Завдання 1

Нехай $\{W(t),\ t \in [0,T]\}$ — вінерівський процес. Для заданих функцій $a, b\colon [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та початкового значення $x_0 \in \mathbb{R}$ довести існування та єдиність розв'язку стохастичного диференціального рівняння

$$dX(t) = a(t, X(t))\, dt + b(t, X(t))\, dW(t), \quad X(0) = x_0, \quad t \in [0,T].$$

Написати програму для моделювання наближеного розв'язку за допомогою методу Ейлера для заданого T і діаметра розбиття δ. Побудувати графік, який містить 10 різних траєкторій розв'язку на відрізку $[0,1]$, використовуючи діаметр розбиття $\delta = 0.01$. Виконати те саме завдання для $\delta = 0.001$.

Варіанти:

1) $a(t,x) = \sin t \ln(1 + |x|)$, $b(t,x) = 1 + x$, $x_0 = -5.1$;
2) $a(t,x) = xt - \cos x + t$, $b(t,x) = x + 2\sin t$, $x_0 = 7.3$;
3) $a(t,x) = \operatorname{arctg}(2 + xt)$, $b(t,x) = \ln(1 + 2t + x^2)$, $x_0 = -2.5$;
4) $a(t,x) = 4^t \ln(1 + x^2)$, $b(t,x) = \frac{t+x}{1+t^2+x^2}$, $x_0 = 4.4$;
5) $a(t,x) = 2t + x - 5\cos x$, $b(t,x) = 1 + 2x$, $x_0 = 0.9$;
6) $a(t,x) = \sqrt{4x^2 + t^2}$, $b(t,x) = |x|\,(1 + t^2)^{1/3}$, $x_0 = 0.1$;
7) $a(t,x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{\pi}{x} \sin t, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $b(t,x) = \sqrt{2t + x^2}$, $x_0 = 5$;
8) $a(t,x) = \ln(1 + t)(2 + \sin x)$, $b(t,x) = 2 + \sin x$, $x_0 = 0.1$;
9) $a(t,x) = 2 - \cos(4x - t^2)$, $b(t,x) = 4x \operatorname{arctg} t$, $x_0 = -3$;
10) $a(t,x) = \cos t\,(3 + \sin x)$, $b(t,x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+t^2}$, $x_0 = 7.3$;
11) $a(t,x) = t^2 + \sqrt{1 + x^2}$, $b(t,x) = \frac{2tx}{1+t}$, $x_0 = -2.8$;
12) $a(t,x) = (1 + t + x^2)^{-1}$, $b(t,x) = \operatorname{arctg} x - \cos^2(x + t)$, $x_0 = 1$;
13) $a(t,x) = t^7\sqrt{1 + x^4}$, $b(t,x) = 3^{-|x|}\cos(2 + t)$, $x_0 = -5.2$;
14) $a(t,x) = -t^2 - x$, $b(t,x) = 1 + \cos x \cos t$, $x_0 = -8.2$;
15) $a(t,x) = \ln(t^2 + t + 1)\, x \mathbb{1}_{x<0}$, $b(t,x) = t^{3/4}\sin(2x)$, $x_0 = 9$;

Завдання 2

Нехай $\{W(t),\ t \in [0,T]\}$ — вінерівський процес. Для заданих a, b, c, d та x_0 знайти в явному вигляді розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$dX(t) = (aX(t) + b)\, dt + (cX(t) + d)\, dW(t), \quad X(0) = x_0, \quad t \in [0,T].$$

1. Написати програму для моделювання розв'язку двома способами:

(a) за допомогою його явного вигляду;

(б) методом Ейлера.

Для оцінки точності наближень змоделювати 1000 траєкторій розв'язку двома способами та обчислити середнє значення абсолютної похибки в точках $t = 1, 10, 20$ при діаметрах розбиття $\delta = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$. Порівняти результат з теоретичною оцінкою.

2. Виконати те саме завдання, використовуючи замість методу Ейлера

(в) метод Мільштейна;

(г) метод Тейлора порядку 1.5.

Варіанти:

1) $a = 2.8, b = 0, c = -1.4, d = 0, x_0 = 1.8$;
2) $a = 0.5, b = -2, c = 3.5, d = 0, x_0 = 2.6$;
3) $a = -1, b = 0, c = -1.3, d = 0, x_0 = 2$;
4) $a = 1.9, b = 0, c = 2, d = 1, x_0 = 2.4$;
5) $a = -1.7, b = 0, c = 0.1, d = 0, x_0 = 2.2$;
6) $a = 3.5, b = 0, c = 0.8, d = 0, x_0 = 1.9$;
7) $a = 6, b = 0, c = 1.6, d = 0, x_0 = -3.8$;
8) $a = -2, b = 0, c = 2, d = 0, x_0 = 2$;
9) $a = 3.8, b = 0, c = 1.4, d = 0, x_0 = 4.8$;
10) $a = 2.1, b = 0, c = 0.2, d = 0, x_0 = -7$;
11) $a = 3.2, b = 0, c = 2, d = 0, x_0 = 10$;
12) $a = 1.6, b = 0, c = 3.5, d = 0, x_0 = 6$;
13) $a = -2.3, b = 0, c = 1, d = 0, x_0 = 2$;
14) $a = 0.3, b = 0, c = -2.3, d = 0, x_0 = 3.9$;
15) $a = -3.1, b = 0, c = 3.3, d = 0, x_0 = 1.8$.