سوال 7

اگر بتوانیم برای $(I-A)$ یک ماتریس B بیابیم که

$$\begin{cases} B(I-A)=I \\ (I-A)B=I \end{cases}$$

باشد آنگاه B معکوس ماتریس $(I-A)$ است. $\Leftarrow$ با پیدا کردن inverse ماتریس $(I-A)$ $\leftarrow$ معکوس $I-A$ پذیر است.

مطابق با فرض مسأله $\leftarrow$

$$\begin{cases} A^{k}=0 \\ A^{k-1}\neq 0 \\ A^{k-2}\neq 0 \\ A^{k-3}\neq 0 \\ \vdots \\ A\neq 0 \end{cases}$$

حال ماتریس B را ماتریس زیر در نظر میگیریم:

$$B=(I+A+A^2+\dots+A^{k-1})$$

$$(I-A)B=(I-A)(I+A+A^2+\dots+A^{k-1})=I+\cancel{A}+\cancel{A^2}+\dots+\cancel{A^{k-1}}-\cancel{A}-\cancel{A^2}-\cancel{A^3}-\dots-\cancel{A^{k-1}}-\cancel{A^{k}}=I$$

$$\Longrightarrow (I-A)(I+A+A^2+\dots+A^{k-1})=I \checkmark \rightarrow *$$

$$B(I-A)=(I+A+A^2+\dots+A^{k-1})(I-A)=I+\cancel{A}+\cancel{A^2}+\dots+\cancel{A^{k-1}}-\cancel{A}-\cancel{A^2}\dots-\cancel{A^{k-1}}-\cancel{A^{k}}=I$$

$$\Longrightarrow (I+A+A^2+\dots+A^{k-1})(I-A)=I \checkmark \rightarrow **$$

$$*,\ ** \Longrightarrow B=\sum_{p=0}^{k-1} I A^{p}=(I-A)^{-1} \checkmark$$

بنابراین معکوس ماتریس $(I-A)$ برابر $(I+A+A^2+\dots+A^{k-1})$ می‌باشد.

و ماتریس $(I-A)$ وارون پذیر است.