

Chapitre 11 : acoustique musicale et gamme(s)

1 Introduction

Une des caractéristiques principales des sons musicaux est leur « *hauteur* », notion relative à laquelle notre oreille est sensible et qui correspond à leur *fréquence*, grandeur physique mesurable.

Si cette grandeur physique n'est connue que depuis moins de deux cents ans, cela n'a pas empêché les théoriciens de la musique, depuis l'Antiquité, de mettre en rapport les hauteurs des sons et les nombres, car ils avaient remarqué que *la hauteur du son émis par une corde vibrante ou un tuyau sonore dépendait directement de leur longueur*.

On sait aujourd'hui démontrer que la fréquence des sons émis par ces corps vibrant est en proportion inverse de leur longueur ; par exemple, une corde vibrant sur une longueur L a pour fréquence de vibration fondamentale :

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

où T est la tension de la corde et μ sa masse par unité de longueur.

Par conséquent, les mathématiciens du passé avaient pu *raisonner de façon correcte sur l'acoustique malgré leur méconnaissance de la théorie des phénomènes vibratoires* et des ondes stationnaires, à la base de la production des sons par les instruments.

2 Point de départ : la consonance des sons

2.1 Consonance et dissonance

Les notions opposées de *consonance* et de *dissonance* sont une *caractéristique très importante de la perception des sons*, étroitement liée à la perception de hauteur. Depuis Pythagore, la consonance est une *clé de la musique*. C'est de fait un *trait robuste du timbre des sons*.

La *consonance* exprime la *préférence de l'oreille pour certaines associations de fréquences entendues simultanément*. Un *intervalle* (écart entre deux notes de musique) est dit *consonant* s'il produit une impression auditive agréable. Il est dit *dissonant* dans le cas contraire.

Basée sur une « impression », la *notion de consonance* est donc par essence *subjective*. Elle a en particulier évolué au fil des siècles, dans le sens d'un accroissement du nombre d'intervalles jugés consonants.

Bien avant le développement de la physique et de l'acoustique, les musiciens ont intuitivement défini comme *consonants* des *sons dont les fréquences fondamentales sont dans un rapport arithmétique simple l'une par rapport à l'autre*.

Ainsi, l'étude de la *consonance de sons composés* de 5 premières harmoniques d'amplitudes égales montre que *la consonance atteint des maxima locaux quand le rapport des fondamentales est rationnel*.



Par exemple, toutes les cultures ont reconnu le principe de l'équivalence des octaves, selon lequel *deux sons dont les fréquences sont dans un rapport de 1 à 2 « sonnent » de manière tellement comparable que l'on donne à de telles notes le même nom*, en précisant que *la note de fréquence double est l'octave de l'autre note.*



Cet intervalle associé au rapport de fréquences de « 2 » est appelé *octave* et est *donc le plus consonant de tous*, et il a un caractère universel : on le retrouve dans toutes les cultures musicales.

En fait, cet intervalle est « si consonant » que *certaines personnes ne l'entendent pas* lorsque les deux sons sont joués simultanément.

Un *autre intervalle particulièrement consonant* est celui associé à *un rapport de fréquences de 3/2*. Il est appelé *quinte* par les musiciens.

Les intervalles purs d'octave (2/1) et de quinte (3/2) ont toujours été considérés comme des *consonances parfaites*.

Ce n'est que depuis le Moyen Âge que les *tierces*, majeures (5/4) et mineures (6/5), ainsi que les *sixtes* sont aussi considérées comme *consonances imparfaites*.



Les *intervalles les plus consonants* sont ainsi :

- ✓ l'*octave* (rapport 2),
- ✓ la *quinte juste* (rapport 3 ramené entre 1 et 2, soit $3/2$),
- ✓ la *quarte* (rapport $4/3$),
- ✓ la *tierce majeure* (rapport $5/2$ ramené entre 1 et 2, soit $5/4$),
- ✓ la *tierce mineure* (rapport $6/5$),
- ✓ la *sixte* (rapport $5/3$), etc.

L'écoute simultanée de sons consonants produit généralement un *accord*. Par exemple, la hauteur de base étant appelée « tonique », l'ensemble « tonique + quinte + tierce majeure » constitue un *accord parfait majeur*. Notons que cet ensemble est constitué des 5 premières harmoniques de la tonique, ramenées à une seule octave.

Le groupement des composantes du son se fait donc selon plusieurs étages de complexité : d'abord le *groupement éventuel des partiels en un son* - groupement naturel s'il s'agit des partiels d'une source unique -, puis *groupement de sons émis par différentes sources en un objet sonore* qui peut être un *accord*...

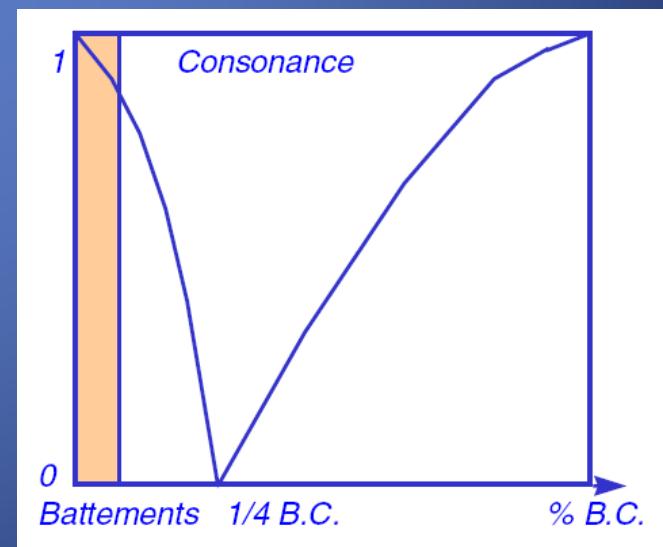
Notons que certains auteurs distinguent la *consonance tonale* ou *consonance sensorielle*, de la *consonance au sens musical* qui dépend aussi de certaines *règles culturelles*.

2.2 Consonance des sons purs

Si l'on *augmente progressivement la différence de fréquence df entre deux sons purs* écoutés simultanément, on observe que :

- ✓ tant que df / f est *faible*, sons sont *consonants*, en même temps qu'on perçoit des *battements*,
- ✓ puis la *dissonance apparaît*, croît et *devient maximale vers un quart de bande critique* (soit près de 20 Hz en basses fréquences, puis 4% de la fréquence soit un peu moins d'un demi-ton aux fréquences plus élevées),
- ✓ les sons purs redeviennent *consonants* dès que la *différence de fréquence dépasse la largeur d'une bande critique*. Notons que ce n'est pas le cas des intervalles de tierce (voire de quinte) en basses fréquences ; de fait, ces intervalles sont dissonants et on les évite dans les basses.

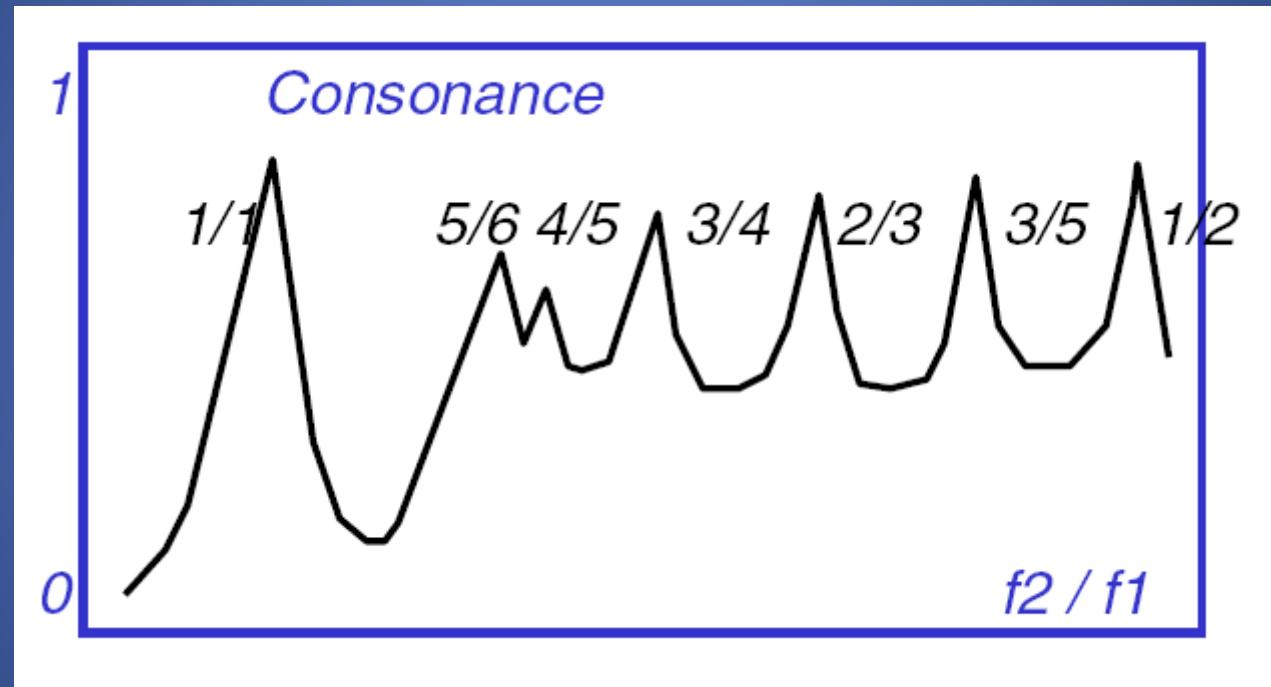
Consonance des sons purs en fonction du rapport de leurs fréquences.



2.3 Consonance des sons complexes

On observe que *les sons de rapport de fréquence non rationnels sont généralement dissonants.*

La figure ci-dessous représente schématiquement l'évolution de la consonance de sons harmoniques en fonction du rapport de leurs fréquences fondamentales.



*Consonance de sons harmoniques en fonction
du rapport de leurs fréquences fondamentales.*

3 Justification physiologique de la consonance

Chacun des deux sons musicaux étant une vibration périodique de la pression de l'air, les *variations de pression qu'ils induisent* sur le tympan de l'oreille *se combinent dans le temps*.

Il est clair que *quand deux maxima de pression sont simultanés*, l'*effet* résultant sur le tympan est *maximum*.

Donc, si les fréquences des deux sons sont telles que les *instants où ces maxima coïncident* suivent un *rythme proche des sons constituants*, l'*impression globale* produite sera plus « *harmonieuse* » et les sons seront *consonants*.

À l'inverse, si ces *instants de coïncidence* sont très *éloignés* - par rapport au *rythme des sons constituants* - ceux-ci ne donneront pas l'impression de « s'unir » et les sons seront *dissonants*.

Il est facile de voir que si les périodes des sons constituants sont T_1 et T_2 , *les maxima de pression coïncideront aux instants qui sont des multiples communs de T_1 et T_2* .

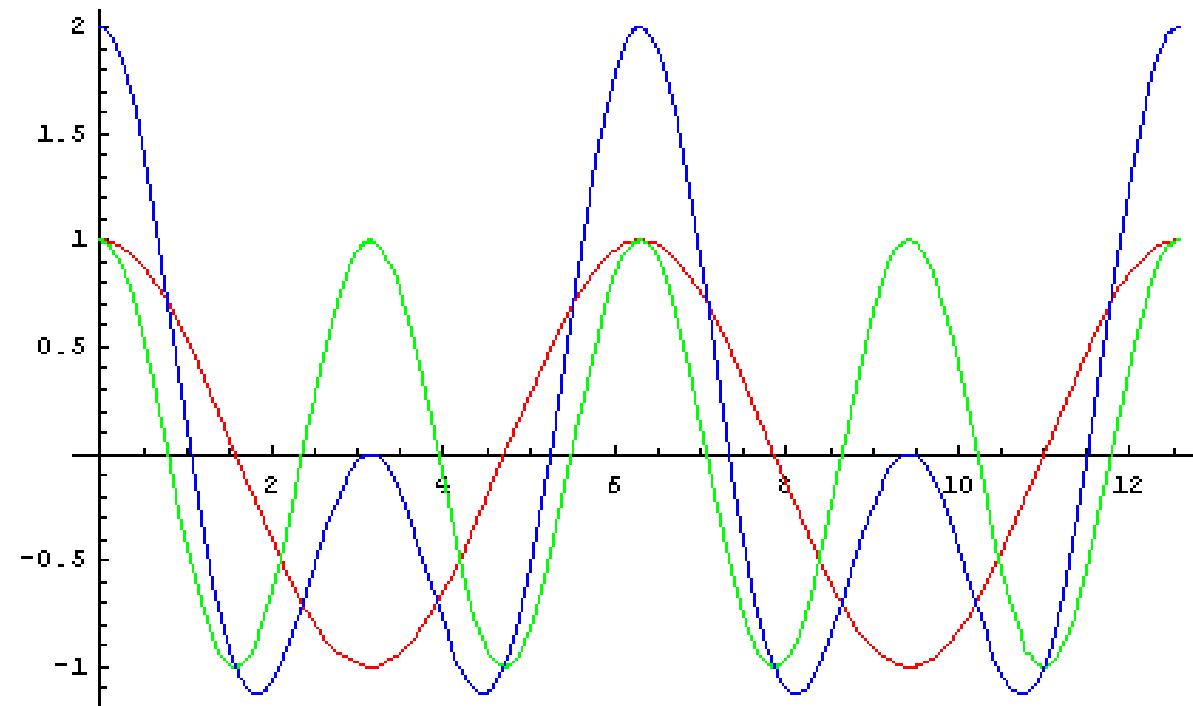
La *période du son résultant de la superposition de deux sons* de périodes T_1 et T_2 sera donc le p.p.c.m. (*plus petit commun multiple*) des périodes :

$$T = \text{ppcm } [T_1, T_2].$$

Exemple 1 : l'intervalle d'octave, rapport de fréquences « 2 »

Comme le montre la figure ci-dessous, la combinaison de deux sons de fréquences F (en rouge) et 2F (en vert) produit un son résultant de fréquence F (en bleu) ; en effet, $T = \text{ppcm}[T, T/2]$.

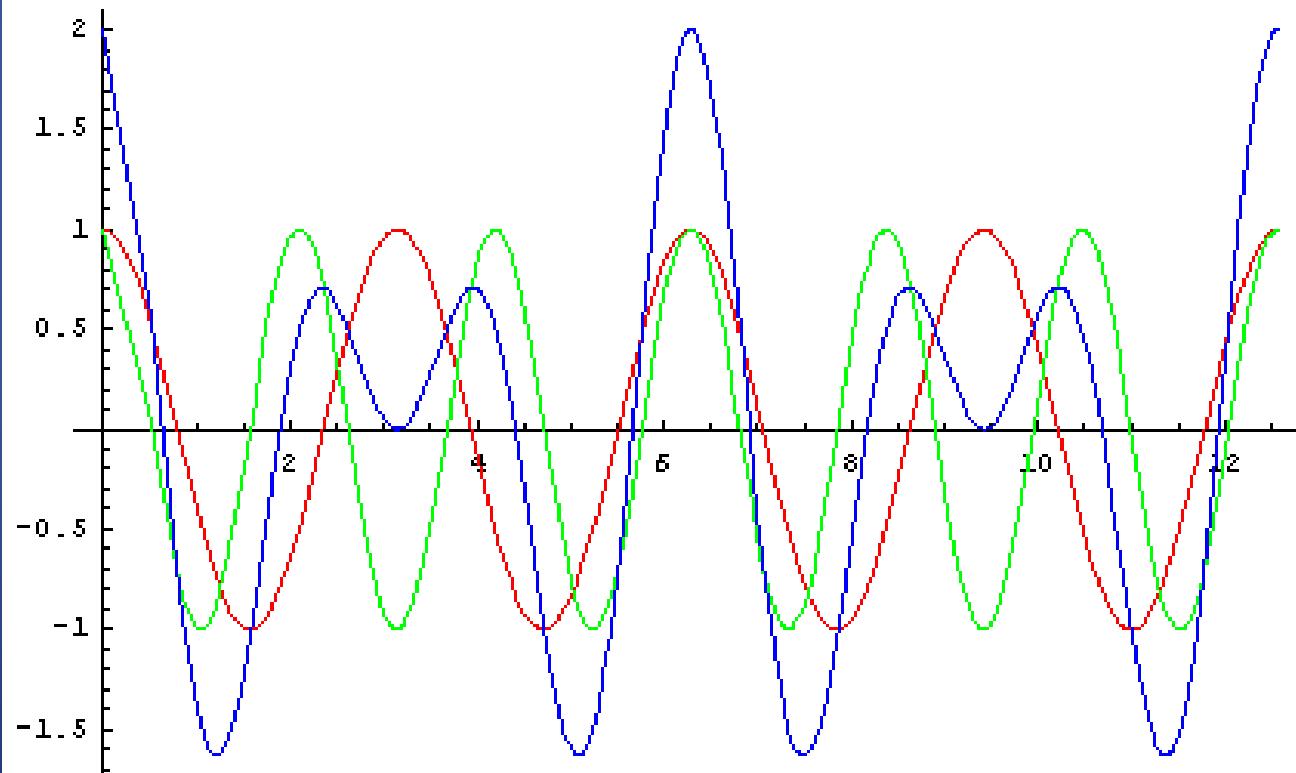
```
In[9]:= Plot[{Cos[t], Cos[2 t], Cos[t] + Cos[2 t]}, {t, 0, 4 Pi},  
PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0, 0]}, {RGBColor[0, 1, 0]},  
{RGBColor[0, 0, 1]}}]
```



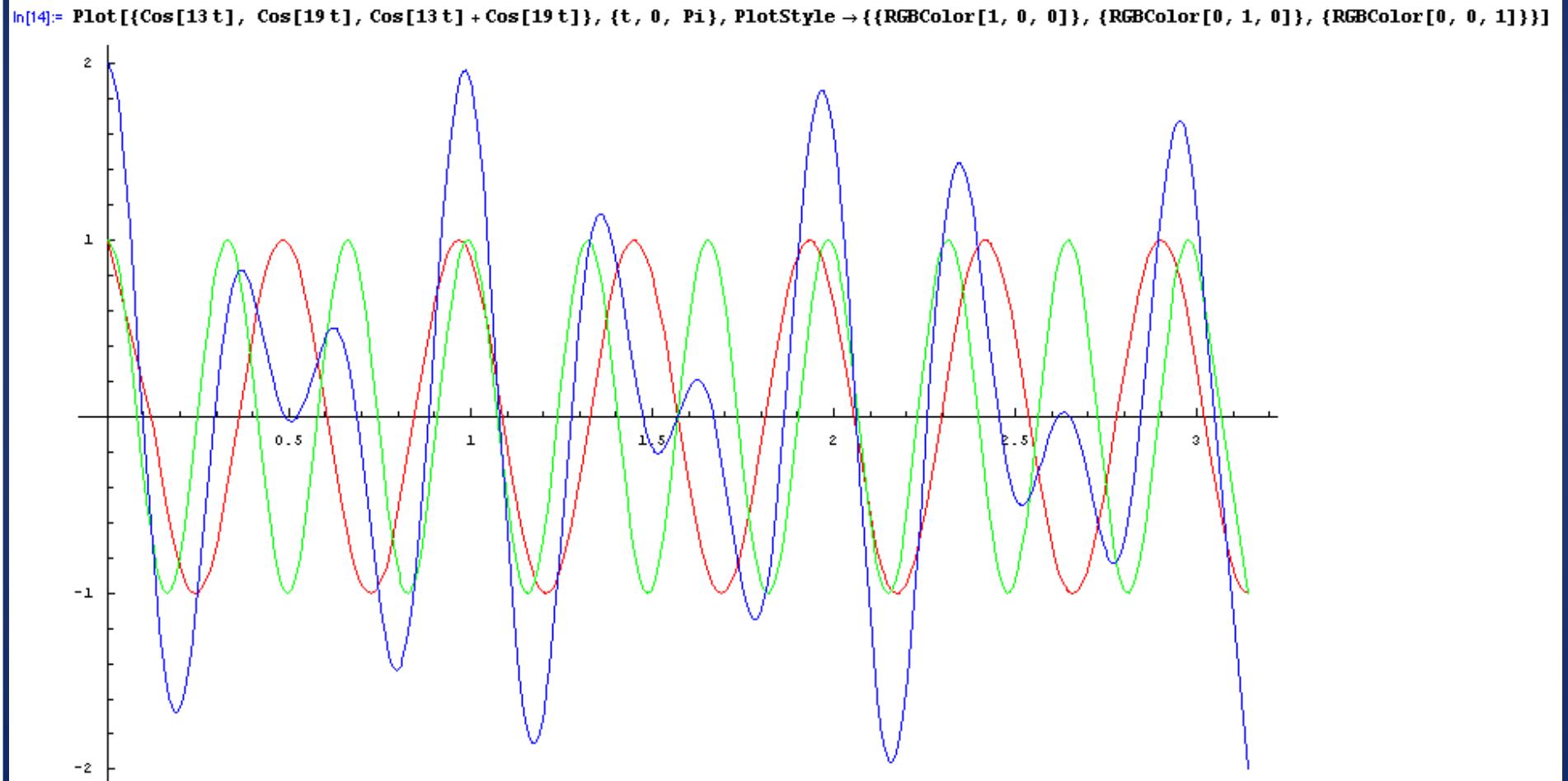
Exemple 2 : l'intervalle de quinte, rapport de fréquences « 3/2 ».

Comme le montre la figure ci-dessous, la combinaison de deux sons de fréquences 2F (**en rouge**) et 3F (en vert) produit un son résultant de fréquence F (en bleu) ; en effet, T = ppcm [T/2, T/3].

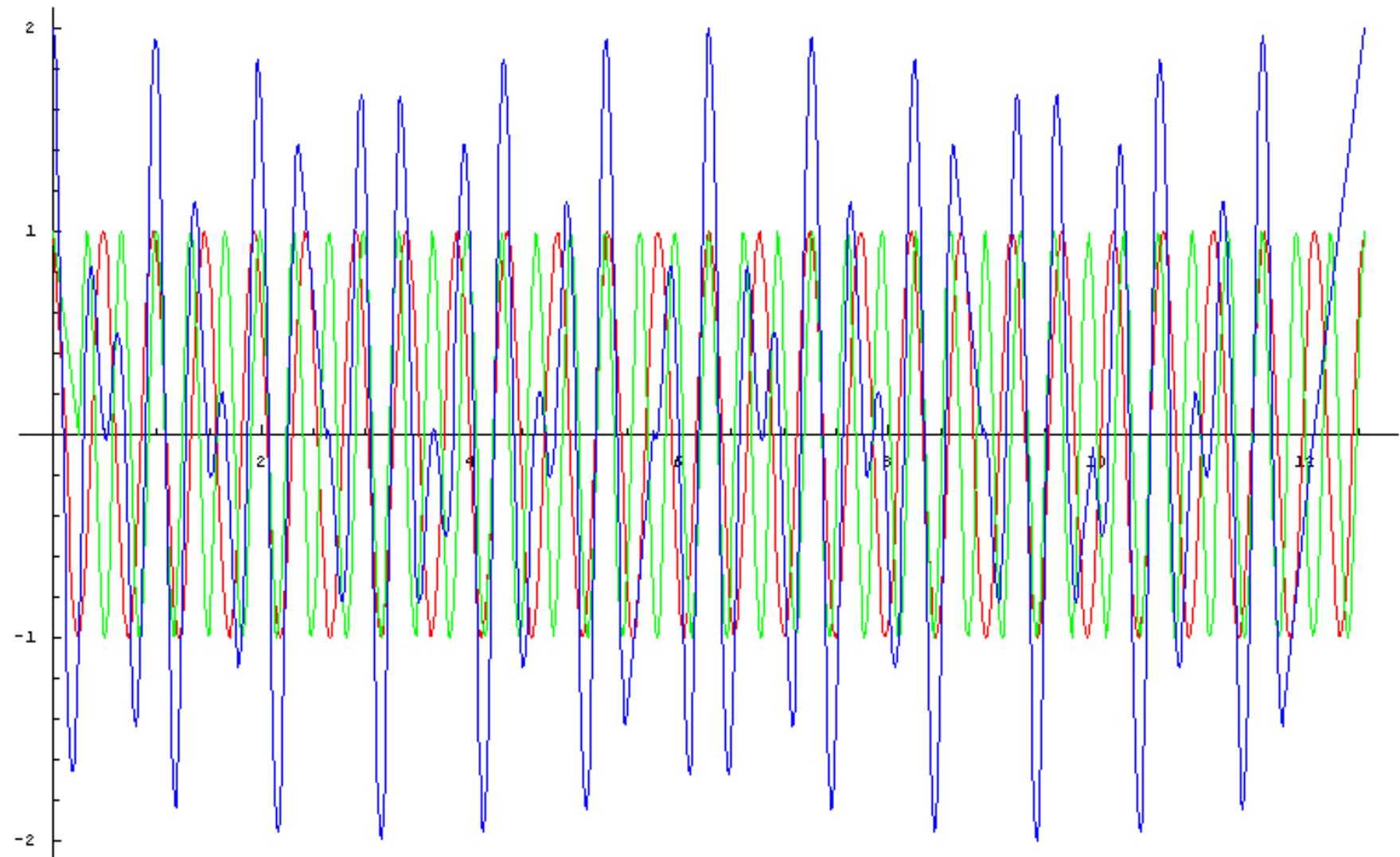
```
Plot[{Cos[2 t], Cos[3 t], Cos[2 t] + Cos[3 t]}, {t, 0, 4 Pi},  
PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0, 0]}, {RGBColor[0, 1, 0]},  
{RGBColor[0, 0, 1]}]
```



Contre-exemple : la figure ci-dessous montre que quand les fréquences des deux sons constituants ne sont pas dans un rapport « simple» (ici 13 et 19), les maxima de pression des deux sons ne coïncident plus qu'épisodiquement (les pointes que l'on voit sont des maxima relatifs, dont les valeurs ne sont pas constantes dans le temps sur la figure ci-dessous, qui correspond à moins d'une période pour le son résultant). On a $\text{ppcm} [\frac{T}{13}, \frac{T}{19}] = T$.



```
In[13]:= Plot[{Cos[13 t], Cos[19 t], Cos[13 t] + Cos[19 t]}, {t, 0, 4 Pi},  
PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0, 0]}, {RGBColor[0, 1, 0]}, {RGBColor[0, 0, 1]}}]
```

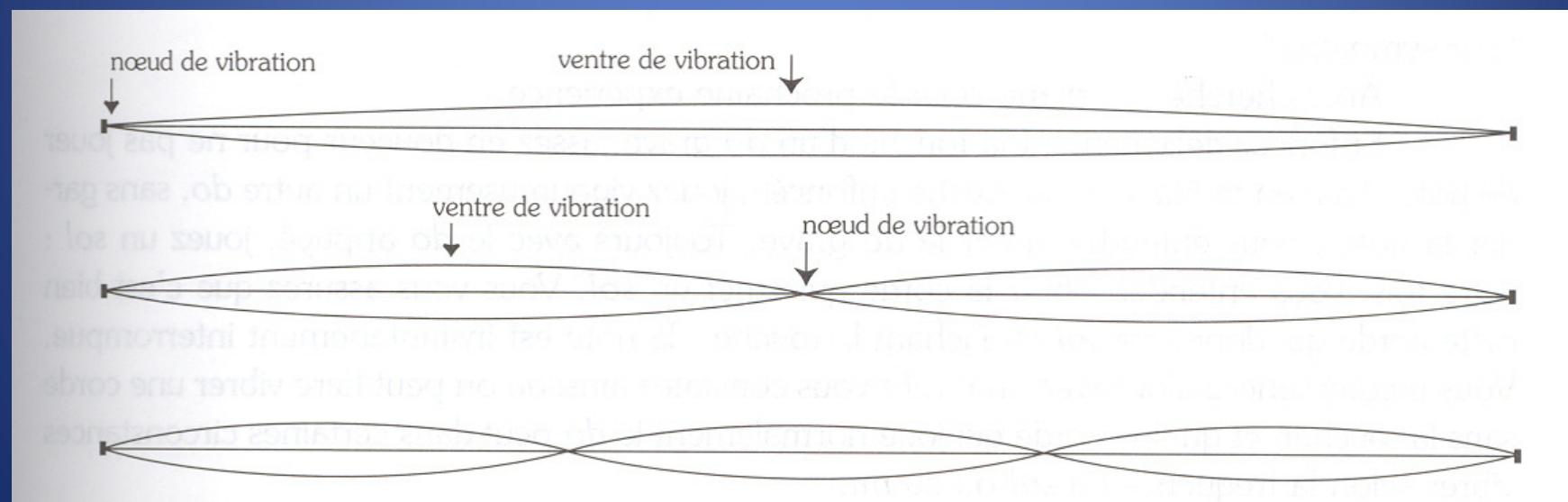


Même chose, mais sur un intervalle de temps plus long (deux périodes T).

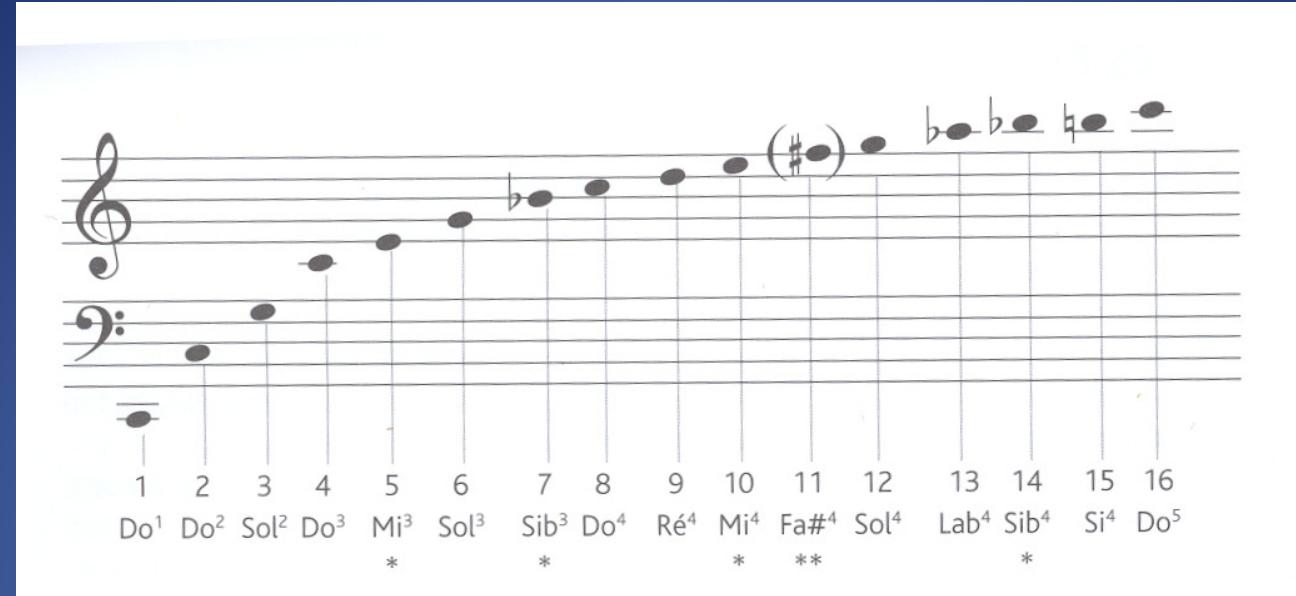
4 Consonance et harmoniques

La *consonance parfaite de l'octave* et la *très bonne consonance de la quinte* peuvent aussi s'expliquer par le fait que tous les *instruments de musique* (sauf les générateurs électroniques de signaux sinusoïdaux purs) *émettent simultanément un son et ses « harmoniques »*, c'est-à-dire des sons de fréquences double, triple, etc.

Pour une corde vibrante, par exemple, un son de fréquence fondamentale f , associé à une longueur de corde L , s'accompagne d'harmonique, qui sont des sons de fréquences $2f$, $3f$, $4f$, etc., car l'onde mécanique parcourant la corde est une superposition des différents modes de vibration correspondant à des ondes stationnaires dans la corde :



Harmoniques du do¹ ([illustration sonore avec Wavemodeler](#))



Le premier harmonique est la fondamentale, le deuxième est l'octave, le troisième harmonique est à la douzième de la fondamentale (doublement de la quinte), le quatrième harmonique est l'octave de l'octave, le cinquième est une dixième de l'octave (redoublement de la tierce), etc.

Les notes 7 et 11 sont en général exclues car elles sont fausses (proches du si bémol et du fa dièse).

Les nombres qui numérotent les notes donnent également le multiple de la fréquence de départ. Par exemple, la fréquence de la note 9 (un ré) s'obtient en multipliant par 9 la fréquence de la note 1 (le do fondamental). Il s'ensuit naturellement que le rapport des fréquences entre les notes 3 et 2 (sol et do) est 3/2, le même rapport que pour les notes 6 et 4 (sol et do). Ce rapport est donc celui de la quinte.

<i>N°</i>	<i>fréquence</i>	<i>note</i>	<i>justesse*</i>	
1	64	<i>do</i>		<i>Première octave</i>
2	128	<i>do</i>		
3	192	<i>sol</i>		<i>Deuxième octave</i>
4	256	<i>do</i>		
5	320	<i>mi</i>		<i>Troisième octave</i>
6	384	<i>sol</i>		
7	448	<i>si ♫</i>	<i>trop bas</i>	
8	512	<i>do</i>		
9	576	<i>ré</i>		<i>Quatrième octave</i>
10	640	<i>mi</i>		
11	704	<i>fa</i>	<i>trop haut</i>	
12	768	<i>sol</i>		
13	832	<i>la</i>	<i>trop bas</i>	
14	896	<i>si ♫</i>	<i>trop bas</i>	
15	960	<i>si</i>		
16	1024	<i>do</i>		
17	1088	<i>do♯</i>		<i>Cinquième octave</i>
18	1112	<i>ré</i>		
19	1176	<i>ré♯</i>		
20	1240	<i>mi</i>		
21	1304	<i>fa</i>		

*Suite des harmoniques
naturels du do grave*

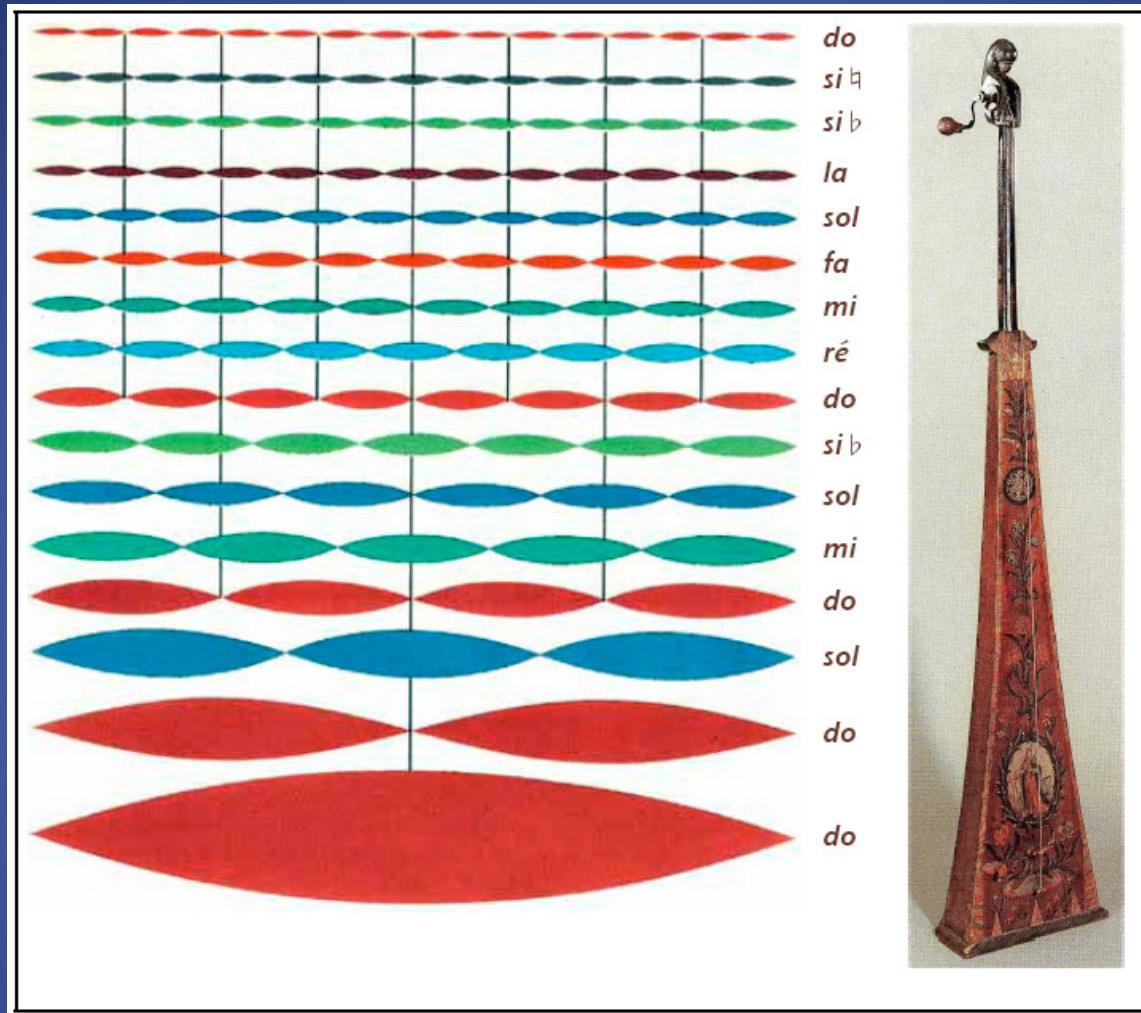
On transpose une note d'une octave vers le bas en divisant sa fréquence par deux.

Réciproquement, on peut monter une note d'une octave vers le haut en multipliant sa fréquence par deux.

* comparée à la gamme conventionnelle utilisée aujourd'hui, basée sur le tempérament égal.



Autre manière de visualiser les harmoniques (d'après Marc Terrien)



On peut obtenir ces harmoniques à partir d'une corde de violon. On entend le premier harmonique et jouant la corde à vide au moyen d'un archet. En effleurant la corde en son milieu on fait sonner le deuxième harmonique. En effleurant la corde au tiers de sa longueur on engendre le troisième harmonique, puis le quatrième harmonique en effleurant la corde au quart de la longueur. Ainsi de suite on peut obtenir tous les harmoniques.

Plus généralement, en considérant deux notes consécutives de la série des harmoniques, on obtient donc pour les principaux intervalles les rapports :

- ✓ 2/1 octave
- ✓ 3/2 quinte
- ✓ 4/3 quarte
- ✓ 5/4 tierce majeure
- ✓ 6/5 tierce mineure
- ✓ 9/8 ton zarlinien majeur
- ✓ 10/9 ton zarlinien mineur
- ✓ ...
- ✓ 16/15 demi-ton diatonique zarlinien
- ✓ ...
- ✓ 81/80 comma syntonique

Ces différents intervalles seront introduits progressivement dans la suite, mais nous les associons d'ores et déjà à leur rapport de fréquences.

Ces rapports de la forme $(n+1)/n$ portent le nom de *superpartiels*.

On voit que les premiers harmoniques définissent par rapport à la note fondamentale les intervalles d'octave, de quinte, de tierce, etc.

La *grande consonance de ces intervalles* s'explique ainsi par le fait que *lorsque l'on ajoute à une note son octave ou sa quinte, on ne fait qu'introduire un son qui était déjà initialement présent dans le premier son*, sous forme d'*harmoniques*.

Plus précisément, l'intervalle musical implique la *superposition de deux spectres harmoniques*.

La perception de la justesse est rendue possible grâce à une certaine *fusion des harmoniques* qui sont *communs aux deux sons superposés*.

« *Accorder* » un intervalle équivaut à *faire coïncider plus ou moins ces harmoniques communs* ; lorsque la coïncidence est parfaite, l'intervalle est dit *acoustiquement « pur »*.

Les trois figures suivantes illustrent les harmoniques communs pour les intervalles les plus consonants. On observe que dans le cas de l'unisson, la fusion est totale. Pour l'octave, un harmonique sur deux ne coïncide plus. Pour la quinte, deux harmoniques sur trois ne coïncident plus. Pour la quarte, 3 harmoniques sur 4 ne coïncident plus, etc.

etc.	
SOL6	16
FA#6	15
FA6	14
MI6	13
RE6	12
DO#6	11
SI5	10
LA5	9
SOL5	8
FA5	7
RE5	6
SI4	5
SOL4	4
RE4	3

SOL3 2 2 SOL3

SOL2 1 1 SOL2

SOL2

SOL2

Justesse de l'unisson
(a)

SOL7	32	etc.	SOL7
	:		
			16
			15
			14
			13
			12
			11
			ré7
SI6	20		do#7
la#6	19		
LA6	18		
sol#6	17		
SOL6	16		
fa#6	15		
FA6	14		
mi6	13		
RE6	12		
do#6	11		
SI5	10		
la5	9		
SOL5	8		
fa5	7		
RE5	6		
si4	5		
SOL4	4		
ré4	3		

SOL3 2 1 SOL3

sol2 1

SOL2

SOL3

Justesse de l'octave
(b)



SOL2		RE3		SOL2		DO3					
Justesse de la quinte (a)				Justesse de la quarte (b)							
<p>Diagram illustrating the notes for the fifth (sol6, fa#6, fa6, mi6, RE6, do#6, si5, LA5, sol5, fa5, RE5, si4, sol4, RE4, sol13, and sol12) in a musical context.</p>				<p>Diagram illustrating the notes for the fourth (SOL6, fa#6, fa6, mi6, RE6, do#6, si5, LA5, SOL5, fa5, RE5, si4, SOL4, rE4, sol13, and sol12) in a musical context.</p>							
sol6	16	11	sol6	SOL6	16	15	si6				
fa#6	15	10	fa#6	fa#6	15	14	sib6				
fa6	14		fa6	fa6	14	13	1a6				
mi6	13	9	mi6	mi6	13	10	mi6				
RE6	12	8	RE6	RE6	12	9	RE6				
do#6	11		do#6	do#6	11	8	dö6				
si5	10		do6	si5	10	7	sib5				
LA5	9		LA5	1a5	9						
sol5	8		fa#5	SOL5	8	6	SOL5				
fa5	7			fa5	7	5	mi5				
RE5	6		RE5	rE5	6						
si4	5			si4	5	4	do5				
		3	1a4	SOL4	4	3	SOL4				
sol4	4										
RE4	3		RE4	rE4	3						
		2				2	do4				
sol13	2			sol13	2						
		1	rE3			1	do3				
sol12	1			sol12	1						





etc.		etc.	
sol6	16	16	sib6
FA#6	15	15	1a6
fa6	14	14	1ab6
mi6	13	13	sol6
r66	12	12	FA#6
do#6	11	11	mi6
SI5	10	10	r6#6
la5	9	7	do#6
sol5	8	6	SI5
fa5	7	6	la5
r65	6	5	fa#5
SI4	5	4	r6#5
sol4	4	3	SI4
r64	3	2	fa#4
sol3	2	2	si3
sol2		SI2	
Justesse de la tierce majeure (a)		Justesse de la tierce mineure (b)	

5 L'octave comme intervalle de départ

L'*octave* étant reconnue comme l'*intervalle sonore* le plus *simple*, il reste pour définir une *gamme* à la *diviser* en *intervalles plus petits* car des notes situées toutes à l'octave les unes par rapport aux autres ne permettent pas à elles seules de composer ce qu'on peut appeler de la musique.

Définir une gamme musicale, c'est donc définir une méthode pour diviser l'octave en intervalles sonores plus petits, ou ce qui revient au même, définir entre deux sons à l'octave des sons de hauteurs intermédiaires.

Il existe une *infinité de méthodes* pour découper une octave en intervalles plus petits. Mais toutes ces méthodes ne sont pas intéressantes pour la musique. On peut imposer *trois contraintes* principales :

- ✓ le *nombre d'intervalles différents* doit être relativement *faible*, sinon chacun d'entre eux est trop petit et les notes successives obtenues sont trop rapprochées pour être discernables par l'oreille ;
- ✓ la liste des intervalles choisis doit correspondre à des *notes qui peuvent être combinées* (c'est-à-dire *jouées en même temps*, en *harmonie*) entre elles sans irriter l'auditeur.
- ✓ les *intervalles doivent*, sinon être rigoureusement identiques, du moins *diviser l'octave de façon suffisamment régulière pour permettre la transposition* (la mélodie doit pouvoir être jouée à partir de n'importe quelle note de départ).

6 Construction d'une gamme : formulation mathématique du problème

Le caractère consonant de l'intervalle d'octave « 2 » est lié au rapport entre les fréquences et non à leur différence. On retrouve en effet la même consonance entre $2F$ et $4F$, entre $2/3 F$ et $4/3 F$, etc. Donc un *intervalle* s'exprime mathématiquement par un *rapport*.

Puisque les intervalles sont des rapports :

- ✓ la « *somme* » de deux intervalles s'exprime par le *produit* de leurs rapports
- ✓ la « *différence* » de deux intervalles s'exprime par le *quotient* de leurs rapports

Toute mélodie est constituée de différentes notes, chacune ayant sa propre fréquence, et conçues de façon à ce qu'elles forment entre elles des intervalles aussi consonants que possible.

Classons cet ensemble de notes dans l'ordre croissant des fréquences, et puisque seuls les rapports entre ces fréquences nous intéressent, décidons par convention que *la note la plus grave de la gamme a pour fréquence 1*.

Puisqu'une note de fréquence $2F$ est ressentie comme « équivalente » à une note de fréquence F , nous pouvons décider de « confiner » la *recherche des intervalles consonants à l'intérieur de la fourchette [1, 2]*.

Les *intervalles recherchés* s'exprimeront donc sous la forme de *rapports compris entre 1 et 2*.

Quant à *la note la plus aiguë*, ce sera forcément celle *de fréquence 2*, puisque nous cherchons à construire une gamme à l'intérieur de l'intervalle d'octave « 2 ».

7 Mesure des intervalles : le savart et le cent

Pour simplifier la notation et la comparaison des intervalles, nous allons nous doter d'une **unité de mesure** pratique, le *Savart* (symbole σ).

Un *intervalle I en Savarts (σ) entre 2 sons de fréquences f_1 et f_2* se mesure par le *logarithme décimal du rapport entre les fréquences multiplié par 1 000*, c'est-à-dire en formule :

$$I(\sigma) = 1000 \cdot \log \frac{f_2}{f_1} = 1000 \cdot (\log f_2 - \log f_1)$$

Comme $\log 2 = 0,30130\dots$, on trouve que *l'intervalle d'octave* correspond à :

$$1000 \cdot 0,30103 = 301,30 \ \sigma$$

que l'on arrondit souvent à 300 σ quand on n'a pas besoin d'une grande précision. Plus précisément, *une octave vaut donc 301,30 σ .*

Il existe une *autre unité* pour mesurer les intervalles, le *cent*.

Il n'y a pas de symbole pour le désigner, le mot étant suffisamment court pour que les auteurs l'emploient tel quel.

On obtient le cent en divisant l'octave en 1 200 intervalles exactement.

L'intervalle I en cents entre deux sons de fréquences f_2 et f_1 est donc donné par :

$$I(\text{cent}) = 1200 \cdot \log_2 \frac{f_2}{f_1} = 1200 \cdot \frac{\log f_2 - \log f_1}{\log 2}$$

où l'on a utilisé la formule de changement de base pour la fonction logarithme :

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Une *octave* correspond donc exactement à 1 200 *cents*.

Un cent représente donc un peu moins d'un quart de Savart.

Valeurs en Savarts et en cents de quelques intervalles

Intervalle	rapport	Savarts	cents
octave	2	301,030	1200
quinte	3/2	176,091	701,955
quarte	4/3	124,939	498,045
tierce majeure	5/4	96,910	386,314
tierce mineure	6/5	76,181	315,641
ton majeur	9/8	51,153	203,910
ton mineur	10/9	45,758	182,403
demi-ton diatonique pythagoricien	256/243	22,634	90,225,
demi-ton diatonique zarlinien	16/15	28,029	111,731



8 La gamme de Pythagore, construction par les quintes

La *gamme de Pythagore* a été utilisée de l'antiquité jusqu'au 16ème siècle et, contrairement à ce que laisse penser son nom, elle n'a pas été créée par Pythagore mais par ses disciples.

Son principe, très simple, est basé sur une *succession de quintes*, à partir de la première note de la gamme ; l'intervalle de quinte est consonant puisque la quinte d'une note est présente comme la deuxième harmonique entendue lorsque l'on joue une note.

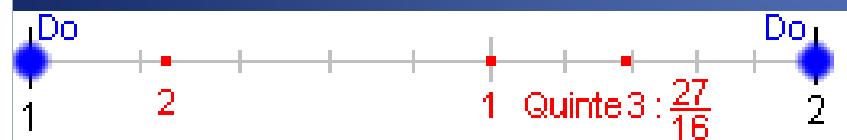
8.1 Hauteurs des notes principales de la gamme de Pythagore



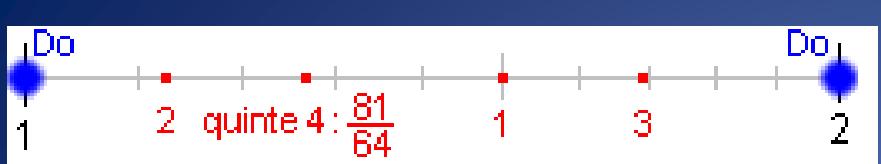
Si l'on part d'une note fondamentale notée conventionnellement DO que nous prenons comme note de départ (fréquence 1), la première quinte a pour fréquence $3/2$. C'est la note notée 1 en rouge sur les schémas (un SOL en fait).



Pour définir une nouvelle note, nous allons prendre la quinte de la note trouvée, sa fréquence est $3/2 \cdot 3/2 = 9/4$, qui, normalisée (c'est-à-dire ramenée dans l'intervalle [1;2]) donne $9/8$, soit $3^2/2^3$. C'est la note notée 2 en rouge sur les schémas (un RE en fait).

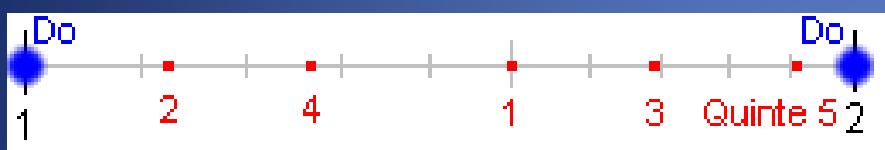


En prenant la quinte de la nouvelle note nous trouvons $(3/2)^3 = 27/8$ qui normalisée donne $27/16$, soit $3^3/2^4$. C'est la note notée 3 en rouge sur les schémas (un LA en fait).



La quinte suivante a pour fréquence $(3/2)^4=81/64$, ce qui donne **$81/64$** soit $3^4/2^6$. C'est la note notée 4 en rouge sur les schémas (un **MI** en fait).

A ce niveau, nous avons **5 notes** assez régulièrement réparties sur l'octave et nous pourrions nous arrêter. Nous avons obtenu la **gamme pentatonique majeure** qui est utilisée en jazz sous sa forme tempérée, en particulier dans le « blues ». Mais poursuivons...



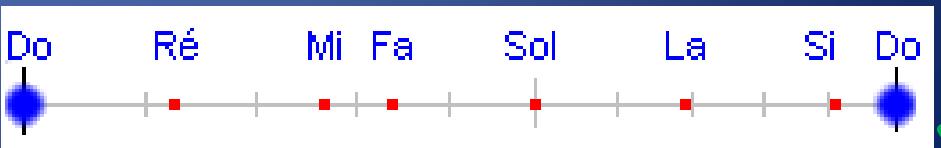
La quinte suivante a pour fréquence $(3/2)^5=243/128$, ce qui donne **$243/128$** soit $3^5/2^7$. C'est la note notée 5 en rouge sur les schémas (un **SI** en fait).

Nous avons maintenant 6 notes et, curieusement, la 7ème note de la gamme de Pythagore n'est pas celle qui serait définie par la quinte suivante et qui se placerait pourtant dans l'intervalle un peu plus grand entre la 4^{ème} quinte et la 1^{ère} quinte (entre MI et SOL, donc, FA# en fait).



La septième note est calculée sur le fait que si DO est en harmonie avec sa quinte, il est aussi en harmonie avec la note dont elle est la quinte et qui a pour fréquence $2/3$ (car $2/3 \cdot 3/2 = 1$) ce qui donne une fréquence de **$4/3$** dans l'intervalle normalisé [1;2]. On obtient la note notée 0 sur le schéma (un **FA** en fait).

Nous avons maintenant les **7 notes de la gamme majeure de Pythagore**. Pour revenir à la notation traditionnelle nous allons les appeler Do, Ré, Mi ...



8.2 Intervalles des notes naturelles consécutives de la gamme de Pythagore

Calculons les *rapports de fréquences* entre notes successives :

$$\frac{\text{Ré}}{\text{Do}} = \frac{\frac{9}{8}}{1} = \frac{9}{8}; \quad \frac{\text{Mi}}{\text{Ré}} = \frac{\frac{81}{64}}{\frac{9}{8}} = \frac{9}{8}; \quad \frac{\text{Fa}}{\text{Mi}} = \frac{\frac{4}{81}}{\frac{3}{64}} = \frac{256}{243}; \quad \frac{\text{Sol}}{\text{Fa}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{9}{8}; \quad \frac{\text{La}}{\text{Sol}} = \frac{\frac{27}{3}}{\frac{2}{2}} = \frac{9}{8}; \quad \frac{\text{Si}}{\text{La}} = \frac{\frac{243}{16}}{\frac{27}{8}} = \frac{9}{8}; \quad \frac{\text{Do}}{\text{Si}} = \frac{\frac{2}{243}}{\frac{9}{128}} = \frac{256}{243}$$

Nous n'avons que des *rapports de 9/8* (appelons-les « *tons pythagoriciens* ») et *des rapports de 256/243* (« *demi-tons diatoniques pythagoriciens* » ou *limmas*) que nous retrouvons dans l'ordre que nous connaissons dans notre gamme actuelle (cf. clavier du piano et ordre de succession des touches blanches et noires) :

1 ton - 1 ton - 1 demi-ton - 1 ton - 1 ton - 1 ton - 1 demi-ton.

On peut tout de même faire une remarque, *le ton pythagoricien* est un peu *supérieur* à la *succession* de deux « *demi-tons diatoniques* » *pythagoriciens*. En effet :

$$\frac{B}{A} = \frac{256}{243} \text{ et } \frac{C}{B} = \frac{256}{243}; \text{ donc } \frac{C}{A} = \frac{C}{B} \times \frac{B}{A} = \left(\frac{256}{243}\right)^2 = \frac{65536}{59049} \approx 1,1099; \text{ or } \frac{9}{8} = 1,125$$

qui est un rapport un peu plus grand (un ton pythagoricien est donc un peu plus grand que deux demi-tons diatoniques pythagoriciens ou limmas).

Pour être plus précis, *un ton pythagoricien est plus grand que deux « demi-tons diatoniques pythagoriciens » d'un intervalle valant :*

$$\frac{\frac{9}{8}}{\frac{256^2}{243^2}} = \frac{9 \cdot 243^2}{8 \cdot 256^2} = \frac{3^2 \cdot 3^{5^2}}{2^3 \cdot 2^{8^2}} = \frac{3^2 \cdot 3^{10}}{2^3 \cdot 2^{16}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} \approx 1,0136$$

Comme :

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1,0136 \cong 1,0317 \approx \frac{3^{2/9}}{2^{3/9}} = \left(\frac{9}{8}\right)^{1/9}$$

cet intervalle représente *à peu près 1/9 de ton pythagoricien.*

La différence entre un ton pythagoricien et deux « demi-tons diatoniques pythagoriciens » est donc de l'ordre de 1/9 de ton pythagoricien et n'est pas négligeable ; elle est tout à fait *audible*, et s'appelle le *comma pythagoricien*.

8.3 Hauteurs et intervalles des notes altérées du système de Pythagore

Pour l'instant nous avons trouvé *7 notes* (les *notes naturelles*) qui sont dans l'ordre des quintes :

FA - DO - SOL - RE - LA - MI – SI.

Il n'y a *pas de raison de s'arrêter à 7 notes principales* (plutôt que 5 ou même plus) *lors de la construction de la gamme de Pythagore par les quintes*.

Rien n'empêche de regarder les *autres quintes* que ce soit *au delà du SI* (quinte du SI, puis de la note obtenue ...) ou *avant le FA* (note dont FA est la quinte ...).

Ce faisant, on va introduire *d'autres notes* (les *notes altérées*), qui ne font pas partie de la gamme de Pythagore de do, mais qui seront nécessaires lorsqu'il s'agira de *transposer la gamme de do aux autres degrés*.



8.3.1 Hauteur des notes diésées du système de Pythagore



La quinte suivant le SI a pour fréquence $(3/2)^6 = 729/64$ qui se ramène à $729/512 = 3^6/2^9$. C'est la note notée 6 en vert sur le schéma (un FA# en fait).

De la même manière que la quinte du DO est SOL et que la quinte du LA est MI, nous pouvons dire que la quinte du SI est un FA mais ce n'est pas le FA normal et il se place entre FA et SOL, nous l'appellerons FA# (fa dièse) ; si nous calculons le rapport :

$$\frac{\text{SOL}}{\text{FA\#}}, \text{ nous trouvons } \frac{\frac{3}{2}}{\frac{729}{512}} = \frac{3 \times 512}{729 \times 2} = \frac{1536}{1458} = \frac{256}{243} \text{ soit le demi-ton déjà vu.}$$

En poursuivant, par quintes montantes, nous allons trouver les notes 7 (do#), 8 (sol#), 9 (ré#), 10 (la#), 11 (mi#), 12 (si#) et nous pourrions continuer par les notes 13 (fa##), 14 (do##), 15 (sol##), etc. mais *nous verrons qu'il faut refermer le cycle des quintes, en trichant*, sous peine de devoir inventer une *infinité de notes* et de *ne pas pouvoir transposer* la gamme de do.

8.3.2 Résumé : hauteur des notes naturelles et diésées du système de Pythagore, construit par la succession des quintes

En résumé, on peut construire à partir d'une note (un do par exemple) la suite *des 12 premières quintes* qui nous donnent *12 notes* que nous appellerons par commodité :

(sol), (ré), (la), (mi), (si), (fa #), (do #), (sol #), (ré #), (la#), (mi #), (si #)

en partant de la note de base nommée « do ».

Ces 12 notes sont présentées dans le tableau ci-dessous, avec leur hauteur (rapport de fréquence) par rapport à celle de la note de départ (1 par convention) :

Numéro	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Note	DO	SOL	RE	LA	MI	SI	FA#	DO#	SOL#	RE#
hauteur	1	$3/2$	$3^2/2^2$	$3^3/2^3$	$3^4/2^4$	$3^5/2^5$	$3^6/2^6$	$3^7/2^7$	$3^8/2^8$	$3^9/2^9$

Numéro	10	11	12
Note	LA#	MI#	SI#
hauteur	$3^{10}/2^{10}$	$3^{11}/2^{11}$	$3^{12}/2^{12}$

Cette suite de notes laisse de grands « trous » puisqu'on avance de quinte en quinte. Mais nous avons aussi déjà dit que deux notes séparées d'une octave portent le même nom.

Il suffit donc *d'abaisser toutes ces notes du nombre d'octaves suffisant pour qu'elles se retrouvent toutes dans la même octave.*

Il faut pour cela diviser leur rapport de fréquence par une puissance de 2, pour ramener cet écart entre 1 et 2.

En effectuant cette opération et en ordonnant les notes par leur hauteur croissante dans l'octave, nous obtenons le tableau suivant :

Numéro	1	7	2	9	4	11	6	1	8	3
Note	DO	DO#	RE	RE#	MI	MI#	FA#	SOL	SOL#	LA
hauteur	1	$3^7/2^{11}$	$3^2/2^3$	$3^9/2^{14}$	$3^4/2^6$	$3^{11}/2^{17}$	$3^6/2^9$	$3/2$	$3^8/2^{12}$	$3^3/2^4$

Numéro	10	5	12
Note	LA#	SI	SI#
hauteur	$3^{10}/2^{15}$	$3^5/2^7$	$3^{12}/2^{18}$

Fréquences fractionnaires des notes naturelles et diésées du système pythagoricien

8.3.3 Intervalles des notes (naturelles et diésées) consécutives du système de Pythagore

On peut ensuite s'intéresser aux *intervalles entre deux notes consécutives*. Il suffit pour cela de faire le *rappor^t de leurs fréquences*. Nous obtenons alors le tableau suivant :

Numéro	1	7	2	9	4	11	6	1	8	3
Note	DO	DO#	RE	RE#	MI	MI#	FA#	SOL	SOL#	LA
hauteur	1	$3^7/2^{11}$	$3^2/2^3$	$3^9/2^{14}$	$3^4/2^6$	$3^{11}/2^{17}$	$3^6/2^9$	$3/2$	$3^8/2^{12}$	$3^3/2^4$
rapport		$3^7/2^{11}$	$2^8/3^5$	$3^7/2^{11}$	$2^8/3^5$	$3^7/2^{11}$	$2^8/3^5$	$2^8/3^5$	$3^7/2^{11}$	$2^8/3^5$

Numéro	10	5	12
Note	LA#	SI	SI#
hauteur	$3^{10}/2^{15}$	$3^5/2^7$	$3^{12}/2^{18}$
	$3^7/2^{11}$	$2^8/3^5$	$3^7/2^{11}$

On vérifie que l'on n'obtient que deux valeurs possibles pour les écarts entre deux degrés consécutifs du système de Pythagore :

✓ $3^7/2^{11} = 2187/2048$ soit *l'apotomé* (ou « *demi-ton* » pythagoricien chromatique)

✓ $2^8/3^5 = 256/243$ soit le *limma* (ou « *demi-ton* » pythagoricien diatonique)

Le « *demi-ton diatonique* » *pythagoricien* (ou *limma*) est *plus petit* que le « *demi-ton chromatique* » *pythagoricien* (ou *apotome*) d'un *comma pythagoricien*.

L'écart entre l'apotome et le limma vaut en effet :

$$\frac{3^7}{2^{11}} \Big/ \frac{2^8}{3^5} = \frac{3^5 \cdot 3^7}{2^8 \cdot 2^{11}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288}$$

8.3.4 Ton et « demi-tons » pythagoriciens : résumé

L'intervalle 9/8 sera appelé « *ton* » *pythagoricien* (noté τ).

L'intervalle 256/243 sera appelé « *demi-ton diatonique pythagoricien* » (ou *limma*), et noté δ (delta) , bien qu'il ne soit pas égal à la « moitié » du ton, puisque 9/8 n'est pas le carré de 256/243.

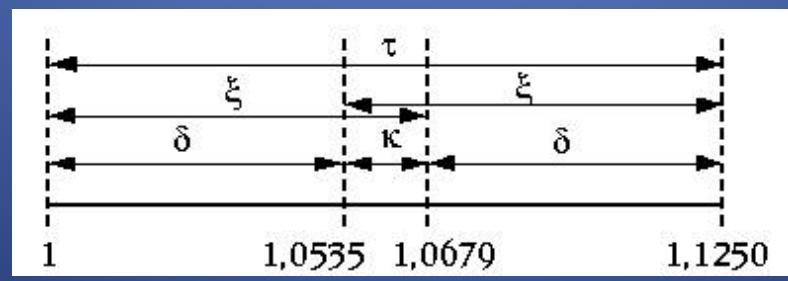
L'intervalle 2187/2048 sera appelé « *demi-ton chromatique pythagoricien* » (ou *apotomé*), et noté ξ (ksi).

On observe que : $9/8 = 256/243 \times 2187/2048$

donc, *un ton pythagoricien est la somme d'un demi-ton diatonique et d'un demi-ton chromatique.*

L'écart entre les deux demi-tons vaut : $2187/2048 \times 243/256 = 531441/524288 = 3^{12}/2^{19}$ qui est le « *comma pythagoricien* », noté κ (khi) : cet intervalle est à peine audible, sauf pour les oreilles très exercées.

En notation mathématique, nous pouvons donc écrire $\tau = \delta + \xi = 2.\delta + \kappa$, ou sous forme graphique (les fractions étant remplacées par leurs valeurs décimales) :



L'intervalle entre une note et la même note diésée vaut donc un *demi-ton pythagoricien chromatique*, ou apotomé, c'est-à-dire $3^7/2^{11} = 2187/2048$.

L'intervalle entre une note diésée et la note naturelle qui la suit vaut un *demi-ton pythagoricien diatonique*, ou limma, c'est-à-dire $2^8/3^5 = 256/243$.

L'intervalle entre deux notes naturelles consécutives vaut *en général* un *ton pythagoricien*, c'est-à-dire $3^2/2^3=9/8$ sauf entre *si* et *do*, où l'intervalle vaut *un demi-ton pythagoricien diatonique*.

Il n'y a qu'un ton entre *mi* et *fa#* de même qu'entre *si* et *do#*.

L'intervalle de la *quinte* vaut *3/2* et permet de reconstruire entièrement la gamme de Pythagore.

L'intervalle de la *tierce pythagoricienne*, appelée aussi *diton*, est de $81/64=3^4/2^6$. Elle diffère de la tierce acoustique (rapport de fréquence $5/4$, puisque la cinquième harmonique correspond au redoublement de la tierce, soit une tierce plus deux octaves.)

L'intervalle de la *quarte* est de *4/3* ; la quarte est le complément de la quinte par rapport à l'octave - on dit aussi son « renversement », exprimé autrement : « une quarte plus une quinte valent une octave ».

8.3.5 Notes bémolisées du système de Pythagore

En partant dans l'autre sens et en cherchant la note dont FA (la note 0) est la quinte, nous trouvons une note -1, qui est un SI compris entre le LA et le SI normal, nous l'appelons donc SI♭ (si bémol), et en poursuivant, nous trouverons les notes -2 (mi♭), -3 (la♭), -4 (ré♭), -5 (sol♭), -6 (do♭), -7 (fab♭) et nous pourrions continuer par -8 (si♭), -9 (mi♭), -10 (la♭), etc. mais à nouveau, nous verrons qu'il faut fermer le cycle des quintes.

En procédant de la même manière, à partir du do, mais par quintes descendantes, on obtient la suite :

Numéro	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
Note	DO	FA	SI♭	MI♭	LA♭	RE♭	SOL♭	DO♭	FAB♭
hauteur	1	2/3	2 ² /3 ²	2 ³ /3 ³	2 ⁴ /3 ⁴	2 ⁵ /3 ⁵	2 ⁶ /3 ⁶	2 ⁷ /3 ⁷	2 ⁸ /3 ⁸

En multipliant la hauteur de chaque note par une puissance de 2 pour la ramener dans l'octave principale (c'est-à-dire ramener la hauteur dans la plage de hauteur entre 1 et 2), et en réordonnant par hauteur croissante on obtient la suite :

Numéro	1	-4	-2	-7	0	-5	-3	-1	-6
Note	DO	RE♭	MI♭	FAB♭	FA	SOL♭	LA♭	SI♭	DO♭
hauteur	1	2 ⁸ /3 ⁵	2 ⁵ /3 ³	2 ¹³ /3 ⁸	2 ² /3	2 ¹⁰ /3 ⁶	2 ⁷ /3 ⁴	2 ⁴ /3 ²	2 ¹² /3 ⁷

8.3.6 Intervalles entre notes (naturelles et bémolisées) consécutives du système de Pythagore

On peut à nouveau s'intéresser à l'intervalle entre deux notes consécutives. Il suffit pour cela de faire le rapport de leurs fréquences. Nous obtenons alors le tableau suivant :

Numéro	1	-4	-2	-7	0	-5	-3	-1	-6
Note	DO	RE♭	Mi♭	Fa♭	FA	SOL♭	LA♭	Si♭	DO♭
hauteur	1	$2^8/3^5$	$2^5/3^3$	$2^{13}/3^8$	$2^2/3$	$2^{10}/3^6$	$2^7/3^4$	$2^4/3^2$	$2^{12}/3^7$
rapport		$2^8/3^5$	$3^2/2^3$	$2^8/3^5$	$3^7/2^{11}$	$2^8/3^5$	$3^2/2^3$	$3^2/2^3$	$2^8/3^5$

On retrouve des rapports connus :

- ✓ $\sqrt{3^7/2^{11}} = 2187/2048$ soit l'*apotomé* (ou « *demi-ton pythagoricien chromatique* »)
- ✓ $2^8/3^5 = 256/243$ soit le *limma* (ou « *demi-ton pythagoricien diatonique* »)

L'intervalle entre une note naturelle et la note consécutive bémolisée vaut donc un demi-ton pythagoricien diatonique.

Il y a un ton pythagoricien entre deux notes bémolisées consécutives, sauf entre mi♭ et fa♭ et entre si♭ et do♭ où il y a un demi-ton diatonique pythagoricien.

Le fa♭ et le do♭ sont un demi-ton diatonique au dessus du mi♭ et du si♭.

En raison de leurs constructions par des quintes, les bémols respectent les mêmes rapports de fréquences que les notes précédentes, par exemple :

$$\frac{\text{MIb}}{\text{RE}} = \frac{\frac{32}{27}}{\frac{9}{8}} = \frac{256}{243}$$

Dièse et bémol sont différents, si nous recherchons la différence entre fa# et sol b, on trouve :

$$\frac{\text{FA\#}}{\text{SOLb}} = \frac{\frac{729}{512}}{\frac{1024}{729}} = \frac{\frac{3^6}{2^9}}{\frac{2^{10}}{3^6}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1,0136$$

c'est-à-dire le *comma pythagoricien*.

Écoutons ces deux dernières notes pour entendre le comma pythagoricien qui les sépare :

Fa# sol b alternance fa#/solb

De manière générale, *une note diésée est toujours plus haute d'un comma pythagoricien que la note bémolisée (ou naturelle) qui la suit.*

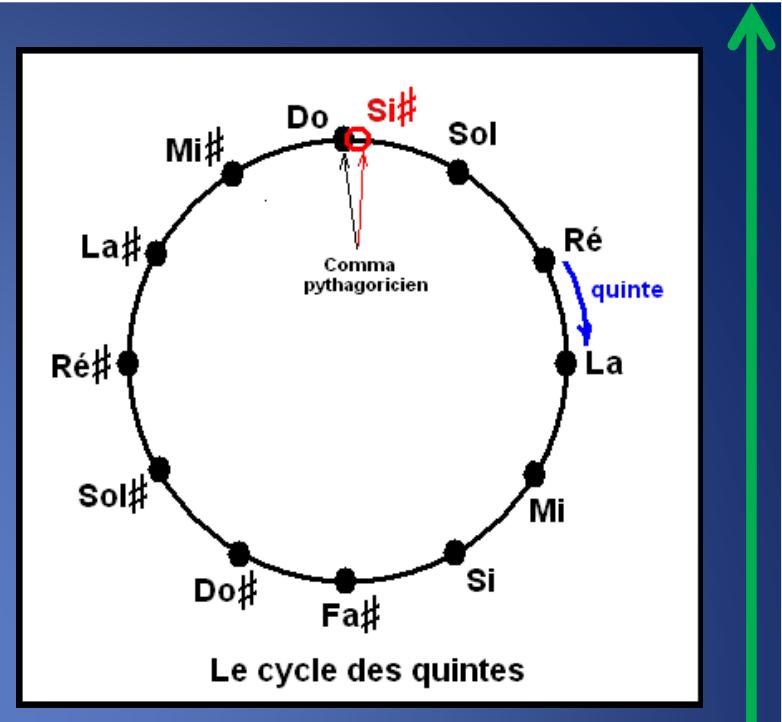
Note	Rapport / DO (fraction)	Rapport / DO (valeur)	Fréquence (LA=440 Hz)	Nb de cents	Nb de cents (gamme tempérée)
DO	1/1	1,000	260,74	0	0
RE ♭	256/243	1,053	274,69	90	100
DO #	2187/2048	1,068	278,44	114	
RE	9/8	1,125	293,33	204	200
MI ♭	32/27	1,185	309,03	294	300
RE #	19683/16384	1,201	313,24	318	
MI	81/64	1,266	330,00	408	400
FA	4/3	1,333	347,65	498	500
SOL ♭	1024/729	1,405	366,25	588	600
FA #	729/512	1,424	371,25	612	
SOL	3/2	1,500	391,11	702	700
LA ♭	128/81	1,580	412,03	792	800
SOL #	6561/4096	1,602	417,66	816	
LA	27/16	1,688	440,00	906	900
SI ♭	16/9	1,778	463,54	996	1000
LA #	59049/32768	1,802	469,86	1 020	
SI	243/128	1,898	495,00	1 110	1100
DO	2/1	2,000	521,48	1 200	1200



8.4 Cycle des quintes et quinte du loup

Si on part d'un *do* et que l'on avance de quinte en quinte, on obtient successivement un *sol*, un *ré*, un *la*, un *mi*, un *si*, un *fa*#, un *do*#, un *sol*#, un *ré*#, un *la*#, un *mi*# (qui est presqu'un *fa*) et ...un *si*# (note très proche d'un *do* situé 7 octaves plus loin), mais qui n'est pas exactement un *do* puisque $3^{12}/2^{12} = 531441/4096 = 129,746$ et $2^7 = 128$; les deux notes ont un écart relatif de :

$$\frac{3^{12}}{2^{12}}/2^7 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1,013$$

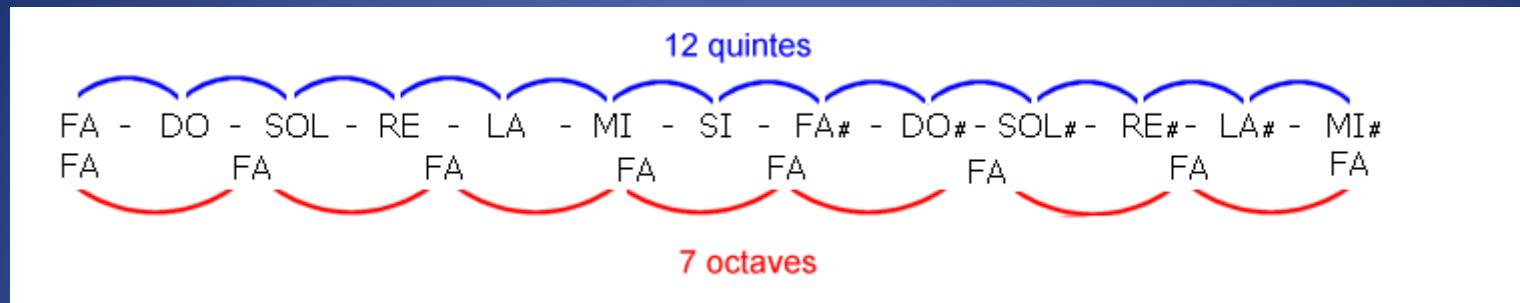


soit une différence de 1,3%. Cet écart correspond au *comma pythagoricien*. Il est audible pour de nombreuses personnes, bien que très faible.

Autrement dit, *par une série de douze quintes, on arrive malheureusement juste un peu plus haut (un comma pythagoricien) que par une série de 7 octaves*.

D'après Raymond Queneau, romancier, poète, mais aussi mathématicien, si $(3/2)^{12}$ n'est pas égal à 2^7 , c'est que Dieu n'aime pas le piano !

Présenté différemment, nous pouvons remarquer que pour retomber sur une note initiale par une succession de quintes, il faudrait qu'un certain nombre de quintes soit égal à un autre nombre d'octaves.



Mathématiquement, c'est impossible, puisqu'*une puissance de 3 (qui est un nombre impair) ne peut jamais être égale à une puissance de 2 (qui est un nombre pair)*.

Si nous ne voulons pas une infinité de notes différentes (nous pouvons en effet définir un fa##, un fa###, etc.) avec des *risques de battements* entre les fréquences trop proches, il va falloir tricher et *boucler à un moment ou un autre le cycle des quintes* pour *retomber sur des octaves de notes déjà connues en assimilant des notes légèrement différentes en une seule*.

Pour *boucler le cycle au bout de 7 octaves justes*, il est nécessaire de *réduire une quinte* (par exemple la dernière, dite « *quinte du loup* ») : au lieu de prendre un écart de 3/2, on prend un écart de :

$$\frac{2^7}{\frac{3^{11}}{2^{11}}} = \frac{2^{18}}{3^{11}} \approx 1,480$$

Au bout de 12 quintes, on retombe alors sur un do situé 7 octaves plus loin. Ce qui fait dire que « *12 quintes valent 7 octaves* ».

8.5 enharmonie du système de Pythagore

En partant de notre gamme de base obtenue par la suite des quintes FA - DO - SOL - RE - LA - MI - SI et en poursuivant dans les dièses (FA#, DO#, SOL#, REI#, LA#, MI#, SI#, FA##, ...) , la première note à problème est le MI# qui est proche du FA (la hauteur de MI# est $3^{11}/2^{17}$ est plus haut d'un comma pythagoricien que FA, de hauteur $2^2/3$), nous allons donc les assimiler et tricher sur la note MI# ; *en rabaissant MI# d'un comma, elle sera identique à FA* ; par conséquent, *SI#*, situé une quinte plus haut que MI#, *sera rabaissé d'un comma et ainsi assimilé à DO*. De même, FA## (qui était plus haut d'un comma que sol) est assimilée à SOL, etc.

Du côté des bémols, par suite de quintes descendantes, à partir de DO, on a construit les notes FA, SI \flat , MI \flat , LA \flat , RE \flat , SOL \flat , DO \flat , FA \flat . Les hauteurs de FA \flat ($2^{13}/3^8$) et de MI ($3^4/2^6$) ne diffèrent aussi que d'un comma pythagoricien (FA \flat est plus bas d'un comma que MI). On va donc là aussi tricher, *en haussant FA \flat d'un comma, pour l'assimiler à MI*. De la même manière, comme DO \flat est très proche d'un SI, on peut *hausser DO \flat et l'assimiler à SI* et hausser SI $\flat\flat$ jusque LA, etc.

Il reste encore des écarts d'un comma pythagoricien entre les notes bémolisées SI \flat , MI \flat , LA \flat , RE \flat , SOL \flat et les notes diésées LA#, RE#, SOL#, DO# et FA#.

On va bien sûr *aussi assimiler ces deux séries de notes*, en conservant par exemple la hauteur des notes bémolisées et en *rabaissant d'un comma la hauteur des notes diésées*.

Ces *modifications de hauteur*, nécessaires pour *boucler le cycle des quintes* et ainsi se limiter à une *série de 12 notes par octave*, portent le nom d'**enharmonie**.

Voici le tableau complet des hauteurs du système de Pythagore ainsi obtenu, par enharmonie :

do		ré		mi	fa		sol		la		si	do
1		9/8		81/ 64	4/3		3/2		27/ 16		243/ 128	2
	do# ré♭		ré# mib			fa# sol♭		sol# la♭		la# sib		
	256/ 243		32/ 27			1024/ 729		128/ 81		16/9		
100	105,3	112,5	118,5	126,6	133,3	140,4	150	158,0	168,8	177,8	189,8	200



8.6 Bilan acoustique du système de Pythagore

SYSTÈME PYTHAGORICIEN

d'après Arnaut de Zwolle (vers 1450)

	FRÉQUENCES		QUINTE		TIERCE MAJ		TIERCE MIN		TON	
			savarts	cents	savarts	cents	savarts	cents	savarts	cents
do	100,000	260,741	0,000	0,000	5,395	21 506	-5,395	-21,506	0,000	0,000
	105,350	274,690	0,000	0,000	5,395	21 506	0,490	1,954	0,000	0,000
ré	112,500	293,334	0,000	0,000	-0,490	-1,954	-5,395	-21,506	0,000	0,000
	118,519	309,026	0,000	0,000	5,395	21 506	-5,395	-21,506	0,000	0,000
mi	126,563	330,000	0,000	0,000	-0,490	-1,954	-5,395	-21,506	-5,885	-23,460
fa	133,333	347,655	0,000	0,000	5,395	21 506	-5,395	-21,506	0,000	0,000
	140,466	366,253	0,000	0,000	5,395	21 506	0,490	1,954	0,000	0,000
sol	150,000	391,112	0,000	0,000	5,395	21 506	-5,395	-21,506	0,000	0,000
	158,025	412,035	0,000	0,000	5,395	21 506	0,490	1,954	0,000	0,000
la	168,750	440,000	0,000	0,000	-0,490	-1,954	-5,395	-21,506	0,000	0,000
	177,778	463,540	0,000	0,000	5,395	21 506	-5,395	-21,506	0,000	0,000
si	189,844	495,000	-5,885	-23,460	-0,490	-1,954	-5,395	-21,506	-5,885	-23,460
do	200,00	521,482								



Les entorses aux rapports acoustiques, définis par la suite des harmoniques, sont nombreuses.

Pour les quintes, elles sont parfaites ($\frac{3}{2}$) sauf la quinte si-fa#, la quinte du loup, trop courte du *comma pythagoricien* (5,885 σ).

Les *tierces majeures* de do, do#, ré#, fa, fa#, sol, sol# et la# sont *trop grandes* d'un intervalle appelé *comma syntonique*, comme toujours dans la gamme de Pythagore (5,395 σ).

Quatre tierces majeures sont *trop courtes* d'un intervalle appelé *schisma*, c'est-à-dire de la différence entre le comma pythagoricien et le comma syntonique (0,49 σ).

En effet miroir, *quatre tierces mineures* sont *trop grandes d'un schisma* (0,49 σ) et les *autres* sont *trop petites d'un comma syntonique* (5,395 σ).

Enfin, *les tons valent tous 9/8 sauf mi-fa# et si-do#, trop petits d'un comma* pythagoricien (5,885 σ).

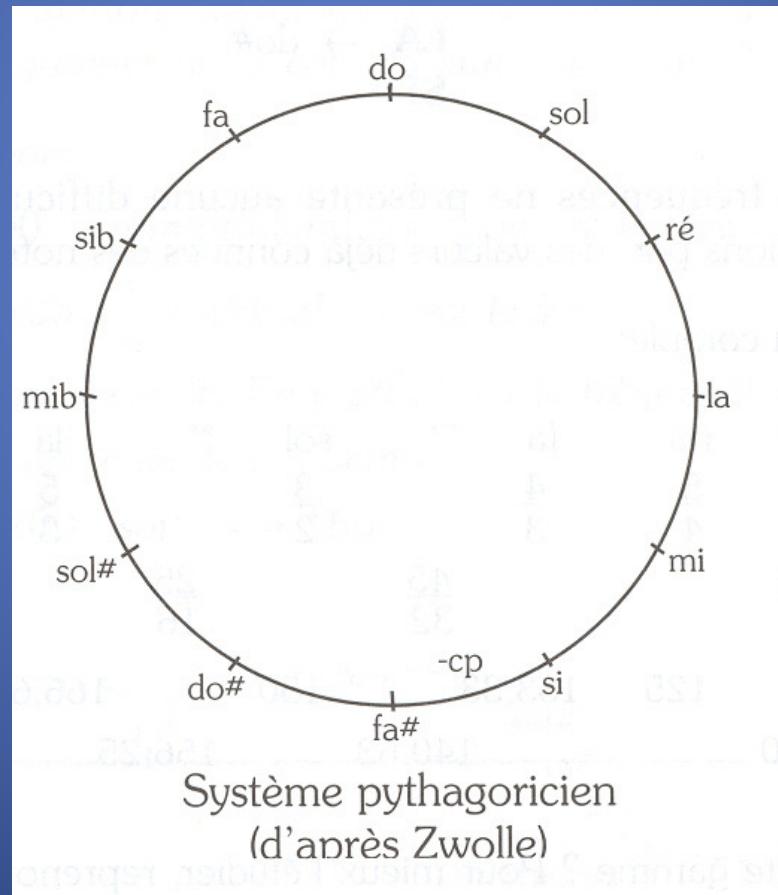
Nous avons réussi à limiter l'ensemble des notes mais dans l'ensemble des quintes, une d'entre elles sera fausse et l'on évitera de la jouer ; c'est la *quinte du loup si-fa#*. Elle est plus courte qu'une quinte juste d'un comma pythagoricien.



8.7 Représentation grâce au cycle des quintes du système pythagoricien

Après identification enharmonique, le *cycle des quintes* est représenté tout naturellement par un *cercle*. Sauf indication contraire, les quintes sont pures. Le choix du nom des notes entre les enharmoniques est arbitraire.

Voici ce cercle représentant la réalisation d'*Arnault de Zwolle* du système de Pythagore. L'indication –cp signifie que la quinte est amputée d'un comma pythagoricien.



On voit que toutes les quintes sont pures, sauf si-fa#, la quinte du loup, amputée d'un comma pythagoricien.

On sait que la tierce do-mi est pythagoricienne, c'est-à-dire *plus grande que la tierce pure d'un comma syntonique*. C'est le cas de *toutes les tierces qui n'enjambent que des quintes pures*.

Les *autres tierces*, celles qui passent par la quinte du loup si-fa# subissent une amputation d'un comma pythagoricien (ce sont les tierces ré-fa#, la-do#, mi, sol# et si-mi♭). Ce sont donc des tierces pythagoriciennes (pures + comma syntonique) auxquelles on a retiré un comma pythagoricien. Elles sont donc *plus petites que pures* de la différence cp-cs (comma pythagoricien – comma syntonique) que l'on appelle *schisma*.

On passe de do à ré par deux quintes pures, ce qui donne un ton pythagoricien (9/8). Par contre, *mi-fa#* et *si-do#* passent par la quinte du loup. Ces deux « tons » sont donc *plus petits que le ton majeur d'un comma pythagoricien*.

Les autres intervalles comme les tierces mineures ou les sixtes peuvent aussi être visualisés sur ce diagramme, mais le procédé est d'un maniement moins commode.

9 Gamme naturelle de Zarlino

La *gamme pythagoricienne* est construite *à partir d'un seul harmonique* particulier, la *quinte*, puis par des montées successives de quintes le nombre de fois nécessaires pour parcourir une octave complète.

Il est à remarquer que les *sons obtenus* par cette méthode sont des *harmoniques de plus en plus complexes* du son fondamental.

Gioseffo Zarlino dit *Zarlin* (1517-1590) a donné son nom à un système qui *utilise plus avant les harmoniques que le système de Pythagore*. Il va jusqu'à 6, ce qui nous donne les rapports :

$$\begin{array}{ccccc} \frac{2}{1} & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{5}{4} & \frac{6}{5} \end{array}$$

Les trois premiers sont familiers (*octave*, *quinte*, *quarte*). Les deux nouveaux définissent la *tierce majeure* (5/4) que nous allons utiliser rapidement, et la *tierce mineure* (6/5) qui apparaîtra plus tard.

9.1 Construction intuitive de la gamme de Zarlino par les accords parfaits

En partant de DO, la quarte et la quinte nous donnent FA et SOL.

A partir de chacune de ces notes, on peut monter d'une *tierce majeure* ou d'une *quinte*.

On obtient à partir de DO les notes MI et SOL, à partir de FA les notes LA et DO et à partir de SOL les notes SI et RE.

Note haussée d'une quinte	do	sol	ré
Note haussée d'une tierce	la	mi	si
Note de départ	fa	do	sol

Les définitions de la *tierce majeure* et de la *quinte* nous ont donc suffi pour obtenir *toutes les notes naturelles de la gamme*, avec *trois accords parfaits majeurs*, placés sur le premier degré (do-mi-sol : tonique), le cinquième degré (sol-si-ré : dominante) et le quatrième degré (fa-la-do : sous dominante).

Mais avant de calculer les fréquences des notes, réfléchissons un peu, car *un grave défaut va apparaître.*



Nous savons que la chaîne de quintes pures de do à mi nous donne une tierce majeure do-mi pythagoricienne, c'est-à-dire plus grande d'un comma syntonique que la tierce acoustique, zarlinienne.

Si, dans la gamme de Zarlin, la tierce do-mi est pure, c'est qu'une des quintes de la chaîne est plus courte d'un comma syntonique.

Laquelle ? Par définition, do-sol et sol-ré sont pures (elles font partie des accords parfaits générateurs).

Comme fa-do est pure et que fa-la-do et do-mi-sol sont des accords parfaits, on déduit que la quinte la-mi est pure aussi.

C'est donc *la quinte ré-la* qui se trouve *trop courte d'un comma syntonique*.

Nous le vérifierons directement dans la suite



9.2 Calcul des fréquences des notes naturelles de la gamme de Zarlino

Si on part de do, dont la hauteur vaut 1, on trouve pour sa quinte sol l'intervalle de $3/2$ et pour fa (dont do est la quinte), l'intervalle de $2/3$, c'est-à-dire, si l'on ramène cette hauteur dans l'octave principale $4/3$ (ce qui était prévisible, puisque fa-do est une quarte).

Mi est la tierce majeure de do, et sa hauteur vaut donc $5/4$.

La est la tierce majeure de fa, et sa hauteur vaut donc $5/4 \cdot 4/3 = 20/12 = 5/3$.

Si est la tierce majeure de sol, donc sa hauteur vaut $5/4 \cdot 3/2 = 15/8$.

On a donc obtenu les *fréquences* :

- ✓ DO=1
- ✓ RE=9/8
- ✓ MI=5/4
- ✓ FA=4/3
- ✓ SOL=3/2
- ✓ LA=5/3
- ✓ SI=15/8

On a donc obtenu les hauteurs et les intervalles suivantes :

Degrés	1	2	3	4	5	6	7	1
Fréquences	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
Intervalles		9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15
Notes	do	ré	mi	fa	sol	la	si	do

Les intervalles ont été obtenus comme d'habitude par des rapports de fréquences entre les notes successives :

$$\frac{RE}{DO} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{1}{8}} = \frac{9}{8}, \quad \frac{MI}{RE} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{9}{8}} = \frac{10}{9}, \quad \frac{FA}{MI} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{16}{15}, \quad \frac{SOL}{FA} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{8}, \quad \frac{LA}{SOL} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{9}, \quad \frac{SI}{LA} = \frac{\frac{15}{8}}{\frac{5}{3}} = \frac{9}{8}, \quad \frac{DO}{SI} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{8}{3}} = \frac{16}{15}$$

Le tableau précédent met en évidence le fait que la gamme de Zarlino comporte *trois* intervalles constitutifs : deux « tons » différents et un demi-ton qui valent :

- ✓ « 9/8 » = *ton majeur* (204 cents)
- ✓ « 10/9 » = *ton mineur* (182 cents)
- ✓ « 16/15 » = *demi-ton majeur* ou *demi-ton diatonique zarlinien* (112 cents)

Dans notre gamme du DO, nous avons donc, dans l'ordre :

1 petit ton (ton mineur) - 1 grand ton (ton majeur) - 1 demi-ton majeur - 1 petit ton - 1 grand ton - 1 petit ton - 1 demi-ton majeur.

*Remarque : on appelle **demi-ton mineur** ou **demi-ton chromatique zarlinien** l'intervalle entre le ton mineur et le demi-ton majeur ; il vaut donc :*

$$\frac{10}{9} \div \frac{16}{15} = \frac{10}{9} \cdot \frac{15}{16} = \frac{150}{144} = \frac{25}{24}$$

c'est-à-dire 71 cents.

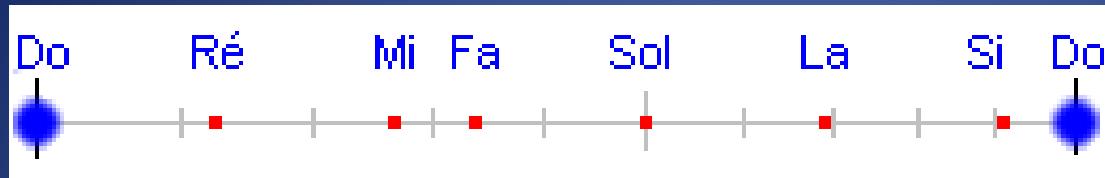
La différence entre ces deux sortes de tons est égale à :

$$9/8 : 10/9 = 81/80 = 1,0125$$

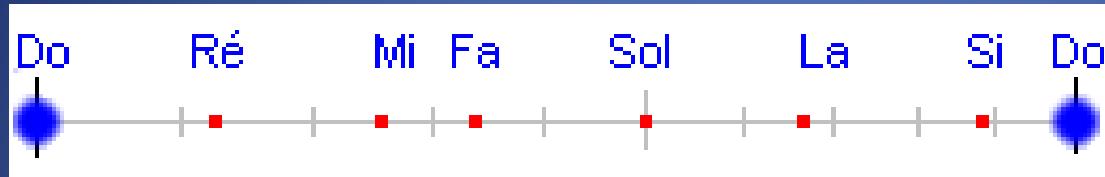
on l'appelle *comma de Zarlino* ou *comma syntonique* et elle est proche du comma pythagoricien $3^{12}/2^{19} \approx 1,0136$.

Cette différence, quoique très petite (elle est encore *plus petite que le comma pythagoricien*), est perceptible à l'oreille.

9.3 Comparaison des hauteurs de notes dans les gammes de Pythagore, de Zarlino



Gamme de Pythagore



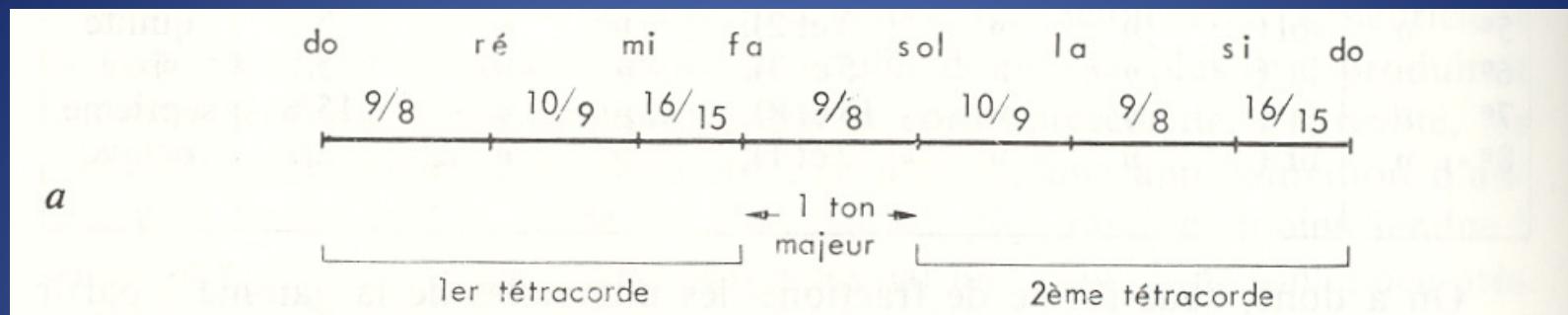
Gamme de Zarlino

À première vue, la gamme de Zarlino ressemble à celle de Pythagore mais *MI, LA et SI sont plus graves*.

Si vous n'êtes pas très habitués, vous entendrez peut être assez peu la différence au niveau de la gamme par contre en comparant les deux notes SI de la gamme de Pythagore et de Zarlino, la différence est assez nette (environ 1/16^{ème} de ton) :

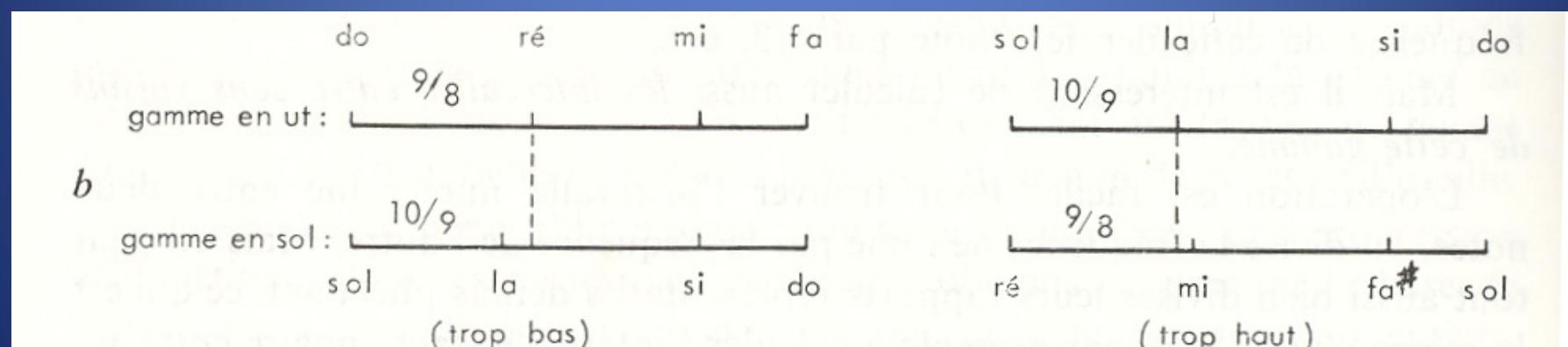
Si dans la gamme de Pythagore ou de Zarlino

Mais un problème beaucoup plus gênant va limiter l'emploi de la gamme de Zarlino. Cette gamme complète se représente de la façon suivante :



Elle est donc composée de *deux « tétracordes » égaux mais pas semblables*, séparés par un ton majeur.

Il s'ensuit que lorsqu'on voudra *transposer* cette gamme, c'est-à-dire commencer une gamme par une autre note (par sol plutôt que do par exemple), *certains intervalles ne seront plus corrects*. Vérifions-le :



Le deuxième degré (la) de la nouvelle gamme transposée sera un peu trop bas, puisqu'entre sol et la, il n'y a qu'un ton mineur.

Un *instrument à clavier* accordé selon la gamme de Zarlino ne sera *juste que pour une seule tonalité*, et cette fausseté pour les autres tonalités s'entend parfaitement à l'oreille.

9.4 Intervalles du système de Zarlino

On vérifie facilement les équivalences suivantes entre intervalles déjà connus :

✓ une octave, c'est une quinte + une quarte ; en effet : $\frac{2}{1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}$

✓ une quinte, c'est une tierce majeure + une tierce mineure ; en effet : $\frac{3}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5}$

✓ une tierce mineure, c'est un ton majeur + un ton mineur ; en effet : $\frac{5}{4} = \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9}$

✓ une tierce mineure, c'est un ton majeur + un demi-ton diatonique zarlinien car : $\frac{6}{5} = \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15}$

✓ un ton majeur, c'est un ton mineur + un comma syntonique ; en effet : $\frac{9}{8} = \frac{10}{9} \cdot \frac{81}{80}$

On peut aussi calculer de nouveaux intervalles ; par exemple :

✓ un demi-ton chromatique, c'est la différence entre une tierce majeure et une tierce mineure (c'est l'écart entre mi♭ et mi, les deux tierces sur sol) ; il vaut donc :

$$\frac{5}{4} \div \frac{6}{5} = \frac{25}{24}$$

Dans le système pythagoricien, un demi-ton diatonique + un demi-ton chromatique font un ton ; ici, on obtient :

$$\frac{16}{25} \cdot \frac{25}{24} = \frac{400}{360} = \frac{10}{9}$$

c'est-à-dire le *ton mineur*, donc on a trouvé une nouvelle équivalence : un ton mineur, c'est un demi-ton diatonique + un demi-ton chromatique ; en effet :

$$\frac{10}{9} = \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24}$$

Mais, si l'on compare ces demi-tons :

- le demi-ton diatonique zarlinien vaut $16/15=1,069\dots$
- le demi-ton chromatique zarlinien vaut $25/24=1,042\dots$

on s'aperçoit que contrairement au système pythagoricien, *le demi-ton diatonique zarlinien est plus grand que le demi-ton chromatique zarlinien.*

Pour rappel, dans le système pythagoricien, on avait obtenu :

- le demi-ton diatonique pythagoricien vaut $256/243=1,053\dots$
- le demi-ton chromatique pythagoricien vaut $2187/2048=1,068\dots$

Ce n'est pas le seul problème du système zarlinien.

En effet, calculons la valeur de la quinte ré-la ; le rapport de hauteur entre le ré et le la vaut :

$$\frac{5/3}{9/8} = \frac{40}{27}$$

Ce rapport est plus petit que $3/2$, comme pressenti. Si l'on multiplie le résultat obtenu par le rapport correspondant au comma syntonique, on obtient :

$$\frac{40}{27} \cdot \frac{81}{80} = \frac{3240}{2160} = \frac{3}{2}$$

La quinte ré-la est bien trop courte d'un comma syntonique.

Par contre, certains intervalles, faux dans le système pythagoricien, deviennent justes ; par exemple, calculons l'intervalle mi-sol, qui forme la tierce mineure :

$$\frac{3}{2} / \frac{5}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

Cet intervalle est donc ici acoustiquement juste.

Comparaison des intervalles de la gamme de Zarlin et de la gamme de Pythagore



Dans la gamme de Pythagore :

- ✓ les quartes et les quintes sont justes, par définition ;
- ✓ les tierces majeures (comme fa-la, do-mi, sol-si) sont identiques et égales à 81/64, soit 102,305 σ, c'est-à-dire plus grandes d'un comma syntonique que la tierce acoustique 5/4.
- ✓ les tierces mineures (comme mi-sol, la-do et si-ré) sont dans un rapport de 32/27, soit 73,786 σ, c'est-à-dire plus petites d'un comma syntonique que la tierce mineure acoustique 6/5 (ce qui est normal, puisqu'une tierce mineure + une tierce majeure = une quinte).

Dans la gamme de Zarlin :

- ✓ les quintes sont toutes acoustiquement correctes, à l'exception de ré-la, trop courte d'un comma syntonique.
- ✓ les tierces majeures sont conformes au rapport des harmoniques.
- ✓ les tierces mineures sont également satisfaisantes, à l'exception de ré-fa, trop courte d'un comma syntonique.

Les deux seules entorses de la gamme de Zarlin à l'orthodoxie acoustique sont donc la quinte ré-la et la tierce mineure ré-fa, trop courtes d'un comma syntonique. Ces intervalles seraient donc purs si le ré était plus bas.

Par conséquent, on tire une constatation intéressante :

Si l'on disposait d'un autre ré, comme une note de secours, située un comma syntonique plus bas, nous disposerions alors de tous les intervalles acoustiquement justes (pour la gamme de do).

9.5 Notes diésées et bémolisées du système de Zarlino

Pour compléter le système zarlinien, nous allons utiliser les tierces.

Fa#, sol# et do# sont respectivement les tierces majeures de ré, mi et la. Quant à si \flat , c'est la note dont ré est la tierce et mi \flat est la note dont sol est la tierce.

	DO
sib	\rightarrow RÉ \rightarrow fa#
	MI \rightarrow sol#
	FA
mib	\rightarrow SOL
	LA \rightarrow do#
	SI

Le calcul des fréquences ne présente aucune difficulté. Il suffit de quelques multiplications et divisions par des valeurs déjà connues des notes naturelles.

Voici le tableau complet du système zarlinien :

Do		Ré		Mi	Fa		Sol		La		Si	Do
1		9/8		5/4	4/3		3/2		5/3		15/8	2
	Do#		Mi \flat		Fa#		Sol#		Si \flat			
	25/24		6/5		45/32		25/16		9/5			

Par exemple, do# étant la tierce de la, on trouve, pour la hauteur du do# :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{24}$$

Mi b est la note dont sol est la tierce, donc, la hauteur h de mi b est telle que :

$$h \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow h = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

Notes du système de Zarlino (sans enharmonie)

Note	Intervalle / DO	Rapport / DO (fraction)	Rapport / DO (valeur)	Fréquence (LA=440 Hz)	Nb de cents	Nb de cents (gamme tempérée)
DO	unisson	1/1	1,000	264,00	0	0
DO #	1/2 ton chromatique	25/24	1,042	275,00	71	100
RE ♭	1/2 ton diatonique	16/15	1,067	281,60	112	
RE bas	ton mineur	10/9	1,111	293,33	182	200
RE	ton majeur	9/8	1,125	297,00	204	
RE #	secondo augmenté	75/64	1,172	309,38	275	300
MI ♭	tierce mineure	6/5	1,200	316,80	316	
MI	tierce majeure	5/4	1,250	330,00	386	400
FA ♭	quarte diminuée	32/25	1,280	337,92	427	
MI #	tierce augmentée	125/96	1,302	343,75	457	500
FA	quarte juste	4/3	1,333	352,00	498	
FA #	quarte augmentée	45/32	1,406	371,25	590	600
SOL ♭	quinte diminuée	64/45	1,422	375,47	610	
SOL	quinte juste	3/2	1,500	396,00	702	700
SOL #	quinte augmentée	25/16	1,563	412,50	773	800
LA ♭	sixte mineure	8/5	1,600	422,40	814	
LA	sixte majeure	5/3	1,667	440,00	884	900
LA #	sixte augmentée	225/128	1,758	464,06	977	1000
SI	septième mineure	9/5	1,800	475,20	1 018	
SI	septième majeure	15/8	1,875	495,00	1 088	1100
DO	octave diminuée	48/25	1,920	506,88	1 129	
SI #	septième augmentée	125/64	1,953	515,63	1 159	1200
DO	octave	2/1	2,000	528,00	1 200	



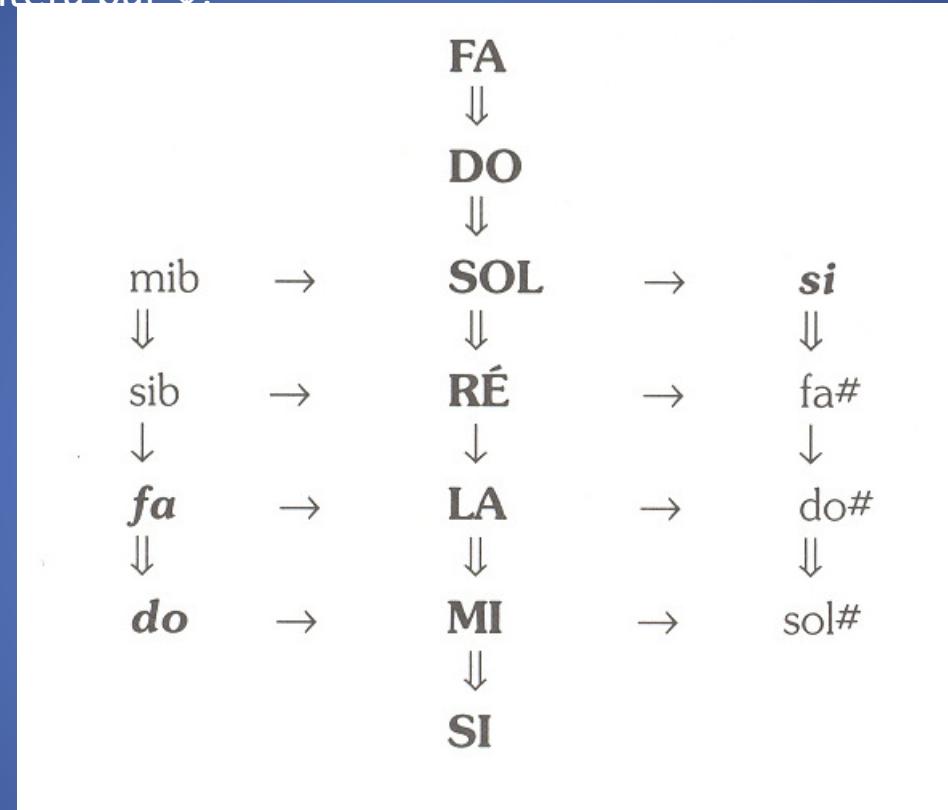
Ensemble des intervalles, notes et rapports du système de Zarlino (sans enharmonie)

Fondamentale	DO	1
Demi-ton chromatique	DO#	25/24
Demi-ton diatonique	RÉ♭	16/15
Ton majeur	RÉ	9/8
Seconde augmentée	RÉ#	75/64
Tierce mineure	MI♭	6/5
Tierce majeure	MI	5/4
Tierce augmentée	MI#	125/96
Quarte diminuée	FA♭	32/25
Quarte	FA	4/3
Quarte augmentée	FA#	45/32
Quinte diminuée	SOL♭	64/45
Quinte	SOL	3/2
Quinte augmentée	SOL#	25/16
Sixte mineure	LA♭	8/5
Sixte majeure	LA	5/3
Sixte augmentée	LA#	225/128
Septième mineure	SI♭	9/5
Septième majeure	SI	15/8
Septième augmentée	SI#	125/64
Octave diminuée	DO♭	48/25
Octave	DO	2



9.6 Analyse du système zarlinien avec enharmonie

Que donne ce système ? Pour mieux l'étudier, reprenons le tableau en disposant les notes par quintes, et en ajoutant (en italique) des tierces. La quinte pure est indiquée par \Downarrow et la tierce majeure pure par \rightarrow . On se rappelle que la quinte ré-la est trop courte d'un comma syntonique. On la représentera par \Downarrow .



En ajoutant les notes en italique, on a fait apparaître quatre séries de deux tierces. Mais deux tierces consécutives en impliquent une troisième.

Considérons par exemple les tierces mib-sol et sol-si. La tierce de si est, à l'enharmonie près, le mib (ré# en fait).

Mais trois tierces majeures ne font pas une octave.

En effet, trois tierces majeures valent : $\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{125}{64}$

Ce rapport est plus petit que 2 d'un comma enharmonique 128/125 (10,3 σ).

En effet : $\frac{125}{64} \cdot \frac{128}{125} = 2$

Le ré♯ est donc plus bas d'un comma enharmonique que le mi♭.

Si, par enharmonie, on hausse ré♯ et que l'on assimile ré♯ à mi♭, la tierce si-ré♯ augmente d'un comma enharmonique.

De la même manière, si on assimile fa♭ à mi, do♭ à si, la♯ à si♭, la♭ à sol♯, ré♭ à do♯, sol♭ à fa♯, mi♯ à fa, si♯ à do, sur trois tierces, une sera plus grande d'un comma enharmonique. Ce qui nous fait huit tierces majeures pures (celles du tableau précédent) et quatre qui sont mauvaises (fa♯-la#, do♯-mi#, sol♯-si# et si-ré#).

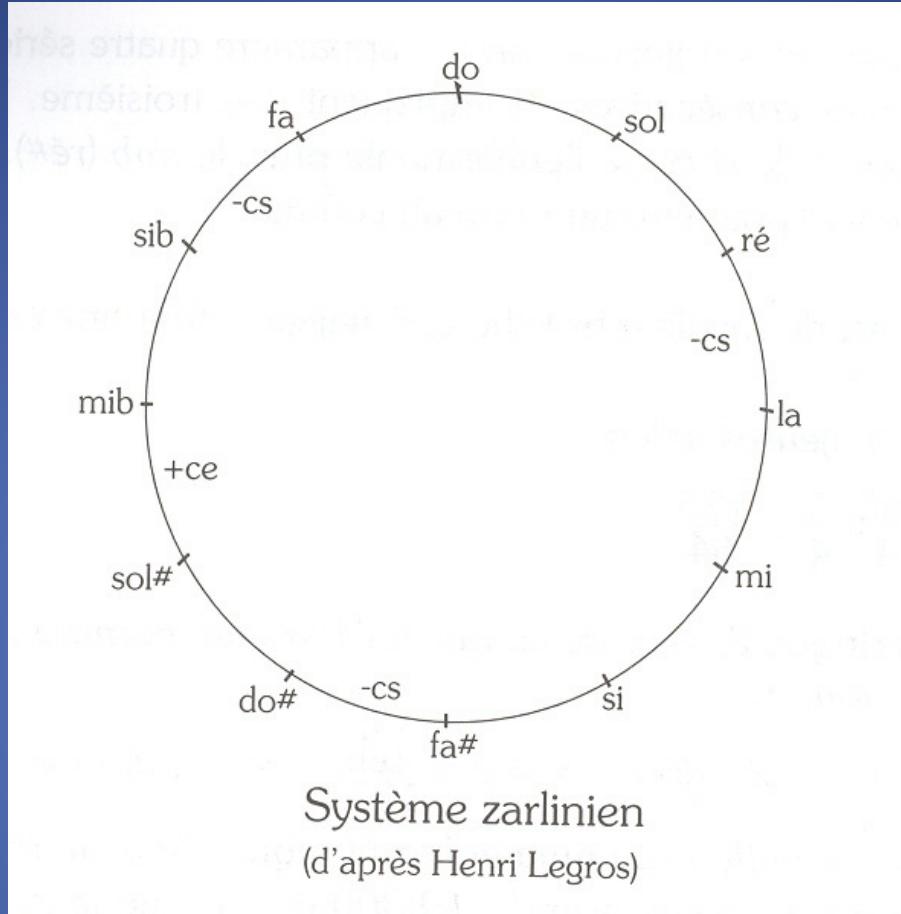
On voit aussi que les quintes si♭-fa et fa♯-do# sont égales à ré-la, donc trop courtes d'un comma syntonique.

Une autre quinte pose problème, c'est la *quinte du loup* du système zarlinien sol#-ré# ; elle vaut en effet :

$$2 \cdot \frac{6}{5} \div \frac{25}{16} = 2 \cdot \frac{96}{125} = 1,536$$

Cette quinte est donc *beaucoup trop grande*. En fait, elle est trop grande *d'un comma enharmonique*, puisque :

$$2 \cdot \frac{96}{125} = \frac{192}{125} = \frac{3}{2} \cdot \frac{128}{125} = \frac{3.64}{125}$$



L'examen de ce graphique montre qu'il y a deux sortes de tierces :

- ✓ celles qui passent, comme do-mi, par trois quintes pures et une quinte raccourcie d'un comma syntonique –cs. Elles sont donc pures.
- ✓ celles qui, comme fa#-si^b passent par deux quintes pures, une quinte marquée –cs et la quinte sol#-mib marquée +ce (+ comma enharmonique). Elles sont pures, plus la quantité ce.

SYSTÈME ZARLINIEN

réalisation proposée par Henri Legros (GAM n°61)

	FRÉQUENCES		QUINTE		TIERCE MAJ		TIERCE MIN		TON	
			savarts	cents	savarts	cents	savarts	cents	savarts	cents
do	100,000	264,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	104,167	275,000	0,000	0,000	10,300	41,059	0,000	0,000	10,300	41,059
ré	112,500	297,000	-5,395	-21,506	0,000	0,000	-5,395	-21,506	-5,395	-21,506
	120,000	316,800	0,000	0,000	0,000	0,000	-10,300	-41,059	-5,395	-21,506
mi	125,000	330,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
fa	133,333	352,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-10,300	-41,059	0,000	0,000
	140,625	371,250	-5,395	-21,506	10,300	41,059	-5,395	-21,506	-5,395	-21,506
sol	150,000	396,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-5,395	-21,506
	156,250	412,500	10,300	41,059	10,300	41,059	0,000	0,000	10,300	41,059
la	166,667	440,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	180,000	475,200	-5,395	-21,506	0,000	0,000	-15,695	-62,565	-5,395	-21,506
si	187,500	495,000	0,000	0,000	10,300	41,059	0,000	0,000	-5,395	-21,506
do	200,000	528,00								



Remarque : il existe une relation mathématique simple entre les trois commas que nous avons rencontrés jusqu'ici.

Pour la trouver, exprimons de deux manières la quinte du loup dans le système de Zarlino .

D'abord, passons par les tierces. Nous savons qu'il y a huit tierces pures et quatre trop grandes d'un comma enharmonique (ce). Les tierces pures sont celles qui passent par les quintes marquées -cs sur le cercle des quintes, les autres sont celles qui passent par une quinte -cs et par la quinte +ce, qui est la quinte agrandie d'un comma enharmonique, c'est-à-dire la quinte du loup. On peut donc écrire :

$$\text{Quinte du loup} = \text{quinte pure (Q)} + \text{comma enharmonique (ce)}$$

Ensuite, passons par les quintes. Si onze quintes étaient pures, nous serions dans le système de Pythagore et le loup vaudrait une quinte pure moins un comma pythagoricien. Dans le cas de Zarlino, trois quintes sont raccourcies d'un comma syntonique (-cs). Ces commas vont s'ajouter à la quinte du loup de Zarlino, qui vaut donc :

$$\text{Quinte du loup} = \text{quinte pure (Q)} - \text{comma pythagoricien (cp)} + 3 \text{ commas syntoniques (cs)}$$

En équation, on a donc :
et finalement :

$$\text{Loup} = Q + ce = Q - cp + 3cs$$

$$ce = 3cs - cp$$

On peut vérifier numériquement cette équation avec les valeurs en savarts des commas :

$$10,300\sigma = 3.(5,395\sigma) - 5,885\sigma$$

10 Systèmes naturels et systèmes tempérés (ou tempéraments)

10.1 Position du problème

Jusqu'ici, on a construit *deux systèmes de notes*, mais *aucun* des deux *n'est satisfaisant* :

- ✓ Le *système de Pythagore* s'appuie uniquement sur une succession de quintes et *ignore* les autres harmoniques de la fréquence fondamentale, en particulier la *tierce* qui est presque aussi importante que la quinte pour l'harmonie. De plus, pour ne pas introduire trop de notes trop proches les unes des autres, il faut arrondir une quinte, la *quinte du loup* pour que « 12 quintes vailgent 7 octaves ».
- ✓ Le *système de Zarlino* n'est pas construit de la même manière et respecte partiellement l'intervalle de tierce. Ce système n'a pas les problèmes de bouclage de la gamme de Pythagore mais un *instrument à notes fixes* est pratiquement *irréalisable* sans tricher sur les notes pour éviter d'en avoir trop ; en effet, les *transpositions* de la gamme de do majeur pour obtenir les autres tonalités *doublent le nombre de notes* (cf. chapitre « théorie musicale et tonalité »).

Dans les deux cas, les transpositions posent problème en raison de l'inégalité des écarts entre les notes, et *certaines tonalités restent inaccessibles*.

10.2 Claviers naturels de Mersenne

Le père Marin Mersenne, contemporain de Descartes, a désespérément (et vainement) cherché une utilisation rationnelle du système zarlinien.

Mersenne a proposé des solutions pour accorder un clavier pour que ses notes naturelles forment une gamme de type zarlinien.

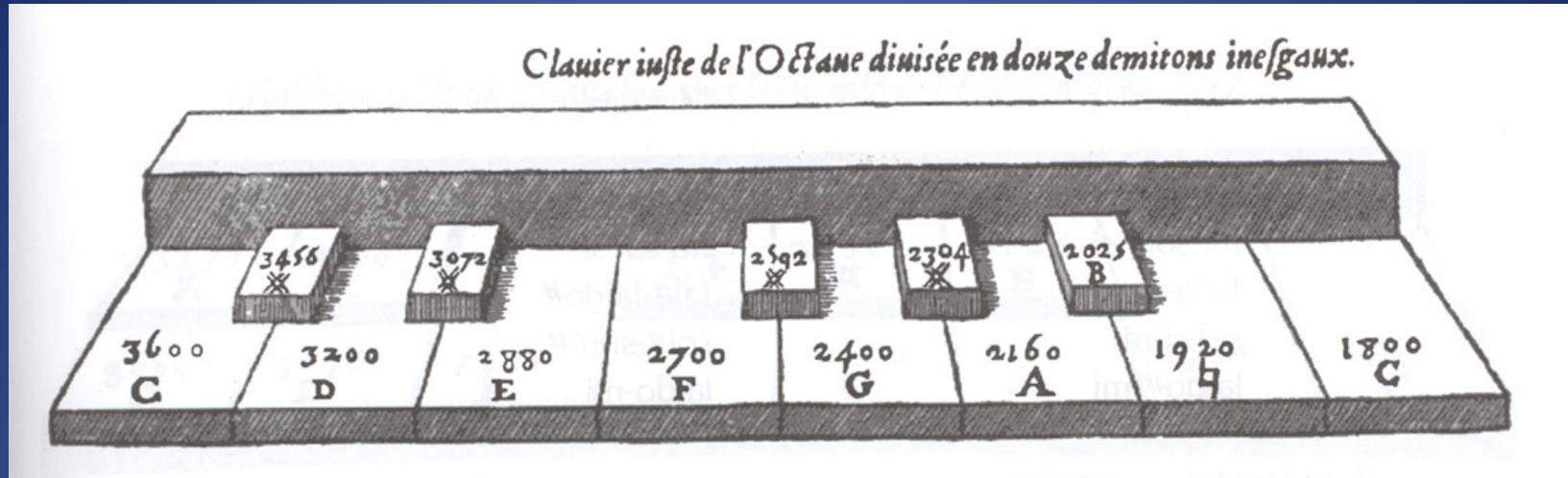
À chaque note, il associe un nombre, appelé nombre harmonique, qui doit correspondre à la longueur du tuyau (d'orgue) ou de la corde ; ces nombres sont donc inversement proportionnels aux fréquences.

Plus précisément, au nombre harmonique N est associée la fréquence f donnée par :

$$f = \frac{K}{N}$$

où K est une constante, qui doit être fixée à K=360 000 pour obtenir le do conventionnel de fréquence do = 100 et à K=950 400 pour obtenir un la = 440.

Voici le premier clavier naturel de Mersenne, comportant comme le système zarlinien et le système pythagoricien douze marches sur l'octave :

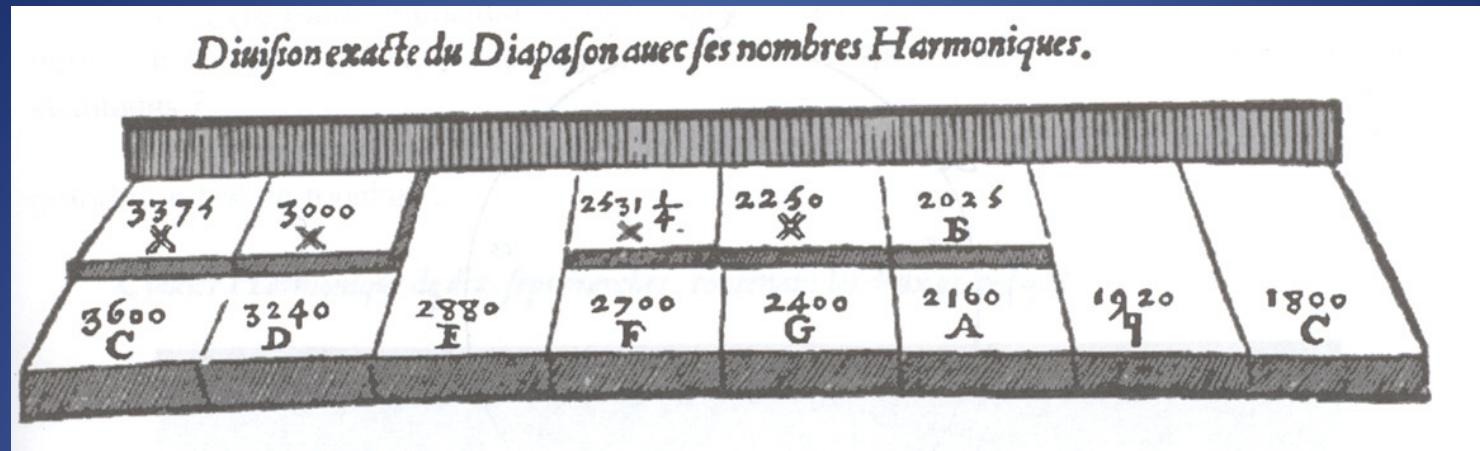


Le tableau suivant donne les nombres harmoniques portés sur les touches et les fréquences selon lesquelles ce clavier doit être accordé :

do	**	ré	**	mi	fa	**	sol	**	la	**	si	do
3600		3200		2880	2700		2400		2160		1920	1800
		3456		3072		2592		2304		2025		
		100		112,50		125		133,33		150		166,667
		104,167		117,188		138,889		156,250		177,778		200

Ces valeurs diffèrent du système zarlinien, mais on vérifie que do et mi sont dans un rapport de tierce juste ($5/4$), de même que mi et sol#, la et do#, si et ré#. La note dont la est la tierce mineure (rapport $6/5$) est le fa#. Une seule note pose vraiment problème, entre la et si. C'est la note dont fa est la quinte pure. Ce n'est ni un la#, ni un sib car cette note n'est pas dans un intervalle de tierce majeure ou mineure avec les autres notes. Ce clavier, par les accords qu'il permet, est nettement porté vers les tonalités comportant des dièses.

Voici le second clavier naturel de Mersenne :

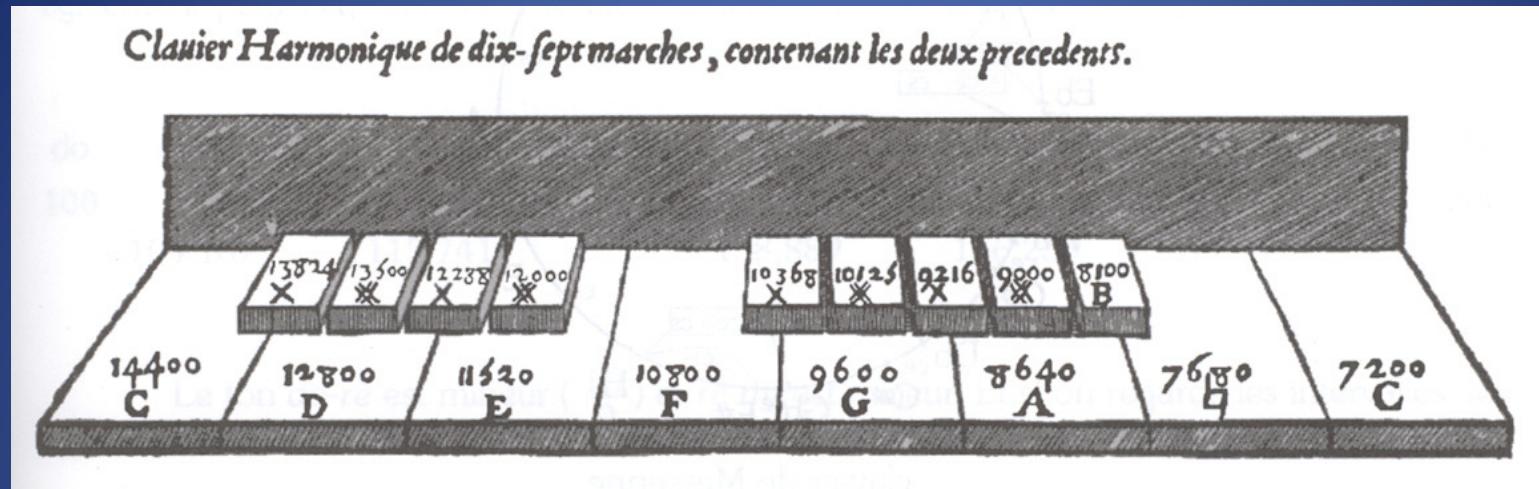


Le nombre harmonique 3240 est une erreur, c'est 3200 qu'il faut lire. Voici les nombres harmoniques et les fréquences correspondantes :

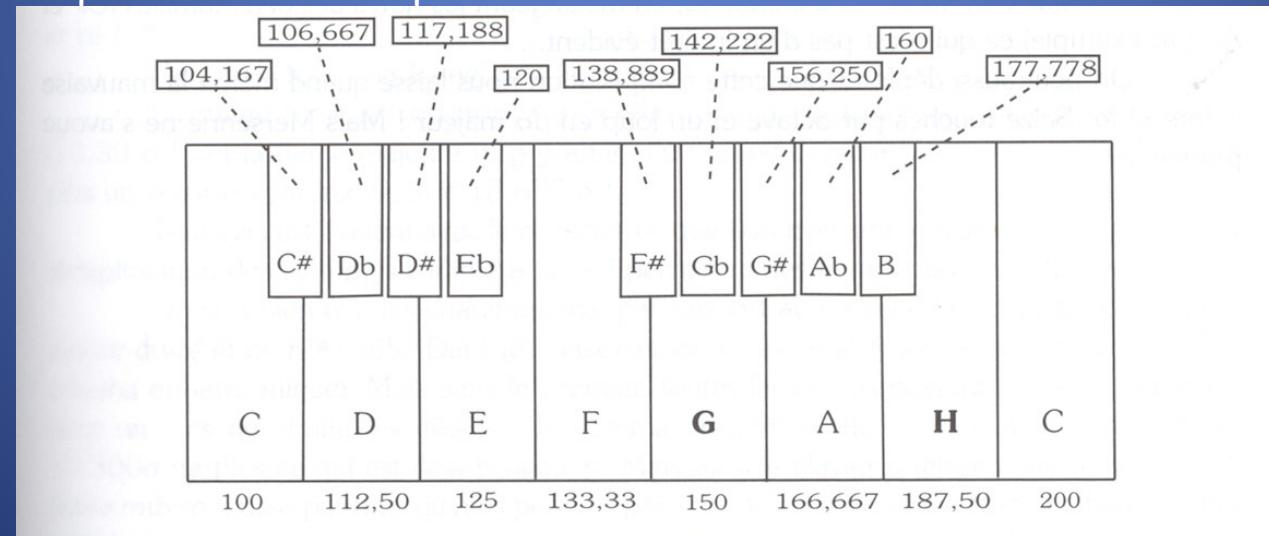
do	**	ré	**	mi	fa	**	sol	**	la	**	si	do
3600		3200		2880	2700		2400		2160		1920	1800
3375		3000		2531,25		2250		2025				
100		112,50		125	133,33		150		166,667	187,50	200	
		106,667		120		142,222		160		177,778		

Ces nombres font tout de suite apparaître la belle tierce mineure do-mi \flat (rapport 6/5). Les tierces majeures ré \flat -fa, mi \flat -sol et la \flat -do définissent la hauteur des trois notes intermédiaires. Le si \flat correspond à la tierce mineure de ré \flat et le so \flat s'obtient par la tierce majeure de si \flat . Mais à nouveau, le si \flat n'est pas satisfaisant puisque les tierces si \flat -ré et sol-si \flat sont mauvaises. Ce deuxième clavier est bien adapté aux tonalités comportant des bémols.

En combinant les deux claviers précédents, dont l'un est presque bon pour les dièses et l'autre presque bon pour les bémols, Mersenne propose un clavier naturel comportant dix-sept marches sur l'octave :



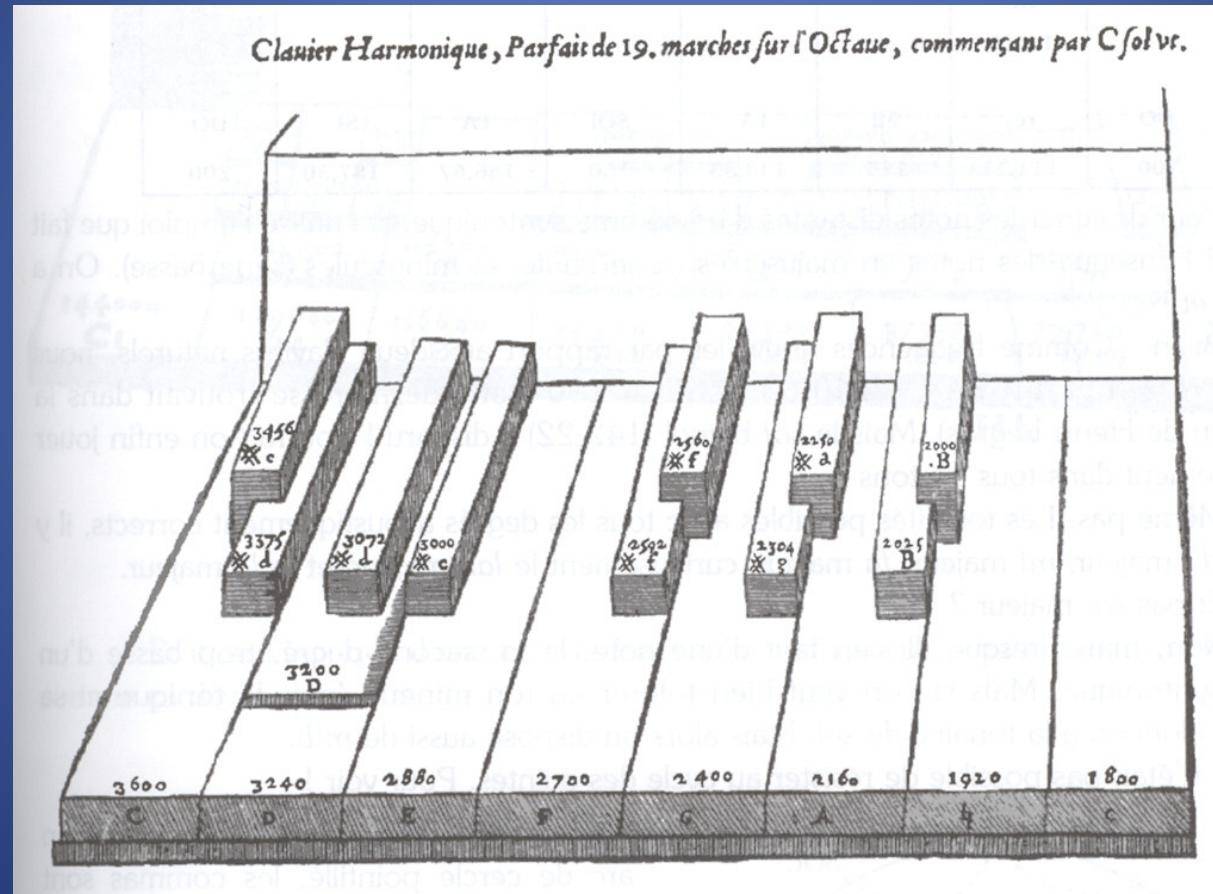
Dont voici les fréquences relatives pour do=100 :



Comme d'habitude dans le système zarlinien, le bémol est plus haut que le dièse. On note aussi l'absence de la# et de si#, l'unique note entre la et si étant le B, trouvé sur les deux claviers précédents.

En étudiant le système zarlinien, on se rend vite compte que si l'on dispose d'un autre ré, situé un comma syntonique plus bas que le ré, on dispose de tous les intervalles acoustiquement justes.

En exploitant cette idée, Mersenne propose un autre clavier naturel, comportant 19 marches par octave :



Voici les valeurs des fréquences pour $do = 100$.

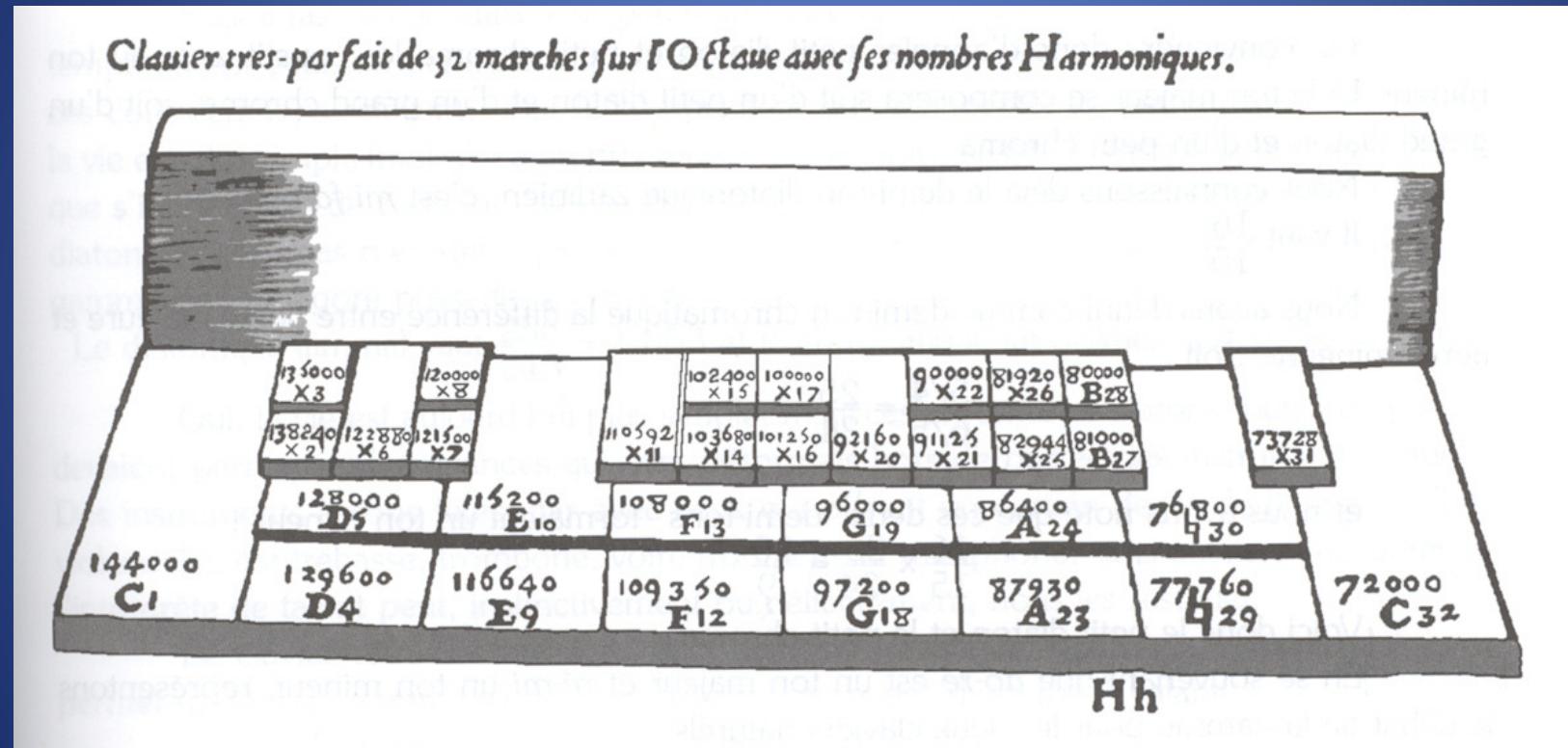
DO#	RÉb	RÉ#	MIb	fa#	LA#	SIb	DO
104,17	106,67	117,19	120	138,089	140,63	177,78	100
DO	ré	MI	FA	SOL	LA	SI	DO
100	111,11	125	133,33	150	166,67	187,50	200

Comme certaines notes apparaissent en double, et séparées d'un comma syntonique, on a utilisé des notes en majuscules pour la série haute et minuscules pour la série basse.

Ce clavier permet seulement de jouer dans cinq tonalités avec tous les degrés acoustiquement justes : do majeur, mi majeur, fa majeur, lab majeur et la majeur.

En poursuivant ses recherches, Mersenne a introduit de plus en plus de touches intermédiaires, mais sans succès : en fait, il est impossible d'avoir tous les intervalles de tierces et quintes purs.

Voici l'un des claviers les plus monstrueux imaginés par Mersenne, comportant 32 notes par octave :

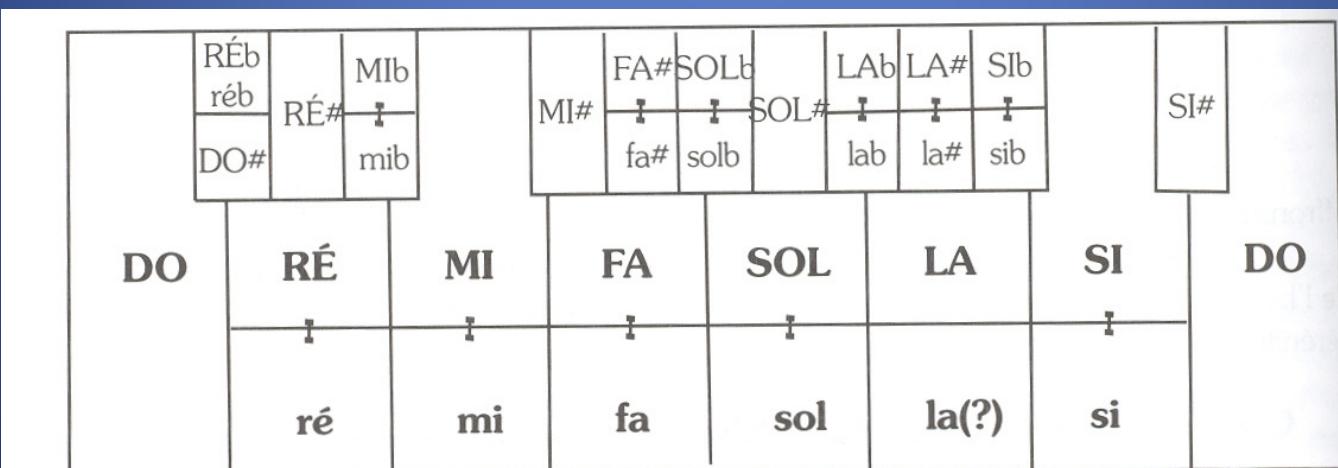


Voici les nombres harmoniques donnés par Mersenne :

C 1	144000E 9	116600x 16	101250A23	87930
x 2	138240E10	115200x 17	100000x 25	82944
x 3	135000x 11	110592G18	97200 x 26	81920
D 4	129600F12	109350G19	96000 B27	81000
D 5	128000F13	108000x 20	92160 B28	80000
x 6	122880x 14	103680x 21	90025 h29	77760
x 7	121500x 15	102400x 22	90000 h30	76800
			x 31	73728

et bien entendu, C32 vaut 72000.

Ici, toutes les notes des touches blanches sauf le Do sont doublées, et les deux séries de notes diffèrent d'un comma syntonique. Ce clavier permet de jouer une gamme zarlinienne dans neuf tonalités seulement.



▀ = 1 comma syntonique

10.3 Définition

« Le *tempérament* est, comme son nom l'indique, un *compromis* visant par des moyens empiriques à *constituer une échelle musicale* susceptible de *s'accommoder à toutes les combinaisons de sons* qu'on voudrait lui faire supporter ».

L'idée de base est *d'altérer certaines quintes* pour obtenir un compromis sur les autres intervalles.

Ce problème est particulièrement important pour accorder les instruments à clavier.

10.4 Des solutions par dizaines

Des *dizaines de tempéraments* (allemands, français, italiens) ont été proposés et/ou utilisés par les musiciens. Il n'est pas question ici de les décrire ni même de les citer.

Certains tempéraments (comme le *mésotonique classique*, décrit ci-dessous) restent entachés des problèmes du système dont ils sont les amendements, et *ne permettent pas de jouer dans toutes les tonalités*.

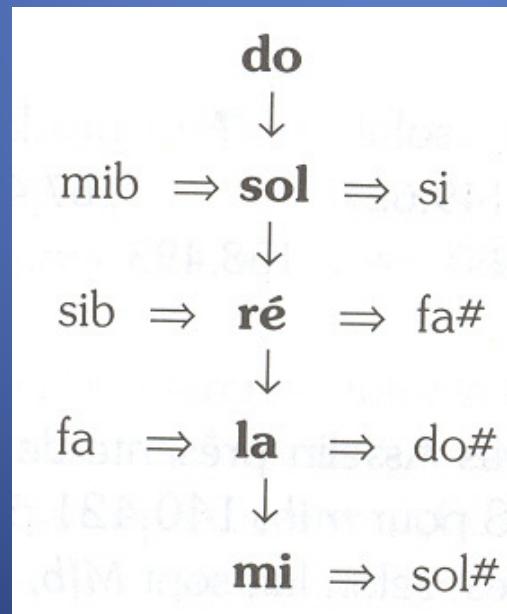
D'autres tempéraments (comme *Werckmeister III* décrit ci-dessous) *permettent toutes les tonalités*.

10.5 Un exemple de tempérament : le mésotonique classique

Dans la gamme de Pythagore, l'enchaînement de quintes do-sol-ré-la-mi donne un mi un peu haut (un comma syntonique trop haut), ce qui fait que les tierces pythagoriciennes sont trop grandes (d'un comma syntonique) par rapport au rapport 5/4 de la tierce acoustique.

L'idée du tempérament mésotonique, pour rendre les tierces pures, est de raccourcir les quintes ; comme il faut répartir un comma syntonique sur quatre quintes, on va enlever $\frac{1}{4}$ de comma syntonique à chaque quinte.

Au départ des cinq notes do-sol-ré-la-mi, séparées par ces quintes un peu courtes (mais acceptables), on peut placer des notes distantes d'une tierce majeure acoustiquement juste ; nous obtenons le tableau suivant (\downarrow indique la quinte raccourcie, et \Rightarrow indique la tierce majeure pure) :



Pour définir cette suite de quintes, allant de do à mi, on cherche la valeur q de la quinte raccourcie, telle qu'en multipliant la fréquence de do par q une fois (sol), deux fois (ré), trois fois (la) et enfin quatre fois, on arrive à un mi dont la fréquence, ramenée dans l'octave de départ, doit être celle de do multipliée par 5/4. Comme on a changé deux fois d'octave au fil de ces quatre quintes, on peut écrire :

$$\frac{q^4}{4} = \frac{5}{4}$$

c'est-à-dire en simplifiant :

$$q^4 = 5 \quad \text{donc} \quad q = \sqrt[4]{5} = 1,49534878$$

Cette valeur est en effet très proche de celle de la quinte pure (3/2).

On peut maintenant calculer facilement les fréquences des notes sol, ré, la, et mi, en multipliant la fréquence de do par les puissances 1, 2, 3 et 4 de q et en divisant éventuellement par une puissance de 2 pour rester dans la même octave. On trouve pour do=100, sol=100.q=149,535, ré=111,83, la=167,185 et mi=125.

Comme si est la tierce de sol, on trouve sa fréquence en multipliant 149,535 par 5/4, soit 186,919, et on trouve de la même manière les fréquences de do#, mi♭, fa#, sol#, si♭.

On obtient finalement le tableau des fréquences suivant :

do		ré		mi	fa		sol		la		si	do
100		111, 803		125	133, 748		149, 535		167, 185		186, 919	200
	do#		mi♭			fa#		sol#		si♭		
		104, 491		119, 628			139, 754		156, 250		178, 895	

Même si tous les degrés (les douze notes) de la gamme chromatique apparaissent dans ce tableau, tout n'est pas parfait.

Au niveau des tierces, par exemple, il y en a 8 qui sont parfaites (la tierce do-mi et les tierces symbolisées par \Rightarrow), mais d'autres, comme la tierce si-ré# ne seront pas pures, puisque ré# et mi \flat diffèrent ; en effet, sinon, trois tierces pures seraient égales à une octave (ce qui est faux) ; en fait, ré# est plus haut que mi \flat d'un comma enharmonique, ce qui donne donc une tierce si-ré# trop grande d'un comma enharmonique.

De la même manière, les tierces fa#-la#, do#-mi#, sol#-si# sont aussi trop grandes d'un comma enharmonique et valent en fait :

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{128}{129} = \frac{32}{25}$$

ce qui donne 1,280 ou 107,210 σ au lieu de 1,25 ou 96,910 σ .

En complétant le tableau :

		do	\Rightarrow	mi
		↓		↓
mib	\Rightarrow	sol	\Rightarrow	si
↓		↓		↓
sib	\Rightarrow	ré	\Rightarrow	fa#
↓		↓		↓
fa	\Rightarrow	la	\Rightarrow	do#
↓		↓		↓
do	\Rightarrow	mi	\Rightarrow	sol#

on voit que toutes les quintes égales, sauf celle qui devrait fermer le cycle, de sol# à mib.
C'est la quinte du loup.

Que vaut-elle ?

Si l'on veut que le cycle se referme, on doit avoir :

$$q^{11} \cdot Q_L = 2^7$$

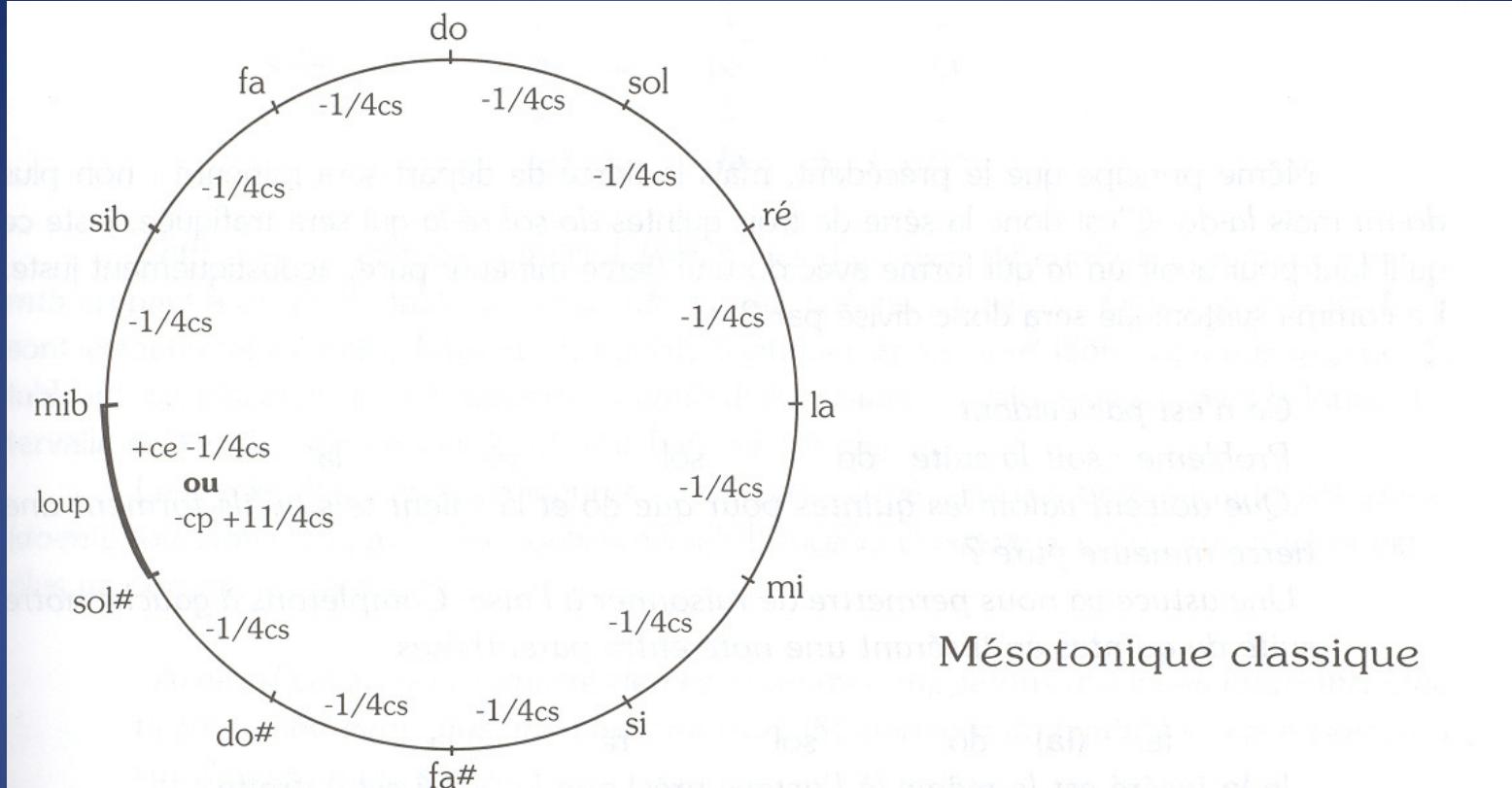
donc :

$$Q_L = \frac{2^7}{(\sqrt[4]{5})^{11}} \approx 1,531$$

qui est trop grande de $8,95\sigma$ par rapport à la quinte pure, alors que les autres quintes sont plus courtes qu'une quinte pure de $1,35\sigma$. Cet écart peut aussi s'écrire sous la forme :

$$ce - \frac{1}{4}cs = -cp + \frac{11}{4}cs$$

On peut reporter tous ces résultats sur le cercle des quintes :



Les tierces générées par quatre quintes diminuées d'un quart de comma syntonique sont pures. Quatre tierces sont plus grandes d'un comma enharmonique, ce sont celles qui passent par le loup, donc ce loup est plus grand que les autres quintes de ce comma enharmonique.

Le cercle montre aussi qu'il y a deux sortes de tons : ceux qui passent par les quintes au quart de comma, comme do-ré (c'est le ton pythagoricien, raccourci d'un demi-comma syntonique) et les deux qui passent par le loup, do#-mib et sol#-sib, qui se voient augmentés d'un comma syntonique.

MÉSOTONIQUE CLASSIQUE

d'après Aron (vers 1523)

	FRÉQUENCES		QUINTE		TIERCE MAJ		TIERCE MIN		TON	
			savarts	cents	savarts	cents	savarts	cents	savarts	cents
do	100,000	263,181	-1,349	-5,377	0,000	0,000	-1,349	-5,377	-2,698	-10,753
	104,491	275,000	-1,349	-5,377	10,300	41,059	-1,349	-5,377	7,602	30,306
ré	111,803	294,246	-1,349	-5,377	0,000	0,000	-1,349	-5,377	-2,698	-10,753
	119,628	314,838	-1,349	-5,377	0,000	0,000	-11,649	-46,435	-2,698	-10,753
mi	125,000	328,977	-1,349	-5,377	0,000	0,000	-1,349	-5,377	-2,698	-10,753
fa	133,748	352,000	-1,349	-5,377	0,000	0,000	-11,649	-46,435	-2,698	-10,753
	139,754	367,807	-1,349	-5,377	10,300	41,059	-1,349	-5,377	-2,698	-10,753
sol	149,535	393,548	-1,349	-5,377	0,000	0,000	-1,349	-5,377	-2,698	-10,753
	156,250	411,221	8,951	35,682	10,300	41,059	-1,349	-5,377	7,602	30,306
la	167,185	440,000	-1,349	-5,377	0,000	0,000	-1,349	-5,377	-2,698	-10,753
	178,885	470,793	-1,349	-5,377	0,000	0,000	-11,649	-46,435	-2,698	-10,753
si	186,919	491,935	-1,349	-5,377	10,300	41,059	-1,349	-5,377	-2,698	-10,753
do	200,000	526,363								



10.6 Un autre exemple de tempérament : Werckmeister III

Le Werckmeister III répartit le comma pythagoricien sur quatre quintes, les quintes de do, sol, ré et si. On a donc huit quintes pures ($3/2$) et quatre quintes tempérées d'un quart de comma pythagoricien.

Appelons q la valeur de cette quinte tempérée, on doit avoir :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^8 \cdot q^4 = 2^7$$

c'est-à-dire : $q = \sqrt[4]{\frac{2^{15}}{3^8}} \approx 1,49492696$

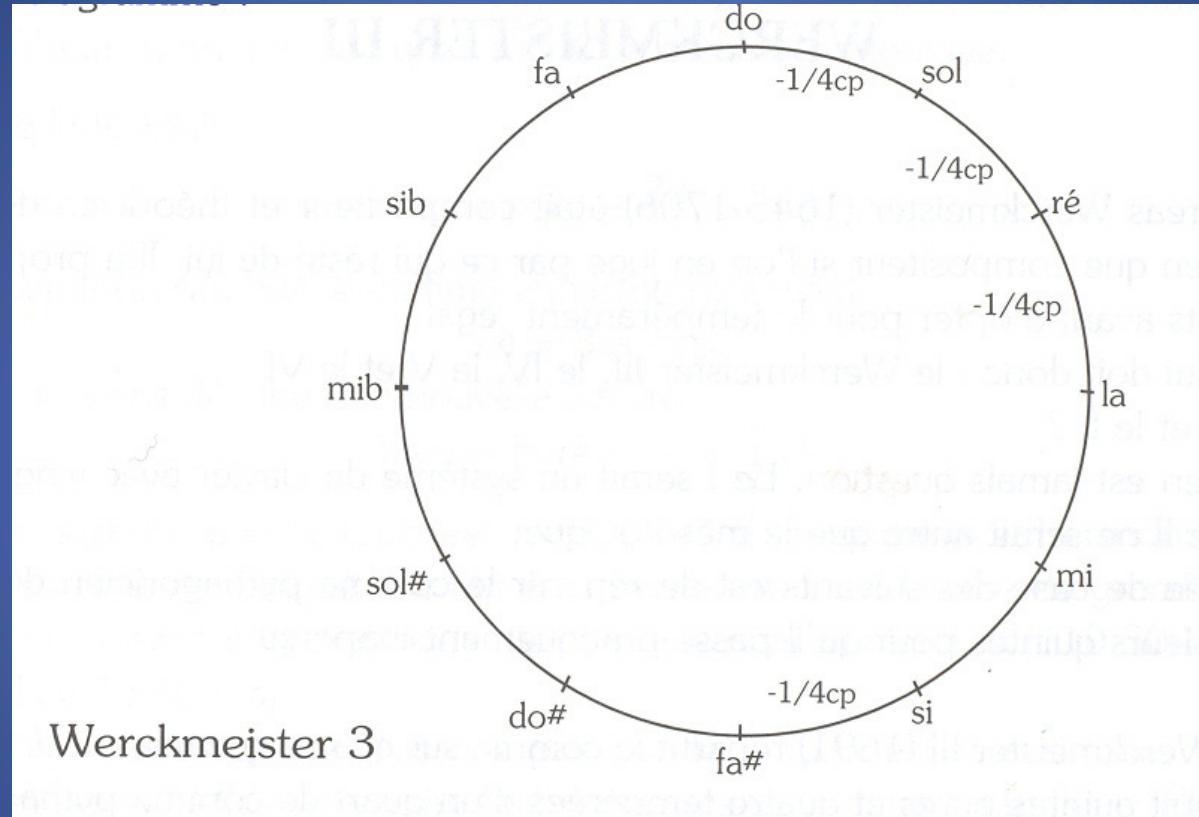
À un do de 100 correspondra donc un sol de 149,493 au lieu de 150, ce qui nous fait une distorsion de :

$$1000 \log \frac{150}{149,493} = 1,471\sigma$$

Si on se souvient qu'un comma syntonique (le plus petit des commas) vaut $5,395\sigma$, cette distorsion est raisonnable.

Pour les tierces, 6 sont plus petites d'un comma syntonique, les autres sont moins biaisées, l'écart allant de 0,5 à 3,9 savarts, en passant par toutes sortes de valeurs.

Ces valeurs peuvent se déduire de l'examen du cycle des quintes, caractéristique de ce tempérament :



Par exemple, de do à mi, on passe par quatre quintes ; dans le système de Pythagore, la tierce ainsi obtenue est plus grande d'1 cs que la tierce pure. Ici, on passe de do à mi par 1 quinte pure et trois diminuées de -1/4 cp, donc la tierce vaut une tierce pythagoricienne (c'est-à-dire une tierce pure + 1 cs) - 3/4 cp. L'écart de la tierce do-mi vaut donc 1cs-3/4 cp soit 0,981σ.

De sol à si, on passe par 2 quintes pures et 2 quintes tempérées de -1/4 cp, donc la tierce vaut une tierce pure + 1 cs - 2/4 cp, soit un écart de 1 cs - 2/4 cp = 2,452σ avec la tierce pure, etc.

Toutes les valeurs de hauteurs de notes et d'intervalles sont reprises dans ce tableau :

WERCKMEISTER 3 (1691)

	FRÉQUENCES		QUINTE		TIERCE MAJ		TIERCE MIN		TON	
			savarts	cents	savarts	cents	savarts	cents	savarts	cents
do	100,000	263,404	-1,471	-5,865	0,981	3,911	-5,395	-21,506	-2,943	-11,730
	105,350	277,496	0,000	0,000	5,395	21,506	-3,924	-15,641	0,000	0,000
ré	111,740	294,329	-1,471	-5,865	2,452	9,776	-2,452	-9,776	-1,471	-5,865
	118,519	312,183	0,000	0,000	3,924	15,641	-5,395	-21,506	0,000	0,000
mi	125,283	330,000	0,000	0,000	3,924	15,641	-2,452	-9,776	-1,471	-5,865
	133,333	351,206	0,000	0,000	0,981	3,911	-5,395	-21,506	-1,471	-5,865
fa	140,466	369,994	0,000	0,000	5,395	21,506	-3,924	-15,641	0,000	0,000
	149,493	393,770	-1,471	-5,865	2,452	9,776	-3,924	-15,641	-2,943	-11,730
sol	158,025	416,244	0,000	0,000	5,395	21,506	-3,924	-15,641	0,000	0,000
	167,044	440,000	0,000	0,000	3,924	15,641	-0,981	-3,911	0,000	0,000
la	177,778	468,274	0,000	0,000	2,452	9,776	-5,395	-21,506	0,000	0,000
	187,924	495,000	-1,471	-5,865	3,924	15,641	-3,924	-15,641	-1,471	-5,865
do	200,000	526,809								

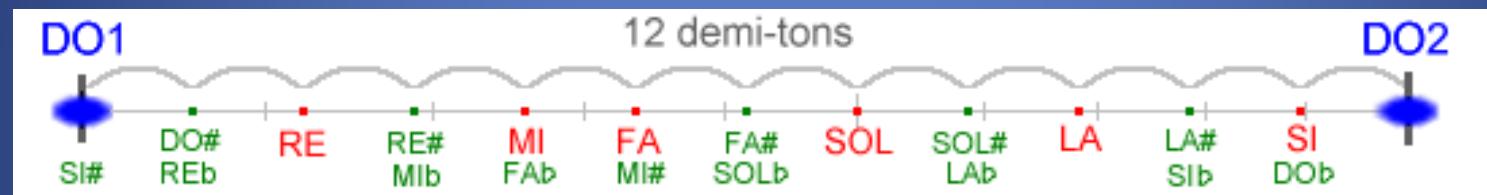
Remarque : de fa# à la# (=sib), on passe par des quintes pures, donc cette tierce est pythagoricienne, son écart avec la tierce pure vaut 1cs, soit 5,395σ. Idem pour les tierces do#-fa et sol#-do.

10.7 Le tempérament égal et la gamme tempérée

Puisqu'il n'est pas possible de travailler avec des gammes justes, autant créer une gamme pas trop fausse mais plus simple que les deux que nous connaissons.

En prenant des tons égaux et des demi-tons qui sont exactement la moitié d'un ton, l'octave pourra être partagée en 12 parties égales.

Le *tempérament égal* consiste à *diviser l'octave en douze demi-tons chromatiques identiques*, que nous noterons d (et t pour le ton : $t = 2d$).



Comme l'écart entre les notes s'évalue comme des rapports de fréquences, nous devons donc avoir :

$$\frac{DO\#}{DO1} = \frac{RE}{DO\#} = \frac{RE\#}{RE} = \frac{MI}{RE\#} = \frac{FA}{MI} = \frac{FA\#}{FA} = \frac{SOL}{FA\#} = \frac{SOL\#}{SOL} = \frac{LA}{SOL\#} = \frac{LA\#}{LA} = \frac{SI}{LA\#} = \frac{DO2}{SI}$$

Si ce rapport (représentant un demi-ton) vaut z, nous avons :

$$\underbrace{z \times z \times \dots \times z}_{12 \text{ fois}} = z^{12} = \frac{DO\#}{DO1} \times \frac{RE}{DO\#} \times \frac{RE\#}{RE} \times \frac{MI}{RE\#} \times \frac{FA}{MI} \times \frac{FA\#}{FA} \times \frac{SOL}{FA\#} \times \frac{SOL\#}{SOL} \times \frac{LA}{SOL\#} \times \frac{LA\#}{LA} \times \frac{SI}{LA\#} \times \frac{DO2}{SI} = \frac{DO2}{DO1} = 2$$

Nous en concluons qu'un demi-ton vaut $2^{1/12}$ (racine douzième de 2), soit environ 1,059463.

Pour trouver les notes de la gamme, il suffit donc de partir de la fréquence de la fondamentale puis de multiplier à chaque fois par $2^{1/12}$ pour trouver la note suivante. Nous obtenons donc les valeurs :



Degrés	1	2	3	4	5	6	7	1
Notes	do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
Intervalles	$2^{2/12}$	$2^{2/12}$	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{2/12}$	$2^{2/12}$	$2^{1/12}$	
Fréquences	1	$2^{2/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{7/12}$	$2^{9/12}$	$2^{11/12}$	$2^{12/12} = 2$

La gamme chromatique tempérée se construit donc simplement en disposant les notes selon l'arrangement [t t d t t t d], soit :

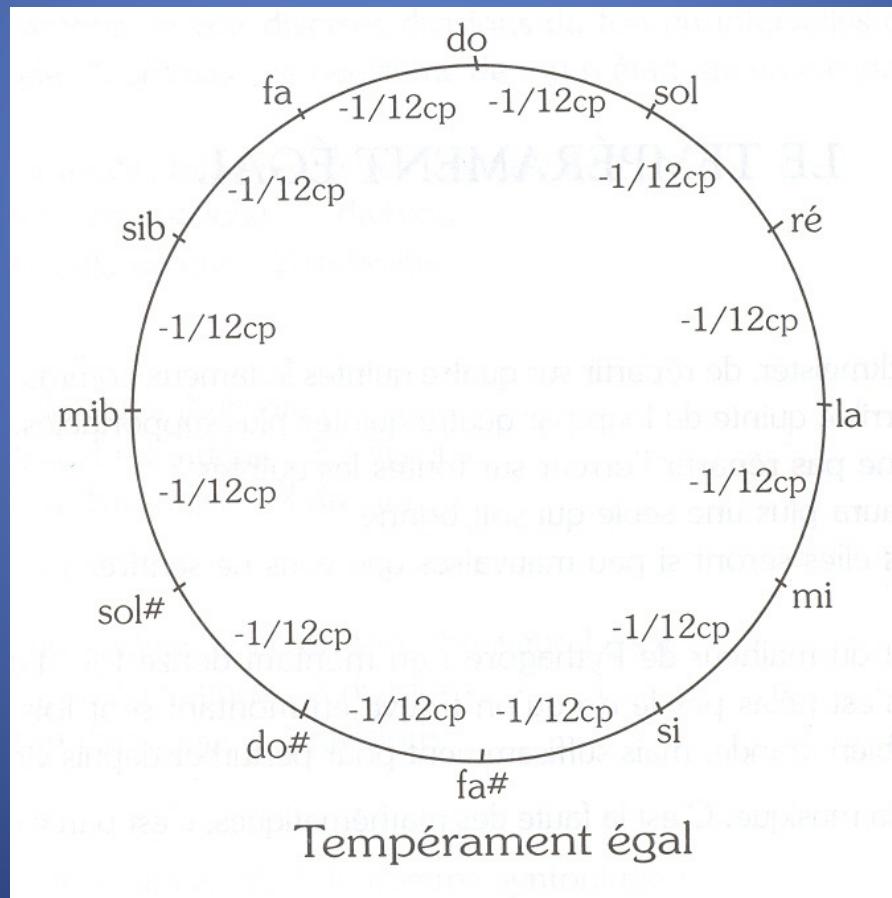
Par définition : une note diésée est haussée d'un demi-ton d ; une note bémolisée est abaissée d'un demi-ton d. Il y a donc coïncidence entre do# et réb, ré# et mib, etc. : c'est ce que l'on appelle l'enharmonie.

Du point de vue des *quintes*, elles sont en faites *toutes trop courtes d'1/12 de comma pythagoricien*. En effet, pour do-sol, par exemple, la note sol vaut $100 \cdot 2^{7/12} \approx 149,83$ au lieu de 150 ; cette note est donc trop basse d'un intervalle de :

$$1000 \log \frac{3/2}{2^{7/12}} = 1000 \log \frac{3}{2^{19/12}} = 0,490428\sigma$$

Cette valeur représente bien 1/12 de comma pythagoricien, puisque :

$$1000 \log \left(\frac{531441}{524288} \right)^{1/12} = 1000 \log \left(\frac{3^{12}}{2^{19}} \right)^{1/12} = 0,490428\sigma$$



TEMPÉRAMENT ÉGAL

	FRÉQUENCES		QUINTE		TIERCE MAJ		TIERCE MIN		TON	
			savarts	cents	savarts	cents	savarts	cents	savarts	cents
do	100,000	261,626	-0,490	-1,955	3,433	13,686	-3,924	-15,641	-0,981	-3,910
	105,946	277,183	-0,490	-1,955	3,433	13,686	-3,924	-15,641	-0,981	-3,910
ré	112,246	293,665	-0,490	-1,955	3,433	13,686	-3,924	-15,641	-0,981	-3,910
	118,921	311,127	-0,490	-1,955	3,433	13,686	-3,924	-15,641	-0,981	-3,910
mi	125,992	329,628	-0,490	-1,955	3,433	13,686	-3,924	-15,641	-0,981	-3,910
fa	133,484	349,228	-0,490	-1,955	3,433	13,686	-3,924	-15,641	-0,981	-3,910
	141,421	369,994	-0,490	-1,955	3,433	13,686	-3,924	-15,641	-0,981	-3,910
sol	149,831	391,995	-0,490	-1,955	3,433	13,686	-3,924	-15,641	-0,981	-3,910
	158,740	415,305	-0,490	-1,955	3,433	13,686	-3,924	-15,641	-0,981	-3,910
la	168,179	440,000	-0,490	-1,955	3,433	13,686	-3,924	-15,641	-0,981	-3,910
	178,180	466,164	-0,490	-1,955	3,433	13,686	-3,924	-15,641	-0,981	-3,910
si	188,775	493,883	-0,490	-1,955	3,433	13,686	-3,924	-15,641	-0,981	-3,910
do	200,000	523,251								

L'inconvénient de la gamme tempérée est de donner des *intervalles* qui, à l'exclusion de l'octave, sont *tous « faux »* par rapport aux résonances naturelles (les quintes étant trop petites). Mais l'avantage énorme du système est de permettre *toutes les transpositions* et d'ouvrir aux musiciens la possibilité d'écrire dans *toutes les tonalités* en utilisant les instruments à clavier à *douze touches par octave*.

10.8 Autre divisions de l'octave en parties égales

Au cours du temps, les théoriciens de la musique ont tenté d'utiliser un partage égal de l'octave. Le tempérament égal, qui la divise en 12 parties égales (le demi-ton tempéré) ne constitue qu'un cas particulier.

Constatant que la division en douze intervalles égaux n'aboutit pas à la pureté des intervalles de quinte et de tierce, plusieurs théoriciens ont recherché *si une division de l'octave en un nombre différent d'intervalles ne permettait pas de se rapprocher de cette pureté idéale.*

Ces divisions permettent de retrouver des tempéraments déjà connus, et mettent en lumière les rapports entre demi-tons par leurs nombres de divisions.

La technique générale pour une division régulière de l'octave est la suivante :

- ✓ déterminer deux intervalles « classiques » I_1 et I_2 reliés à l'octave (notée O) par une relation du type :

$$O = n_1 I_1 + n_2 I_2$$

n_1 et n_2 étant des nombres entiers ; en général, on se limite à une division de l'octave en $n_1=5$ tons et $n_2=2$ demi-tons diatoniques, et l'intervalle I_1 est approximativement le double de l'intervalle I_2 (on autorise une certaine latitude, par exemple que le ton est compris entre 1,5 et 2,5 fois le demi-ton diatonique) ;

- ✓ déterminer deux nombres entiers N_1 et N_2 tels que le rapport N_1/N_2 soit le plus proche possible du rapport I_1/I_2 ;
- ✓ si les deux rapports ci-dessus étaient rigoureusement égaux, il existerait un intervalle i tel :

$$I_1 = N_1 \cdot i \quad \text{et} \quad I_2 = N_2 \cdot i$$

On aurait donc :

$$O = n_1 \cdot N_1 \cdot i + n_2 \cdot N_2 \cdot i$$

ou encore :

$$i = \frac{O}{n_1 \cdot N_1 + n_2 \cdot N_2}$$

- ✓ on définit alors i , calculé comme ci-dessus, comme base du tempérament.

✓ Si la proportion I_1/I_2 est de 2, le ton vaut deux demi-tons, $N_1=2$ et $N_2=1$, on est ramené à l'octave divisée en 12 intervalles égaux, car :

$$12 = 5 \times 2 + 2 \times 1$$

C'est le tempérament égal habituel *à douze intervalles égaux par octave*. Le ton vaut $n_1=2$ divisions. Le demi-ton chromatique correspond à $n_1-n_2=2-1=1$ division et le demi-ton diatonique à $n_2=1$ division, ils sont donc égaux

✓ Si la proportion I_1/I_2 vaut $1,5=3/2$, le ton vaut donc 1,5 demi-ton, $N_1=3$ et $N_2=2$ et l'octave sera divisée en *19 parties égales* puisque :

$$19 = 5 \times 3 + 2 \times 2$$

La division en 19 parties égales, due à *Salinas* (1577), retrouve à peu près le tempérament mésotonique au tiers de comma (qui comporte des tierces mineures pures) : les écarts sont compris entre -0,098 et 0,037 savarts. Le ton vaut $n_1=3$ divisions. Le demi-ton chromatique correspond à $n_1-n_2=3-2=1$ division et le demi-ton diatonique à $n_2=2$ divisions.

✓ Si la proportion I_1/I_2 vaut $1,666\dots=5/3$, le ton vaut donc 1,666... demi-ton, $N_1=5$ et $N_2=3$ et l'octave sera divisée en 31 parties égales puisque :

$$31 = 5 \times 5 + 2 \times 3$$

La division en *31 parties égales*, due à *Vicentino* (1555) et à *Huygens* (1661), restitue le mésotonique classique au quart de comma, avec des écarts compris entre -0,148 et 0,392 savarts. Le ton vaut $n_1=5$ divisions. Le demi-ton chromatique vaut $n_1-n_2=5-3=2$ divisions et le demi-ton diatonique $n_2=3$ divisions.

Après la publication d'un premier ouvrage sur *Le cycle harmonique* en 1691, Huygens a conçu un *Novus Cyclus Harmonicus* [25] où il a imposé la consonance de la 7^e mineure. Mais, tout compte fait, on peut considérer qu'on est en présence de 7 notes de base Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si, avec des altérations ♯ et ♭ très faibles (31^e, au lieu de 12^e, partie de l'octave) qu'on peut doubler en # et b (et même tripler, en cas de besoin)². Malgré ses nombreux avantages (voir plus loin), la multitude des notes n'a pas été acceptée par les contemporains de Huygens, et il tomba dans l'oubli. Le Système 31 a été relancé en 1940, avec la publication des œuvres de Huygens, par un autre hollandais A. Fokker [51], et a repris du service en 1946.

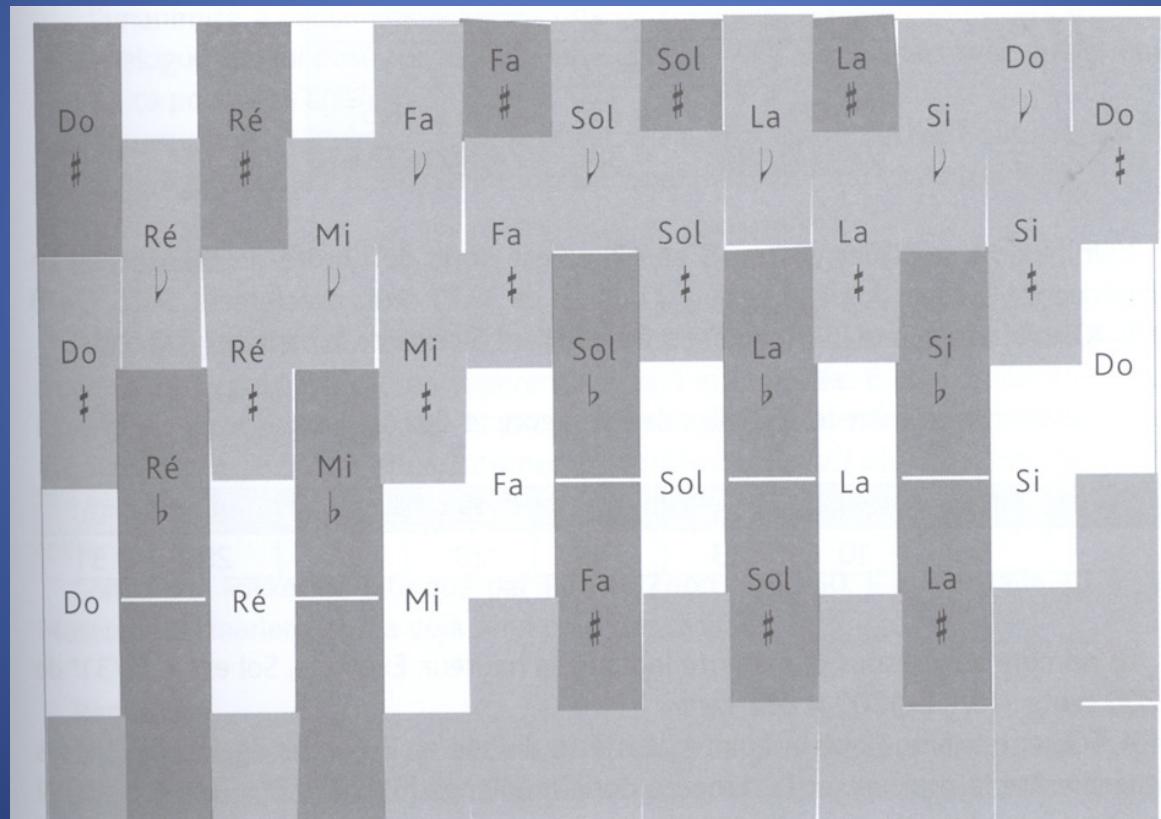


Schéma du clavier de Fokker à 31 tons, avec ses 4 types d'altérations.

Source : *Histoire de l'acoustique musicale*, Serge Donval, Fuzeau 2006

✓ Si la proportion I_1/I_2 vaut $1,75=7/4$, le ton vaut donc 1,75 demi-ton, $N_1=7$ et $N_2=4$ et l'octave sera divisée en 43 parties égales puisque :

$$43 = 5 \times 7 + 2 \times 4$$

La division en *43 parties égales*, due à *Sauveur* (1701) correspond avec encore plus de précision au mésotonique au cinquième de comma (écart entre -0,015 et 0,042 savarts). Le ton vaut $n_1=7$ divisions. Le demi-ton chromatique vaut $n_1-n_2=7-4=3$ divisions et le demi-ton diatonique $n_2=4$ divisions.

✓ Si la proportion I_1/I_2 vaut $2,25=9/4$, le ton vaut donc 2,25 demi-ton, $N_1=9$ et $N_2=4$ et l'octave sera divisée en 53 parties égales puisque :

$$53 = 5 \times 9 + 2 \times 4$$

La division en *53 parties égales*, due à *Holder* (1694) se rapproche du système pythagoricien de Zwolle. Le ton vaut $n_1=9$ divisions. Le demi-ton chromatique vaut $n_1-n_2=9-4=5$ divisions et le demi-ton diatonique $n_2=4$ divisions.

✓ Si la proportion I_1/I_2 vaut $1,8=9/5$, le ton vaut donc 1,8 demi-ton, $N_1=9$ et $N_2=5$ et l'octave sera divisée en 55 parties égales puisque :

$$55 = 5 \times 9 + 2 \times 5$$

La division en *55 parties égales* (*Sauveur* 1701) retrouve le mésotonique au sixième de comma, avec des écarts entre -0,1477 et 0,392 savarts. Le ton vaut $n_1=9$ divisions. Le demi-ton chromatique vaut $n_1-n_2=9-5=4$ divisions et le demi-ton diatonique $n_2=5$ divisions.

11 Le diapason

Ce terme désigne une *norme* adoptée pour l'accord des voix et des instruments, la *hauteur du la₃* étant prise comme élément de référence.

Dès 1701, *Joseph Sauveur* trouva une *méthode permettant de compter les vibrations* et de sortir de l'empirisme, mais sa méthode ne s'imposa pas immédiatement.

En 1711, le luthiste anglais *John Shore* imagina le modèle de *diapason à fourches d'acier* encore en usage aujourd'hui.

Jusqu'*au milieu du XIX^{ème} siècle, aucune règle* n'était établie dans ce domaine : il y avait à cette époque, à Paris et dans les grandes villes françaises 6 diapasons en usage, et 17 dans les grandes villes d'Europe. Du diapason de Joseph Sauveur, établi à 880 vibrations par seconde en usage à l'Académie Royale de Paris en 1700, à celui usité à l'Opéra de Paris en 1859, on trouve pas moins de 88 vibrations supplémentaires, ce qui l'avait donc porté à 896 vibrations par seconde, ce qui représente une élévation de plus d'un ton.

Une mesure d'ordre général s'imposait donc. Au cours du Congrès International qui eut lieu à Paris en *1859* (*Commission Lissajous-Halévy*), le diapason fut fixé à *870* vibrations par seconde à la température de 18°C. Un décret ratifia cette décision en France et un diapason type fut déposé au Conservatoire National des Arts et Métiers.

En 1939, une commission internationale réunie à Londres en vue d'examiner l'évolution du diapason fixa à *880 vibrations par seconde* (440 périodes donc) le diapason non officiellement reconsidéré depuis 1859. Cette décision n'eut pas d'écho en raison des événements qui suivirent. Une nouvelle conférence internationale (Comité d'acoustique de l'organisation internationale de normalisation) tint ses assises à Londres en 1953 et confirma les décisions prises en 1939.

La norme a été rééditée en janvier 1975 (*ISO 16:1975*)

Si l'on considère une température voisine de 20°C, toutes les mesures faites ont montré que le diapason en usage actuellement de par le monde était très voisin de 444-445 Hz.

Il restait un problème : comment jouer de la musique sur les instruments anciens dont la facture était prévue pour un diapason plus grave ? Bien que l'accord naturel de ces instruments soit très variable, la convention d'un *la à 415 Hz* s'est établie pour ce répertoire. Ce « *la 415* » est communément appelé « *la baroque* » mais il n'est qu'une convention et ne correspond en réalité à aucun diapason historique attesté.

Quelques diapasons anciens :

[404 Hz \(1700\)](#)

[423 Hz \(1810\)](#)

[457 Hz \(1858\)](#)

[440 Hz \(aujourd'hui\)](#)

Une fois le diapason fixé, on peut calculer toutes les fréquences des notes de musique de n'importe quelle gamme ; par exemple :

Fréquences en Hertz des notes de la gamme pythagoricienne d'après La 3 = 440 Hz

Allema-gne	Angle-terre	Langues romanes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	C	UT DO	33	65	130	261	521	1 043	2 086	4 172	8 344	16 687	33 375	66 750	133 499
<small>C Dur -D Mol</small>															
D	D	RÉ	37	73	147	293	587	1 173	2 347	4 693	9 387	18 773	37 547	75 093	150 187
E	E	MI	41	83	165	330	660	1 320	2 640	5 280	10 560	21 120	42 240	84 480	168 960
F	F	FA	43	87	174	348	695	1 391	2 781	5 562	11 125	22 250	44 500	98 000	178 000
G	G	SOL	49	98	196	391	782	1 564	3 129	6 258	12 516	25 031	50 062	100 124	200 249
A	A	LA	55	110	220	440	880	1 760	3 520	7 040	14 080	28 160	56 320	112 640	225 280
B		<small>la dièse ≈ si bémol</small>													
H	B	SI	62	124	248	495	990	1 980	3 960	7 920	15 840	31 680	63 360	126 720	253 440

Fréquences de la gamme de Pythagore, calculées avec le diapason actuel à 440 Hz



<i>Fréquences en Hertz des notes de la gamme d'après La 3 = 440 Hz et 1/2 ton = $\sqrt[12]{2}$ = 1,059 463 094 355...</i>															
Alle-magne	Angle-terre	Langues romanes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	C	UT; DO	33	65	131	262	523	1 047	2 093	4 186	8 372	16 744	33 488	66 976	133 952
C Dur →D Mol	bémol	Do #, Ré b	35	69	139	277	554	1 109	2 217	4 435	8 870	17 740	35 479	70 959	141 918
D	D	RÉ	37	73	147	294	587	1 175	2 349	4 699	9 397	18 795	37 589	75 178	150 356
		#	39	78	156	311	622	1 245	2 489	4 978	9 956	19 912	39 824	79 649	159 297
E	E	MI	41	82	165	330	659	1 319	2 637	5 274	10 548	21 096	42 192	84 385	168 769
F	F	FA	44	87	175	349	698	1 397	2 794	5 588	11 175	22 351	44 701	89 402	178 805
		#	46	92	185	370	740	1 480	2 960	5 920	11 840	23 680	47 359	94 719	189 437
G	G	SOL	49	98	196	392	784	1 568	3 136	6 272	12 544	25 088	50 175	100 351	200 702
		#	52	104	208	415	831	1 661	3 322	6 645	13 920	26 580	53 159	106 318	212 636
A	A	LA	55	110	220	440	880	1 760	3 520	7 040	14 080	28 160	56 320	112 640	225 280
B		#	58	117	233	466	932	1 865	3 729	7 459	14 917	29 834	59 669	119 338	238 676
H	B	SI	62	123	247	494	988	1 976	3 951	7 902	15 804	31 609	63 217	126 434	252 868

Fréquences de la gamme tempérée, calculées avec le diapason actuel à 440 Hz



*Fréquences en Hertz des notes de la gamme **baroque** d'après La 3 = 415 Hz*

Alle-magne	Angle-terre	Langues romanes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	C	UT; DO	32	62	123	247	494	988	1 976	3 951	7 902	15 804	31 609	63 217	126 434
C Dur -D Mol		do-clésse it ré bémol	33	65	131	262	523	1 047	2 093	4 186	8 372	16 744	33 488	66 976	133 952
D	D	RÉ	35	69	139	277	554	1 109	2 217	4 435	8 870	17 740	35 479	70 959	141 918
		#	37	73	147	294	587	1 175	2 349	4 699	9 397	18 795	37 589	75 178	150 356
E	E	MI	39	78	156	311	622	1 245	2 489	4 978	9 956	19 912	39 824	79 649	159 297
F	F	FA	41	82	165	330	659	1 319	2 637	5 274	10 548	21 096	42 192	84 385	168 769
		#	44	87	175	349	698	1 397	2 794	5 588	11 175	22 351	44 701	89 402	178 805
G	G	SOL	46	92	185	370	740	1 480	2 960	5 920	11 840	23 680	47 359	94 719	189 437
		#	49	98	196	392	784	1 568	3 136	6 272	12 544	25 088	50 175	100 351	200 702
A	A	LA	52	104	208	415	831	1 661	3 322	6 645	13 920	26 580	53 159	106 318	212 636
B		#	55	110	220	440	880	1 760	3 520	7 040	14 080	28 160	56 320	112 640	225 280
H	B	SI	58	117	233	466	932	1 865	3 729	7 459	14 917	29 834	59 669	119 338	238 676

Fréquences de la gamme tempérée, calculées avec le diapason baroque à 415 Hz

12 Comparaison de la gamme tempérée et des autres gammes

Nous avons déjà présenté la comparaison des gammes dans la page sur la gamme de Zarlino.
Nous nous proposons ici de comparer les notes entre elles.

	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO
Gamme de Pythagore	261,63	294,33	331,13	348,84	392,44	441,50	496,69	523,26
Gamme de Zarlino	261,63	294,33	327,04	348,84	392,44	436,05	490,56	523,26
Gamme tempérée	261,63	293,66	329,63	349,23	392,00	440,00	493,88	523,26

D'une façon générale, on peut remarquer que :

- ✓ Les trois gammes donnent sensiblement la même valeur pour le SOL. La quinte est juste dans les gammes de Pythagore et de Zarlino, elle n'en diffère que d'un douzième de comma dans la gamme tempérée ce qui est très faible et pratiquement inaudible (l'erreur d'un comma sur les 12 quintes est réparti sur chacune d'entre elles).
- ✓ La tierce est plus proche de la valeur exacte que dans la gamme de Pythagore.
- ✓ Les différences sont négligeables sauf pour les notes MI, LA et SI.

Comparaison des gammes de Pythagore, de Zarlino et de la gamme tempérée

Écoutons les :

[Gamme de Pythagore](#)

[Gamme de Zarlino](#)

[Gamme tempérée](#)

La même chose, mais en présentant successivement les notes des trois gammes :

[Comparaison des 3 échelles \(tonique = Do\)](#)

[Comparaison des 3 échelles \(tonique = La\)](#)

Voici l'accord parfait majeur (DO - MI - SOL) dans les différentes gammes en partant du DO actuel (216,63 Hz) :

[Accord parfait pythagoricien](#)

[Accord parfait zarlinien](#)

[Accord parfait tempéré](#)



Voici les 19 premières mesures du premier prélude du premier livre du *Clavier bien tempéré* de Bach, jouées en accords (et non en arpèges comme dans la partition originale) dans deux systèmes différents, le système de Zarlino et le système du tempérament égal :

[Système de Zarlino](#)

[Tempérament égal](#)

Dans le premier cas, les intervalles sont parfaitement justes ($3/2$ pour la quinte, $5/4$ pour la tierce majeure, etc.), dans le second cas ils sont des puissances entières de la racine douzième de 2. Le premier accord illustre parfaitement la différence.



Comparaison de deux tempéraments différents à la gamme pythagoricienne

Les quintes

La quinte ut3-sol3 en tempérament égal (= trop basse de 2 cent) ;

La quinte ut3-sol3 en tempérament mésotonique (diminuée d'un quart de comma syntonique par rapport à la quinte juste(trop basse de 5 cent) ;

La quinte ut3-sol3 en gamme pythagoricienne : elle est parfaitement juste.

La quinte du loup

La quinte sol#-ré# en tempérament égal. Ce n'est pas un « loup », elle est comme les autres quintes égales.

La quinte sol#-ré# en tempérament mésotonique : c'est la fameuse « quinte du loup », trop haute de 36 cent.

La quinte sol#-ré# en gamme pythagoricienne : elle est trop basse d'un comma pythagoricien (23 cent).



Les tierces

La tierce ut3-mi3 en tempérament égal. Elle est trop haute de 14 cent.

La tierce ut3-mi3 en tempérament mésotonique. Elle est parfaitement juste.

La tierce ut3-mi3 en gamme pythagoricienne. Elle est trop haute d'un comma syntonique, $81/80 = 22$ cent.



Les 16 premières mesures du [Capricio cromatico de Tarquinio Merula en tempérament mésotonique](#).

Les mêmes 16 premières mesures en [tempérament égal](#).



Pour terminer, les deux premières mesures du 20e prélude, en la mineur, du second livre du *Clavier Bien Tempéré* de J.S. Bach jouées en tempérament égal et en tempérament mésotonique. Cet exemple est destiné à montrer que certains intervalles sonnent très faux en tempérament mésotonique. C'est le cas de la fameuse « quinte du loup », qu'on rencontre au deuxième temps de la première mesure (sol# - ré#) :

[Tempérament égal](#)

[Tempérament mésotonique](#)

Andante espressivo ♩ = 58

p *quinte des loups*

13 Au-delà du tempérament égal

Il ne faut pas penser que le tempérament égal a été accueilli avec joie et soulagement par les musiciens et qu'il fait aujourd'hui l'unanimité. Le tempérament égal a en fait été violemment combattu dès son apparition.

Deux reproches principaux lui sont faits. Tout d'abord, les tierces sont mauvaises : la tierce majeure est trop grande de $3,4333 \sigma$, la tierce mineure est trop petite de $3,924 \sigma$. Ensuite, toutes les tonalités se ressemblent.

Voici une critique d'époque qui traduit bien ces reproches :

« Le compositeur au reste met à profit les défauts inévitables de cette partition : il y trouve des avantages pour mieux caractériser l'esprit de ces pièces. Veut-il composer du gai, du triste, du grand, du majestueux, etc. ? Il choisit le ton le plus proche à aider sa modulation, et pour donner plus d'expression à son idée. Il n'y a pas cette ressource dans la nouvelle partition. Tous les tons y étant égaux, ils expriment tous également, sans que rien ne balance la rudesse des tierces. »

Les clavecinistes, qui s'accordent eux-mêmes, choisissent l'accord en fonction de leur répertoire et de leur goût musical. C'est pour certains une hérésie de jouer certaines œuvres avec le tempérament égal.

Certains acousticiens actuels sont si peu satisfaits du tempérament égal qu'ils proposent d'autres tempéraments, comme Serge Cordier ou Raymond Fonsèque.

13.1 Serge Cordier et le tempérament égal à quintes pures

Serge Cordier base son tempérament sur une idée si simple que personne n'y avait pensé en vingt-cinq siècles :

Si douze quintes n'entrent pas dans sept octaves, au lieu de rapetisser les quintes, il faut agrandir les octaves.

De combien ? Comme douze quintes dépassent sept octaves du comma pythagoricien, valant 5,885 σ, il faut agrandir chaque octave d'un septième de comma pythagoricien.

En tempérament égal, une quinte vaut 7 demi-tons tempérés. Pour qu'elle soit pure, cette quinte doit aussi valoir 3/2. Donc, le demi-ton tempéré du tempérament de Cordier vaut :

$$x = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} = 1,059634023$$

L'octave, en tempérament égal, c'est toujours 12 demi-tons, donc une octave vaudra :

$$x^{12} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12/7} = 2,003875474$$

Ce qui représente bien une augmentation de 1/7 de comma pythagoricien, puisque :

$$\left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^{1/7} \cdot 2 = \frac{3^{12/7}}{2^{19/7 - 7/7}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12/7}$$

Deux arguments viennent justifier l'audace de l'hypothèse de Cordier :

- ✓ Le premier est physiologique. L'intervalle qui donne à l'oreille la sensation parfaite d'une octave (l'octave physiologique ou plutôt mélodique) est un peu plus haute que l'octave parfaite ou octave harmonique (cf. le chapitre de psychoacoustique).
- ✓ Le second est purement physique, c'est l'inharmonicité. Ce phénomène consiste pour un corps sonore à émettre des harmoniques différents des multiples entiers de la fréquence fondamentale. L'inharmonicité est due à la raideur de la corde réelle (négligée dans le cas idéal). L'harmonique réel (en raison de cette inharmonicité) d'une corde est plus haut que l'harmonique théorique. Par conséquent, pour qu'il n'y ait pas de battement entre une corde et son octave, la note la plus aiguë devra naturellement être accordée plus haut que l'octave théorique. Les chiffres de l'inharmonicité d'un piano (particulièrement touché par l'inharmonicité, du fait de ses grosses cordes) oscillent entre $0,31 \sigma$ et $1,31 \sigma$.

L'avantage principal du système de Cordier est qu'ainsi accordé, un piano jouera les mêmes quintes qu'un violon.

Le désavantage principal du système de Cordier réside dans ses tierces. Les tierces du tempérament égal, à octaves pures, étaient déjà un peu grandes ; celles du tempérament égal à quintes pures le sont un peu plus : $3,71 \sigma$ au lieu de $3,43 \sigma$. Mais c'était prévu, c'est impossible d'avoir à la fois les tierces et les quintes pures.

Voici les fréquences pour l'octave comprenant le la à 440 Hz. Attention, pour les autres octaves, ne pas multiplier par 2, mais bien par 2,003875474 :

do	**	ré	**	mi	fa	**	sol	**	la	**	si	do
261,246	293,333	329,362	349,003	391,869	440	494,043	523,504					
276,825	310,826			369,815	415,238	466,239						

Voici également, pour pouvoir comparer avec les autres tempéraments, le tableau des fréquences, pour do=100 :

do	**	ré	**	mi	fa	**	sol	**	la	**	si	do
100,000	112,282	126,073	133,592	150,000	168,424	189,110	200,388					
105,963	118,978			141,558	158,945	178,467						

TEMPÉRAMENT ÉGAL À QUINTES PURES (Serge Cordier)

écart de l'octave: 0,8417 σ (3,3553 cents)

	FRÉQUENCES		QUINTE		TIERCE MAJ		TIERCE MIN		TON	
			savarts	cents	savarts	cents	savarts	cents	savarts	cents
do	100,000	261,246	0,000	0,000	3,714	14,803	-3,714	-14,803	-0,841	-3,351
	105,963	276,825	0,000	0,000	3,714	14,803	-3,714	-14,803	-0,841	-3,351
ré	112,282	293,333	0,000	0,000	3,714	14,803	-3,714	-14,803	-0,841	-3,351
	118,978	310,826	0,000	0,000	3,714	14,803	-3,714	-14,803	-0,841	-3,351
mi	126,073	329,362	0,000	0,000	3,714	14,803	-3,714	-14,803	-0,841	-3,351
fa	133,592	349,003	0,000	0,000	3,714	14,803	-3,714	-14,803	-0,841	-3,351
	141,558	369,815	0,000	0,000	3,714	14,803	-3,714	-14,803	-0,841	-3,351
sol	150,000	391,869	0,000	0,000	3,714	14,803	-3,714	-14,803	-0,841	-3,351
	158,945	415,238	0,000	0,000	3,714	14,803	-3,714	-14,803	-0,841	-3,351
la	168,424	440,000	0,000	0,000	3,714	14,803	-3,714	-14,803	-0,841	-3,351
	178,467	466,239	0,000	0,000	3,714	14,803	-3,714	-14,803	-0,841	-3,351
si	189,110	494,043	0,000	0,000	3,714	14,803	-3,714	-14,803	-0,841	-3,351
do	200,388	523,504	0,000	0,000	3,714	14,803	-3,714	-14,803	-0,841	-3,351

13.2 Raymond Fonsèque et le Super-tempérament

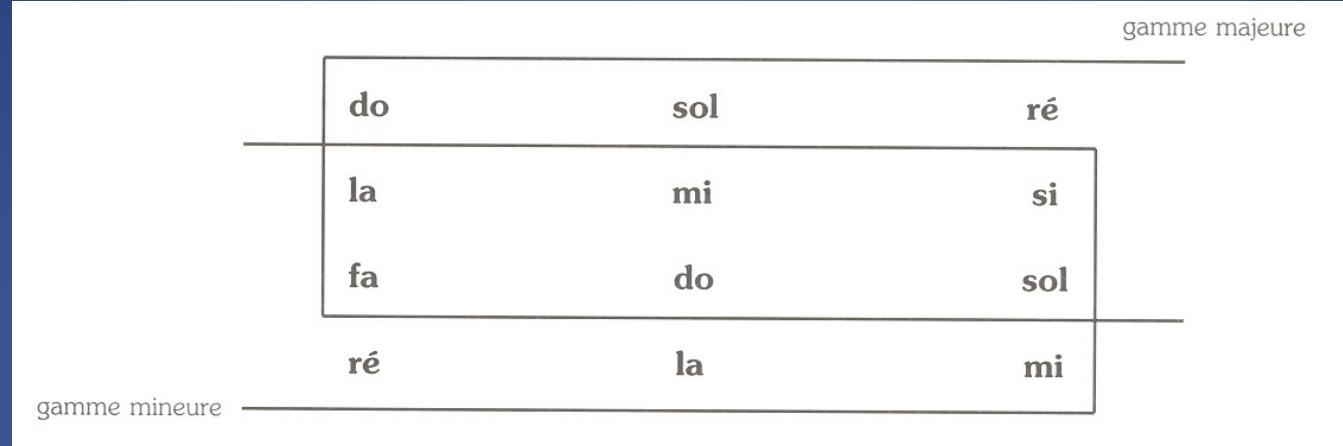
Ce système est d'obédience zarlinienne et a donc pour point de départ le tableau, basé sur trois accords parfaits :

do	sol	ré
6/5	6/5	6/5
la	mi	si
5/4	5/4	5/4
fa → 3/2	do → 3/2	sol

Rappelons les fréquences de la gamme de Zarlino :

Degrés	1	2	3	4	5	6	7	1
Fréquences	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
Intervalles	9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15	
Notes	do	ré	mi	fa	sol	la	si	do

Que se passe-t-il si on prolonge chaque colonne, en descendant d'une tierce mineure (6/5) au départ des notes fa, do et sol ? Do-la-fa se prolonge avec ré-si-sol se prolonge avec mi, sol-mi-do se prolonge avec la. Ré avec fa et la, la avec do et mi et mi avec sol et si nous donnent les trois accords parfaits mineurs qui forment la gamme de la mineur, relative de do majeur.



Vérifions les fréquences des nouvelles notes ainsi construites, ré, la et mi :

✓ sol est la tierce mineure de mi, donc : $mi = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$ ce qui est parfait.

✓ do est la tierce mineure de la, donc : $la = 2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ ce qui est aussi parfait.

✓ ré est la tierce mineure de fa, donc : $ré = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{9} = \frac{80}{81} \cdot \frac{9}{8}$

On voit que ce ré n'est pas le même que celui de départ : le nouveau est plus bas que le premier d'un comma syntonique.

Voilà qui nous rappelle la remarque que nous avions formulée à propos de la gamme de Zarlino :

Si l'on disposait d'un autre ré, comme une note de secours, située un comma syntonique plus bas, nous disposerions alors de tous les intervalles acoustiquement justes (pour la gamme de do).

Cet autre ré donnera avec la une bonne quinte, et permettra de jouer juste en do majeur.

Précisons que cette note supplémentaire n'est valable qu'en do majeur. Pour jouer juste en sol majeur, par exemple, un deuxième la situé à un comma syntonique du premier la, sera nécessaire. Une note supplémentaire apparaîtra donc par tonalité, et au final, nous obtiendrons deux séries de notes, décalées d'un comma syntonique, soit 24 fréquences différentes par octave.

En désignant par des majuscules les notes de la série haute et par des minuscules les notes de la série basse, on peut réécrire le tableau étendu précédent sous la forme :

gamme majeure		
DO	SOL	RÉ
la	mi	si
FA	DO	SOL
ré	la	mi

gamme mineure

Continuons à prolonger le tableau, à l'aide d'une alternance de tierces mineures et majeures, pour faire apparaître les autres gammes majeures et mineures :



FA#	DO#	SOL#	
ré#	la#	mi#	
SI	FA#	DO#	
sol#	ré#	la#	
MI	SI	FA#	
do#	sol#	ré#	
LA	MI	SI	
fa#	do#	sol#	
RÉ	LA	MI	
si	fa#	do#	
SOL	RÉ	LA	
mi	si	fa#	
DO	SOL	RÉ	DO MAJEUR
la mineur			
la	mi	si	
FA	DO	SOL	
ré	la	mi	
SIb	FA	DO	

SIb	FA	DO	
sol	ré	la	
MIIb	SIb	FA	
do	sol	ré	
LAB	MIIb	SIb	
fa	do	sol	
RÉb	LAB	MIIb	
sib	fa	do	
SOLb	RÉb	LAB	
mib	sib	fa	
DOB	SOLb	RÉb	
lab	mib	sib	

Ce tableau a été obtenu en prolongeant le premier tableau vers le haut jusqu'au FA# et vers le bas jusqu'au SOL♭, notes enharmoniques qui devraient avoir la même fréquence.

Est-ce le cas ?

Le FA# est obtenu en montant six fois d'une quinte à partir de DO : DO-SOL-RE-LA-MI-SI-FA#, donc en multipliant la fréquence de DO (100 par exemple) six fois par 3/2, soit une fréquence de :

$$FA\# = 100 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6 = 1139,0625$$

c'est-à-dire, en le ramenant dans l'octave [100-200] : $100 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6 \div 2^3 = 100 \cdot 3^6 \cdot 2^{-9} = 142,3838125$

Le SOL♭ est obtenu en descendant six fois d'une quinte à partir de DO : DO-FA-SI♭-MI♭-LA♭-RE♭-SOL♭, donc en divisant la fréquence de DO (100 par exemple) six fois par 3/2, soit :

$$SOL\flat = 100 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 8,77914951992$$

c'est-à-dire, en le ramenant dans l'octave [100-200] : $100 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot 2^4 = 100 \cdot 2^{10} \cdot 3^{-6} = 140,466392318$

L'intervalle entre ces deux notes vaut :

$$\frac{100 \cdot 3^6 \cdot 2^{-9}}{100 \cdot 2^{10} \cdot 3^{-6}} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$$

c'est-à-dire le comma pythagoricien.

Il fallait s'y attendre : le cycle des quintes ne se referme toujours pas naturellement, puisque 12 quintes pures ne feront jamais 7 octaves pures.

À ce stade, on est donc ramené à une quinte du loup. La solution est de tempérer, par exemple à la manière du tempérament égal, en raccourcissant toutes les quintes d'un douzième de comma pythagoricien.

Le tempérament ainsi obtenu n'est pas tout simplement le tempérament égal, puisqu'il y a deux séries de notes, distantes d'un comma syntonique, mais chaque série de notes devient en fait une gamme tempérée.

Pratiquement, Raymond Fonsèque propose d'accorder chaque série de notes selon un LA à 442 Hz et un la à 438 Hz.

On obtient ainsi les fréquences :

DO	**	RÉ	**	MI	FA	**	SOL	**	LA	**	SI	DO
262,815		295		331,125	350,815		393,775		442		496,13	525,63
		278,445		312,54			371,675		417,19		468,28	
do	**	ré	**	mi	fa	**	sol	**	la	**	si	do
260,435		292,33		328,13	347,64		390,125		438		491,64	520,87
		275,925		309,71			368,31		413,415		464,04	

Analyse acoustique du système de Fonsèque

- ✓ Les quintes ne sont pas rigoureusement justes, elles souffrent du même écart ($0,49 \sigma$) que tous les pianos.
- ✓ Pour les tierces, le dédoublement des notes permet d'améliorer les choses. Par exemple, pour la tierce majeure, en choisissant Do-mi, on a une tierce de $96,395 \sigma$, alors que la tierce acoustique fait $96,910 \sigma$: presqu'un demi savart de différence, donc, seulement.
- ✓ On peut obtenir des gammes dans toutes les tonalités, qui sont proches des gammes de Zarlino. Par exemple, pour do majeur :

DO RE mi FA SOL la si DO

a pour intervalles consécutifs :

- DO-RE, $50,172 \sigma$ au lieu de $51,153 \sigma$ (écart de $0,981 \sigma$)
- DO-mi, $96,395 \sigma$ au lieu de $96,910 \sigma$ (écart de $0,515 \sigma$)
- DO-FA, $125,429 \sigma$ au lieu de $124,39 \sigma$ (écart de $0,49 \sigma$)
- DO-SOL, $175,600 \sigma$ au lieu de $176,091 \sigma$ (écart de $0,491 \sigma$)
- DO-la, $221,824 \sigma$ au lieu de $221,849 \sigma$ (écart de $0,025 \sigma$)
- DO-si, $271,995 \sigma$ au lieu de $273,001 \sigma$ (écart de $1,006 \sigma$)

Pour obtenir un septième degré plus sensible, on peut jouer le SI dans la série haute ; on obtiendrait alors un intervalle DO-SI à $275,945 \sigma$, ce qui rapprocherait cette sensible de celle de la gamme de Pythagore, qui forme un intervalle de $278,396 \sigma$.

Le clavier tétraéicosatonique, proposé par Raymond Fonsèque :

do	do#	ré	ré#	mi	fa	fa#	sol	sol#	la	la#	si	do
DO	RÉb	RÉ	Mlb	MI	FA	SOLb	SOL	LA Ab	LA	SIb	SI	DO
do	do#	ré	ré#	mi	fa	fa#	sol	sol#	la	la#	si	do
DO	RÉb	RÉ	Mlb	MI	FA	SOLb	SOL	LA Ab	LA	SIb	SI	DO



Un exemple de partition écrite pour ce type de clavier (début du premier prélude, en do majeur, du clavier bien tempéré de Bach) ; les notes de la série haute peuvent être plus grosses et/ou carrées, les notes de la série basse restant normales :

Pour écouter :

<http://supertemperament.free.fr/5ecriture.htm>