

خطای این کلاس برای اثبات نامساوی Pinsker

$$TV(P, Q) = \frac{1}{2} \sum |P(n) - Q(n)| = \sum_{P(n) > Q(n)} (P(n) - Q(n)) = \sup_{\mathcal{E}} P(\mathcal{E}) - Q(\mathcal{E})$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \{e \mid P(e) \geq Q(e)\}$$

$$\Rightarrow TV(P, Q) = P(\mathcal{E}) - Q(\mathcal{E})$$

data processing

$$D(P \parallel Q) \geq D(\text{Bern}(P(\mathcal{E})), \text{Bern}(Q(\mathcal{E})))$$

$$D(\text{Bern}(P(\mathcal{E})), \text{Bern}(Q(\mathcal{E}))) = P(\mathcal{E}) \log \frac{P(\mathcal{E})}{Q(\mathcal{E})} + (1 - P(\mathcal{E})) \log \frac{1 - P(\mathcal{E})}{1 - Q(\mathcal{E})} \quad \begin{matrix} P(\mathcal{E}) = a \\ Q(\mathcal{E}) = b \end{matrix}$$

$$= a \log \frac{a}{b} + (1-a) \log \frac{1-a}{1-b} = a \log a - a \log b + (1-a) \log(1-a) - (1-a) \log(1-b) \quad (1)$$

$$f(n) = P \log n + (1-P) \log(1-n) \quad \hookrightarrow a \log a + (1-a) \log(1-a) - (b \log b + (1-b) \log(1-b)) \quad (1)$$

$$\Rightarrow (1) = f(a) - f(b) = \int_a^b f'(n) dn = \int_a^b \frac{a-n}{(1-n)n} dn \geq 4 \int_a^b (P-n) dn = 2(a-b)^2$$

$$f' = \frac{a-n}{n(1-n)}$$

$$\Rightarrow D(P \parallel Q) = D(\text{Bern}(P(\mathcal{E})), \text{Bern}(Q(\mathcal{E}))) \geq 2(P(\mathcal{E}) - Q(\mathcal{E}))^2 = 2(TV)^2$$

$$\Rightarrow D(P \parallel Q) \geq 2(TV)^2$$

برای اثبات سوال 3 از این به بالا در کلاس مطرح شد استاد می گفت و بی را با یکدیگر ترکیب کنید

$$D(P||Q) \geq f(n)$$

$$f(n) = x \log \frac{n}{x+TV} + (1-x) \log \frac{1-x}{1-x-TV}$$

$$E: \{e: P(e) \leq 4(e)\}$$

$$q(n) - p(n) = TV \Rightarrow q(n) = \lambda + TV$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) \geq f(x_0) - f'(x_0)x.$$

wu. ~~the~~ كذا، ~~الذي~~

1.  $7 \times 7$

5.2.2

$$\frac{u}{u+TV} > 0 \Rightarrow TV > 0$$

$$\frac{1-n}{1-n-TV} \gamma_0 \Rightarrow 1-n-TV \gamma_0 \Rightarrow n \leq 1-TV$$

$$0.5 \leq 1 - \alpha$$

where  $f'(m) \geq 0$ .

$$f'(n) = \log \frac{n}{n+TV} + (n+TV) \times \frac{TV}{(n+TV)^2} + \log \frac{1-n-TV}{1-n} + \frac{1-x}{1-x-TV} \times \frac{TV}{(1-n-TV)^2}$$

$$= \log \frac{n}{n+TV} + \cancel{TV} \left( \frac{1}{n+TV} + \frac{1}{1-n-TV} \right) + \log \frac{1-n-TV}{1-n} = \log \frac{n}{n+TV} + \log \frac{1-n-TV}{1-n} + TV \times \frac{1}{(n+TV)(1-n-TV)}$$

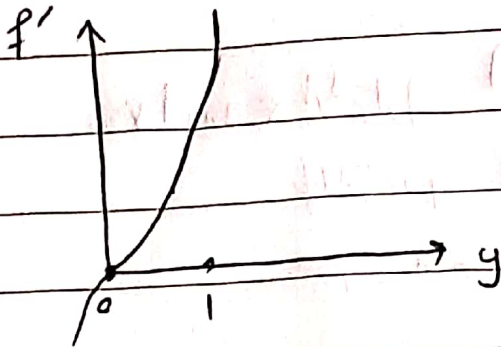
$$f'(\frac{a+b}{2}) = f'(\frac{1-TV}{2}) = 2 \cdot \frac{1-TV}{1+TV} + \frac{4TV}{1-TV^2}$$

$$p = 1 - TV$$

$$f' \left( \frac{1-TV}{2} \right) \rightarrow 2 \cdot \frac{1-y}{1+y} + \frac{4y}{1-y^2}$$

نکته

فردی



نکته

$$\Rightarrow f' \left( \frac{1-TV}{2} \right) > 0$$

$$0 \leq TV \leq 1$$

 $\Rightarrow$  apply inequality

$$f''(TV) = \frac{1-TV}{2} \cdot \frac{1-TV}{1+TV} + \frac{1+TV}{2} \cdot \frac{1+TV}{1-TV} = \left( \frac{1-TV}{2} - \frac{1+TV}{2} \right) \cdot \frac{1-TV}{1+TV}$$

$$+ TV \cdot \frac{1+TV}{1-TV} + \frac{-1+TV}{2} \times \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{1+TV}{1-TV} + \frac{4TV}{1-TV^2} \right) = \frac{1+TV}{1-TV} + \frac{(TV-1)}{2} \times \frac{4TV}{(1-TV)(1+TV)}$$

$$= \frac{1+TV}{1-TV} - \frac{2TV}{1+TV} \Rightarrow D(P||Q) \geq \frac{1+TV}{1-TV} - \frac{2TV}{1+TV} \quad \text{①}$$

$$\frac{1+TV}{1-TV} - \frac{2TV}{1+TV} \rightarrow 0 \Rightarrow TV = 0 \quad \text{و } D \rightarrow 0 \quad \text{آنها}$$

$$D(P||Q) \geq 2TV^2 \quad 0 \leq TV \leq 1$$

در حالتی که  $n \rightarrow \infty$  بالایی

$$D(P||Q) \geq 2$$

در حالتی که  $n \rightarrow \infty$  بالایی  $TV \rightarrow 1$  می شود یعنی بهترین تخمین است که  $D(P||Q)$  می تواند باشد

که به سه مورد به این تخمین حساب می شود

از آنجا که  $n$  نامتناهی بالا (I) هنگامی که  $TV$  برود  $\frac{1+TV}{1-TV} \rightarrow \infty$  هنگامبا  $D(P||Q) \geq n$  که با هم سازگار نیست (واقعاً) می شود



این را بهادر بخودها می توانست مشاهده کند.

تابع  $\text{analysis} \leftarrow \text{Bern}(p)$   $\text{Bern}(p)$   $\leftarrow$  پراستراول  
 $\text{Bern}(q)$   $\leftarrow$  پراستردوم  
 $\text{New-bound} \leftarrow$  آبی  
 $\text{DKL} \leftarrow$  پراستردوم  
 $\text{Pinskov} \leftarrow$  پراستردوم  
 $\text{Fin} \leftarrow n$   $\leftarrow$  پراستردوم

فاصله  $P_4$  در  $P_{n-1}$  زیاد است. از همان استرا  $\text{TV}$  نزدیک است و دیگر بالایی بود اما ناساوی  $\text{قبل}$

و  $KL$  زیاد می شوند. بخود را می بالا رفت است در حالی که پراستردوم است

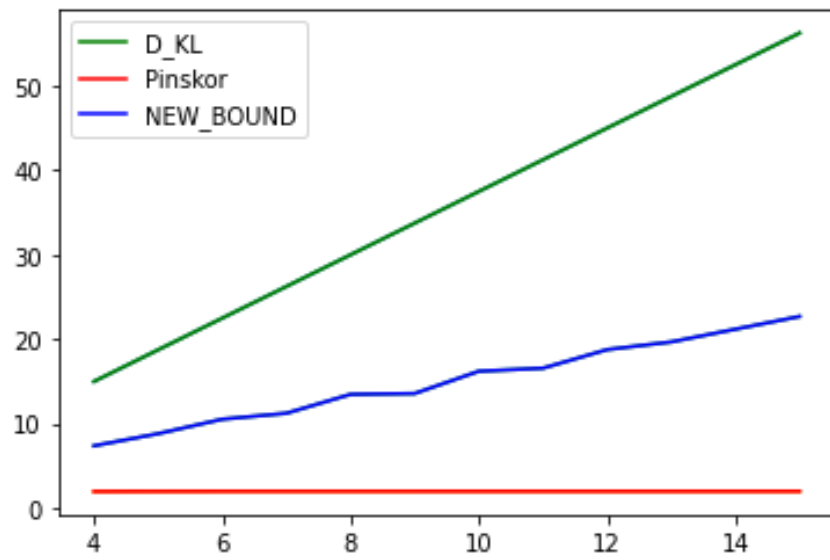
در بخود را در  $P_4$  کمتر است. اما جمله قبلی همچنان صادق است.

در بخود را  $P_4$   $P = 1/6$  حرکت بخودها مشاهده می کنید که ناساوی قبلی بین  $\text{Pinskov}$  و  $\text{DKL}$  است.  
 $q = 0.14$

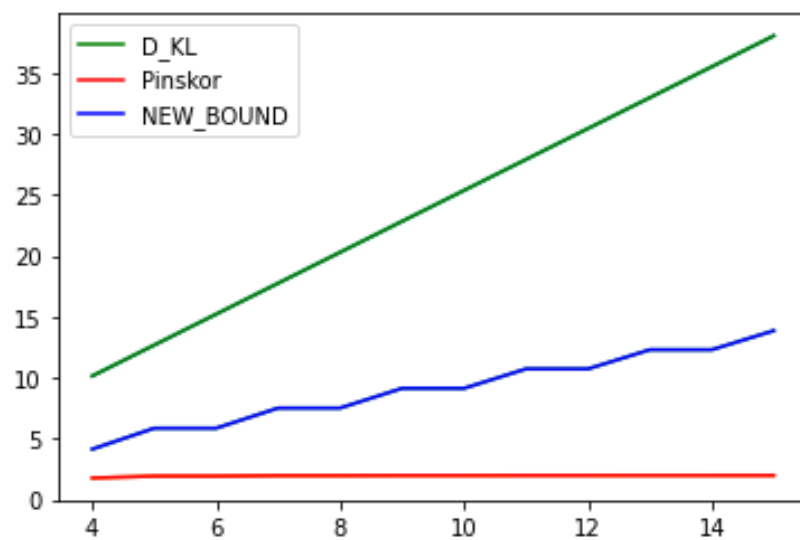
در شکل آخر بخود را  $P_4$  خط آبی را نگاه بالا تر رفته که با بر روی مشاهده می کرد که به دلیل کوچک بودن مقدار در اینجا  $\text{DKL}$

از می دهی.

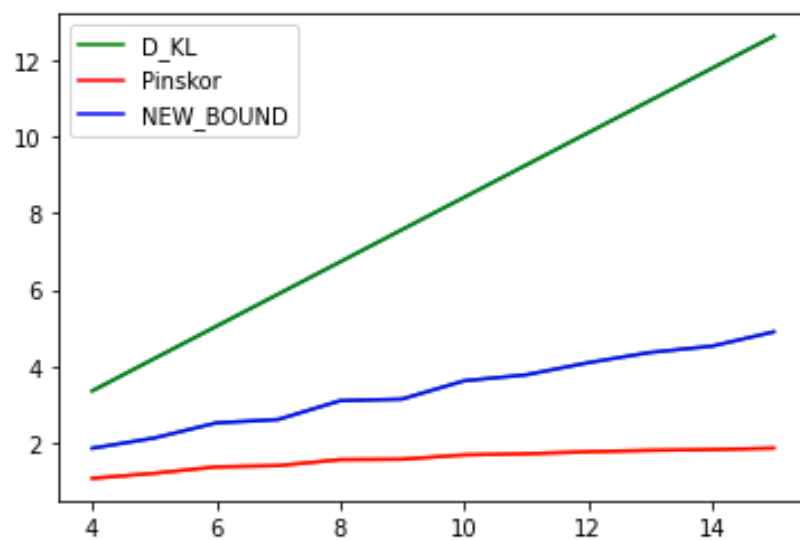
```
analysis(0.03,0.94,16)
```



```
analysis(0.1,0.9,16)
```

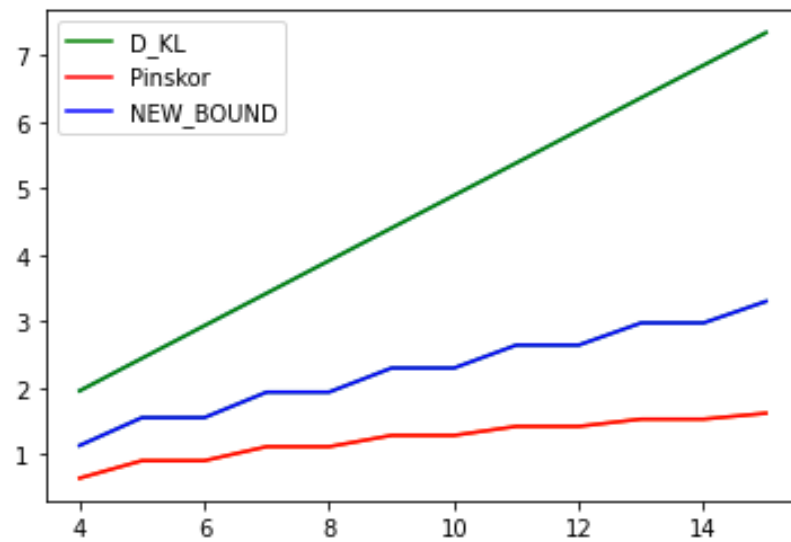


```
analysis(0.3,0.8,16)
```



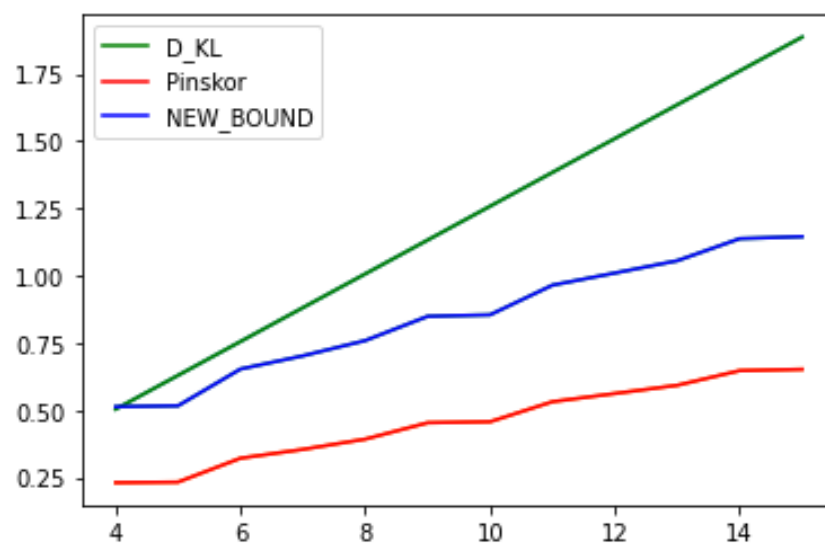
:

```
analysis(0.3,0.7,16)
```

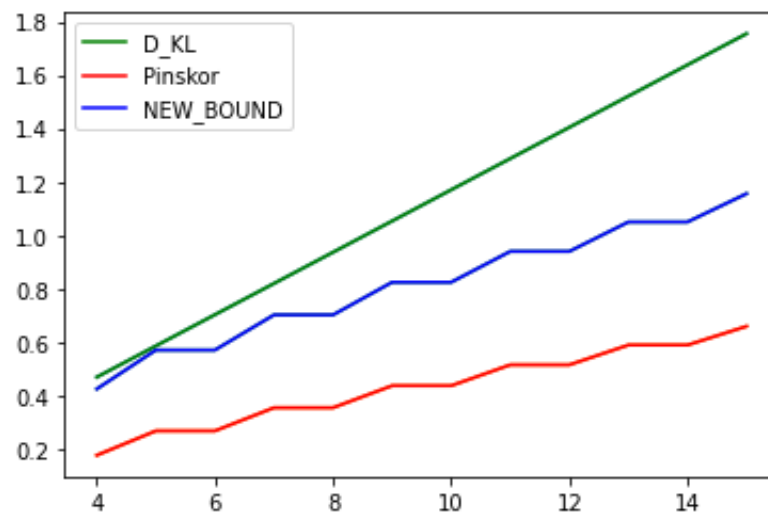


:

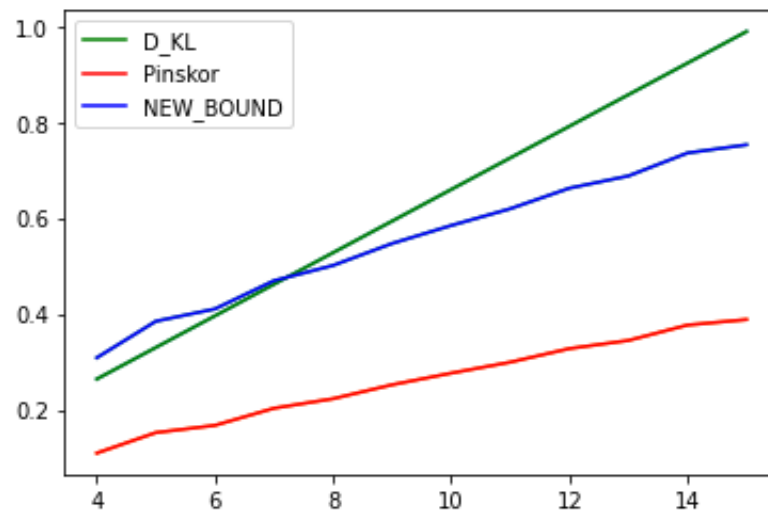
```
analysis(0.5,0.7,16)
```



analysis(0.6,0.4,16)



analysis(0.55,0.4,16)





```
analysis(0.4,0.4,16)
```

