سوال ۳

$C = X^T A X$

$B = X^T A$

$C = BX$

$\frac{\partial c}{\partial x_k} = \frac{\partial Bx}{\partial x_k}$

جمت اول ←

$$B_{1,a} = \sum_{k=1}^{n} X^T_{1,k} A_{ka} \Rightarrow B_{1,a} = \sum_{k=1}^{n} X_{k,1} A_{ka}$$

$$C = BX = \sum_{z=1}^{n} B_{1,z} X_{z,1}$$

تعاریف ضرب ماتریسی

$$C = \sum_{z=1}^{n} (B_{1,z} X_{z,1}) = \sum_{z=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{k,1} A_{kz} \right) x_{z,1}$$

$$C = \sum_{z} \sum_{k} A_{kz} x_k x_z$$

چون x یک بردار $n \times 1$ است ⇐ از نوشتن 1 اجتناب کنیم.

$$\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial x_f} = \sum_{z} \sum_{k} \frac{\partial A_{kz} x_k x_z}{\partial x_f} = \begin{cases} \sum_{z \neq f} A_{fz} x_z & k = f, z \neq f \\ \sum_{k \neq f} A_{kf} x_k & k \neq f, z = f \\ 2 A_{ff} x_f & k = f \quad z = f \end{cases}$$

$$= \sum_{z} A_{fz} x_z + \sum_{k} A_{kf} x_k = \sum_{w=1}^{n} (A_{fw} x_w + A_{wf} x_w)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x_{f,1}} = \sum_{w=1}^{n} x_w (A_{fw} + A_{wf}) = \sum_{w=1}^{n} (A + A^T)_{f,w} X_{w,1} =$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial c}{\partial x_n} \end{bmatrix} = (A + A^T) X$$

$2AX$ ⇐ اگر Symmetric

Denominator layout by $X \to (A+A^T)X \xrightarrow{A=A^T} 2AX$

اگر ماتریس حال داریم.

Numerator layout by $X^T \to X^T(A+A^T) \xrightarrow{A=A^T} 2X^T A$

Scanned by CamScanner

ادامه سوال ۳

بخش دوم

داریم:

$$f(X) = \text{trace}(X^TAX)$$

$$B = X^TA \longrightarrow B_{ij} = \sum_{k=1}^{n} X^T_{ik}A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} X_{ki}A_{kj}$$

$$C = X^TAX = BX \Rightarrow C_{ij} = \sum_{w=1}^{n} B_{iw}X_{wj}$$

$$C_{ij} = \sum_{w=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_{ki}A_{kw}\right)X_{wj} = \sum_{w=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} X_{ki}X_{wj}A_{kw}$$

$$f(X) = \text{trace}(C) = \sum_{p=1}^{n} C_{pp} = \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{w=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} X_{kp}X_{wp}A_{kw}\right)$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X_{ij}} = \frac{\partial f(X)}{\partial X_{ij}} = \sum_{p,w,k} \frac{\partial A_{kw}X_{kp}X_{wp}}{\partial X_{ij}} = \sum_{p,w,k} A_{kw}\frac{\partial X_{kp}X_{wp}}{\partial X_{ij}}$$

$$= \sum_{k,w} A_{kw}\sum_{p}\frac{\partial X_{kp}X_{wp}}{\partial X_{ij}} \longrightarrow \begin{cases} \sum_{w} A_{iw}X_{wj} & \leftarrow k=i,\ p=j,\ w\neq i \\ \sum_{k} A_{ki}X_{kj} & k\neq i,\ p=j,\ w=i \\ 2A_{ii}X_{ij} & k=i,\ p=j,\ w=i \\ 0 & p\neq j \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X_{ij}} = \sum_{w} A_{iw}X_{wj} + \sum_{k} A_{ki}X_{kj}$$

$$= \sum_{z=1}^{n} A_{iz}X_{zj} + A_{zi}X_{zj} = \sum_{z=1}^{n} X_{zj}(A_{zi} + A_{iz})$$

$$= \sum_{z=1}^{n}(A+A^T)_{iz}X_{zj} = \boxed{(A+A^T)X}$$

Denominator layout result $\xrightarrow{b\times x} (A+A^T)X$

Numerator layout $b\times x^T \rightarrow X^T(A+A^T)$

در فرض سوال با توجه به قسمت الف Numerator مدنظر است که همی شود تیک آبی.

ادامه سوال ۳

توضیحاتی درباره سوال :

دقت کنید که مطابق قرارداد $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial x^T}$ هر دو به صورت $\frac{\partial f}{\partial x}$ نوشته می‌شوند.

و دو عبارت Denominator و Numerator تعیین کننده جواب نهایی است.

در حل قسمت های الف و ب ما به عبارت Denominator [illegible] کافی است:

نشان دهیم که که $\left(\frac{\partial f}{\partial x^T}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \Longleftarrow$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^T}\right)_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x^T_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial x_{ji}}$$

همان طور که می‌بینید

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^T}\right)_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_{ji}} \longrightarrow$$

درایه‌ها را جابجا کرده‌ایم ~~[illegible]~~

که این عمل همان transpose کردن است.

$$\Longrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x^T}\right)_{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T_{ij} \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{Nmerator} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_{demonitator}}\right)^T$$

$\Longleftarrow$ در دو قسمت الف و ب هر دو حالت اثبات شده‌اند.