iTSL تمرین اول

Subject: 98105621 امیرحسین باقری Date:

سوال سوم :

الف) با استفاده از استقرا ثابت می‌کنیم

پایه استقرا:

$Z = X+Y \quad x \sim exp(\lambda)\ ,\ y \sim exp(\lambda)$

$f_z = f_x * f_y \Rightarrow f_z(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda t}\lambda e^{-\lambda(z-t)} dt = \lambda^2 e^{-\lambda z}\int_0^z 1\, dt = z\lambda^2 e^{-\lambda z}$

$f_2(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \xrightarrow{n=2} \frac{\lambda^2 x e^{-\lambda x}}{1} \Rightarrow f_z = f_2$ ✓

برای پایه استقرا ثابت شده

فرض: برای n صادق باشد.

$f_n(x) = f_n(\sum_{i=1}^n x_i = x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$

حکم: برای n+1 نیز باید صادق باشد ⇐

$f_{n+1}(x) = f_{n+1}(\underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{y} + x_{n+1} = x) = f(y + x_{n+1} = x)$

$\Rightarrow f_{n+1}(x) = f_y * f_{x_{n+1}} \rightarrow f_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda(x-t)} dt$

$f_{n+1}(x) = \lambda^{n+1} e^{-\lambda x}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt = \lambda^{n+1} e^{-\lambda x}\frac{t^n}{n!}\Big|_0^x = \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda x} x^n}{n!}$

$f_{n+1}(x) = \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda x} x^n}{n!}$ ⇐

که با فرض استقرا همخوانی داره ■

ب) مطابق قسمت الف و فرض گفته شده داریم :

$\sum x_i = Z \sim erlang(\lambda, n)$

$\Rightarrow f_z(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$

$\forall \varepsilon > 0\ \ \mathbb{P}[\sum x_i \geq n\varepsilon] = \mathbb{P}[Z \geq n\varepsilon] = \int_{n\varepsilon}^{+\infty} \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$

$\int_{n\varepsilon}^{\infty} \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}\ (\lambda=1) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{n\varepsilon}^{\infty} x^{n-1} e^{-x} = \beta[-e^{-x} x^{n-1}]_{n\varepsilon}^{\infty} + \int_{n\varepsilon}^{\infty} e^{-x}(n-1)x^{n-2}$

اینرا β بنامید

از جزء به جزء استفاده می‌کنیم :

Subject: Date:

بنابراین به عبارت زیر رسیدیم.

$$P = P[Z > n\varepsilon] = \frac{1}{(n-1)!}\left[-e^{-x}x^{n-1}\Big|_{n\varepsilon}^{\infty} + \int_{n\varepsilon}^{\infty} e^{-x}(n-1)x^{n-2}\right]$$

مانند قبل جزء به جزء می‌زنیم.

$$P = \frac{1}{(n-1)!}\left(0 + e^{-n\varepsilon}(n\varepsilon)^{n-1} + (n-1)\int_{n\varepsilon}^{\infty} e^{-x}x^{n-2}\right)$$

ادامه می‌دهیم.

$$P = \frac{e^{-n\varepsilon}(n\varepsilon)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{-n\varepsilon}(n\varepsilon)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{(n-2)}{(n-2)!}\int_{n\varepsilon}^{\infty} e^{-x}x^{n-3}$$

همانطور که از روند بالا قابل مشاهده است. حاصل عبارت با ادامه‌ی توان‌ها به صورت زیر است.

(دقت کنید که با استقرای توان ثابت می‌شود اما از آنجا که مشخص است اثبات نمی‌کنیم.)

چون $n > j$ است $\Leftarrow$ $\varepsilon^{j} < \varepsilon^{n}$, $j < n$

$$\Rightarrow P[Z > n\varepsilon] = e^{-n\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{(n\varepsilon)^{n-i}}{(n-i)!} = e^{-n\varepsilon}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n\varepsilon)^{j}}{j!}$$

$$\Rightarrow P[Z > n\varepsilon] = e^{-n\varepsilon}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n\varepsilon)^{j}}{j!} \xrightarrow{\varepsilon > 1} e^{-n\varepsilon}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n\varepsilon)^{j}}{j!} \le e^{-n\varepsilon}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n^{j}\varepsilon^{n}}{j!}$$

$$\Rightarrow P[Z > n\varepsilon] \le e^{-n\varepsilon}\varepsilon^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n^{j}}{j!} \Rightarrow P[Z > n\varepsilon] \le e^{-n\varepsilon}\varepsilon^{n}e^{n}$$

$\varepsilon^{n} = e^{(\log\varepsilon)n}$

$e^{n} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{n^{i}}{i!}$ بسط تیلور $\leftarrow \le e^{n}$

و اکنون برخی جملات را انداختیم.

$$\Rightarrow P[Z > n\varepsilon] \le \exp(-n(\varepsilon - \log\varepsilon - 1)) \quad \blacksquare$$

اثبات تمام است.

ادامه ب | با نامساوی چرنوف بیشتر میتوان حل کرد. n

$\forall \varepsilon > 1 \quad \overbrace{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \geq n\varepsilon\right]}^{P} \rightsquigarrow P\left[e^{\theta \sum_{i=1}^{n} X_i} \geq e^{\theta n \varepsilon}\right] \Rightarrow$

$P \leq \inf_{\theta > 0} \left\{ \frac{E[e^{\theta \sum X_i}]}{e^{\theta n \varepsilon}} \right\} = \inf_{\theta > 0} \left\{ e^{-n\varepsilon\theta} \underbrace{E[e^{\theta X}]^{n}}_{} \right\} \Rightarrow$

exp moment generator function. $\leftarrow \frac{\lambda}{\lambda - \theta} = \frac{1}{1-\theta}$

$\theta = \sup_{\theta > 0} \{ \varepsilon\theta + \log(1-\theta) \} \xrightarrow{\text{مشتق}} \varepsilon + \frac{-1}{1-\theta} = 0 \Rightarrow 1-\theta = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \theta = 1 - \frac{1}{\varepsilon}$

$\rightsquigarrow P \leq e^{-n(\sup_{\theta > 0} \varepsilon\theta + \log(1-\theta))} \underset{\theta = 1-\frac{1}{\varepsilon}}{=} e^{-n(\varepsilon(1-\frac{1}{\varepsilon}) + \log\frac{1}{\varepsilon})} = e^{-n(\varepsilon - 1 - \log\varepsilon)}$

$\Rightarrow P\left[\sum X_i \geq n\varepsilon\right] \leq \exp\{-n(\varepsilon - \log\varepsilon - 1)\}$ ■

2.

$P\left[\sum X_i \leq n\varepsilon\right] \rightsquigarrow \forall_{\theta > 0} \; P\left[-\theta \sum X_i \geq -\theta n \varepsilon\right]$

$\underbrace{P\left[e^{-\theta \sum X_i} \geq e^{-\theta n \varepsilon}\right]}_{P} \xrightarrow{\text{markov}} P \leq \inf_{\theta > 0} \left\{ e^{\theta n \varepsilon} E[e^{-\theta X_i}] \right\}$

$P \leq \inf_{\theta > 0} \left\{ e^{n\theta\varepsilon} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{n} \right\} \leq e^{-n \sup_{\theta > 0} \{-\theta\varepsilon + \log(1+\theta)\}} \Rightarrow$

$\sup\{-\theta\varepsilon + \log(1+\theta)\} \rightsquigarrow -\varepsilon + \frac{1}{1+\theta} \Rightarrow 1+\theta = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \theta = \frac{1}{\varepsilon} - 1$

ct:-- Date:--

$\theta = \frac{1}{\varepsilon} - 1$

$P[\sum x_i \leq n\varepsilon] \leq \exp(-n(-\varepsilon(\frac{1}{\varepsilon} - 1) + \log\frac{1}{\varepsilon})) \Longrightarrow$

$P[\sum x_i \leq n\varepsilon] \leq \exp(-n(\varepsilon - 1 - \log\varepsilon))$ ✓

Scanned by CamScanner