

Liste de projets

21 septembre 2023

1 Pendule simple excité (*)

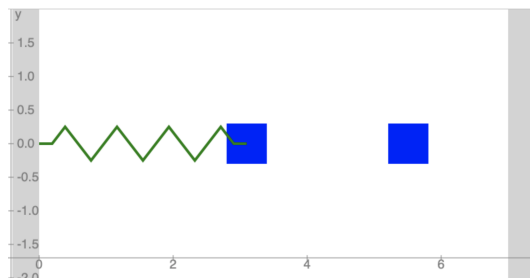
On souhaite étudier le mouvement d'un pendule excité sans et avec frottement.

On considère un pendule **rigide** de longueur l et de masse m , soumis à la force de gravité et dont le point de suspension oscille sinusoidalement selon un axe vertical. Dans un premier temps, on pourra étudier le mouvement du pendule pour différentes excitations et regarder les cas suivants : mouvement propre, excitation lente, excitation rapide, excitation rapide et forte.

Puis, dans un second temps, on pourra rajouter des frottements et observer les régimes de dynamiques chaotiques de ce type de systèmes.

2 Collisions de blocs (*)

On se propose d'étudier un modèle de collision frontale entre une masse reliée à un ressort fixe et une masse libre pouvant rebondir sur une paroi. On pourra étudier le mouvement des deux corps pour différentes masses, différentes constantes de raideur et longueur de ressort, différentes distances entre les murs... On pourra étudier le cas de collisions élastiques et non élastiques.



3 Etude du grincement d'une porte (*)

Comme le tremblement de terre, le grincement d'une porte est un problème de frottement sec (ou frottement cinétique). On se propose d'étudier ce type de

frottement dans un cas simple.

On considère pour cela une masse m tirée sur une surface plane par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k à vitesse constante v_0 et soumise à une force de frottement fluide $f = -\alpha\dot{x}$. Une fois ce mouvement bien modélisé, il faudra rajouter une force de *frottement sec* opposée au mouvement et définie par $f = -\beta e^{-|\dot{x}|/v_f}$. Etudier le mouvement de la masse dans cette nouvelle configuration et faire le lien avec la notion de grincement.

4 Courbes de poursuite (*)

On considère une proie en mouvement et un prédateur qui la poursuit en se déplaçant à vitesse constante dans une direction toujours dirigée vers la proie (ou un chien rejoignant son maître). Dans le cas particulier où la proie se déplace en ligne droite et à vitesse constante, la trajectoire du prédateur possède une solution théorique (*courbe du chien*). Mais ce n'est pas le cas de trajectoires plus complexes. Représenter les trajectoires de la proie et du prédateur (les *courbes de poursuite*) dans différentes configurations (différentes vitesses de proie et de prédateur, différentes trajectoires de proie, anticipation du prédateur etc...).

5 Lutte pour la survie (*)

On considère dans ce projet deux populations : les proies et les prédateurs. L'évolution temporelle de ces populations est régie par les équations *Lotka-Volterra*.

Résoudre ces équations et étudier les solutions pour différentes conditions initiales, différents taux de reproduction, taux de mortalité respectifs, etc... Représenter l'évolution des populations respectives, étudier l'existence et la stabilité des points fixes...

6 Sauvetage (*)

Vous êtes un sauveteur surveillant une plage de Californie. Un nageur vous fait des signes de détresse à une certaine distance de la plage. Sachant que votre vitesse est différente sur le sable et dans la mer, il faut trouver la trajectoire optimale qui minimise le temps de trajet jusqu'au nageur.

Pour différentes vitesses de propagation sur le sable ou la mer, vous chercherez et étudierez l'existence et l'unicité des trajectoires optimales. Vous étudierez également les trajectoires optimales si la vitesse est variable le long du trajet (en prenant en compte l'endurance, ou un courant marin).

7 Artillerie (*)

Le but est d'atteindre avec un projectile une cible préalablement définie

Il faudra donc modéliser le mouvement du projectile (*balistique externe*) en prenant en compte un maximum d'effets physiques (gravité, frottements, vent, stabilisation, etc etc etc...) et déterminer les paramètres de tir qui permettent d'atteindre la cible.

8 Montagnes russes (**)

Vous êtes familiers des calculs de mouvement sur des plans inclinés ? Une montagne russe est un mouvement sur une courbe... Contrairement au plan incliné, les forces changent quand la pente change...

Simuler le mouvement d'une bille glissant sur une courbe quelconque dans un champ de pesanteur (sans pouvoir décoller de cette courbe). On simulera le mouvement pour différentes conditions initiales et différents types de courbes. On pourra également rajouter des forces de frottement.

9 Effet Magnus (*)

L'effet Magnus est un effet qui s'observe sur un corps en rotation dans un fluide. Il permet notamment d'expliquer les effets de balle dans des sports comme le football et le tennis.

Etudier le mouvement d'une balle de tennis liftée et coupée.

10 Trajectoire d'un projectile (*)

On montre facilement qu'en absence de frottement la portée maximale est obtenue pour un angle de lancement de 45° . Ceci n'est plus vrai lorsqu'on prend en compte de la force de frottement.

Etudier la variation de l'angle de lancement optimal (celui qui donne une portée maximale) lorsqu'on rajoute une force de frottement fluide $f = -\alpha v^2$. Faire varier la vitesse initiale et le coefficient de frottement.

11 Modèles simples de molécules(**)

On considère des modèles simples de molécules où chaque atome est représenté par une masse reliée aux autres par des ressorts.

Simuler le mouvement des atomes de la molécule et calculer l'énergie de la molécule au cours du temps. On étudiera également le mouvement du centre de masse de la molécule. Commencer par une molécule simple (diatomique), puis éventuellement complexifier le modèle...

12 Circuit RLC (*)

Le circuit RLC est un circuit électrique composé d'une résistance R , d'une inductance L et d'une capacité C . Suivant les valeurs et l'agencement de ses trois composants, le circuit présente différents comportements. Entre autre, il peut avoir un comportement de résonance plus ou moins piquée lorsqu'il est excité.

Retrouver l'équation caractéristique pour le courant dans un circuit RLC en série, et la résoudre numériquement. Discuter des différents comportements du circuit, suivant les valeur de R , L et C .

13 Marche au hasard (*)

En mathématiques et en physique théorique, une marche au hasard est un modèle mathématique possédant une dynamique discrète composée d'une succession de pas aléatoires, ou effectués "au hasard". Elle permet par exemple de modéliser la marche d'un ivrogne qui sort d'un bar qui qui avance de réverbère en réverbère et qui à chaque fois repart de manière aléatoire dans une direction ou une autre.

On étudiera les marches aléatoires à 1 et 2 dimensions. On comparera les propriétés statistiques des distributions attendues avec les prédictions de la théorie des probabilités, comme par exemple la distance quadratique moyenne au point de départ en fonction du temps et le coefficient de diffusion associé ou encore le théorème de Polya. Pour mesurer ces propriétés statistiques plus précisément, ou pourra moyenner les résultats sur les trajectoires d'un grand nombre d'ivrognes...

14 Alunissage (*)

Une capsule est en chute verticale vers la surface de la lune. On veut la faire "alunir" avec une vitesse proche de zéro au moment de toucher le sol. On peut freiner la chute grâce à une fusée s'opposant à la descente. Etudier en fonction des paramètres (réserves de carburant, force de la fusée, et donc consommation de carburant, constante de gravitation de l'astre etc...) les possibilités d'arrivée sur un astre d'une capsule, sans que celle-ci ne s'écrase.

15 Point de Lagrange L1 (**)

Un certain nombre de sondes spatiales sont envoyées au point de Lagrange L1 du système Soleil-Terre. Ce point, situé entre la Terre et le Soleil sur l'axe Terre-Soleil, a la propriété d'être un point d'équilibre qui tourne autour du centre de masse du système Terre-Soleil à la même vitesse que la Terre et le Soleil. Un objet avec une vitesse nulle placé en ce point y reste donc en principe indéfiniment.

Calculer la position du point L1 en résolvant l'équation donnant la condition d'équilibre pour un petit objet se situant sur l'axe Soleil-Terre. Etudier le mouvement d'une telle masse dans le référentiel galiléen lié au centre de masse du système Soleil-Terre, en intégrant par une méthode numérique l'équation du mouvement à partir du point L1.

16 Propagation d'une épidémie (**)

Soit une population de personnes répartis sur un territoire, pouvant tomber malade avec une certaine probabilité mais pouvant être protégés par un vaccin.

Vous étudierez la propagation d'une maladie au sein d'une population répartie sur une grille $N \times N$ de personnes pouvant être soit saines, soit malades. Ces personnes peuvent également être vaccinés ou non. En partant d'un patient "zéro", étudiez la répartition des personnes malades au bout d'un certain temps pour différents paramètres du système : taux de vaccination de la population, mortalité de la maladie, résilience à la maladie, efficacité du vaccin, contagiosité. Vous pourrez ainsi étudier les effets d'immunité grégaire ou l'effet d'une vaccination insuffisante.

17 Dunes de sable (**)

On veut simuler l'évolution temporelle d'un tas de sable constitué d'un grand nombre de grains.

Vous simulerez un tas de sable défini par des colonnes de grains caractérisées par leur hauteur et régies par quelques règles simples définissant un *automate cellulaire*. En particulier, dès que qu'une colonne dépasse une voisine de plus de 2 tailles de grains, alors elle s'écroule sur cette voisine, c'est à dire qu'un certain nombre de grains est transféré de la première vers la seconde. On peut ainsi modéliser l'évolution d'un tas de sable au milieu duquel on verse progressivement du sable. Vous pourrez également rajouter l'effet d'un vent capable de remonter des grains d'une hauteur limitée dans une direction donnée, mais qui peut être coupé par une colonne haute, ou encore un caractère aléatoire dans toutes ces règles...

18 Mouvement brownien (**)

Le mouvement d'une macro-particule immergée dans un fluide et soumise uniquement à des interactions de type chocs avec les particules du fluide est très irrégulier. On parle de mouvement brownien.

Le but est ici de réaliser une simulation Monte Carlo dans laquelle la particule avance en mouvement rectiligne uniforme entre 2 chocs et repart un vecteur vitesse aléatoire suivant une distribution normale. On étudiera le mouvement brownien à 1, 2 et 3 dimensions. On déterminera les distances moyenne et quadratique moyenne dont la particule s'est éloignée de son point de départ en

fonction du temps. Et on trouvera le coefficient de diffusion correspondant. Il faudra pour cela moyenner les résultats d'un grand nombre de molécules. On pourra aussi étudier la probabilité de d'échappement d'une sphère, c'est à dire la probabilité de s'éloigner de plus d'une certaine distance du point de départ.

19 Formation d'agrégats (**)

On souhaite étudier ici la formation de structures en forme d'arbre appelées *dendrites*. De telles structures se forment par exemple par l'agrégation aléatoire d'ions à la surface d'une électrode (phénomène d'électrodéposition). Ce phénomène peut être décrit par un modèle de type DLA (Diffusion limited aggregation).

Sur une grille périodique à deux dimensions, on définira pour cela un agrégat de départ (une unique particule ou un groupe de particules), puis on fera diffuser de manière aléatoire d'autres particules placées initialement de manière aléatoire sur la grille. A chaque fois qu'une particule en mouvement entre en contact avec l'agrégat, elle se fige et augmente ainsi la taille de l'agrégat. On représentera la forme finale d'agrégat obtenue lorsque toutes les particules mobiles se sont agrégées. On pourra alors étudier la taille moyenne de l'agrégat (définie comme l'écart quadratique moyen au barycentre) en fonction de la densité initiale de particules mobiles. On pourra également étendre le modèle à un réseau à 3 dimensions et comparer les résultats.

20 Embouteillages (**)

Nous proposons ici d'étudier la formation d'embouteillages à travers un modèle très simplifié de réseau automobile, le modèle TASEP (*Totally Asymmetric Simple Exclusion Process*).

Ce modèle correspond à une approche Eulerienne d'un réseau discret 1D (une route) sur lequel des particules se déplacent (les voitures). A chaque pas de temps, une voiture peut se déplacer d'une case uniquement si la place devant elle est libre. Plusieurs choix différents peuvent être faits pour l'ordre dans lequel les véhicules sont avancés. On pourra aussi tester différentes types de conditions aux limites (périodiques, ouvertes avec un flux imposé en entrée et un flux limite en sortie, etc...), et rajouter un caractère aléatoire avec une probabilité q non nulle de rester à la même position, même si la place devant est libre. On pourra également raffiner le modèle en définissant des probabilités différentes d'avancer selon que le véhicule est déjà en mouvement ou non. On pourra aussi mettre en oeuvre une descriptions Lagrangienne des voitures qui permet de gérer des vitesses différentes, des accélérations, des mouvement de freinage etc...

21 Transition liquide-solide (***)

Nous proposons ici d'étudier la transition solide-liquide. Dans un liquide les particules sont désordonnées et libres de se déplacer. En revanche dans un cristal les particules sont ordonnées et forment un réseau qui se répète.

Alder et Wainwright ont montré en 1962 que si l'on modélise un liquide ou un solide par un ensemble de sphères de même rayon, lorsque la densité est faible, les sphères sont libres de se déplacer et forment un ensemble désordonné. En revanche, lorsque l'on augmente la densité, il existe une densité critique au dessus de laquelle les sphères forment un réseau ordonné et ne peuvent plus se déplacer.

L'objectif de ce projet est de redécouvrir la densité critique au-dessus de laquelle les sphères forment un cristal.

Pour cela on considérera un ensemble de disques initialement disposés selon un réseau hexagonal dans une boîte carrée. Les disques peuvent localement se déplacer de manière aléatoire si leur trajectoire n'est pas bloquée par un autre disque. On étudiera en fonction de la densité initiale la position des disques après un temps d'évolution "long".

On pourra éventuellement regarder comment le problème est modifié si les disques n'ont pas le même rayon.

22 Étude d'une carte d'itération discrète et route vers le chaos (**)

On se propose ici d'étudier un processus très simple offrant cependant une complexe diversité de résultats. Il s'agit ici d'étudier un schéma itératif Gaussien, décrit par la série suivante :

$$x_{n+1} = \exp(-\alpha x_n^2) + \beta$$

Vous essayerez d'établir une cartographie des différents comportements du système discret en fonction des paramètres β et α et des conditions initiales. Vous chercherez notamment à bien décrire le processus de doublement de période qui mène le système vers un comportement chaotique.

23 Force centrale (**)

On veut étudier le mouvement à deux dimensions d'une masse m , soumise à une force centrale dont le potentiel est quasi-harmonique : $U(r) = kr^2/2 + b/r^4$ où le second terme sera considéré comme une (petite) perturbation.

Lorsque $b = 0$, on retrouve le cas simple d'un oscillateur harmonique à deux dimensions dont la solution est une trajectoire elliptique périodique. Après avoir vérifié numériquement le comportement de ce cas analytique, on rajoutera la

perturbation anharmonique, et on étudiera son effet. On s'attachera en particulier à mesurer la vitesse de dérive de l'axe de l'ellipse (vitesse de précession) et à voir comment elle dépend des paramètres du problème.

24 Le cyclotron (**)

Ce projet a pour but de modéliser la trajectoire de particules chargées dans un cyclotron. Un cyclotron est un accélérateur de particules qui sert à accélérer des protons ou des ions lourds. Il est constitué de 2 demi-disques (des dés) se faisant face et dans lesquels des électroaimants imposent un champ magnétique vertical constant. Les ions qui rentrent d'un côté d'un dé sont déviés par le champ magnétique, ont une trajectoire circulaire et ressortent de l'autre côté. Un champ électrique alternatif est imposé dans l'espace entre les deux dés. Sa fréquence est choisie de manière à ce qu'il accélère les ions à chaque passage d'une dé à l'autre. Le rayon des trajectoires dans les dés augmente avec la vitesse (ou l'énergie) des ions, si bien qu'au bout d'un moment, ils sortent des dés et s'échappent.

On simulera la trajectoire suivie par les protons dans ce type d'accélérateurs. Lorsque le code aura été testé dans le cas classique, on pourra inclure les effets relativistes qui caractérisent les particules dont la vitesse devient proche de celle de la lumière. En particulier, il faudra inclure dans l'équation du mouvement un terme $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Dans ce cas, la fréquence du champ électrique doit être adaptée car le temps entre deux passages dépend de l'énergie des particules.

25 Ressort double (**)

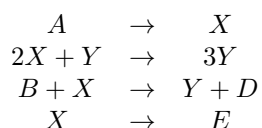
La simulation proposée est d'un système de deux masses reliées entre elle par un ressort, et dont l'une est aussi reliée à un mur par un autre ressort. La courbe des positions des deux masses l'une par rapport à l'autre (courbes de Lissajous) montre en particulier des figures assez intéressantes. Dans ce projet, vous devrez résoudre les équations de ce système et étudier numériquement les types de dynamiques. Vous pourrez étendre le système à un nombre "n" de masses et de ressorts

26 Pendule élastique (**)

La simulation proposée est celle d'un système constitué d'une masse qui pendule au bout d'un ressort. Vous devrez résoudre les équations de ce système, étudier numériquement sa dynamique, et mettre en évidence son caractère chaotique.

27 Etude d'un système dynamique classique : le "Brusellator" (***)

Le système de réaction qui sera étudié dans ce projet porte le nom de "Brusellator" et est un exemple classique de modèle de réaction chimique autocatalytique oscillante. Une réaction auto-catalytique est une réaction dans laquelle une espèce agit de façon à augmenter le taux de sa propre production. De nombreux systèmes auto-catalytiques donnent des comportements au cours du temps complexes incluant de nombreux points de stabilités et des oscillations. Le système "Brusellator" correspond aux réaction suivantes :



Il faudra étudier l'évolution temporelle des différentes concentrations $[X]$ et $[Y]$ pour différentes concentrations initiales et pour différentes concentrations $[A]$ et $[B]$ (que l'on considérera constantes). On montrera notamment qu'en augmentant le réactif "B", on arrive à faire apparaître des oscillations. On se penchera sur la notion de point fixe, de diagramme de phase et de cycle limite.

28 Système à 3 corps restreint (**)

On cherche à modéliser la trajectoire d'un petit corps dans le potentiel gravitationnel de deux autres corps massifs (par exemple un astéroïde dans le champ d'une étoile double).

Résoudre les équations du mouvement 2D dans le référentiel qui tourne avec les deux étoiles autour de leur centre de gravité. Etudier les trajectoires pour différents jeux de paramètres (conditions initiales, rapport de masse des deux étoiles etc...). Etudier la sensibilité aux conditions initiales.

29 Fibre à gradient d'indice (**)

Les applications de la fibre optique sont nombreuses (télécommunications, médecine, etc...). On peut se représenter une fibre comme un guide d'onde composé de deux cylindres concentriques : un coeur entouré d'une gaine. L'ensemble est recouvert d'un revêtement extérieur jouant le rôle de couche protectrice de la fibre. Le coeur de la fibre a un indice de réfraction légèrement plus élevé que celui de la gaine, ce qui permet le confinement de la lumière dans le coeur de la fibre, grâce au phénomène de réflexion totale. Un rayon lumineux pénétrant dans le coeur de la fibre, à l'une de ses extrémités, sous un angle d'incidence inférieur à une certaine valeur critique, peut ainsi se propager jusqu'à l'autre extrémité de la fibre. Il existe plusieurs types de fibres. On s'intéressera aux fibres multimodes à gradient d'indice pour lesquelles le coeur a un indice de

réfraction variable (maximal au centre et décroissant avec la distance r à l'axe de la fibre).

30 Réactions Nucléaires en chaîne (***)

Les réactions nucléaires en chaîne, dans une bombe atomique par exemple, résultent de la désintégration induite d'un élément chimique tel que l'uranium. L'objectif de ce projet est de simuler le comportement d'un matériau fissile en fonction de divers paramètres, comme sa taille ou sa densité. On s'attachera en particulier, pour un jeu de paramètres, à déterminer si une réaction en chaîne se produit (régime sur-critique) ou si elle s'arrête avant ce stade (régime sous-critique).

Des atomes radioactifs sont placés sur une grille 2D. L'atome central se désintègre en émettant une particule. Cette particule se déplace dans la grille avec une probabilité de se cogner contre chaque atome rencontré et de changer aléatoirement de direction et une probabilité plus faible d'induire la désintégration de l'atome rencontré. L'atome désintégré va absorber la particule et émettre 2 ou 3 neutrons. Ces neutrons vont à leur tour se déplacer sur la grille et provoquer des désintégrations. Après désintégration, l'atome devient inerte. Un neutron qui atteint le bord de la grille s'échappe et ne participe plus à la réaction. On déterminera le nombre de neutrons produits au cours du temps en variant la taille de la boîte et la probabilité d'interaction (liée à la densité du matériau), entre autres paramètres.

31 Attracteur de Lorenz (**)

La convection d'un fluide chauffée par le dessous est un mécanisme très complexe. Dans une approche simplifiée, elle peut être modélisée par un système de 3 équations non-linéaires : le système dynamique de Lorenz. Il s'agit d'un système au comportement chaotique très sensible aux conditions initiales.

L'objectif de ce projet est de résoudre ce système d'équations à partir de conditions initiales fixes, puis d'étudier les points fixes, les régimes chaotiques, les diagrammes de bifurcations...

32 Corde vibrante (***)

Les ondes sont très répandues en physique (ondes sonores, vagues à la surface de l'eau, ondes électromagnétiques,...). On cherche ici à modéliser la propagation d'une onde sur une corde vibrante (par exemple : corde de guitare). On suppose que la corde peut bouger dans le plan vertical (on néglige l'action de la gravité) et que les fluctuations de sa hauteur ne sont dues qu'à la force de tension (ou de rappel). L'évolution de la corde est régie par une équation appelée *équation d'onde*.

On étudiera l'évolution de cette corde pour des conditions aux bords fixes, et différentes conditions initiales. On pourra aussi tenter d'étudier le cas où une des deux extrémités de la corde est libre, et l'autre est excitée... ;

33 Billard (**)

L'évolution de la trajectoire d'une particule sur un billard plan peut servir de modèle pour illustrer la sensibilité d'un système aux conditions initiales.

On modélisera la trajectoire d'une bille de billard, subissant des réflexions élastiques à chaque interaction avec un bord et évoluant en ligne droite entre 2 chocs. On commencera par étudier le cas d'un billard circulaire. On pourra représenter directement les trajectoires sur le disque et/ou s'intéresser à la position et l'angle à chaque réflexion. On pourra ensuite étudier le cas d'un billard circulaire tronqué (par exemple un billard demi-circulaire).

34 Le pendule double (***)

Vous connaissez déjà la résolution analytique des équations du pendule simple, pour de petits angles. Si l'on utilise un pendule double, les équations ne sont pas plus complexes mais le système devient chaotique. Avec de minimes variations des conditions initiales, le système se retrouve dans un état fondamentalement différent.

Dans ce projet, vous devrez résoudre les équations du pendule simple dans un premier temps pour vérifier que vous savez numériquement intégrer convenablement les équations. Ensuite, vous passerez au système du pendule double (les formules sont les mêmes...) avec la même technique d'intégration. Vous étudierez alors la sensibilité aux conditions initiales du système.

Si cela ne vous suffit pas, vous pourrez étudier le cas du pendule double où les deux masses sont reliées par des ressorts

35 Anneaux de Saturne (***)

La façon dont les anneaux de Saturne se sont formés et subsistent est encore mal connue. On se propose d'étudier les limites d'une (grosse) simulation numérique.

Simuler le comportement d'un nombre élevé d'astéroïdes dans le champ de gravitation de Saturne que l'on supposera fixe. L'évolution de chaque astéroïde est donc soumise à la force de gravitation de Saturne, à celle des autres astéroïdes, et aux collisions directes avec ces derniers. Ces collisions seront prises en compte par un potentiel répulsif à courte portée. On s'intéressera par exemple au profil de densité des astéroïdes en fonction de la distance à Saturne. On pourra aussi étudier la perturbation due à la présence d'un satellite lui aussi en orbite autour de la planète géante.

36 Une histoire de lapins et de renards (**)

On imagine une prairie de surface finie contenant de l'herbe, des lapins et des renards et les règles d'évolution suivantes :

- Les lapins mangent de l'herbe. Ainsi, ils peuvent se nourrir et se reproduire. Cela augmente leur population avec un taux proportionnel à la quantité d'herbe. En parallèle, ils meurent avec un taux fixe.
- Les renards mangent les lapins. Ainsi, ils peuvent se nourrir et se reproduire. Cela augmente leur population avec un taux proportionnel à la population de lapins. En parallèle, il meurent avec un taux fixe.
- La quantité d'herbe est limitée.

Ce système simple peut donner à une grande variété de comportement selon les valeurs de coefficients de reproduction et de mortalité et les conditions initiales, en particulier des dynamiques cycliques.

Modéliser ce système et en faire une étude dynamique avec des simulations numériques. On se penchera sur la notion de point fixe, de diagramme de phase et de cycle limite

37 Potentiel de gravitation non central (***)

On veut étudier le mouvement d'une particule de masse m dans un champ de gravitation dérivant d'un potentiel de la forme $V = -\frac{\alpha}{r} + \epsilon \cos \theta$, avec $\epsilon \ll \frac{\alpha}{r}$ où (r, θ) représentent les coordonnées polaires de la masse dans le plan de la trajectoire. On sait que la trajectoire est une conique lorsque $\epsilon = 0$. On veut étudier l'effet du terme de perturbation en $\cos \theta$.

On choisira des conditions initiales telles que la trajectoire en absence de terme perturbateur soit une ellipse. Intégrer l'équation différentielle du mouvement de la particule par une méthode numérique (Euler ou méthode du point milieu). En présence du terme de perturbation, la trajectoire n'est plus fermée mais on peut considérer que c'est une quasi-ellipse sur des temps de l'ordre de grandeur de la période orbitale T caractérisant le mouvement Keplerien non perturbé. On étudiera le mouvement sur des temps $t \gg T$. Montrer que l'effet de la perturbation est double : d'une part l'excentricité de la quasi-ellipse varie, d'autre part le grand axe de l'ellipse subit une précession avec un taux de précession variable.

38 Orbites autour d'un trou noir (***)

L'espace autour d'un trou noir de masse M et sans rotation peut être décrit par la solution de Schwarzschild des équations d'Einstein. L'*horizon des événements*, marquant l'intérieur du trou noir, dont aucune information ne peut sortir, est donné par le rayon de Schwarzschild : $R_S = \frac{2GM}{c^2}$. Comme en mécanique classique, la trajectoire d'un corps massif dans le potentiel gravitationnel du trou noir est caractérisé par deux constantes : l'énergie de la

particule $\varepsilon = \eta c^2$ et son moment cinétique : $\ell = \bar{\ell} R_S c$. Cependant, les équations du mouvement sont plus complexes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 &= c^2 \left[\frac{\varepsilon^2}{c^4} - \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) \left(1 + \bar{\ell}^2 \frac{R_S^2}{r^2} \right) \right], \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\ell}{r^2}. \end{aligned}$$

Il faudra intégrer numériquement ces trajectoires (le changement de variable $u = R_S/r$ peut éventuellement simplifier un peu les équations). On pourra commencer avec $\eta^2 = 0.93$, $\bar{\ell}^2 = 4$ et $r_0 = 5R_S$. Puis, il faudra étudier les différents types de trajectoire en fonction des valeurs des paramètres η^2 , $\bar{\ell}^2$ (et dans une certaine mesure r_0).

39 Dans le brouillard (*/**)

On se propose ici d'étudier la diffusion de la lumière dans le brouillard. On modélisera pour cela la trajectoire individuelle d'un grand nombre de photons dans une couche remplie de particules diffusantes.

Nous utiliserons pour cela une simulation Monte Carlo dans laquelle les interactions sont traitées de manière statistique. Entre deux interactions, les photons se déplacent en ligne droite. Il ont une probabilité d'interagir qui suit une loi exponentielle caractérisée par un libre parcours moyen λ . La position exacte de l'interaction suivante résulte d'un tirage aléatoire selon cette probabilité. Après chaque interaction, le photon repart dans une direction aléatoire isotrope. Les photons sont injectés d'un côté d'une couche d'épaisseur L , avec une direction normale et sont avancés d'interaction en interaction jusqu'à ce qu'il ressortent d'un côté ou de l'autre de la couche. On pourra alors s'intéresser au flux transmis et réfléchis en fonction du rapport $\tau = L/\lambda$ appelé profondeur optique.