

# Calcul Différentiel III

STEP, MINES ParisTech

11 février 2021 (#9103f4f)

**Question 1 (réponses multiples)** Soit  $f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_1 x_2 \in \mathbb{R}$ . On a

☐ A:

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

☐ B: Si  $h_1 = (h_{11}, h_{12}) \in \mathbb{R}^2$  et  $h_2 = (h_{21}, h_{22}) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$d^2 f(x_1, x_2) \cdot h_1 \cdot h_2 = h_{11} h_{22} - h_{21} h_{12}$$

☐ C: Pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x + h) = \nabla f(x) + \frac{1}{2} \langle h, H_f(x) \cdot h \rangle + \varepsilon(h) \|h\|^2$$

où  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ .

**Question 2** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est deux fois différentiable en  $x \in U$  et que  $df(x) \cdot h \cdot h$  est connu pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$ , peut-on déterminer  $df(x) \cdot h_1 \cdot h_2$  pour tout  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$  ?

☐ A : oui,

☐ B : non.

**Question 3** Si  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est deux fois différentiable, combien y'a-t'il au plus de coefficients différents dans le tenseur représentant  $d^2 f(x)$  ?

☐ A : 9,

☐ B : 18,

☐ C : 27.

**Question 4 (réponses multiples)** Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\partial_{12} f(a) = \partial_{21} f(a)$ . Alors  $f$  est

☐ deux fois continûment différentiable en  $a$ ,

☐ deux fois différentiable en  $a$ ,

☐ différentiable en  $a$ ,

☐ continue en  $a$ .

**Question 5** La différentielle  $d^3 f$  d'ordre 3 d'une fonction  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

- ☐ A : associe linéairement à tout vecteur  $h$  de  $\mathbb{R}^2$  une application qui associe linéairement à tout vecteur  $k$  de  $\mathbb{R}^2$  une application qui associe linéairement à tout vecteur  $p$  de  $\mathbb{R}^2$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ .
- ☐ B : associe linéairement à tout point  $x \in U$  une application qui associe linéairement à tout vecteur  $h$  de  $\mathbb{R}^2$  une application qui associe linéairement à tout vecteur  $k$  de  $\mathbb{R}^2$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ .
- ☐ C : associe à tout point  $x \in U$  une application qui associe linéairement à tout vecteur  $h$  de  $\mathbb{R}^2$  une application qui associe linéairement à tout vecteur  $k$  de  $\mathbb{R}^2$  une application qui associe linéairement à tout vecteur  $p$  de  $\mathbb{R}^2$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ .

**Question 6** Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  est trois fois différentiable, quel est le type du tenseur représentant  $d^3 f(x)$  ?

- ☐ A : (4, 2, 2, 2),
- ☐ B : (3, 4, 2),
- ☐ C : (4, 2, 1).

**Question 7 (réponses multiples)** Si  $f$  est  $k$  fois différentiable en  $x$ ,

- ☐ A : les dérivées partielles d'ordre  $k$  de  $f$  en  $x$  existent,
- ☐ B : on a  $\partial_{i_k \dots i_1}^k f(x) = d^k f(x) \cdot e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k}$ ,
- ☐ C : ces dérivées partielles déterminent  $d^k f(x)$  de façon unique.