دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده مهندسی کامپیوتر

سیگنال ها و سیستم ها

گزارش تمرین دوم

امیر حسین باقری

۹۸۱۰۵۶۲۱

استاد

دکتر صامتی

۲۳ آبان ۱۴۰۰

فهرست مطالب

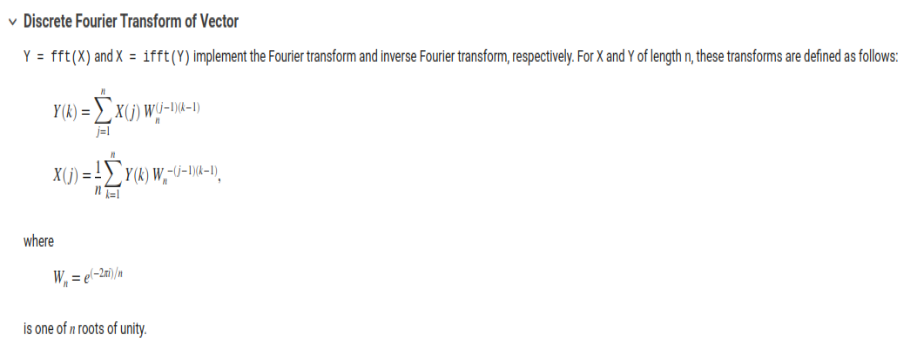
فهرست مطالب ۱
۱ توضیحات مرتبط به تابع fft ۲
۲ الف) توابع سینوس و کسینوس ۲
۳ ب) تابع rect ۳
۴ Fourier Transform توابع ۳
۵ پ) رسم توابع ۴
۱.۵ $x1 = sin\_func(256, 8)$ ۴
۲.۵ $x2 = cos\_func(256, 32)$ ۴
۳.۵ $x3 = 2x1 + x2$ ۴
۴.۵ $x4 = rect(1024)$ ۵
۵.۵ تابع کمکی رسم توابع ۵
۶ ت) ft_top_n_components ۶
۷ پ ۸
۱.۷ X3 ۸
۲.۷ rect(1024) ۹
۳.۷ علت تفاوت ۱۰
۸ ث ۱۱
۱.۸ cos(128,16) ۱۱
۲.۸ cos(512,64) ۱۲
۳.۸ cos(2048,256) ۱۳
۴.۸ بررسی نمودار ها ۱۳
۹ ج ۱۴
۱.۹ rect(256) ۱۴
۲.۹ rect(1024) ۱۵
۳.۹ rect(4096) ۱۶
۴.۹ بررسی نمودار ها ۱۷

۱ توضیحات مرتبط به تابع fft

نکات زیر درباره تابع fft برای فهم نمودار ها و درک علل تفاوت ها لازم است.
اول آنکه تابع fast fourier transform یک تابع برای سیگنال های گسسته است بدان معنا که سیگنال ورودی را به صورت

$$X[n]$$

محاسبه می‌کند که n یک شروع می‌شود. بدین شکل شیفت دادن سیگنال ها تاثیری در فازشان نخواهد داشت.
نکته دوم آنکه با افزایش تعداد سمپل ها از تابع اصلی به حالت پیوسته بیشتر نزدیک می‌شویم و بدین معنا تبدیل فوریه نیز به حالت پیوسته شبیه تر می‌شود.
نکته سوم درباره فاز تبدیل فوریه است. . در حالتی که از تابع اصلی سمپل میگیریم مقدار فاز تنها در جاهایی مهم است و مورد بررسی قرار می‌گیرد که اندازه تبدیل فوریه صفر نباشد. (Click This
بررسی بیشتر فاز تابع fft


Discrete Fourier Transform of Vector

Y = fft(X) and X = ifft(Y) implement the Fourier transform and inverse Fourier transform, respectively. For X and Y of length n, these transforms are defined as follows:

$$Y(k) = \sum_{j=1}^{n} X(j)\, W_n^{(j-1)(k-1)}$$

$$X(j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y(k)\, W_n^{-(j-1)(k-1)},$$

where

$$W_n = e^{(-2\pi i)/n}$$

is one of n roots of unity.

$$F(\omega) = \frac{1}{N}\sum x[k]e^{\frac{2\pi j(k-1)(\omega-1)}{N}} =$$

$$\frac{1}{N}\sum x[k](cos(2\pi(k-1)(\omega-1)\frac{1}{N}) + jsin(2\pi(k-1)(\omega-1)\frac{1}{N}))$$

$$phase(DFT) = Arctan(\frac{\sum x[k]sin(2\pi(k-1)(\omega-1)\frac{1}{N}))}{\sum x[k](cos(2\pi(k-1)(\omega-1)\frac{1}{N})})$$

$$|phase| \leq \pi$$

بنابر این فاز بدست آمده در نقاطی که بررسی در آنها مهم است بین عدد پی و منهای پی بر حسب درجه بر پی است.

۲ الف) توابع سینوس و کسینوس

در متلب به سادگی این توابع را در یک خط تعریف می‌کنیم.

```
sin_func = @(N,M,t) sin(2*pi*M*t/N) .* (t ≥ 0 & t≤N);
cos_func = @(N,M,t) cos(2*pi*M*t/N) .* (t≥ 0 & t≤ N);
```

۳ ب) تابع rect

در متلب به سادگی این تابع را درنیز در یک خط تعریف می‌کنیم.

```
rect_func = @(N,t) 1 .*((t>(N/4)) & (t < 3*N/4)) + 1/2 .*(t==...
N/4 | t==3*N/4);
```

۴ توابع Fourier Transform

$$a)\ sin_func(N,M) = sin(\frac{2\pi \times M}{N} * (t - \frac{N}{2})) \longrightarrow \omega_0 = \frac{M}{N}$$
$$F_s(sin_func(N,M)) = \frac{\pi}{j}(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)) =$$
$$\frac{\pi}{j}(\delta(\omega - \frac{M}{N}) - \delta(\omega + \frac{M}{N})) \longrightarrow F(\omega) = e^{-j\omega\frac{N}{2}}\frac{\pi}{j}(\delta(\omega - \frac{M}{N}) - \delta(\omega + \frac{M}{N}))$$

$$b)\ cos_func(N,M) = cos(\frac{2\times\pi\times M}{N} * (t - \frac{N}{2})) \longrightarrow \omega_0 = \frac{M}{N}$$
$$F_s(cos_func(N,M)) = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) =$$
$$\pi(\delta(\omega - \frac{M}{N}) + \delta(\omega + \frac{M}{N})) \longrightarrow F(\omega) = e^{-j\omega\frac{N}{2}}\pi(\delta(\omega - \frac{M}{N}) + \delta(\omega + \frac{M}{N}))$$

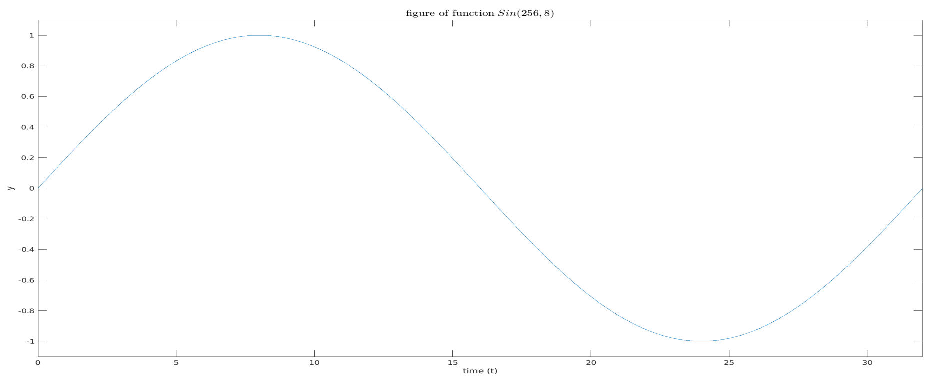
$$c)\ rect(N) = standard\_rect_N(x - \frac{N}{2})$$
$$F_s(rect(N)) = e^{-j\times\omega\times\frac{N}{2}} \times \frac{2\times\sin\frac{\omega\times N}{2}}{\omega}$$
$$\longrightarrow F(\omega) = e^{-j\times\omega\times\frac{N}{2}} \times N \times sinc(\frac{\omega\times N}{2})$$

۵ پ) رسم توابع

دقت کنید که time step رسم توابع زیر برابر 0.01 بوده است. و این بدان معناست که sampling frequency = 100

۱.۵ $x1 = sin\_func(256, 8)$

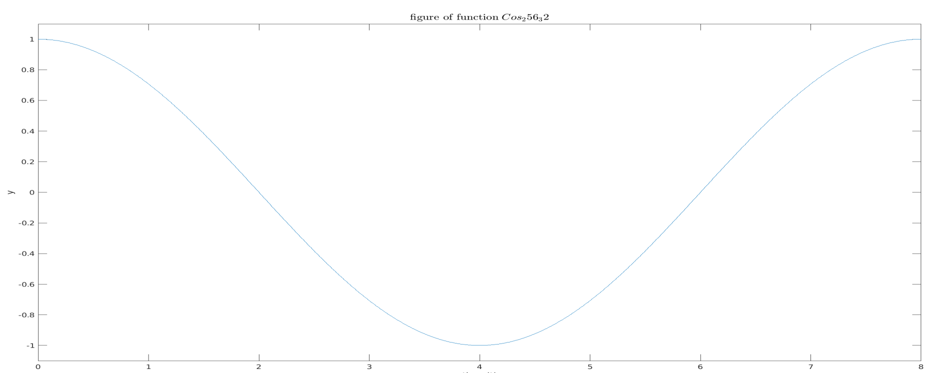
تابع را در یک دوره تناوب رسم می‌کنیم.



شکل ۱: تابع sin(256,8) در یک دوره تناوب

۲.۵ $x2 = cos\_func(256, 32)$

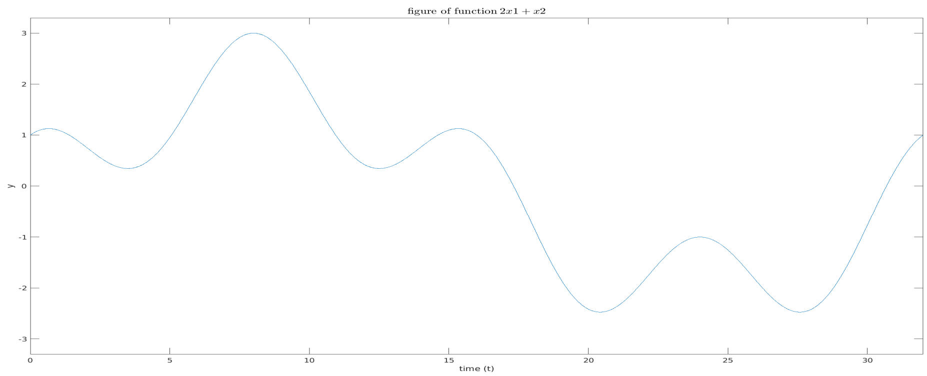
تابع را در یک دوره تناوب رسم می‌کنیم.



شکل ۲: تابع cos(256,32) در یک دوره تناوب

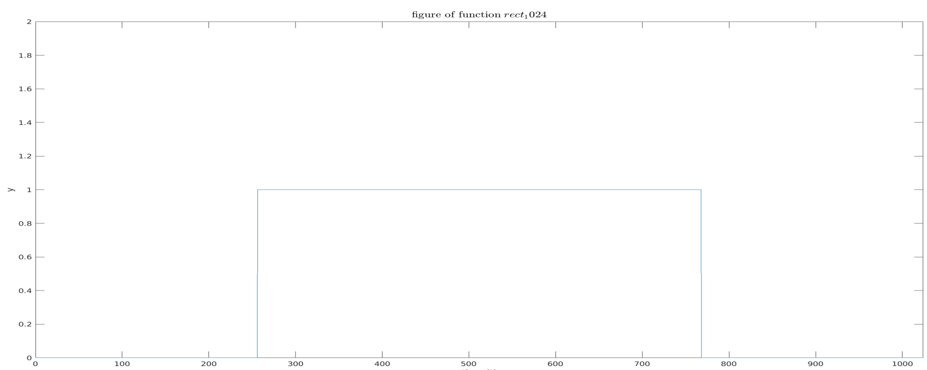
۳.۵ $x3 = 2x1 + x2$

تابع را در یک دوره تناوب رسم می‌کنیم.



شکل ۳: تابع x3 = 2x1+x2 در یک دوره تناوب

۴.۵ $x4 = rect(1024)$



شکل ۴: تابع rect(1024)

۵.۵ تابع کمکی رسم توابع

برای رسم توابع داده شده یک تابع می‌نویسیم. ورودی این تابع مقادیر دو محور عمودی و همچنین عنوان نمودار و همچنین محدوده های دو محود عمودی است. تابع پلات مد نظر را نیز با اسم عنوان ذخیره می‌کند.

```
function plot_helper(x,y,title_plot,address,x_lim,y_lim)
set(gcf,'position',[0,0,1800,900]);
plot(x,y);
xlim(x_lim);
ylim(y_lim);
title(strcat('figure of function ',title_plot),"fontsize",14,"...
    interpreter","latex");
xlabel('time (t)');
ylabel('y');
```

```
saveas(gcf,string(strcat(address,'.jpg')));
end

```

۶ ت) ft__top__n__components

این تابع سیگنال x و عدد n را به عنوان ورودی میگیرد . **البته یک ورودی دیگر نیز این تابع می‌گیرد که بازه های نمونه برداری از بازه های فرکانس در حوزه فرکانس است. دقت کنید چون این عدد متناسب با فرکانس نمونه برداری از سیگنال اصلی است نیاز داریم تا آنرا به ورودی تابع بدهیم .**
خروجی تابع تبدیل یافته سیگنال ورودی در حوزه فرکانس (yfft)و فرکانس های نمونه برداری شده (ω) و همچنین ۴ فرکانس که بیشترین اندازه را دارند(frequencies)

```
function [w,yfft,frequencies] =  ft_top_n_components(x,n,fs)
f = linspace(-fs/2, fs/2, numel(x));
yFft = fft(x);
yFftshift = fftshift(yFft);
absoluteval = abs(yFftshift);
start_index = ceil(numel(x)/2);
end_index = numel(x);
abs_val = absoluteval(start_index:end_index);
[sortedX, sortedInds] = sort(abs_val(:),'descend');
index = sortedInds(1:n)+start_index-1;
yfft = yFftshift;
frequencies = f(index);
w = f;
end

```

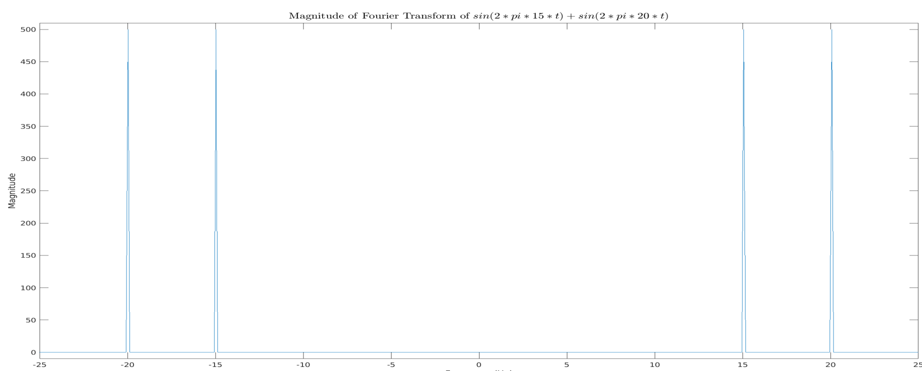
حال با استفاده از خروجی تابع بالا و یک تابع دیگر اشکال مورد سوال را می‌کشیم دقت کنید که نیاز به یک تابع دیگر برای زیبایی بیشتر و دقت بیشتر در بررسی نمودار ها داریم.

```
function plot_fourier_helper(y,f,threshhold,title_plot,address,...
    abs_xlim,abs_ylim,phase_xlim,phase_ylim)
absval = abs(y);
figure;
set(gcf,'position',[0,0,1800,900])%,"visible","on")

plot(f,absval)
abs_ylim(2) = max(absval+1);
abs_ylim(1) = min(absval-1);
xlim(abs_xlim)
ylim(abs_ylim)
title(strcat('asb\/ of\/ Fourier\/ Transform\/ of\/ ',title_plot)...
    ,"fontsize",14,"interpreter","latex")
xlabel('Frequency(Hz)')
ylabel('Magnitude')
shg;
saveas(gcf,string(strcat(address,'_abs','.jpg')))
y(absval < threshhold) = 0;
ph = angle(y);
```

```
figure;
set(gcf,'position',[0,0,1800,900])%,"visible","on")

plot(f,ph/pi)
xlim(phase_xlim)
phase_ylim(2) = max((ph+1)/pi);
phase_ylim(1) = min((ph-1)/pi);
ylim(phase_ylim)

title(strcat('phase\/ of\/ Fourier\/ Transform of\/ ',title_plot)...
    ,"fontsize",14,"interpreter","latex")
xlabel('Frequency(Hz)')
ylabel('Phase(Rad)')
saveas(gcf,string(strcat(address,'_phase','.jpg')))
shg;
end

```

حال توابع را با استفاده از توابع ای که در داکیومنتیشن متلب برایشان فاز و اندازه رسم شده است. یکبار تست می‌کنیم تا از صحت آن مطمعن شویم

$$x = sin(2 * \pi * 15 * t) + sin(2 * \pi * 20 * t);$$

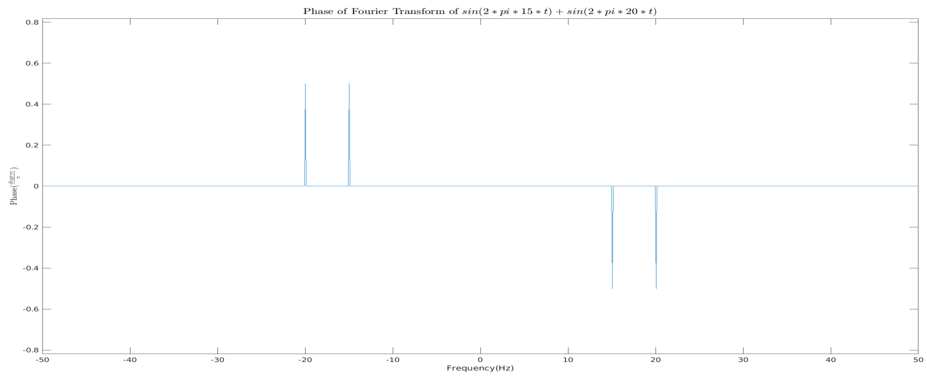


شکل ۵: اندازه تبدیل یافته

۴ فرکانسی که بیشترین اندازه را دارند:

20.0701, 15.0651 , 15.1652, 14.9650

لینک داکیومنتیشن متلب Click This



شکل ۶: فاز تبدیل یافته

برای رسم فاز آنرا بر π تقسیم کرده ایم اندازه بر حسب درجه بر پی است.

به طور کلی مقدار فاز تنها در جاهایی که فاز اندازه دارد یعنی در نقاط دلتا مهم است و در بقیه نقاط به بررسی آنها نمی‌پردازیم. از انجا که در کامپیوتر برای رسم دلتا یک دنباله متوالی از مقادیر مقدار دارند فاز را تنها در همان نقاط بررسی می‌کنیم. در حقیقت تنها در نقاطی که تبدیل فوریه دارای اندازه است فاز را بررسی می‌کنیم.

۷ پ

۱.۷ X3

ابتدا تبدیل فوریه تابع مذکور را بدست می‌آوریم. با استفاده از خواص تبدیل فوریه داریم :

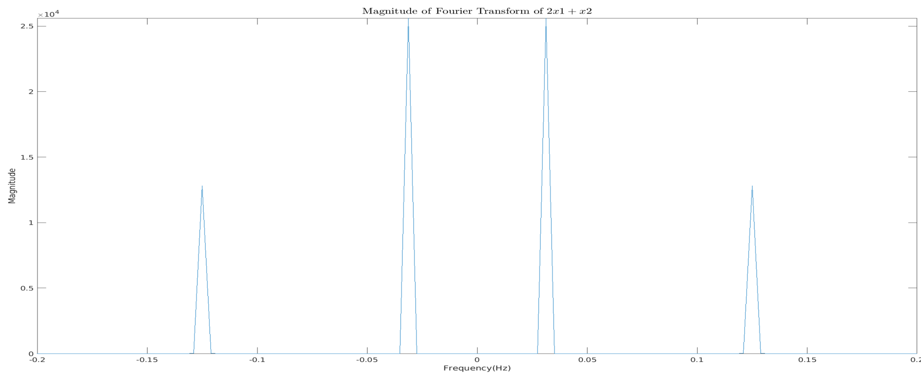
$$\omega_0 = \frac{1}{32} = 0.0312$$

$$\omega_1 = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$F(\omega) = (\frac{2\pi}{j}(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_1)) + \pi(\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)))e^{\frac{-j\omega N}{2}}$$

magnitude X3

بنابرااین انتظار ۴ نقطه دلتا در اندازه داریم .

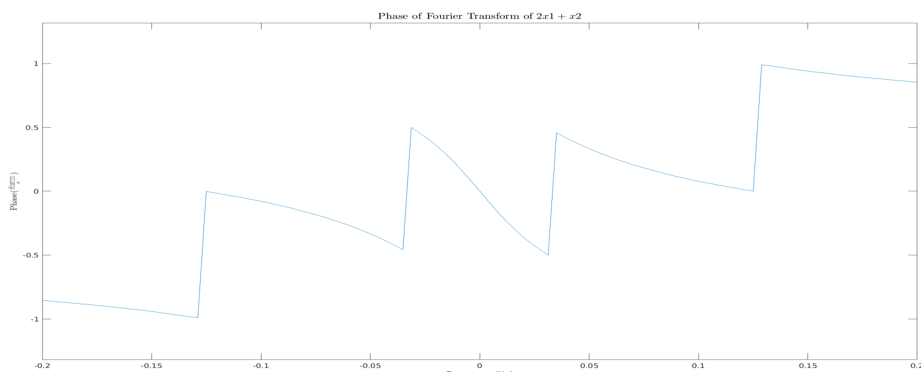


شکل ۷: magnitude of X3

نمودار کشیده شده ۴ نقطه دلتا در نقاط $-0.125, -0.0312, 0.0312, 0.125$ تایید می‌کند. دقت کنید که در متلب(کامپیوتر) نحوه ذخیره سازی به صورت گسسته است به همین منظور تابع دلتای دیراک به صورت یک مثلث نوک تیز است.

Phase X3

در نقاط دلتا که برای سینوس است مقدار تبدیل فوریه موهومی است بنابراین فاز باید برابر $\frac{-1}{2}$ یا $\frac{1}{2}$ باشد. همانطور که میبیند در نقاط -0.0312 ,0.0312 مقدار فاز یک دوم یا منفی یک دوم است(بین این دو جهش دارد) در نقاط دلتای کسینوس چون مقدار تبدیل فوریه حقیقیس فاز باید صفر باشد همانطور که میبینید در نقاط $.125$ $-$,0.125 مقدار فاز صفر است.



شکل ۸: Phase of X3

۲.۷ rect(1024)

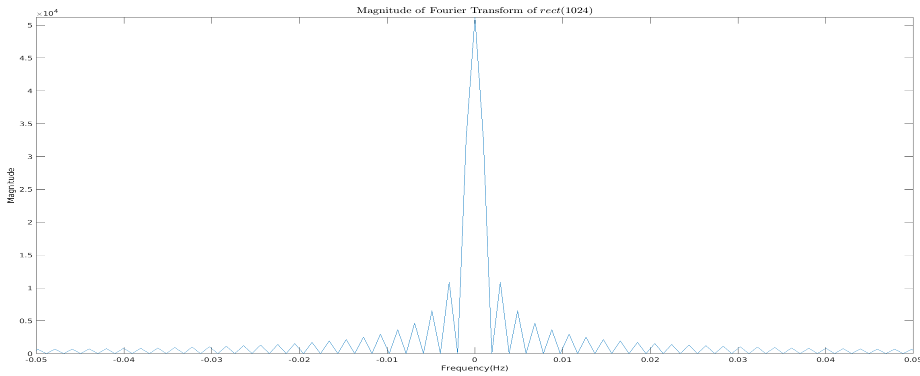
ابتدا تبدیل فوریه تابع مذکور را بدست می‌آوریم. با استفاده از خواص تبدیل فوریه داریم :

$$F(\omega) = e^{-j\times\omega\times\frac{N}{2}} \times N \times sinc(\frac{\omega\times N}{2}) = -Ne^{-j\times\omega\times\frac{N}{2}} \times sinc(\frac{\omega\times N}{2})$$

تابع فوق حقیقیس و اندازه آن تابع سینک است. همچنین چون یک تابع حقیقی است اندازه آن باید بین $\pm\pi$ و صفر نوسان کند.

magnitude rect(1024)

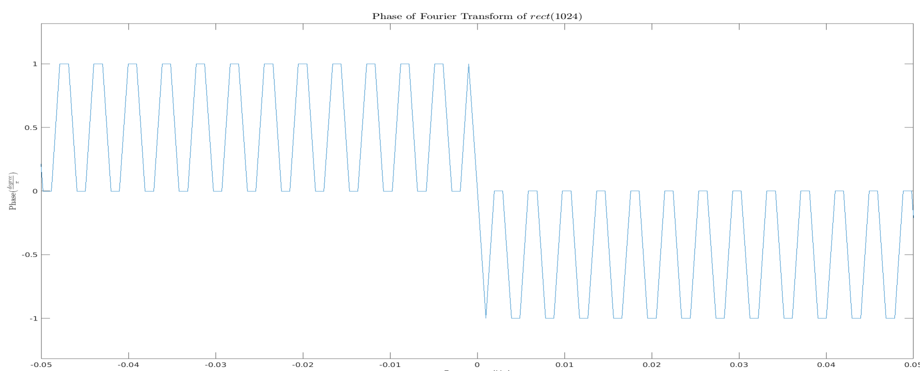
بنابراایین انتظار سینک داریم .



شکل ۹: magnitude of X3

Phase rect(1024)

انتظار یک فاز خطی در یک دوره تناوب را داریم (در قسمت اخر توضیحات مفصل داده خواهند شد.)



شکل ۱۰: Phase of rect(1024)

۳.۷ علت تفاوت

به دو علت تفاوت در نمودار های کشیده شده و نمودار های انتظاری از نظر ت‌ءوری داریم:
اول آنکه fft برای یک سیگنال گسسته است و ما با نمونه برداری سعی در نزدیک شدن به حالت پیوسته را داریم و تعداد نمونه برداری از سیگنال اصلی رکن مهمی است و در نمودار های بدست آمده تاثیر دارد.

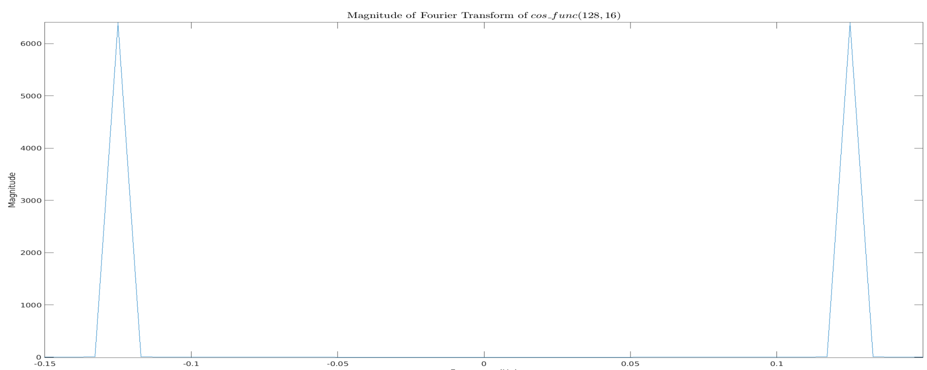
دوم آنکه در کامپیوتر همه چیز گسسته است و مقادیر نیز گسسته محاسبه می‌شوند به همین دلیل transition ها در کامپیوتر نمی‌توانند به خوبی برای مقادیر پیوسته عمل کنند به عنوان مثال تابع delta dirac به صورت یک مثلث نمایش داده می‌شود زیرا مقدار بی نهایت را نمی‌توان با کامپیوتر نشان داد و این سبب به وجود امدن یک شیب می‌شود حال هر چه نمونه برداری از سیگنال بیشتر باشد نمودار به حالت پیوسته بیشتر شباهت پیدا می‌کند.

۸ ث

ابتدا تمام نمودار هارا می‌کشیم سپس به بررسی آنها می‌پردازیم.

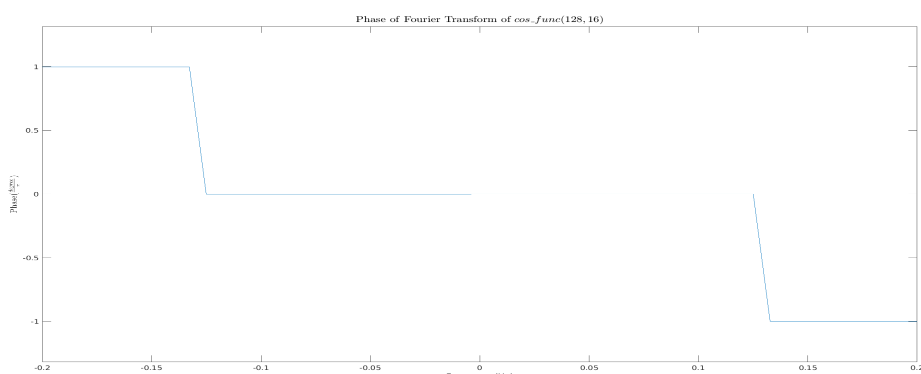
۱.۸ cos(128,16)

Magnitude



شکل ۱۱: Magnitude of cos(128,16)

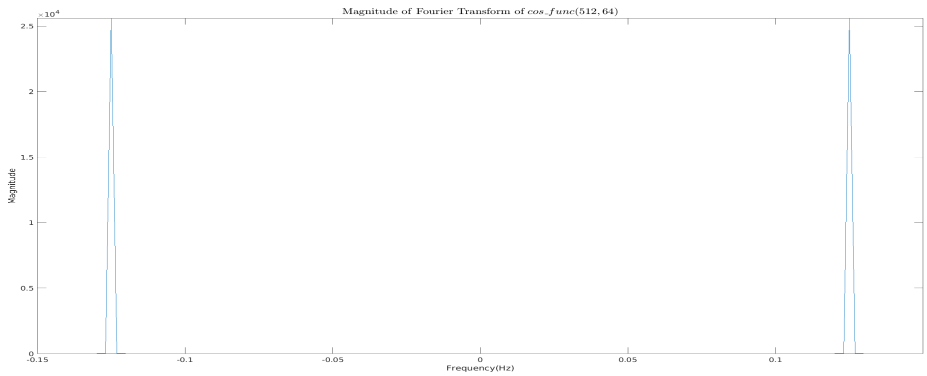
Phase



شکل ۱۲: Phase of cos(128,16)

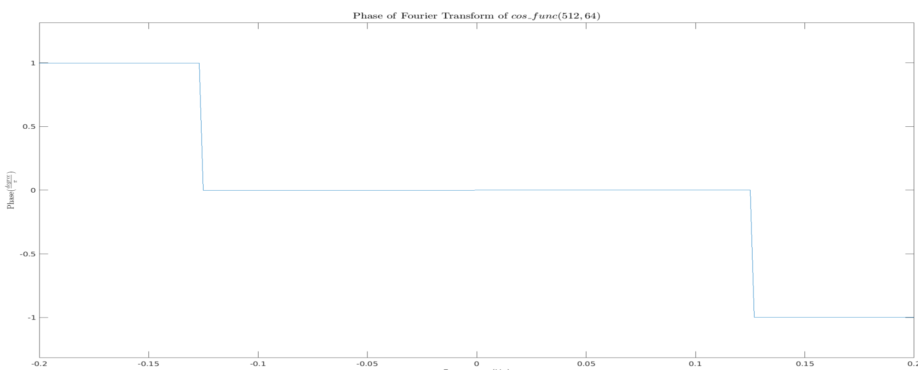
۲.۸ cos(512,64)

Magnitude



شکل ۱۳: Magnitude of cos(512,64)

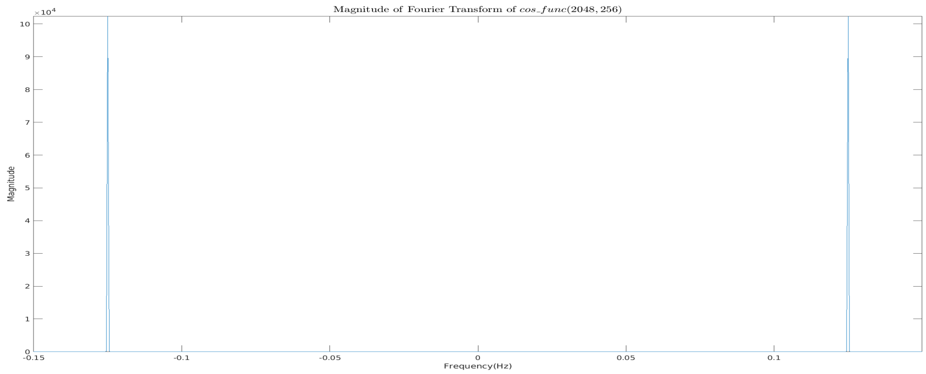
Phase



شکل ۱۴: Phase of cos(512,64)

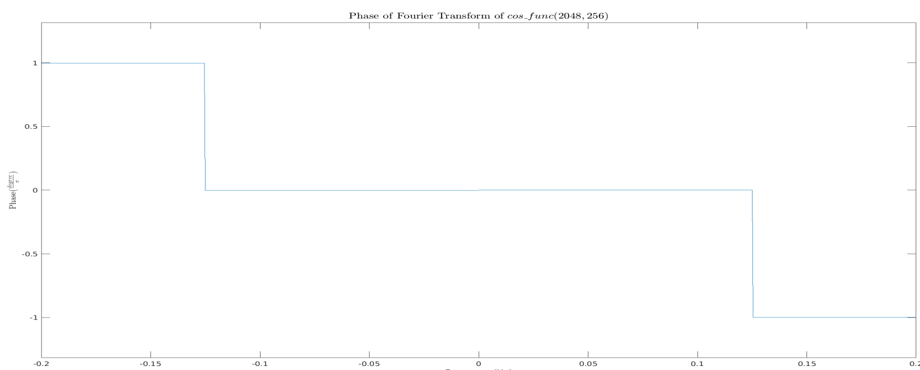
۳.۸ cos(2048,256)

Magnitude



شکل ۱۵: Magnitude of cos(2048,256)

Phase



شکل ۱۶: Phase of cos(2048,256)

۴.۸ بررسی نمودار ها

از آنجا که فرکانس سیگنال های داده شد ه یکسان است انتظار می‌رود که در نقاط یکسانی برای اندازه تبدیل فوریه delta اتفاق بیفتد. که در فرکانس های $\pm\frac{1}{8}$ (علت آنکه در نقاط $\frac{2*\pi}{8}$ اتفاق نمی‌افتد آن است که تابع fft فرکانس را بر عدد 2π تقسیم می‌کند که می‌توانید آنرا در داکیومنتیشن متلب ببینید . Click This)

است همانطور که میبینیم این اتفاق می‌افتد اما مثلثی که نمایانگر دلتا است دارای شیب متفاوت است .

همانطور که میبینید با افزایش N شیب اضلاع مثلث بیشتر و بیشتر می‌شود زیرا افزایش N به معنای افزایش تعداد نمونه ها از سیگنال اصلی است و بدین شکل مقدار تبدیل فوریه به مقدار پیوسته نزدیک و

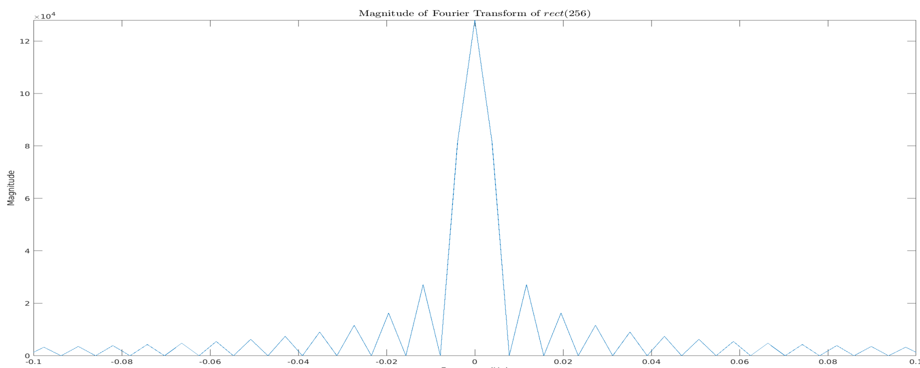
نزدیک تر می‌شود. بنابراین تاثیر افزایش N در افزایش تعداد نمونه ها از سیگنال اولیه است. افزایش تعداد سمپل ها از سیگنال اصلی سبب می‌شود که تبدیل فوریه آن به حالت پیوسته نزدیک تر شود.
در بررسی فاز نیز در دو جا فاز داریم مقادیر $\pm\frac{1}{8}$ که اما همانطور که گفتیم transition ها به صورت جهش نمی‌توانند نشان داده شوند بنابراین در آن دوجا یک شیب داریم که با افزایش N این شیب به سمت زیاد شدن می‌رود (یعنی به صورت جهش نزدیک و نزدیک تر می‌شود) بنابراین با افزایش N تعداد نمونه ها از سیگنال اصلی افزایش می‌شود و فاز به حالت پیوسته نزدیک و نزدیک تر می‌شود.

۹ ج

ابتدا تمام نمودار هارا می‌کشیم سپس به بررسی آنها می‌پردازیم.

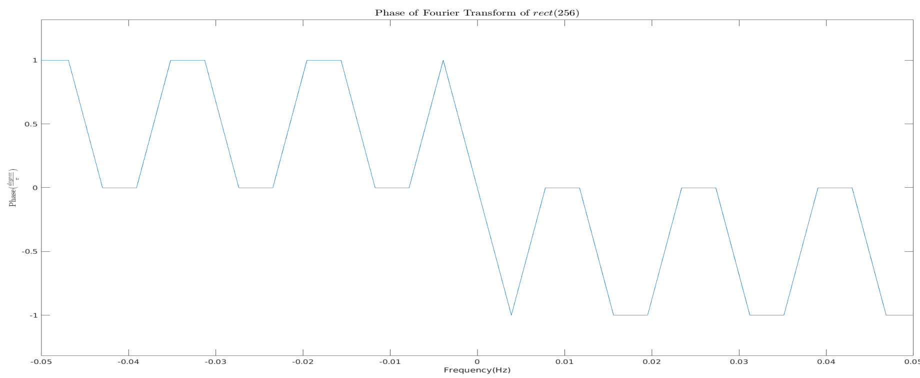
۱.۹ rect(256)

Magnitude



شکل ۱۷: Magnitude of rect(256)

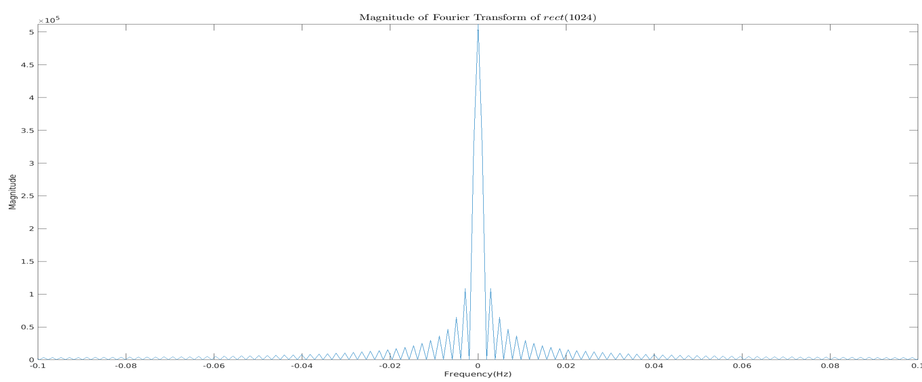
Phase



شکل ۱۸: Phase of rect(256)

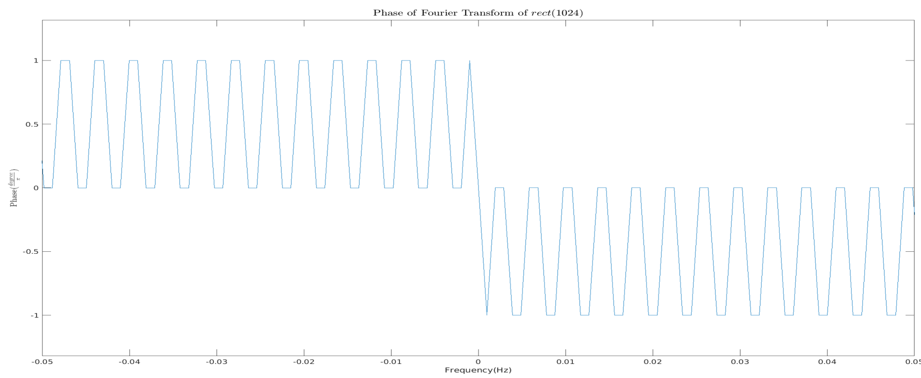
۲.۹ rect(1024)

Magnitude



شکل ۱۹: Magnitude of rect(1024)

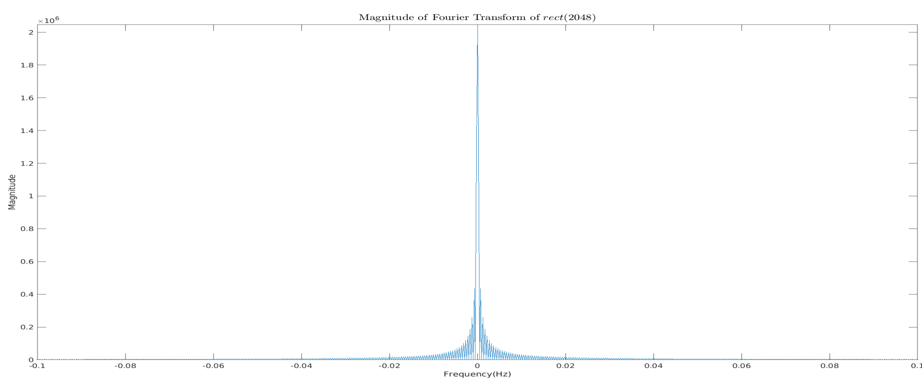
Phase



شکل ۲۰: Phase of rect(1024)

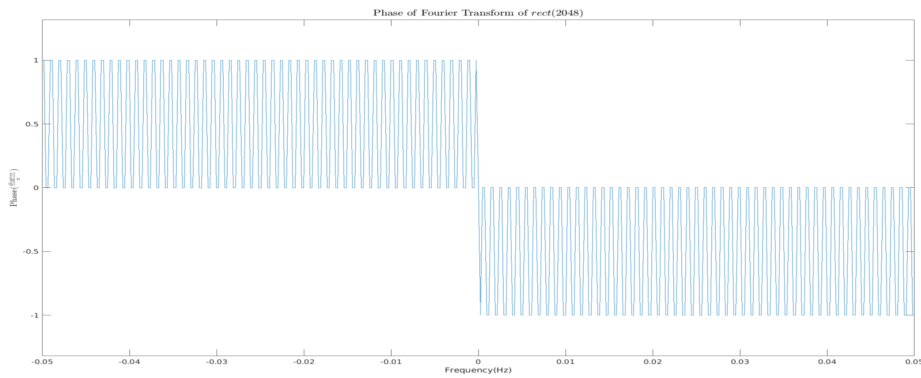
۳.۹ rect(4096)

Magnitude



شکل ۲۱: Magnitude of rect(4096)

Phase



شکل ۲۲: Phase of rect(4096)

۴.۹ بررسی نمودار ها

همانطور که در قسمت دوم بررسی کرده ایم:

$$F(\omega) = e^{-j\times\omega\times\frac{N}{2}} \times N \times sinc(\frac{\omega\times N}{2}) \longrightarrow$$
$$T = \frac{4\pi}{N}$$

$$Magnitude = |N \times sinc(\frac{\omega N}{2})|$$

$$Phase = -\frac{\omega N}{2}\ ,\ in\ one\ cycle\ \ \frac{-T}{2} < \omega < \frac{T}{2} \longrightarrow$$

$$Phase = arctan(\frac{-sin(\omega\frac{N}{2})*N*sinc(\frac{\omega N}{2})}{cos(\omega\frac{N}{2})*N*sinc(\frac{\omega N}{2})}) = arctan(tan(-\frac{\omega N}{2})$$

$$phase = -\frac{\omega N}{2}\ ,\ \frac{-2\pi}{N} < \omega < \frac{2\pi}{N}$$

همانطورکه از رابطه اندازه مشخص است انتظار یک سینک داریم و همین نیز اتفاق می‌افتد با افزایش مقدار N اولا مقدار ماکسیمم اندازه تبدیل فوریه بیشتر می‌شود که این پدیده در اسکیل محور عمودی مشخص است. همچنین با افزایش مقدارN تابع سینک نوسانات بیشتری پیدا می‌کند(زیرا تابع سینک در صورت مقدار سینوس دارد و با افزایش N تناوب فرکانس آن کوچکتر می‌شود) که این نیز در شکل به خوبی با چوله شدن نمودار در مرکز محور افقی مشخص است.

برای بررسی فاز بدین میپردازیم که با افزایش N شیب خط افزایش می‌یابد . بنابراین همانطور که مشخص است شیب خط حول صفر بیشتر و بیشتر شده است و به همین دلیل نوسانات فاز نیز افزایش یافته است.

دقت کنید همانطور که گفتیم فاز تبدیل فوریه گسسته بین پی و منهای پی است به همین دلیل در نقاطی که فاز به پی یا منهای پی رسیده است یک جهش با شیب زیاد داریم. تا به صفر برسیم. و در این نقاط به بررسی فاز نمی‌پردازیم.