Q3) $|Z| \leq B$, $B < \gamma$ $\quad U \sim \text{unif}(-\gamma, \gamma)$

$\hat{Z} = \text{sign}(U + Z)$

الف

$$E[\gamma \hat{Z}] = E[\gamma \, \text{sign}(U+Z)]$$

$$E_Z E_{\hat{Z}|Z}[\gamma \hat{Z}] = \gamma E_Z E_{\hat{Z}|Z}[\underbrace{\text{sign}(U+Z)}_{1\{U+Z \geq 0\} - 1\{U+Z \leq 0\}}]$$

$$\Rightarrow \gamma E_Z \left[E_{\hat{Z}|Z}[1(U+Z \geq 0) - 1\{U+Z \leq 0\}] \right] =$$

$$\gamma E_Z \left[\underbrace{P(U+Z \geq 0 | Z)}_{\frac{\gamma+Z}{2\gamma}} - \underbrace{P(U+Z \leq 0 | Z)}_{\frac{(-Z+\gamma)}{2\gamma}} \right] =$$

$$\gamma E_Z \left[\frac{\gamma+Z}{2\gamma} - \frac{\gamma - Z}{2\gamma} \right] = \gamma E_Z \left[\frac{Z}{\gamma} \right] = E[Z] \quad \boxed{\checkmark}$$

ب

$|Z| \leq B$, $B < \gamma$ $\quad U \sim \text{unif}(-\gamma, \gamma)$

$\hat{Z} = \text{sign}(U + Z)$

$Y = \theta^T X + \varepsilon \qquad \hat{Y}_{k,j} = \text{sign}(Y_k + U_{k,j})$

$$\tilde{Y}_i = \gamma \frac{1}{f(n)} \sum_{j=1}^{f(n)} \hat{Y}_{i,j} = \gamma \frac{1}{f(n)} \sum_{j=1}^{f(n)} \hat{Y}_{i,j} \to \text{decompress.}$$

با توجه به بخش الف :

$$D_{approx} = \left\{ (X_k, \tilde{Y}_k) \;\middle|\; \tilde{Y}_k = \gamma \frac{1}{f(n)} \sum_{j=1}^{f(n)} \hat{Y}_{k,j} \right\}$$

$\gamma = ?$

$f(n) = ?$ $\qquad Y \sim subg(\sigma^2) \qquad \varepsilon \to subg(\sigma^2)$

$$\tilde{Y}_k = \theta^T X_k + \varepsilon_k$$

برای محاسبه γ باید γ را از تمامی Y_k ها مقدار خوبی بزرگتر ام تا بتونیم با خیال راحت تکیه کنیم

$P(\max_k |Y_k| \geq \gamma) = ?$ $\qquad \Leftarrow$ هست . $E[\max|Y_k|] < \gamma$

$$P(\max|Y_k| \geq \gamma) \leq \sum_i \underbrace{P(|Y_i| > \gamma)}_{subg(\sigma)} \leq 2n\, e^{\frac{-\gamma^2}{2\sigma^2}} = e^{\frac{-\gamma^2}{2\sigma^2} + \log 2n}$$

حالا از union bound استفاده می‌کنیم

برای اینکه عبارت بالا کوچکتر از ۰ بشه $\Leftarrow$

$$\frac{+\gamma^2}{2\sigma^2} > \log 2n \Rightarrow +\gamma^2 > \log 2n \times 2\sigma^2 \Rightarrow$$

$$\gamma > \sigma \sqrt{2 \log 2n}$$

بنابراین اگر بخواهیم. که با احتمال خیلی خوبی $\max_k |Y_k| < Y$ باشد $\Leftarrow$

$Y \gg \sigma\sqrt{2\ln 2n}$ باشد.

اینکه چیز دیگر بستگی به این داره که بخواهیم نرخ کانورج با چه نمای به سمت صفر حرکت کنه

اگر بخواهیم ثابت باشد مثلاً $e^{-1} \Leftarrow$ کافیه $Y = c\sigma\sqrt{2\ln 2n}$ باشد

ولی اگر بخواهیم که به n وابسته باشد نرخ یعنی یک تابع از n باشد کافیه که مثلاً بجای Y

$$\tilde{Y} = \overset{\text{دست ما}}{\sum_{i=0}^{k}} \underset{\text{دلبخواه}}{a_i} Y^i$$ بذاریم.

* لازم به ذکر هست که برای دقیق تر بودن چون $\tilde{Y}$ با نویز جمع میشه $\Leftarrow$

$\sigma_Y^2 + \sigma_{\text{نویز}}^2 = \sigma'^2$ پارامتر گوسی ولی چون جنسشون حدود هستند مسئله فرق زیادی نمی‌کند.

برای تعیین $f(n)$ می‌خواهیم که مقدارهای حاصل از اختلاف Y_k و $\tilde{Y}_k$ کمترین باشد.

خوشحالیم $\Leftarrow$ $E[|\tilde{Y}_k - Y_k|] \approx 0 \Rightarrow P(|\tilde{Y}_k - Y_k| > \delta) < ?\ e^{-\theta}$

اگر این هم زیر نمایی باشد خوشحالیم:

$\Rightarrow$ اولاً که حالا داریم که $E[\tilde{Y}] = Y$ هست (از بخش الف) بنابراین داریم.

$$P\left(\left|\frac{Y}{f(n)}\sum_{i=1}^{f(n)} (\tilde{Y}_{k_i}| - Y_k\right| > \delta\right)$$

$$\Rightarrow P\left(\left(\frac{\gamma}{f(n)} \sum_{i=1}^{f(n)} \tilde{Y}_{kj} - Y_k\right) > \delta\right) =$$

$$P\left(\underbrace{\frac{\gamma}{f(n)}\left(\sum_{i=1}^{f(n)}\left(Y_{kj} - \tfrac{1}{\gamma} Y_k\right)\right)}_{} > \delta\right) \rightarrow$$ می‌خواهیم این حداکثر کم باشد

$$\Leftarrow \quad P\left(\left(\sum \left(Y_{kj} - \tfrac{1}{\gamma} Y_k\right)\right) > \frac{f(n)}{\gamma}\delta\right) < e^{-O\left(\frac{f(n)}{\gamma}\cdots\right)}$$

$$P\left(\sum_j \alpha_j > \frac{f(n)}{\gamma}\delta\right) \cdots$$ خب پس باید تکه سبزرنگ رو بررسی کنیم:

اولاً که $E[\alpha_j] = E[Y_{kj}] - \frac{1}{\gamma}E[Y_k]$ که از طرفی می‌دانیم $E[\gamma Y_{kj}] - E[Y_k] = 0$ هست

$$\alpha_i \sim \left(-\gamma - \tfrac{1}{\gamma} Y_k \,,\, +\gamma - \tfrac{1}{\gamma} Y_k\right) \Leftarrow$$ (از بخش الف)

$$\Rightarrow b_{\alpha_i} - a_{\alpha_i} = 2\gamma$$ چون Y_k سمپل هست برای سادگی ثابت فرض کنید.

$$\Rightarrow \sigma^2_{\alpha_i} = \frac{(2\gamma)^2}{4} \rightarrow$$ از جزوه این را می‌دانیم.

$$\Rightarrow f(n) \times \frac{\cancel{4}\gamma^2}{\cancel{4}} \approx O(1) \Rightarrow \gamma^2 f(n) = O(1)$$

$$\Rightarrow f(n) = O(\gamma^2)$$

اگر $f(n) = O(\gamma^2)$ باشد $\Rightarrow \frac{f(n)}{\gamma} = O(1)\,O(\gamma)$ ، $-O(1)$ در نتیجه

$$P\left(\bigcirc > \frac{f(n)}{\gamma}\delta\right) < e^{-O(\gamma)}$$

به خواسته اصلی رسیدیم.

برای بازه‌های بزرگ‌تر داریم $f(n) = \sum_{a=1}^{b} (\gamma^2)^a$ که طدست =

حالت قرارداد. ⟸ اثبات کامل شد.

$\gamma \gg c\sigma\sqrt{2\log_2 n}$

$f(n) = \Theta(\gamma^2)$