از لم slepian استفاده می‌کنیم ← slepian ineq

فرض کنید که $(X_t)_{t\in T}$ و $(Y_t)_{t\in T}$ دو متغیر تصادفی با میانگین صفر و هر یک فرایند گوسی باشند.

آنگاه اگر $E[(X_t-X_s)^2] \le E[(Y_t-Y_s)^2]$ ⇐

$$\Longrightarrow \quad E\sup_{t\in T} X_t \le E\sup_{t\in T} Y_t$$

حال از قضیه بالا استفاده می‌کنیم:

$$X_t = \sum g_i|v_i|$$

$$Y_t = \sum g_i v_i$$

$$E[X_t] = \sum \overset{0}{\cancel{E g_i}}|v_i| = 0$$

و

$$E[Y_t] = \sum E[g v_i] = \sum \cancel{E[g_i]}\, v_i = 0$$

$$E[(X_t-X_s)^2] = E[(\sum g_i|v_i| - g_i|\hat{v}_i|)^2] = E[(\sum g_i(|v_i|-|\hat{v}_i|))^2]$$

$$\overset{①}{=} E[\sum g_i^2 (|v_i|-|\hat{v}_i|)^2]$$

از آنجا که g_i و g_j اگر $i\neq j$ با هم cov ندارند ⇐

$$① \Rightarrow E[g_i \overbrace{(|v_i|-|\hat{v}_i|)}^{\alpha_1} g_j \overbrace{(|v_j|-|\hat{v}_j|)}^{\alpha_2}]$$

$$= \alpha_1\alpha_2 \cancel{E[g_i g_j]} \Longrightarrow \begin{cases} 0 & i\neq j \\ g_i^2 & i=j \end{cases}$$

بنابراین term های g_ig_j حذف می‌شوند و در نهایت عبارت $E[\sum g_i^2(|v_i|-|\hat{v}_i|)^2]$ باقی می‌ماند.

$$(|a|-|b|)^2 \Longrightarrow \begin{cases} a>0 & b>0 \\ a<0 & b<0 \end{cases} \Rightarrow (|a|-|b|)^2 = (a-b)^2$$

$a>0\ ,\ b<0$

$$(|a|-|b|)^2 \overset{?}{\bigcirc} (a-b)^2 \Rightarrow (|a|-|b|)^2 \leq (a-b)^2$$

$$\underbrace{(|a|-|b|)^2}_{(|a|-|b|)^2} \qquad \underbrace{(a-b)^2}_{(|a|+|b|)^2}$$

$a<0\ ,\ b>0$

$$(|a|-|b|)^2 \overset{?}{\bigcirc} (a-b)^2 \Rightarrow (|a|-|b|)^2 \leq (a-b)^2$$

$$(a-b)^2 = (-|a|-|b|)^2$$

از آنکه $f(x)=|x| \leftarrow$ 1-lipt است نیز می‌توانستیم نتیجه بگیریم.

$$\Downarrow$$

$$||x|-|y|| \leq |x-y|$$

با توجه به بالا و

$$E\left[\sum g_i^2 (|v_i|-|\hat{v}_i|)^2\right] \leq \sum \cancel{E[g_i^2]}\, \|v_i-\hat{v}_i\|^2$$

$$\Rightarrow E\left[(X_t-X_s)^2\right] \leq \sum \|v_i-\hat{v}_i\|^2$$

مانند قبل داریم:

$$E\left[(Y_t-Y_s)^2\right] = E\left[\left(\sum g_i (v_i-\hat{v}_i)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\sum g_i^2 (v_i-\hat{v}_i)^2\right] = \sum \|v_i-\hat{v}_i\|^2\, \cancel{E g_i^2} = \sum \|v_i-\hat{v}_i\|^2$$

شرایط برقرار است.

$$\Rightarrow E\left[(X_t-X_s)^2\right] \leq E\left[(Y_t-Y_s)^2\right]$$

$$\Rightarrow E\left[\sup X_t\right] \leq E\left[\sup Y_t\right] \Rightarrow$$

$$E\left[\sup_{VGT} \sum g_i |v_i|\right] \leq E\left[\sup \sum g_i v_i\right]$$

✓ Proof complet

تعمیم هندسی و تعبیر هندسی از نامساوی فوق را می‌توان به دو صورت انجام داد.

۱- با توجه به اینکه $E[(X_t-X_s)^2] \leq E[(Y_t-Y_s)^2]$ شده است این امر نتیجه می‌دهد که فضا

با فرض Cov کمتری پیدا کرده است. ← فضا جمع‌تر شده است ← پیچیدگی کاهش یافته است.

2_ زمانی که مجموعه T بزرگ است و v_i هایی نیز در همه جهات هستند. z_iv_i ها می‌توانند بعضی از

علامت‌ها را cancel کنند و به complexity بیافزایند. در صورتی که $|V|$ دیگر این را ندارد.

حتی اگر یک $|V|$ بزرگ در جهت حسن باشد ← چون v_i هم‌مقدار است

در محاسبه sup اثر + می‌گذارد. ← با $|V|$ از گستردگی set کاهش دهد.

مثلاً $T=\{-a,a\}^n$ با اعمال $|\cdot|$ ← $T=\{a,a\}^T$ نیمی از صفحه را دیگر نیاز نیست

حساب کنیم زیرا دیگری همان $(a+\dots)$ را دارا بوده است ← پیچیدگی اضافه نمی‌کند.

اثبات لم Slepian در کلاس گفته شد. Proof of Slepian ineq in class