تمرین یک ML

امیرحسین باقری 9810562

Q1

دو بخش اول را به کمک Characteristic Polynomial اثبات می‌کنیم.

داریم: $A\vec{v}=\lambda\vec{v} \to (A-\lambda I)\vec{v}=0 \xrightarrow{\vec{v}\neq 0} |A-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & a_{22}-\lambda & \\ \vdots & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \to P(\lambda)=0$$

از آنجا که بیشترین درجه عبارت بالا n است. (با استقرا اثبات می‌شود اما چون در کلاس تی ای گفته شده است به شرح آن نمی‌پردازیم.)

$$P(\lambda)=Poly_n(\lambda)=(-1)^n[\underbrace{\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\dots+c_n}_{\phi(\lambda)}] \Leftarrow$$

$$P(\lambda)=(-1)^n\phi(\lambda)$$

بنابراین داریم:

از طرفی می‌دانیم که $\det(A-\lambda I)=0$ به ازای مقادیر ویژه $\lambda_1 \dots \lambda_n$ جواب دارد.

بنابراین $\forall i: \lambda_i\in\Lambda \to \phi(\lambda_i)=0$ بنابراین می‌توان $\phi(\lambda)$ را به صورت زیر نوشت.

$$\phi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\dots(\lambda-\lambda_n)$$

$$P(\lambda)=(-1)^n[\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\dots+c_n]=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)$$

حال کافیست ضریب c_n را بدست آوریم چون درجه آن صفر است. حاصل ضرب مقادیر $(-\lambda_i)$ است. $\Leftarrow$

$$P(0)=(-1)^n c_n=(-1)^n(0-\lambda_1)(0-\lambda_2)\dots(0-\lambda_n)$$

$$P(0)=|A-0|=|A|=\cancel{(-1)^n}(-1)^n(\lambda_1\dots\lambda_n) \Rightarrow |A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

$$\det(A)=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$$

حال داریم $P(\lambda) = (-1)^n (\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_n)$

$$\Longrightarrow P(\lambda) = (-1)^n \Big[\lambda^n + (-1)^1 \lambda^{n-1}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + (-1)^2\lambda^{n-2}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j + \dots$$

$$+ (-1)^k \lambda^{n-k}\underbrace{\sum\sum\sum}_{k} \lambda_i\dots\lambda_k + \dots \quad \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\Big]$$

حال کافی است بتوانیم ضریب λ^{n-1} را بیابیم. ← داریم:

$$|A-I\lambda| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22}-\lambda & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

برای محاسبه بالا داریم: مشکی × det(sub مشکی) ± others

بخش others حداکثر چند جمله ای با درجه λ^{n-2} تولید می‌کنند زیرا هر سطر و ستون حذف شده یک λ را حذف می‌کند ⟸ داریم:

$? \lambda^{n-1} \rightarrow = ? \lambda^{n-1}$ in (درایه مشکی) × |مستطیل مشکی|

$\Longrightarrow$ ضریب λ^{n-1} برابر ضریب λ^{n-1} در عبارت زیر است:

$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda)$

(دقت کنید که از طریق استقرا گزاره بالا ثابت می‌شود. [اما چون از حجم کار خارج است و معادله مشخصه حالتش سر کلاس TA گفته شده است به آن نمی‌پردازیم).

ادامه Q_1

$C\lambda^{n-1} \rightarrow$

بنابراین

$$(a_{11}-\lambda)\ \cdots\ (a_{nn}-\lambda) = (-1)^n (\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-1)^n \times \sum_{i=1}^{n}(-a_{ii})}_{\text{ضریب } \lambda^{n-1}} \lambda^{n-1}$$

$$\cancel{(-1)^n \times (-1)} \times \sum \lambda_i = \cancel{(-1)^n \times (-1)} \times \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \Leftarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \Rightarrow \boxed{Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

قسمت اول

تا بدین جا قسمت اول اثبات شده اند.

قسمت سوم

می خواهیم ثابت کنیم که

$$\lambda \in \Lambda_{AB} \Leftrightarrow \lambda \in \Lambda_{BA}$$

اگر داشته باشیم:

$$(AB)\vec{v} = \lambda\vec{v} \xrightarrow{\vec{v}\neq 0} \lambda \in \Lambda_{AB}$$

$$A(\underbrace{B\vec{v}}_{w}) = \lambda\vec{v} \xRightarrow{w=B\vec{v}} Aw = \lambda\vec{v} \xRightarrow{\times B}$$

$$BAw = B\lambda\vec{v} = \lambda B\vec{v} \Rightarrow$$

$$(BA)w = \lambda(B\vec{v}) \Rightarrow (BA)\vec{w} = \lambda\vec{w}$$

$$\Rightarrow \lambda \in \Lambda_{BA}$$

به روش مشابه اثبات می شود اگر $\lambda \in \Lambda_{BA}$ آنگاه $\lambda \in \Lambda_{AB}$

$$\lambda \in \Lambda_{AB} \Leftrightarrow \lambda \in \Lambda_{BA} \Leftarrow$$

قسمت 4

$$\lambda \in \Lambda_A \rightarrow |A-\lambda I| = 0 \Rightarrow |(A-\lambda I)| = 0$$

داریم:

کافی است ثابت کنیم $|(A^T-\lambda I)| = 0$:

$$|(A-\lambda I)^T| = 0 \Rightarrow |(\lambda I - A^T)| = 0 \Rightarrow$$

$$(-1)^n |A^T - \lambda I| = 0 \Rightarrow |A^T - \lambda I| = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda \in \Lambda_{A^T}}$$

بنابراین داریم $\lambda \in \Lambda_A \rightarrow \lambda \in \Lambda_{A^T}$

به طریق مشابه اثبات می‌شود $\lambda \in \Lambda_{A^T} \rightarrow \lambda \in \Lambda_A$

$$\Leftarrow \quad \boxed{\lambda \in \Lambda_A \Longleftrightarrow \lambda \in \Lambda_{A^T}}$$

دقت کنید در طی حل از خواص دترمینال $\det(A)=\det(A^T)$ استفاده کرده‌ایم.