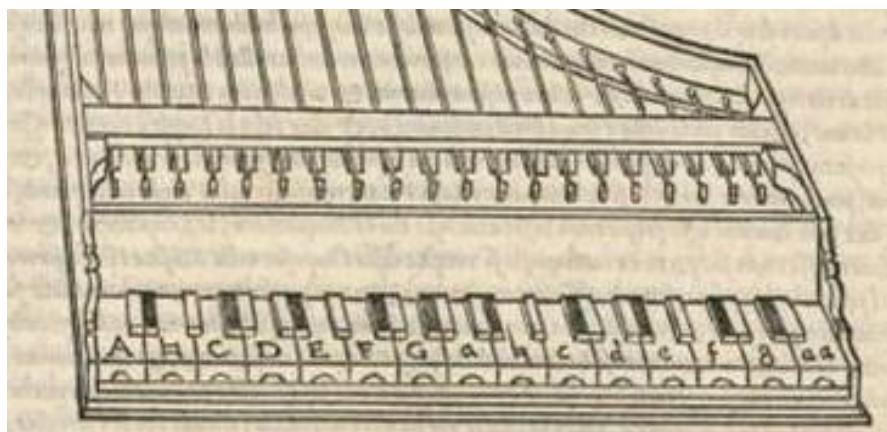
Problèmes des gammes naturelles

1. Approches incompatibles:

- Mi Zarlino $=5/4$ $=1.25$
- Mi Pythagore $=(3/2)^4/4$ $=1.265625$
- Do6 Pythagore $=(3/2)^{12}$ $=129,7 \neq 128$
- "Quinte du loup" Ré / La $= (5/3)/(9/8) =$
 $40/27=3/2-1/54$

2. Transpositions et modulations difficiles

3. Claviers complexes !



Clavier de Zarlino:
notes altérées
déoublées (# et ♯)

Objectifs pour une "bonne" gamme:

- 1. Optimiser le nombre des tierces et des quintes justes**
- 2. Pouvoir facilement transposer et moduler dans **tous** les tons**
- 3. Comporter un nombre limité de notes dans une octave (par exemple confondre les notes comme le do# et le réb dites enharmoniques)**
- 4. Etre acceptable par le cerveau, même si imparfaite**

Aucun système ne peut respecter tous les critères, d'où la recherche d'un compromis

Compromis: le tempérament égal

- L'octave (seul intervalle juste) est divisée géométriquement en 12 intervalles égaux :
 $\frac{1}{2} \text{ ton tempéré} = 2^{(1/12)} \approx 1,059$
- 12 notes définies **modulo 12** (c.à.d. que 2 notes sont "égales" si elles ont le même reste de la division par 12) :
 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
- Sur un clavier de piano, 88 notes séparées par $\frac{1}{2}$ ton

La gamme diatonique tempérée

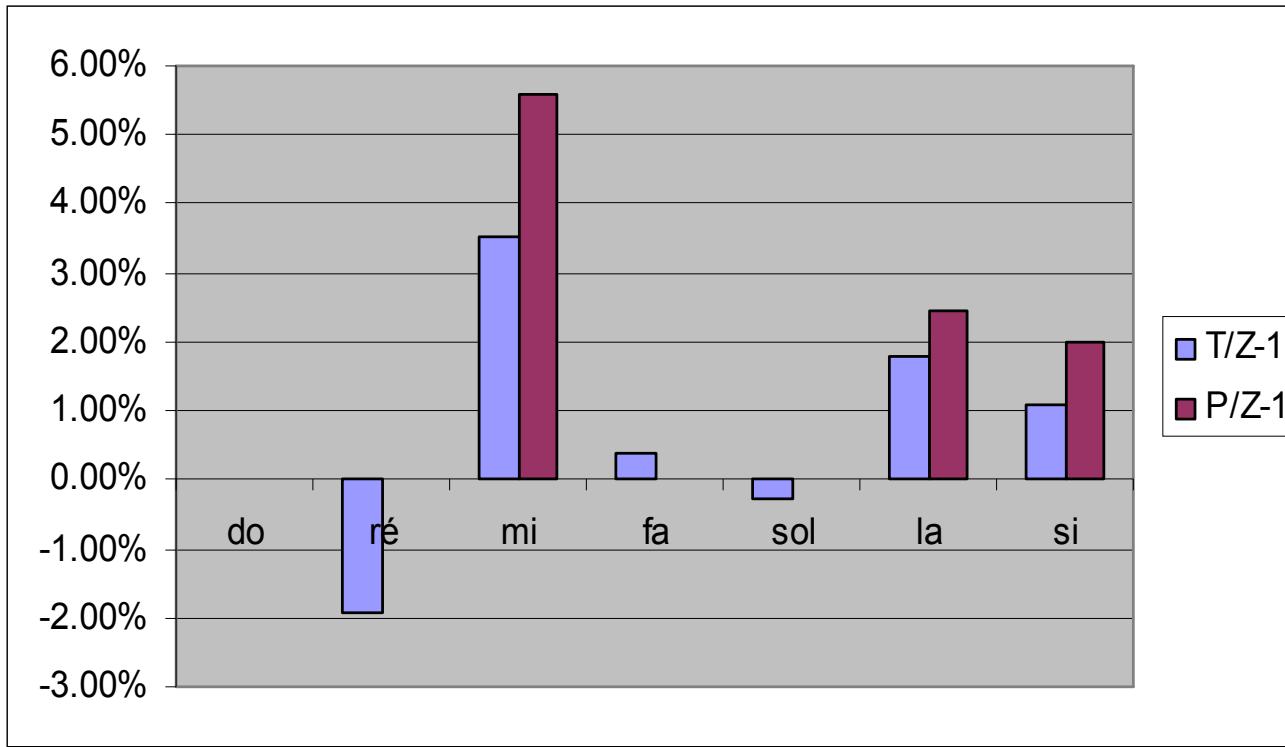
- 7 notes retenues pour la gamme diatonique :
 $\{0,2,4,5,7,9,11\} \equiv \{\text{do, ré, mi, fa, sol, la, si}\}$



- Pourquoi privilégier ces 7 notes sur les 12 notes tempérées (*) ?
 - Ces 7 notes sont le meilleur compromis pour approcher les gammes diatoniques (Zarlino et Pythagore)
 - C'est la « meilleure » répartition de 7 notes parmi 12 au sens mathématique
- Le tempérament égal a été retenu par d'autres musiques, Indonésienne, Arabe, mais pas toujours 12 sons à l'octave

(*) à priori, $12!/(5! \times 7!) = 792$ possibilités

Ecart entre les gammes

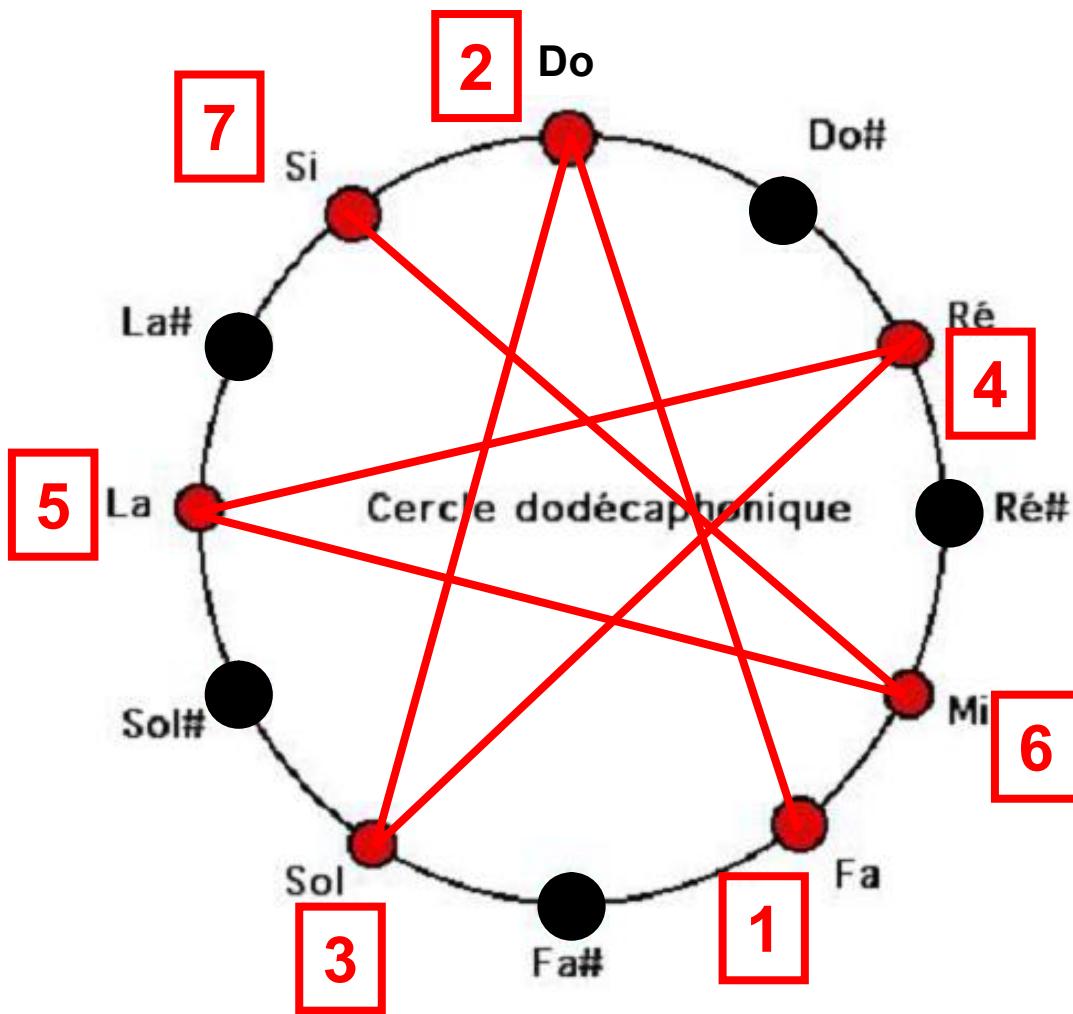


T: gamme tempérée
P: gamme de Pythagore
Z: gamme de Zarlino

Ecarts en % (échelle log) par rapport à Zarlino:

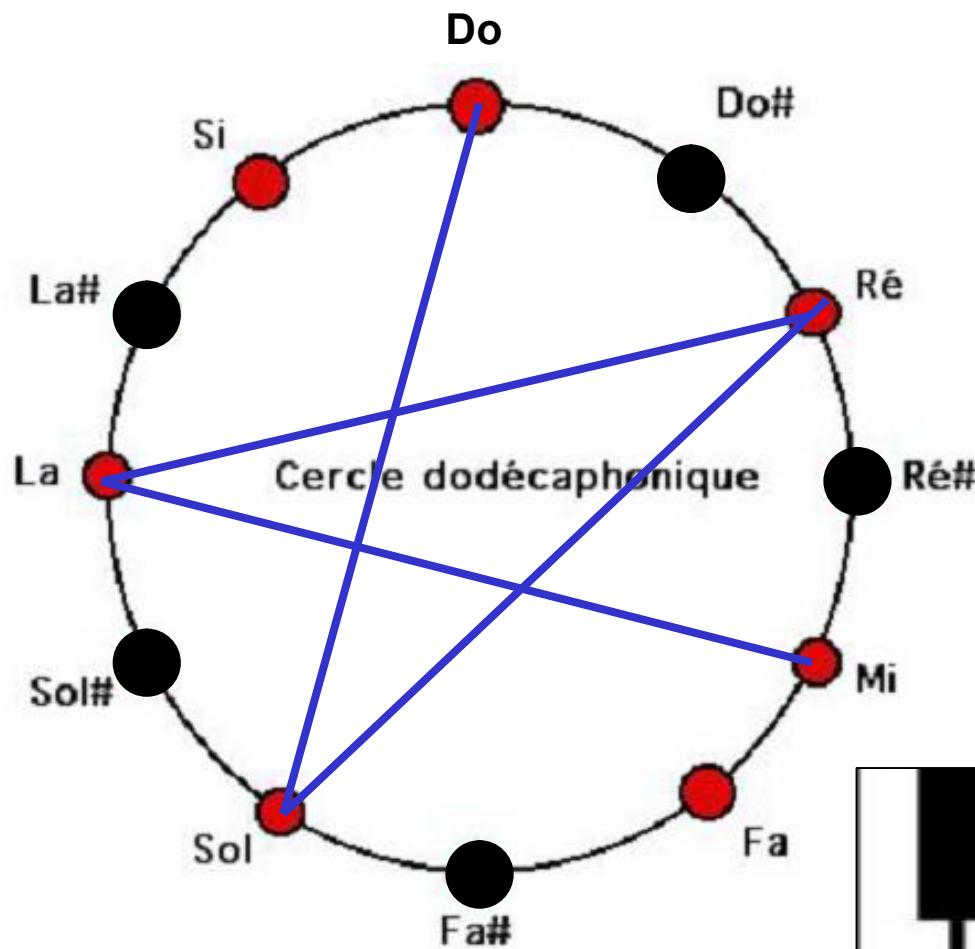
- Tempérée: **jamais juste** sauf à l'octave mais dispersion acceptable ($\sigma = 1,72\%$)
- Pythagore: juste fa, do, sol, ré mais écart moyen plus important ($\sigma = 2,11\%$)

Génération par quintes: gamme majeure

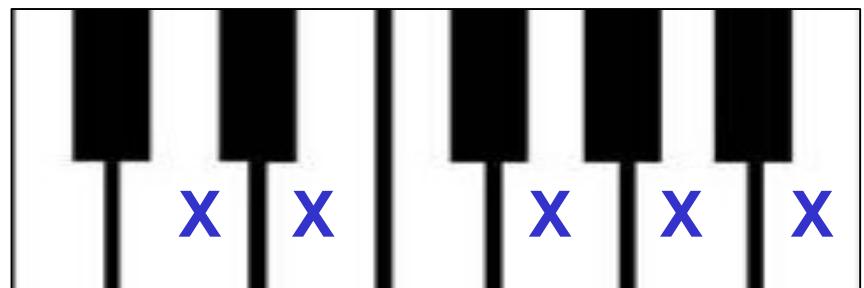


- Gamme dite naturelle: 7 notes, générées par quintes (rotation horaire +7)
- Figure proche d'un heptagone régulier
- Une transposition correspond à une rotation de l'heptagone (p ex, quinte =+7 horaire)

Gamme pythagoricienne pentatonique



- Gamme pentatonique, Do, Ré, Mi, Sol, La sous-ensemble de la gamme diatonique
- Est la base de nombreuses musiques non occidentales, en particulier chinoise



Transpositions de la gamme diatonique

Gamme Do Majeur (mode occidental)

{0,2,4,5,7,9,11}

Gamme Sol Majeur = {gamme Do + 7} =

{7,9,11,12,14,16,18} ie Mod/12

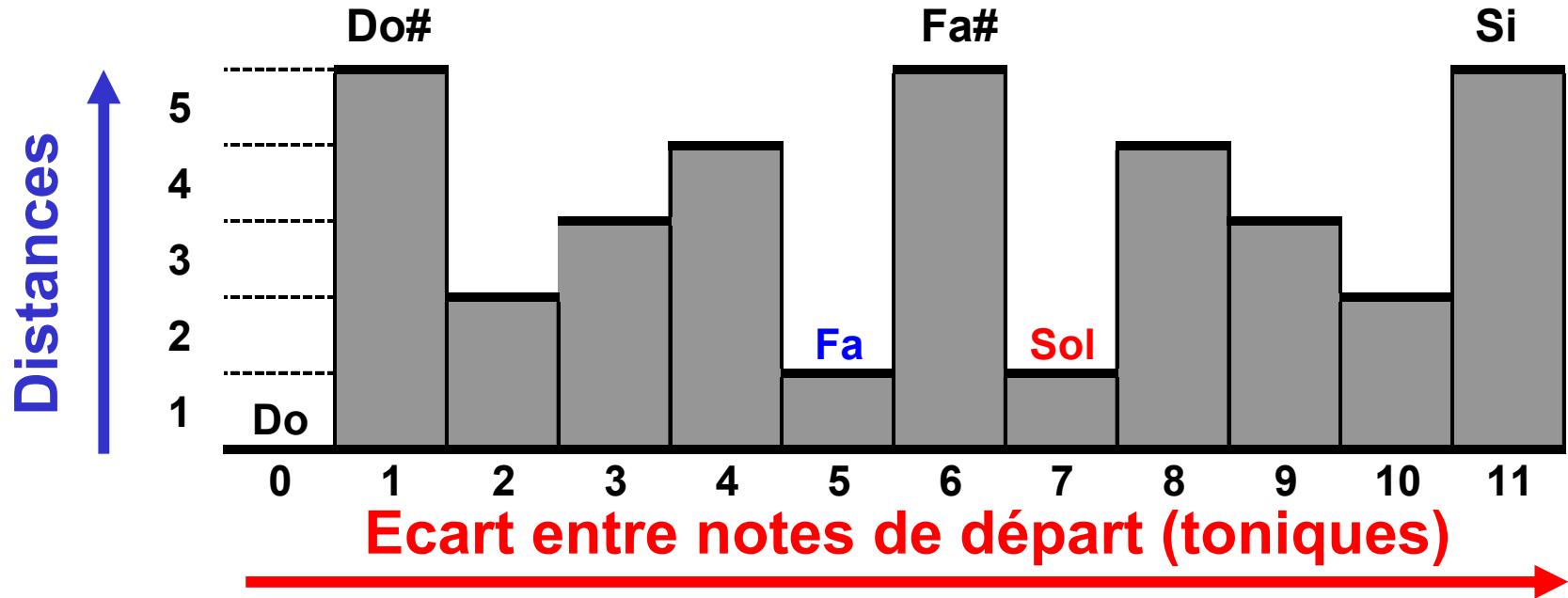
{7,9,11,0,2,4,6} 6=Fa#

Gamme Fa Majeur = {gamme Do + 5} =

{5,7,9,10,12,14,16} i.e. Mod/12

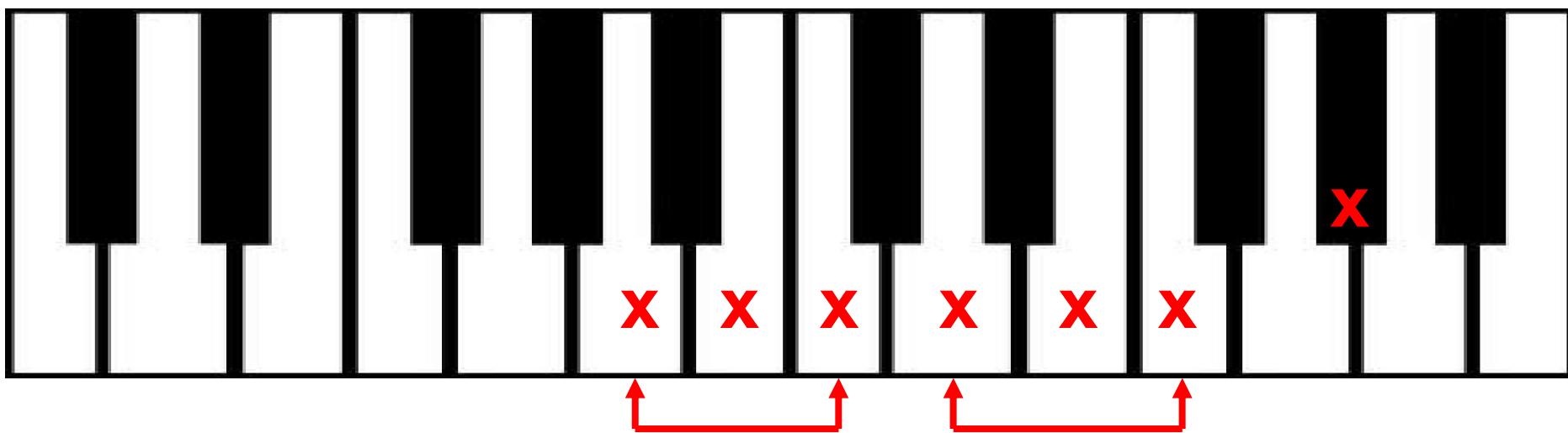
{5,7,9,10,0,2,4} 10=Sib

Distance entre tonalités majeures



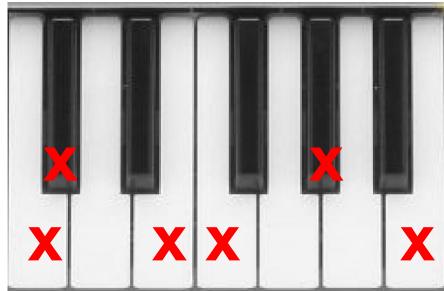
La distance entre tonalités (nombre d'altérations en solfège classique) mesure la difficulté de transposition et de modulation (changement de ton) d'une tonalité de gamme majeure à l'autre ... et d'exécution

Gammes occidentales mineures

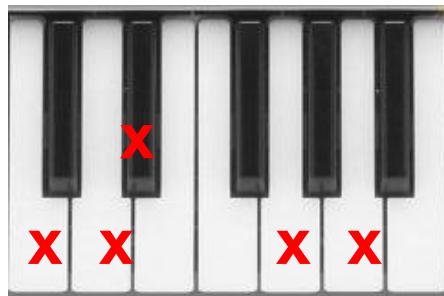


- Plusieurs gammes sont dites en mode mineur. Elles ont toutes en commun le fait que la **1ere tierce est mineure** (même effet psychologique)
- 4 modes mineurs:
 - Gamme mineure naturelle (en La, dite relative de Do)
 - Gamme mineure harmonique
 - Gamme mineure mélodique ascendante
 - Gamme mineure mélodique descendante

Modes non occidentaux: exemples

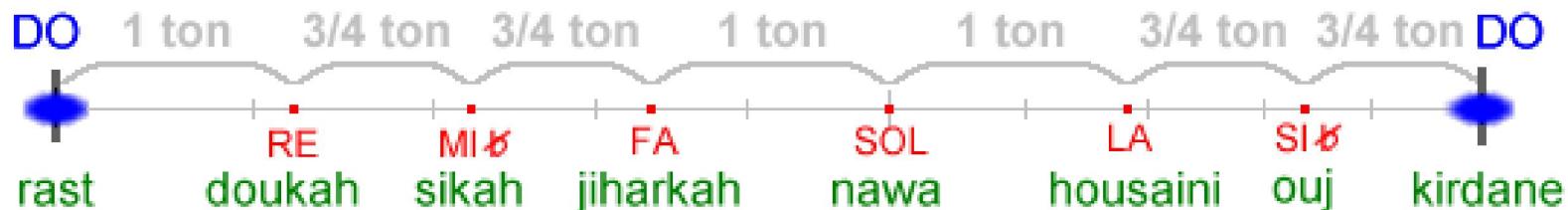


Orientale



Japonaise

- Beaucoup de modes sont pentatoniques mineurs;
- Le tempérament $2^{(1/12)}$ n'est pas le seul, p ex:
 - $\frac{1}{4}$ ton dans la musique arabe;
 - Tempérament javanais: $2^{(1/5)}$



Arabe authentique avec $\frac{1}{4}$ de ton

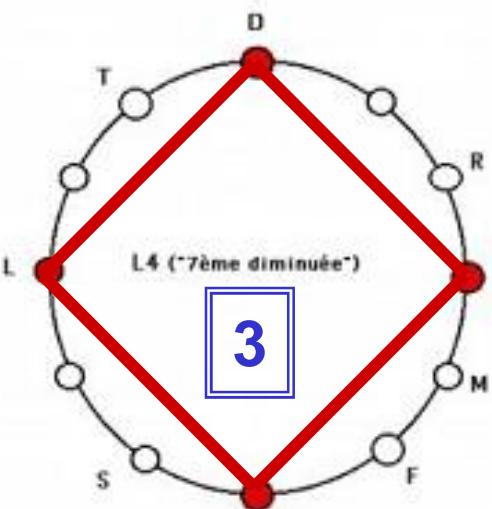
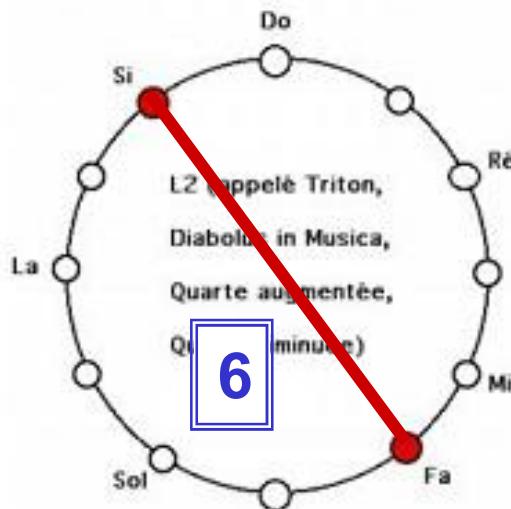
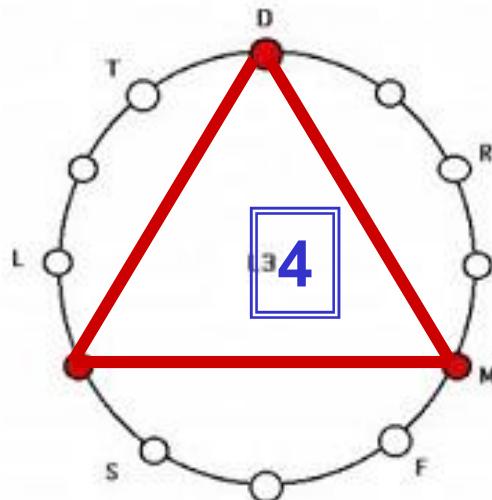
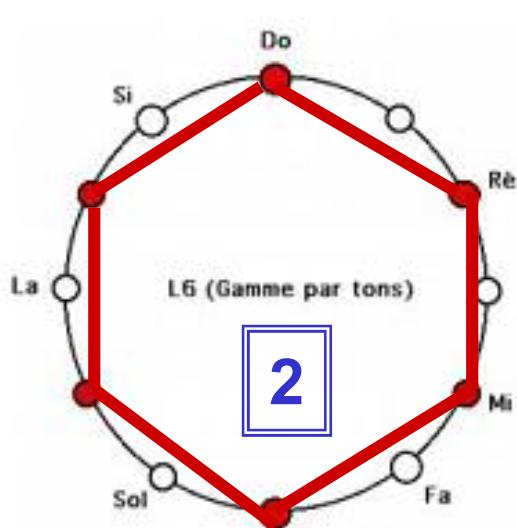
Les ruptures avec l'harmonie classique

- Symbole de rupture: le fameux « **accord Tristan** » de Wagner



- Les impressionnistes français
- Les modes dodécaphoniques
- La musique serielle
- La musique algorithmique

Modes à transposition limitée (Messiaen)



Les plus utilisés:

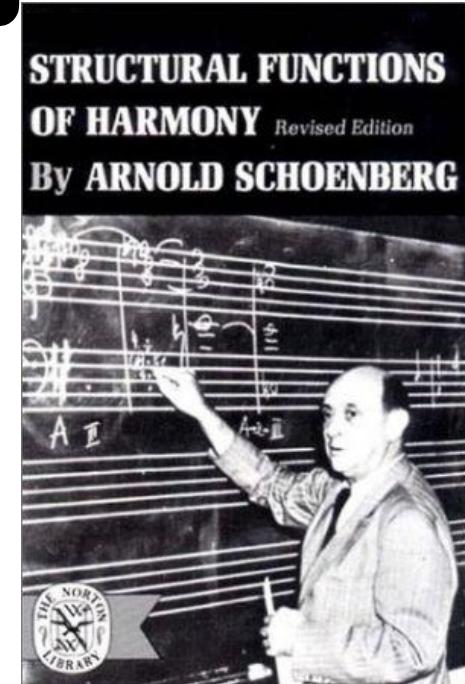
- ton ton
- 7eme diminuée

N indique sur le schéma le nombre d'occurrences

Par exemple, la gamme par tons a été très utilisée par Debussy ...et Thelonious Monk

Schönberg : musique serielle

- On fait se succéder les douze sons dans l'ordre que l'on veut (au gré de l'inspiration « serielle »), et l'on ne doit pas répéter deux fois le même son.
- La première œuvre de Schönberg rigoureusement écrite selon ce principe est la valse de l'op. 23. La série en était :



C#	A	B	G	Ab	Gb	Bb	D	E	Eb	C	F
1	9	11	7	8	6	10	2	4	3	0	5

- Tout le morceau découle donc d'une série préalablement établie, avec de nombreuses transformations possibles.

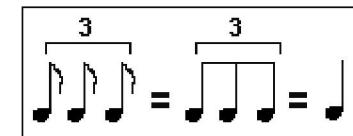
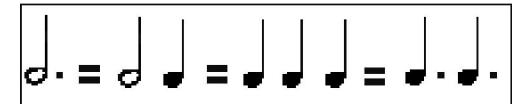
Rythme: une notation arithmétique

Notation des durées élémentaires

Binaire

1	la RONDE	—	○ = 2	○ = 4	— = 8	— = 16	— = 32	— = 64
1	la BLANCHE	—	○ = 2	— = 4	— = 8	— = 16	— = 32	—
1	la NOIRE	—	— = 2	— = 4	— = 8	— = 16	—	
1	la CROCHE	—	— = 2	— = 4	— = 8	—		
1	la DOUBLE CROCHE	—	— = 2	— = 4	—			
1	la TRIPLE CROCHE	—	— = 2	—				
1	la QUADRUPLE CROCHE	—	—					

Ternaire



Rythme: une notation arithmétique

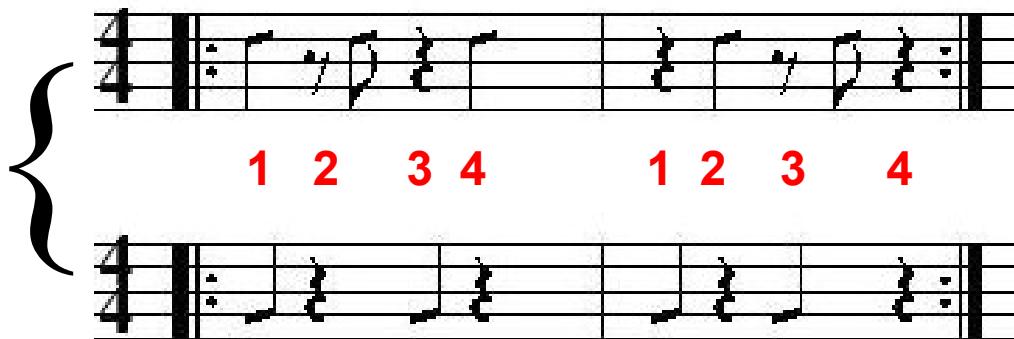


- Partition divisée en mesures elles-mêmes divisées en temps élémentaires, **horloge de base de la pulsation**
- Structure: **x/y** signifie: mesure de **x** pulsations de **1/y** durée élémentaire chacune.
- Ex:
 - 4 / 4: mesure à 4 temps de 4 noires (1/4 de ronde)
 - 3 / 4: mesure à 3 temps de noires
 - 6 / 8 : mesure à 6 temps de croches, proche de 3 / 4

- Dimensions de complication du rythme:
 - Mesures composites, syncopes
 - Rythmes différents entre voix
 - Pavages complexes

Rythmes complexes

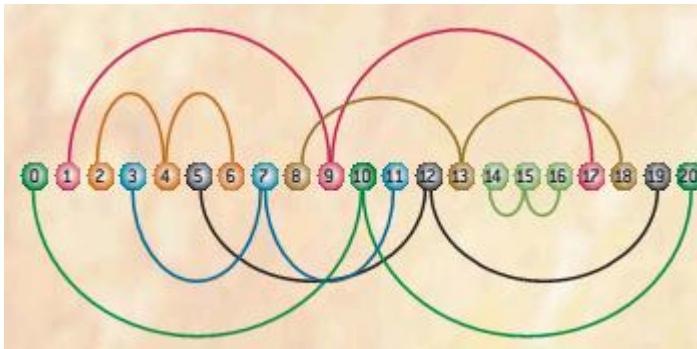
■ Combinatoire élevée pour mesures dites complexes (ex de la **clave brésilienne**)



Le cycle est sur 2 mesures

Pulsation

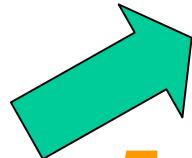
■ Pavages complexes



Une algorithmique théorique a été créée pour étudier les rythmes complexes analogues aux pavages géométriques et schémas de jonglage

La musique : quelle complexité?

- 1. Introduction**
- 2. Une évolution millénaire**
- 3. De Pythagore à Messiaen et Schoenberg en passant par Zarlino**
- 4. Mathématiciens et Musique**
- 5. Vous avez dit complexité?**
- 6. Exemple: le jazz**



Mathématiciens et musique

- Les philosophes grecs (**Pythagore** et **Platon**) sont probablement à l'origine, en Occident, des rapprochements classiques entre math et musique et entre ***le Beau*** et ***les Nombres***.
- **Leibniz** :
 - « *La musique est un exercice d'arithmétique secrète, et celui qui s'y livre ignore qu'il manie les nombres* »
 - « *La musique est le plaisir que ressent l'esprit humain de compter sans s'apercevoir qu'il compte* »
- **Milan Kundera , L'Art du roman. (1986)**
 - « *Aujourd'hui on peut faire de la musique avec des ordinateurs, mais l'ordinateur a toujours existé dans la tête des compositeurs.* »
- **Poncifs:**
 - « *Tout ce qui est nombre est beau* »
 - « *Tout ce qui est beau est nombre* »
 - « *Les matheux sont musiciens* »

Mathématiciens et musiciens

■ Distinguer:

- **Les mathématiciens théorisant la musique**
- **Les compositeurs utilisant des structures mathématiques cachées: typiquement, Bach et Mozart**
- **Les compositeurs utilisant explicitement leurs connaissances mathématiques.**
Cette catégorie devient de plus en plus importante avec les musiques dodécaphonique et informatique

Mathématiciens et musiciens

■ Pythagore	580 av. J.-C
■ Gioseffo Zarlino	1517 1590
■ Simon Stevin	1548 1620
■ Jean-Philippe Rameau	1683 1764
■ Leonhard Paul Euler	1707 1783
■ Jean le Rond d'Alembert	1717 1783
■ Hermann Helmholtz	1821 1894
■ Arnold Schönberg	1874 1951
■ Olivier Messiaen	1908 1992
■ Yannis Xenakis	1922 2001
■ Pierre Boulez	1925

Math, Bach et Mozart : 2 symboles

■ Bach :

- Pas de traces de « langage source » explicitant l'usage de formalisme mathématique**
- Mais le « reverse engineering » atteste de structures architecturales rigoureuses et d'une grande virtuosité mentale: canon, fugue, contrepoint**

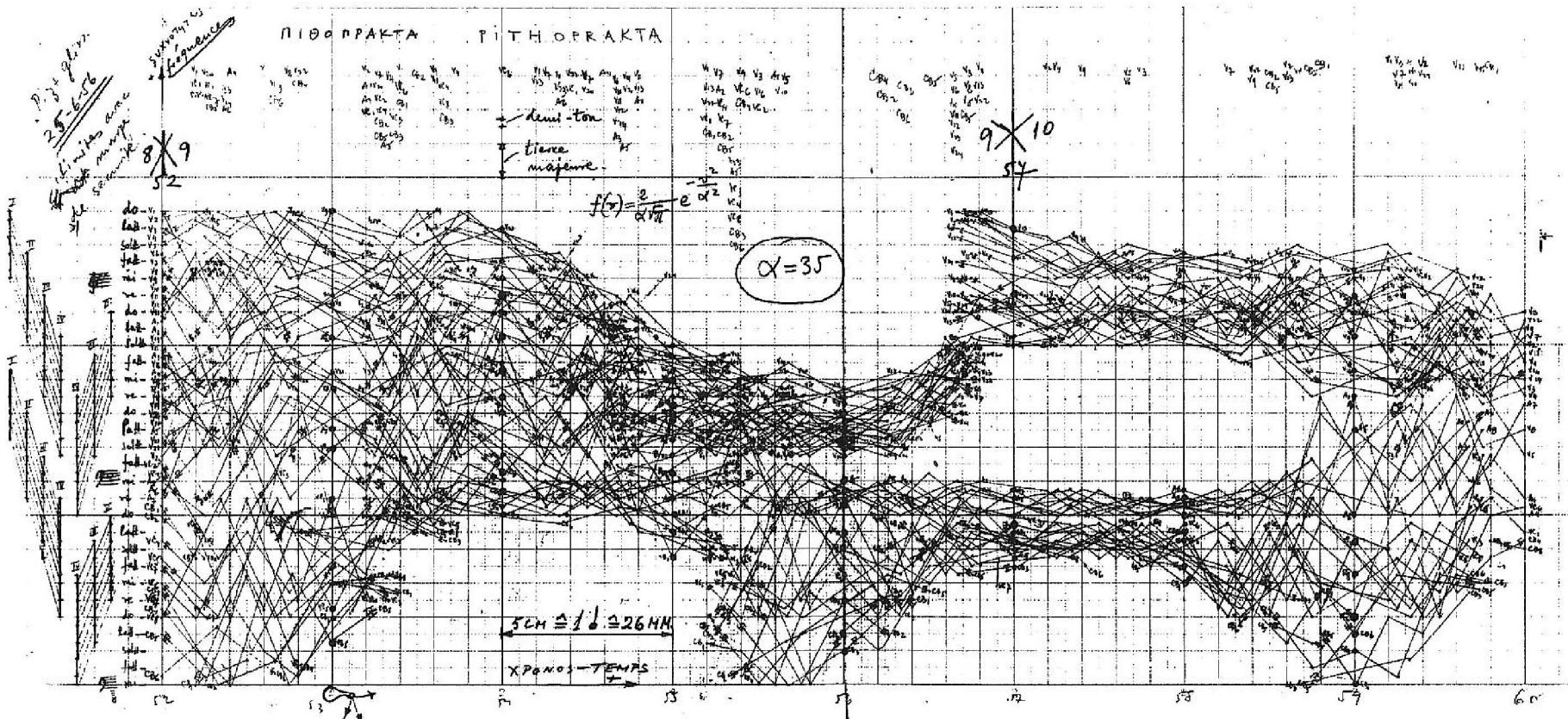
■ Mozart :

- Palindromes musicaux (symétries)**
- Méthodes aléatoires (tirage de dés)**
- Nombre d'or et suite de Fibonacci**

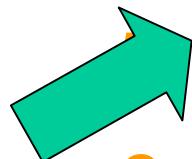
Partition de Iannis Xenakis

Pithoprakta (1955-56), mesures 52-59 : graphique de Xenakis

Source : Iannis Xenakis, *Musique. Architecture*, Tournai, Casterman, 1976, p. 167



La musique : quelle complexité?

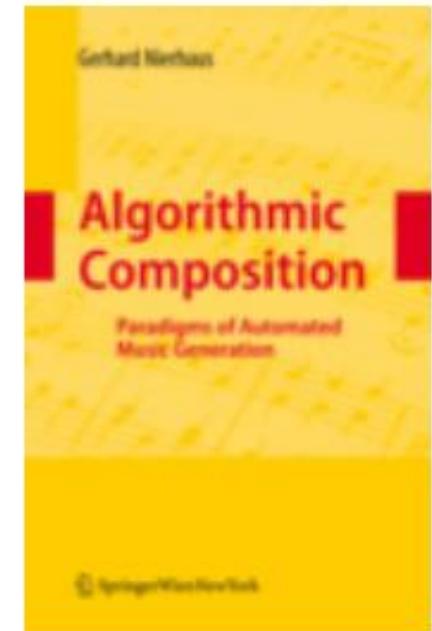
- 1. Introduction**
- 2. Une évolution millénaire**
- 3. De Pythagore à Messiaen et Schoenberg en passant par Zarlino**
- 4. Mathématiciens et Musique**
-  **Vous avez dit complexité?**
- 6. Exemple: le jazz**

Cours de musique contemporaine

Gerhard Nierhaus: *Algorithmic Composition. Paradigms of Automated Music Generation*, Springer 2009

- 1 Introduction
- 2 Historical Development of Algorithmic Procedures
- 3 Markov Models
- 4 Generative Grammars
- 5 Transition Networks
- 6 Chaos and Self-Similarity
- 7 Genetic Algorithms
- 8 Cellular Automata
- 9 Artificial Neural Networks
- 10 Artificial Intelligence

Outils connus pour
l'étude des systèmes
complexes



IRCAM et outils des systèmes complexes

Analyse - modèles - cognition

Vendredi 4 octobre 2013

**IRCAM - Salle Stravinsky,
1 place Igor Stravinsky 75004 Paris**

- Jônatas Manzolli, Live Interactive Composition and Models derived from Computational Neuroscience
- Shihab Shamma, Representation of Musical Timbre in Auditory Cortex
- Alexandre Popoff, Structures et Méta-structures dans les "Number Pieces" de John Cage: une approche statistique
- Charles de Paiva, Du modèle à la simulation : interroger le texte musical.

Musique et information: contenant

Numérisation (Shannon-Nyquist)

CD stéréo

- Echantillonnage: 44,1 kHz (> 2 fois 20 kHz)
- Codage linéaire 16 bits
 - Débit: $2 \times 705 \text{ kb/s}$

Compression MP3

→ Débit: de 180 kb/s à 320 kb/s

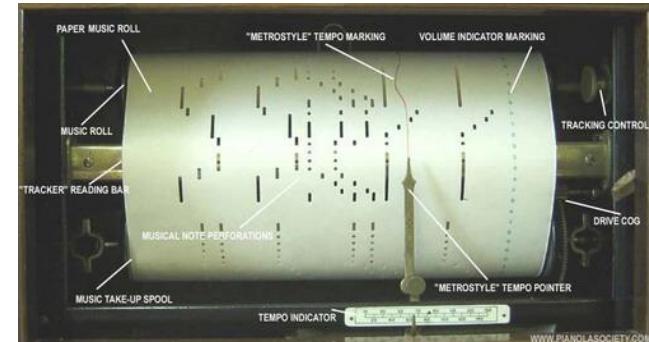
Paradoxe:

- La parole reste compréhensible avec une forte compression (13,8 kb/s pour le GSM)
- Mais l'effort de mémorisation pour la musique semble plus petit que pour le langage

Musique et information: contenu

■ Hypothèses du « pianola »:

- Un pianiste joue une partition ¼ heure, rythme allegro (220 noires/m), précision ½ croche
- Une note codée en 7 bits ($2^7=128>88$ notes du clavier)
- Moyenne de 5 notes simultanées



■ Estimations:

- Débit binaire: $5 \times 7 \times (220/60) * 4 \approx 523 \text{ bits/s}$
- Effort de mémorisation brut:

$$900 \times (220/60) \times 4 \times 7 \times 5 \approx 500 \text{ k bits}$$

■ Mais en fait effort inférieur dans le cas d'accès à un vocabulaire connu, du moins en musique tonale: (*)

(*) p ex, musique serielle plus difficile à retenir

Musique et information: contenu

Comparaison avec le langage

- Données: livre de 250 pages, 500 mots de 5 caractères par page, 2 hypothèses:
 - a) Livre « de singe »
 - b) Vocabulaire de 5 000 mots
- 1 caractère codé en 6 bits, 1 mot codé en 9 bits:
 - Ha: $250 \times 500 \times 5 \times 6 = 3\,750 \text{ K bits}$
 - Hb: $250 \times 500 \times 9 = 1\,125 \text{ K bits}$

Le paradoxe de l'information musicale

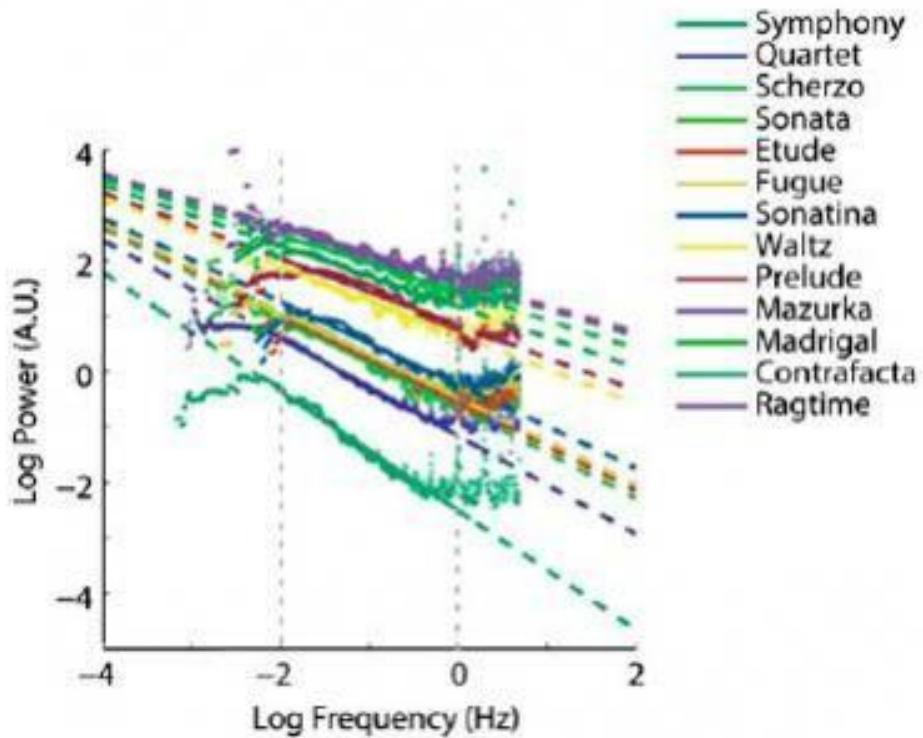
■ Musique agréable :

- Fait appel à un vocabulaire connu (donc appris)**
- Est assez prédictible**
- Contient peu d'information (Shannon) ou complexité faible (Kolmogorov): peut être simulée avec des algorithmes relativement simples**

■ Musique novatrice :

- Tout le contraire : plus complexe, plus d'information, moins prédictive, mais pas agréable**

Rythme et fréquence: loi de puissance



Trois chercheurs spécialisés en musique, psychologie, neurologie et enfin informatique ont disséqué les changements de rythme de 1788 mouvements de musiques provenant de 558 compositions classiques. Ils ont mis en évidence qu'une écrasante majorité des rythmes obéissait à **une loi mathématique, reliant la puissance à la fréquence**. Il s'agit d'une loi de puissance de la forme : $1/(f^n)$, f étant la fréquence, n étant compris entre 0,5 et 1, selon les genres et les compositeurs

Structure fractale générale

- Une équipe de recherche dirigée par des neuroscientifiques des universités McGill et Stanford, a analysé les partitions de quelque 2 000 compositions de divers genres musicaux occidentaux qu'ont écrites plus de 40 compositeurs au cours des 400 dernières années :
 - Le rythme: une géométrie fractale qui rend la musique agréable
 - Tout compositeur, de Bach à Brubeck, répète des motifs rythmiques, de sorte que la partie reproduit le tout

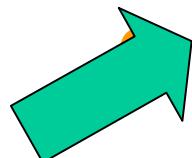
Cognition musicale: au cœur de la complexité

- **La cognition musicale fait référence à la connaissance des auditeurs du système musical de leur culture, connaissance illustrée par l'existence de phénomènes simples telles que la production ou la reconnaissance d'une mélodie.**
- **La production et la perception de la musique impliquent un ensemble de processus cognitifs, comme la mémoire à court et à long terme, des processus attentionnels ou de résolution de problèmes, des jugements esthétiques et affectifs.**
- **Comprendre le fonctionnement de ces processus contribue à éclairer la complexité de l'esprit humain et de l'architecture neuronale qui le sous-tend**

La musique : quelle complexité?

- 1. Introduction**
- 2. Une évolution millénaire**
- 3. De Pythagore à Messiaen et Schoenberg en passant par Zarlino**
- 4. Mathématiciens et Musique**
- 5. Vous avez dit complexité?**

Exemple: le jazz



Le jazz

Caractéristiques majeures:

- **Rythme complexe et pulsation, swing**
- **Improvisation collective supposant :**
 - une structure rigoureuse récurrente
 - une notation compacte, avec accords et grille
- **Harmonie tonale classique complétée :**
 - Modes Majeurs et Mineurs et modes « dérivés »
 - Gamme blues
 - Emprunt aux musiciens du XXème siècle et de modes définis par Olivier Messiaen
 - Riche grammaire de substitutions (notamment les substitutions tritoniques) et d'accords altérés

Les modes sur la gamme majeure

Mode	Accord
I Ionien	IΔ

Tétracorde			
C	E	G	B

II	Dorien	IIIm7
----	--------	-------

D	F	A	C
---	---	---	---

III	Phrygien	IIIIm7
-----	----------	--------

E	G	B	D
---	---	---	---

IV	Lydien	IVΔ
----	--------	-----

F	A	C	E
---	---	---	---

V	Mixolydien	V7
---	------------	----

G	B	D	F
---	---	---	---

VI	Aérolien	VIm7
----	----------	------

A	C	E	G
---	---	---	---

VII	Locrien	VIIIm7b5
-----	---------	----------

B	D	F	A
---	---	---	---

Trois familles d'accords:

1. I et IV: 7eme majeur
2. II, III, VI: 7eme mineur
3. V et VII: contiennent le triton Fa-Si ou Si-Fa

- V, 7eme de dominante
- VII, 7eme mineure, 5eme diminuée, peut aussi être vu comme sol 9 sans tonique

Cette grille est applicable aux 12 tons de l'échelle chromatique. Elle est très utilisée en jazz pour définir des cadences usuelles :

V- I

II-V-I

VI-II-V-I (anatole)

Curiosité : le triton en jazz

1. Le 7eme de dominante C7= {C E Bb} contient les notes {0, 4, 10} dont le triton {4, 10}
 - Il est à la base du blues C7-F7- C7
 - Le triton de F7 égale le triton de C7-1, c'est-à-dire {3, 9}
2. C7 et Gb7 ont le même triton=> substitution tritonique, très utilisée (bebop)

gamme chromatique	C	Db	D	Eb	E	F	Gb	G	Ab	A	Bb	B
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Passage de C7 à F7 (modul à la quarte)												
C7	X				X							X
F7=C7+5 (mod 12)				X		X			X			
Substitution tritonique: C7 et Gb7 ont le même triton												
C7	X				X						X	
Gb7=C7+6 (mod 12)					X		X				X	

Syllabaire d'accords jazz (en do)

CHORD/SCALE TYPE	ABBREVIATED CHORD/SCALE SYMBOL
* MAJOR (Ionian) (WWHWWWH) C D E F G A B C	C CΔ Cmaj, Cma, Cma7, Cmaj7, CM, CM7, Cmaj9, Cmaj13
* DOMINANT SEVENTH (Mixolydian) (WWHWWWHW) 5th mode of Major C D E F G A Bb C	C7 C9, C11, C13
* MINOR SEVENTH (Dorian) (WHWWWWHW) 2nd mode of Major C D Eb F G A Bb C	C- C-7, Cmi, Cmi7, Cm7, Cmin, Cmin7, Cm9, Cm11, Cm13
LYDIAN (Major scale with #4) (WWWWHWWH) 4th mode of Major C D E F# G A B C	CΔ+4 Cmaj+4, CM+4, CΔ+11, CΔb5, Cmajb5
* HALF-DIMINISHED (Locrian) (HWWHWWWW) 7th mode of Major C Db Eb F Gb Ab Bb C	CØ Cmi7(b5), C-7b5
HALF-DIMINISHED #2 (Locrian #2) (WHWHWWWW) 6th mode of Melodic Minor C D Eb F Gb Ab Bb C	CØ#2 CØ+2, CØ9
DIMINISHED (WHWHWHWH) C D Eb F Gb Ab A B C	Cº Cdim, Cº7, Cdim7, Cº9
LYDIAN DOMINANT (Dom. 7th with #4) (WWWHWHW) 4th mode of Melodic Minor C D E F# G A Bb C	C7+4 C7+11, C7b5, C9+11, C13+11
WHOLE-TONE (WWWWWWWW) C D E F# G# Bb C	C7+ C7aug, C7+5, C7+5 ⁺⁴
DOMINANT SEVENTH Using a Dim. Scale (HWHWHWHW) C Db Eb E F# G A Bb C	C7b9 C7b9+4, C13b9+11 ⁺⁹ ⁺⁹
DIMINISHED WHOLE-TONE (Altered scale) (HWHWWWWW) 7th mode of Melodic Minor C Db Eb E F# G# Bb C	C7+9 C7alt, C7b9+4, C7b9+11 ⁺⁹⁺⁵ ^{+9b13}
LYDIAN AUGMENTED (Major with #4 & #5) (WWWWWHWH) 3rd mode of Melodic minor C D E F# G# A B C	CΔ+4 CΔ+5 ⁺⁵
MELODIC MINOR (ascending only) (WHWWWWWH) C D Eb F G A B C	C-Δ Cmin(maj7), CmiΔ, C-Δ(Melodic), Cm6
HARMONIC MINOR (WHWWH-3H) C D Eb F G Ab B C	C-Δ CmiΔ, C-Δ(Har), C-Δb6
SUSPENDED 4th (W-3WWWH) or (WWHWWWHW) C D F G A Bb C C D E F G A Bb C	G- G-7, C7sus4, C7sus, C4, C11 C C
* BLUES SCALE (use at player's discretion) (-3WHH-3W) (1, b3, 4, #4, 5, b7, 1) C Eb F F# G Bb C	(There is no chord symbol for the Blues scale) Used mostly with dominant and minor chords

Combinatoire élevée

- Théoriquement: 12 toniques x 16 modes
~200 accords avec leurs renversements;
- Pratiquement, tonalités les plus fréquentes:
 - C, F, Bb, Eb, Ab, G, D,A
- Les modes (et gammes) les + usuels
 - I, II, IV, VI, VII (majeurs et mineurs)
 - Pentatonique et blues
 - ton-ton, ton-1/2ton, 1/2ton ton
- Accords enrichis: 9^{eme}, 13^{eme}, Alt, Augm, etc.

Improvisation: processus emboités

- En excluant le « free jazz » hors de propos, l'improvisation suppose le déroulement mental de 3 processus emboités:
 - Le rythme simple ou composé au niveau de la mesure;
 - La cadence harmonique qui définit sur un ensemble de mesures la tonalité et le mode avec son vocabulaire associé, p.ex. le II-V-I
 - La position dans la structure, typiquement 4 fois 8 mesures AA'BA (B appelé pont)
- L'improvisation collective suppose une synchronisation des processus entre musiciens, avec conventions de reprise

Exemple de notation classique

Satin Doll, Duke Ellington

The image shows two staves of musical notation for piano. The top staff is in G major (one sharp) and the bottom staff is in E major (no sharps or flats). The notation includes various note heads, stems, and rests. Measure 1 starts with a forte dynamic. Measure 2 begins with a half note followed by a quarter note. Measure 3 features a triplet marking over three eighth notes. Measures 4 and 5 show more complex harmonic progressions with multiple chords per measure. Measure 6 concludes with a half note.

Notation jazz correspondante

Satin Doll, Duke Ellington

Dm7	G7	%	Em7	A7
-----	----	---	-----	----

%	Am7	D7	AbM7	Db7
---	-----	----	------	-----

1	C	EØ	A7b9
---	---	----	------

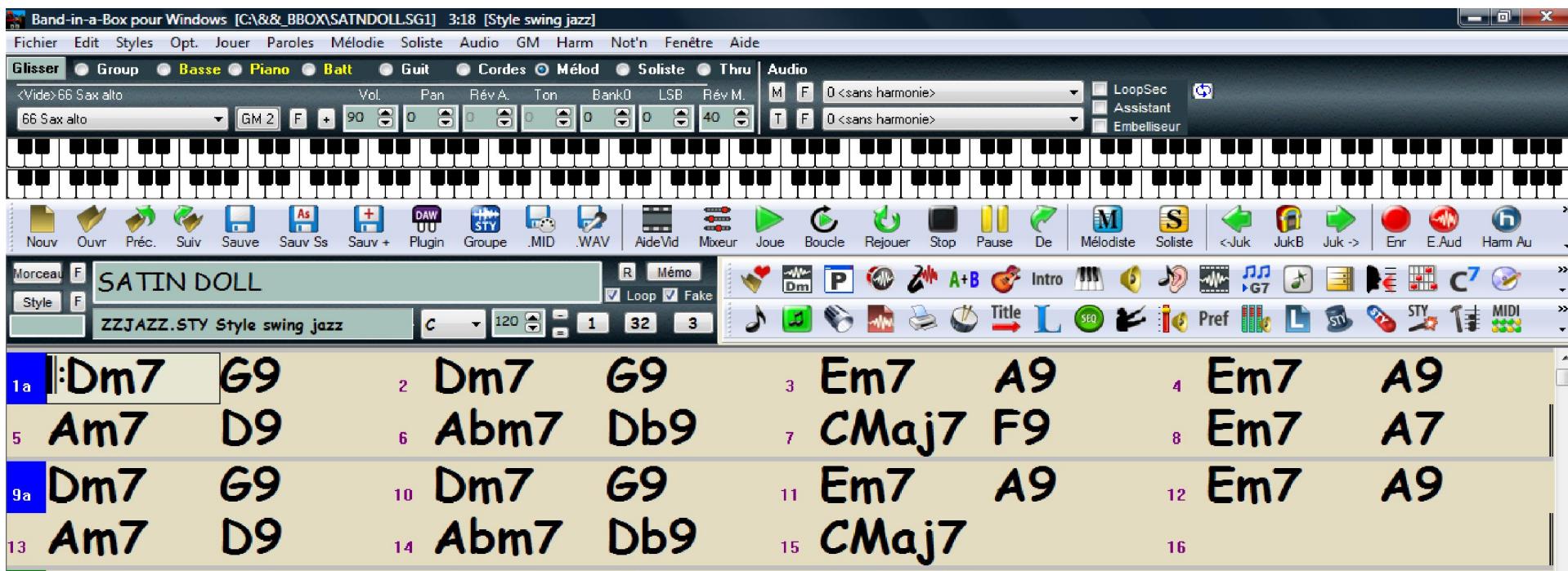
2	C	Dm7	D#°	Em7
---	---	-----	-----	-----

On remarque sur la grille des successions de II-V en Do, en Ré, en Sol puis en Sol b

Démonstration Band in a Box

- Entrée de grille simple de type Anatole:
I - VI - II – V
- Exemple de styles d'accompagnement
- Exemples de fabrication de solos sur la grille simple avec les styles suivants:
 - Swing
 - Be bop
 - Boss nova
 - A la Bach

Informatique musicale : Band in a Box



Logiciel de simulation musical adapté à l'entraînement au Jazz. Permet:

- Entrée simple de grilles harmoniques
- Fabrication d'accompagnements (rythme, style, transpositions, etc.)
- Génération d'improvisations

Compléments et annexes

Génération des notes

Cordes vibrantes: $F_n = (n/L) \times \sqrt{T/\mu}$

F fréquence, n harmonique, L longueur, T tension,
 μ masse linéique

$$F_{Do2} = 2 F_{Do1}$$

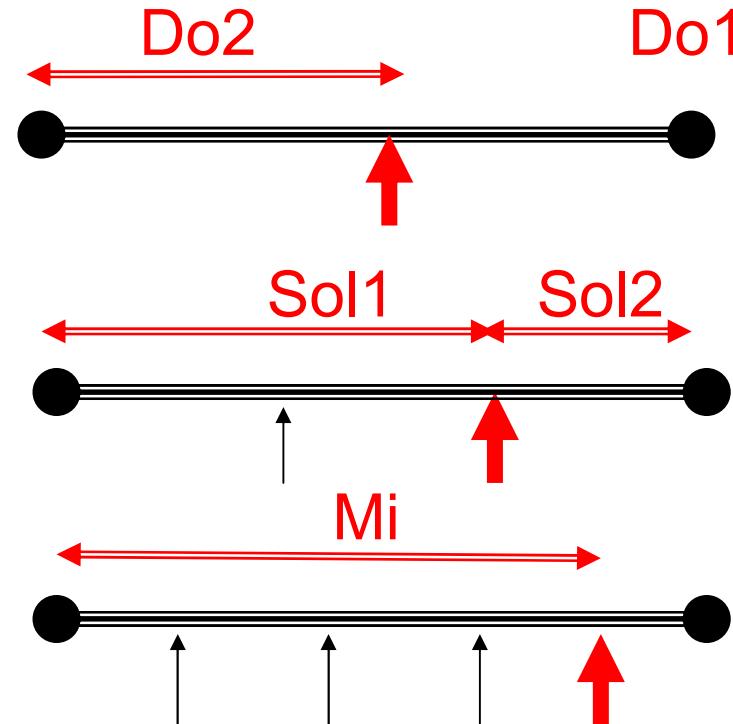
$$L_{Do2} = \frac{1}{2} L_{Do1}$$

$$F_{Sol1} = \frac{3}{2} F_{Do1}$$

$$L_{Sol1} = \frac{2}{3} L_{Do1}$$

$$F_{Mi} = \frac{5}{4} F_{Do1}$$

$$L_{Mi} = \frac{4}{5} L_{Do1}$$



Harmoniques et battements

- Un son de fréquence f s'accompagne en général d'harmoniques $n_x f$
- L'agrément d'un accord entre deux notes dépend des harmoniques communs (*)
- Exemple 1: accord de Do Mi: $(f \text{ Mi}/f \text{ Do}) = 5/4$
 - Harmoniques Do: $f, 2xf, 3xf, 4xf, 5xf,$
 - Harmoniques Mi : $(5/4)xf, (10/4)xf, (15/4)xf, (20/4)xf$
- Exemple 2: triton $(f \text{ Si}/f \text{ Fa})=45/32$
 - Harmoniques communs très éloignés, accord très dissonant ($\text{PPCM}=1440$, 1^{er} harmonique commun dans 11eme octave)
- L'addition de deux notes très voisines génère des battements désagréables

(*)PPCM des fréquences des deux notes

Intervalles de la gamme Zarlino

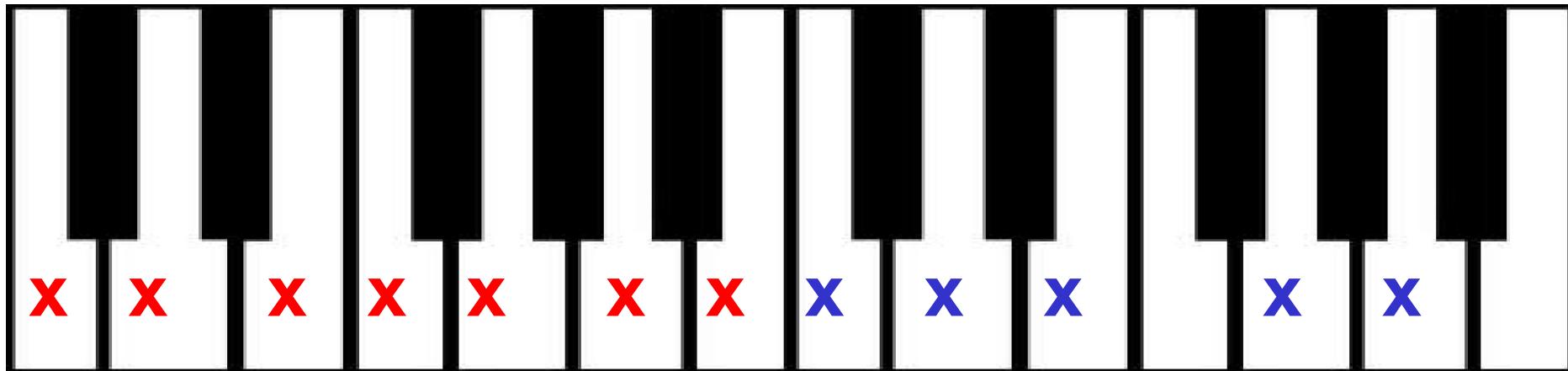
	C (1/1)	D (9/8)	E (5/4)	F (4/3)	G (3/2)	A (5/3)	B (15/8)	C (2/1)
C		9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1
D			10/9	32/27	4/3	40/27	35/18	16/9
E				16/15	6/5	4/3	3/2	8/5
F					9/8	5/4	45/32	3/2
G	5/4: Tierces Majeures				10/9	5/4	4/3	
A	4/3: Quartes					9/8	6/5	
B	3/2: Quintes						16/15	
	6/5: Tierces Mineures							

A/D: quinte du loup

B/F: triton

Tierces Majeures (5/4) et Mineures (6/5) exactes sauf Tm F/D=32/27
(32/27 = 6/5 + 2/135)

Gammes occidentales majeures



Diatonique

Pentatonique (sous ensemble " pythagoricien ")

Curiosité : le triton en jazz

- C7= Do Mi Sib est un accord de 7eme de dominante en Do; Il contient le **triton Mi Sib**, notes: {4, 10 }, écart de 6
- Un blues en Do commence toujours par C7- F7.
- Transposition Do->Fa (quarte) = notes Do + 5
 - Un 7eme de dominante en x contiendra {x, x+4, x+10}
 - Une transposition quarte contiendra: {x+5, x+9, x+15}. Ramené à l'octave, l'accord transposé devient {x+5, x+9, x+3}. Le triton de F7 égale le triton de C7 - 1
- $x7 = \{x, x+4, x+10\}$; si l'on transpose au triton (+6), l'accord devient {x+6,x+10,x+16} ce qui ramené à l'octave donne {x+4,x+6,x+10}. Donc $x7$ et $(x+6)7$ ont le même triton

gamme chromatique	C	Db	D	Eb	E	F	Gb	G	Ab	A	Bb	B
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11