黎曼几何笔记

李博湛

July 10, 2023

1 引言

这是一份关于黎曼几何的笔记。其中的内容大体概述：先是介绍关于黎曼几何的基本概念，如黎曼度量、黎曼流形的度量结构、Levi-Civita联络与平行移动，进而介绍测地线的内容，如指数映射、变分、Jacobi场、测地线的"局部最短性"、第一变分公式、截面曲率；最后是介绍了曲率与子流形几何的一些内容，如几种曲率的定义、第二基本型、Gauss公式、Codazzi公式。

2 基本概念

2.1 黎曼度量

定义 2.1.1. **流**形M上的**黎曼度量**是一族$\{g_p\}_{p\in M}$，其中$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$是线性空间 T_pM上的内积，并且g_p关于p是光滑变化的，也就是说，在一个坐标卡(U,φ)中，对任意i，j有$g_{ij}(p):=g_p(\partial_i(p), \partial_j(p)) \in C^\infty(U)$。定义了黎曼度量$g$的流形$M$称作**黎曼流形**，通常记为$(M, g)$。

注 2.1.1. 后面我们会看到g是一个（0，2）型张量，一般对u，$v\in T_pM$也记$<u,v>=g(u,v)=g_p(u,v)$。对任意$p\in U$,$[g_{ij}](p)$为正定对称矩阵，也可记为$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$。

定义 2.1.2. 对$u\in T_pM$，称$|u| = \|u\| = \sqrt{<u,u>}$为它的**模长**。

例子 2.1.1. 欧式空间$\mathbb{R}^n$,其上的坐标卡为$\{(\mathbb{R}^n, id)\}$,黎曼度量为$ds^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j$

命题 2.1.1. 任意流形上都存在黎曼度量。

Proof. 在每个坐标卡上定义局部度量，再利用单位分解的存在性线性组合起来即可。 □

注 2.1.2. 对于恒正的光滑函数f和度量ds^2,可以定义新的度量$d\tilde{s}^2 = f ds^2$。

定义 2.1.3. 对浸入$\Phi : M \longrightarrow N$和$N$上的黎曼度量$g_N$，可定义$M$上的**拉回**度量$\Phi^*(g_N)$如下：$\Phi^*(g_N)(u,v) := (g_N)(\Phi_*(u),\Phi_*(v))$。若$M$上原本的黎曼度量$g_M$与$\Phi^*(g_N)$一致，就称$\Phi$是等距浸入。特别地，当$\Phi$是覆叠映射时也称为**黎曼覆叠**。

定义 2.1.4. 对黎曼流形$(M_1,g_1),(M_2,g_2)$，可以在$M_1\times M_2$上定义**乘积黎曼度量**$g_1\bigoplus g_2$ (或$g_1\times g_2$)为$(g_1\bigoplus g_2)((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = g_1(u_1,v_1)+g_2(u_2,v_2)$。若给出了恒正的$f\in C^\infty(M_1)$,对$(u_1,u_2),(v_1,v_2)\in T_{((p_1,p_2)}(M_1\times M_2)$可定义$(M_1\times M_2, g_1\bigoplus_f g_2)$如下：$(g_1\bigoplus_f g_2)(u_1,u_2),(v_1,v_2)) = g_1(u_1,v_1)+f^2(p_1)g_2(u_2,v_2)$,这个黎曼流形也可记为$M_1\times_f M_2$。

定义 2.1.5. 对淹没$\pi : M^n \longrightarrow N^m, V_p := ker(\pi_*|_p)$称为$\pi$在$p$处的垂直空间。设$M$，$N$上的黎曼度量分别为$g_M, g_N$,则可以定义$V_p$在$g_M$下的正交补$H_p$，称作$\pi$在$p$处的水平空间。称$\pi$为黎曼淹没，如果$\pi_*|_p : H_p \longrightarrow T_{\pi(p)}N$是等距的。

注 2.1.3. 当$n> m$时，一般无法通过淹没定义拉回度量。

2.2 黎曼流形的度量结构

有了黎曼度量后，就可以在流形上定义度量结构了，首先定义曲线的长度。

定义 2.2.1. 光滑映射$\gamma : [a,b] \longrightarrow M$称作$M$上的光滑曲线，其切向量为$\gamma'(t) := \gamma_*(\frac{d}{dt})$,长度$L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$,弧长$s(t) := \int_a^t \|\gamma'(u)\|du$

注 2.2.1. 一般总假设$\gamma'(t) \neq 0$,此时s严格单调递增，就可以找到其反函数*t=t(s)*,于是可得到新的曲线$\bar{\gamma} : [0,s(b)] \to M, s \mapsto \gamma(t(s))$。这个曲线总拥有单位切向量，称作曲线的弧长参数化，可验证曲线的长度不依赖于参数的选取。

定义 2.2.2. 分段光滑曲线定义为*C([0,1]):=*$\{c : [0,1] \to M|c$分段光滑$\}$。显然，L是C上的泛函。下面定义任意两点间的距离。

定义 2.2.3. 对道路连通流形M上任意两点$p,q\in M$,记所有以p为起点，q为终点的分段光滑曲线$C_{p,q}$=$\{c\in C[0,1]|c(0) = p, c(1) = q\}$，定义$p,q$之间的距离为*d(p,q):=inf*$\{L(\gamma)|\gamma\in C_{p,q}\}$。

注 2.2.2. 由道路连通性可说明这样的定义是合理的，即$d< +\infty$

命题 2.2.1. $d : M\times M \to \mathbb{R}, (p,q) \mapsto d(p,q)$是一个度量函数，使得*(M,d)*是一个度量空间。

此命题的证明会在后面隐晦地出现，需要注意的是这个命题的表述蕴含“M在d下诱导的拓扑与原本的拓扑一致”。

例子 2.2.1. 将S^2视为$\mathbb{R}^3$中的单位球面，其切空间在$\mathbb{R}^3$中真实存在，长度就继承自$\mathbb{R}^3$。连接北极点N与南极点S的最短曲线是经线，也就是$d(N,S)=\pi$。

有了度量之后，也可以定义"直径"的概念了。

定义 2.2.4. $Diam(M,g):=sup\{d(p,q)|p,q \in M\}$称为$(M,g)$的直径。

2.3 Levi-Civita联络与平行移动

给定黎曼度量后，可以定义切丛上一个"最好"的联络。

定理 2.3.1. 令(M^n,g)为一黎曼流形，存在唯一的TM上的联络使得任意$X,Y,Z \in \Gamma(TM)$:*(1)*与度量相容：$X<Y,Z>=<\nabla_X Y,Z>+<Y,\nabla_X Z>$;*(2)*无挠：$\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]=0$。

Proof. 事实上，轮换（1）并做适当变换并利用（2）可得$<\nabla_X Y,Z>=\frac{1}{2}(X<Y,Z>+Y<Z,X>-Z<X,Y>+<[X,Y],Z>-<[Y,Z],X>+<[Z,X],Y>)$,由此给出的$\nabla$就满足所有要求。同时此式说明了$\nabla$的唯一性。 □

定义 2.3.1. 定理*2.3.1*中的联络称为*Levi-Civita*联络。

以下所说"联络"均为Levi-Civita联络，并用∇表示，我们来看一看联络在局部坐标下的形式。

定义 2.3.2. 设(U,φ)为一坐标卡，有自然基$\{\partial_i\}$,对$X \in \Gamma(TM)|_U, X=X^i\partial_i, X^i \in C^\infty(U)$,记$\nabla_{\partial_i}\partial_j=\Gamma_{ij}^k\partial_k, \Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$,称$\Gamma_{ij}^k$为$X$在$U$下的*Christoffel*记号。

对$X=X^i\partial_i, Y=Y^j\partial_j$,容易算出$\nabla_X Y=(X(Y^K)+X^iY^j\Gamma_{ij}^k)\partial_k$。由于联络对于下面的分量是函数线性的，所以$\nabla_X Y$在p处的取值实际上只与X(p)有关，而与X在其他点处取值无关，所以$\nabla_X Y$也常常被称作Y沿X的方向导数，并且$\nabla_X Y(p)$记为$\nabla_{X(p)}Y$，类似地对光滑道路γ也由$\nabla_{\gamma'(t)}Y=:(Y(\gamma(t))'$或$Y'(t)$。基于此我们可以定义所谓的"平行移动"。

定义 2.3.3. 设$\gamma: I \to M$是一光滑曲线，称沿γ的向量场$Y(t)$是平行的，如果$\nabla_{\gamma'}Y=0$,也即是说在坐标卡(U,φ)下，对任意k有$\frac{dY^k}{dt}+\Gamma_{ij}^k(\gamma^i)'Y^j=0$,其中$\gamma^i$为$\gamma$的局部坐标。

命题 2.3.1. 对任意光滑曲线$\gamma, v \in T_{\gamma(0)}M$，存在唯一的沿$\gamma$的平行向量场$V$使得$V(0)=v$。

Proof. 在局部坐标下这无非是一个给定初值的一阶常微分方程组，由存在唯一性即得。 □

定义 2.3.4. 对任意光滑曲线$\gamma, v \in T_{\gamma(0)}M$，设满足*V(0)=v*的沿$\gamma$的平行向量场为$V$，称$V(t_0)$为$v$沿$\gamma$到$\gamma(t_0)$的平行移动。

注 2.3.1. 平行移动与联络相互决定。

要注意的是，平行移动往往是依赖于曲线的选取的。

2.4 (r,s)-张量丛上的Levi-Civita联络

定义 2.4.1. 对流形M，定义其上的*(r,s)*-张量丛为$T^r_sM := \otimes^rTM\otimes^sT^*M$;$\Gamma(T^r_sM)$中的元素称为$M$上的*(r,s)*-张量。

事实上，一个(r,s)-张量φ正相当于每点p处的φ_p是$\times^rT^*_pM \times^s T_pM$上的一个多重线性函数。

例子 2.4.1. 光滑切向量场X是一个*(1,0)*-张量；微分*1*-形式ω是一个*(0,1)*-张量。

定义 2.4.2. 缩并c:$\Gamma(T^{r+1}_{s+1}M) \to \Gamma(T^r_sM)$定义如下：$c(x_1\otimes\cdots\otimes x_{r+1}\otimes y^*_1\otimes\cdots\otimes y^*_{s+1}) := \Sigma_{k,l}y^*_l(x_k)x_1\otimes\cdots\otimes\hat{x_k}\otimes\cdots\otimes x_{r+1}\otimes y^*_1\otimes\cdots\otimes\hat{y^*_l}\otimes\cdots\otimes y^*_{s+1}$

命题 2.4.1. 存在唯一的$\nabla : \Gamma(TM)\times\cup_{r,s}\Gamma(T^r_sM) \to \cup_{r,s}\Gamma(T^r_sM)$使得对任意*(r,s)*,$\nabla|_{\Gamma(TM)\times\Gamma(T^r_sM)}$是$T^r_sM$上的联络且满足：（*1*）$\nabla_X(T\otimes T') = (\nabla_XT)\otimes T'+T\otimes(\nabla_XT')$;*(2)*$\nabla_X(cT) = c\nabla_XT$;*(3)*对任意$f \in C^\infty(M), \nabla_Xf = X(f)$;*(4)*$\nabla|_{\Gamma(TM)\times\Gamma(T^r_sM)}$就是*Levi-Civita*联络。

Proof. 以(4)为奠基，运用前三条逐层归纳构造即可。对(0,s)-张量ω,$(\nabla_X\omega)(X_1,\ldots,X_s) = X(\omega(X_1,\ldots,X_s)) - \Sigma^s_{i=1}\omega(X_1,\ldots,\nabla_XX_i,\ldots,X_s)$;对(r,s)-张量T，$T(\omega_1,\ldots,\omega_r)$为(0,s)-张量，$(\nabla_XT)(\omega_1,\ldots,\omega_r) = \nabla_X(T(\omega_1,\ldots,\omega_r))-\Sigma^r_{i=1}T(\omega_1,\ldots,\nabla_X\omega_i,\ldots,\omega_r)$ □

定义 2.4.3. 命题*2.4.1*中的∇也称为*Levi-Civita*联络。对任意*(r,s)*-张量T,定义*(r,s+1)*型张量∇T为$(\nabla T)(X_1,\ldots,X_s,X) = (\nabla_XT)(X_1,\ldots,X_s)$。

例子 2.4.2. 设*(M,g)*为黎曼流形，$(\nabla g)(X,Y,Z)$=$\nabla_Zg(X,Y) = Z(g(X,Y))-g(\nabla_ZX,Y) - g(X,\nabla_ZY) = 0$,也即$\nabla g \equiv 0$。

2.5 微积分中的一些概念推广

定义 2.5.1. 对$f \in C^\infty(M)$,定义梯度场$gradf \in \Gamma(TM)$为满足$< gradf, X >= X(f)$的切向量场。

在坐标卡(U,φ)下，$gradf = (gradf)^i\partial_i, < gradf, \partial_j >= (gradf)^ig_{ij} = \partial_j(f)$,于是$(gradf)^i = g^{ij}\partial_j(f)$，其中$[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$。可见此定义与欧式空间中的梯度概念是相容的。

注 2.5.1. 物理学家一般记上式为$f^i = g^{ij}f_j$。

注 2.5.2. 对线性空间T_pM中，g作为内积给出了T_pM和T_p^*M间的典范同构，事实上$gradf$与$\nabla f = df$就是这个同构下的对应元素。

定义 2.5.2. 对$f \in C^\infty(M)$，定义*(0,2)*-张量*Hessian*场$Hessf := \nabla^2 f$。

在坐标卡(U,φ)下，$Hessf(\partial_i,\partial_j) = \partial_i\partial_j f - \Gamma_{ij}^k\partial_k f$。

定义 2.5.3. 对$X \in \Gamma(TM)$,定义其散度$div(X) := tr[Y \mapsto \nabla_Y X]$。

在坐标卡(U,φ)下，设$X = X^i\partial_i, \nabla_{\partial_i}(X^s\partial_s) = \frac{\partial X^s}{\partial x^i}\partial_s + \Gamma_{is}^k X^s\partial_k$。于是$div(X) = \partial_i X^i + \Gamma_{is}^i = \frac{1}{\sqrt{det[g_{ij}]}}\partial_s(\sqrt{det[g_{ij}]}X^s)$。

定义 2.5.4. 对$f \in C^\infty(M)$，定义*Laplace*算子$\triangle f := div(gradf)$；若$\triangle f \equiv 0$,称$f$为调和函数。

在坐标卡(U,φ)下，$\triangle f = \frac{1}{\sqrt{det[g_{ij}]}}\partial_i(g^{ij}\sqrt{det[g_{ij}]}\partial_j f)$。

3 测地线

3.1 测地线与指数映射

定义 3.1.1. 一个光滑曲线$\gamma : I \to M$称为测地线，如果$\nabla_{\gamma'}\gamma' \equiv 0$。

在坐标卡(U,φ)下，令$x^k(t) = x^k(\gamma(t))$，则γ是测地线等价于对任意k，$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0$。这是一个二阶非线性常微分方程组，它对任意$p \in M$和$v \in T_pM$都存在唯一解，使得$\gamma'(0) = v$，这样的解记为$\gamma_v$。

定理 3.1.1. 对任一测地线γ，$\|\gamma'(t)\|$恒定。

Proof. $\frac{d<\gamma'(t),\gamma'(t)>}{dt} = 2 < \nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t), \gamma'(t) >= 0$ □

我们下面对初始向量进行一些限制。

定义 3.1.2. 对流形M，其上点p处的单位切向量组成的集合$U_pM := \{v \in T_pM | \|v\| = 1\}$。单位切丛$UM$：$= \cup_{p\in M} U_pM$。

易见U_pM与单位球面S^{n-1}是同胚的，也具有紧性，于是存在与ξ无关的$\delta = \delta(p)$，使得$\gamma_\xi(t)$对任意$\xi \in U_pM, t \in (-\delta,\delta)$均存在。换言之，对任意$u \in T_pM, \|u\| < \delta, \gamma_u(1)$存在。 基于此可以定义所谓“指数映射”的概念。

定义 3.1.3. 对任意$p \in M$,指数映射$exp_p : B(O_p,\delta)(:= \{v \in T_pM | \|v\| < \delta\}) \to M$定义为$u \mapsto \gamma_u(1)$。

容易看到$exp_p(t\xi) = \gamma_\xi(t), |t| \le 1, \xi \in B(O_p, \delta)$和$exp_p(O_p) = p$。切空间作为欧式空间当然也有流形结构，于是可以考虑exp_p的切映射有如何性质，最方便研究的自然是$(exp)_*|_{O_p} : T_{O_p}(T_pM) \to T_pM$。但欧式空间的切空间和本身自然别无二致，于是我们可以将此映射是为T_pM的一个自映射。依定义，$(exp)_*|_{O_p}(u) = \frac{dexp_p(tu)}{dt} = \gamma'_u(0) = u$,这说明$(exp)_*|_{O_p}$不是别的，正是$id_{T_pM}$。因此通过反函数定理，我们知道存在$\varepsilon < \delta$,使得$exp_p|_{B(O_p,\varepsilon)}$是微分同胚，其像是M上的一个开集B，于是乎可以有：

定义 3.1.4. $log_p : B \to B(O_p, \varepsilon)$为$exp_p$在局部上的逆映射。需要注意到$(B, log_p)$是一个坐标卡，$T_pM$作为欧式空间有标准正交基$\{e_i\}_{i=1}^n$，其上坐标函数$\{x^i\}_{i=1}^n$为$log_p(q) = x^i(q)e_i$,$(B, log_px^i)$就称为一个标准坐标。

注 3.1.1. 这里的exp和log仅仅是记号而无算数含义，但在某些特殊情形（如Lie群和Lie代数之间的映射）下其确实可写成真正的指数映射。

沿着上面的思路，我们不禁要问$(exp)_*|_u$在$\|u\| \neq 0$时又是什么样子呢？这将在后面给出答案。

3.2 变分与Jacobi场

方便起见，我们先引入曲率张量的概念。

定义 3.2.1. 曲率张量R是一个（*1*，*3*）-张量，定义为$R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_YZ - \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_{[X,Y]}Z$。

仅从定义是看不太出R确实是一个张量的，不过这一点容易验证。

定理 3.2.1. (1)$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$; (2)$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$; (3) $< R(X,Y)Z, W > = < R(Z,W)X, Y >$; (4) $< R(X,Y)Z, WW > = - < R(X,Y)W, Z >$; (5)$(\nabla_XR)(Y,Z)U + (\nabla_YR)(Z,X)U + (\nabla_ZR)(X,Y)U = 0$。其中，第二个等式称为第一$Bianchi$恒等式，第五个等式称为第二$Bianchi$恒等式。

Proof. 证明从略。 □

注 3.2.1. 通过度量，可以定义（*0*，*4*）-张量R如下：$R(X,Y,Z,W) = < R(X,Y)Z, W >$,其也被称为曲率张量，由于定理*3.2.1*中第三第四等式，它有时也被记为$R(X\Lambda Y, Z\Lambda W)$,在后面我们会让这个记号拥有具体意义。在局部坐标下，$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R^l_{ijk}\partial_l, R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = R_{ijkl}$，显然两个系数之间有$R_{ijkl} = R^m_{ijk}g_{ml}$。

这下可以考虑$(exp)_*|_u : T_u(T_pM) \to T_{\gamma_u(1)}M$为何物了，当然其来源仍可以视为$T_pM$。固定$\xi \in T_u(T_pM)$, $[s \mapsto u + s\xi]$为ξ代表的等价类中的一个曲线。定义$\alpha : [0,1] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$为$[(t,s) \mapsto exp_pt(u + s\xi)]$,记$c_s(\cdot) :=$

$\alpha(\cdot,s)$,可见$c_s'(0) = u + s\xi$。另一方面Y(t):=[$t \mapsto \frac{\partial\alpha}{\partial s}|_{(t,0)}$]是$\gamma_u$上的一个向量场，其中$\frac{\partial\alpha}{\partial s}|_{(t,0)} := \alpha_*(\frac{\partial}{\partial s})|_{(t,0)}$。根据定义有$Y(1) = (exp)_*|_u(\xi)$，事实上$Y(t) = (exp)_*|_{tu}(t\xi) = t(exp)_*|_{tu}(\xi)$。更一般地，我们可以考虑所谓"变分"：

定义 3.2.2. 对任意光滑映射$\alpha : [a,b] \times (-\epsilon,\epsilon) \to M$,对任意$s \in (-\epsilon,\epsilon)$，称$c_s(\cdot) := \alpha(\cdot,s)$为$c_0$关于$\alpha$的变分。

$(\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\alpha}{\partial s}) := (\alpha_*(\frac{\partial}{\partial t}), \alpha_*(\frac{\partial}{\partial s}))$为$im\alpha$上的两个切向量场，由于两者被$\alpha_*$作用前李括号为0，故作用后也有$[\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\alpha}{\partial s}] = 0$,因此$R(\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\alpha}{\partial s}) = \nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial s}} - \nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}$。

对于刚才的情形而言，$c_s(t) = exp_p(t(u + s\xi))$为测地线，$\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \nabla_{c_s'(t)}c_s'(t) = 0$，$Y'(t) = \nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}(Y(t)) = \nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\frac{\partial\alpha}{\partial s}|_{(t,0)} = \nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial s}}\frac{\partial\alpha}{\partial t}|_{(t,0)}, Y''(t) = -R(Y(t),\gamma_u'(t))\gamma_u'(t)$。故Y(t)满足$Y''(t) + R(Y(t),\gamma_u'(t))\gamma_u'(t) = 0, Y(0) = 0, Y'(0) = \xi$。

定义 3.2.3. 若沿测地线γ_u的切向量场*Y(t)*满足$Y''(t)+R(Y(t),\gamma_u'(t))\gamma_u'(t) = 0$,则称它为一个*Jacobi*场。所有沿$\gamma_u$的*Jacobi*场记为$Jac(\gamma_u)$。

注 3.2.2. *Jac*(γ_u)实际上是一向量空间，*dimJac*(γ_u)=*2dimM*。其上还有由$\omega(J_1,J_2) =< J_1', J_2 > - < J_1, J_2' >$导出的辛结构。在此我们更关注所谓"正规*Jacobi*场"$Jac^\perp(\gamma_u)$,要求$Y(t) \perp \gamma_u'(t)$，因为对$Y(t)//\gamma_u'(t), Y''(t) = 0, Y(t) = (a + bt)\gamma_u'(t)$。

下面是著名的Gauss引理:

定理 3.2.2. $< (exp)_*|_{tu}(\xi), \gamma_u'(t) >=< u, \xi >$。

Proof. 上面的讨论得到Y(t)=$(exp)_*|_{tu}(t\xi)$是一个Jacobi场，$Y''(t)+R(Y(t),\gamma_u'(t))\gamma_u'(t) = 0$。先计算$\frac{d^2}{dt^2} < Y(t),\gamma_u'(t) >= \frac{d}{dt} < Y'(t),\gamma_u'(t) >=< Y''(t),\gamma_u'(t) >= - < R(Y(t),\gamma_u'(t))\gamma_u'(t),\gamma_u'(t) >= 0$，这说明$< Y(t),\gamma_u'(t) >$是一个线性函数，且t=0时也为0，而$\frac{d}{dt} < Y(t),\gamma_u'(t) >=< Y'(t),\gamma_u'(t) >$,其在t=0处取值为$< \xi,u >$,故$< Y(t),\gamma_u'(t) >= t < \xi,u >$,于是$< (exp)_*|_{tu}(\xi),\gamma_u'(t) >=< \frac{1}{t}Y(t),\gamma_u'(t) >=< u,\xi >$。 □

注 3.2.3. $\xi \perp u$和$\xi = u$的情形是值得注意的，前者说明测地球的边缘$\partial B(p,\delta) \perp \gamma_u'(1)$,后者说明指数映射在测地线径向方向保持长度。

定义 3.2.4. 设γ_u是*M*中一测地线，若存在其上一非零*Jacobi*场满足*Y*（*0*）=*Y*（*1*）=*0*,则称$\gamma_u(0)$与$\gamma_u(1)$沿γ_u共轭，$dimker((exp)_*|_u)$称为共轭的重数。

注 3.2.4. $dimker((exp)_*|_u)$也等于$\{J \in Jac(\gamma_u)|J(0) = J(1) = 0\}$作为$Jac(\gamma_u)$的子空间的维数。

例子 3.2.1. $\mathbb{R}^n$上的*Jacobi*场都是线性的。

例子 3.2.2. S^2上的测地线是大圆，*Jacobi*场为*sin(t)E(t)*，其中*E(t)*是一个平行向量场，对径点为一对共轭点。

3.3 测地线的局部最短性、第一变分公式

本节我们先来验证测地线具有“局部最短”的性质。

命题 3.3.1. 设exp_p定义在O_p的某个开邻域U中，设$u \in U, c : [0,1] \to T_pM$为$[t \mapsto tu]$，对任意$\varphi : [0,1] \to U$，若$\varphi(0) = O_p, \varphi(1) = u$,则对测地线$\gamma_u(t) = exp_p(c(t))$和$\tilde{\gamma}(t) = exp_p(\varphi(t))$,有$L(\tilde{\gamma}) \geq L(\gamma_u)$。若$exp_p$的切映射满秩（也即无共轭点存在时），则上式的等号无法成立。

Proof. 置$r(t) := \|\varphi(t)\|(r > 0)$,设$\varphi(t) = r(t)e(t)$。因为$e(t) \in U_pM$，故对$< e(t), e(t) >= 1$求导知$e(t) \perp e^{'}(t)$。于是$\varphi^{'}(t) = r^{'}(t)e(t) + r(t)e^{'}(t)$。由Gauss引理，$\| (exp_p)_*|_{\varphi(t)}e(t)\|$=1，且$< (exp_p)_*|_{\varphi(t)}e(t), (exp_p)_*|_{\varphi(t)}e^{'}(t) >= 0$，于是$\|\tilde{\gamma}^{'}(t)\| = \|(exp_p)_*|_{\varphi(t)}\varphi^{'}(t)\| \geq \|(exp_p)_*|_{\varphi(t)}r^{'}(t)e(t)\| = \|\gamma^{'}(t)\| = \frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|$,故$L(\tilde{\gamma}) \geq \int_0^1 \frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|dt = \|\varphi(1)\| - \|\varphi(0)\| = \|u\| = L(\gamma_u)$。当无共轭点存在时，$r > 0$，和$e^{'}(t) \notin ker(exp_p)_*$保证了不等号是严格的。 □

例子 3.3.1. S^2上北极点N的切平面中的圆$B(O_N, \pi)$的每一条半径并上一段圆弧在指数映射下都是N到南极点S的某条测地线的像。

例子 3.3.2. 圆柱$\mathbb{R} \times S^1$上在同一$\{x\} \times S^1$且非S^1上对径的两点，正向和反向弧均为测地线，不同时最短，但均局部最短。

注 3.3.1. 我们断言若一测地线上有共轭点p，q，经过q有一点r，p到r的最短连线绝非此测地线，证明会在后面出现。

下面我们对更一般的情形讨论所谓“变分法”

定义 3.3.1. 记$\Omega_{p,q}$是所有从p到q的分段光滑曲线组成的集合，$\Omega_{N,p}$是所有从$N \subset M$到p的分段光滑曲线组成的集合，Ω为所有分段光滑回路组成的集合。

在这里我们只讨论$\Omega_{p,q}$的情形，其余两种都是类似的，但第一种最好算。

定义 3.3.2. 给定曲线$c : [a,b] \to M, c \in \Omega_{p,q}$。一个变分$\alpha : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$被称作$c$在$\Omega_{p,q}$中的分段光滑变分，若它满足：（*1*）存在$a$=$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b$，使得$\alpha|_{[t_{i-1},t_i] \times [-\epsilon,\epsilon]}$光滑；（*2*）$\{c_s\}_{s \in (-\epsilon,\epsilon)} \subset \Omega_{p,q}$。

定义 3.3.3. $\Omega_{p,q}$上的长度泛函$L : \Omega_{p,q} \to \mathbb{R}$就是$[\gamma \mapsto L(\gamma)]$。

注 3.3.2. $\Omega_{p,q}$实际上是一个无穷维流形，虽然其上结构未曾给出，但我们可以通过“沿c的切向量场$W(t) := \frac{\partial \alpha}{\partial s}|_{t=0}$”来直观理解$c_s$在$\Omega_{p,q}$中在$c_0$处的一个切向量的概念。由于所有$c_s$都在$\Omega_{p,q}$中，所以有边界条件*W(a)=W(b)=0*,反过来，给定任何满足此边界条件的沿c的切向量场*W(t)*,分段光滑变分$\alpha(t,s) = exp_{c(t)}sW(t)$的给出的切向量场正是$W$（$t$）。

接下来是“第一变分公式”：

命题 3.3.2. 设c,α,W,c_s如上定义，则$\frac{d}{ds}|_{s=0}L(c_s)=-\int_a^b<W(t),\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{c^{'}(t)}{\|c^{'}(t)\|}> dt+\Sigma_{i=1}^{n-1}<W(t_i),\frac{c^{'}(t_i-0)}{\|c^{'}(t_i-0)\|}-\frac{c^{'}(t_i+0)}{\|c^{'}(t_i+0)\|}>$。

Proof. $\frac{d}{ds}|_{s=0}L(c_s)=\frac{d}{ds}|_{s=0}\int_a^b<\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial t}>^{\frac{1}{2}}dt=\int_a^b\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial s}<\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial t}>|_{s=0}}{\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\|_{(t,0)}}=\int_a^b\frac{<\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial t}>|_{s=0}}{\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\|_{(t,0)}}dt$。回忆$[\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial s}]$=0,又有上式为$\int_a^b\frac{<\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial t}>}{\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\|}|_{(t,0)}dt=\int_a^b<\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{c^{'}(t)}{\|c^{'}(t)\|}>|_{(t,0)}dt$,由联络保度量的性质知上式为$\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}<\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{c^{'}(t)}{\|c^{'}(t)\|}>|_{(t,0)}dt-\int_a^b<\frac{\partial\alpha}{\partial s},\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{c^{'}(t)}{\|c^{'}(t)\|}>|_{(t,0)}dt$，在被减项上对每段$[t_{i-1},t_i]$运用微积分基本定理即明所欲证。 □

上述公式的左端可被理解为$\frac{\partial L}{\partial\omega}|_c$，据此可以定义如下概念:

定义 3.3.4. $c\in\Omega_{p,q}$被称为一个临界曲线，如果：（*1*）c有常速度；（*2*）对c的任意分段光滑变分，$\frac{d}{ds}|_{s=0}L(c_s)=0$

但实际这个定义恐有重复赘余之嫌，因为我们可以证明:

命题 3.3.3. 如果c是临界曲线，则c是测地线，反之亦然。

Proof. 逆命题是显然的，我们只需证明正向。对临界曲线c，存在$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_N=b$使得$c|_{(t_{i-1},t_i)}$光滑，再令$W(t)=f(t)\cdot\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}c^{'}(t)$，其中$f(t_i)=0,\|c^{'}(t)\|=l$为常数，由第一变分公式，$\frac{d}{ds}|_{s=0}L(c_s)=-\int_a^b<W(t),\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{c^{'}(t)}{l}>dt=-\frac{1}{l}\int_a^b<W(t),\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}c^{'}(t)>dt=0$,所以对任意$t\in(t_i,t_{i+1}),\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}c^{'}(t)\equiv0$,也是说每一段均为测地线。下证c必须光滑，取W(t)为$W(a)=W(b)=0,W(t_i)=c^{'}(t_i-0)-c^{'}(t_i+0)$，此时再由第一变分公式可得结论成立。故c是连续可导的，由测地线为常微分方程的解，存在唯一性可推出c是光滑的。 □

推论 3.3.1. 设$exp_p:B(O_p,\epsilon)\to M$是微分同胚，则对任意$q\in imexp_p$，存在唯一的拥有弧长参数的最短测地线$\gamma$从$p$到$q$，即$\gamma(t)=exp_p(t(log_pq)),log_pq\in U_pM$是从$p$到$q$的最短测地线的切向量，特别地，$exp_p(B(O_p,\epsilon))=B(p,\epsilon)$。

推论 3.3.2. 令$\gamma:[a,b]\to M$是一个测地线，并且在$t\in(a,b]$时无$\gamma(t)$与$\gamma(a)$沿γ共轭，则存在γ在$\Omega_{p,q}$中的一个开邻域U，任意$c\in U,L(c)\geq L(u)$,并且等号成立当且仅当$c=\gamma$。

推论 3.3.3. 流形上两点之间的最短道路是一条测地线。

3.4 截面曲率一瞥

测地线在局部随Jacobi场变化的快慢是值得注意的，我们来对一测地线$\gamma_u(t)$计算其上满足$Y(0)=0,Y'(0)=\xi$的Jacobi场的长度平方$\|Y(t)\|^2$的Taylor展开式。设$f(t)=<Y(t),Y(t)>$,显然$f(0)=0,f'(0)=2<Y(t),Y'(t)>|_{t=0}=0,f''(0)=2<Y'(t),Y'(t)>|_{t=0}+2<Y(t),Y''(t)>|_{t=0}=2$。而$Y''(0)=-R(Y(0),\gamma_u'(0))\gamma_u'(0)=0$,故$f'''(0)=6<Y'(t),Y''(t)>|_{t=0}+2<Y(t),Y'''(t)>|_{t=0}=0$。又$Y'''(0)=\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(Y'(t))|_{t=0}=-\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(R(Y(t),\gamma_u'(t))\gamma_u'(t))|_{t=0}=((-\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}R)(Y(t),\gamma_u'(t))\gamma_u'(t)-R(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}Y(t),\gamma_u'(t))\gamma_u'(t))|_{t=0}=-R(Y'(t),\gamma_u'(t))\gamma_u'|_{t=0}=-R(\xi,u)u$ 于是$f^{(4)}(0)=8<Y'(t),Y'''(t)>|_{t=0}=-8<R(\xi,u)u,\xi>=-8R(\xi,u,u,\xi)$。故我们有：

命题 3.4.1. $\|Y(t)\|^2=t^2-\frac{1}{3}R(\xi,u,u,\xi)t^4+O(t^5)$。

可以看到其曲率项$R(\xi,u,u,\xi)$影响了测地线局部散开的快慢，这个量虽然看着奇怪，但其出现却是十分自然，在后面我们会看到这一项不是别的，正是所谓“截面曲率”，它是二维情况中Gauss曲率的推广。

4 曲率与子流形几何初步

4.1 几种曲率

定义 4.1.1. 对任意$p\in M,u,v\in T_pM,u,v$不平行，定义$k(u,v):=R(u,v,v,u),sec(u,v):=\frac{k(u,v)}{\|u\Lambda v\|^2}=\frac{k(u,v)}{\|u\|^2\|v\|^2-<u,v>^2}$。其中$sec(u,v)$称为$\sigma:=span(u,v)$的截面曲率，也记作$sec(\sigma)$。

注 4.1.1. 此定义中暗含了给定σ后，截面曲率无关于u，v的选取，这个事情需要小作验证。于是乎若记$G_2(p)$为T_pM的所有二维子空间，sec将会是$Grassman$丛$G_2M:=\cup_{p\in M}G_2(p)$上的光滑函数。

注 4.1.2. sec可以完全决定曲率算子，并依$R(u,v,\omega,x)=\frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}|_{(0,0)}(k(u+sx,v+t\omega)-k(u+s\omega,v+tx))$决定。当$M$的所有截面曲率具有公共上界$A$时，也记为$sec(M)\le A$，上界、严格上界、严格下界的记号类似。

定义 4.1.2. 对$p\in M$,定义$Ricci$曲率张量为$Ric:T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$为$Ric(u,v)=tr[x\mapsto R(x,u)v]$。对$\xi\in U_pM,Ric(\xi):=Ric(\xi,\xi)$称为$p$处沿$\xi$方向的$Ricci$曲率。

在T_pM的一组标准正交基$\{e_i\}_{i=1}^n$下，$Ric(e_1)=\Sigma_{i=2}^n k(e_1,e_i),Ric(u,v)=\Sigma_{i=1}^n R(e_i,u,v,e_i)$。我们也约定Ricci曲率大于等于（或大于）某个数就是那一点处Ricci曲率张量的最小特征值大于等于（或大于）某个数；Ricci曲率小于等于（或小于）某个数就是那一点处Ricci曲率张量的最大特征值小于等于（或小于）某个数，也记为Ric$\le(\ge)$A这种形式。

定义 4.1.3. p处的数量曲率为$Scal(p)(=S(p)):=tr[Ric(-,-)]$。

在T_pM的一组标准正交基$\{e_i\}_{i=1}^n$下，显然有$S(p)=\Sigma_{i=1}^n Ric(e_i,e_i)=\Sigma_{i\neq j}sec(e_i,e_j)$。显而易见，依定义计算某个黎曼流形的曲率是非常困难的，我们需要引入一些工具来简化计算。

4.2 第二基本型与Gauss公式、Codazzi公式

定义 4.2.1. 一个黎曼子流形是指一个等距嵌入$\varphi:(M^n,g)\hookrightarrow(\bar{M}^N,\bar{g})$,法空间$V_pM$为$T_pM$在$T_p\bar{M}$中的正交补，其中元素称为法向量；$M$上的法丛$VM$: $=\cup_{p\in M}V_pM$。

对于$x\in T_p\bar{M}$,记$x=x^T+x^\perp$为其关于T_pM和V_pM的分解。

命题 4.2.1. 令$\bar{\nabla}$和∇分别为$(\bar{M},\bar{g})$和(M,g)上的*Levi-Civita*联络。对任意$p\in M,v\in T_pM,Y\in\Gamma(TM)$,有$\nabla_uY=(\bar{\nabla}_vY)^T$。

Proof. $D_uY:=\bar{\nabla}_uY-(\bar{\nabla}_uY)^\perp$,容易验证D保度量且无挠，这说明它是M上的Levi-Civita联络。下面均默认$M\hookrightarrow\bar{M}$是一个黎曼子流形且二者的Levi-Civita联络分别为$\nabla,\bar{\nabla}$,并且其上定义了法丛。 □

定义 4.2.2. 对称双线性映射$II:T_pM\times T_pM\to V_pM,(u,v)\mapsto(\bar{\nabla}_uY)^\perp$,其中$Y$是$v$在$\Gamma(TM)$中的任意延拓，此定义实际上不依赖于$Y$的选取，其被称为$M\hookrightarrow\bar{M}$的第二基本型。对任意$\xi\in V_pM,II_\xi(u,v):=<II(u,v),\xi>$有时也被称为第二基本型。

这里可以验证其对称性：将u，v分别延拓为X,Y∈ $\Gamma(TM)$,则$II(u,v)-II(v,u)=(\bar{\nabla}_XY-\bar{\nabla}_YX)^\perp=([X,Y])^\perp=0$。其双线性性和张量性的验证从略。

定义 4.2.3. 定义为$<S_\xi(u),v>:=II_\xi(u,v)$的自伴随线性算子$S_\xi$被称作形状算子。

事实上设$Y\in\Gamma(TM)$延拓了$u,\Xi\in\Gamma(VM)$延拓了ξ，由于$II_\xi(u,v)=<(\bar{\nabla}_uY)^\perp,\xi>=<\bar{\nabla}_uY,\Xi>|_p=u<Y,\Xi>-<Y,\bar{\nabla}_u\Xi>|_p=-<Y,(\bar{\nabla}_u\Xi)^T>|_p$，可得$S_\xi(u)=-(\bar{\nabla}_u\Xi)^T$。

注 4.2.1. 形状算子有时也被称作“*Weingarten*映射”。

定义 4.2.4. II_ξ或S_ξ的特征值称为$M\hookrightarrow\bar{M}$沿ξ的主曲率，所有特征值之和称为平均曲率，记为$m(\xi)$。

当$dim\bar{M}=dimM+1$时，ξ的选择在相差一个符号的意义下唯一，此时可以省略II_ξ或S_ξ的下标。下面我们介绍“Gauss公式”。

定理 4.2.1. 令$R, \bar{R}$分别是$M, \bar{M}$的曲率张量，$sec, s\bar{e}c$分别是二者的截面曲率，则对$p \in M, u, v, w \in T_pM$,有：（*1*）$R(u,v)\omega = (\bar{R}(u,v)\omega)^T - S_{II_{(u,\omega)}}v + S_{II_{(v,\omega)}}u$;（*2*）$R(u,v,\omega,x) = \bar{R}(u,v,\omega,x) + < II(u,x), II(v,\omega) > - < II(u,\omega), II(v,x) >$;（*3*）$sec(u,v) = s\bar{e}c(u,v) + \frac{<II(u,u),II(v,v)> - \|II(u,v)\|^2}{\|u\|^2\|v\|^2 - <u,v>^2}$。

Proof. 我们只证明（1），（2）（3）就都是简单的计算了。因为这些符号的定义都不依赖于延拓的选取，故以下计算中的联络的分量都默认已经选好延拓，延拓后的向量场仍用原本的字母表示。$(\bar{R}(u,v)\omega)^T = (\bar{\nabla}_u\bar{\nabla}_v\omega - \bar{\nabla}_v\bar{\nabla}_u\omega - \bar{\nabla}_{[u,v]}\omega)^T = (\bar{\nabla}_u(\nabla_v\omega + II(v,\omega)) - \bar{\nabla}_v(\nabla_u\omega + II(u,\omega)) - \nabla_{[u,v]}\omega - II([u,v]\omega))^T = (\nabla_u\nabla_v\omega + II(u,\nabla_v\omega) + \bar{\nabla}_u(II(v,\omega)) - \nabla_v\nabla_u\omega - II(v,\nabla_u\omega) - \bar{\nabla}_v(II(u,\omega)) - \nabla_{[u,v]}\omega - II([u,v]\omega))^T = R(u,v)\omega + S_{II(u,\omega)}v - S_{II(v,\omega)}u$ □

这给了我们大流形的几何推出小流形的几何的强有力手段，但我们想从小流形去推断大流形信息的话，还需要关注法方向的$(\bar{R}(u,v)\omega)^{\perp}$。对$\Xi \in \Gamma(VM), u \in T_pM$,我们可以把$\bar{\nabla}_u\Xi$分解为切方向和法方向，切方向上文中已归结到对形状算子S_ξ的研究，而对于法方向，我们也有类似的公式。

定义 4.2.5. 在法丛VM上定义的联络$\nabla^{\perp}$如下：$\nabla^{\perp}_x\Xi := (\bar{\nabla}_x\Xi)^{\perp}$。

定义的合理性易证得。下面我们来介绍“Codazzi公式”。

定理 4.2.2. $(\bar{R}(u,v)\omega)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_u II)(v,\omega) - (\nabla^{\perp}_v II)(u,\omega)$)。其中$(\nabla^{\perp}_u II)(v,\omega) := \nabla^{\perp}_u(II(v,\omega)) - II(\nabla_u v,\omega) - II(v,\nabla_u\omega)$，另一项含义类似。

这个证明是平凡的，将Gauss公式的证明稍作改动（^{T}换成$^{\perp}$）即可得到。

注 4.2.2. 这里其实是把$\nabla^{\perp}_u$的定义延拓到了张量丛上。