Calcul Différentiel, Intégral et Stochastique
MINES ParisTech/UE 11 – Examen

STEP, MINES ParisTech*

3 novembre 2020, 9h–12h

Coques fines

Dans ce problème, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et d la distance associée.

$$\|(x_1, x_2)\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \;\text{ et }\; d(x, y) := \|y - x\|.$$

Le symbole U désigne le sous-ensemble du plan constitué des points d'abscisse et d'ordonnée strictement positives et C l'arc de cercle constitué des points de U à distance 1 de l'origine.

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0\} \;\text{ et }\; C = \{x \in U \mid \|x\| = 1\}.$$

On définit la projection p sur l'arc de cercle C comme la fonction :

$$p : x \in U \mapsto \frac{x}{\|x\|} \in C.$$

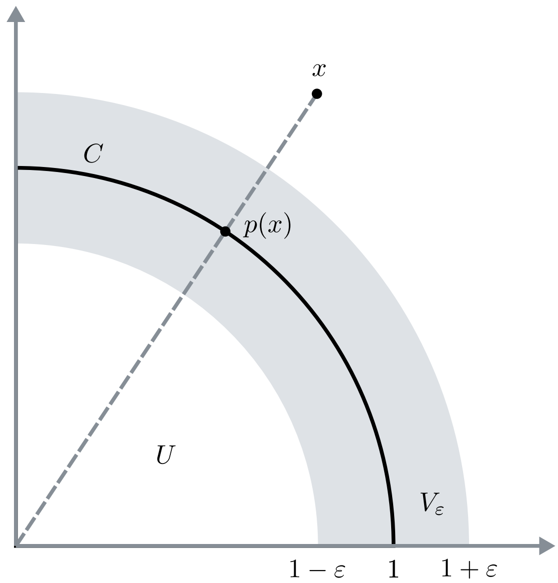
On rappelle que cette projection $p(x)$ minimise la distance entre $x \in U$ et C :

$$d(x, p(x)) = \min_{y \in C} d(x, y) =: d(x, C).$$

Finalement, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, on définit la coque de C d'épaisseur 2ε par

$$V_\varepsilon := \{x \in U \mid d(x, C) < \varepsilon\}.$$

*Ce document est un des produits du projet boisgera/CDIS, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS).



Topologie

Question 0 Montrer que l'ensemble U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \,]0,1]$

$$V_\varepsilon = U \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1-\varepsilon < \|x\| < 1+\varepsilon\},$$

et en déduire que les ensembles V_ε sont également des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Calcul Différentiel

Question 1 Montrer que les dérivées partielles de la fonction $x \in U \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ existent et en déduire la valeur de

$$n(x) := \nabla \|x\|.$$

La fonction $x \in U \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ est-elle continûment différentiable ?

Question 2 Montrer l'existence et calculer la valeur de $\nabla(1/\|x\|)$ quand $x \in U$.

Question 3 Montrer que si deux fonctions $f : U \mapsto \mathbb{R}$ et $g : U \mapsto \mathbb{R}^2$ sont différentiables, alors le produit fg également. Calculer la jacobienne $J_{fg}(x)$ en fonction de $\nabla f(x)$ et $J_g(x)$.

Question 4 Montrer que p est différentiable et que

$$J_p(x) = \frac{1}{\|x\|} P(x) \quad \text{où} \quad P(x) = I - n(x) \cdot n(x)^\top.$$

(I désigne la matrice identité de $\mathbb{R}^2$.)

Question 5 On pose

$$h(x) = p(x) + \varepsilon(x - p(x)).$$

Montrer que $h : V_1 \to V_\varepsilon$ est une bijection et déterminer $h^{-1}(y)$ quand $y \in V_\varepsilon$.

Question 6 Calculer $J_h(x)$ et montrer que h est un C^1-difféomorphisme.

Question 7 Etablir que

$$\det J_h(x) = \varepsilon \left(\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|} \right).$$

Calcul Intégral

Question 8 On note $S := [0,2] \times [0,2] \subset \mathbb{R}^2$. Que vaut l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_S(x)\, dx$$

et pourquoi ? (On ne demande pas de justifier l'existence de l'intégrale).

Question 9 Calculer $(-t(\ln t - 1))'$ pour $t > 0$ et en déduire que

$$\int_\varepsilon^2 (-\ln t)\, dt \to -2(\ln 2 - 1) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0,\ \varepsilon > 0.$$

En déduire que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ égale à $-\ln t$ quand $t \in]0,2]$ et nulle sinon est intégrable sur $[0,2]$. Est-ce que l'on pourrait se passer de la mention "et nulle sinon" pour répondre à cette dernière question ?

Question 10 Montrer l'existence et calculer

$$\int_0^2 \frac{dx_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

quand $x_2 \in]0,2]$. Indication : $\partial_{x_1} \left(\ln \left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \right) = 1/\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (la preuve de cette égalité n'est pas exigée).

Question 11 Montrer que la frontière ∂S de l'ensemble S dans $\mathbb{R}^2$ est négligeable. (On donnera ∂S sans justification.) En déduire que la fonction

$$x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left| \begin{array}{rl} 1/\|x\| & \text{si } x \in S \text{ et } x \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

est mesurable. Puis, déduire des questions précédentes son intégrabilité.

Question 12 Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que $f \circ p : U \to \mathbb{R}$ soit mesurable (c'est-à-dire que son prolongement par 0 à $\mathbb{R}^2$ est mesurable). Soit $\varepsilon \in]0, 1]$. Montrer que l'intégrale

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{V_\varepsilon} f(p(y))\, dy$$

est bien définie.

Question 13 Montrer que

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{V_\varepsilon} f(p(y))\, dy = \frac{1}{2} \int_{V_1} f(p(x)) \left(\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|} \right) dx.$$

Question 14 Déduire des questions précédentes l'existence et la valeur de

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \in]0,1]}} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{V_\varepsilon} f(p(y))\, dy.$$

Probabilités — Loi de Maxwell

On désire déterminer la distribution des vitesses des molécules d'un gaz monoatomique parfait à l'équilibre (loi de Maxwell (1859)).

On représente la vitesse d'une molécule d'un gaz monoatomique parfait à l'équilibre dans un repère orthonormal par un vecteur aléatoire $V = (V_1, V_2, V_3)$. Le choix du repère étant arbitraire, il est naturel de supposer que la loi de V est invariante par rotation (autour de l'origine) et que les composantes de V sont indépendantes.

Partie 1

Soit (X, Y, Z) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ de densité $f_{(X,Y,Z)}$. Ce vecteur aléatoire est supposé invariant par rotation : il existe une fonction $\phi : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ (strictement positive) telle que

$$f_{(X,Y,Z)}(x, y, z) = \phi(x^2 + y^2 + z^2) \text{ pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Question 1 On suppose de plus les variables aléatoires X, Y et Z indépendantes. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ qui soit une densité telle que

$$f_{(X,Y,Z)}(x, y, z) = f(x)f(y)f(z) \text{ pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Montrer finalement que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Question 2 On suppose de plus que les densités marginales de X, Y et Z ainsi que la fonction ϕ sont continûment différentiables (c'est-à-dire de classe C^1). Montrer que la densité de chacune des composantes s'écrit sous la forme $f(x) = ae^{cx^2/2}$, avec a et c deux constantes réelles.

Question 3 En déduire que le vecteur (X, Y, Z) suit une loi gaussienne d'espérance l'origine dont on précisera la matrice de covariance en fonction de la constante $\sigma = 1/\sqrt{|c|}$.

Partie 2

On suppose que le vecteur aléatoire $(X, Y, Z) = V$ vérifie les hypothèses des questions précédentes.

Question 4 Calculer l'énergie cinétique moyenne d'un atome du gaz, c'est-à-dire l'espérance

$$E_c := \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}m\|V\|^2\right)$$

où m est la masse d'un atome du gaz. L'énergie cinétique moyenne d'un atome du gaz de masse m étant égale à $\frac{3}{2}kT$ où k est la constante de Boltzmann et T la température du gaz, en déduire la valeur de σ^2 en fonction de k, T et m.

Question 5 On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de loi respective $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$, alors la loi de $X + Y$ est la loi $\Gamma(a + b, \lambda)$. On rappelle également que la densité g de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ vérifie

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\lambda^a x^{a-1}e^{-\lambda x}1_{]0,+\infty[}(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

où Γ est la fonction définie par

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx \text{ pour } a \in \left]0, +\infty\right[.$$

On remarquera que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

Calculer la loi de V_1^2. En déduire la loi de $\|V\|^2$ puis la densité de $\|V\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$. La probabilité associée est appelée loi de Maxwell.

Solutions

Topologie

Question 0 Pour tout $x = (x_1, x_2) \in U$, $d(x, U^c) = \min(x_1, x_2) > 0$; l'ensemble U est donc ouvert.

Par définition, un point x appartient à V_ε si et seulement s'il appartient à U et vérifie $d(x, C) < \varepsilon$. Or,

$$d(x, C) = d(x, p(x)) = \left\| \frac{x}{\|x\|} - x \right\| = \left| \frac{1}{\|x\|} - 1 \right| \|x\| = |1 - \|x\||.$$

L'inégalité $d(x, C) < \varepsilon$ est donc équivalente à $1 - \|x\| < \varepsilon$ et $\|x\| - 1 < \varepsilon$, soit $1 - \varepsilon < \|x\| < 1 + \varepsilon$. On a donc bien

$$V_\varepsilon = U \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - \varepsilon < \|x\| < 1 + \varepsilon\},$$

Notons $U_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - \varepsilon < \|x\| < 1 + \varepsilon\}$. L'ensemble U_ε est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque de l'intervalle ouvert $]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$ par l'application continue $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \|x\|$. L'ensemble $V_\varepsilon = U \cap U_\varepsilon$ est donc ouvert : en effet pour tout $x \in V_\varepsilon$,

$$d(x, V_\varepsilon^c) = d(x, (U \cap U_\varepsilon)^c) = d(x, U^c \cup U_\varepsilon^c) = \min(d(x, U^c), d(x, U_\varepsilon^c)) > 0.$$

Calcul Différentiel

Question 1 Comme pour tout $x = (x_1, x_2) \in U$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, l'application partielle $x_1 \in]0, +\infty[\mapsto \|x\|$ est dérivable par rapport à x_1 par dérivation en chaîne en tout point et l'on a

$$\frac{\partial \|x\|}{\partial x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \times 2x_1 = \frac{x_1}{\|x\|}.$$

Par un argument similaire, la dérivée par rapport à x_2 existe également et vaut

$$\frac{\partial \|x\|}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\|x\|}.$$

On a donc

$$n(x) := \nabla \|x\| = \left[\frac{\partial \|x\|}{\partial x_1}, \frac{\partial \|x\|}{\partial x_2} \right]^\top = \left[\frac{x_1}{\|x\|}, \frac{x_2}{\|x\|} \right]^\top = p(x).$$

La fonction p est bien continue ; la fonction $x \in U \mapsto \|x\|$ est donc continûment différentiable.

Question 2 La fonction $x \in U \mapsto 1/\|x\|$ est différentiable comme composée des fonctions différentiables $f : x \in U \mapsto \|x\| \in]0, +\infty[$, dont la matrice jacobienne en x est

$$J_f(x) = (\nabla \|x\|)^\top = p(x)^\top \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

et $g : y \in]0, +\infty[\mapsto 1/y$, dont la matrice jacobienne en y est

$$J_g(y) = g'(y) = -1/y^2 \in \mathbb{R}^{1\times 1}.$$

La règle de différentiation en chaîne fournit

$$J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x) = \frac{-1}{\|x\|^2} p(x)^\top = \left(-\frac{x}{\|x\|^3}\right)^\top.$$

On en déduit que le gradient de $g \circ f$ existe en tout point et satisfait

$$\nabla\left(\frac{1}{\|x\|}\right) = J_{g\circ f}(x)^\top = -\frac{x}{\|x\|^3}.$$

Question 3 La fonction fg est continûment différentiable car ses composantes $(fg)_1 = fg_1$ et $(fg)_2 = fg_2$ le sont par la règle du produit et le lien entre différentiabilité d'une fonction et de ses composantes. On a en outre

$$\partial_j (fg)_i = \partial_j (fg_i) = f\partial_j g_i + g_i \partial_j f$$

ce qui fournit

$$J_{fg} = fJ_g + g \cdot \nabla f^\top.$$

Question 4 En appliquant le résultat de la question précédente avec $f(x) = 1/\|x\|$ et $g(x) = x$, qui en vérifient bien les hypothèses, on obtient :

$$J_p(x) = \frac{1}{\|x\|} I + x \cdot \left(\nabla \frac{1}{\|x\|}\right)^\top = \frac{1}{\|x\|}\left(I - \frac{x}{\|x\|}\frac{x}{\|x\|}^\top\right)$$

donc on a bien

$$J_p(x) = \frac{1}{\|x\|} P(x).$$

Question 5 Soit $x \in V_1$ (c'est-à-dire $x \in U$ et $0 < \|x\| < 2$) et $y := h(x)$. En utilisant les définitions de $h(x)$ et de $p(x)$ on constate que

$$y = \left(\frac{1-\varepsilon}{\|x\|} + \varepsilon\right) x \in U$$

et donc que $p(y) = p(x)$ puisque x et y sont colinéaires. Par conséquent, y vérifie

$$\|y - p(y)\| = \|y - p(x)\| = |\varepsilon| \|x - p(x)\| < \varepsilon$$

et appartient donc à V_ε. Réciproquement, si $y \in V_\varepsilon$, alors $y = p(x) + \varepsilon(x - p(x))$ fournit $y = p(y) + \varepsilon(x - p(y))$ et donc

$$x = p(y) + \frac{1}{\varepsilon}(y - p(y))$$

donc on vérifie qu'il appartient bien à V_1 par la même méthode.

Question 6 La fonction h est bijective ; de plus par linéarité de la différentielle

$$dh(x) = d(p(x) + \varepsilon(x - p(x))) = \varepsilon I + (1 - \varepsilon)dp(x) = \varepsilon I + \frac{1 - \varepsilon}{\|x\|} P(x).$$

De façon analogue, on montre que dh^{-1} existe et que

$$dh^{-1}(y) = \varepsilon^{-1} I + \frac{1 - \varepsilon^{-1}}{\|y\|} P(y).$$

Ces deux matrices dépendent continûment de leur arguments respectifs. La fonction h est donc un C^1-difféomorphisme.

Question 7 Pour tout $x \in U$, le vecteur $n(x)$ étant unitaire, il existe une rotation $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telle que $R \cdot n(x) = e_1 := (1, 0)$. On a $R \cdot R^\top = I$ et donc $\det R \times \det R^\top = 1$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\det dh(x) &= \det R \times \det dh(x) \times \det R^\top \\
&= \det \left(R \left(\varepsilon I + \frac{1 - \varepsilon}{\|x\|} (I - n(x) \cdot n(x)^\top) \right) R^\top \right) \\
&= \det \left(\left(\varepsilon I + \frac{1 - \varepsilon}{\|x\|} (I - e_1 \cdot e_1^\top) \right) \right) \\
&= \det \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|} \end{bmatrix} \\
&= \varepsilon \left(\varepsilon + \frac{1 - \varepsilon}{\|x\|} \right).
\end{aligned}$$

Calcul Intégral

Question 8 Il y a plusieurs façons d'aborder cette question. Géométriquement, dans le cadre de la théorie de la mesure tout d'abord : on remarque que l'intégrale à calculer est par définition la mesure de l'aire de l'ensemble S (sous réserve que l'intégrale existe, ce que l'on nous demande d'admettre). Comme $S = [0, 2] \times [0, 2]$ est un pavé de $\mathbb{R}^2$, son aire est le carré de la longueur de l'intervalle $[0, 2]$, qui est $2 - 0 = 2$. Par conséquent,

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_S(x)\, dx = 2^2 = 4.$$

Alternativement, nous pouvons mener un calcul direct de l'intégrale : la fonction caractéristique 1_S vérifie pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$1_S(x_1, x_2) = 1_{[0,2]}(x_1) \times 1_{[0,2]}(x_2)$$

Si l'on admet que la fonction est intégrable, alors par le théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_S(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} 1_S(x_1, x_2)\, dx_1 \right] dx_2$$

et par conséquent, par linéarité et le théorème fondamental du calcul

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} 1_S(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} 1_{[0,2]}(x_1) \times 1_{[0,2]}(x_2)\,dx_1\right] dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,2]}(x_2) \left[\int_{\mathbb{R}} 1_{[0,2]}(x_1)\,dx_1\right] dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,2]}(x_1)\,dx_1 \times \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,2]}(x_2)\,dx_2 \\
&= \int_0^2 dx_1 \times \int_0^2 dx_2 \\
&= [x_1]_0^2 \times [x_2]_0^2 \\
&= 2 \times 2 \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Question 9 Pour tout $t > 0$, on a $(-t(\ln t - 1))' = -(\ln t - 1) - t(1/t) = -\ln t$ (la fonction est dérivable comme produit de fonctions dérivables). Pour tout $\varepsilon \in]0,2]$, la fonction $t \in [\varepsilon, 2] \mapsto -\ln t$ est continue sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ donc y est intégrable ; donc, par le théorème fondamental du calcul,

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^2 (-\ln t)\,dt = [-t(\ln t - 1)]_\varepsilon^2 &= -2(\ln 2 - 1) + \varepsilon(\ln \varepsilon - 1) \\
&\to -2(\ln 2 - 1) \ \text{ quand } \ \varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous définissons $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_k(t) = \left| \begin{array}{rl} -\ln t & \text{si } t \in [2^{-k}, 2], \\ 0 & \text{sinon,} \end{array} \right.$$

alors par additivité, on a affaire à une suite croissante de fonctions intégrables, telle que

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(t)\,dt \to -2(\ln 2 - 1) \ \text{ quand } k \to +\infty.$$

Cette suite de fonction converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ égale à $-\ln t$ quand $t \in]0,2]$ et nulle sinon. Par le théorème de convergence monotone, cette fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}$, tout comme sa restriction à $[0,2]$.

Si l'on pose la même question pour une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ égale à $-\ln t$ quand $t \in]0,2]$ et valant des valeurs arbitraires sinon, la réponse est identique. En effet sur $[0,2]$, la restriction de g ne diffère de la restriction de f que sur le singleton $\{0\}$ (ou pas du tout). Comme il s'agit d'un ensemble négligeable, g est intégrable sur $[0,2]$ car f est intégrable sur $[0,2]$.

Question 10 Pour tout $x_2 \in]0,2]$, la fonction $x_1 \in [0,2] \mapsto \ln\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$ est dérivable par la règle de dérivation en chaîne et

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1}\left(\ln\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\right) &= \frac{1}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\left(1 + \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \\
&= \frac{1}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.
\end{aligned}$$

Si $x_2 \in]0,2]$, la fonction $x_1 \in [0,2] \mapsto 1/\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ est définie (sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$) et continue, donc intégrable. Par le théorème fondamental du calcul, on a donc

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\, dx_1 = \ln\left(\frac{2 + \sqrt{4 + x_2^2}}{x_2}\right).$$

Question 11 La frontière ∂S de S est donnée comme union de quatre pavés :

$$[0,2] \times [0,0],\ [0,2] \times [2,2],\ [0,0] \times [0,2] \text{ et } [2,2] \times [0,2].$$

Les intervalles $[0,0]$ et $[2,2]$ étant de longueur nulle, l'aire de chacun de ces pavés est nulle ; chaque pavé est donc négligeable et leur union est donc négligeable.

La fonction étudiée est donc mesurable car continue presque partout (partout sauf sur ∂S, qui est négligeable). Elle est également positive ; on peut donc exploiter le théorème de Tonelli pour tenter de prouver son intégrabilité. Pour presque tout $x_2 \in \mathbb{R}$ (à part pour $x_2 = 0$), la fonction partielle $x_1 \mapsto 1_S(x_1, x_2)/\|(x_1, x_2)\|$ est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1_S(x,y)}{\|(x_1,x_2)\|}\, dx_1 = \phi(x_2) := \left|\begin{array}{rl} \ln\left(\left(2 + \sqrt{4 + x_2^2}\right)/x_2\right) & \text{si } x_2 \in]0,2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{array}\right.$$

Il nous suffit donc d'établir que cette fonction ϕ est intégrable pour pouvoir conclure que la fonction de départ est intégrable. Or pour tout $x_2 \in]0,2]$,

$$0 \leq \ln\left(\frac{2 + \sqrt{4 + x_2^2}}{x_2}\right) \leq \ln(2 + 2\sqrt{2}) - \ln x_2$$

et le second membre de cette équation est (défini presque partout et) intégrable sur $[0,2]$ d'après la question 9. La fonction ϕ, mesurable d'après le théorème de Tonelli, est donc bien intégrable par le critère d'intégrabilité dominée. Le théorème de Tonelli nous garantit donc l'intégrabilité de la fonction de départ.

Question 12 Si f est bornée par la constante M, la fonction $f \circ p$ est bornée par la même constante M. Soit $\overline{f \circ p}$ le prolongement de $f \circ p$ par zéro à $\mathbb{R}^2$. Comme $V_\varepsilon \subset S$, la fonction $1_{V_\varepsilon}\overline{f \circ p}$ est dominée par $1_S M$. La fonction $1_S M$ étant intégrable et $1_{V_\varepsilon}\overline{f\circ p}$ étant mesurable comme produit de fonctions mesurables (V_ε est ouvert, donc mesurable, ce qui garantit que 1_{V_ε} est mesurable), l'intégrale

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^2} 1_{V_\varepsilon}(y)\overline{f\circ p}(y)\,dy = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{V_\varepsilon} f(p(y))\,dy$$

est bien définie.

Question 13 On appliquer le changement de variable $y = h(x)$ pour se ramener d'une intégrale sur $V_\varepsilon = h(V_1)$ à une intégrale sur V_1. En exploitant le fait que $p(h(x)) = p(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\varepsilon}\int_{V_\varepsilon} f(p(y))\,dy &= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{V_1} f(p(h(x))|\det J_h(x)|\,dx \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{V_1} f(p(x))|\det J_h(x)|\,dx \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{V_1} f(p(x))\,\varepsilon\left(\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|}\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{V_1} f(p(x))\left(\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|}\right)\,dx
\end{aligned}$$

Question 14 Comme pour tout $x \neq 0$,

$$\left|\overline{f\circ p}(x)1_{V_1}(x)\left(\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|}\right)\right| \leq M1_S(x)\left(\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|}\right) \leq M1_S(x)\left(1 + \frac{1}{\|x\|}\right)$$

et que le membre de droite est intégrable (d'après la question 11), on peut passer à la limite sur ε par le théorème de convergence dominée dans l'équation de la question 13. On obtient alors

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon\in]0,1]}} \frac{1}{2\varepsilon}\int_{V_\varepsilon} (f\circ p)(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{V_1} \frac{(f\circ p)(x)}{\|x\|}\,dx.$$

Probabilités

Question 1 La densité du triplet (X, Y, Z) étant invariante par rotation, elle est de la forme $f_{(X,Y,Z)}(x, y, z) = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$. De plus, les variables X, Y et Z étant indépendantes, on a

$$f_{(X,Y,Z)}(x, y, z) = f_X(x)f_Y(y)f_Z(z) \;\text{ pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$; comme $\phi(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) > 0$ on a $f_{(X,Y,Z)}(x_0, y_0, z_0) > 0$ et donc $f_X(x_0) \neq 0$, $f_Y(y_0) \neq 0$ et $f_Z(z_0) \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, comme

$$f_X(x)f_Y(y_0)f_Z(z_0) = \phi(x^2 + y_0^2 + z^2) = \phi(y_0^2 + x^2 + z_0^2) = f_X(y_0)f_Y(x)f_Z(z_0),$$

on a l'égalité

$$f_X(x) = \frac{f_X(y_0)}{f_Y(y_0)}f_Y(x).$$

Comme on a par ailleurs

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x)\,dx = 1,$$

il est nécessaire que le ratio $f_X(y_0)/f_Y(y_0)$ soit égal à 1. On a donc $f_X = f_Y$; la preuve que $f_Y = f_Z$ s'obtient de manière similaire.

Pour finir, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x)^3 = f_{(X,Y,Z)}(x,x,x) = \phi(3x^2) > 0$, la fonction f est bien positive en tout point.

Question 2 L'égalité

$$f(x)f(y)f(z) = \phi(x^2+y^2+z^2) \text{ pour tout } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

implique $f(x)f'(y)f(z) = 2y\phi'(x^2+y^2+z^2)$ et $f'(x)f(y)f(z) = 2x\phi'(x^2+y^2+z^2)$. On en déduit que

$$xf(x)f'(y)f(z) = f'(x)yf(y)f(z) \text{ pour tout } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Soit $(x, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ avec $y_0 \neq 0$; on a $f(x) > 0$, $f(y_0) > 0$ et $f(z_0) > 0$. En posant

$$c = \frac{f'(y_0)f(z_0)}{y_0 f(y_0)f(z_0)},$$

on voit que

$$f'(x) = cxf(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On peut réécrire cette équation différentielle sous la forme

$$(\ln f(x))' = cx.$$

En intégrant les deux membres de l'équation entre 0 et x, on obtient

$$\ln f(x) - \ln f(0) = c\frac{x^2}{2}$$

et donc

$$f(x) = f(0)e^{cx^2/2},$$

ce qui est bien la forme cherchée $f(x) = ae^{cx^2/2}$.

Question 3 Comme $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, on a nécessairement $c < 0$ et on en déduit que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Les variables aléatoires X, Y et Z suivent donc loi gaussienne centrée et la covariance du vecteur est $\sigma^2 I_3$, où I_3 est la matrice identité.

Question 4 On a

$$\frac{1}{2}m\mathbb{E}(\|V\|^2) = \frac{1}{2}m\mathbb{E}(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2).$$

Comme $\mathbb{E}(V_i^2) = \sigma^2$, on en déduit que $E_c = \frac{3}{2}m\sigma^2$ et par conséquent que

$$\sigma^2 = \frac{kT}{m}.$$

Question 5 À l'aide de la méthode de la fonction muette, on montre que V_1^2 suit une loi gamma de paramètres $(1/2, \frac{1}{2\sigma^2})$. En effet, en appliquant le changement de variable $y = x^2$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$f_{V_1^2}(y) = \left(f(-\sqrt{y}) + f(\sqrt{y})\right)\frac{1}{2\sqrt{y}}1_{]0,+\infty[}(x) = f(\sqrt{y})\frac{1}{\sqrt{y}}1_{]0,+\infty[}(x)$$

par parité de f, soit

$$\begin{aligned} f_{V_1^2}(y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{1/2} y^{-1/2}\exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1/2)}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{1/2} y^{-1/2}\exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

On déduit de l'indication que $\|V\|^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2$ suit une loi gamma de paramètres $(3/2, \frac{1}{2\sigma^2})$. Sa densité est

$$f_{\|V\|^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\sqrt{x}e^{-x/2\sigma^2}1_{]0,+\infty[}(x).$$

À l'aide de la méthode de la fonction muette, en appliquant le changement de variable $v = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et avec $\sigma^2 = \frac{kT}{m}$, on montre enfin que $\|V\|$ est une variable de densité :

$$f_{\|V\|}(v) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}1_{]0,+\infty[}(v).$$

Il s'agit de la densité de la loi de Maxwell.