On considère l'équation de la chaleur unidimensionnelle :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\right) = 0, \tag{1}$$

sujette aux conditions aux limites de Dirichlet

$$T|_{x=-1} = \Theta, \qquad T|_{x=1} = \Theta, \tag{2}$$

où Θ est une constante positive. A l'instant $t = 0$, on suppose le profil de température connu :

$$T(x, t = 0) = T_0(x),$$

où T_0 est une fonction continue sur $[-1, 1]$ satisfaisant aux conditions aux limites de Dirichlet.

1 Approche analytique

Partons de l'hypothèse que pour tout $t > 0$, la température T est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-L, L]$. A chaque instant t, on peut exprimer la température comme la somme de Fourier partielle (selon la variable spatiale) :

$$T(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t)e^{inx}, \tag{3}$$

où on a défini :

$$c_n(t) := \int_{-L}^{L} T(u,t)e^{-i\frac{\pi}{L}nu}\mathrm{d}u. \tag{4}$$

On peut faire de même avec les dérivées spatiales d'ordre 1 et 2 de T, on sait en particulier d'après le théorème de Dirichlet que la convergence des différentes séries de Fourier ainsi définies est uniforme. Avec une simple intégration par parties, on peut montrer que

$$c_n(T^{(2)}, t) = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 c_n(T,t) \tag{5}$$

En projection sur chacune des fonctions de la base de Fourier, l'équation de la chaleur prend donc la forme :

$$\frac{\mathrm{d}c_n(T)}{\mathrm{d}t} = -\lambda\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 c_n(T,t), \tag{6}$$

de sorte que :

$$c_n(T,t) = c_n(\phi)\exp\left(-\lambda\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t\right) \tag{7}$$

2 Résolution numérique par des méthodes spectrales

3 Résolution par différences finies