

Mécanique des fluides

Exercice I

1. Pression dans l'eau

a. La pression atmosphérique est égale à 1013 hPa. Calculer la masse de la colonne d'air au dessus d'un cercle de 30 cm de diamètre (l'accélération de la pesanteur est supposée constante et égale à $9,81 \text{ m.s}^{-2}$).

$$p = \frac{mg}{S} \quad \text{avec } p \text{ la pression, } m \text{ la masse de la colonne d'air et } S \text{ sa section}$$

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{et} \quad m = \frac{Sp}{g} \quad \text{donc} \quad m = \frac{\pi d^2 P}{4g} = \frac{\pi \cdot 0,3^2 \cdot 1,013 \cdot 10^5}{4 \cdot 9,81} = 730 \text{ kg}$$

b. Calculer la hauteur h de la colonne d'eau permettant d'obtenir la même pression. La masse volumique de l'eau (ρ_{eau}) est égale à 1000 kg.m^{-3} .

La masse d'eau m contenue dans une colonne d'eau de hauteur h et de section S s'écrit $m = \rho_{\text{eau}} \cdot S \cdot h$. La pression de cette colonne est égale à $p = \frac{mg}{S} = \frac{\rho_{\text{eau}} \cdot S \cdot h \cdot g}{S} = \rho_{\text{eau}} \cdot h \cdot g$ soit

$$h = \frac{p}{\rho_{\text{eau}} \cdot g} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{1000 \cdot 10} = 10,1 \text{ m}$$

On remarque que la pression ne dépend pas de la section de la colonne d'eau.

c. En déduire la pression totale à laquelle est soumis un plongeur à 10 m de profondeur puis à 100 m de profondeur. Comment va évoluer le volume de sa cage thoracique ?

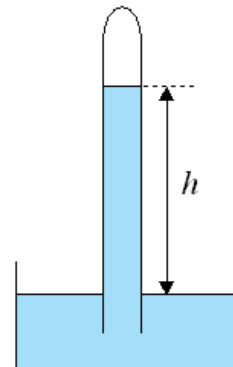
À 10 m, la pression que subi le plongeur est égale à deux fois la pression atmosphérique ; à 100 m, elle est égale à onze fois la pression atmosphérique. Le volume de sa cage thoracique diminue.

2. Pour mesurer la pression atmosphérique, on utilise un tube rempli d'un liquide plongé dans un réservoir (expérience de Torricelli).

Calculer la hauteur h si le tube est rempli d'eau (1000 kg.m^{-3}) puis s'il est rempli de mercure (13546 kg.m^{-3}).

Pour compenser la pression atmosphérique, il faut environ 10 m d'eau (voir ci-dessus).

Avec du mercure $h = \frac{p}{\rho_{\text{Hg}} \cdot g} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{13546 \times 9,81} = 76,2 \text{ cm}$, ce qui est beaucoup plus pratique ... (Hg est le symbole chimique du mercure).



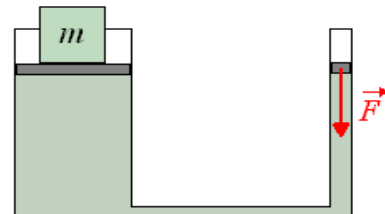
3. Le dispositif étudié est représenté ci-dessous. Un tube en U, dont les branches ont des largeurs différentes est rempli d'un liquide.

Sur la partie gauche, une masse m est placée sur un piston de surface S_g . Sur la partie droite, une force \vec{F} agit sur un piston de surface S_d . La dimension dans le plan perpendiculaire au schéma est constante.

a. Exprimer la pression exercée par la force F en fonction de S_d .

Pression sur la branche de droite : $p_d = \frac{F}{S_d}$

b. Exprimer la pression exercée par la masse m en fonction de m , S_g et g (accélération de la pesanteur).



Pression sur la branche de gauche : $p_g = \frac{mg}{S_g}$

- c. Calculer la valeur minimale de F pour que la masse se déplace si $m = 500 \text{ kg}$, $S_d = 10 \text{ cm}^2$ et $S_g = 1000 \text{ cm}^2$.

Pour qu'il y ait déplacement, il faut que $p_d \geq p_g$, soit $\frac{F}{S_d} \geq \frac{mg}{S_g}$ ce qui donne $F \geq mg \frac{S_d}{S_g}$. À la limite

$$F = 500 \cdot 9,81 \frac{10}{1000} = 49 \text{ N}$$

- d. La masse est montée de 1 cm, de quelle hauteur est descendu le piston de droite ?

On note Δx_d le déplacement du piston de droite et Δx_g celui du piston de gauche. Le volume de liquide déplacé s'écrit $S_d \cdot \Delta x_d$ à droite et $S_g \cdot \Delta x_g$ à gauche. Ces deux volumes sont égaux donc

$$S_d \cdot \Delta x_d = S_g \cdot \Delta x_g \text{ soit } \Delta x_d = \frac{S_g}{S_d} \cdot \Delta x_g = \frac{1000}{10} \cdot 1 = 100 \text{ cm}.$$

- e. Calculer le travail de la force F et du poids de la masse m en négligeant toutes les pertes. Indiquer s'il s'agit de travail moteur ou résistant.

Le travail de la force F est égal à $\Delta W_F = F \cdot \Delta x_d = 49 \cdot 1 = 49 \text{ J}$. Le travail du poids de la masse m est égal à $\Delta W_m = -mg \cdot \Delta x_g = -500 \cdot 9,81 \cdot 0,01 = -49 \text{ J}$. Le travail de la force F est moteur alors que celui de la masse m est résistant.

En pratique, l'égalité des valeurs absolues n'est pas vérifiée à cause des pertes par frottements.

Exercice II

En 1648, à la demande de Blaise Pascal, Florin Périer mesure la hauteur de mercure dans l'expérience de Torricelli à Clermont-Ferrand (altitude 460 m) et trouve 71,2 cm. Il recommence en haut du Puy de Dôme (altitude 1465 m) et trouve 62,7 cm.

Calculer la pression atmosphérique à Clermont-Ferrand puis en haut du Puy de Dôme.

La pression dans la partie supérieure du tube est nulle (vide), la pression atmosphérique p est donc obtenue par la relation $p = \rho g \Delta h$ avec Δh la hauteur de mercure.

À Clermont-Ferrand : $p = \rho g \Delta h = 13546 \times 9,81 \times 71,2 \cdot 10^{-2} = 940 \text{ hPa}$

En haut du Puy de Dôme : $p = \rho g \Delta h = 13546 \times 9,81 \times 62,7 \cdot 10^{-2} = 828 \text{ hPa}$

La pression atmosphérique diminue lorsque l'altitude augmente.

Exercice III

On considère le tube en U représenté ci-contre.

Le liquide dans le tube est de l'eau, la différence d'altitude entre les points A et B est notée h et égale à 15 cm

1. Quelle est la valeur de la pression au point A ?

La surface au point A est libre donc sa pression est la pression atmosphérique.

2. Quelle est la relation entre les pressions aux points B et C ?

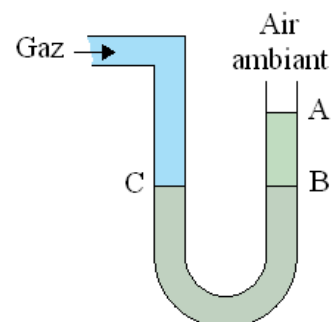
Les points B et C sont sur le même plan horizontal, leurs pressions sont donc égales.

$$p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B \text{ soit } p_B = p_A + \rho g (z_A - z_B).$$

3. Calculer la pression en B et en déduire la pression du gaz.

Application numérique : $p_B = 1,013 \cdot 10^5 + 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,15 = 1,028 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

4. L'eau est remplacée par de l'alcool (800 kg/m^3), calculer la hauteur entre les points A et B.



Si l'eau est remplacée par de l'alcool alors $z_A - z_B = \frac{p_B - p_A}{\rho g}$ avec $\rho = 800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Application numérique : $z_A - z_B = \frac{(1,028 - 1,013) \cdot 10^{-5}}{800 \cdot 9,81} = 0,19 \text{ m}$

Exercice IV

1. Dimensionnement d'une turbine

- a. Exprimer l'énergie potentielle E_p d'une masse m d'eau placée à une altitude h .

Cours « Aspect énergétique » : $E_p = m g h$

- b. Cette eau est turbinée pendant une durée Δt et l'énergie produite l'est avec une puissance notée P et un rendement supposé égal à un. Rappeler la relation entre l'énergie, la puissance et la durée. En déduire l'expression de P en fonction du débit-masse, de l'accélération de la pesanteur et de la hauteur de chute.

Relation entre énergie, puissance et durée : $E_p = P \cdot \Delta t$ soit $P = \frac{m g h}{\Delta t}$ en remplaçant E_p par

l'expression précédente et comme $q_m = \frac{m}{\Delta t}$ alors $P = q_m g h$

- c. Calculer la puissance pour un dénivelé de 918 m et un débit de $19,5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Application numérique : $P = 19,5 \cdot 10^3 \times 9,81 \times 918 = 176 \text{ MW}$

2. Le texte encadré ci-contre est un extrait de la notice d'une « turbine hydro-électrique de 1000 W à 1500 W » (<http://www.energiesdouce.com>).

Calculer la puissance mécanique disponible puis la puissance mécanique utile maximale. Les indications commerciales sont-elles raisonnables ?

« Pour bien fonctionner , une turbine type "PELTON" a besoin de :

1. Un bon dénivelé de 15 mètres
2. Un débit de 750 à 900 litres / minute
3. Une tuyauterie d'un diamètre suffisant (\varnothing 125 à 150 mm)
4. D'un design de la turbine permettant un rendement d'au moins 50 à 60 % »

D'après la relation $P = q_m g h$, $P_1 = \frac{750}{60} \times 9,81 \times 15 = 1840 \text{ W}$. Avec un rendement de 60% (maximal),

on obtient $P_2 = \eta \cdot P_1 = 0,6 \times 1840 = 1104 \text{ W}$. Les indications commerciales sont un peu optimistes puisqu'il faudra enlever les pertes de l'alternateur à ces 1104 W.

Exercice V

Le débit en entrée d'une canalisation est égal à 10 L/min, la section est égale à 3 cm^2 . Calculer la vitesse du fluide en entrée de la canalisation.

À l'autre extrémité, la section est égale à $0,5 \text{ cm}^2$. Calculer la vitesse du fluide.

La vitesse peut être calculée à partir de la relation $q_v = v_{1 \text{ moy}} \cdot S_1$ soit $v_{1 \text{ moy}} = \frac{q_v}{S_1} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-4}} = 0,56 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

La vitesse en sortie de la canalisation peut être calculée à partir de l'équation de continuité :

$$v_{2 \text{ moy}} = v_{1 \text{ moy}} \frac{S_1}{S_2} = 0,56 \cdot \frac{3}{0,5} = 3,36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Exercice VI : étude d'un siphon

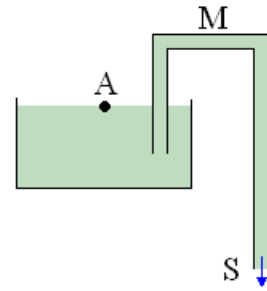
Un siphon permet l'écoulement de l'eau d'un réservoir de grandes dimensions.

Il est constitué par un tuyau de 0,10 m de diamètre dont la ligne centrale s'élève à 4 m au-dessus du niveau de la surface libre.

On souhaite que le débit soit maximal.

La pression atmosphérique, notée P_0 , est égale à 1013 hPa.

On prendra $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$



1. Quelle est la plus petite valeur possible de la pression au point M ? Cette valeur correspond au débit maximum.

La relation de Bernoulli $\frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g h_A + p_A = \frac{1}{2} \rho v_M^2 + \rho g h_M + p_M$ donne :

$$\frac{1}{2} \rho (v_A^2 - v_M^2) + \rho g (h_A - h_M) + p_A - p_M = 0$$

Les débits en A et M sont égaux donc $q_v = v_A \cdot S_A = v_M \cdot S_M$ soit

$$\frac{1}{2} \rho q_v^2 \left(\frac{1}{S_A^2} - \frac{1}{S_M^2} \right) = \rho g (h_M - h_A) + p_M - p_A = 0$$

$$q_v^2 = \frac{2 \rho g (h_M - h_A) + p_M - p_A}{\rho \left(\frac{1}{S_A^2} - \frac{1}{S_M^2} \right)} \quad \text{donc} \quad q_v = \sqrt{\frac{2 \rho g (h_M - h_A) + p_M - p_A}{\rho \left(\frac{1}{S_A^2} - \frac{1}{S_M^2} \right)}} = \sqrt{\frac{2 \rho g (h_A - h_M) + p_A - p_M}{\rho \left(\frac{1}{S_M^2} - \frac{1}{S_A^2} \right)}}$$

Dans cette expression, h_M , h_A , S_M , S_A et p_A sont fixés, le débit est maximal si p_M est minimale c'est à dire nulle. En pratique, si la pression devient très faible, le liquide peut se vaporiser et entraîner le phénomène de cavitation.

2. Exprimer le théorème de Bernoulli aux points A et M, simplifier cette relation pour une pression P_M nulle. En déduire la vitesse de l'eau au point M.

Avec p_M nulle, l'équation de Bernoulli devient $\frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g h_A + p_A = \frac{1}{2} \rho v_M^2 + \rho g h_M$. La vitesse du fluide à la surface du liquide est très proche de zéro car sa section est très grande devant celle du tube, l'équation se simplifie encore : $\rho g h_A + p_A = \frac{1}{2} \rho v_M^2 + \rho g h_M$

$$v_M^2 = \frac{2}{\rho} [\rho g (h_A - h_M) + p_A] \quad \text{soit} \quad v_M = \sqrt{2 g (h_A - h_M) + \frac{2 \cdot p_A}{\rho}}$$

$$v_M = \sqrt{2 \times 9,81 \times (-4) + \frac{2 \times 1013 \times 10^2}{1000}} = 11,1 \text{ m.s}^{-1}$$

Remarque : la cote du point M est plus grande que celle du point A d'où $h_A - h_M = -4 \text{ m}$.

3. Calculer le débit maximal.

Le débit est donné par $q_v = v_M \cdot S_M$ et la section S_M du tube peut être calculée à partir de son diamètre $d_M = 0,1 \text{ m}$.

On obtient $q_v = v_M \cdot \frac{\pi \cdot d_M^2}{4} = 11,1 \cdot \frac{\pi \times 0,1^2}{4} = 0,0864 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ soit $86,4 \text{ L.s}^{-1}$.

4. Calculer la cote de la sortie S.

Relation de Bernoulli aux points A et S : $\frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g h_A + p_A = \frac{1}{2} \rho v_S^2 + \rho g h_S + p_S$. Elle peut être simplifiée car les pressions statiques sont égales en ces deux points (p_A et p_S sont égales à la pression atmosphérique) et que la vitesse au point A est très proche de zéro : $\rho g h_A = \frac{1}{2} \rho v_S^2 + \rho g h_S$ soit

$$h_A - h_S = \frac{1}{2 \cdot g} v_S^2$$

$h_A - h_S = \frac{1}{2.9,81} 11,1^2 = 6,17 \text{ m}$. Le point A est plus haut de 6,17 m que le point S. Comme le point M est quatre mètres plus haut que le point A, on retrouve les dix mètres de colonne d'eau correspondant à la pression atmosphérique.

Exercice VII

1. Déterminer le régime d'écoulement (laminaire ou turbulent) dans les deux cas suivants :

- tube de verre, diamètre 2 cm, vitesse 2 m.s^{-1} , rugosité uniforme équivalent $0,2 \mu\text{m}$.
- tuyauterie de fonte, diamètre 60 cm, vitesse 3 m.s^{-1} , rugosité uniforme équivalent $0,3 \text{ mm}$.

Ces deux conduites véhiculent de l'eau dont la viscosité cinématique $\nu = 0,01 \text{ CGS}$. Dans le système CGS, les longueurs s'expriment en cm et les vitesses en cm.s^{-1} .

Le nombre de Reynolds est donné par $Re = \frac{vD}{\nu}$. La viscosité cinématique s'exprime en Pa.s (ou kg/m.s) dans le système international et en Poise (ou g/cm.s dans le système CGS).

Pour le tube de verre : $Re = \frac{2.10^2.2}{0,01} = 40000$, le régime est turbulent

Pour la tuyauterie de fonte : $Re = \frac{3.10^2.60}{0,01} = 1,8.10^6$, le régime est turbulent

2. Une installation domestique d'eau potable présente un débit de 20 L/min . Calculer le diamètre minimal D_{max} de la conduite d'eau pour que l'écoulement soit laminaire.

Le débit est donné par $q_v = v.S$ avec $S = \frac{\pi.D^2}{4}$ donc $v = \frac{4q_v}{\pi.D^2}$

Nombre de Reynolds : $Re = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{\rho D}{\eta} \cdot \frac{4q_v}{\pi.D^2} = \frac{4\rho q_v}{\eta \pi.D}$ soit $D = \frac{4\rho q_v}{\eta \pi.Re}$. Plus Re est faible, plus D est

grand, pour être en régime laminaire, il faut $Re < 2000$ soit $D_{\text{min}} = \frac{4.1000. \frac{20.10^{-3}}{60}}{1,002.10^{-3} \pi.2000} = 0,212 \text{ m}$

Exercice VIII

On pompe de l'huile de densité 0,86 par un tuyau horizontal de diamètre $D = 5,0 \text{ cm}$, de longueur $L = 300 \text{ m}$, avec un débit-volume de $1,20 \text{ L/s}$; la différence de pression entre les extrémités du tuyau vaut $20,6.10^4 \text{ Pa}$.

Pour un écoulement laminaire, le débit-volume q_v est relié aux dimensions du tuyau, rayon intérieur r et longueur l , à la viscosité cinématique η et aux pressions p_1 et p_2 en début et fin de tuyau par

$$q_v = \frac{\pi.r^4}{8.\eta.l} \cdot (p_1 - p_2) \quad (\text{loi de Poiseuille}).$$

Les viscosités cinématique η et dynamique ν sont reliées par $\eta = \rho \nu$ avec ρ la masse volumique.

1. Calculer les viscosités cinématique et dynamique de l'huile en supposant un écoulement laminaire.

D'après la loi de Poiseuille $q_v = \frac{\pi.r^4}{8.\eta.l} \cdot (p_1 - p_2)$ donc $\eta = \frac{\pi.r^4}{8.q_v.l} \cdot (p_1 - p_2)$

$$\eta = \frac{\pi.(2,5.10^{-2})^4}{8.1,2.10^{-3}.300} \cdot 20,6.10^4 = 87,8.10^{-3} \text{ Pa.s} \quad \text{La viscosité cinématique est donné par} \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

et $\rho = 860 \text{ kg.m}^{-3}$ donc $\nu = 87,8 \cdot \frac{10^{-3}}{860} = 1.10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

2. Calculer le nombre de Reynolds et justifier l'hypothèse de l'écoulement laminaire.

Nombre de Reynolds : $Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\eta}$ et $v = \frac{q_v}{S}$ et $S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ donc $Re = \frac{4 \cdot \rho \cdot q_v \cdot D}{\pi \cdot D^2 \cdot \eta}$

$$Re = \frac{4 \cdot \rho \cdot q_v}{\pi \cdot D \cdot \eta} = \frac{4 \cdot 860 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 87,8 \cdot 10^{-3}} = 299 \quad , \text{ on vérifie que l'écoulement est laminaire.}$$

Exercice IX : étude économique du revêtement d'une galerie

Une galerie de section circulaire dont la longueur L est de 4 km est destinée à amener en charge un débit q_v de $50 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ d'eau à une centrale hydroélectrique.

Brute de perforation, elle présente un diamètre moyen égal à $D_1 = 6 \text{ m}$ et des aspérités dont les dimensions moyennes sont de $k = 0,60 \text{ m}$.

On envisage de la revêtir de béton, ce qui ramènerait son diamètre à $D_2 = 4,80 \text{ m}$. En éliminant les aspérités, le coefficient de perte de charge serait alors égal à $\lambda_2 = 0,02$.

1. Calculer les vitesses V_1 et V_2 de l'eau dans la galerie avant et après le bétonnage.

On utilise la relation entre le débit, la vitesse d'écoulement et la section soit

$$V_1 = \frac{q_v}{S_1} = \frac{4 \cdot q_v}{\pi \cdot D_1^2} = \frac{4 \times 50}{\pi \times 6^2} = 1,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{q_v}{S_2} = \frac{4 \cdot q_v}{\pi \cdot D_2^2} = \frac{4 \times 50}{\pi \times 4,8^2} = 2,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Les pertes de charge ΔH en mCF en fonction des caractéristiques de la galerie (longueur L et diamètre D), de la vitesse v et du coefficient λ de perte de charge linéaire sont obtenues par $\Delta H = \lambda \frac{v^2}{2g} \frac{L}{D}$

On note ΔH_1 les pertes de charge en mCF et λ_1 le coefficient de perte de charge linéaire avant le bétonnage de la galerie.

2. Si la rugosité est importante, la formule empirique de Karman-Prandtl permet de déterminer la valeur de

$$\lambda_1 : \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,74 + 2 \log \frac{D}{2k} \quad \text{avec } k \text{ la dimension équivalente des rugosités.}$$

Calculer la valeur numérique λ_1 du coefficient de perte de charge linéaire avant le bétonnage.

D'après les données de l'énoncé $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,74 + 2 \log \frac{D}{2k} = 1,74 + 2 \log \frac{6}{2 \times 0,6} = 3,138$ donc $\lambda = 0,101$

3. En déduire la valeur numérique des pertes de charge ΔH_1 en mCF puis en Pa.

Pertes de charge avec la conduite « brute » $\Delta H_1 = 0,101 \frac{1,76^2}{2 \times 9,81} \frac{4 \cdot 10^3}{6} = 10,6 \text{ mCF}$ soit

$$\Delta p_1 = \rho \cdot g \cdot \Delta H_1 = 1000 \times 9,81 \times 10,6 = 1040 \text{ hPa}$$

4. Rappeler la relation entre les pertes de charge, la puissance hydraulique correspondante et le débit volumique. Calculer la perte de puissance due à ces pertes de charge.

La puissance est notée P_1 ce qui donne $\rho \cdot g \cdot \Delta H_1 = \frac{P_1}{q_v}$ soit

$$P_1 = \rho \cdot g \cdot \Delta H_1 \cdot q_v = 1000 \times 9,81 \times 10,6 \times 50 = 5,22 \text{ MW}$$

5. Dans le cas où la galerie est revêtue de béton, calculer les nouvelles pertes de charge ΔH_2 en mCF puis en Pa.

On utilise le nouveau coefficient de perte de charge (voir énoncé) et on obtient

$$\Delta H_2 = 0,02 \frac{2,76^2}{2 \times 9,81} \frac{4 \cdot 10^3}{4,8} = 6,47 \text{ mCF} \quad \text{ce qui donne une puissance équivalente}$$

$$P_2 = \rho \cdot g \cdot \Delta H_2 \cdot q_v = 1000 \times 9,81 \times 6,47 \times 50 = 3,17 \text{ MW}$$

6. Sachant que la durée annuelle de fonctionnement est égale à 3000 heures, en déduire l'énergie qui serait économisée.

L'énergie économisée est égale à la différence entre les deux puissances multipliée par la durée de

fonctionnement soit $\Delta W = (P_1 - P_2) \cdot \Delta h = (5,22 - 3,17) \cdot 3000 = 6150 \text{ MWh}$

7. Le coût du bétonnage est de 180 euros le m^3 , le prix du kWh est de 0,1 euro. En déduire la durée du retour sur investissement. Conclusions ?

Calcul du volume de béton nécessaire :

la section est passée de 6 m à 4,8 m sur 4000 m soit $V_{\text{béton}} = \frac{\pi}{4} \cdot (6^2 - 4,8^2) \cdot 4000 = 40715 \text{ m}^3$

le coût total du bétonnage : $180 \times 40715 = 7,33 \text{ M€}$

L'énergie économisée pendant un an engendre une économie de 615 k€. Il faut donc

$$7,33 \frac{.10^6}{615.10^3} \approx 12 \text{ ans pour le retour sur investissement.}$$

Exercice X : installation de turbinage

Une installation hydroélectrique est constituée d'une retenue amont, d'une conduite forcée de section $0,5 \text{ m}^2$ et d'une turbine située 500 m plus bas que le niveau de la retenue. Le débit dans la conduite forcée est de 500 L/s. Toutes les pertes de charge sont négligées.

1. Vitesses

a. Calculer la vitesse de l'eau dans la conduite forcée.

D'après la relation de continuité $v_1 S_1 = v_2 S_2 = q_v$ avec v_1 la vitesse dans le réservoir et v_2 celle dans la canalisation.

$$v_2 = \frac{q_v}{S_2} = \frac{500 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-1}} = 1 \text{ m/s}$$

b. Rappeler l'équation reliant les sections du réservoir, notée S_1 , et de la conduite forcée, notée S_2 , et les vitesses de l'eau dans la retenue, notée v_1 , et dans la conduite, notée v_2 (équation de continuité). La section du réservoir étant très grande devant celle de la conduite, en déduire que la vitesse de l'eau dans le réservoir est négligeable.

Puisque $v_1 S_1 = v_2 S_2 = q_v$ et que S_1 est très grande devant S_2 alors v_1 est très faible devant v_2 .

2. Puissance échangée

La relation de Bernoulli pour l'écoulement de l'eau du réservoir (repéré par l'indice 1) vers la turbine (repéré par l'indice 2) s'écrit : $p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{P}{q_v} = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$

ρ est la masse volumique de l'eau : $\rho = 1000 \text{ kg.m}^3$,

z_1 et z_2 représentent les cotes de la retenue et de la turbine,

v_1 et v_2 sont les vitesses de l'eau au niveau de la retenue et de la turbine,

p_1 et p_2 sont les pressions statiques au niveau de la retenue et de la turbine. Elles sont égales à la pression atmosphérique.

P est la puissance échangée par l'eau entre le réservoir et la turbine.

q_v est le débit volumique.

Pour les calculs, l'accélération de la pesanteur g est égale à 10 m.s^{-2} .

a. Récrire l'équation de Bernoulli en supprimant les termes nuls ou négligeables.

D'après ce qui précède $v_1 \approx 0$ et $p_1 = p_2$, l'équation de Bernoulli devient

$$\rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{P}{q_v} = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

b. Exprimer la puissance P en fonction de g , ρ , q_v , S_2 , z_1 et z_2 .

D'après la question précédente $\rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{P}{q_v} = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$ donc $P = q_v \left[\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1) \right]$ et
comme $v_2 = \frac{q_v}{S_2}$ alors $P = q_v \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{q_v}{S_2} \right)^2 + \rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1) \right]$

c. Calculer P .

$P = 500 \cdot 10^{-3} \left[\frac{1}{2} 1000 \left(\frac{500 \cdot 10^{-3}}{0,5} \right)^2 + 1000 \cdot 10 \cdot (0 - 500) \right] = -2500 \text{ kW}$ cette puissance est négative car l'eau cède de l'énergie à la turbine.

3. Puissance et énergie potentielle

a. Rappeler la relation donnant l'énergie potentielle d'une masse m placée à une altitude h .

L'énergie potentielle est donnée par $E_p = mgh$

b. Calculer l'énergie potentielle d'une masse d'eau de 1000 kg placée à 500 m.

D'après la question précédente $E_p = 1000 \times 10 \times 500 = 5 \cdot 10^6 \text{ J}$

c. Cette quantité d'eau descend avec un débit de 500 L/s (1 L d'eau a une masse de 1 kg). Calculer la durée de l'écoulement.

On note Δt la durée de l'écoulement : $\Delta t = \frac{\Delta v}{q_v}$ avec $\Delta v = 1000 \text{ L}$ donc $\Delta t = \frac{1000}{500} = 2 \text{ s}$

d. Calculer la puissance correspondante et comparer avec le résultat de la question 2.c.

La puissance correspondante est $P = \frac{E_p}{\Delta t}$ soit $P = \frac{5 \cdot 10^6}{2} = 2500 \text{ kW}$ ce qui est cohérent avec le résultat de la question 2.c.

Exercice XI : installation de turbinage

Une installation hydroélectrique comporte une retenue d'eau amont, trois conduites forcées parallèles de diamètre 300 cm chacune, un ensemble de turbines, un bassin aval selon le schéma donné ci-dessous. Lors du turbinage, le débit-volume total est $q_v = 217 \text{ m}^3/\text{s}$. On supposera nulles les vitesses de l'eau dans les retenues aval (1) et amont (3).

1. Calculer la vitesse d'écoulement de l'eau dans les conduites forcées.

$q_v = v \cdot S$ et $S = 3 \frac{\pi \cdot D^2}{4}$ avec D le diamètre d'une conduite donc $q_v = 3 \cdot v \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$. La vitesse d'écoulement de l'eau est $v = \frac{4 \cdot q_v}{3 \cdot \pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 217}{3 \cdot \pi \cdot 3} = 10,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

2. Calculer le nombre de Reynolds pour l'écoulement de l'eau dans une conduite forcée ; l'écoulement est-il laminaire ou turbulent ?

$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{10,2 \cdot 3}{10^{-6}} = 30,6 \cdot 10^6$, l'écoulement est turbulent.

3. Calculer les pertes de charge dans une conduite forcée entre les points 1 et 2.

L'eau s'écoule de la retenue (1) vers la turbine (2), la vitesse de l'eau au niveau de la retenue est supposée nulle. La relation de Bernoulli s'écrit $p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \Delta p$; Δp : pertes de charge.

$\Delta p = p_1 - p_2 + \rho \cdot g \cdot (z_1 - z_2) - \frac{1}{2} \rho v_2^2 = 10^5 - 73 \cdot 10^5 + 1000 \cdot 9,81 \cdot (1695 - 740) - 500 \cdot 10,2^2 = 21,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

4. Calculer la puissance échangée entre l'eau et le milieu extérieur dans l'ensemble des turbines entre les points 2 et 3 en supposant qu'il n'y a pas de pertes de charge lors de cet échange.

Puissance reçue par l'eau lors de l'écoulement à travers la turbine : passage de (2) vers (3). La vitesse est supposée nulle en (3), les cotes en (2) et (3) sont égales, la puissance reçue par l'eau est notée P . La relation

de Bernoulli s'écrit $p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \frac{P}{q_v} = p_3$ ce qui donne $P = q_v (p_3 - p_2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2)$

$P = 217(1,1 \cdot 10^5 - 73 \cdot 10^5 - 500 \cdot 10,2^2) = -1571 \cdot 10^6 \text{ W} = -1571 \text{ MW}$, la puissance reçue est négative, l'eau a transmis de la puissance à la turbine.

5. La puissance utile fournie par les turbines est de 1200 MW. Calculer le rendement des turbines.

Relation donnant le rendement des turbines : $\eta = \frac{P_u}{P}$ avec P_u la puissance utile : $\eta = \frac{1200}{1571} = 76,4 \%$

On donne :

viscosité cinématique de l'eau : $1,00 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

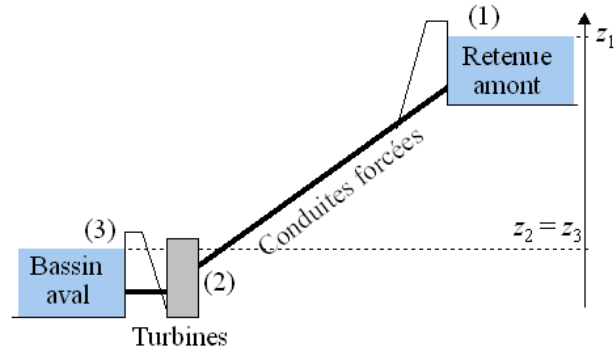
$p_1 = p_3 = 1100 \text{ mbar}$

$p_2 = 73 \text{ bar}$

$z_1 = 1695 \text{ m}$

$z_2 = z_3 = 740 \text{ m}$

$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$



Exercice XII : installation de turbinage

Une communauté de commune d'une région de montagne a décidé d'implanter une station d'épuration 700 m plus bas qu'une agglomération. Pour récupérer l'énergie des eaux usées, une turbine Pelton accouplée à un alternateur a été installée. Les caractéristiques de l'installation sont les suivantes :

Dénivelé de 680 m, débit 95 L/s, puissance turbinée 518 kW, diamètre des canalisations 30 cm.

La relation de Bernoulli pour un fluide se déplaçant d'une position 1 vers une position 2 en recevant une puissance P et avec des pertes de charge Δp s'écrit : $p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 - \Delta p + \frac{P}{q_v} = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$

avec z_1 et z_2 les cotes des positions 1 et 2 ; v_1 et v_2 les vitesses du fluide aux positions 1 et 2 ; p_1 et p_2 les pressions du fluide aux positions 1 et 2 et q_v le débit volumique.

1. Calculer la différence de pression atmosphérique entre l'amont et l'aval de la canalisation. Par la suite, cette différence est négligée.

Cette différence est calculée par $\Delta P_a = \rho g \Delta h$ avec $\rho = 1,24 \text{ kg/m}^3$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ et $\Delta h = 680 \text{ m}$ ce qui donne $\Delta P_a = 1,24 \times 9,81 \times 680 = 8270 \text{ Pa}$

2. La vitesse initiale de l'eau est supposée nulle, on néglige les pertes de charge et la différence de pression.

a. Simplifier la relation de Bernoulli et établir l'expression de la puissance

La vitesse au niveau du réservoir supérieur est supposée nulle donc $v_1 = 0$; $\Delta p = 0$ d'après l'énoncé et $p_1 = p_2$ d'après la question précédente.

L'équation de Bernoulli devient $\rho g z_1 + \frac{P}{q_v} = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$ ce qui donne $P = q_v [\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g (z_2 - z_1)]$

b. Quel doit être le signe de P dans ce cas ?

Le signe doit être négatif car c'est le fluide qui fournit de l'énergie lors de son déplacement de 1 vers 2.

c. Montrer que la puissance turbinée est plus élevée lorsque la vitesse de l'eau à l'arrivée est nulle.

Dans l'expression de la puissance trouvée au 2.a, on observe que la valeur absolue de P augmente si

$v_2 = 0$ car le terme $\frac{1}{2} \rho v_2^2$ est positif alors que $\rho g (z_2 - z_1)$ est négatif.

3. Calculer la puissance P sans tenir compte des pertes de charge et en supposant nulle la vitesse de l'eau à l'arrivée.

L'équation $P = q_v \left[\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g (z_2 - z_1) \right]$ devient $P = q_v \rho g (z_2 - z_1)$ ce qui donne

$$P = 95.10^{-3} \times 1000 \times 9,81 \times 680 = 634 \text{ kW}$$

4. En comparant la puissance turbinée avec celle calculée à la question précédente, évaluer la valeur des pertes de charge (résultat à donner en Pa).

On note P_t la puissance turbinée (soit 518 kW), la puissance perdue dans la canalisation est $P_p = P - P_t$ soit $P_p = 116 \text{ kW}$

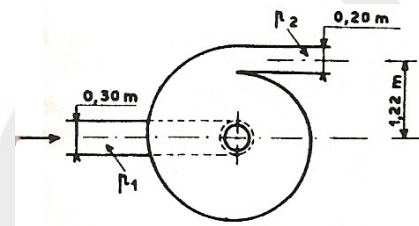
Cette puissance correspond aux pertes de charge $\Delta p = \frac{P_p}{q_v} = \frac{116.10^3}{95.10^{-3}} = 12,2.10^5 \text{ Pa}$

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$; pression atmosphérique : 10^5 Pa ; masse volumique de l'eau : 1000 kg/m^3 ; masse volumique de l'air : $1,24 \text{ kg/m}^3$.

Exercice XIII : dimensionnement d'une pompe

Une pompe débite 9000 L d'eau par minute. Sa conduite d'aspiration horizontale a un diamètre de 0,30 m. Sur l'axe règne une pression p_1 de 0,20 m de mercure au-dessous de la pression atmosphérique.

Sa conduite de refoulement, horizontale a un diamètre de 0,20 m. Sur l'axe, situé 1,22 m plus haut que le précédent règne une pression p_2 de 0,7 bar supérieure à la pression atmosphérique.



Dans les équations, l'indice 1 est utilisé pour l'aspiration et l'indice 2 pour le refoulement.

1. Exprimer p_1 et p_2 en pascal par rapport à la pression atmosphérique.

À l'aspiration : $\Delta p_1 = \Delta h_1 \cdot \rho \cdot g = 0,20 \times 9,81 \times 13546 = 26580 \text{ Pa}$. La pression est inférieure à la pression atmosphérique soit $p_1 = p_{\text{atm}} - \Delta p_1 = 1013.10^2 - 26580 = 74800 \text{ Pa}$.

Au refoulement : 1 bar correspond à 10^5 Pa , la surpression au refoulement est $\Delta p_2 = 70000 \text{ Pa}$ soit une pression $p_2 = p_{\text{atm}} + \Delta p_2 = 1013.10^2 + 70000 = 171300 \text{ Pa}$

2. En déduire la différence de pression $p_2 - p_1$.

D'après ce qui précède $p_2 - p_1 = 171300 - 74800 = 96500 \text{ Pa}$

3. Calculer les vitesses de l'eau au niveau de la conduite d'aspiration et de la conduite de refoulement.

On utilise la relation entre le débit, la section et la vitesse de l'écoulement :

$$q_v = v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 \quad \text{et} \quad S_1 = \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \quad \text{donc} \quad v_1 = \frac{4 \cdot q_v}{\pi \cdot D_1^2} = \frac{4 \cdot 9/60}{\pi \cdot 0,30^2} = 2,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et}$$

$$v_2 = \frac{4 \cdot q_v}{\pi \cdot D_2^2} = \frac{4 \cdot 9/60}{\pi \cdot 0,20^2} = 4,77 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4. On suppose que les pertes de charge sont nulles, calculer l'énergie volumique développée par la pompe.

L'énergie volumique, notée E , s'exprime en $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$. Relation de Bernoulli :

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 + E = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2 \quad \text{donc} \quad E = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (z_2 - z_1) + p_2 - p_1$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot (4,77^2 - 2,12^2) + 1000 \cdot 9,81 \cdot 1,22 + 96500 = 117830 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

5. En déduire la puissance hydraulique correspondante.

Elle est donnée par la relation $P_h = E \cdot q_v = 117830 \cdot \frac{9}{60} = 17,7 \text{ kW}$

6. En supposant que le rendement de la pompe soit égal à 80%, calculer la puissance électrique absorbée par la pompe.

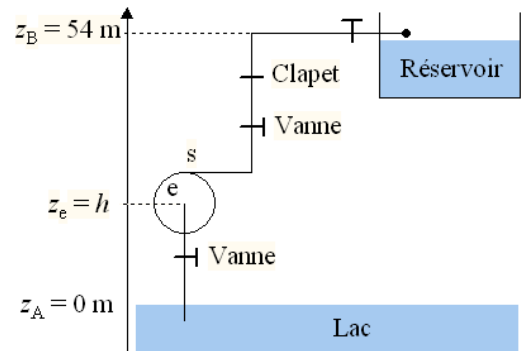
La puissance absorbée $P_a = \frac{P_h}{\eta} = \frac{17,7}{0,8} = 22,1 \text{ kW}$

Exercice XIV : installation de pompage

L'installation de pompage schématisée ci-contre refoule un débit $Q = 100 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ d'eau depuis un lac à la cote z_A , dont le niveau est constant, jusqu'à la cote $z_B = 54 \text{ m}$, pour alimenter un réservoir.

On prendra : $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; pression atmosphérique $p_{\text{air}} = 1.10^5 \text{ Pa}$.

Les conduites en fonte à l'aspiration et au refoulement ont un diamètre $D = 0,3 \text{ m}$; la longueur totale de conduites est $L_{\text{tot}} = 550 \text{ m}$. Elles provoquent une perte de charge linéique $j = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ de liquide par mètre de conduite droite.



La conduite comporte divers organes, mentionnés sur le schéma, avec leur coefficient K de pertes de charge provenant de la formule $\Delta h = K \frac{v^2}{2g}$.

$K_{\text{crépine}} = 8$; $K_{\text{vanne}} = 2$; $K_{\text{clapet}} = 3$; $K_{\text{coude à } 90^\circ} = 0,5$.

1. Calculer la vitesse d'écoulement v dans la conduite en régime permanent.

On utilise la relation $q_v = v \cdot S$ donc $v = \frac{q_v}{S} = \frac{\frac{100}{3600}}{\frac{\pi \cdot 0,3^2}{4}} = 0,39 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

2. Calculer les pertes de charge régulière J_R puis les pertes de charge singulière J_S dans la conduite. En déduire les pertes de charge totale J_{tot} .

Les pertes de charge régulière est due à la canalisation : $J_R = j \cdot L_{\text{tot}} = 7,5 \cdot 10^{-3} \cdot 550 = 4,125 \text{ mCE}$

Les pertes de charge singulière est du à la crépine (K_{cr}), aux trois vannes (K_{va}), au clapet (K_{cl}) et aux deux coudes (K_{co}) :

$$J_S = K_{\text{cr}} \cdot \frac{q_v^2}{2 \cdot g \cdot S^2} + 3 \cdot K_{\text{va}} \cdot \frac{q_v^2}{2 \cdot g \cdot S^2} + K_{\text{cl}} \cdot \frac{q_v^2}{2 \cdot g \cdot S^2} + 2 \cdot K_{\text{co}} \cdot \frac{q_v^2}{2 \cdot g \cdot S^2} = \frac{q_v^2}{2 \cdot g \cdot S^2} (K_{\text{cr}} + 3 \cdot K_{\text{va}} + 2 \cdot K_{\text{co}} + K_{\text{cl}})$$

$$J_S = \frac{0,39^2}{2 \cdot 9,81 \cdot \frac{\pi \cdot 0,3^2}{4}} (8 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0,5 + 3) = 1,974 \text{ mCE}$$

Les pertes de charge totales sont la somme des pertes de charge régulière et singulière :

$$J_{\text{tot}} = 1,974 + 4,125 = 6,099 \text{ mCE}$$

3. En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points A et B, déterminer la puissance absorbée par le moteur électrique d'entraînement de la pompe, le rendement global du groupe motopompe étant de 70 %.

La relation de Bernoulli $\frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A + p_A + \frac{P_h}{q_v} = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B + p_B$ avec P_h la puissance hydraulique,

$$p_A = p_B \text{ et } v_A = 0 \text{ donne } \rho g z_A + \frac{P_h}{q_v} = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B \text{ donc } P_h = q_v \cdot \left[\frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g (z_B - z_A) \right]$$

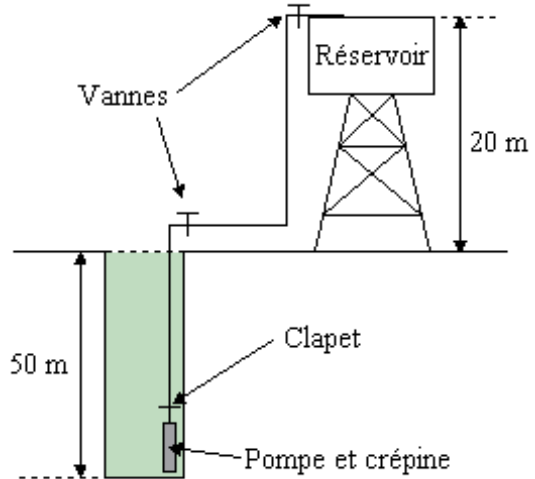
$$P_h = \frac{1000}{3600} \cdot \left(\frac{1}{2} 1000 \cdot 0,39^2 + 1000 \cdot 9,81 \cdot 54 \right) = 147 \text{ kW}$$

La puissance absorbée par le moteur est liée à la puissance hydraulique par $P_a = \frac{P_h}{\eta} = \frac{147}{0,7} = 210 \text{ kW}$

Exercice XV : installation de pompage

L'alimentation en eau d'une localité isolée se fait à partir d'un puits de 50 m de profondeur. Une pompe placée au fond du puits permet de remplir un réservoir situé à 20 m au dessus du sol. L'énergie électrique nécessaire au fonctionnement de la pompe est fournie par des panneaux photovoltaïques. Pour éviter l'utilisation de batteries (coûts d'achat et d'entretien), l'eau est stockée dans le réservoir lorsque l'énergie électrique fournie par les panneaux est suffisante. Les besoins quotidiens sont estimés à 10 m^3 et l'on souhaite une autonomie de cinq jours consécutifs (en cas d'ensoleillement insuffisant).

Le circuit de remplissage du réservoir est représenté ci-contre. Sa longueur totale est de 150 m et la canalisation a un diamètre égal à 5 cm. Le constructeur indique des pertes de charge de 1,8 mCF pour 100 m. D'autre part pour les pertes singulières, il conseille de rajouter 10 m de tuyau fictif pour une crépine ou un clapet, 2 m de tuyau fictif pour un coude à 90° ou une vanne.



1. Calculer la taille minimale du réservoir.

D'après l'énoncé, il faut 10 m^3 pour une journée et 5 jours d'autonomie, le réservoir doit donc avoir une capacité de 50 m^3 .

2. Calculer le débit dans la canalisation de remplissage pour que le réservoir soit plein en dix heures, donner le résultat en m^3/h puis en m^3/s . En déduire la vitesse de l'eau dans la canalisation.

Pour remplir le réservoir en 10 heures, il faut un débit $q_v = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ avec $\Delta = 50 \text{ m}^3$ et $\Delta t = 10 \text{ h}$ ce qui donne $q_v = 5 \text{ m}^3/\text{h}$ ou $q_v = 1,39 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ (en divisant par 3600).

La vitesse v est obtenue à partir du débit et de la section S de la canalisation par $v = \frac{q_v}{S}$. La section de la canalisation $S = \frac{\pi D^2}{4}$ (D est le diamètre de la canalisation) d'où la vitesse :

$$v = \frac{4 q_v}{\pi D^2} = \frac{4 \times 1,39 \cdot 10^{-3}}{\pi 5 \cdot 10^{-2}} = 0,71 \text{ m/s}$$

3. Calculer les pertes de charge en mCF puis en Pa (ne pas oublier de tenir compte de tous les « accidents » de la canalisation).

Pertes de charge régulières : $\Delta h_1 = 1,8 \times 1,50 = 2,70 \text{ mCF}$

Pertes de charge singulières :

Crépine : 10 m, clapet : 10 m, coude à 90° : $3 \times 2 = 6 \text{ m}$ et vannes : $2 \times 2 = 4 \text{ m}$

Soit $\Delta h_2 = (10 \times 2 + 6 + 4) \cdot \frac{1,8}{100} = 0,54 \text{ mCF}$

Pertes de charge totales : $\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 = 2,70 + 0,54 = 3,24 \text{ mCF}$ ce qui donne $\Delta p = \rho g \Delta h = 1000 \times 10 \times 3,24 = 32400 \text{ Pa}$

La relation de Bernoulli pour un fluide se déplaçant d'une position 1 vers une position 2 en recevant une puissance P et avec des pertes de charge Δp s'écrit : $p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 - \Delta p + \frac{P}{q_v} = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$

avec z_1 et z_2 les cotes des positions 1 et 2 ; v_1 et v_2 les vitesses du fluide aux positions 1 et 2 ; p_1 et p_2 les pressions du fluide aux positions 1 et 2 et q_v le débit volumique.

La pression dans la partie vide du réservoir est égale à la pression atmosphérique.

4. Justifier les affirmations suivantes :

- a. les pressions à la surface de l'eau du puits et dans le réservoir sont peu différentes.

La différence d'altitude entre la surface de l'eau dans le puits et celle dans le réservoir est trop petite pour avoir une influence notable sur les pressions, les deux pressions sont donc égales à la pression atmosphérique.

- b. la vitesse de l'eau au fond du puits est nulle.

La taille du puits est suffisamment importante pour que la vitesse de l'eau soit très faible.

5. Simplifier la relation de Bernoulli et exprimer la puissance P en fonction du débit volumique, de la vitesse de l'eau dans la canalisation, de la différence d'altitude entre le puits et le réservoir, des pertes de charge et de l'accélération de la pesanteur. Calculer P .

D'après ce qui précède $p_1 = p_2$ et la vitesse v_1 de l'eau au fond du puits est supposée nulle donc

$$\rho g z_1 - \Delta p + \frac{P}{q_v} = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$$

On obtient $P = q_v \left[\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g (z_2 - z_1) + \Delta p \right] = 1,39 \cdot 10^{-3} \left[\frac{1}{2} 1000 \times 0,71^2 + 1000 \times 10 (50 - (-20)) + 32400 \right]$

$$P = 1,39 \cdot 10^{-3} (252 + 700000 + 32400) = 1018 \text{ W}$$

6. Le groupe motopompe utilisé a un rendement de 75%, calculer la puissance électrique nécessaire.

Puissance électrique notée P_e et rendement noté η : $\eta = \frac{P}{P_e}$ d'où $P_e = \frac{P}{\eta} = \frac{1018}{0,75} = 1360 \text{ W}$

7. Les pertes de charge d'une canalisation de diamètre 3 cm sont égales à 9 mCF pour 100 m. Calculer la longueur fictive (tenant compte des « accidents » de la canalisation) maximale de la canalisation entre le réservoir et un utilisateur si la pression de l'eau en sortie du robinet d'utilisation doit être égale à 1,5 fois la pression atmosphérique pour un débit de 15 L/min.

Pression à la sortie du robinet : $P_2 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Vitesse de l'eau à la sortie du robinet : $v_2 = \frac{q_v}{S_2}$ avec $S_2 = \frac{\pi D^2}{4}$ et $D = 0,03 \text{ m}$ et $q_v = 15 \text{ L/min}$

Conversion du débit en m^3/s : $q_v = \frac{15 \cdot 10^{-3}}{60} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$

D'où la vitesse $v_2 = \frac{4 q_v}{\pi D^2} = \frac{4 \times 2,5 \cdot 10^{-4}}{\pi \times 0,03^2} = 0,35 \text{ m/s}$

La vitesse dans le réservoir est supposée nulle car sa section est très importante devant celle de la canalisation, la puissance reçue ou transmise par le liquide est nulle ($P = 0$).

L'équation de Bernoulli devient $p_1 + \rho g z_1 - \Delta p = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$

D'où l'expression des pertes de charge : $\Delta p = p_1 - p_2 + \rho g (z_1 - z_2) - \frac{1}{2} \rho v_2^2$

Ce qui donne $\Delta p = 10^5 - 1,5 \cdot 10^5 + 1000 \times 10 (20 - 0) - \frac{1}{2} 1000 \times 0,35^2 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Pour 100 m de canalisation $\Delta p_{100} = \rho g \Delta h = 1000 \times 10 \times 9 = 90000 \text{ Pa}$

d'où la longueur maximale de canalisation $l_{\max} = \frac{\Delta p}{\Delta p_{100}} = \frac{1,5 \cdot 10^5}{90 \cdot 10^3} = 167 \text{ m}$

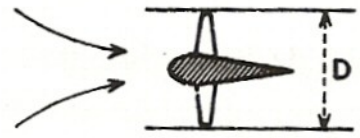
Pression atmosphérique : 10^5 Pa ; masse volumique de l'eau : 1000 kg/m^3 ; $g = 10 \text{ m/s}^2$

Exercice XVI : rendement d'un ventilateur

Un ventilateur à l'air libre reçoit d'un moteur une puissance électrique de 27 kW et produit un courant d'air uniforme de vitesse 40 m/s.

Le tube cylindrique de diamètre $D = 0,80 \text{ m}$ est ouvert à l'air libre.

La masse volumique de l'air est égale à $1,25 \text{ kg.m}^{-3}$.



L'indice 1 est utilisé pour l'entrée du ventilateur et l'indice 2 pour la sortie.

1. Calculer la puissance hydraulique fournie par le ventilateur.

Relation de Bernoulli : $\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 + E = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2$ et $z_1 = z_2$ et $p_1 = p_2$ (pression atmosphérique). La vitesse de l'air à l'entrée du ventilateur est très inférieure à celle en sortie, la relation de Bernoulli devient $E = \frac{1}{2} \rho v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 40^2 = 1000 \text{ J.m}^{-3}$

La puissance hydraulique $P_h = E \cdot q_v$ et $q_v = v \cdot S = v \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$ donc

$$P_h = E \cdot v \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 1000 \cdot 40 \cdot \frac{\pi \cdot 0,8^2}{4} = 20,1 \text{ kW}$$

2. Calculer le rendement de l'installation.

Le rendement du ventilateur $\eta = \frac{P_h}{P_a} = \frac{20,1}{27} = 0,744$

Exercice XVII : ventilation mécanique contrôlée

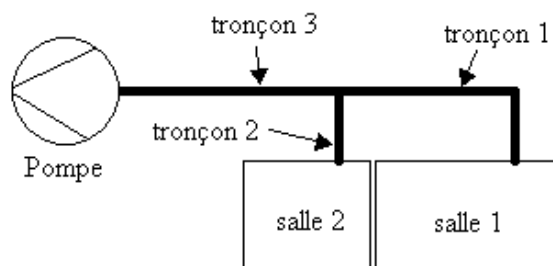
Cet exercice porte sur le dimensionnement d'une installation de renouvellement d'air : son objectif est d'extraire l'air vicié de deux salles d'un restaurant pour le remplacer par un air sain. Le nombre de renouvellements par heure préconisé est égal à 10 (le volume d'air de la pièce doit être renouvelé 10 fois par heure). Pour limiter le bruit, la vitesse de l'air dans les canalisations ne devra pas dépasser 5 m/s.

Le schéma ci-dessous représente l'installation :

Les salles ont les dimensions suivantes :

- salle 1 : hauteur sous plafond égale à 3,5 m ; longueur égale à 20 m et largeur égale à 8 m.
- salle 2 : hauteur sous plafond égale à 3,5 m ; longueur égale à 10 m et largeur égale à 6 m.

Les conduites de l'installation sont circulaires, le tronçon 3 a une longueur de 5 m, le tronçon 1 une longueur de 6 m et le tronçon 2 une longueur de 4 m.



La relation de Bernoulli pour un fluide réel s'écoulant d'un point A vers un point B s'écrit :

$$\frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2) + \rho g (z_B - z_A) + p_B - p_A = \frac{P}{Q_v} - \Delta p \quad \text{avec } v_B \text{ et } v_A \text{ les vitesses du fluide aux points B et A,}$$

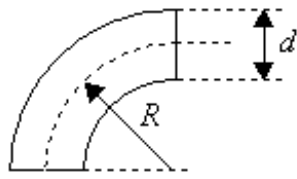
z_B et z_A , les cotes des points B et A, p_B et p_A les pressions statiques aux points B et A, P la puissance reçue par le fluide, Q_v le débit volumique du fluide et Δp les pertes de charge.

La masse volumique de l'air sera prise égale à $1,2 \text{ kg/m}^3$.

Les pertes de charge régulières sont obtenues à partir de l'abaque de la page 5.

Les pertes de charge singulières sont obtenues par la relation $\Delta p_s = K \frac{\rho v^2}{2}$ avec ρ la masse volumique du fluide et v sa vitesse.

- Pour les coudes de la canalisation, K est déterminé à partir du tableau suivant :



R/d	0,5	0,75	1	1,5	2
K	1	0,45	0,30	0,20	0,20

R est le rayon de courbure de la conduite.

- Le « Té » assurant la jonction entre des tronçons 1 et 2 avec le tronçon 3 présente un coefficient $K = 1,4$.
- Chaque bouche d'extraction présente un coefficient $K = 0,7$.

1. Calcul des sections de conduites de l'installation

- Calculer le volume de chaque salle et en déduire les débits Q_{v1} et Q_{v2} dans les canalisations des tronçons 1 et 2.

Volume de la salle 1 : $V_{\text{salle 1}} = 3,5 \times 20 \times 8 = 560 \text{ m}^3$

Volume de la salle 2 : $V_{\text{salle 2}} = 3,5 \times 10 \times 6 = 210 \text{ m}^3$

L'air des salles devant être renouvelé 10 fois par heure, cela correspond à un débit $Q_{v1} = 5600 \text{ m}^3/\text{h}$ pour la salle 1 et $Q_{v2} = 2100 \text{ m}^3/\text{h}$ pour la salle 2.

- En déduire les sections S_1 et S_2 de ces canalisations pour que la vitesse maximale admissible ne soit pas dépassée.

Le débit Q_v , la vitesse v et la section S sont reliées par $Q_v = v \cdot S$ ce qui donne $S = \frac{Q_v}{v}$ (attention : le débit doit être exprimé en m^3/s).

Pour la conduite reliée à la salle 1 (tronçon 1) : $S_1 = \frac{Q_{v1}}{v} = \frac{5600/3600}{5} = 0,31 \text{ m}^2$

Pour la conduite reliée à la salle 2 (tronçon 2) : $S_2 = \frac{Q_{v2}}{v} = \frac{2100/3600}{5} = 0,117 \text{ m}^2$

- Calculer le débit Q_{v3} dans la canalisation principale (tronçon 3) et en déduire sa section.

Le débit dans ce tronçon est égal à la somme des débits dans les deux autres tronçons soit

$$Q_{v3} = Q_{v1} + Q_{v2} = 5600 + 2100 = 7700 \text{ m}^3/\text{h} \quad \text{d'où la section} \quad S_3 = \frac{Q_{v3}}{v} = \frac{7700/3600}{5} = 0,43 \text{ m}^2$$

Les sections calculées précédemment n'étant pas disponibles, on prendra des canalisations de diamètres $D_1 = 630 \text{ mm}$ (tronçon 1), $D_2 = 400 \text{ mm}$ (tronçon 2) et $D_3 = 800 \text{ mm}$ (tronçon 3).

- Calculer la vitesse de l'air dans le tronçon 1 avec le diamètre de canalisation choisi. Le cahier des charges est-il respecté en ce qui concerne la vitesse maximale dans cette conduite ?

La section est donnée par la relation $S_1 = \pi \frac{D_1^2}{4}$ d'où

$$v = \frac{Q_{v1}}{S_1} = \frac{Q_{v1}}{\pi \frac{D_1^2}{4}} = \frac{4 Q_{v1}}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 5600/3600}{\pi \times 0,63^2} = 4,99 \text{ m/s}$$

Le cahier des charges est respecté pour la vitesse dans cette canalisation.

Pour la suite, la vitesse de l'air dans les conduites est prise égale à 5 m/s .

2. Pertes de charge pour le tronçon 1

- a. Utiliser l'abaque de la page suivante pour déterminer les pertes de charge régulières dans la conduite du tronçon 1.

À l'intersection du débit de $5600 \text{ m}^3/\text{h}$ (graduation de gauche), de la droite correspondant à 5 m/s et de la droite correspondant au diamètre de 630 mm , on lit sur la graduation horizontale une valeur de $0,4 \text{ Pa/m}$ ce qui donne $\Delta p_r = 6 \times 0,4 = 2,4 \text{ Pa}$ pour tenir compte des six mètres de conduite.

- b. Le tronçon 1 comprend deux coudes de rayons égaux à 100 cm et une bouche d'extraction. Calculer la somme des pertes singulières pour ce tronçon.

Pour les deux coudes, le calcul de R/d donne $R/d = 1000/630 = 1,58$ soit une valeur proche de $1,5$ donc $K_c = 0,5$. Pour la bouche d'extraction $K_b = 0,7$ d'après l'énoncé.

Les pertes singulières s'écrivent donc :

$$\Delta p_s = 2 \times K_c \frac{\rho v^2}{2} + K_b \frac{\rho v^2}{2} = (2 \times K_c + K_b) \frac{\rho v^2}{2} = (2 \times 0,5 + 0,7) \frac{1,2 \times 5^2}{2} = 16,5 \text{ Pa}$$

- c. Déduire de ce qui précède les pertes de charge totales Δp_1 pour le tronçon 1.

Elles sont égales à la somme des pertes de charge régulières et singulières soit :

$$\Delta p_1 = 2,4 + 16,5 = 18,9 \text{ Pa}$$

3. Pression au point E1

Le point E_1 est le point du tronçon 1 juste avant la jonction avec le tronçon 2. On souhaite appliquer la relation de Bernoulli sur le tronçon 1 pour un filet d'air partant de la salle 1 (qui est à la pression atmosphérique) et allant à la pompe.

- a. Justifier que la vitesse de l'air dans la salle est supposée nulle.

La section de la salle S_{salle} est très grande devant celle de la canalisation et comme $v_{\text{salle}} \cdot S_{\text{salle}} = v_1 \cdot S_1$ (avec v_{salle} la vitesse de l'air dans la salle) alors la vitesse de l'air dans la salle est très faible devant celle dans la canalisation.

- b. La conduite est horizontale, comment est modifiée la relation de Bernoulli ?

Les cotes z_A et z_B sont égales ce qui donne $\frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2) + p_B - p_A = \frac{P}{Q_v} - \Delta p$.

- c. Déduire des questions précédentes que $p_{E1} = -\Delta p_1 + p_{\text{atm}} - \frac{1}{2} \rho v_1^2$ avec p_{E1} la pression au point E_1 et p_{atm} la pression atmosphérique. Calculer la différence entre la pression atmosphérique et p_{E1} .

En remplaçant le point B par E_1 et le point A par un point dans la salle 1 à la pression atmosphérique (et vitesse nulle) et en se rappelant qu'il n'y a aucune « machine » (pompe ou turbine) sur le tronçon 1, on obtient $\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_{E1} - p_{\text{atm}} = -\Delta p_1$ soit en isolant p_{E1} : $p_{E1} = p_{\text{atm}} - \Delta p_1 - \frac{1}{2} \rho v_1^2$ ce qui correspond à la relation proposée.

$$p_{\text{atm}} - p_{E1} = \Delta p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = 27,9 + \frac{1}{2} \times 1,2 \times 5^2 = 42,9 \text{ Pa}$$

4. Puissance de la pompe

La pression en sortie du « Té » de jonction des tronçons 1 et 2 avec le tronçon 3 est de 70 Pa en dessous de la pression atmosphérique, les pertes de charge dans le tronçon 3 sont égales à 15 Pa . Cette conduite est horizontale.

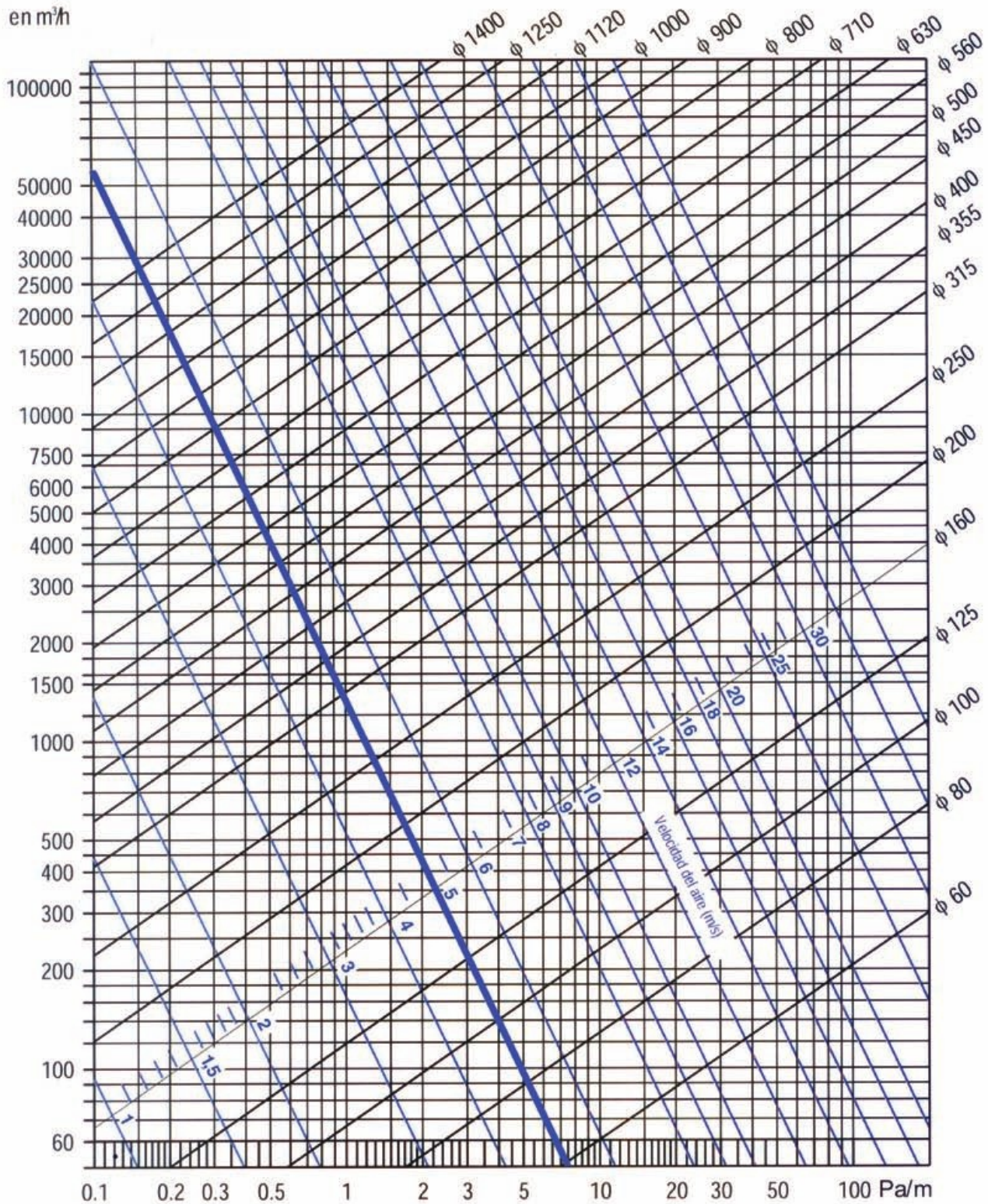
- a. Quelle est la vitesse de l'air à travers la pompe ?

Elle est égale à la vitesse de l'air dans la conduite.

b. Déterminer la puissance de la pompe (l'air à sa sortie est à la pression atmosphérique).

La relation de Bernoulli devient $p_p - p_3 = \frac{P}{Q_v} - \Delta p_3$ (indice « p » pour la pompe et « 3 » pour la sortie du « Té ») soit $P = (p_p - p_3 + \Delta p_3) Q_v = (70 + 15) 7700 / 3600 = 182 \text{ W}$

Abaque pour la détermination des pertes de charge dans les conduites
(« velocidad del aire » signifie « vitesse de l'air »)



Exercice XVIII

1. Calculer le diamètre des pales d'une hydrolienne dont la puissance maximale est égale à 2 MW placée dans un courant marin de trois noeuds. La masse volumique de l'eau est égale à 1000 kg.m^{-3} . Un nœud correspond à un mille marin par heure et un mille est égal à 1852 m.

On utilise la relation $P = \frac{16}{27} \frac{1}{2} \rho S v^3$ avec ρ la masse volumique de l'eau, S la surface balayée par les pales de l'hydrolienne ($S = \frac{\pi D^2}{4}$ avec D le diamètre) et v la vitesse de l'eau qu'il faut convertir en m/s.

La relation $P = \frac{16}{27} \frac{1}{2} \rho S v^3$ devient $P = \frac{16}{27} \frac{1}{2} \rho \frac{\pi D^2}{4} v^3$ qui donne $D = \sqrt{\frac{27 \times 2 \times 4 \times P}{16 \rho \pi v^3}}$.

La vitesse $v = \frac{3 \times 1852}{3600} = 1,54 \text{ m/s}$ d'où $D = \sqrt{\frac{27 \times 2 \times 4 \times 2 \cdot 10^6}{16 \times 1000 \pi 1,54^3}} = 48,5 \text{ m}$

2. En 2012, la parc d'éoliennes français a produit 14,9 TWh d'énergie électrique pour une puissance installée de 7449 MW (source www.planetoscope.com).

Calculer le facteur de charge (rapport entre la production annuelle effective et ce qui aurait pu être produit au maximum sur un an) du parc éolien français.

La production maximale correspond à la puissance maximale 24 h sur 24 pendant 366 jours (2012 est une année bissextile) ce qui donne $W_{\max} = 4779 \times 366 \times 24 = 41,98 \cdot 10^6 \text{ MWh}$ soit 41,98 TWh.

Le facteur de charge est donc $\frac{14,9}{41,98} = 0,35$

Exercice XIX

Un constructeur d'éolienne annonce une puissance électrique de 5 MW pour une éolienne de 126 m de diamètre lorsque la vitesse du vent est égale à 13 m/s (rated speed). La vitesse du vent pour que l'éolienne démarre (cut-in wind) est égale à 3,5 m/s. Si la vitesse du vent dépasse 30 m/s, l'éolienne est arrêtée. En fonctionnement normal, la vitesse du moyeu est comprise entre 6,9 et 12,1 tr/min ; celle de la génératrice électrique est comprise entre 670 et 1170 tr/min.

1. Calculer les facteurs de correction de puissance pour la vitesse minimale et pour la vitesse maximale.

On note P_0 et P_e les puissances « éolienne » et électrique. Le coefficient de correction de puissance C_p est tel que $P_e = C_p \cdot P_0$. La puissance P_0 est donnée par la relation $P_0 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v_1^3$ avec S la surface balayée par le rotor, v_1 la vitesse du vent « avant » l'éolienne et ρ la masse volumique de l'air.

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad \text{avec } d = 126 \text{ m le diamètre du rotor donc } P_0 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v_1^3$$

Coefficient de correction de puissance : $C_p = \frac{P_e}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v_1^3} = \frac{8 P_e}{\rho \cdot \pi \cdot d^2 \cdot v_1^3}$

À la vitesse nominale : $C_p = \frac{8 \times 5 \cdot 10^6}{1,25 \cdot \pi \cdot 126^2 \times 13^3} = 0,292$

À la vitesse maximale : $C_p = \frac{8 \times 5 \cdot 10^6}{1,25 \cdot \pi \cdot 126^2 \times 30^3} = 0,0238$

2. Calculer le moment du couple sur l'arbre de la génératrice si la vitesse de rotation est maximale et le rendement de la génératrice égal à 95%.

Le moment du couple est donné par $C = \frac{P_m}{\Omega}$ avec P_m la puissance sur l'arbre (mécanique). Les puissances

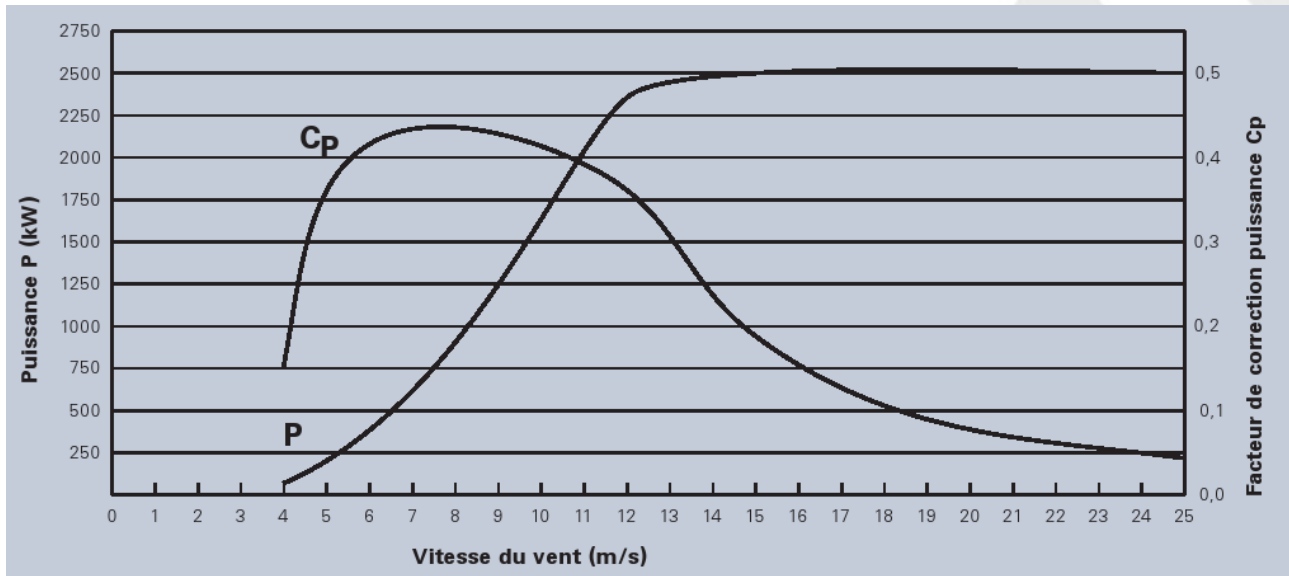
mécanique (absorbée) et électrique (utile) sont reliées par $\eta = \frac{P_e}{P_m}$ avec η le rendement.

$$C = \frac{P_e}{\eta \cdot \Omega} = \frac{5 \cdot 10^6}{0,95 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot 1170}{60}} = 43 \text{ kN.m}$$

La masse volumique de l'air est prise égale à $1,25 \text{ kg.m}^{-3}$.

Exercice XX

1. L'éolienne dont la caractéristique est représentée ci-dessous a un rotor de diamètre égal à 90 m (Extrait de la documentation de l'éolienne Nordex N90/2500LS).



- a. Quelle est sa puissance nominale ? À quelle vitesse de vent cette puissance est-elle atteinte ?

D'après le graphique, la puissance nominale est égale à 2500 kW (soit 2,5 MW). Cette puissance est atteinte pour des vents dont la vitesse est supérieure à 14 m/s (soit 50 km/h).

- b. Calculer le facteur de correction de puissance pour des vitesses de vent égales à 7 m/s, 15 m/s et 22 m/s. Comparer les valeurs obtenues avec les indications du constructeur.

- Pour 7 m/s, la puissance donnée par le constructeur est de 580 kW. La puissance du vent est donnée par $P_0 = \frac{1}{2} \rho S v^3 = \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot \frac{\pi 90^2}{4} 7^3 = 1364 \text{ kW}$ soit un facteur de correction $\frac{580}{1364} = 0,425$ qui est cohérent avec la valeur donnée par le constructeur.

- Pour 15 m/s, la puissance donnée par le constructeur est de 2500 kW. La puissance du vent est donnée par $P_0 = \frac{1}{2} \rho S v^3 = \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot \frac{\pi 90^2}{4} 15^3 = 13419 \text{ kW}$ soit un facteur de correction $\frac{2500}{13419} = 0,186$ qui est cohérent avec la valeur donnée par le constructeur.

- Pour 22 m/s, la puissance donnée par le constructeur est de 2500 kW. La puissance du vent est donnée par $P_0 = \frac{1}{2} \rho S v^3 = \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot \frac{\pi 90^2}{4} 22^3 = 42337 \text{ kW}$ soit un facteur de correction $\frac{2500}{42337} = 0,059$ qui est cohérent avec la valeur donnée par le constructeur.

Le facteur de correction est ajusté en modifiant l'orientation des pales, la surface « utile » est diminuée lorsque le vent augmente.