Q4) $\sum u_i = 1 \quad , u_i \geq 0$

$X \sim subg(1) \quad \hookrightarrow \sqrt{u^T u} = \sqrt{\sum u_i^2} \leq \sum u_i \leq 1 .$

$\mu(u) = E[u^T X] \quad , R(u) = var(X^T u)$

$$u^* = \arg\min_{u:\, \mu(u) \geq \lambda} R(u)$$

بسود دهی : با بهره معاملاتی ($\lambda$) کمترین ریسک را داشته باشیم (بشیر به Neyman-Pearson)

$$\hat{\mu}(u) = \bar{X}^T u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^T u$$

$$\hat{R}(u) = u^T \hat{\Sigma} u \quad , \hat{\Sigma} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^T$$

$$\hat{u} = \arg\min_{\hat{\mu}(u) \geq \lambda} \hat{R}(u)$$

از طرفی $d \ll n \leq d$ یا

الف) می‌خواهیم ثابت کنیم که $E[\hat{\mu}(u) - \mu(u)] \sim O(\frac{1}{\sqrt{n}})$

که حتما خطا با (حسابات ابتدای کلاس) این است که با احتمال بالا $|\mu(u) - \hat{\mu}(u)| \sim O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ برقرار است.

$\mu = E[X]$

(طبق قانون اعداد بزرگ است.)

$$E\left| \frac{1}{n} \sum X_i^T u - \mu^T u \right| = E\left[\sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum X_i^T u - \mu^T u\right)^2}\right] = \frac{1}{n} E \sqrt{\left(\sum |X_i^T u - \mu^T u|\right)^2}$$

$$\sqrt{\ } \text{ is concave} \Rightarrow \frac{1}{n} E \sqrt{\left(\sum (X_i^T u - \mu^T u)\right)^2} \leq \frac{1}{n} \sqrt{E\left(\left(\sum \underbrace{X_i^T \mu - \mu^T u}_{\alpha_i}\right)^2\right)}$$

$$\leq \frac{1}{n}\sqrt{E\,(\sum \alpha_i)^2} = \frac{1}{n}\sqrt{E\left[\sum \alpha_i^2 + \sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} \alpha_i \alpha_j\right]}$$

$$\underset{i\neq j}{E}[\alpha_i \alpha_j] = E\left[(x_i^T\mu - \mu^T u)(x_j^T\mu - \mu^T u)\right]$$ i and j are independent.

$$\cancel{E(x_i^T\mu - \mu^T u)}^{0}\ \cancel{E(x_j^T\mu - \mu^T u)}^{0} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \leq \frac{1}{n}\sqrt{E\sum \alpha_i^2} = \frac{1}{n}\sqrt{u^T \sum_i E(x_i-\mu)(x_i-\mu)^T u} =$$

$$\frac{1}{n}\sqrt{u^T \sum_i \Sigma u} = \frac{1}{n}\sqrt{n u^T \Sigma u}$$

$$u^T \Sigma u \leq \sigma_{max}(\Sigma)\, u^T u$$ $\Sigma$ متقارن است.

یا با مقداری محاسبه و متقارن بودن گذاشتن $u^T \Sigma u \leq (\lambda_{max} u^T u \vee |\lambda_{min} u^T u|)$

$\Longrightarrow$ از آنجا که $\rho_u$ مثبت است $u^T \Sigma u \leq (\lambda_{max} \wedge |\lambda_{min}|) \leq C$

$$E\,|\hat{\mu}(u) - \mu(u)| \leq \frac{C}{\sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

بررسی حالت کلی $R(u)$ و $\hat{R}(u)$ ← گام اول

حال برای $|\hat{R}(u) - R(u)|$ داریم: اگر

$$E\,[\hat{R}(u)] = R(u)$$

آنگاه در حالت کلی به $R(u)$ می‌رسیم.

برای سادگی $u^T u$ را در نظر نمی‌گیریم:

$$\frac{1}{n-1}\sum_i E[(x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x})^T] = \frac{1}{n-1}\sum_i E\,((x_i-\mu)+(\mu-\bar{x}))((x_i-\mu)+(\mu-\bar{x}))^T$$

$$= \frac{1}{n-1}\Big(\sum_i E\Big[(x_i-\mu)(x_i-\mu)^T + (\mu-\bar{x})(x_i-\mu)^T + (x_i-\mu)(\mu-\bar{x})^T + (\mu-\bar{x})(\mu-\bar{x})^T$$

$$= \frac{1}{n-1}\Big[\Big(\overset{n \to \text{tun}}{\sum_{i=1}} \overset{\to \text{cov}}{\Sigma}\Big) + \sum_i E(\mu-\bar{x})(x_i-\mu)^T + \sum_i E(x_i-\mu)(\mu-\bar{x})^T$$

$$+ \sum_i E\big((\mu-\bar{x})(\mu-\bar{x})^T\big)\Big] =$$

حل بخش بعدی

$$\frac{1}{n-1}\Big[n\Sigma \underbrace{- \sum_i \operatorname{cov}\Big(x_i, \frac{\sum x_i}{n}\Big)}_{-\operatorname{cov}(x_1, \sum x_i) = -\operatorname{cov}(x_1,x_1)+0+0\cdots = -\Sigma} - \Sigma + \sum_i \operatorname{cov}\Big(\frac{\sum x_i}{n}, \frac{\sum x_i}{n}\Big)\Big]$$

$$\sum_i \frac{1}{n}\operatorname{cov}(x,x) = \Sigma$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n-1}\Big[n\Sigma - \Sigma - \cancel{\Sigma} + \Sigma\Big] = \frac{1}{n-1}\big((n-1)\Sigma\big)$$

$$\Rightarrow E(\hat{R}) = u^T\Sigma u = R(u) \quad \checkmark$$

بنابراین $\hat{R}(u)$ بایاس ندارد یعنی در حالت حدی به $R(u)$ می‌رسد.

حال داریم:

$$P\Big(\frac{1}{n-1} u^T \sum_i (x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x})^T u - u^T\Sigma u > t\Big) ?$$

$$P\Big(\frac{1}{n-1} u^T \sum_i (x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x})^T u - u^T\Sigma u > t\Big) ?$$

$$P\Big(u^T \sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x})^T - \Sigma\, u > (n-1)t + u^T\Sigma u\Big)$$

$$P\Big(u^T \sum_i (x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x})^T - \Sigma\, u > \overbrace{(n-1)t + \underbrace{u^T|\Sigma|_{op}u}_{\to 0}}^{\approx n\delta}\Big)$$

در بدترین حالت ⇐

صفحه بعد

$$P\left(u^T \sum_i \left[(x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x})^T - \Sigma\right] u > n\delta\right)$$

$$Y_i = x_i - \bar{x} \Rightarrow P\Big(u^T \sum_i \underbrace{Y_i Y_i^T - \Sigma}_{Q_i} u > \delta\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_i = X_i X_i^T - \Sigma$$

$E[Q_i] = 0$ $\qquad$ $Q_i$ مستقلند.

$$\|Q_i\| = \|X_i X_i^T - \Sigma\| \le X_i X_i^T + \|\Sigma\| = \|X_i X_i^T\| + \|\Sigma\|$$

bound on $\|X_i X_i^T\| \rightsquigarrow \sup_{\|x\|=1} w X_i X_i^T w^T \le \sup \|y\| \, \|x_i\| \, \|y\| \, \|X_i\| = \|X_i\|^2$

از آنجایی که $x_i$ ها گوسی‌اند میشه almost surely گفت: $\|X_i\|^2 \le C$ ثابت

$$\|Q_i\| \overset{\text{almost surely}}{\le} \|\Sigma\|_{op} + C \le \text{constant} = \beta$$ $\Leftarrow$ اسمی روی می‌ذاریم $\beta$

$$\sigma^2 = E[Q_i^2] \le \dots \le E[|X_i X_i^T|^2] = E[X_i X_i^T X_i X_i^T]$$

$$= E[X_i \underbrace{\|X_i\|^2}_{\le C} X_i^T] = C\Sigma$$

حال داریم:

$$P\left(\left\|\sum Q_i\right\| \ge n\delta\right) = P\left(\frac{1}{n}\left\|\sum Q_i\right\| \ge \delta\right)$$

مطابق بونشتاین (شرط‌ها را بالا برقرار کردیم) $\|\sigma^2\| = n \times \frac{1}{n^2} C \|\Sigma\|_{op} = \frac{1}{n} C \|\Sigma\|_{op}$

$b = \beta \rightarrow$ ثابت

$$\Longrightarrow \quad P(\quad > \delta) \leq 2d \exp\left(\frac{-n\delta^2}{2(\sigma^2+b\delta)}\right)$$

دقت $uu^T \leq 1$ براساس $\sigma^2 \leq c\|\Sigma\|$ هستیم.

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\leq 2\exp\left(\frac{-1}{2(\frac{1}{n}+b\frac{1}{\sqrt{n}})} + \log d\right) \quad \Longleftarrow$$

$$\leq 2\exp\left(\frac{-n}{2(1+b\sqrt{n})} + \log d\right)$$

چون $n \gg \log d$ است

$$n \to \text{زیاد} \rightsquigarrow \frac{-n}{2(1+\sqrt{n}\,b)} \approx -\sqrt{n} \quad \Longleftarrow$$

$$n \gg \log d \Rightarrow \sqrt{n} \gg \log d \Rightarrow$$

مرتبه $\log d$ خیلی کمتره

$$n \geq \log d \to \frac{-n}{2(1+b\sqrt{n})} + \log d < 0 \to$$

بازخ $\sqrt{n}$ حاصله که خب اینجا مهمه

$$P(\|\tfrac{1}{n}\sum Q_i\| \geq \delta) < e^{-\varepsilon\sqrt{n}}$$

نشون دادیم که

$$\Longrightarrow \hat{R}(u) - R(u) \lesssim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Proof complete.

این اثبات دیگر در صفحه بعد به کمک قبلی آورده است که از $E[(X_iX_i^T)^2] < c\Sigma$ استفاده می‌کند.

$$\|\hat{R}(u) - R(u)\| \sim O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

اثبات دیگر برای $O(\frac{1}{\sqrt{n}}) \Leftarrow$

$$x_i - \bar{x} = w_i \Rightarrow A_i = w_i w_i^T$$

$$E[\hat{R}(u) - R(u)] = uE\left[\frac{1}{n-1}\sum_i A_i - E[A_i]\right]u^T <$$

$$E\left[\sqrt{\Big(\underbrace{\sum_i \Big(\frac{1}{n-1} u^T A_i u - \frac{1}{n} u^T E[A_i] u\Big)}_{\alpha}\Big)^2}\right] =$$

$$\leq \sqrt{E\Big(\sum_i \alpha_i\Big)^2} \longrightarrow \Big(\sum \alpha_i\Big)^2 = \sum \alpha_i^2 + \sum_{i\neq j} \alpha_i \alpha_j \Rightarrow$$

$$E\left[\Big(\frac{1}{n-1} u A_i u^T - \frac{1}{n} u^T E[A_i] u\Big)\Big(\frac{1}{n-1} u A_j u^T - \frac{1}{n} u^T E[A_i] u\Big)\right]$$

$$= E\bigcirc \times E\bigcirc \Rightarrow$$

مستقل از هم اند $\Leftarrow$

$$EA_i = EA_i = 0 \Rightarrow 0$$

$$\leq \sqrt{E \sum \alpha_i^2} = \sqrt{\sum E\alpha_i^2}$$

$$E\alpha_i^2 = E\left[\Big(\frac{1}{n-1}\Big)^2 (u^T A_i u)^2 + \frac{1}{n^2}(u^T E[A_i] u)^2 - \frac{2}{(n-1)n} u^T E[A_i] u\, E[u^T A_i u]\right]$$

$$= \sqrt{\sum_i E \frac{1}{(n-1)^2} (u^T A_i u)^2 + \underbrace{\Big(\frac{1}{n^2} - \frac{2}{(n-1)(n)}\Big)}_{\substack{n^2 - n - 2n^2 \\ \downarrow \\ \frac{-n-n^2}{(n-1)(n)}}} \underbrace{(u^T E[A_i] u)^2}_{\leq (\lambda_{max}, |\lambda_{min})}}$$

$$\leq \frac{\sqrt{n}}{(n-1)} \sqrt{E \underbrace{(u^T A_i u)^2}_{u^T A_i \underbrace{u u^T}_{\leq 1} A_i u}} =$$

اگر فرض کنیم $|\Sigma|_{op}$ محدود (کوچک) است

$E[A_i^2] \preceq C|\Sigma|_{op}$ اوموقع

بنابراین محدود

$$\leq \frac{1}{n-1} \sqrt{\sum_i E\, u^T A_i^2 u} = \frac{1}{n-1} \sqrt{\underbrace{\sum_i u^T E[A_i^2] u}_{\leq C \rightarrow \text{almost surely.}}}$$

$$O\left(\frac{\sqrt{n}}{n-1}\right) \approx O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \checkmark$$

Proof completed.

$$\hat{u} = \underset{u:\ \hat{\mu}(u) \geq \lambda}{\arg\min}\ \hat{R}(u) \qquad \frac{1}{n}\sum u^T x_i \geq \lambda$$

$$E\left[u^T \frac{1}{n}\sum x_i\right] \geq \lambda \Rightarrow u^T E[x] \geq \lambda \Rightarrow E[u^T x] \geq \lambda$$

$$\hat{R}(\hat{u}) = \frac{1}{n-1} u^T \sum (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T u$$

$$R(\hat{u}) = var(u^T X) = E\left[(u^T x - E(u^T x))(u^T x - E[u^T x])\right]^T$$

$$|\hat{R}(\hat{u}) - \hat{R}(u^*) + \hat{R}(u^*) - R(\hat{u})| \leq$$

$$u^* = \underset{\mu(u) \geq \lambda}{\arg\min}\ \hat{R}(u)$$

$$|\hat{R}(\hat{u}) - \hat{R}(u^*)| + |\hat{R}(u^*) - R(\hat{u})|$$

$\hat{R}(u) < \hat{R}(\hat{u}) \rightarrow$ بدیهی $\neq$ $\hat{R}, \hat{u}$ یک subset هستند.

$$u^T E[x] \geq \lambda \Rightarrow \|u\|^2 \approx O\left(\frac{\lambda^2}{\sigma^2}\right)$$

?

!! $\hat{u} = \arg\min \ldots$ !! ← ایده‌ای به ذهنم نمی‌رسید: $\hat{u}$ چطور استفاده کنم ☹

← تلاش‌هایی به کمک Bernstein. صفحه بعد.

۱- کران تلاش هایی با بدون استفاده از

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\hat{u}^T(X_i-\bar{X})(X_i-\bar{X})^T\hat{u}\right| > \delta\right) \le 2d\exp\left(\frac{-n\delta^2}{2\|u\|_2^2\|X_i-\bar{X}\|^2+b\delta}\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{\le} 2d\exp\left(\frac{-n\delta^2}{2\left(\frac{\lambda^2}{\cancel{\sigma^2}}\cancel{\sigma^2}+b\delta\right)}\right) \le 2d\exp\left(\frac{-n\delta^2}{2(\lambda^2+\beta\delta)}\right)$$

$$\le 2\exp\left(\frac{-n\delta^2}{2(\lambda^2+\beta\delta)}+\lg d\right) \Rightarrow$$

$$\delta=\sqrt{\frac{\lg d}{n}} \Rightarrow \left(\frac{-\lg^2 d}{2\left(\lambda^2+\beta\frac{\sqrt{\lg d}}{\sqrt{n}}\right)}+\lg d\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-\lg^2 d\sqrt{n}}{2(\lambda^2\sqrt{n}+\beta\sqrt{\lg d}}+\lg d\right)$$

$$n \gg \lg d \Rightarrow \frac{-\lg^2 d\sqrt{n}}{\lambda^2\sqrt{n}+\beta\sqrt{\lg d}} \approx \frac{-\lg^2 d\cancel{\sqrt{n}}}{\lambda^2\cancel{\sqrt{n}}} = -\frac{1}{\lambda^2}\lg^2 d \approx O(\lg^2 d)$$

$$\Rightarrow -\lg^2 d+\lg d \approx O(-\lg^2 d)$$

$$\hat{R}(\hat{u})-R(\hat{u}) \le \sqrt{\frac{\lg d}{n}}$$ ⇐ به قاعده احون/سیم