Transformation de Lorentz-Poincaré

Denis Gialis*

Dans ce cours, je propose une construction formelle de la transformation de Lorentz-Poincaré à partir des postulats fondamentaux d'Einstein.

1 Quelques définitions

L'*espace-temps* ou univers physique dans lequel nous vivons, supposé plat, est défini, selon Minkowski, comme un espace ponctuel identifié à un espace vectoriel de dimension quatre, c'est-à-dire, physiquement, possédant une dimension de temps et trois dimensions d'espace. Comme nous le montrerons, cet espace n'a pas de structure euclidienne, mais possède plutôt une structure pseudo-euclidienne.

Un point de cet espace est appelé *événement* et la trajectoire d'une particule ponctuelle est appelée *ligne d'univers*.

Dans l'espace-temps, un *référentiel* est constitué d'un système d'axes de coordonnées spatio-temporelles lié à un observateur (celui qui va effectuer des mesures physiques). Autrement dit, un observateur définit son référentiel propre en choisissant un système d'axes fixes de coordonnées spatiales et en utilisant une montre, fixe également par rapport à lui, pour mesurer le temps. Cette définition à l'inconvénient de faire croire que si l'on change de système d'axes pour les coordonnées spatiales (par une simple rotation d'espace, par exemple), alors on change de référentiel: il n'en est rien, la position d'un corps ou bien une grandeur vectorielle comme la vitesse d'un corps par rapport à l'observateur, sont définies indépendamment du système d'axes de coordonnées choisi par ce dernier. Une définition plus précise de référentiel serait plutôt celle-ci : un référentiel est l'ensemble des points matériels (ou

*Docteur en Astrophysique - Université J. Fourier, Grenoble.

pas) dont la distance spatiale à un observateur est invariable au cours du temps qu'il mesure. Un système d'axes quelconques de coordonnées, lié à cet observateur, est donc inclus dans cet ensemble. Finalement, nous verrons qu'en Relativité Générale, l'impossibilité de conserver une distance invariable entre deux points distincts de l'espace-temps empêche un observateur de définir un système d'axes permettant de décrire tout l'espace-temps. Tout système d'axes ne pourra alors être défini que localement.

Un *référentiel galiléen* ou *référentiel d'inertie* est un référentiel pour lequel toute particule libre, c'est-à-dire qui n'est soumise à aucune force, est soit au repos, soit en mouvement de translation rectiligne et uniforme.

Tout référentiel en mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

2 Les postulats

Historiquement, Einstein a construit la Relativité Restreinte à partir des deux postulats suivants :

(1) Le principe de relativité : Tous les référentiels galiléens sont équivalents pour décrire les lois fondamentales de la nature, qui conservent donc la même forme dans tout changement de référentiel galiléen. Ce principe est également appelé *principe d'invariance*.

(2) La constance de la vitesse de la lumière: La lumière se propage toujours dans le vide avec une certaine vitesse c qui est indépendante de l'état de mouvement de la source lumineuse. Cela peut se traduire par le fait que la vitesse de la lumière dans le vide est une constante indépendante du référentiel d'inertie d'observation.

Cependant, nous pouvons montré l'existence d'une vitesse limite de propagation des interactions ou signaux qui est théoriquement indépendante de la vitesse de la lumière et, bien sûr, du référentiel d'observation. En effet, l'existence d'une vitesse limite de propagation apparaît comme la conséquence d'un postulat plus général sur l'espace-temps qui est que celui-ci doit être *homogène* et *isotrope*. Ainsi, le second postulat revient à admettre que cette vitesse limite est égale à celle de la lumière dans le vide, conformément aux équations de Maxwell, mais il n'est pas nécessaire à l'existence d'une telle vitesse limite. Notons que cette vitesse est également celle, par exemple, de la vitesse de propagation des ondes gravitationnelles.

Enfin, un autre postulat doit être maintenu qui est celui du principe de causalité : l'ordre temporel de deux événements est conservé lors de tout changement de référentiel galiléen.

3 La transformation de Lorentz-Poincaré

La transformation classique de Galilée étant incapable de satisfaire au principe de relativité en ce qui concerne les équations de Maxwell du champ électromagnétique, la question est de savoir quelle transformation on doit utiliser pour transformer les coordonnées d'un référentiel galiléen en les coordonnées d'un autre référentiel galiléen. C'est tout l'objet de cette section.

Considérons un premier observateur O muni d'un système d'axes correspondant à des coordonnées cartésiennes (x, y, z) et mesurant un temps t. Supposons qu'un second observateur O' soit en mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse v suivant l'axe (Ox). Cet observateur, mesurant un temps t', peut lui aussi choisir un système d'axes correspondant à des coordonnées cartésiennes (x', y', z') tel que l'axe $(O'x')$ soit confondu avec l'axe (Ox), et tel que les axes $(O'y')$ et $(O'z')$ soient parallèles, respectivement, aux axes (Oy) et (Oz). Enfin, nous pouvons poser que, lorsque $t = t' = 0$, les deux observateurs sont au même point de l'espace-temps de coordonnées $(0, 0, 0, 0)$ dans les deux référentiels. La question est donc la suivante : Si M est un événement de l'espace-temps de coordonnées (x, y, z, t) pour l'observateur O alors, quelles seront ses coordonnées (x', y', z', t') pour l'observateur O' ?

Le choix, arbitraire, que nous avons fait pour les axes nous permet déjà d'affirmer que $y' = y$ et que $z' = z$. Nous allons donc nous intéresser à la transformation de (x, t) en (x', t'). Une telle transformation s'écrit, d'une façon générale :

$$\begin{aligned} x' &= A(x, t) \\ t' &= B(x, t) \end{aligned} \qquad (1)$$

avec A et B deux fonctions de x et de t qui peuvent dépendre également du changement de référentiel choisi.

Soient, à présent, deux événements $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$. L'espace-temps étant homogène et isotrope, la transformation des coordonnées $(\Delta x_{12}, \Delta t_{12})$ du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$, lors d'un changement de référentiel galiléen, ne doit pas dépendre des coordonnées cartésiennes choisies pour donner les positions de M_1 et de M_2. Elle ne doit dépendre que de la différence des coordonnées de ces points. On aura

$$\begin{aligned} \Delta x'_{12} = x'_2 - x'_1 = A(x_2, t_2) - A(x_1, t_1) = \tilde{A}(x_2 - x_1, t_2 - t_1) \\ \Delta t'_{12} = t'_2 - t'_1 = B(x_2, t_2) - B(x_1, t_1) = \tilde{B}(x_2 - x_1, t_2 - t_1) \end{aligned} \tag{2}$$

La transformation des coordonnées $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}t)$ d'un vecteur déplacement élémentaire quelconque, noté $\mathrm{d}\overrightarrow{M}$, c'est-à-dire lorsque la position de M_2 tend vers celle de M_1, sera donc telle que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x' = \tilde{A}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}t) = \frac{\partial A}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial A}{\partial t}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}t' = \tilde{B}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}t) = \frac{\partial B}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial B}{\partial t}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3}$$

Les dérivées partielles par rapport à x et par rapport à t des fonctions A et B sont donc indépendantes de x et de t. Il en résulte que les fonctions A et B sont des fonctions linéaires de x et de t. Ainsi, la transformation cherchée est une transformation linéaire des coordonnées qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} x' = a\,x + b\,t \\ t' = c\,x + d\,t \end{aligned} \tag{4}$$

ou, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{5}$$

avec a, b, c et d des coefficients qui restent à déterminer.

Ecrivons cette transformation pour le point O': pour l'observateur en O, O' aura comme coordonnées $(v\,t, t)$ alors que pour O', ses coordonnées dans son référentiel propre seront $(0, t')$. Ainsi,

$$\begin{aligned} a\,v + b &= 0\,, \\ t'_{O'} &= (c\,v + d)\,t_{O'}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

D'après le principe de relativité, O ayant une vitesse $-v$ selon $(O'x')$ par rapport à O', la matrice de la transformation inverse qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a\,d - b\,c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \tag{7}$$

est telle que, en écrivant la transformation pour le point O,

$$\begin{aligned} d\,v + b &= 0 \\ t_O &= \frac{1}{\Delta}\,(c\,v + a)\,t'_O\,, \end{aligned} \tag{8}$$

avec $\Delta = a\,d - b\,c$, le déterminant de la transformation.
Des égalités (6) et (8), on déduit que $a = d$ et, toujours d'après le principe de relativité, la situation étant symétrique pour O et O', on doit avoir $c\,v + d = \frac{1}{\Delta}\,(c\,v + a)$. Cette dernière relation implique que $\Delta = 1$, c'est-à-dire,

$$c = \frac{1 - a^2}{a\,v}\,. \tag{9}$$

La transformation cherchée devient alors

$$\begin{aligned} x' &= a\,(x - v\,t) \\ t' &= a\,(t + \frac{1 - a^2}{a^2\,v}\,x)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Prenons, à présent, un troisième observateur O'' ayant une vitesse u selon (Ox) par rapport à O, et une vitesse w selon $(O'x')$ par rapport à O'. La transformation reliant les coordonnées dans le référentiel de O'' à celles dans le référentiel de O' sera, d'après (10), de la forme

$$\begin{aligned} x'' &= a_1\,(x' - w\,t') \\ t'' &= a_1\,(t' + \frac{1 - a_1^2}{a_1^2\,w}\,x')\,. \end{aligned} \tag{11}$$

En remplaçant x' et t', on obtient les relations suivantes entre les coordonnées dans le référentiel de O'' et celles dans le référentiel de O:

$$\begin{aligned} x'' &= a\,a_1\left[\left(1 - w\,\frac{1 - a^2}{a^2\,v}\right)x - (v + w)\,t\right] \\ t'' &= a\,a_1\left[\left(1 - v\,\frac{1 - a_1^2}{a_1^2\,w}\right)t - \left(\frac{1 - a^2}{a^2\,v} + \frac{1 - a_1^2}{a_1^2\,w}\right)x\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Mais ces relations s'écrivent également

$$\begin{aligned} x'' &= a_2\,(x - u\,t) \\ t'' &= a_2\,(t + \frac{1-a_2^2}{a_2^2\,u}\,x)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

L'unicité et l'égalité des coefficients devant x et t donnent l'égalité suivante

$$w\,\frac{1-a^2}{a^2\,v} = v\,\frac{1-a_1^2}{a_1^2\,w}\,, \tag{14}$$

c'est-à-dire,

$$\frac{1-a^2}{a^2\,v^2} = v\,\frac{1-a_1^2}{a_1^2\,w^2} = \chi\,, \tag{15}$$

où χ est une constante réelle. Les valeurs des vitesses v et w étant arbitraires, cette égalité nous montre que a dépend uniquement de la vitesse v de translation de O' suivant la relation

$$a = \frac{1}{\sqrt{1+\chi\,v^2}}\,. \tag{16}$$

Enfin, les relations (12) et (13) permettent d'exprimer la vitesse u en fonction des vitesses v et w, et de la constante χ :

$$u = \frac{v+w}{1-\chi\,v\,w}\,. \tag{17}$$

Que dire de la constante χ ?

(1) Si $\chi = 0$ alors $a = d = 1$, $b = -v$ et $c = 0$; on retrouve la transformation galiléenne classique. Celle-ci ne vérifie pas le principe de relativité énoncé par Einstein, il faut donc la rejeter.

(2) (a) Si $\chi > 0$ et si les vitesses peuvent être supérieures ou égales à $1/\sqrt{\chi}$, alors il existe des couples $(v, w) \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $u < 0$, ce qui est absurde, étant donnée l'orientation choisie pour les axes des différents référentiels. De plus, pour $v\,w = 1/\chi$, la vitesse u n'est pas définie.

(b) Si $\chi > 0$ et si les vitesses sont strictement inférieures à $1/\sqrt{\chi}$, alors, prenons par exemple $v = w = 1/(2\sqrt{\chi})$, et utilisons la relation (17). Nous obtenons la contradiction suivante : $u > 1/\sqrt{\chi}$.

(3) Si $\chi < 0$ alors le coefficient a n'est défini dans $\mathbb{R}$ que pour les vitesses v strictement inférieures à $1/\sqrt{-\chi}$. La vitesse, notée c et égale à $1/\sqrt{-\chi}$, apparaît donc comme une vitesse limite de propagation ou de déplacement. On vérifie d'ailleurs aisément que la relation (17) donne une vitesse u toujours inférieure à c en valeur absolue et ce, pour tout couple $(v, w) \in]-c, c[^2$. Ainsi, le second postulat d'Einstein nous dit que cette vitesse limite est égale à la vitesse de la lumière dans le vide.

En conclusion, afin de rendre homogènes les coordonnées, si l'on multiplie par c la coordonnée temporelle, la transformation de Lorentz-Poincaré s'écrit simplement, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ c\,t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\,\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\,\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ c\,t \end{pmatrix} \tag{18}$$

avec

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{v}{c} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Lorsque $v = 0$, cette transformation s'identifie à l'application identité et, lorsque $v \ll c$, nous retrouvons, au premier ordre, la transformation de Galilée. Enfin, nous montrerons, plus loin, que la transformation de Lorentz-Poincaré laisse invariantes les équations de Maxwell.

De façon plus générale, si la vitesse de translation de O' est $\vec{v} = v\,\vec{k}$, où $\vec{k}$ est un vecteur unitaire, le vecteur position $\overrightarrow{OM} = (\vec{r}, t)$ d'un événement M sera transformé en $\overrightarrow{O'M} = (\vec{r'}, t')$ suivant les relations :

$$\begin{aligned} \vec{r'} &= \gamma\,\vec{r}_{\parallel} - \gamma\,\beta\,c\,t\,\vec{k} + \vec{r}_{\perp} \\ t' &= \gamma\,t - \frac{\gamma\,\beta}{c}\,(\vec{r}\cdot\vec{k})\,, \end{aligned} \tag{20}$$

avec $\vec{r}_\parallel$ et $\vec{r}_\perp$, les composantes du vecteur $\vec{r}$, respectivement, parallèle et orthogonale au vecteur $\vec{k}$.

Par ailleurs, il est facile de montrer que l'ensemble des transformations de Lorentz-Poincaré, muni de la loi de composition interne $\circ$, forme un groupe non commutatif.

Enfin, les transformations de Lorentz-Poincaré sont dites *propres* car elles ont toutes un déterminant égal à 1. Elles sont également qualifiées d'*orthochrones*, car elles ne modifient pas le sens d'écoulement du temps, conformément au principe de causalité.

4 Géométrie de l'espace-temps de Minkowski

La transformation de Lorentz, précédemment établie, permet de préciser la structure géométrique de l'espace-temps de la relativité restreinte, appelé *espace-temps ou univers de Minkowski*.

Soient deux événements quelconques $M_1(c\,t_1, x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(c\,t_2, x_2, y_2, z_2)$ de l'espace-temps, noté E. La transformation de Lorentz fait apparaître l'égalité suivante

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 \tag{21}$$

avec $\Delta s^2 = c^2\,(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$. Cette quantité scalaire Δs^2, qui est donc invariante par changement de référentiel galiléen, est appelée *carré de l'intervalle entre deux événements*. De façon assez naturelle, elle nous amène à définir, sur E, la pseudo-métrique g suivante :

$$\begin{array}{rcl} g : E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \mapsto & g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \eta_{ij}\, x^i\, y^j \,, \end{array} \tag{22}$$

où les coordonnées contravariantes des vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont définies par rapport à une base orthogonale quelconque de E, notée $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_i\}_{i \in [\![0,3]\!]}$, dans laquelle le vecteur temporel de base est $\mathbf{e}_0$. Les coordonnées η_{ij} du tenseur métrique g, dans une telle base, sont alors définies par, $\forall i \in [\![0, 3]\!]$,

$$\eta_{0i} = \quad g(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_i) \quad = \delta_{0\,i} \,,$$

et, $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2$,

$$\eta_{ij} = \quad g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad = -\delta_{i\,j}\,. \tag{23}$$

Cette métrique pseudo-euclidienne, de signature $(+,-,-,-)$, est dite *lorentzienne*[1]. L'invariance du carré de l'intervalle entre deux événements, lors d'un changement de référentiel galiléen, s'exprime simplement par l'invariance du carré de la pseudo-norme, égal à $g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, du vecteur $\mathbf{x}$ reliant les deux événements considérés.

Le carré de l'intervalle entre les deux événements quelconques précédents est nul lorsque $M_1 = M_2$ ou bien, lorsque $c^2\,(t_2 - t_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$. Dans ce dernier cas, les deux événements ne peuvent être reliés dans E que par un signal ou une interaction se propageant à la vitesse c. On définit ainsi, dans E, plusieurs types de vecteurs $\mathbf{x} = \overrightarrow{M_1 M_2}$, suivant le signe du carré de leur pseudo-norme:

(1) Si $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ alors $\mathbf{x}$ est un *vecteur nul*[2] ou de *genre lumière*.

(2) Si $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ alors $\mathbf{x}$ est un vecteur de *genre temps*. Une relation causale peut exister entre les deux événements qu'il relie.

(3) Si $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < 0$ alors $\mathbf{x}$ est un vecteur de *genre espace*. Les deux événements qu'il relie sont causalement déconnectés. Chacun appartient à *l'ailleurs* de l'autre.

Les vecteurs de l'espace-temps de Minkowski sont également appelés *quadrivecteurs* ou *4-vecteurs*.

Il est intéressant de montrer que la donnée d'une telle métrique sur un espace-temps supposé homogène et isotrope, permet à elle seule de retrouver la transformation de Lorentz-Poincaré via le principe de relativité.

Plaçons-nous dans les mêmes conditions que celles utilisées dans la section (3). Nous avons montré, grâce à l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie de

[1] Certains auteurs adoptent une signature du type $(-,+,+,+)$, ce qui est strictement équivalent.

[2] Bien que $\mathbf{x}$ puisse être différent de $\vec{0}$.

l'espace, que la transformation cherchée devait être linéaire. Aussi, cette transformation ne doit dépendre que de la vitesse de translation v de O' par rapport à O, qui est le seul paramètre permettant de distinguer relativement les deux référentiels. Nous pouvons donc écrire la transformation du carré de l'intervalle entre deux événements quelconques, par changement de référentiel galiléen, de la façon suivante :

$$\Delta s'^2 = f(v)\,\Delta s^2\,, \tag{24}$$

où f est une fonction, *a priori* arbitraire, de v. Celle-ci vérifie nécessairement $f(v) = 1$ pour $v = 0$, c'est-à-dire lorsque les deux référentiels sont identiques. De plus, d'après le principe de relativité, la fonction f doit être telle que

$$\Delta s^2 = f(-v)\,\Delta s'^2\,. \tag{25}$$

Autrement dit,

$$f(v)\,f(-v) = 1\,. \tag{26}$$

Mais l'isotropie de l'espace-temps implique que seule la valeur absolue de la vitesse doit intervenir, et non sa direction. Ainsi, la fonction f reste constante et égale à 1 quelle que soit la vitesse v de translation. Nous avons donc montré l'invariance du carré de l'intervalle lors d'un changement de référentiel galiléen.

La question, à présent, est de savoir quelle transformation laisse invariante le carré de l'intervalle. Comme dans la section précédente, pour simplifier, nous allons réduire l'espace à deux dimensions, une de temps et une d'espace, la translation de O' ayant lieu suivant l'axe (Ox) à la vitesse v. Soit $\vec{A}$ un vecteur quelconque de coordonnées $(c\,t, x)$ dans le référentiel de O. Pour l'instant, la constante c ne sert qu'à rendre homogène les coordonnées tout en permettant de définir le carré de l'intervalle. Elle n'est pas encore associée à une vitesse limite.

Le vecteur $\vec{A}$ s'écrira

$$\vec{A} = c\,t\,\mathbf{e}_0 + x\,\mathbf{e}_1 = c\,t'\,\mathbf{e'}_0 + x'\,\mathbf{e'}_1\,, \tag{27}$$

où $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e'}_i\}_{i\in[\![0,1]\!]}$ est la base liée à O'.

Les relations entre les vecteurs des deux bases sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= <\mathbf{e}_0, \mathbf{e}'_0> \mathbf{e}'_0 + <\mathbf{e}_0, \mathbf{e}'_1> \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}_1 &= <\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_0> \mathbf{e}'_0 + <\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1> \mathbf{e}'_1 \,. \end{aligned} \tag{28}$$

On déduit alors facilement la transformation

$$\begin{aligned} c\,t' &= <\mathbf{e}_0, \mathbf{e}'_0> c\,t + <\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_0> x \\ x' &= <\mathbf{e}_0, \mathbf{e}'_1> c\,t + <\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1> x \,. \end{aligned} \tag{29}$$

Cette transformation appliquée à O' donne immédiatement

$$\beta = \frac{v}{c} = -\frac{<\mathbf{e}_0, \mathbf{e}'_1>}{<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1>} \,. \tag{30}$$

Pour les vecteurs $\mathbf{e}'_0$ et $\mathbf{e}'_1$, l'invariance du carré des pseudo-normes s'écrit

$$\begin{aligned} <\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_0> &= \eta_{00} = 1 \\ <\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_1> &= \eta_{11} = -1 \,, \end{aligned} \tag{31}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} <\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}_0>^2 - <\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}_1>^2 &= 1 \\ <\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_0>^2 - <\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_1>^2 &= -1 \,. \end{aligned} \tag{32}$$

Suite à l'équation (30), on obtient ainsi

$$<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1>^2 = <\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_1>^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \,. \tag{33}$$

Etant donné que, pour $v = 0$, $x = x'$ et $t = t'$ implique que $<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1> = 1$, on déduit

$$\begin{aligned} <\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1> &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \\ <\mathbf{e}_0, \mathbf{e}'_1> &= -\beta\,\gamma \,. \end{aligned} \tag{34}$$

Enfin, pour un point se déplaçant à la vitesse c par rapport à O et passant par $O = O'$ à l'instant $t = t' = 0$, la transformation des coordonnées se traduit par

$$\begin{aligned} c\,t' &= (<\mathbf{e}_0, \mathbf{e}'_0> + <\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_0>)\,c\,t \\ x' &= (<\mathbf{e}_0, \mathbf{e}'_1> + <\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1>)\,c\,t \,. \end{aligned} \tag{35}$$

L'invariance du carré de l'intervalle implique qu'il se déplace également à la vitesse c par rapport à O' donc $x' = c\,t'$. On a donc l'égalité suivante :

$$< \mathbf{e}_0, \mathbf{e'}_0 > + < \mathbf{e}_1, \mathbf{e'}_0 > = < \mathbf{e}_0, \mathbf{e'}_1 > + < \mathbf{e}_1, \mathbf{e'}_1 > , \qquad (36)$$

ce qui équivaut à

$$< \mathbf{e}_0, \mathbf{e'}_0 > + < \mathbf{e}_1, \mathbf{e'}_0 > = \gamma\,(1-\beta)\,. \qquad (37)$$

Les relations (32) et (37) permettent de conclure :

$$\begin{aligned} < \mathbf{e}_0, \mathbf{e'}_0 > &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \\ < \mathbf{e}_1, \mathbf{e'}_0 > &= -\beta\,\gamma\,. \end{aligned} \qquad (38)$$

Nous avons donc retrouvé la transformation de Lorentz-Poincaré et la définition de γ fait apparaître c comme une vitesse limite.

Puisque γ varie de 1 à $+\infty$, il existe un paramètre réel θ tel que $\gamma = \cosh(\theta)$. Nous pourrons alors choisir β comme étant égal à $-\sinh(\theta)/\gamma$, c'est-à-dire, $-\tanh(\theta)$. Ainsi, la matrice associée à la transformation de Lorentz-Poincaré s'écrira

$$L(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & 0 & 0 & \sinh(\theta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\theta) & 0 & 0 & \cosh(\theta) \end{pmatrix}, \qquad (39)$$

avec, toujours, $\det(L(\theta)) = 1$.

Cette transformation de Lorentz-Poincaré peut donc être assimilée à une *rotation*, dans le plan (Oxt) de l'espace-temps de Minkowski, dont le paramètre θ constitue l'*angle*.

La composition de deux transformations de Lorentz-Poincaré différentes se traduira simplement par

$$L(\theta_1)\,L(\theta_2) = L(\theta_1+\theta_2)\,. \qquad (40)$$

Comme β est égal à $-\tanh(\theta)$, cette dernière relation permet retrouver la loi d'addition des vitesses (parallèles à l'axe (Ox), ici) qui est

$$w = \frac{v_1+v_2}{1+v_1\,v_2/c^2}\,, \qquad (41)$$

où w correspond à l'angle $\theta_{12} = \theta_1 + \theta_2$, v_1 à l'angle θ_1 et v_2 à l'angle θ_2. On vérifie bien que, pour des vitesses v_1 et v_2 inférieures à c, la vitesse w est toujours inférieures à c.

Finalement, la formule d'addition des vitesses, dans le cas classique, est remplacée par l'addition des angles dans l'espace-temps de Minkowski. Pour trois observateurs (1), (2) et (3),

$$\theta_{13} = \theta_{12} + \theta_{23} \,. \tag{42}$$

Cette dernière formule est valable quelles que soient les directions des vitesses de translation relatives entre les trois observateurs. Seules les matrices $L(\theta_1)$, $L(\theta_2)$ et la relation (41) seront modifiées afin de tenir compte de chacune des composantes des vitesses relatives.

Dans son référentiel propre, la trajectoire - ou ligne d'univers - d'un observateur inertiel O dans l'espace-temps de Minkowski est la droite temporelle dont l'équation est $x = 0, y = 0, z = 0$ et qui est orientée dans le sens d'écoulement du temps. La trajectoire de tout autre observateur inertiel O' en translation à la vitesse v par rapport à O sera alors une droite de même orientation (en raison du principe de causalité) dont l'angle, tel qu'il a été défini précédemment, avec celle de O sera égal à θ. Lorsque $v \to c$, cet angle tend vers l'infini, même si la droite aura pour pente $1/c$.

L'observateur O peut définir à chaque instant t_0 un *cône de lumière* orienté temporellement, dont l'équation est $(c\,t - t_0)^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et qui ne contient que des vecteurs de genre lumière. Il ne pourra observer que des événements situés à l'intérieur de ce cône[3], l'extérieur constituant l'*ailleurs*. Aussi, d'après les propriétés de θ, l'angle entre la ligne d'univers de tout autre observateur inertiel et une droite d'un *cône de lumière* de sommet O, est toujours infini. La vitesse de la lumière étant posée comme égale à c, on retrouve qu'elle est donc la même pour tous les observateurs inertiels. Enfin, l'orientation temporelle d'un cône de lumière pour un observateur inertiel quelconque implique la même orientation pour tous les observateurs inertiels, toujours en vertu du principe de causalité.

[3]Notons qu'à la limite classique d'une vitesse limite infinie ($c \to +\infty$), les cônes de lumière deviennent des plans d'équation $t = t_0$.