Subject:------------------------------------

سوال ۵

در بخش 14.4 کتاب نرخ بهینه حقیقی که در اینجا ثابت می‌کنیم آن نرخ بهینه است .

1) $t = \frac{\pi_1}{\pi_0}$

$$P_{error} = \sum \pi_0 p(n)\, \overbrace{Z(1|n)}^{(1-Z(0|n))} + \sum \pi_1 f(n)\, Z(0|n) = \pi_0 + \sum \left(\pi_1 f(n) - \pi_0 p(n)\right) Z(0|n)$$

$$= \pi_0 + \sum \underbrace{\left(\pi_1 f(n) - \pi_0 p(n)\right) Z(0|n)}_{\text{minimize this}} \quad Z(0|n) = \begin{cases} 1 & \pi_1 f(n) - \pi_0 p(n) \leq 0 \\ 0 & \pi_1 f(n) - \pi_0 p(n) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_1 f(n) - \pi_0 p(n) \leq 0 \Rightarrow \boxed{\frac{p(n)}{f(n)} \geq \frac{\pi_1}{\pi_0}} \Rightarrow \boxed{t = \frac{\pi_1}{\pi_0}}$$

برای حالت پیوسته مشابه بالا است . (دقت کنید P_{error} به ازای هر t حقیقی است ⇐ لازم نیست نگران حقیقی بودن باشیم) .

2)

$$C = \alpha^* - t\beta^* = \max(\alpha - t\beta)$$

$$\beta = \alpha^2 \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = 2\alpha$$

$$\alpha - \frac{\pi_1}{\pi_0}\beta = C \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial \alpha} = 1 - \frac{\pi_1}{\pi_0}\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow 1 - 2\alpha\frac{\pi_1}{\pi_0} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi_0}{2\pi_1}}$$

$$\beta = \alpha^2 = \left(\frac{\pi_0}{2\pi_1}\right)^2$$

3)

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow 0 < \frac{\pi_0}{2\pi_1} < 1 \Rightarrow \pi_0 \leq 2\pi_1$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \pi_0 \leq 2(1-\pi_0) \Rightarrow \\ 2\pi_1 \geq 1 - \pi_1 \Rightarrow \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} \pi_0 \leq \frac{2}{3} \\ \pi_1 \geq \frac{1}{3} \end{matrix}} \quad s.t \quad \boxed{\pi_0 + \pi_1 = 1}$$

Scanned by CamScanner