تمرین تئوری ۲.۲ هوش مصنوعی استاد رهبان

امیر حسین باقری ۹۸۱۰۵۶۲۱

سوالات جست و جو محلی

آ

رشته : دنباله ای از رئوس که در دور وجود دارند.مانند

$$\{a, b, c, d, e, f\}\ or\ \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 8, 9\}$$

تابع fitness :
تعداد راس های موجود (یعنی مجموع راس های موجود در مسیر چند عضویست)در مسیر همچنین برای هر راس تکراری عدد منفی یک به تابع افزوده می‌شود(بجز راس آخر که با راس اول مسیر یکی است).
مثال:

$$f(a, b, c, c, a) = 3 - 1 = 2$$
$$f(a, b, b, b, b, a) = 2 - 3 = -1$$
$$f(a, b, c, d, e, a) = 6$$

زمانی که به دور هدف رسیده باشیم. تابع فیتنس مقداری برابر تعداد رئوس دارد.(همچنین راس اول و آخرش یکی است که دربالا اشاره کردیم برای آن عدد منفی یک در نظر نمیگیریم.)
دقت کنید برای مقدار تابع فیتنس اگر مقدار منفی شد برای محاسبه مقدار احتمال برای قسمت بعدی الگوریتم می‌توان هر مقدار را برای محاسبه احتمال آن ابتدا با دوبرابر قدرمطلق کوچکترین مقدار فیتنس جمع کرد و سپس برای هر کدام احتمال را محاسبه نمود.

ب

selection :در اینجا سلکشن بدان معناست که آن مسیری که (می‌تواند دور باشد) به دور همیلتونی نزدیک تر است را انتخاب کنیم. (طبعا هر چه مقدار تابع فیتنس بیشتر باشد احتمال انتخاب آن بیشتر است و مقدار بیشتر تابع فیتنس به معنای نزدیک تر بودن جواب به دور همیلتونی است.)

cross over: بدان معناست که مسیر را به دو بخش تقسیم کنیم و یک بخش را از یک مسیر و بخش دیگر را از مسیر دیگر انتخاب کنیم. البته توجه کنید که در راس برش باید یال به بخش دوم مسیر وجود داشته باشد. کافیت برای اینکار یک راس مشترک در دو مسیر را به صورت رندم انتخاب کرده و از انجا مسیر را دوبخش کنیم و مسیر جدید را بسازیم.

mutation : برای اینکار کافیست یک راس را رندم در مسیر انتخاب کرده و آنرا با راسی که به دو راس مجاور قبل یال دارد(این راس هم به صورت رندم انتخاب میشود برای یافتن مجموعه رندم نیز کافیست رئوس مشترکی که به دو راس مجاور راس اولیه مذکور یال دارند را به صورت رندم یکی را انتخاب کنیم.)
در طی اینکار در واقع مسیر را در یک نقطه تغیر می‌دهیم و از یک راس دیگر عبور می‌دهیم.

سوالات جست و جوی درفضای پیوسته

آ

بنابر تعریف داریم.

$$\forall x,y \in R^n : f(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)) \longrightarrow$$
$$f(y+\alpha(x-y)) \leq f(y)+\alpha(f(x)-f(y)) \longrightarrow \frac{f(y+\alpha(x-y))-f(y)}{\alpha}+f(y) \leq f(x)$$
$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{f(y+\alpha(x-y))-f(y)}{\alpha}+f(y) = f(y)+\nabla f^T(y)(x-y) \longrightarrow$$
$$f(x) \geq f(y)+\nabla f^T(y)(x-y)\checkmark$$

کافیست جای x،y را عوض کنیم (دقت کنید که تغیری بوجود نمی‌آید چون هردو دلخواه هستند.)
سری تیلور را می‌نویسیم.(y^* عددی بین x ، y است.)

$$f(x) = f(y)+(x-y)^T\nabla f(y)+\frac{1}{2}(x-y^*)^T\nabla^2 f(y)(x-y^*)$$

حال نتیجه قسمت قبل را در این قسمت استفاده می‌کنیم.(دقت کنید که حاصل ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد. $(x-y)^T\nabla f(y) = \nabla f^T(y)(x-y)$)

$$f(x) = f(y)+(x-y)^T\nabla f(y)+\frac{1}{2}(x-y^*)^T\nabla^2 f(y)(x-y^*)$$
$$f(x) \geq f(y)+(x-y)^T\nabla f(y) \longrightarrow$$
$$\frac{1}{2}(x-y^*)^T\nabla^2 f(y)(x-y^*) \geq 0 \longrightarrow because\ x,y\ can\ be\ anything$$
$$\forall X \in R^n\ :\ X^T\nabla^2 f(y)X \geq 0 \longrightarrow$$
$$\nabla^2 f(y)\ is\ positive\ semi\ definite\checkmark$$

دقت کنید که عبارت بالا همان تعریف ماتریس مثبت نیمه معین است. بنابراین ماتریس هسین (∇^2) مثبت نیمه معین است.

ب

$$e^x - x$$

راه اول آن است که دوبار مشتق بگیریم که برابر : e^x است که واضحا همواره مثبت است بنابراین تابع محدب است. اما راه بهتر آن است که از تعریف تابع محدب استفاده کنیم.

$$e^x - x \longrightarrow e^{\alpha x+(1-\alpha)y} - (\alpha x+(1-\alpha)y) \leq \alpha(e^x-x)+(1-\alpha)(e^y-y)$$
$$e^{\alpha(x-y)]} \leq \alpha(e^{x-y}-1)+1$$

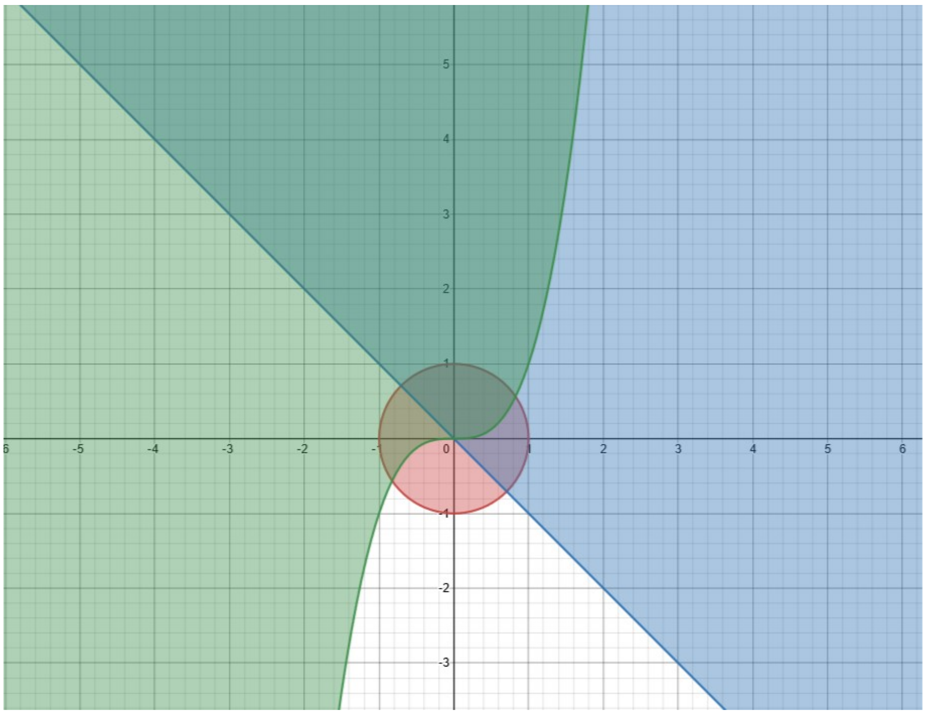
حال بسط تیلور را برای دو طرف می‌نویسیم:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}...$$
$$1+\alpha(x-y)+(\alpha(x-y))^2/2+... \leq \alpha(x-y)+\alpha(x-y)^2/2...+1$$

که نامساوی بالا صحیح است زیرا α بین یک و صفر است و توان های بالاتر مقدار آن کوچکتر می‌شود.

$$S = ((x,y)|(x^2+y^2) \leq 1, y \geq x^3, y \geq -x)$$

$(x^2 + y^2) \leq 1$ یک دایره است بنابراین واضحا محدب است.
ناحیه $y \geq -x$ بالای خط $y = -x$ است و واضحا محدب است. از آنجایی که در سمت منفی محور افقی مقادیر y مثبت اند بنابراین تنها بخش مثبت x در تابع $y \geq x^3$ مهم است از آنجا که مشتق دوم مثبت است پس محدب است. بنابراین اشتراک ۳ ناحیه محدب است.



ج

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0$$
$$6x + 6 \geq 0 \longrightarrow x \geq -1$$

بنابراین برای x های بزرگتر از -1 تابع محدب است.

د

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-e^{-x}(1+e^{-x})^2 + 2(1+e^{-x})e^{-x}}{(1+e^{-x})^4} \geq 0 \longrightarrow e^{-x}\left(\frac{1-e^{-x}}{(1+e^{-x})^3}\right) \geq 0$$
$$\longrightarrow 1 - e^{-x} \geq 0 \longrightarrow ln(1) \geq -x \longrightarrow x \leq 0 ✓$$