سوال 6

قسمت اول

ماتریس A را در نظر بگیرید

مطابق فرض ← $A^T=A$

تجزیه LU ماتریس A را در نظر بگیرید ←

$A=LU \quad A^T=U^TL^T$

$A=A^T \Rightarrow LU=U^TL^T$

* دقت کنید ماتریس A باید تجزیه LU داشته باشد زیرا در غیر این صورت تجزیه خواسته شده در صورت سوال اگر وجود داشته باشد ← $A=LL^T$ ← $L^T=U$ ← $A=LU$ ← اگر ماتریس تجزیه LU نداشته باشد بنابراین تجزیه LL^T نیز ندارد، زیرا اگر تجزیه LL^T وجود داشته باشد $U=L^T$ همان تجزیه LU است.

حال با فرض اینکه ماتریس A تجزیه LU دارد.

$A=LU$

↓

lower triangular.

حال باید ثابت کنیم که
1- $U=L^T$
2- every diagonal in L is positive

$A=LU$

$A^T=A=U^TL^T$

ابتدا ثابت می‌کنیم که ← $U=L^T$

اگر ماتریس A تجزیه دیگری جز LU داشته باشد

$A=LU=\tilde{L}\tilde{U} \Rightarrow \tilde{L}^{-1}L=\tilde{U}U^{-1} \rightarrow ①$

عبارت ① تنها می‌تواند I باشد زیرا سمت راست یک ماتریس بالامثلثی و سمت چپ یک ماتریس پایین مثلثی است ←

$\tilde{U}U^{-1}=I \Rightarrow U=\tilde{U}, \quad \tilde{L}^{-1}L=I \Rightarrow \tilde{L}=L$

بنابراین ← $LU=U^TL^T \Rightarrow L^T=U, \; U^T=L$

ماتریس متقارن A دارای تجزیه $A=LL^T$ است. *

$A=LU$, $L=U^T$ $\Rightarrow A=LL^T$

حال باید ثابت کنیم که درایه‌های روی قطر L مثبت است.

$\forall a \;\; a\in diag(L) : a>0 \; ?$ →

می‌دانیم که می‌توان تجزیه LL^T را به صورت $L'DL'^T$ نوشت.

به صورتی که درایه‌های قطری L' برابر یک هستند ⇐ $A=L'DL'^T \Rightarrow$

بر اساس inertia theorm of Sylvester ⇐ $A=L'DL'^T \Leftrightarrow$ A and D hase same number of positive negetive or zero eigvalues.

قسمت اول سوال 6

ادامه:

تا بدین جا می دانیم که $A = LL^T$ صحیح می توان A را به صورت $L'DL'^T$ نوشت

به طوری که $diag(L') = 1 \Rightarrow$ A and D same sign eigvalues

علامت مقادیر ویژه A و D یکسان است. $\Rightarrow$ تمام مقادیر ویژه D مثبت اند.

از طرفی D قطری است. $\Rightarrow$ $\Lambda_D = D$

$\Longrightarrow$ All diag(D) are Positive

$$x > 0 \rightarrow \sqrt{x} > 0 \checkmark \rightarrow D > 0 \Rightarrow D^{1/2} > 0$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} L &= L' D^{1/2} \\ L^T &= (D^{1/2})^T L'^T = D^{1/2} L'^T \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A = LL^T$$

$(D^{1/2})^T$: قطری

که درایه‌های قطر آن $D^{1/2}$ است که همگی مثبت اند.

$\Leftarrow$ A تجزیه LL^T دارد که درایه‌های قطر آن (L) مثبت اند.

دقت کنید که ماتریس متقارن A مقادیر ویژه real دارد.

ادامه سوال b

قسمت دوم :

$R = U'\Sigma' V'^{*}$

$$A = U \Sigma V^{*} \longrightarrow \begin{cases} AA^{*} = U\Sigma \underbrace{V^{*} V}_{I} \Sigma^{*} U^{*} = UU^{*} \\ A^{*}A = V\Sigma^{*} \underbrace{U^{*} U}_{I} \Sigma V^{*} = VV^{*} \end{cases}$$

$$A = QR \Rightarrow \begin{cases} AA^{*} = QRR^{*}Q^{*} \\ A^{*}A = R^{*}Q^{*}QR = R^{*}R \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} A^{*}A &= R^{*}R \\ A^{*}A &= VV^{*} \end{aligned}\right\} \Rightarrow R^{*}R = VV^{*} \longrightarrow$$

$$R^{*}R = V'\Sigma'^{*} \underbrace{U'^{*} U'}_{I} \Sigma' V'^{*} = V'V'^{*}$$

$$\Rightarrow VV^{*} = V'V'^{*} \Longrightarrow \boxed{V' = V}$$

ماتریس V' در تجزیه svd $R = U'\Sigma' V'^{*}$ با تجزیه A یکی است.

$$\text{singular values}(A^{*}A) = \cancel{\text{singular}}\ \Sigma = \text{singular values}(VV^{*})$$

$$\text{singular values}(R^{*}R) = \Sigma' = \text{singular values}(VV^{*})$$

$$\Rightarrow \Sigma = \Sigma'$$

⇐ singular values در تجزیه svd ماتریس R با تجزیه svd ماتریس A یکی است.

$\boxed{\Sigma = \Sigma'}$

شباهت های تجزیه R و A ←

Same singular values $\boxed{\Sigma = \Sigma'}$

Same V → $\boxed{V = V'}$

ادامه سوال b

ادامه قسمت دوم ←

تا بدین جا دیدیم که

$$R = U' \Sigma V^*$$
$$A = U \Sigma V^* \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{l} V' = V \\ \Sigma' = \Sigma \end{array}$$

حال داریم

$$AA^* = Q RR^* Q^* \Longrightarrow AA^* = Q U' U'^* Q^* \quad (\mathrm{I})$$

$$RR^* = U' \Sigma \underbrace{V^* V}_{I} \Sigma^* U'^* = U' U'^*$$

$$(\mathrm{I}) \rightarrow \left.\begin{array}{l} (AA^*) = (QU')(QU')^* \\ (AA^*) = UU^* \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{U = QU'}$$

حال پس U در تجزیه A برابر QU' تجزیه R است.

تشابه‌ها ← $\Leftarrow$

$$\left.\begin{array}{l} V_A = V_R \\ \Sigma_A = \Sigma_R \end{array}\right\}$$

تفاوت → $U_A = QU_R \Rightarrow U_R = Q^* U_A$

$$\Leftarrow \left\{\begin{array}{l} A = U \Sigma V^* \\ R = (Q^* U) \Sigma V^* \end{array}\right.$$