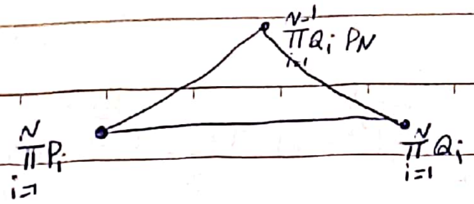
سوال ۵

الف)



Symmetric

$$d_{TV}\left(\prod_{i=1}^{N} P_i, \prod_{i=1}^{N} Q_i\right) \leq d_{TV}\left(\prod_{i=1}^{N} P_i, \prod_{i=1}^{N-1} Q_i P_N\right) + d_{TV}\left(\prod_{i=1}^{N-1} Q_i P_N, \prod_{i=1}^{N} Q_i\right)$$

حال داریم

I) $$d_{TV}\left(\prod_{i=1}^{N} P_i, \prod_{i=1}^{N-1} Q_i P_N\right) = \frac{1}{2}\sum_{X} \left|\prod_{i=1}^{N} P_i(n) - \prod_{i=1}^{N-1} Q_i(n) P_N(n)\right| = \frac{1}{2}\sum_{X} \left|\prod_{i=1}^{N-1} P_i(n) - \prod_{i=1}^{N-1} Q_i(n)\right| P_N(n)$$

$X = \{x_1, x_2 \ldots x_n\}$

$$= d_{TV}\left(\prod_{i=1}^{N-1} P_i, \prod_{i=1}^{N-1} Q_i\right) \rightarrow \quad P_N(n) \text{ marginal on } x_n$$

II) $$d_{TV}\left(\prod_{i=1}^{N-1} Q_i P_N, \prod_{i=1}^{N} Q_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{n} \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{N-1} Q_i\right)(n)}_{\leq 1} \left|P_N(n) - Q_N(n)\right| = d_{TV}(P_N, Q_N)$$

marginal on $\{x_1 \ldots x_{n-1}\}$

$$\text{I, II} \Longrightarrow d_{TV}\left(\prod_{i=1}^{N} P_i, \prod_{i=1}^{N} Q_i\right) \leq d_{TV}\left(\prod_{i=1}^{N-1} P_i, \prod_{i=1}^{N-1} Q_i\right) + d_{TV}(P_N, Q_N)$$

$$\Longrightarrow d_{TV}\left(\prod_{i=1}^{N} P_i, \prod_{i=1}^{N} Q_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} d_{TV}(P_i, Q_i) \quad \boxed{\checkmark}$$

بنابر استقرا ثابت می‌شود

ب)

$Y = g(X) \Longrightarrow$ we want to proove $d_{TV}(P_X, Q_X) = d_{TV}(P_Y, Q_Y)$

$$F_Y(y) = F_Y(g(x) \leq y) = P[g(n) \leq y] = P[X \leq g^{-1}(y)]$$

$$\Longrightarrow f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_X(g^{-1}(y)) = g^{-1'}(y) f_X(g^{-1}(y))$$

برای حالت ۱:۱ داریم:

$$\Longrightarrow g(x) = y \Longleftrightarrow g^{-1}(y) = x$$

$$g^{-1}(g(n)) = n \Longrightarrow f_Y(g(n) = y) = f_X(n) \quad \text{I}$$

حال با توجه به I داریم:

$$d_{TV}(P_Y, Q_Y) = \frac{1}{2}\sum_{y \in g(n)} \left|P_Y(y) - Q_Y(y)\right| = \frac{1}{2}\sum_{x} \left|P_X(x) - Q_X(n)\right| = d_{TV}(P_X, Q_X)$$

$g(n)$ ۱:۱

به عبارت دقیق تر

Subject: Date:

$$d_{TV}(P_Y, Q_Y) = \frac{1}{2}\sum_{x} \left| P_Y(g(x)) - Q_Y(g(x)) \right| = \frac{1}{2}\sum_{x} \left| P_x(x) - Q_x(x) \right| = d_{TV}(P_x, Q_x)$$

برای حالت پیوسته نیاز داریم که (مشتق g) را درنظر بگیریم.

$$d_{TV}(P_Y, Q_Y) = \frac{1}{2}\int_{\infty} \left| P_Y(y) - Q_Y(y) \right| = \frac{1}{2}\int_{\infty}^{\infty} g^{-1'}(y) \left| P_x(y) - Q_x(y) \right| dy$$

$g(x) = y$

$$= \frac{1}{2}\int g^{-1'}(g(x)) \left| P_x(g(x)) - Q_x(g(x)) \right| g'(x)\, dx = ?$$

چون یک به یک است

$$g^{-1}(g(x)) = x \Rightarrow$$

$$\boxed{g^{-1'}(g(x))\, g'(x) = 1}$$

$$\frac{1}{2}\int \overbrace{g^{-1'}(g(x))\, g'(x)}^{1} \underbrace{\left| P_x(g(x)) - Q_x(g(x)) \right|}_{\left| P_x(x) - Q_x(x) \right|} dx = \frac{1}{2}\int \left| P_x(x) - Q_x(x) \right| dx$$

$$\Rightarrow d_{TV}(P_Y, Q_Y) = d_{TV}(P_x, Q_x) \quad \boxed{\checkmark}$$

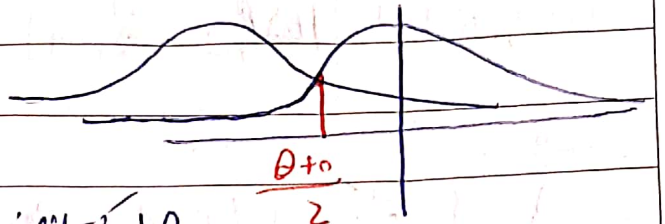
$$d_{TV}(P_0 \otimes Q, P_1 \otimes Q) = \frac{1}{2}\sum_{x} \sum_{x_q \in Q} \left| P_0(x) Q(x_q) - P_1(x) Q(x_q) \right| =$$ 20

$$\frac{1}{2}\sum_{x}\sum_{x_q} \left| P_0(x) - P_1(x) \right| Q(x_q) = \frac{1}{2}\sum_{x} \left| P_0(x) - P_1(x) \right| = d_{TV}(P_0, P_1) \quad \boxed{\checkmark}$$

ب) برای یک بعد داریم:

$$d_{TV}(P,Q) = \sup_E \{ \sum_E p(x) - q(x) \}$$

$$d_{TV}(P,Q) = \sum_{p(x)>q(x)} p(x)-q(x) = \int_{p(x)>q(x)} p(x)-q(x) \Rightarrow$$



θ را کمتر از صفر درنظر می‌گیریم

بدون کم شدن از کلیات مسأله به دلیل تقارن داریم:

$$d_{TV}(N(0,\sigma),N(\theta,\sigma)) = \int_{\theta/2}^{\infty} N(0,\sigma)-N(\theta,\sigma)\,dx$$

$$\boxed{F = F_{N(0,1)}(x)}$$

$$= \left(1-F_{N(0,\sigma)}(\theta/2)\right) - \left(1-F_{N(\theta,\sigma)}(\theta/2)\right) = 1-F\left(\frac{\theta/2-0}{\sigma}\right) - \left(1-F\left(\frac{\theta/2-\theta}{\sigma}\right)\right)$$

$\theta<0$

$$= F\left(\frac{-\theta}{2\sigma}\right) - F\left(\frac{\theta}{2\sigma}\right) = 1-2F\left(\frac{\theta}{2\sigma}\right) = 1-2\left(1-F\left(\left|\frac{\theta}{2\sigma}\right|\right)\right) = 2F\left(\frac{|\theta|}{2\sigma}\right)-1$$

$$\Rightarrow 2\left(1-\Phi\left(\left|\frac{\theta}{2\sigma}\right|\right)\right)-1 = 1-2\Phi\left(\left|\frac{\theta}{2\sigma}\right|\right)$$ ☑

برای $\theta>0$ نیز همین رابطه به سادگی بدست می‌آید.

از رابطه یک بعدی استفاده می‌کنیم و از آن برای چند بعدی استفاده می‌کنیم.

$$d_{TV}(P_n,Q_n) = 1-2\int_{\theta/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left(-\tfrac12 x^T \Sigma^{-1} x\right) dx$$

با تغییر متغیر داریم: $x = \Sigma^{1/2} z \Rightarrow dx = $

$$d_{TV}(P_n,Q_n) = 1-2\int_{\Sigma^{-1/2}\theta/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left(-\tfrac12 z^T \cancel{\Sigma^{1/2}\Sigma^{-1}\Sigma^{1/2}} z\right)$$

$$= 1-2\int_{\Sigma^{-1/2}\theta/2} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left(-\tfrac12 \|z\|^2\right) |\Sigma|^{1/2} dz = \int_{\Sigma^{-1/2}\theta/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi^n}} \exp\left(-\tfrac12 \|z\|^2\right) dz$$

از آنجا که می‌توان یک توزیع گوسی n بعدی $N(0, I_n)$ را به یک توزیع گوسی یک بعدی تبدیل کرد

θ یک بردار ستونی است.

$$d_{TV}(P_n, Q_n) = 1 - 2\,\Phi\left(\tfrac{1}{2}\left|\Sigma^{-1/2}\theta\right|\right) \quad \boxed{\checkmark}$$

تکه‌ای از اثبات را بعد از یکی از دوستانم پرسیدم. گویا به دلیل rotation invariant بودن توزیع گوسی می‌توان عمل کاهش به یک بعد را انجام داد. بنابراین از نوشتن جزئیات ریاضی آن صرف نظر کرده‌ام.

۵) الف) اثبات دیگری از stackoverflow :

برای $n=2$ اثبات می‌کنیم، اگر μ و ν دو توزیع روی S^2 باشند (μ, ν)

خواهیم داشت: می‌خواهیم ثابت کنیم $d(\mu_1\times\mu_2, \nu_1\times\nu_2) \leq d(\mu_1,\nu_1) + d(\mu_2,\nu_2)$

$$d_{TV}(\underset{X}{\mu}, \underset{Y}{\nu}) \leq P(X \neq Y)$$

$$\mu(E) - \nu(E) = P[\cancel{X\in E, y\in E}] + P[X\in E, \cancel{y\notin E}] - [P(X\notin E, y\in E) + P(\cancel{X\in E, y\in E})]$$

$$P[X\in E, y\notin E] - P[y\in E, x\notin E] \underset{\text{for any } E}{\leq} P[x\in E, y\notin E]$$

$$d_{TV}(\mu,\nu) = \sup_E \{\mu(E) - \nu(E)\} \leq \inf_E P[X\neq Y]\ [X\in E, y\notin E] \quad \text{I}$$

اگر $X = (X_1, X_2)$ ، $Y = (Y_1, Y_2)$

$$P(X\neq Y) = 1 - P(X=Y) = 1 - P(X_1 = Y_1)P(X_2 = Y_2) \quad (1)$$

$$(1) \rightarrow P(X_1 = Y_1)(1 - P(X_2 = Y_2)) \leq (1 - P(X_2 = Y_2)) \Rightarrow -P(X_1 = Y_1)P(X_2 = Y_2) \leq 1 - (P(X_1 = Y_1) + P(X_2 = Y_2))$$

$$\Rightarrow 1 - P(X_1 = Y_1)P(X_2 = Y_2) \leq 1 - P(X_1 = Y_1) + 1 - P(X_2 = Y_2)$$

$$\leq P(X_1 \neq Y_1) + P(X_2 \neq Y_2) \underset{\text{I}}{\Longrightarrow} d_{TV}(\mu_1\mu_2, \nu_1\nu_2) \leq P(X_1\neq Y_1) + P(X_2 \neq Y_2)$$

$$\overset{(2)}{\leq} d_{TV}(\mu_1, \nu_1) + d_{TV}(\mu_2, \nu_2) \Rightarrow$$ حالت‌های مطابق بالا با استقرا ثابت می‌شود.

Subject: .... Date: ....

برای قسمت 2 از بخش دوم coupling lemma استفاده کرده‌ام

there exist optimal coupling $\Rightarrow d_{TV}(\mu, \nu) = P(X \neq Y)$

$\Leftarrow$ $\leq$ 2 درست است .

اثبات نوشته شده با الهام از   Proof for total variation for Product measure using coupling $\Rightarrow$ stack over flow

نوشته کاملا است .