تمرین تئوری ۴.۱ هوش مصنوعی استاد رهبان

امیر حسین باقری ۹۸۱۰۵۶۲۱

۱

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

برای آنکه عبارت بالا را ثابت کنیم در نظر بگیرید.
یک شبکه بیز را با n متغیر تصادفی در نظر بگیرید که متغیر هارا به صورت زیر نام گذاری کرده ایم.

$$BN\ over\ \{X1, X2, ..., Xn\}$$

حال برای ساختن شبکه فرض کنید که هر متغیر تصادفی با اندیس i را به متغیر های تصادفی با اندیس بزرگتر از i متصل نموده ایم. بدان معنا که بین هر دو متغیر یک یال جهت دار با شرط زیر برقرار است.

$$\forall i < j\ :\ Xi \longrightarrow Xj$$

بنابراین تعداد یال ها به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\forall i < j\ :\ Xi \longrightarrow Xj$$
$$\forall n\ :\ \exists \binom{n}{2}_{i,j} \longrightarrow num = \tfrac{n(n-1)}{2}$$

یا به عبارتی متغیر اول به n-1 متغیر دوم به n-2 و ... متصل می‌شود.

$$n - 1 + ... + 1 = \tfrac{n(n-1)}{2}$$

حال باید ثابت کنیم که یال های بالا دور ندارند. دقت کنید که دور به صورت زیر می‌شود.

$$a \longrightarrow b \longrightarrow ... \longrightarrow c \longrightarrow a$$

که مطابق آنچه در ساختن بیز نت در بالا بیان کردیم بدین معناست که :

$$a- > b.....c- > a$$
$$a < b$$
$$b < ... < c$$
$$c < a$$

که تناقض است بنابراین دور نداریم.
حال ثابت می‌کنیم که نمی‌توان مثالی با یال های بیشتر از تعداد بالا ساخت :
فرض کنید که یک شبکه بیز نت با یال های بیشتر داده شده برای یک گراف جهت دار با تعداد یال های بیشتر از $\frac{n(n-1)}{2}$ حداقل یک زوج راس وجود دارد که بیش از یک یال بین آنها برقرار است بنابراین در هر دو جهت یال وجود دارد که باعث ایجاد دور می گردد.(دقت کنید که یا یالی وجود دارد که یک مبدا و مقصد آن یکی است که در بیز نت مجاز نیست.)

۲

الف

$P(B,E) = \sum_A P(B,E,A) = \sum_A P(B|parent(B))P(E|parent(E))P(A|parent(A))$
$P(B|parent(B)) = P(B)$
$P(E|parent(E)) = P(E)$
$P(B,E) = P(B)P(E)\sum_A P(A|parent(A))$
$\sum_A P(A|parent(A)) = 1$
$P(B,E) = P(B)P(E)\checkmark$

ب

مطابق قسمت قبل داریم :

$$P(B,E) = P(B)P(E) \longrightarrow B \perp E\checkmark$$

ج

کافیست ثابت کنیم :

$$P(B|M,A) = P(B|A)$$

داریم :

$$P(B|M,A) = \frac{P(B,M,A)}{P(M,A)} = \frac{P(A|parent(A))P(M|parent(M))P(B|parent(B))}{P(A)P(M|A)}$$

$$P(B|M,A) = \frac{P(B)P(A|B)P(M|A)}{P(A)P(M|A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$$

$$P(B)P(A|B) = P(A,B)$$

$$P(B|M,A) = \frac{P(A,B)}{P(A)} = P(B|A)\checkmark$$