Q5) $A \in R^{n\times d}$ $\equiv [\ ]_{n\times 1} [\ ]_{1\times d}$ از فرضیات مسئله می‌دانیم که

$$\text{rank}(A)=1 \implies A = uv^T \implies A_{ij} = u_i v_j$$

$$\|A\|_F=1 \implies \sum_{i,j}(u_i v_j)^2 = 1 \implies \sum_j \sum_i (u_i v_j)^2 = 1 \implies \sum_j v_j^2 \sum_i u_i^2 = 1$$

$$\implies \|v\|_2 \times \|u\|_2 = 1$$

با دانستن $\underbrace{\|A-\hat{A}\|_F \le \delta}$ درباره $\|u-\hat{u}\|_2$, $\|v-\hat{v}\|_2$ چه می‌توان گفت.

چون نرم روی m صحبت می‌کنیم کمتر در نظر گرفتیم.

از تمامی جوجه های که $S=\{(u,v) \mid \|u\|_2\|v\|_2=1\}$ هست زیرجموعه $\tilde{S}=\{(u,v) \mid \|u\|_2=1, \|v\|_2=1\}$ را بررسی می‌کنیم. بنابراین $P(\hat{S},\dots) < P(S\dots)$ حال برروی $P(\hat{S})$ صحبت می‌کنیم.

از آنجا که $P(\hat{S}) > N(\hat{S})$ اگر باند پایین $N(\hat{S})$ را بیابیم تمام است.

$$\|uv^T - \hat{u}\hat{v}^T\|_F = \|uv^T - \tilde{u}v^T + \tilde{u}v^T - \tilde{u}\tilde{v}^T\|_F$$

با نامساوی مثلث داریم:

$$\le \|uv^T - \tilde{u}v^T\|_F + \|\tilde{u}v^T - \tilde{u}\tilde{v}^T\|_F =$$

$$\sqrt{\sum_{i,j}(u_i v_j - \tilde{u}_i v_j)^2} + \sqrt{\sum_{i,j}(\tilde{u}_i v_j - \tilde{u}_i \tilde{v}_j)^2} =$$

$$\sqrt{\sum_{i,j} v_j^2 (u_i - \tilde{u}_i)^2} + \sqrt{\sum_{i,j} \tilde{u}_i^2 (v_j - \tilde{v}_j)^2} = \sqrt{\sum_j v_j^2 \sum_i (u_i - \tilde{u}_i)^2} + \sqrt{\sum_i u_i^2 \sum_j (v_j - \tilde{v}_j)^2}$$

$\rightarrow$ $u,v \in \tilde{S}$ می‌دانیم یکه هستند

$$\implies \|A-\hat{A}\| \le \cancel{\|v\|_2}\, \|u-\tilde{u}\|_2 + \cancel{\|u\|_2}\, \|v-\tilde{v}\|_2$$

$\|A-\hat{A}\|_F \le \|u-\tilde{u}\|_2 + \|v-\tilde{v}\|_2 \implies$ از فضای ماتریسی دیگر به فضای $\|\ \|_2$ برداری رسیدیم.

دقت کنید نمی‌توان گفت که $\|u-\bar{u}\|_2 \le \varepsilon/2$ و $\|v-\bar{v}\|_2 \le \varepsilon/2$ بلکه می‌توان گفت که $\|u-\bar{u}\|_2$.

قطعاً از ε کمتر است که این خودش یعنی اگر مجموعه $\|A-\hat{A}\|_F$ را در این حالت در نظر بگیریم.

کمتر از 2ε است ⇐ اما $P(\varepsilon) \geq P(2\varepsilon)$ بنابراین

صحبت می‌کنیم روی کران پایین $P(2\varepsilon)$ نیز کافی است

بنابراین . $N(\varepsilon, \|\cdot\|_2,$ کره واحد$)$ را مد نظر قرار می‌دهیم.

از جزوه می‌دانیم که $\log 1/\varepsilon \simeq \log N(\varepsilon, \|\cdot\|_2,$ کره واحد$)$ حال در اینجا دو کران به ابعاد

d , n داریم ⇐ $cn \log 1/\varepsilon \gtrsim \log N(\;) \gtrsim \log P(u, \|\cdot\|_2, \frac{1}{2}\varepsilon)$

$cd \log 1/\varepsilon \gtrsim \log N(\;) \gtrsim \log P(v, \|\cdot\|_2, \frac{1}{2}\varepsilon)$.

به جای packing در کره کافی است که در کره را پوشش دهیم ⇐

حاصل هر کدام از تعامل ⇐ $P = P(u,\dots) \times P(v,\dots)$

$$\log P \geq \log P(u) + \log P(v) \Rightarrow$$

$$\gtrsim c(n+d)\log 1/\varepsilon \Rightarrow c(n+d)\log 1/\varepsilon$$

Proof completed!