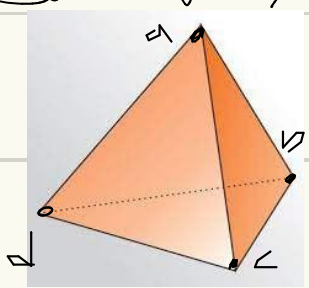
سوال دوم

الف) به دو طریق ثابت می‌کنیم که جواب 4 است.

روش اول ← خاص‌گرا در 3 بعد.

ابتدا ثابت می‌کنیم که $V \geq 4$ است.

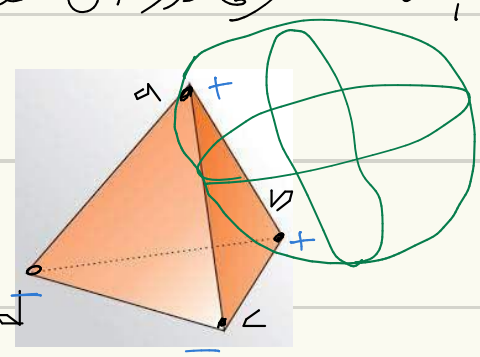



مثلاً

یک هرم را در نظر بگیرید. هر labelling از هرم داده شده قابل شکسته شدن است.

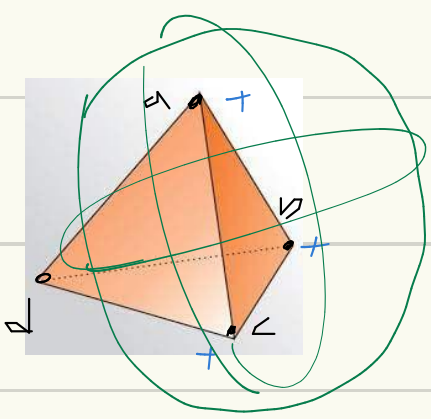
- اگر تنها یکی از 4 تا + حسب بالها ← یکی در آن نقطه ✓

اگر دو نقطه ← به صورت مقابل




برای هر ترکیب دوتایی از نقاط این ممکن است. ✓

اگر 3 تایی بالها هر ترکیب سه‌تایی




به همین صورت ممکن است.

هر 4 تا بالها کره بزرگی که ⊠ داخلش باشد.

بنابراین ثابت کردیم که $T = \{a, b, c, d\}$ و $|T| = 4$ توسط کره‌ها در فضای 3 بعدی شکست‌پذیر است. ⇐ $V \geq 4$

حال ثابت می‌کنیم که هیچ 5 نقطه‌ای در فضا قابل شکستن نیستند ( $V < 5$ )

فرض کنید یک مجموعه $S$ نقطه‌ای در فضا وجود داشته باشد که توسط کره قابل شکسته شدن باشد.

این یعنی که به ازای هر زیرمجموعه از مجموعه $S$ یک مجموعه $\Omega$ وجود دارد که درون یک کره قرار می‌گیرد در حالی که بقیه قرار نمی‌گیرند. و یک کره که مجموعه $S \setminus \Omega$ را داخل خود جای داده و این بدان معناست که مجموعه $\Omega' = S \setminus \Omega$ توسط یک ابرصفحه جدا می‌شوند.

در حالی که می‌دانیم $VC$ ابرصفحه‌ها برابر $(d+1)$ است و این تناقض است. $\Leftarrow$

$$\left.\begin{array}{l} VC < 5 \\ VC \geq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow VC = 4$$

در طریق دوم این موضوع را اثبات می‌کنیم.

اثبات دوم: ثابت می‌کنیم که کره‌ها در فضای $R^d$ $VC = d+1$ دارند $\Leftarrow$ $3+1=4$

فرض کنید که ابرصفحه‌ها را ابتدا در نظر بگیریم (با کمک این حقایق تحقیق آخر روش اول به جواب می‌رسیم)

می‌خواهیم نشان دهیم $VC$ آنها برابر یک است. کافی است $d+1$ نقطه پیشنهاد دهیم که توسط ابرصفحه جدا شوند $\Leftarrow$ تفاضل

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = [1, 0, \dots] \\ u_1 = [1, 1, \dots] \\ u_2 = [1, 0, 1, \dots] \\ \vdots \\ u_3 = [1, \dots, 0] \end{array}\right\} \Rightarrow U = \{ (1, x_{1:d}) \mid x_i \in \{0,1\}, \sum_{i=1}^{d} x_i \leq 1 \}$$

$1 \leq i \leq d$

مجموع $U$ مجموع نقاط خط‌دار است که شکل می‌دهند.

$$X = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_d \end{bmatrix} \rightarrow \text{هر ترکیبی از لیبل‌ها}$$

حال داریم: $W = (w_0, \dots, w_d)$

$$XW = Y$$

بنابراین داریم:

$$w_0 = y_0$$

$$w_0 + w_i = y_i \Rightarrow w_i = y_i - w_0 \Rightarrow w_i = y_i - y_0$$

$$1 \le i \le d$$

بنابراین یک $w$ وجود دارد $\Leftarrow$ یک ابرصفحه وجود دارد که تفاضل را جدا می‌کند.

(این اثبات را قبلاً در درس ML داشتیم.) تعداد نقاط

بنابراین سیستم خطی حل‌پذیر است $\Leftarrow$ $VC \ge d+1$ ابرصفحه

اگر $d+2$ نقطه داشتیم یعنی $\Leftarrow$

$$X \in R^{(d+2)\times(d+1)}$$

$$W \in R^{(d+1)(d+1)}$$

می‌دانیم که در فضای $d+1$ بعدی $d+2$ امین بردار را می‌توان به صورت ترکیب خطی بقیه نوشت.

(دقت کنید که مقدار $b$ در $ax+b$ یک بعد به حالا مزوده است!!)

zero indexing

$$P_{i+1} = \sum_{i=0}^{d} a_i P_i$$

حال قرار دهید. $y_i = \text{sign}(a_i)$

$$P_{i+1} W = \sum_{i=0}^{d} a_i P_i w_i$$

$\Leftarrow$ فرض $W$ ای shatter کند.

$y_i = \text{sign}(a_i)$ از طرفی $\text{sign}(P_i w_i) = y_i$ $\Leftarrow$ $a_i P_i w_i > 0$ $\Leftarrow$

$P_{i+1} W$ باید + باشد. $\Leftarrow$ $y_{i+1} = +$ ولی اگر حتی گذاشتن با کلید دیگر

امکان ندارد shatter کند.

$\Leftarrow$ با این لیبل گذاری هیچ $w$ نمی‌تواند بیشتر از $d+1$ نقطه را

shatter کند.

بنابراین $VC = d+1$ (برای صفحه)

حال به حساب ۱ عملی بزرگتر کره های $R^d$ آیا می توانند $d+2$ نقطه را shatter کنند؟ برای $d+1$ تنها کافی است ← نقطه مبدأ به همراه $d$ تا بردارهای بعد:

$U = \{\{\emptyset, (x_1, \dots, x_d)\} \mid \sum x_i = 1 \ , \ x_i \in \{0,1\}\}$ کره که shatter نشده

$|U| = d+1$ و shatter می شود.

برای $d+2$ نقطه داریم. ← به طور کلی convex hull مجموع نقاط را در نظر بگیرید.

اگر نقطه ای داخل این convex hull نه بر روی سطح وجود داشته باشد آنگاه به خاطر convex بودن کره ← می توان shatter کرد (نقطه داخلی را - و بقیه را + بگذارید.

در حالتی که مرز convex شامل نقاطی نقاط باشد. دو نقطه با بیشترین فاصله از هم که همسایه نیستند را انتخاب کنید کره شامل آنها و می تواند شامل حداقل یکی از نقاط دیگر نباشد.

← shatter می کند ← $VC = d+1$ کره

$d = 3 \Rightarrow VC = 4$ ✓

ب صفحه بعد.

ب

حجم مکعب.

$$\int s\,dz = zs \qquad \int s'\,dz = zs$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow V = z^n$$

$\Leftarrow$ حجم مکعب برابر $2^n$ است.

شعاع کره بودید $\Leftarrow$ فاصله مرکز تا هر رأس مکعب $\Leftarrow$ $\sqrt{\sum (\pm 1)^2} = \sqrt{d}$

$\Leftarrow$ $\sqrt{d}-1$ دایره مماس $\Leftarrow$ شعاع این کره $(\sqrt{d}-1)$

خیر این کره کاملاً داخل مکعب قرار نمی‌گیرد. $\Leftarrow$ شعاع کره $\sqrt{d}-1$

$\Leftarrow$ cube surface. $\leftarrow \|X\|_\infty = 1$ $\leftarrow$ $X' = (0, \dots, 1)$

روی کره است. $\leftarrow$ فاصله $X'$ تا مرکز برابر ۱ است.

$$\sqrt{d}-1 > 1 \Rightarrow \sqrt{d} > 2 \Rightarrow d > 4$$

برای ابعاد که به بعد دیگر کره داخل مکعب نیست.

$\log n! \le (n+1)\log(n+1) - n$

$-\log n! \le -(n+1)\log(n+1) + n$ $\leftarrow$ چون منفی است

کش مکش

نسبت حجم:

$$R = \frac{\pi^{d/2}}{(d/2)!}\frac{(\sqrt{d}-1)^d}{2^d} \Rightarrow \log R = \frac{d}{2}\log\pi + d\log\sqrt{d}-1 - \log\left(\frac{d}{2}\right)! - d\log 2$$

$$\frac{d}{2}\log\pi + \frac{d}{2}\log d - \left(\frac{d}{2}+1\right)\log\underbrace{\left(\frac{d}{2}+1\right)}_{d/2} + \frac{d}{2} - d$$

$d \to \infty$ $\quad \sqrt{d}-1 \approx \sqrt{d}$, $\quad \frac{d}{2}+1 \approx d/2$

$$\frac{d}{2}\log\pi + \cancel{\frac{d}{2}\log d} - \cancel{\frac{d}{2}\log\frac{d}{2}} - \log\frac{d}{2} + d/2 - d$$

$$\frac{d}{2}\log\pi - \log d/2 - d/2 = \log\left(\pi^{d/2}\,2/d\;2^{-d/2}\right) =$$

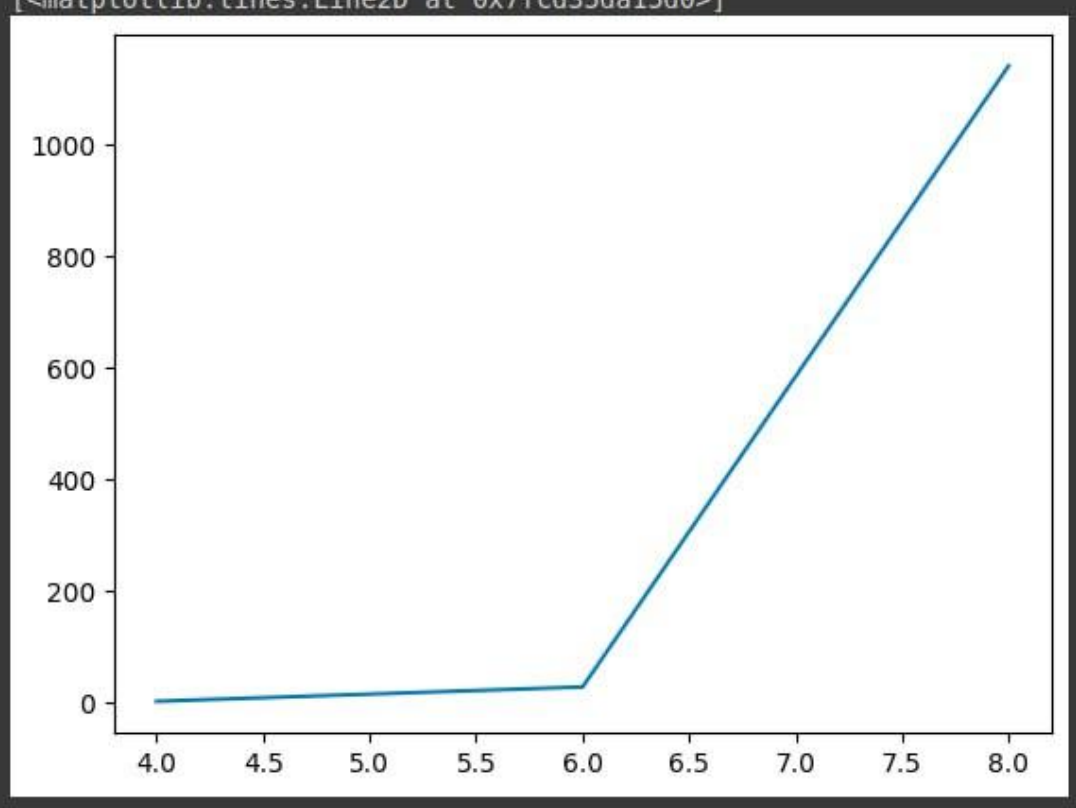
$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{d/2} 2/d \Rightarrow R = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{d/2} 2/d \rightarrow$$

حجم کره از مکعب زیاد تر میشه!

مقدار دقیق با کد ؟

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import math
import numpy as np
f = lambda d : (np.power(math.pi,(int(d/2)))) * ((np.sqrt(d) -1 ) ** d) / (2**d) * (math.factorial(int(d/2)))
x = np.array(list(range([4,10,2])))
y = np.array([f(i) for i in x])
plt.plot(x,y)
```

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcd35da15d0>]
```




$$\Rightarrow \quad R \geq \pi^{d/2} \, 2/d \; 2^{-d/2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{d/2} 2/d \approx O\left(\frac{1}{d}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{d/2}\right)$$

$$O\left(\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{d} \frac{1}{d}\right) \quad \square$$