Subject: Date:

F

سوال ده | الف

$$V_{\alpha,\beta,r,s,t}(P_X\|Q_X) = \sup_f \{E_P[f] - rE_Q[f] - s\log E_Q[e^{\alpha f}] - t\log E_Q[e^{\beta f}]\}$$

مجموع توابع را محدود در نظر میگیریم

$$\sup_f \{F\} \geq \sup_{f\in \text{constant}} \{F\}$$

$$\sup_{\substack{f\in \text{const} \\ c}} \{E_P[c] - rE_Q[c] - s\log E_Q[e^{\alpha c}] - t\log E_Q[e^{\beta c}]\}$$

$$= \sup_c \{c - rc - s\alpha c - t\beta c\} = \sup_c \{c(1-r-s\alpha-\beta t)\}$$

$\Rightarrow$ if $1-r-s\alpha-\beta t \neq 0 \Rightarrow \sup_c\{c(1-r-s\alpha-\beta t)\} \geq \infty$

باند ندارد. اگر $r+s\alpha+\beta t=1$ باشد ⇐ آنگاه مقدار آن برابر صفر است و باند دارد.

البته در اینجا یک مجموعه از توابع خاص را دیدیم که باند ندارد اگر $r+s\alpha+\beta t=1$ نباشد بنابراین مقدار $\sup_f\{F\}$ نیز در آن صورت باند ندارد.

ب) همان طور که در بخش قبل دیدیم که $\sup\{F\} \geq \sup_c\{F\}$

حال $c=0$ را در نظر بگیریم $\sup\{F\} \geq \sup_c\{F\} \geq F_{c=0}$

$\Rightarrow 0 - r\times 0 - s\times \log 1 - t\log 1 = 0$

$\Rightarrow \sup\{F\} \geq 0$ ✓

Subject: .... Date: ....

ج) برای اثبات بخش اول ابتدا از نامساوی Jensen برای توابع Convex استفاده می‌کنیم.

$$\sup_f \{ \underbrace{E_p[f] - r E_Q[f] - s \log E_Q[e^{\alpha f}] - t \log E_Q[e^{\beta f}]}_{F} \}$$

$$\log E(x) \overset{\text{Jensen}}{\geq} E[\log(x)] \Rightarrow -\log E(x) \leq -E\log(x)$$

$$\Rightarrow \sup_f [F] \leq \sup_f \{E_p[f] - r E_Q[f] - s E_Q[\log(e^{\alpha f})] - t E_Q[\log(e^{\beta f})]\}$$

$$= \sup_f \{ E_p[f] - r E_Q[f] - s\alpha E_Q[f] - t\beta E_Q[f] \}$$

$$= \sup_f \{ E_p[f] - (r + \alpha s + \beta t) E_Q[f] \}$$

حال اگر $Q = P$ باشد $\Leftarrow$

$$= \sup_f \{ E_p(x) - (r + \alpha s + \beta t) E_p[f] \}$$

$$E_p(f) \times \underbrace{(-r - \alpha s - \beta t + 1)}_{\text{براساس فرض } = 0} \Rightarrow \sup_f [F] \leq \sup_f (0)$$

(از طرفی)

$$\Rightarrow \begin{cases} \sup_f [F] \geq 0 \\ \sup_f [F] \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \sup_f [F] = 0$$

$$\Rightarrow V_{\alpha,\beta,t,s,r}(P_x \| \overset{Q_x}{P_x}) = 0$$

Subject: Date:

$$V_{\alpha,\beta,r,s,t}(P_X \| Q_X) \leq V_{\alpha,\beta,r,s,t}(P_{X,Y} \| Q_{XY})$$

$$\sup_{f(x,y)} \left\{ E_{P_{XY}}[f(x,y)] - r E_{Q_{XY}}[f(x,y)] - s \log E_{Q_{XY}}[e^{\alpha f(x,y)}] - t \log E_{Q_{XY}}[e^{\beta f(x,y)}] \right\}$$

حال دوباره حدود توابع f را محدود می‌کنیم $\Leftarrow$ F_{XY} $f(x)$ را داشتیم از ازای ... می‌گیریم

$$\sup_{f(x,y)} \left\{ E_{P_{XY}}[f(x,y)] - r E_{Q_{XY}}[f(x,y)] - s \log E_{Q_{XY}}[e^{\alpha f(x,y)}] - t \log E_{Q_{XY}}[e^{\beta f(x,y)}] \right\}$$

$$\geq \sup_{f(x)} \left\{ E_{P_{XY}}[f(x)] - r E_{Q_{XY}}[f(x)] - s \log E_{Q_{XY}}[e^{\alpha f(x)}] - t \log E_{Q_{XY}}[e^{\beta f(x)}] \right\}$$

$$E_{P_{XY}}[f(x)] = E_{P_X} \underbrace{E_{P_{Y|X}}[f(x)]}_{f(x) E_{P_{Y|X}}[1]} = E_{P_X}[f(x)] \qquad \underbrace{e^{\alpha f(x)} E_{Q_{Y|X}}[1]}$$

$$\underset{\text{حاشیه قبل}}{E_{Q_{XY}}[f(x)]} = E_{Q_X}[f(x)] \quad , \quad E_{Q_{XY}}[e^{\alpha f(x)}] = E_{Q_X} E_{Q_{Y|X}}[e^{\alpha f(x)}] =$$

$$= E_{Q_X}[e^{\alpha f}]$$

$$\Rightarrow \sup_{f(x,y)} F_{XY} \geq \sup_{f(x)} F_X = \sup_f \left\{ E_{P_X}[f] - r E_{Q_X}[f] - s \log E_Q[e^{\alpha f}] - t \log E_Q[e^{\beta f}] \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(P_{XY} \| Q_{XY}) \geq V(P_X \| Q_X)}$$

$$\sup_{f(x,y)} \Big\{ \underbrace{E_{P_X} E_{W_{Y|X}}[f] - r \log E_{Q_X} E_{W_{Y|X}}[e^{\alpha f}] - t \log E_{Q_X} E_{W_{Y|X}}[e^{\beta f}]}_{F} \Big]$$

e is convex function $\rightarrow$ $e^{E(x)} \leq E\, e^{x} \Rightarrow \quad \geq$

apply $E_{W_{Y|X}}$ to exp

$$\Rightarrow \sup_{f(x,y)} E_P E_{W_{Y|X}}[f] - r \log E_{Q_X} E_{W_{Y|X}}[e^{\alpha f}] - t \log E_{Q} E_{W_{Y|X}}[e^{\beta f}] \leq$$

$$\sup_{f(x,y)} \Big\{ E_P E_{W_{Y|X}}[f] - r \log E_{Q_X}\big[e^{E_{W_{Y|X}}[e^{\alpha f}]}\big] - t \log E_{Q_X}\big[e^{\beta E_{W_{Y|X}}[f]}\big] \Big\}$$

$- r E_Q[E_{W_{Y|X}}[f]]$

consider $E_{W_{Y|X}}[f]$ new function it is function of x and Y has no impact due to E

$$\Rightarrow \sup_{f(x,y)} \{F\} \leq \sup_{g(x)} E_P[g] - r E[g] - s \log E_Q[e^{\alpha g}] - t \log E_Q[e^{\beta g}] \Rightarrow V(P\|Q)$$

$$\Longrightarrow V(P_X W_{Y|X} \| Q_X W_{Y|X}) \leq V(P_X \| Q_X)$$

NAHAL

Subject:
Date:

ادامه due to convexity of e and Y indefendent of $E_{W_{Y|X}}(f(x,y))$

we have $V(P_x \| Q_x) \geqslant V(P_x W_{Y|X} \| Q_x W_{Y|X})$ (1)

از طرفی از قسمت قبل داریم. $V(P\|Q) \leqslant V(P_{XY} \| Q_{XY})$

$P_{XY} = P_X W_{Y|X}$

$Q_{XY} = Q_X W_{Y|X}$

$\Longrightarrow \quad V(P\|Q) \leqslant V(P_X W_{Y|X} \| Q_X W_{Y|X})$ (2)

(1),(2) $\Longrightarrow \quad V(P\|Q) = V(P_X W_{Y|X} \| Q_X W_{Y|X})$

حال داریم

$V(P_Y \| Q_Y) \leqslant V(P_{XY} \| Q_{XY}) = V(P_X \| Q_X)$

$\Longrightarrow \quad V(P_Y \| Q_Y) \leqslant V(P_X \| Q_X)$ ✓ درکلاس یکسان

برای convexity ⇐ مطابق کلاس یک فرایند برنولی را تصور کنید.

$V(P, Q)$

$P_0, P_1 \qquad V((1-\lambda)P_0 + \lambda P_1 \| (1-\lambda)Q_0 + \lambda Q_1)$

$Q_0, Q_1 \qquad \leqslant (1-\lambda) V(P_0\|Q_0) + \lambda V(P_1\|Q_1)$

$Z \sim \mathrm{Bern}(\lambda) \qquad P_{X|Z} = \begin{cases} P_0(x) & z=0 \\ P_1(x) & z=1 \end{cases}$

$1 \quad \lambda \quad \Longrightarrow$

$0 \quad 1-\lambda \qquad Q_{X|Z} = \begin{cases} Q_0(x) & z=0 \\ Q_1(x) & z=1 \end{cases}$

$\Longrightarrow \quad V((1-\lambda)P_0 + \lambda P_1 \| (1-\lambda Q_0) + \lambda Q_1) = V(P_{XZ} \| Q_{XZ})$

~~$V(P_2 \| Q_2)$~~ ادامه

$$V(P_{XZ} \| Q_{XZ}) = V(P_X P_{Z|X} \| Q_X Q_{Z|X}) =$$

$$\mathop{E}_{Z} V(P_{X|Z} \| Q_{X|Z}) = (1-\lambda)\, V(P_0 \| Q_0) + \lambda\,(V(P_1 \| Q_1))$$

$\Rightarrow$ V(convex combinaton of P_0, P_1 and Q_0, Q_1) $\leq$ convex combination of $V(P_0\|Q_0)$ and $V(P_1\|Q_1)$

superadditive

$$\sup_{f(x,y)} \underbrace{E_{P_{XY}}[f] - r E_{Q_{XY}}[f] - s \log E_{Q_{XY}}[e^{\alpha f}]}_{G} - t \log E_{Q_{XY}}[e^{\beta f}]$$

$$\geq \sup_{\substack{f(x)+\hat{f}(y)\\ f, \hat{f}}} E_{P_X}[f] + E_{P_Y}[\hat{f}] - r E_{Q_X}[f] - r E_{Q_Y}[\hat{f}] - s \log \underbrace{E_{Q_{XY}}[e^{\alpha(f+\hat{f})}]}_{e^{\alpha f} \times e^{\alpha \hat{f}}} - t \log E_{Q_{XY}}[e^{\alpha(f+\hat{f})}] \Rightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$E_{Q_X}[e^{\alpha f}]\, E_{Q_Y}[e^{\alpha \hat{f}}] \xRightarrow{\log} -s \log E_{Q_X}[e^{\alpha f}] - s \log E_{Q_Y}[e^{\alpha \hat{f}}]$$

چرای شیم

$$\Rightarrow \sup(G) = \sup_f \{ E_{P_X}[f] - r E_{Q_X}[f] - s \log E_{Q_X}[e^{\alpha f}] - t \log E_{Q_X}[e^{\alpha f}] \} + \sup_{\hat{f}} \{ \quad \}$$

برای Y

Subject: Date:

ادامه ح

$$\Rightarrow V(P_{XY} \| Q_{XY}^{Q}) \geq V(P_X \| Q_X) + V(P_Y \| Q_Y)$$

super additivity ✓

ببخشید یونظرم توی اوربوس ننوشتم :)

ح

$$\sup_f \left\{ E_{P_X}[f] - (1 - \tfrac{1}{\alpha}) E_Q[f] - \tfrac{1}{\alpha^2} \log E_Q[e^{\alpha f}] \right\}$$

بسط $e^{\alpha f}$ →

$$1 + \alpha f + \frac{\alpha^2 f^2}{2} + \frac{\alpha^3 f^3}{3!} \dots$$

ترم $\alpha^2 f^2$ را به بعد در نظر نمی‌گیریم.

$$= E_{P_X}[f] - E_Q[f] + \tfrac{1}{\alpha} E_Q[f] - \tfrac{1}{\alpha^2} \log \underbrace{E_Q[1 + \alpha f]}_{\log(1 + E_Q[\alpha f])} =$$

$$\log 1 + x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots$$

$$E_{P_X}[f] - E_Q[f] + \cancel{E_Q[\tfrac{f}{\alpha}]} - \tfrac{1}{\alpha^2} \left(E[\alpha f] - \frac{E[\alpha^2 f^2]}{2} + \frac{E[\alpha^3 f^3]}{3} \dots \right) =$$

$$= E_P[f] - E_Q[f] + \cancel{E_Q[\tfrac{f}{\alpha}]} - \cancel{E_Q[\tfrac{f}{\alpha}]} + E[\tfrac{f^2}{2}] + \cancel{\frac{\alpha E[f^3]}{3}} + \dots$$

$$\lim_{\alpha \to 0} W = E_P[f] - E_Q[f + \tfrac{f^2}{2}] \sim ? \quad \chi^2(P \| Q)$$

$$\overbrace{\left(\frac{f-1}{\sqrt{2}}\right)}^{2} - \tfrac{1}{2} + (1 + \sqrt{2}) f$$

$\sqrt{2} f$ توی χ^2 داریم

$$\chi^2 = \sup_f \sup_{a,b} E_P[af + b] - E_Q[(af + b - 1)^2]$$

. تیکه آخر اثبات رو به دلیل $f + f^2$ یک عبارت به صورت بالایی تبدیل نوشتیم.

⟸ (البته دیگه نتونستم ادامه بدم)

$$\lim_{\alpha \to 0} W_\alpha = \chi^2(P \| Q)$$

ببخشید لطفاً خلاصست (توی اوربوس نمی‌دادم بنویسم)

Subject: Date:

ادامه ج

ج ۵)

$$\lim_{\alpha \to 0} \cdot W_\alpha = \chi^2(P||Q)$$

خ) با توجه به اینکه

$$\lim_{\alpha \to 0} W_\alpha (\doteq \chi^2(P||Q)$$

و خاصیت super aditive

$$\Rightarrow \lim_{\alpha \to 0} W(P_{XY}||Q_X Q_Y) \geq W(P_X||Q_X) + W(P_Y||Q_Y)$$

$$= \chi^2(P_1||Q_2) + \chi^2(P_2||Q_2)$$