

```
In[ ]:= p = Subscript[z, 1] + Subscript[z, 1]* -
Subscript[z, 2] Subscript[z, 2]* - Subscript[z, 3] Subscript[z, 3]* -
a (Subscript[z, 2]^2 Subscript[z, 2]^*^2 + Subscript[z, 3]^2 Subscript[z, 3]^*^2 -
4 Subscript[z, 2] Subscript[z, 2]* Subscript[z, 3] Subscript[z, 3]^*) -
(b Subscript[z, 2] Subscript[z, 3]^* + b* Subscript[z, 3] Subscript[z, 2]^*)
(Subscript[z, 2] Subscript[z, 2]* - Subscript[z, 3] Subscript[z, 3]^*) -
c Subscript[z, 2]^2 Subscript[z, 3]^*^2 - c* Subscript[z, 3]^2 Subscript[z, 2]^*^2
```

```
Out[ ]:= Conjugate[z1] + z1 - Conjugate[z2] z2 - c Conjugate[z3]2 z22 - Conjugate[z3] z3 -
Conjugate[c] Conjugate[z2]2 z32 - (b Conjugate[z3] z2 + Conjugate[b] Conjugate[z2] z3)
(Conjugate[z2] z2 - Conjugate[z3] z3) -
a (Conjugate[z2]2 z22 - 4 Conjugate[z2] Conjugate[z3] z2 z3 + Conjugate[z3]2 z32)
```

```
In[ ]:= f = z1 + Z1 - z2 Z2 - z3 Z3 - a (z22 * Z22 + z32 * Z32 - 4 z2 z3 Z2 Z3) -
(b z2 Z3 + B Z2 z3) (z2 Z2 - z3 Z3) - c z22 * Z32 - C Z22 z32
```

```
Out[ ]:= z1 - C Z22 z32 + Z1 - z2 Z2 - z3 Z3 - c z22 Z32 -
(B Z2 z3 + b z2 Z3) (z2 Z2 - z3 Z3) - a (z22 Z22 - 4 z2 z3 Z2 Z3 + z32 Z32)
```

```
In[ ]:= D[f, Z1]
```

```
Out[ ]:= 1
```

```
In[ ]:= D[f, Z2]
```

```
Out[ ]:= -z2 - z2 (B Z2 z3 + b z2 Z3) - a (2 z22 Z2 - 4 z2 z3 Z3)
```

```
In[ ]:= ClearAll
```

```
Out[ ]:= ClearAll
```

```
In[ ]:= f = z1 + Z1 - z2 Z2 - z3 Z3 - a (z22 * Z22 + z32 * Z32 - 4 z2 z3 Z2 Z3) -
(b z2 Z3 + B Z2 z3) (z2 Z2 - z3 Z3) - c z22 * Z32 - C Z22 z32
```

```
Out[ ]:= z1 - C Z22 z32 + Z1 - z2 Z2 - z3 Z3 - c z22 Z32 -
(B Z2 z3 + b z2 Z3) (z2 Z2 - z3 Z3) - a (z22 Z22 - 4 z2 z3 Z2 Z3 + z32 Z32)
```

```
In[ ]:= Expand[f]
```

```
Out[ ]:= z1 - C Z22 z32 + Z1 - z2 Z2 - B Z2 z2 z3 Z2 - a z22 Z22 - z3 Z3 +
B Z2 z32 Z3 - b z2 z2 Z2 Z3 + 4 a z2 z3 Z2 Z3 - c z22 Z32 + b z2 z3 Z32 - a z32 Z32
```

```
In[ ]:= f[z_, Z_, w_, W_, y_, Y_] :=
z + Z - w * W - y * Y - a * (y^2 * Y^2 + w^2 * W^2 - 4 * w * y * W * Y) -
(b * w * Y + B * W * y) * (w * W - y * Y) - g * w^2 * Y^2 - G * W^2 * y^2
```

SetDelayed: Tag Plus in

(z₁ - C Z₂² z₃² + Z₁ - z₂ Z₂ - z₃ Z₃ - c z₂² Z₃² - (B Z₂ z₃ + b z₂ Z₃) (z₂ Z₂ - z₃ Z₃) - a (z₂² Z₂² - 4 z₂ z₃ Z₂ Z₃ + z₃² Z₃²))[z_, Z_,
w_, W_, y_, Y_] is Protected.

```
Out[ ]:= $Failed
```

```
In[ ]:= ClearAll
```

```
Out[ ]:= ClearAll
```

```
In[ ]:= f[z_, Z_, w_, W_, y_, Y_] :=
  z + Z - w * W - y * Y - a * (y^2 * Y^2 + w^2 * W^2 - 4 * w * y * W * Y) -
  (b * w * Y + B * W * y) * (w * W - y * Y) - g * w^2 * Y^2 - G * W^2 * y^2
```

```
SetDelayed: Tag Plus in
```

```
(z1 - C z2^2 z3^2 + Z1 - z2 Z2 - z3 Z3 - c z2^2 Z3^2 - (B z2 z3 + b z2 Z3) (z2 Z2 - z3 Z3) - a (z2^2 Z2^2 - 4 z2 z3 Z2 Z3 + z3^2 Z3^2)) [z_, Z_,
w_, W_, y_, Y_] is Protected.
```

```
Out[ ]:= $Failed
```

```
In[ ]:= Remove["Global`*"]
```

```
In[ ]:= f[z_, Z_, w_, W_, y_, Y_] :=
  z + Z - w * W - y * Y - a * (y^2 * Y^2 + w^2 * W^2 - 4 * w * y * W * Y) -
  (b * w * Y + B * W * y) * (w * W - y * Y) - g * w^2 * Y^2 - G * W^2 * y^2
```

```
In[ ]:= F := f[z1, Z1, z2, Z2, z3, Z3]
```

```
In[ ]:= F
```

```
Out[ ]:= z1 + Z1 - z2 Z2 - G z3^2 Z2^2 - z3 Z3 - g z2^2 Z3^2 -
  (B z3 Z2 + b z2 Z3) (z2 Z2 - z3 Z3) - a (z2^2 Z2^2 - 4 z2 z3 Z2 Z3 + z3^2 Z3^2)
```

```
In[ ]:= D[F, Z1]
```

```
Out[ ]:= 1
```

```
In[ ]:= D[F, Z2]
```

```
Out[ ]:= -z2 - 2 G z3^2 Z2 - z2 (B z3 Z2 + b z2 Z3) - B z3 (z2 Z2 - z3 Z3) - a (2 z2^2 Z2 - 4 z2 z3 Z3)
```

```
In[ ]:= D[F, Z3]
```

```
Out[ ]:= -z3 - 2 g z2^2 Z3 + z3 (B z3 Z2 + b z2 Z3) - b z2 (z2 Z2 - z3 Z3) - a (-4 z2 z3 Z2 + 2 z3^2 Z3)
```

```
In[ ]:= D[F, {z3, 0}]
```

```
Out[ ]:= z1 + Z1 - z2 Z2 - G z3^2 Z2^2 - z3 Z3 - g z2^2 Z3^2 -
  (B z3 Z2 + b z2 Z3) (z2 Z2 - z3 Z3) - a (z2^2 Z2^2 - 4 z2 z3 Z2 Z3 + z3^2 Z3^2)
```

```
In[ ]:= F22 = D[F, z2, Z2]
```

```
Out[ ]:= -1 - 2 B z3 Z2 - 2 b z2 Z3 - a (4 z2 Z2 - 4 z3 Z3)
```

```
In[ ]:= F23 = D[F, z2, Z3]
```

```
Out[ ]:= -b z2 Z2 + 4 a z3 Z2 - 4 g z2 Z3 + b z3 Z3 - b (z2 Z2 - z3 Z3)
```

```
In[ ]:= F32 = D[F, z3, Z2]
```

```
Out[ ]:= -B z2 Z2 - 4 G z3 Z2 + 4 a z2 Z3 + B z3 Z3 - B (z2 Z2 - z3 Z3)
```

In[]:= **F₃₃ = D[F, z₃, Z₃]**

Out[]:= $-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a (-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3)$

In[]:= **d := F₂₂ * F₃₃ - F₂₃ * F₃₂**

In[]:= **d**

Out[]:=
$$\begin{aligned} & - \left(-b z_2 Z_2 + 4 a z_3 Z_2 - 4 g z_2 Z_3 + b z_3 Z_3 - b (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) \right) \\ & \left(-B z_2 Z_2 - 4 G z_3 Z_2 + 4 a z_2 Z_3 + B z_3 Z_3 - B (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) \right) + \\ & \left(-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a (4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3) \right) \left(-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a (-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3) \right) \end{aligned}$$

In[]:= **ExpandAll[d]**

Out[]:=
$$\begin{aligned} & 1 - 16 a^2 z_2^2 Z_2^2 - 4 b B z_2^2 Z_2^2 - 8 a B z_2 z_3 Z_2^2 - 8 b G z_2 z_3 Z_2^2 - 4 B^2 z_3^2 Z_2^2 + 16 a G z_3^2 Z_2^2 - \\ & 8 a b z_2^2 Z_2 Z_3 - 8 B g z_2^2 Z_2 Z_3 + 16 a^2 z_2 z_3 Z_2 Z_3 - 16 g G z_2 z_3 Z_2 Z_3 + 8 a B z_3^2 Z_2 Z_3 + \\ & 8 b G z_3^2 Z_2 Z_3 - 4 b^2 z_2^2 Z_3^2 + 16 a g z_2^2 Z_3^2 + 8 a b z_2 z_3 Z_3^2 + 8 B g z_2 z_3 Z_3^2 - 16 a^2 z_3^2 Z_3^2 - 4 b B z_3^2 Z_3^2 \end{aligned}$$

In[]:= **F₂₂ * F₃₃**

Out[]:=
$$\left(-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a (4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3) \right) \left(-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a (-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3) \right)$$

In[]:= **ExpandAll[%]**

Out[]:=
$$\begin{aligned} & 1 - 16 a^2 z_2^2 Z_2^2 - 16 a B z_2 z_3 Z_2^2 - 4 B^2 z_3^2 Z_2^2 - 16 a b z_2^2 Z_2 Z_3 + 32 a^2 z_2 z_3 Z_2 Z_3 - \\ & 8 b B z_2 z_3 Z_2 Z_3 + 16 a B z_3^2 Z_2 Z_3 - 4 b^2 z_2^2 Z_3^2 + 16 a b z_2 z_3 Z_3^2 - 16 a^2 z_3^2 Z_3^2 \end{aligned}$$

In[]:= **F₂₂**

Out[]:=
$$-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a (4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3)$$

In[]:= **F₂₂ / d**

Out[]:=
$$\begin{aligned} & \left(-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a (4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3) \right) / \\ & \left(- \left(-b z_2 Z_2 + 4 a z_3 Z_2 - 4 g z_2 Z_3 + b z_3 Z_3 - b (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) \right) \right. \\ & \quad \left(-B z_2 Z_2 - 4 G z_3 Z_2 + 4 a z_2 Z_3 + B z_3 Z_3 - B (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) \right) + \\ & \quad \left(-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a (4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3) \right) \\ & \quad \left. \left(-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a (-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3) \right) \right) \end{aligned}$$

In[]:= **FullSimplify[%29]**

Out[]:=
$$\begin{aligned} & \left(1 + 2 z_3 (B Z_2 - 2 a Z_3) + 2 z_2 (2 a Z_2 + b Z_3) \right) / \\ & \left(-1 + 4 z_3^2 \left((B^2 - 4 a G) Z_2^2 - 2 (a B + b G) Z_2 Z_3 + (4 a^2 + b B) Z_3^2 \right) + \right. \\ & \quad 4 z_2^2 \left((4 a^2 + b B) Z_2^2 + 2 (a b + B g) Z_2 Z_3 + (b^2 - 4 a g) Z_3^2 \right) + \\ & \quad \left. 8 z_2 z_3 \left((a B + b G) Z_2^2 - 2 (a^2 - g G) Z_2 Z_3 - (a b + B g) Z_3^2 \right) \right) \end{aligned}$$

In[]:= **F₂ = D[F, z₂]**

Out[]:=
$$-Z_2 - 2 g z_2 Z_3^2 - Z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b Z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2 Z_2^2 - 4 z_3 Z_2 Z_3)$$

In[]:= **M := {{p, p₁*, p₂*, p₃*}, {p₁, p₁₁, p₁₂, p₁₃}, {p₂, p₂₁, p₂₂, p₂₃}, {p₃, p₃₁, p₃₂, p₃₃}}**

In[]:= **Det[M]**

Out[]:= $\text{Conjugate}[p_3] p_3 p_{12} p_{21} - \text{Conjugate}[p_2] p_3 p_{13} p_{21} - \text{Conjugate}[p_3] p_3 p_{11} p_{22} +$
 $\text{Conjugate}[p_1] p_3 p_{13} p_{22} + \text{Conjugate}[p_2] p_3 p_{11} p_{23} - \text{Conjugate}[p_1] p_3 p_{12} p_{23} -$
 $\text{Conjugate}[p_3] p_2 p_{12} p_{31} + \text{Conjugate}[p_2] p_2 p_{13} p_{31} + \text{Conjugate}[p_3] p_1 p_{22} p_{31} -$
 $p p_{13} p_{22} p_{31} - \text{Conjugate}[p_2] p_1 p_{23} p_{31} + p p_{12} p_{23} p_{31} + \text{Conjugate}[p_3] p_2 p_{11} p_{32} -$
 $\text{Conjugate}[p_1] p_2 p_{13} p_{32} - \text{Conjugate}[p_3] p_1 p_{21} p_{32} + p p_{13} p_{21} p_{32} +$
 $\text{Conjugate}[p_1] p_1 p_{23} p_{32} - p p_{11} p_{23} p_{32} - \text{Conjugate}[p_2] p_2 p_{11} p_{33} + \text{Conjugate}[p_1] p_2 p_{12} p_{33} +$
 $\text{Conjugate}[p_2] p_1 p_{21} p_{33} - p p_{12} p_{21} p_{33} - \text{Conjugate}[p_1] p_1 p_{22} p_{33} + p p_{11} p_{22} p_{33}$

In[]:= **FullSimplify[%33]**

Out[]:= $-p p_{13} p_{22} p_{31} + p p_{12} p_{23} p_{31} + p p_{13} p_{21} p_{32} + \text{Abs}[p_1]^2 p_{23} p_{32} - p p_{11} p_{23} p_{32} +$
 $\text{Conjugate}[p_3] (p_3 (p_{12} p_{21} - p_{11} p_{22}) + (-p_2 p_{12} + p_1 p_{22}) p_{31} + (p_2 p_{11} - p_1 p_{21}) p_{32}) -$
 $p p_{12} p_{21} p_{33} - \text{Abs}[p_1]^2 p_{22} p_{33} + p p_{11} p_{22} p_{33} + \text{Abs}[p_2]^2 (p_{13} p_{31} - p_{11} p_{33}) +$
 $\text{Conjugate}[p_1] (p_3 (p_{13} p_{22} - p_{12} p_{23}) + p_2 (-p_{13} p_{32} + p_{12} p_{33})) +$
 $\text{Conjugate}[p_2] (p_3 (-p_{13} p_{21} + p_{11} p_{23}) + p_1 (-p_{23} p_{31} + p_{21} p_{33}))$

In[]:= **M /. p -> 0**

Out[]:= $\{\{0, \text{Conjugate}[0_1], \text{Conjugate}[0_2], \text{Conjugate}[0_3]\},$
 $\{0_1, 0_{11}, 0_{12}, 0_{13}\}, \{0_2, 0_{21}, 0_{22}, 0_{23}\}, \{0_3, 0_{31}, 0_{32}, 0_{33}\}\}$

In[]:= **ClearAll[M]**

In[]:= **M**

Out[]:= **M**

In[]:= **M := {{p, p1*, p2*, p3*}, {p1, p11, p12, p13},**
 $\{p_2, p_{21}, p_{22}, p_{23}\}, \{p_3, p_{31}, p_{32}, p_{33}\} /. p \rightarrow 0$

In[]:= **M**

Out[]:= $\{\{0, \text{Conjugate}[0_1], \text{Conjugate}[0_2], \text{Conjugate}[0_3]\},$
 $\{0_1, 0_{11}, 0_{12}, 0_{13}\}, \{0_2, 0_{21}, 0_{22}, 0_{23}\}, \{0_3, 0_{31}, 0_{32}, 0_{33}\}\}$

In[]:= **ClearAll[M]**

In[]:= **M := {{0, p1*, p2*, p3*}, {p1, p11, p12, p13}, {p2, p21, p22, p23}, {p3, p31, p32, p33}}**

In[]:= **Det[M]**

Out[]:= $\text{Conjugate}[p_3] p_3 p_{12} p_{21} - \text{Conjugate}[p_2] p_3 p_{13} p_{21} - \text{Conjugate}[p_3] p_3 p_{11} p_{22} +$
 $\text{Conjugate}[p_1] p_3 p_{13} p_{22} + \text{Conjugate}[p_2] p_3 p_{11} p_{23} - \text{Conjugate}[p_1] p_3 p_{12} p_{23} -$
 $\text{Conjugate}[p_3] p_2 p_{12} p_{31} + \text{Conjugate}[p_2] p_2 p_{13} p_{31} + \text{Conjugate}[p_3] p_1 p_{22} p_{31} -$
 $\text{Conjugate}[p_2] p_1 p_{23} p_{31} + \text{Conjugate}[p_3] p_2 p_{11} p_{32} - \text{Conjugate}[p_1] p_2 p_{13} p_{32} -$
 $\text{Conjugate}[p_3] p_1 p_{21} p_{32} + \text{Conjugate}[p_1] p_1 p_{23} p_{32} - \text{Conjugate}[p_2] p_2 p_{11} p_{33} +$
 $\text{Conjugate}[p_1] p_2 p_{12} p_{33} + \text{Conjugate}[p_2] p_1 p_{21} p_{33} - \text{Conjugate}[p_1] p_1 p_{22} p_{33}$

In[]:= **FullSimplify[%42]**

Out[]:= **Conjugate**[p₃] (p₃ (p₁₂ p₂₁ - p₁₁ p₂₂) + (-p₂ p₁₂ + p₁ p₂₂) p₃₁ + (p₂ p₁₁ - p₁ p₂₁) p₃₂) +
Conjugate[p₂] (p₃ (-p₁₃ p₂₁ + p₁₁ p₂₃) + (p₂ p₁₃ - p₁ p₂₃) p₃₁ + (-p₂ p₁₁ + p₁ p₂₁) p₃₃) +
Conjugate[p₁] (p₃ (p₁₃ p₂₂ - p₁₂ p₂₃) + (-p₂ p₁₃ + p₁ p₂₃) p₃₂ + (p₂ p₁₂ - p₁ p₂₂) p₃₃)

In[]:= **F₁ := D[F, z₁]**

In[]:= **F₀₁ := D[F, Z₁]**

In[]:= **F₁**

Out[]:= **1**

In[]:= **F₀₁**

Out[]:= **1**

In[]:= **F₂ := D[F, z₂]**

In[]:= **F₂₀ := D[F, Z₂]**

In[]:= **F₃ := D[F, z₃]**

$$-2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 + Z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B Z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 Z_2 Z_3 + 2 z_3 Z_3^2) F$$

In[]:= **F₃₀ = D[F, Z₃]**

$$-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3)$$

In[]:= **ClearAll[M]**

In[]:= **M**

Out[]:= **M**

In[]:= **M := {{F, F₀₁, F₀₂, F₀₃}, {F₁, 0, 0, 0}, {F₂, 0, F₂₂, F₂₃}, {F₃, 0, F₃₂, F₃₃}}**

In[]:= **MatrixForm[M]**

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} z_1 + Z_1 - z_2 Z_2 - G z_3^2 Z_2^2 - z_3 Z_3 - g z_2^2 Z_3^2 - (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (z_2^2 Z_2^2 - 4 z_2 z_3 Z_2 Z_3 + z_3^2 Z_3^2) \\ -z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3) \\ -z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3) \end{pmatrix}$$

```
In[•]:= Grid[%55]
```

$\begin{aligned} & z_1 + z_1 - z_2 z_2 - G z_3^2 Z_2^2 - z_3 z_3 - 1 \\ & g z_2^2 Z_3^2 - (B z_3 z_2 + b z_2 z_3) \\ & (z_2 z_2 - z_3 z_3) - \\ & a (z_2^2 Z_2^2 - 4 z_2 z_3 z_2 z_3 + z_3^2 Z_3^2) \\ & 1 \qquad \qquad \qquad 0 \\ & -z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - \\ & z_2 (B z_3 z_2 + b z_2 z_3) - \\ & B z_3 (z_2 z_2 - z_3 z_3) - \\ & a (2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 z_3) \\ & -z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + \\ & z_3 (B z_3 z_2 + b z_2 z_3) - \\ & b z_2 (z_2 z_2 - z_3 z_3) - \\ & a (-4 z_2 z_3 z_2 + 2 z_3^2 Z_3) \end{aligned}$	$\begin{aligned} & -z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - \\ & z_2 (B z_3 z_2 + b z_2 z_3) - \\ & B z_3 (z_2 z_2 - z_3 z_3) - \\ & a (2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 z_3) \\ & 0 \\ & -1 - 2 B z_3 z_2 - 2 b z_2 z_3 - \\ & a (4 z_2 z_2 - 4 z_3 z_3) \\ & 0 \\ & -B z_2 z_2 - 4 G z_3 z_2 + 4 a z_2 z_3 + \\ & B z_3 z_3 - B (z_2 z_2 - z_3 z_3) \end{aligned}$	$\begin{aligned} & -z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + \\ & z_3 (B z_3 z_2 + b z_2 z_3) - \\ & b z_2 (z_2 z_2 - z_3 z_3) - \\ & a (-4 z_2 z_3 z_2 + 2 z_3^2 Z_3) \\ & 0 \\ & -b z_2 z_2 + 4 a z_3 z_2 - 4 g z_2 z_3 + \\ & b z_3 z_3 - b (z_2 z_2 - z_3 z_3) \\ & -1 + 2 B z_3 z_2 + 2 b z_2 z_3 - \\ & a (-4 z_2 z_2 + 4 z_3 z_3) \end{aligned}$
---	---	--

$$\ln[\bullet] := \text{Det}[M]$$

$$\begin{aligned} Out[*] = & -1 + 16 a^2 z_2^2 Z_2^2 + 4 b B z_2^2 Z_2^2 + 8 a B z_2 z_3 Z_2^2 + 8 b G z_2 z_3 Z_2^2 + 4 B^2 z_3^2 Z_2^2 - 16 a G z_3^2 Z_2^2 + \\ & 8 a b z_2^2 Z_2 Z_3 + 8 B g z_2^2 Z_2 Z_3 - 16 a^2 z_2 z_3 Z_2 Z_3 + 16 g G z_2 z_3 Z_2 Z_3 - 8 a B z_3^2 Z_2 Z_3 - \\ & 8 b G z_3^2 Z_2 Z_3 + 4 b^2 z_2^2 Z_3^2 - 16 a g z_2^2 Z_3^2 - 8 a b z_2 z_3 Z_3^2 - 8 B g z_2 z_3 Z_3^2 + 16 a^2 z_3^2 Z_3^2 + 4 b B z_3^2 Z_3^2 \end{aligned}$$

$$\ln[\bullet] := A_{22} := F_2 * F_{03} * F_{32} + F_{02} * F_3 * F_{23} - F_2 * F_{02} * F_{33} - F_3 * F_{03} * F_{22}$$
$$\ln[\bullet] := \mathbf{A}_{22}$$

$$\begin{aligned} Out[*] = & - \left(-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a \left(-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3 \right) \right)^2 + \\ & \left(-b z_2 Z_2 + 4 a z_3 Z_2 - 4 g z_2 Z_3 + b z_3 Z_3 - b \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3 \right) \right) + \\ & \left(-B z_2 Z_2 - 4 G z_3 Z_2 + 4 a z_2 Z_3 + B z_3 Z_3 - B \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3 \right) \right) - \\ & \left(-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a \left(4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3 \right) \right)^2 \end{aligned}$$

In[]:= **ExpandAll[%]**

Out[]:=
$$\begin{aligned} & z_2^2 + z_3^2 - 12 a^2 z_2^4 Z_2^2 - b^2 z_2^4 Z_2^2 - 2 b B z_2^4 Z_2^2 + 8 a b z_2^3 z_3 Z_2^2 - 12 a B z_2^3 z_3 Z_2^2 - 4 b G z_2^3 z_3 Z_2^2 - \\ & 24 a^2 z_2^2 z_3^2 Z_2^2 - 6 B^2 z_2^2 z_3^2 Z_2^2 - 12 a B z_2 z_3^3 Z_2^2 - 4 b G z_2 z_3^3 Z_2^2 - 8 B G z_2 z_3^3 Z_2^2 - 3 B^2 z_3^4 Z_2^2 + \\ & 8 a G z_3^4 Z_2^2 - 4 G^2 z_3^4 Z_2^2 - 16 a^3 z_2^5 Z_3^2 - 4 a b B z_2^5 Z_3^2 - 8 a^2 b z_2^4 z_3 Z_3^2 - 24 a^2 B z_2^4 z_3 Z_3^2 - \\ & 2 b^2 B z_2^4 z_3 Z_3^2 - 4 b B^2 z_2^4 z_3 Z_3^2 - 8 a b G z_2^4 z_3 Z_3^2 + 32 a^3 z_2^3 z_3^2 Z_2^3 + 4 a b B z_2^3 z_3^2 Z_2^3 - 12 a B^2 z_2^3 z_3^2 Z_2^3 - \\ & 4 b^2 G z_2^3 z_3^2 Z_2^3 - 12 b B G z_2^3 z_3^2 Z_2^3 + 24 a^2 B z_2^2 z_3^3 Z_2^3 - 4 B^3 z_2^2 z_3^3 Z_2^3 + 24 a b G z_2^2 z_3^3 Z_2^3 + \\ & 8 a B G z_2^2 z_3^3 Z_2^3 - 8 b G^2 z_2^2 z_3^3 Z_2^3 + 12 a B^2 z_2 z_3^4 Z_2^3 - 32 a^2 G z_2 z_3^4 Z_2^3 + 4 b B G z_2 z_3^4 Z_2^3 - \\ & 4 B^2 G z_2 z_3^4 Z_2^3 + 16 a G^2 z_2 z_3^4 Z_2^3 + 2 B^3 z_3^5 Z_2^3 - 8 a B G z_3^5 Z_2^3 - 8 a b z_2^4 Z_2 Z_3 - 4 b g z_2^4 Z_2 Z_3 - \\ & 4 B g z_2^4 Z_2 Z_3 + 24 a^2 z_2^3 z_3 Z_2 Z_3 + 4 b^2 z_2^3 z_3 Z_2 Z_3 - 4 b B z_2^3 z_3 Z_2 Z_3 + 16 a g z_2^3 z_3 Z_2 Z_3 - \\ & 8 g G z_2^3 z_3 Z_2 Z_3 - 24 a b z_2^2 z_3^2 Z_2 Z_3 + 24 a B z_2^2 z_3^2 Z_2 Z_3 + 24 a^2 z_2 z_3^3 Z_2 Z_3 - 4 b B z_2 z_3^3 Z_2 Z_3 + \\ & 4 B^2 z_2 z_3^3 Z_2 Z_3 + 16 a G z_2 z_3^3 Z_2 Z_3 - 8 g G z_2 z_3^3 Z_2 Z_3 + 8 a B z_3^4 Z_2 Z_3 + 4 b G z_3^4 Z_2 Z_3 + \\ & 4 B G z_3^4 Z_2 Z_3 - 16 a^2 b z_2^5 Z_2^2 Z_3 - 2 b^2 B z_2^5 Z_2^2 Z_3 - 8 a B g z_2^5 Z_2^2 Z_3 + 48 a^3 z_2^4 z_3 Z_2^2 Z_3 - \\ & 4 a b^2 z_2^4 z_3 Z_2^2 Z_3 - 4 a b B z_2^4 z_3 Z_2^2 Z_3 - 16 a^2 g z_2^4 z_3 Z_2^2 Z_3 - 8 b B g z_2^4 z_3 Z_2^2 Z_3 - 8 B^2 g z_2^4 z_3 Z_2^2 Z_3 - \\ & 4 b^2 G z_2^4 z_3 Z_2^2 Z_3 - 16 a g G z_2^4 z_3 Z_2^2 Z_3 + 40 a^2 b z_2^3 z_3^2 Z_2^2 Z_3 + 48 a^2 B z_2^3 z_3^2 Z_2^2 Z_3 + 4 b^2 B z_2^3 z_3^2 Z_2^2 Z_3 + \\ & 8 a B g z_2^3 z_3^2 Z_2^2 Z_3 + 24 a b G z_2^3 z_3^2 Z_2^2 Z_3 - 16 b g G z_2^3 z_3^2 Z_2^2 Z_3 - 24 B g G z_2^3 z_3^2 Z_2^2 Z_3 - \\ & 48 a^3 z_2^2 z_3^3 Z_2^2 Z_3 + 12 a b B z_2^2 z_3^3 Z_2^2 Z_3 + 20 a B^2 z_2^2 z_3^3 Z_2^2 Z_3 - 16 a^2 G z_2^2 z_3^3 Z_2^2 Z_3 + 12 b^2 G z_2^2 z_3^3 Z_2^2 Z_3 + \\ & 12 b B G z_2^2 z_3^3 Z_2^2 Z_3 + 48 a g G z_2^2 z_3^3 Z_2^2 Z_3 - 16 g G^2 z_2^2 z_3^3 Z_2^2 Z_3 - 32 a^2 B z_2 z_3^4 Z_2^2 Z_3 + 4 b B^2 z_2 z_3^4 Z_2^2 Z_3 - \\ & 2 B^3 z_2 z_3^4 Z_2^2 Z_3 - 40 a b G z_2 z_3^4 Z_2^2 Z_3 + 8 B g G z_2 z_3^4 Z_2^2 Z_3 + 8 b G^2 z_2 z_3^4 Z_2^2 Z_3 - 8 a B^2 z_3^5 Z_2^2 Z_3 + \\ & 16 a^2 G z_3^5 Z_2^2 Z_3 - 4 b B G z_3^5 Z_2^2 Z_3 - 3 b^2 z_2^4 Z_2^3 + 8 a g z_2^4 Z_2^3 - 4 g^2 z_2^4 Z_2^3 + 12 a b z_2^3 z_3 Z_2^3 + \\ & 8 b g z_2^3 z_3 Z_2^3 + 4 B g z_2^3 z_3 Z_2^3 - 24 a^2 z_2^2 z_3^2 Z_2^3 - 6 b^2 z_2^2 z_3^2 Z_2^3 + 12 a b z_2 z_3^3 Z_2^3 - 8 a B z_2 z_3^3 Z_2^3 + \\ & 4 B g z_2 z_3^3 Z_2^3 - 12 a^2 z_3^4 Z_2^3 - 2 b B z_3^4 Z_2^3 - B^2 z_3^4 Z_2^3 - 8 a b^2 z_2^5 Z_2 Z_3^2 + 16 a^2 g z_2^5 Z_2 Z_3^2 - \\ & 4 b B g z_2^5 Z_2 Z_3^2 + 32 a^2 b z_2^4 z_3 Z_2 Z_3^2 - 2 b^3 z_2^4 z_3 Z_2 Z_3^2 - 4 b^2 B z_2^4 z_3 Z_2 Z_3^2 + 40 a B g z_2^4 z_3 Z_2 Z_3^2 - \\ & 8 B g^2 z_2^4 z_3 Z_2 Z_3^2 - 8 b g G z_2^4 z_3 Z_2 Z_3^2 - 48 a^3 z_2^3 z_3^2 Z_2 Z_3^2 + 20 a b^2 z_2^3 z_3^2 Z_2 Z_3^2 + 12 a b B z_2^3 z_3^2 Z_2 Z_3^2 - \\ & 16 a^2 g z_2^3 z_3^2 Z_2 Z_3^2 + 12 b B g z_2^3 z_3^2 Z_2 Z_3^2 + 12 B^2 g z_2^3 z_3^2 Z_2 Z_3^2 + 48 a g G z_2^3 z_3^2 Z_2 Z_3^2 - \\ & 16 g^2 G z_2^3 z_3^2 Z_2 Z_3^2 - 48 a^2 b z_2^2 z_3^3 Z_2 Z_3^2 - 40 a^2 B z_2^2 z_3^3 Z_2 Z_3^2 - 4 b B^2 z_2^2 z_3^3 Z_2 Z_3^2 - 24 a B g z_2^2 z_3^3 Z_2 Z_3^2 - \\ & 8 a b G z_2^2 z_3^3 Z_2 Z_3^2 + 24 b g G z_2^2 z_3^3 Z_2 Z_3^2 + 16 B g G z_2^2 z_3^3 Z_2 Z_3^2 + 48 a^3 z_2 z_3^4 Z_2 Z_3^2 - 4 a b B z_2 z_3^4 Z_2 Z_3^2 - \\ & 4 a B^2 z_2 z_3^4 Z_2 Z_3^2 - 4 B^2 g z_2 z_3^4 Z_2 Z_3^2 - 16 a^2 G z_2 z_3^4 Z_2 Z_3^2 - 8 b^2 G z_2 z_3^4 Z_2 Z_3^2 - 8 b B G z_2 z_3^4 Z_2 Z_3^2 - \\ & 16 a g G z_2 z_3^4 Z_2 Z_3^2 + 16 a^2 B z_3^5 Z_2 Z_3^2 + 2 b B^2 z_3^5 Z_2 Z_3^2 + 8 a b G z_3^5 Z_2 Z_3^2 - 2 b^3 z_2^5 Z_3^3 + 8 a b g z_2^5 Z_3^3 + \\ & 12 a b^2 z_2^4 z_3 Z_3^3 - 32 a^2 g z_2^4 z_3 Z_3^3 - 4 b^2 g z_2^4 z_3 Z_3^3 + 4 b B g z_2^4 z_3 Z_3^3 + 16 a g^2 z_2^4 z_3 Z_3^3 - \\ & 24 a^2 b z_2^3 z_3^2 Z_3^3 + 4 b^3 z_2^3 z_3^2 Z_3^3 - 8 a b g z_2^3 z_3^2 Z_3^3 - 24 a B g z_2^3 z_3^2 Z_3^3 + 8 B g^2 z_2^3 z_3^2 Z_3^3 + 32 a^3 z_2^2 z_3^3 Z_3^3 - \\ & 12 a b^2 z_2^2 z_3^3 Z_3^3 + 4 a b B z_2^2 z_3^3 Z_3^3 - 12 b B G z_2^2 z_3^3 Z_3^3 - 4 B^2 g z_2^2 z_3^3 Z_3^3 + 24 a^2 b z_2 z_3^4 Z_3^3 + \\ & 8 a^2 B z_2 z_3^4 Z_3^3 + 4 b^2 B z_2 z_3^4 Z_3^3 + 2 b B^2 z_2 z_3^4 Z_3^3 + 8 a B g z_2 z_3^4 Z_3^3 - 16 a^3 z_3^5 Z_3^3 - 4 a b B z_3^5 Z_3^3 \end{aligned}$$

$$In[\bullet] := D[A_{22}, a]$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[*]= & (4 z_2 z_3 Z_2 - 2 z_3^2 Z_3) (-b z_2 Z_2 + 4 a z_3 Z_2 - 4 g z_2 Z_3 + b z_3 Z_3 - b (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \\ & (-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3)) + \\ & (4 z_2 z_3 Z_2 - 2 z_3^2 Z_3) (-B z_2 Z_2 - 4 G z_3 Z_2 + 4 a z_2 Z_3 + B z_3 Z_3 - B (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \\ & (-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3)) - \\ & 2 (-2 z_2^2 Z_2 + 4 z_2 z_3 Z_3) (-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a (-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3)) \\ & (-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3)) - \\ & (4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3) \\ & (-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3))^2 - \\ & 2 (4 z_2 z_3 Z_2 - 2 z_3^2 Z_3) (-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a (4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3)) \\ & (-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3)) + \\ & (-2 z_2^2 Z_2 + 4 z_2 z_3 Z_3) (-b z_2 Z_2 + 4 a z_3 Z_2 - 4 g z_2 Z_3 + b z_3 Z_3 - b (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \\ & (-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3)) + \\ & (-2 z_2^2 Z_2 + 4 z_2 z_3 Z_3) (-B z_2 Z_2 - 4 G z_3 Z_2 + 4 a z_2 Z_3 + B z_3 Z_3 - B (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \\ & (-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3)) + \\ & 4 z_3 Z_2 (-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3)) \\ & (-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3)) + \\ & 4 z_2 Z_3 (-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3)) \\ & (-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3)) - \\ & (-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3) \\ & (-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3))^2 \end{aligned}$$

$$\ln[\bullet] := \% / \bullet \quad a \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} Out[6] = & -2 \left(-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 \right) \left(4 z_2 z_3 Z_3 - 2 z_3^2 Z_3 \right) \\ & \left(-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) + \\ & \left(-2 z_2^2 Z_2 + 4 z_2 z_3 Z_3 \right) \left(-b z_2 Z_2 - 4 g z_2 Z_3 + b z_3 Z_3 - b \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) + \\ & \left(-2 z_2^2 Z_2 + 4 z_2 z_3 Z_3 \right) \left(-B z_2 Z_2 - 4 G z_3 Z_2 + B z_3 Z_3 - B \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) - \\ & \left(-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3 \right) \left(-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right)^2 - \\ & 2 \left(-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 \right) \left(-2 z_2^2 Z_2 + 4 z_2 z_3 Z_3 \right) \\ & \left(-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) + \\ & \left(4 z_2 z_3 Z_2 - 2 z_3^2 Z_3 \right) \left(-b z_2 Z_2 - 4 g z_2 Z_3 + b z_3 Z_3 - b \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) + \\ & \left(4 z_2 z_3 Z_2 - 2 z_3^2 Z_3 \right) \left(-B z_2 Z_2 - 4 G z_3 Z_2 + B z_3 Z_3 - B \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) + \\ & 4 z_3 Z_2 \left(-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) + \\ & 4 z_2 Z_3 \left(-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) - \\ & \left(4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3 \right) \left(-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right)^2 \end{aligned}$$

In[*]:= % /. {b → 0, B → 0, g → 0, G → 0}

$$\text{Out[*]} = 4 z_2 z_3^2 Z_2 + 4 z_2^2 z_3 Z_3 - z_2^2 (4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3) - z_3^2 (-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3) - 2 z_2 (-2 z_2^2 Z_2 + 4 z_2 z_3 Z_3) - 2 z_3 (4 z_2 z_3 Z_2 - 2 z_3^2 Z_3)$$

In[*]:= ExpandAll[%]

$$\text{Out[*]} = 0$$

In[*]:= D[A₂₂, b]

$$\begin{aligned} \text{Out[*]} = & (-b z_2 Z_2 + 4 a z_3 Z_2 - 4 g z_2 Z_3 + b z_3 Z_3 - b (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) (z_2 z_3 Z_3 - z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \\ & (-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3)) + \\ & (-B z_2 Z_2 - 4 G z_3 Z_2 + 4 a z_2 Z_3 + B z_3 Z_3 - B (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) (z_2 z_3 Z_3 - z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \\ & (-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3)) + \\ & 2 z_2^2 Z_3 (-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a (-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3)) \\ & (-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3)) - \\ & 2 z_2 Z_3 (-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3))^2 - \\ & z_2^2 Z_3 (-b z_2 Z_2 + 4 a z_3 Z_2 - 4 g z_2 Z_3 + b z_3 Z_3 - b (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \\ & (-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3)) - \\ & z_2^2 Z_3 (-B z_2 Z_2 - 4 G z_3 Z_2 + 4 a z_2 Z_3 + B z_3 Z_3 - B (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \\ & (-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3)) - \\ & 2 (-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a (4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3)) (z_2 z_3 Z_3 - z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \\ & (-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3)) + \\ & (-2 z_2 Z_2 + 2 z_3 Z_3) \\ & (-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3)) \\ & (-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3)) + \\ & 2 z_2 Z_3 (-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3))^2 \end{aligned}$$

In[*]:= % /. {a → 0, b → 0, B → 0, g → 0, G → 0}

$$\text{Out[*]} = 2 z_2 z_3^2 Z_3 + z_2 z_3 (-2 z_2 Z_2 + 2 z_3 Z_3) - 2 z_3 (z_2 z_3 Z_3 - z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3))$$

In[*]:= ExpandAll[%]

$$\text{Out[*]} = 0$$

In[*]:= D[A₂₂, g]

$$\begin{aligned} \text{Out[*]} = & -2 z_2^2 Z_3 (-b z_2 Z_2 + 4 a z_3 Z_2 - 4 g z_2 Z_3 + b z_3 Z_3 - b (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \\ & (-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3)) - \\ & 2 z_2^2 Z_3 (-B z_2 Z_2 - 4 G z_3 Z_2 + 4 a z_2 Z_3 + B z_3 Z_3 - B (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \\ & (-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3)) + \\ & 4 z_2^2 Z_3 (-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a (4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3)) \\ & (-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3)) - \\ & 4 z_2 Z_3 (-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3)) \\ & (-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3)) \end{aligned}$$

`In[]:= % /. {a -> 0, b -> 0, B -> 0, g -> 0, G -> 0}`

`Out[]:= 0`

`In[]:= H22 := A22 /. {a -> 0, b -> 0, B -> 0, g -> 0, G -> 0}`

`In[]:= H22`

`Out[]:= z22 + z32`

`In[]:= f[1 + I, 1 - I, 1.5 - 3.2 * I, 1.5 + 3.2 * I, 4.33 + 2.1 * I, 4.33 - 2.1 * I]`

`Out[]:= (-33.6489 + 0. i) + (464.684 + 0. i) a +
(10.6689 + 0. i) ((-0.225 - 17.006 i) b - (0.225 - 17.006 i) B) +
(289.153 - 7.6527 i) g + (289.153 + 7.6527 i) G`

`In[]:= FullSimplify[%78]`

`Out[]:= -33.6489 + 464.684 a - (2.4005 + 181.435 i) b -
(2.4005 - 181.435 i) B + (289.153 - 7.6527 i) g + (289.153 + 7.6527 i) G`

`In[]:= % /. {a -> 1, b -> I, B -> -I, g -> 1 - I, G -> 1 + I}`

`Out[]:= 1356.91 + 1.11022 × 10-14 i`

`In[]:= ClearAll[F]`

`In[]:= F`

`Out[]:= F`

`In[]:= F[1 + I, 1 - I, 1.5 - 3.2 * I, 1.5 + 3.2 * I, 4.33 + 2.1 * I, 4.33 - 2.1 * I]`

`Out[]:= F[1 + i, 1 - i, 1.5 - 3.2 i, 1.5 + 3.2 i, 4.33 + 2.1 i, 4.33 - 2.1 i]`

`In[]:= F := f[z1, Z1, z2, Z2, z3, Z3]`

`In[]:= F2 * F02`

`Out[]:= (-z2 - 2 G z32 Z2 - z2 (B z3 Z2 + b z2 Z3) - B z3 (z2 Z2 - z3 Z3) - a (2 z22 Z2 - 4 z2 z3 Z3))2`

`In[]:= F2`

`Out[]:= -z2 - 2 G z32 Z2 - z2 (B z3 Z2 + b z2 Z3) - B z3 (z2 Z2 - z3 Z3) - a (2 z22 Z2 - 4 z2 z3 Z3)`

`In[]:= F02`

`Out[]:= -z2 - 2 G z32 Z2 - z2 (B z3 Z2 + b z2 Z3) - B z3 (z2 Z2 - z3 Z3) - a (2 z22 Z2 - 4 z2 z3 Z3)`

`In[]:= F2`

`Out[]:= -Z2 - 2 g z2 Z32 - Z2 (B z3 Z2 + b z2 Z3) - b z3 (z2 Z2 - z3 Z3) - a (2 z2 Z22 - 4 z3 Z2 Z3)`

`In[]:= F20`

`Out[]:= -z2 - 2 G z32 Z2 - z2 (B z3 Z2 + b z2 Z3) - B z3 (z2 Z2 - z3 Z3) - a (2 z22 Z2 - 4 z2 z3 Z3)`

In[]:= **F₃**

$$\text{Out[]}= -2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 + Z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B Z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 Z_2 Z_3 + 2 z_3 Z_3^2)$$

In[]:= **F₃₀**

$$\text{Out[]}= -z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3)$$

In[]:= **M := {{F, 1, F₂₀, F₃₀}, {1, 0, 0, 0}, {F₂, 0, F₂₂, F₂₃}, {F₃, 0, F₃₂, F₃₃}}**

In[]:= **MatrixForm[M]**

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} z_1 + Z_1 - z_2 Z_2 - G z_3^2 Z_2^2 - z_3 Z_3 - g z_2^2 Z_3^2 - (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (z_2^2 Z_2^2 - 4 z_2 z_3 Z_2 Z_3 + z_3^2 Z_3^2) \\ -Z_2 - 2 g z_2 Z_3^2 - Z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b Z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2 Z_2^2 - 4 z_3 Z_2 Z_3) \\ -2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 + Z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B Z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 Z_2 Z_3 + 2 z_3 Z_3^2) \end{pmatrix}$$

In[]:= **Det[M]**

$$\begin{aligned} \text{Out[]}= & -1 + 16 a^2 z_2^2 Z_2^2 + 4 b B z_2^2 Z_2^2 + 8 a B z_2 z_3 Z_2^2 + 8 b G z_2 z_3 Z_2^2 + 4 B^2 z_3^2 Z_2^2 - 16 a G z_3^2 Z_2^2 + \\ & 8 a b z_2^2 Z_2 Z_3 + 8 B g z_2^2 Z_2 Z_3 - 16 a^2 z_2 z_3 Z_2 Z_3 + 16 g G z_2 z_3 Z_2 Z_3 - 8 a B z_3^2 Z_2 Z_3 - \\ & 8 b G z_3^2 Z_2 Z_3 + 4 b^2 z_2^2 Z_3^2 - 16 a g z_2^2 Z_3^2 - 8 a b z_2 z_3 Z_3^2 - 8 B g z_2 z_3 Z_3^2 + 16 a^2 z_3^2 Z_3^2 + 4 b B z_3^2 Z_3^2 \end{aligned}$$

In[]:= **A₂₂**

$$\begin{aligned} \text{Out[]}= & -(-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a (-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3)) \\ & (-Z_2 - 2 g z_2 Z_3^2 - Z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b Z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2 Z_2^2 - 4 z_3 Z_2 Z_3))^2 + \\ & (-b z_2 Z_2 + 4 a z_3 Z_2 - 4 g z_2 Z_3 + b z_3 Z_3 - b (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \\ & (-Z_2 - 2 g z_2 Z_3^2 - Z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b Z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2 Z_2^2 - 4 z_3 Z_2 Z_3)) \\ & (-2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 + Z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B Z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 Z_2 Z_3 + 2 z_3 Z_3^2)) + \\ & (-B z_2 Z_2 - 4 G z_3 Z_2 + 4 a z_2 Z_3 + B z_3 Z_3 - B (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \\ & (-Z_2 - 2 g z_2 Z_3^2 - Z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b Z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2 Z_2^2 - 4 z_3 Z_2 Z_3)) \\ & (-2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 + Z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B Z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 Z_2 Z_3 + 2 z_3 Z_3^2)) - \\ & (-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a (4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3)) \\ & (-2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 + Z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B Z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 Z_2 Z_3 + 2 z_3 Z_3^2))^2 \end{aligned}$$

In[]:= **ClearAll[A₂₂]**

In[]:= **A₂₂**

$$\begin{aligned} \text{Out[]}= & -(-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a (-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3)) \\ & (-Z_2 - 2 g z_2 Z_3^2 - Z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b Z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2 Z_2^2 - 4 z_3 Z_2 Z_3))^2 + \\ & (-b z_2 Z_2 + 4 a z_3 Z_2 - 4 g z_2 Z_3 + b z_3 Z_3 - b (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \\ & (-Z_2 - 2 g z_2 Z_3^2 - Z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b Z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2 Z_2^2 - 4 z_3 Z_2 Z_3)) \\ & (-2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 + Z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B Z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 Z_2 Z_3 + 2 z_3 Z_3^2)) + \\ & (-B z_2 Z_2 - 4 G z_3 Z_2 + 4 a z_2 Z_3 + B z_3 Z_3 - B (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \\ & (-Z_2 - 2 g z_2 Z_3^2 - Z_2 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - b Z_3 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (2 z_2 Z_2^2 - 4 z_3 Z_2 Z_3)) \\ & (-2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 + Z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B Z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 Z_2 Z_3 + 2 z_3 Z_3^2)) - \\ & (-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a (4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3)) \\ & (-2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 + Z_3 (B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3) - B Z_2 (z_2 Z_2 - z_3 Z_3) - a (-4 z_2 Z_2 Z_3 + 2 z_3 Z_3^2))^2 \end{aligned}$$

In[*]:= **A**

Out[*]:= **A**

In[*]:= **Clear[A₂₂]**

In[*]:= **A₂₂**

Out[*]:=
$$\begin{aligned} & - \left(-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a \left(-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-Z_2 - 2 g z_2 Z_3^2 - Z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b Z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(2 z_2 Z_2^2 - 4 z_3 Z_2 Z_3 \right) \right)^2 + \\ & \left(-b z_2 Z_2 + 4 a z_3 Z_2 - 4 g z_2 Z_3 + b z_3 Z_3 - b \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-Z_2 - 2 g z_2 Z_3^2 - Z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b Z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(2 z_2 Z_2^2 - 4 z_3 Z_2 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 + Z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B Z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(-4 z_2 Z_2 Z_3 + 2 z_3 Z_3^2 \right) \right) + \\ & \left(-B z_2 Z_2 - 4 G z_3 Z_2 + 4 a z_2 Z_3 + B z_3 Z_3 - B \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-Z_2 - 2 g z_2 Z_3^2 - Z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b Z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(2 z_2 Z_2^2 - 4 z_3 Z_2 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 + Z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B Z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(-4 z_2 Z_2 Z_3 + 2 z_3 Z_3^2 \right) \right) - \\ & \left(-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a \left(4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 + Z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B Z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(-4 z_2 Z_2 Z_3 + 2 z_3 Z_3^2 \right) \right)^2 \end{aligned}$$

In[*]:= **A₂₂ := F₂ * F₃₀ * F₃₂ + F₂₀ * F₃ * F₂₃ - F₂ * F₂₀ * F₃₃ - F₃ * F₃₀ * F₂₂**

In[*]:= **A₂₂**

Out[*]:=
$$\begin{aligned} & - \left(-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a \left(-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-Z_2 - 2 g z_2 Z_3^2 - Z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b Z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(2 z_2 Z_2^2 - 4 z_3 Z_2 Z_3 \right) \right) + \\ & \left(-B z_2 Z_2 - 4 G z_3 Z_2 + 4 a z_2 Z_3 + B z_3 Z_3 - B \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-Z_2 - 2 g z_2 Z_3^2 - Z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b Z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(2 z_2 Z_2^2 - 4 z_3 Z_2 Z_3 \right) \right) + \\ & \left(-b z_2 Z_2 + 4 a z_3 Z_2 - 4 g z_2 Z_3 + b z_3 Z_3 - b \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 + Z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B Z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(-4 z_2 Z_2 Z_3 + 2 z_3 Z_3^2 \right) \right) - \\ & \left(-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a \left(4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 + Z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B Z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(-4 z_2 Z_2 Z_3 + 2 z_3 Z_3^2 \right) \right) \end{aligned}$$

In[]:= **ExpandAll[%]**

Out[]:=
$$\begin{aligned} & z_2 Z_2 - 12 a^2 z_2^3 Z_2^3 - 3 b B z_2^3 Z_2^3 - 6 a B z_2^2 z_3 Z_2^3 - 6 b G z_2^2 z_3 Z_2^3 - 3 B^2 z_2 z_3^2 Z_2^3 + 12 a G z_2 z_3^2 Z_2^3 - \\ & 16 a^3 z_2^4 Z_2^4 - 4 a b B z_2^4 Z_2^4 - 24 a^2 B z_2^3 z_3 Z_2^4 - 4 b B^2 z_2^3 z_3 Z_2^4 - 8 a b G z_2^3 z_3 Z_2^4 - 12 a B^2 z_2^2 z_3^2 Z_2^4 - \\ & 12 b B G z_2^2 z_3^2 Z_2^4 - 4 B^3 z_2 z_3^3 Z_2^4 + 8 a B G z_2 z_3^3 Z_2^4 - 8 b G^2 z_2 z_3^3 Z_2^4 - 4 B^2 G z_2^4 Z_2^4 + 16 a G^2 z_2^4 Z_2^4 + \\ & z_3 Z_3 - 6 a b z_2^3 Z_2^2 Z_3 - 6 B g z_2^3 Z_2^2 Z_3 - 3 b B z_2^2 z_3 Z_2^2 Z_3 - 12 g G z_2^2 z_3 Z_2^2 Z_3 - 3 B^2 z_3^3 Z_2^2 Z_3 + \\ & 12 a G z_3^3 Z_2^2 Z_3 - 24 a^2 b z_2^4 Z_2^3 Z_3 - 4 b^2 B z_2^4 Z_2^3 Z_3 - 8 a B g z_2^4 Z_2^3 Z_3 + 80 a^3 z_2^3 z_3 Z_2^3 Z_3 - \\ & 8 B^2 g z_2^3 z_3 Z_2^3 Z_3 - 8 b^2 G z_2^3 z_3 Z_2^3 Z_3 - 16 a g G z_2^3 z_3 Z_2^3 Z_3 + 72 a^2 B z_2^2 z_3^2 Z_2^3 Z_3 + \\ & 48 a b G z_2^2 z_3^2 Z_2^3 Z_3 - 24 B g G z_2^2 z_3^2 Z_2^3 Z_3 + 32 a B^2 z_2 z_3^3 Z_2^3 Z_3 - 48 a^2 G z_2 z_3^3 Z_2^3 Z_3 + \\ & 16 b B G z_2 z_3^3 Z_2^3 Z_3 - 16 g G^2 z_2 z_3^3 Z_2^3 Z_3 + 4 B^3 z_2^4 Z_2^3 Z_3 - 8 a B G z_2^4 Z_2^3 Z_3 + 8 b G^2 z_2^4 Z_2^3 Z_3 - \\ & 3 b^2 z_2^3 Z_2 Z_2^2 + 12 a g z_2^3 Z_2 Z_2^2 - 3 b B z_2 z_2^2 Z_2 Z_2^2 - 12 g G z_2 z_2^2 Z_2 Z_2^2 + 6 a B z_3^3 Z_2 Z_2^2 + \\ & 6 b G z_3^3 Z_2 Z_2^2 - 12 a b^2 z_2^4 Z_2^2 Z_3^2 - 12 b B g z_2^4 Z_2^2 Z_3^2 + 72 a^2 b z_2^3 z_3 Z_2^2 Z_3^2 + 48 a B g z_2^3 z_3 Z_2^2 Z_3^2 - \\ & 24 b g G z_2^3 z_3 Z_2^2 Z_3^2 - 96 a^3 z_2^2 z_3^2 Z_2^2 Z_3^2 + 24 a b B z_2^2 z_3^2 Z_2^2 Z_3^2 + 12 B^2 g z_2^2 z_3^2 Z_2^2 Z_3^2 + \\ & 12 b^2 G z_2^2 z_3^2 Z_2^2 Z_3^2 + 96 a g G z_2^2 z_3^2 Z_2^2 Z_3^2 - 72 a^2 B z_2 z_3^3 Z_2^2 Z_3^2 - 48 a b G z_2 z_3^3 Z_2^2 Z_3^2 + \\ & 24 B g G z_2 z_3^3 Z_2^2 Z_3^2 - 12 a B^2 z_2^4 Z_2^2 Z_3^2 - 12 b B G z_2^4 Z_2^2 Z_3^2 - 3 b^2 z_2^2 z_3 Z_3^3 + 12 a g z_2^2 z_3 Z_3^3 + \\ & 6 a b z_2 z_2^2 Z_3^3 + 6 B g z_2 z_2^2 Z_3^3 - 12 a^2 z_3^3 Z_3^3 - 3 b B z_3^3 Z_3^3 - 4 b^3 z_2^4 Z_2 Z_3^3 + 8 a b g z_2^4 Z_2 Z_3^3 - \\ & 8 B g^2 z_2^4 Z_2 Z_3^3 + 32 a b^2 z_2^3 z_3 Z_2 Z_3^3 - 48 a^2 g z_2^3 z_3 Z_2 Z_3^3 + 16 b B g z_2^3 z_3 Z_2 Z_3^3 - 16 g^2 G z_2^3 z_3 Z_2 Z_3^3 - \\ & 72 a^2 b z_2^2 z_3^2 Z_2 Z_3^3 - 48 a B g z_2^2 z_3^2 Z_2 Z_3^3 + 24 b g G z_2^2 z_3^2 Z_2 Z_3^3 + 80 a^3 z_2 z_3^3 Z_2 Z_3^3 - 8 B^2 g z_2 z_3^3 Z_2 Z_3^3 - \\ & 8 b^2 G z_2 z_3^3 Z_2 Z_3^3 - 16 a g G z_2 z_3^3 Z_2 Z_3^3 + 24 a^2 B z_2^4 Z_2 Z_3^3 + 4 b B^2 z_2^4 Z_2 Z_3^3 + 8 a b G z_2^4 Z_2 Z_3^3 - \\ & 4 b^2 g z_2^4 Z_2 Z_3^3 + 16 a g^2 z_2^4 Z_2 Z_3^3 + 4 b^3 z_2^3 z_3 Z_2 Z_3^3 - 8 a b g z_2^3 z_3 Z_2 Z_3^3 + 8 B g^2 z_2^3 z_3 Z_2 Z_3^3 - 12 a b^2 z_2^2 z_3^2 Z_3^4 - \\ & 12 b B g z_2^2 z_3^2 Z_3^4 + 24 a^2 b z_2 z_3^3 Z_3^4 + 4 b^2 B z_2 z_3^3 Z_3^4 + 8 a B g z_2 z_3^3 Z_3^4 - 16 a^3 z_2^4 Z_3^4 - 4 a b B z_3^4 Z_3^4 \end{aligned}$$

In[]:= **A22 /. {a → 0, b → 0, B → 0, g → 0, G → 0}**

Out[]:= $z_2 Z_2 + z_3 Z_3$

In[*]:= **D**[A₂₂, a]

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]} = & \left(4 z_2 z_2 z_3 - 2 z_3 z_3^2 \right) \left(-b z_2 z_2 + 4 a z_3 z_2 - 4 g z_2 z_3 + b z_3 z_3 - b \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) \right) \\
 & \left(-z_2 - 2 G z_3^2 z_2 - z_2 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - B z_3 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(2 z_2^2 z_2 - 4 z_2 z_3 z_3 \right) \right) - \\
 & \left(-2 z_2 z_2^2 + 4 z_3 z_2 z_3 \right) \left(-1 + 2 B z_3 z_2 + 2 b z_2 z_3 - a \left(-4 z_2 z_2 + 4 z_3 z_3 \right) \right) \\
 & \left(-z_2 - 2 G z_3^2 z_2 - z_2 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - B z_3 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(2 z_2^2 z_2 - 4 z_2 z_3 z_3 \right) \right) - \\
 & \left(4 z_2 z_2 z_3 - 2 z_3 z_3^2 \right) \left(-1 - 2 B z_3 z_2 - 2 b z_2 z_3 - a \left(4 z_2 z_2 - 4 z_3 z_3 \right) \right) \\
 & \left(-z_3 - 2 g z_2^2 z_3 + z_3 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - b z_2 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(-4 z_2 z_3 z_2 + 2 z_3^2 z_3 \right) \right) + \\
 & \left(-2 z_2 z_2^2 + 4 z_3 z_2 z_3 \right) \left(-B z_2 z_2 - 4 G z_3 z_2 + 4 a z_2 z_3 + B z_3 z_3 - B \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) \right) \\
 & \left(-z_3 - 2 g z_2^2 z_3 + z_3 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - b z_2 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(-4 z_2 z_3 z_2 + 2 z_3^2 z_3 \right) \right) + \\
 & \left(4 z_2 z_3 z_2 - 2 z_3^2 z_3 \right) \left(-B z_2 z_2 - 4 G z_3 z_2 + 4 a z_2 z_3 + B z_3 z_3 - B \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) \right) \\
 & \left(-z_2 - 2 g z_2 z_3^2 - z_2 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - b z_3 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(2 z_2 z_2^2 - 4 z_3 z_2 z_3 \right) \right) - \\
 & \left(-2 z_2^2 z_2 + 4 z_2 z_3 z_3 \right) \left(-1 + 2 B z_3 z_2 + 2 b z_2 z_3 - a \left(-4 z_2 z_2 + 4 z_3 z_3 \right) \right) \\
 & \left(-z_2 - 2 g z_2 z_3^2 - z_2 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - b z_3 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(2 z_2 z_2^2 - 4 z_3 z_2 z_3 \right) \right) - \\
 & \left(4 z_2 z_2 - 4 z_3 z_3 \right) \\
 & \left(-z_2 - 2 G z_3^2 z_2 - z_2 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - B z_3 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(2 z_2^2 z_2 - 4 z_2 z_3 z_3 \right) \right) \\
 & \left(-z_2 - 2 g z_2 z_3^2 - z_2 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - b z_3 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(2 z_2 z_2^2 - 4 z_3 z_2 z_3 \right) \right) + \\
 & 4 z_2 z_3 \left(-z_3 - 2 g z_2^2 z_3 + z_3 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - b z_2 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(-4 z_2 z_3 z_2 + 2 z_3^2 z_3 \right) \right) \\
 & \left(-z_2 - 2 g z_2 z_3^2 - z_2 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - b z_3 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(2 z_2 z_2^2 - 4 z_3 z_2 z_3 \right) \right) - \\
 & \left(4 z_2 z_3 z_2 - 2 z_3^2 z_3 \right) \left(-1 - 2 B z_3 z_2 - 2 b z_2 z_3 - a \left(4 z_2 z_2 - 4 z_3 z_3 \right) \right) \\
 & \left(-2 G z_3 z_2^2 - z_3 + z_3 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - B z_2 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(-4 z_2 z_2 z_3 + 2 z_3 z_3^2 \right) \right) + \\
 & \left(-2 z_2^2 z_2 + 4 z_2 z_3 z_3 \right) \left(-b z_2 z_2 + 4 a z_3 z_2 - 4 g z_2 z_3 + b z_3 z_3 - b \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) \right) \\
 & \left(-2 G z_3 z_2^2 - z_3 + z_3 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - B z_2 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(-4 z_2 z_2 z_3 + 2 z_3 z_3^2 \right) \right) + \\
 & 4 z_3 z_2 \left(-z_2 - 2 G z_3^2 z_2 - z_2 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - B z_3 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(2 z_2^2 z_2 - 4 z_2 z_3 z_3 \right) \right) \\
 & \left(-2 G z_3 z_2^2 - z_3 + z_3 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - B z_2 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(-4 z_2 z_2 z_3 + 2 z_3 z_3^2 \right) \right) - \\
 & \left(-4 z_2 z_2 + 4 z_3 z_3 \right) \\
 & \left(-z_3 - 2 g z_2^2 z_3 + z_3 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - b z_2 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(-4 z_2 z_3 z_2 + 2 z_3^2 z_3 \right) \right) \\
 & \left(-2 G z_3 z_2^2 - z_3 + z_3 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - B z_2 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(-4 z_2 z_2 z_3 + 2 z_3 z_3^2 \right) \right)
 \end{aligned}$$

In[*]:= % /. {a → 0, b → 0, B → 0, g → 0, G → 0}

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]} = & 8 z_2 z_3 z_2 z_3 - z_2 z_2 \left(4 z_2 z_2 - 4 z_3 z_3 \right) - z_3 z_3 \left(-4 z_2 z_2 + 4 z_3 z_3 \right) - z_2 \left(-2 z_2^2 z_2 + 4 z_2 z_3 z_3 \right) - \\
 & z_3 \left(4 z_2 z_3 z_2 - 2 z_3^2 z_3 \right) - z_2 \left(-2 z_2 z_2^2 + 4 z_3 z_2 z_3 \right) - z_3 \left(4 z_2 z_2 z_3 - 2 z_3 z_3^2 \right)
 \end{aligned}$$

In[*]:= **Simplify**[%]

$$\text{Out[*]} = 0$$

$$\text{In[*]} := \mathbf{H}_{22} := \left(z_2 z_2 + z_3 z_3 \right) / 4$$

$$\text{In[*]} := \mathbf{A}_{23} := \mathbf{F}_{30} * \mathbf{F}_{32} - \mathbf{F}_{20} * \mathbf{F}_{33}$$

In[*]:= **A**₂₃

$$\begin{aligned}
 \text{Out[*]} = & - \left(-1 + 2 B z_3 z_2 + 2 b z_2 z_3 - a \left(-4 z_2 z_2 + 4 z_3 z_3 \right) \right) \\
 & \left(-z_2 - 2 G z_3^2 z_2 - z_2 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - B z_3 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(2 z_2^2 z_2 - 4 z_2 z_3 z_3 \right) \right) + \\
 & \left(-B z_2 z_2 - 4 G z_3 z_2 + 4 a z_2 z_3 + B z_3 z_3 - B \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) \right) \\
 & \left(-z_3 - 2 g z_2^2 z_3 + z_3 \left(B z_3 z_2 + b z_2 z_3 \right) - b z_2 \left(z_2 z_2 - z_3 z_3 \right) - a \left(-4 z_2 z_3 z_2 + 2 z_3^2 z_3 \right) \right)
 \end{aligned}$$

In[*]:= ExpandAll[%]

$$\begin{aligned} \text{Out[*]} = & -z_2 + 2 a z_2^2 Z_2 + 2 B z_2 z_3 Z_2 + 2 G z_3^2 Z_2 + 8 a^2 z_2^3 Z_2^2 + 2 b B z_2^3 Z_2^2 + 4 a B z_2^2 z_3 Z_2^2 + \\ & 4 b G z_2^2 z_3 Z_2^2 + 2 B^2 z_2 z_3^2 Z_2^2 - 8 a G z_2 z_3^2 Z_2^2 + b z_2^2 Z_3 - 4 a z_2 z_3 Z_3 - B z_3^2 Z_3 + 4 a b z_2^3 Z_2 Z_3 + \\ & 4 B g z_2^3 Z_2 Z_3 - 8 a^2 z_2^2 z_3 Z_2 Z_3 + 8 g G z_2^2 z_3 Z_2 Z_3 - 4 a B z_2 z_3^2 Z_2 Z_3 - 4 b G z_2 z_3^2 Z_2 Z_3 + \\ & 2 b^2 z_2^3 Z_3^2 - 8 a g z_2^3 Z_3^2 - 4 a b z_2^2 z_3 Z_3^2 - 4 B g z_2^2 z_3 Z_3^2 + 8 a^2 z_2 z_3^2 Z_3^2 + 2 b B z_2 z_3^2 Z_3^2 \end{aligned}$$

$$\text{In[*]} := H_{23} := \left(-z_2 + 2 a z_2^2 Z_2 + 2 B z_2 z_3 Z_2 + 2 G z_3^2 Z_2 + b z_2^2 Z_3 - 4 a z_2 z_3 Z_3 - B z_3^2 Z_3 \right) / 4$$

$$\text{In[*]} := A_{24} := F_{20} * F_{23} - F_{30} * F_{22}$$

In[*]:= A₂₄

$$\begin{aligned} \text{Out[*]} = & \left(-b z_2 Z_2 + 4 a z_3 Z_2 - 4 g z_2 Z_3 + b z_3 Z_3 - b \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_2 - 2 G z_3^2 Z_2 - z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(2 z_2^2 Z_2 - 4 z_2 z_3 Z_3 \right) \right) - \\ & \left(-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a \left(4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-z_3 - 2 g z_2^2 Z_3 + z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(-4 z_2 z_3 Z_2 + 2 z_3^2 Z_3 \right) \right) \end{aligned}$$

In[*]:= ExpandAll[%]

$$\begin{aligned} \text{Out[*]} = & -z_3 + b z_2^2 Z_2 - 4 a z_2 z_3 Z_2 - B z_3^2 Z_2 + 8 a^2 z_2^2 z_3 Z_2^2 + 2 b B z_2^2 z_3 Z_2^2 + 4 a B z_2 z_3^2 Z_2^2 + \\ & 4 b G z_2 z_3^2 Z_2^2 + 2 B^2 z_3^3 Z_2^2 - 8 a G z_2^3 Z_2^2 + 2 g z_2^2 Z_3 - 2 b z_2 z_3 Z_3 + 2 a z_3^2 Z_3 + 4 a b z_2^2 z_3 Z_2 Z_3 + \\ & 4 B g z_2^2 z_3 Z_2 Z_3 - 8 a^2 z_2 z_3^2 Z_2 Z_3 + 8 g G z_2 z_3^2 Z_2 Z_3 - 4 a B z_3^3 Z_2 Z_3 - 4 b G z_3^3 Z_2 Z_3 + \\ & 2 b^2 z_2^2 z_3 Z_3^2 - 8 a g z_2^2 z_3 Z_3^2 - 4 a b z_2 z_3^2 Z_3^2 - 4 B g z_2 z_3^2 Z_3^2 + 8 a^2 z_3^3 Z_3^2 + 2 b B z_3^3 Z_3^2 \end{aligned}$$

$$\text{In[*]} := H_{24} := \left(-z_3 + b z_2^2 Z_2 - 4 a z_2 z_3 Z_2 - B z_3^2 Z_2 + 2 g z_2^2 Z_3 - 2 b z_2 z_3 Z_3 + 2 a z_3^2 Z_3 \right) / 4$$

In[*]:= F₃₃

$$\text{Out[*]} = -1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a \left(-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3 \right)$$

$$\text{In[*]} := H_{33} := F_{33} / 4$$

$$\text{In[*]} := H_{44} := F_{22} / 4$$

$$\text{In[*]} := A_{32} := F_3 * F_{23} - F_2 * F_{33}$$

In[*]:= A₃₂

$$\begin{aligned} \text{Out[*]} = & - \left(-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a \left(-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-Z_2 - 2 g z_2 Z_3^2 - Z_2 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - b z_3 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(2 z_2 Z_2^2 - 4 z_3 Z_2 Z_3 \right) \right) + \\ & \left(-b z_2 Z_2 + 4 a z_3 Z_2 - 4 g z_2 Z_3 + b z_3 Z_3 - b \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) \\ & \left(-2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 + Z_3 \left(B z_3 Z_2 + b z_2 Z_3 \right) - B Z_2 \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) - a \left(-4 z_2 Z_2 Z_3 + 2 z_3 Z_3^2 \right) \right) \end{aligned}$$

In[*]:= ExpandAll[%]

$$\begin{aligned} \text{Out[*]} = & -Z_2 + 2 a z_2 Z_2^2 + B z_3 Z_2^2 + 8 a^2 z_2^2 Z_2^2 + 2 b B z_2^2 Z_2^2 + 4 a B z_2 z_3 Z_2^2 + 4 b G z_2 z_3 Z_2^2 + 2 B^2 z_3^2 Z_2^2 - \\ & 8 a G z_3^3 Z_2^2 + 2 b z_2 Z_2 Z_3 - 4 a z_3 Z_2 Z_3 + 4 a b z_2^2 Z_2^2 Z_3 + 4 B g z_2^2 Z_2^2 Z_3 - 8 a^2 z_2 z_3 Z_2^2 Z_3 + \\ & 8 g G z_2 z_3 Z_2^2 Z_3 - 4 a B z_3^2 Z_2^2 Z_3 - 4 b G z_3^2 Z_2^2 Z_3 + 2 g z_2 Z_3^2 - b z_3 Z_3^2 + 2 b^2 z_2^2 Z_2 Z_3^2 - \\ & 8 a g z_2^2 Z_2 Z_3^2 - 4 a b z_2 z_3 Z_2 Z_3^2 - 4 B g z_2 z_3 Z_2 Z_3^2 + 8 a^2 z_3^2 Z_2 Z_3^2 + 2 b B z_3^2 Z_2 Z_3^2 \end{aligned}$$

$$\text{In[*]} := H_{32} := \left(-Z_2 + 2 a z_2 Z_2^2 + B z_3 Z_2^2 + 2 b z_2 Z_2 Z_3 - 4 a z_3 Z_2 Z_3 + 2 g z_2 Z_3^2 - b z_3 Z_3^2 \right) / 4$$

In[]:= **H₂₃**

$$\text{Out[]}= \frac{1}{4} \left(-z_2 + 2 a z_2^2 Z_2 + 2 B z_2 z_3 Z_2 + 2 G z_3^2 Z_2 + b z_2^2 Z_3 - 4 a z_2 z_3 Z_3 - B z_3^2 Z_3 \right)$$

In[]:= **H₃₂**

$$\text{Out[]}= \frac{1}{4} \left(-Z_2 + 2 a z_2 Z_2^2 + B z_3 Z_2^2 + 2 b z_2 Z_2 Z_3 - 4 a z_3 Z_2 Z_3 + 2 g z_2 Z_3^2 - b z_3 Z_3^2 \right)$$

In[]:= **A₄₂ := F₂ * F₃₂ - F₃ * F₂₂**

In[]:= **ExpandAll[A₄₂]**

$$\begin{aligned} \text{Out[]}= & B z_2 Z_2^2 + 2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 - 4 a z_2 Z_2 Z_3 - 2 B z_3 Z_2 Z_3 + 8 a^2 z_2^2 Z_2^2 Z_3 + 2 b B z_2^2 Z_2^2 Z_3 + \\ & 4 a B z_2 z_3 Z_2^2 Z_3 + 4 b G z_2 z_3 Z_2^2 Z_3 + 2 B^2 z_3^2 Z_2^2 Z_3 - 8 a G z_3^2 Z_2^2 Z_3 - b z_2 Z_3^2 + 2 a z_3 Z_3^2 + \\ & 4 a b z_2^2 Z_2 Z_3^2 + 4 B g z_2^2 Z_2 Z_3^2 - 8 a^2 z_2 z_3 Z_2 Z_3^2 + 8 g G z_2 z_3 Z_2 Z_3^2 - 4 a B z_3^2 Z_2 Z_3^2 - \\ & 4 b G z_3^2 Z_2 Z_3^2 + 2 b^2 z_2^2 Z_3^3 - 8 a g z_2^2 Z_3^3 - 4 a b z_2 z_3 Z_3^3 - 4 B g z_2 z_3 Z_3^3 + 8 a^2 z_3^2 Z_3^3 + 2 b B z_3^2 Z_3^3 \end{aligned}$$

In[]:= **H₄₂ := (B z₂ Z₂² + 2 G z₃ Z₂² - Z₃ - 4 a z₂ Z₂ Z₃ - 2 B z₃ Z₂ Z₃ - b z₂ Z₃² + 2 a z₃ Z₃²) / 4**

In[]:= **H₂₄**

$$\text{Out[]}= \frac{1}{4} \left(-z_3 + b z_2^2 Z_2 - 4 a z_2 z_3 Z_2 - B z_3^2 Z_2 + 2 g z_2^2 Z_3 - 2 b z_2 z_3 Z_3 + 2 a z_3^2 Z_3 \right)$$

In[]:= **H₄₂**

$$\text{Out[]}= \frac{1}{4} \left(B z_2 Z_2^2 + 2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 - 4 a z_2 Z_2 Z_3 - 2 B z_3 Z_2 Z_3 - b z_2 Z_3^2 + 2 a z_3 Z_3^2 \right)$$

In[]:= **H₄₃ := -F₃₂ / 4**

In[]:= **H₃₄ := -F₂₃ / 4**

In[]:= **A := {{0, I, 0, 0}, {-I, H₂₂, H₂₃, H₂₄}, {0, H₃₂, H₃₃, H₃₄}, {0, H₄₂, H₄₃, H₄₄}}**

In[]:= **p := {{p₀, I * p₁, p₂, p₃}}**

In[]:= **ClearAll[P]**

In[]:= **P**

Out[]= P

In[]:= **p**

Out[]= Hold[{p₀, i p₁, p₂, p₃}]

In[]:= **P := {{p₀}, {-I * p₁}, {P₂}, {P₃}}**

In[]:= **P**

Out[]= Hold[{{p₀}, {-i p₁}, {P₂}, {P₃}}]

In[]:= **p**

Out[]= Hold[{{p₀, i p₁, p₂, p₃}}]

`In[]:= p * A * P`

`Out[]:= Hold[p A P]`

`In[]:= ExpandAll[%]`

`Out[]:= Hold[p A P]`

`In[]:= Dot[p, A, P]`

`Out[]:= Hold[p.A.P]`

`In[]:= p := {p0, p1, p2, p3}`

`In[]:= p`

`Out[]:= Hold[{p0, p1, p2, p3}]`

`In[]:= p`

`Out[]:= Hold[{p0, $\bar{1}$ p1, p2, p3}]`

`In[]:= ReleaseHold[Hold[{p0, $\bar{1}$ p1, p2, p3}]]`

`Out[]:= Hold[{p0, $\bar{1}$ p1, p2, p3}]`

`In[]:= P := {p0, -I * p1, P2, P3}`

`In[]:= Dot[p, A, P]`

`Out[]:= Hold[p.A.P]`

`In[]:= p.A.P`

`Out[]:= Hold[p.A.P]`

`In[]:= ReleaseHold[Hold[p.A.P]]`

`Out[]:= Hold[p.A.P]`

`In[]:= MatrixForm[Dot[p, A, P]]`

`Out[]:= Hold[p.A.P]`

`In[]:= {a, b}.*{c, e}`

`Out[]:= a c + b e`

`In[]:= A.P`

`Out[]:= Hold[A.P]`

In[]:= **A**

Out[]:= $\left\{ \{0, i, 0, 0\}, \right.$
 $\left\{ -i, \frac{1}{4} (z_2 Z_2 + z_3 Z_3), \frac{1}{4} (-z_2 + 2 a z_2^2 Z_2 + 2 B z_2 z_3 Z_2 + 2 G z_3^2 Z_2 + b z_2^2 Z_3 - 4 a z_2 z_3 Z_3 - B z_3^2 Z_3), \right.$
 $\left. \frac{1}{4} (-z_3 + b z_2^2 Z_2 - 4 a z_2 z_3 Z_2 - B z_3^2 Z_2 + 2 g z_2^2 Z_3 - 2 b z_2 z_3 Z_3 + 2 a z_3^2 Z_3) \right\},$
 $\left\{ 0, \frac{1}{4} (-Z_2 + 2 a z_2 Z_2^2 + B z_3 Z_2^2 + 2 b z_2 Z_2 Z_3 - 4 a z_3 Z_2 Z_3 + 2 g z_2 Z_3^2 - b z_3 Z_3^2), \right.$
 $\left. \frac{1}{4} (-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a (-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3)) \right\},$
 $\left. \frac{1}{4} (b z_2 Z_2 - 4 a z_3 Z_2 + 4 g z_2 Z_3 - b z_3 Z_3 + b (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \right\},$
 $\left\{ 0, \frac{1}{4} (B z_2 Z_2^2 + 2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 - 4 a z_2 Z_2 Z_3 - 2 B z_3 Z_2 Z_3 - b z_2 Z_3^2 + 2 a z_3 Z_3^2), \right.$
 $\left. \frac{1}{4} (B z_2 Z_2 + 4 G z_3 Z_2 - 4 a z_2 Z_3 - B z_3 Z_3 + B (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \right\},$
 $\left. \frac{1}{4} (-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a (4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3)) \right\} \}$

In[]:= **P**

Out[]:= **Hold**[{p₀, -i p₁, P₂, P₃}]

In[]:= **Extract**[**Hold**[{p₀, -i p₁, P₂, P₃}], 2, **Hold**]

Out[]:= **Extract**[**Hold**[{p₀, -i p₁, P₂, P₃}], 2, **Hold**]

In[]:= **q** := {w, e, r, t}

In[]:= **q**

Out[]:= {w, e, r, t}

In[]:= **A.q**

Out[]:= $\left\{ i e, -i w + \frac{1}{4} e \left(z_2 Z_2 + z_3 Z_3 \right) + \right.$
 $\frac{1}{4} t \left(-z_3 + b z_2^2 Z_2 - 4 a z_2 z_3 Z_2 - B z_3^2 Z_2 + 2 g z_2^2 Z_3 - 2 b z_2 z_3 Z_3 + 2 a z_3^2 Z_3 \right) +$
 $\frac{1}{4} r \left(-z_2 + 2 a z_2^2 Z_2 + 2 B z_2 z_3 Z_2 + 2 G z_3^2 Z_2 + b z_2^2 Z_3 - 4 a z_2 z_3 Z_3 - B z_3^2 Z_3 \right),$
 $\frac{1}{4} e \left(-Z_2 + 2 a z_2 Z_2^2 + B z_3 Z_2^2 + 2 b z_2 Z_2 Z_3 - 4 a z_3 Z_2 Z_3 + 2 g z_2 Z_3^2 - b z_3 Z_3^2 \right) +$
 $\frac{1}{4} t \left(b z_2 Z_2 - 4 a z_3 Z_2 + 4 g z_2 Z_3 - b z_3 Z_3 + b \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) +$
 $\frac{1}{4} r \left(-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a \left(-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3 \right) \right),$
 $\frac{1}{4} e \left(B z_2 Z_2^2 + 2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 - 4 a z_2 Z_2 Z_3 - 2 B z_3 Z_2 Z_3 - b z_2 Z_3^2 + 2 a z_3 Z_3^2 \right) +$
 $\frac{1}{4} t \left(-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a \left(4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3 \right) \right) +$
 $\left. \frac{1}{4} r \left(B z_2 Z_2 + 4 G z_3 Z_2 - 4 a z_2 Z_3 - B z_3 Z_3 + B \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) \right\}$

In[]:= **q := {w₁, w₂, w₃, w₄}**

In[]:= **q**

Out[]:= **{w₁, w₂, w₃, w₄}**

In[]:= **ClearAll[p]**

In[]:= **ClearAll[P]**

In[]:= **p**

Out[]:= **p**

In[]:= **P**

Out[]:= **P**

In[]:= **o := {p₀, p₁, p₂, p₃}**

In[]:= **o**

Out[]:= **Hold[{p₀, p₁, p₂, p₃}]**

In[]:= **q**

Out[]:= **Hold[{p₀, p₁, p₂, p₃}]**

In[]:= **p**

Out[]:= **Hold[{p₀, p₁, p₂, p₃}]**

In[]:= **ClearAll[p]**

In[]:= **p**

Out[]:= **p**

In[]:= **p := {p₁, p₂, p₃, p₄}**

In[]:= **p**

Out[]:= **Hold[{p₁, p₂, p₃, p₄}]**

In[]:= **ClearAll[p]**

In[]:= **p := {w₁, w₂, w₃, w₄}**

In[]:= **p**

Out[]:= **{w₁, w₂, w₃, w₄}**

In[]:= **p := {e₀, e₂, e₃, e₄}**

In[]:= **p**

Out[]:= **{e₀, e₂, e₃, e₄}**

In[]:= **p**

Out[]:= **{e₁, e₂, e₃, e₄}**

In[]:= **p**

Out[]:= **{e₀, e₂, e₃, e₄}**

In[]:= **p₀**

Out[]:= **{e₀, e₂, e₃, e₄}₀**

In[]:= **p₁**

Out[]:= **{e₀, e₂, e₃, e₄}₁**

In[]:= **o**

Out[]:= **{ {e₀, e₂, e₃, e₄}₀, {e₀, e₂, e₃, e₄}₁, {e₀, e₂, e₃, e₄}₂, {e₀, e₂, e₃, e₄}₃ }**

In[]:= **ClearAll[q, p, o]**

In[]:= **B = {{1, 2}, {3, 4}}**

Out[]:= **{{1, 2}, {3, 4}}**

In[]:= **MatrixForm[B]**

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

In[]:= **ClearAll[B]**

In[]:= **B**

Out[]:= **B**

In[]:= **MatrixForm[B]**

Out[]//MatrixForm=

B

In[]:= **q := {p₀, I * p₁, p₂, p₃}**

In[]:= **q**

Out[]:= {p₀, i p₁, p₂, p₃}

In[]:= **Q := {p₀, -I * p₁, p₂, p₃}**

In[]:= **Q**

Out[]:= {p₀, -i p₁, p₂, p₃}

In[]:= **q.A.Q**

Out[]:= p₀ p₁ - i p₁ $\left(i p_0 + \frac{1}{4} i p_1 (z_2 Z_2 + z_3 Z_3) + \right.$
 $\frac{1}{4} p_3 (B z_2 Z_2^2 + 2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 - 4 a z_2 Z_2 Z_3 - 2 B z_3 Z_2 Z_3 - b z_2 Z_3^2 + 2 a z_3 Z_3^2) +$
 $\frac{1}{4} p_2 (-Z_2 + 2 a z_2 Z_2^2 + B z_3 Z_2^2 + 2 b z_2 Z_2 Z_3 - 4 a z_3 Z_2 Z_3 + 2 g z_2 Z_3^2 - b z_3 Z_3^2) \Big) +$
 $P_3 \left(\frac{1}{4} i p_1 (-z_3 + b z_2^2 Z_2 - 4 a z_2 z_3 Z_2 - B z_3^2 Z_2 + 2 g z_2^2 Z_3 - 2 b z_2 z_3 Z_3 + 2 a z_3^2 Z_3) + \right.$
 $\frac{1}{4} p_3 (-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a (4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3)) +$
 $\frac{1}{4} p_2 (b z_2 Z_2 - 4 a z_3 Z_2 + 4 g z_2 Z_3 - b z_3 Z_3 + b (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \Big) +$
 $P_2 \left(\frac{1}{4} i p_1 (-z_2 + 2 a z_2^2 Z_2 + 2 B z_2 z_3 Z_2 + 2 G z_3^2 Z_2 + b z_2^2 Z_3 - 4 a z_2 z_3 Z_3 - B z_3^2 Z_3) + \right.$
 $\frac{1}{4} p_3 (B z_2 Z_2 + 4 G z_3 Z_2 - 4 a z_2 Z_3 - B z_3 Z_3 + B (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) +$
 $\frac{1}{4} p_2 (-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a (-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3)) \Big)$

In[]:= **ExpandAll[%]**

$$\begin{aligned}
 \text{Out[]}= & 2 p_0 p_1 - \frac{p_2 P_2}{4} - \frac{p_3 P_3}{4} - \frac{1}{4} i p_1 P_2 z_2 - \frac{1}{4} i p_1 P_3 z_3 + \frac{1}{4} i p_1 p_2 z_2 + \frac{1}{4} p_1^2 z_2 z_2 + a p_2 P_2 z_2 z_2 + \\
 & \frac{1}{2} B p_3 P_2 z_2 z_2 + \frac{1}{2} b p_2 P_3 z_2 z_2 - a p_3 P_3 z_2 z_2 + \frac{1}{2} i a p_1 P_2 z_2^2 z_2 + \frac{1}{4} i b p_1 P_3 z_2^2 z_2 + \\
 & \frac{1}{2} B p_2 P_2 z_3 z_2 + G p_3 P_2 z_3 z_2 - a p_2 P_3 z_3 z_2 - \frac{1}{2} B p_3 P_3 z_3 z_2 + \frac{1}{2} i B p_1 P_2 z_2 z_3 z_2 - \\
 & i a p_1 P_3 z_2 z_3 z_2 + \frac{1}{2} i G p_1 P_2 z_3^2 z_2 - \frac{1}{4} i B p_1 P_3 z_3^2 z_2 - \frac{1}{2} i a p_1 p_2 z_2 z_2^2 - \frac{1}{4} i B p_1 p_3 z_2 z_2^2 - \\
 & \frac{1}{4} i B p_1 p_2 z_3 z_2^2 - \frac{1}{2} i G p_1 p_3 z_3 z_2^2 + \frac{1}{4} i p_1 p_3 z_3 + \frac{1}{2} b p_2 P_2 z_2 z_3 - a p_3 P_2 z_2 z_3 + \\
 & g p_2 P_3 z_2 z_3 - \frac{1}{2} b p_3 P_3 z_2 z_3 + \frac{1}{4} i b p_1 P_2 z_2^2 z_3 + \frac{1}{2} i g p_1 P_3 z_2^2 z_3 + \frac{1}{4} p_1^2 z_3 z_3 - a p_2 P_2 z_3 z_3 - \\
 & \frac{1}{2} B p_3 P_2 z_3 z_3 - \frac{1}{2} b p_2 P_3 z_3 z_3 + a p_3 P_3 z_3 z_3 - i a p_1 P_2 z_2 z_3 z_3 - \frac{1}{2} i b p_1 P_3 z_2 z_3 z_3 - \\
 & \frac{1}{4} i B p_1 P_2 z_3^2 z_3 + \frac{1}{2} i a p_1 P_3 z_3^2 z_3 - \frac{1}{2} i b p_1 p_2 z_2 z_2 z_3 + i a p_1 p_3 z_2 z_2 z_3 + i a p_1 p_2 z_3 z_2 z_3 + \\
 & \frac{1}{2} i B p_1 p_3 z_3 z_2 z_3 - \frac{1}{2} i g p_1 p_2 z_2 z_3^2 + \frac{1}{4} i b p_1 p_3 z_2 z_3^2 + \frac{1}{4} i b p_1 p_2 z_3 z_3^2 - \frac{1}{2} i a p_1 p_3 z_3 z_3^2
 \end{aligned}$$

In[]:= **Simplify[%]**

$$\begin{aligned}
 \text{Out[]}= & -\frac{1}{4} i \left(8 i p_0 p_1 - i p_3 P_3 + p_1 P_2 z_2 + p_1 P_3 z_3 + i p_1^2 z_2 z_2 + 2 i B p_3 P_2 z_2 z_2 - \right. \\
 & 4 i a p_3 P_3 z_2 z_2 - 2 a p_1 P_2 z_2^2 z_2 - b p_1 P_3 z_2^2 z_2 + 4 i G p_3 P_2 z_3 z_2 - 2 i B p_3 P_3 z_3 z_2 - \\
 & 2 B p_1 P_2 z_2 z_3 z_2 + 4 a p_1 P_3 z_2 z_3 z_2 - 2 G p_1 P_2 z_3^2 z_2 + B p_1 P_3 z_3^2 z_2 + B p_1 p_3 z_2 z_2^2 + \\
 & 2 G p_1 p_3 z_3 z_2^2 - p_1 p_3 z_3 - 4 i a p_3 P_2 z_2 z_3 - 2 i b p_3 P_3 z_2 z_3 - b p_1 P_2 z_2^2 z_3 - \\
 & 2 g p_1 P_3 z_2^2 z_3 + i p_1^2 z_3 z_3 - 2 i B p_3 P_2 z_3 z_3 + 4 i a p_3 P_3 z_3 z_3 + 4 a p_1 P_2 z_2 z_3 z_3 + \\
 & 2 b p_1 P_3 z_2 z_3 z_3 + B p_1 P_2 z_3^2 z_3 - 2 a p_1 P_3 z_3^2 z_3 - 4 a p_1 p_3 z_2 z_2 z_3 - 2 B p_1 p_3 z_3 z_2 z_3 - \\
 & b p_1 p_3 z_2 z_3^2 + 2 a p_1 p_3 z_3 z_3^2 + p_2 \left(i P_2 \left(-1 + 2 z_3 \left(B z_2 - 2 a z_3 \right) + 2 z_2 \left(2 a z_2 + b z_3 \right) \right) + \right. \\
 & \left. 2 i P_3 \left(-z_3 \left(2 a z_2 + b z_3 \right) + z_2 \left(b z_2 + 2 g z_3 \right) \right) + \right. \\
 & \left. p_1 \left(\left(2 a z_2 + B z_3 \right) z_2^2 + \left(2 g z_2 - b z_3 \right) z_3^2 + z_2 \left(-1 + 2 b z_2 z_3 - 4 a z_3 z_3 \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

In[]:= **ab := 2 + 2**

In[]:= **ab**

Out[]:= **4**

In[]:= **H**

In[]:= **H := q.A.Q**

In[]:= **dz2 := 2 * D[H, P2]**

In[]:= **dz2**

Out[]:= **Hold[2 ∂_{P2} H]**

In[]:= **D**

Out[]:= **D**

`In[]:= H`

`Out[]:= Hold[q.A.Q]`

`In[]:= q.A.Q`

`Out[]:= Hold[q.A.Q]`

`In[]:= ClearAll[H]`

`In[]:= H`

`Out[]:= H`

`In[]:= q.A.Q`

`Out[]:=`
$$\begin{aligned} & p_0 p_1 - i p_1 \left(i p_0 + \frac{1}{4} i p_1 (z_2 z_2 + z_3 z_3) + \right. \\ & \quad \frac{1}{4} p_3 (B z_2 z_2^2 + 2 G z_3 z_2^2 - z_3 - 4 a z_2 z_2 z_3 - 2 B z_3 z_2 z_3 - b z_2 z_3^2 + 2 a z_3 z_3^2) + \\ & \quad \left. \frac{1}{4} p_2 (-z_2 + 2 a z_2 z_2^2 + B z_3 z_2^2 + 2 b z_2 z_2 z_3 - 4 a z_3 z_2 z_3 + 2 g z_2 z_3^2 - b z_3 z_3^2) \right) + \\ & p_3 \left(\frac{1}{4} i p_1 (-z_3 + b z_2^2 z_2 - 4 a z_2 z_3 z_2 - B z_3^2 z_2 + 2 g z_2^2 z_3 - 2 b z_2 z_3 z_3 + 2 a z_3^2 z_3) + \right. \\ & \quad \frac{1}{4} p_3 (-1 - 2 B z_3 z_2 - 2 b z_2 z_3 - a (4 z_2 z_2 - 4 z_3 z_3)) + \\ & \quad \left. \frac{1}{4} p_2 (b z_2 z_2 - 4 a z_3 z_2 + 4 g z_2 z_3 - b z_3 z_3 + b (z_2 z_2 - z_3 z_3)) \right) + \\ & p_2 \left(\frac{1}{4} i p_1 (-z_2 + 2 a z_2^2 z_2 + 2 B z_2 z_3 z_2 + 2 G z_3^2 z_2 + b z_2^2 z_3 - 4 a z_2 z_3 z_3 - B z_3^2 z_3) + \right. \\ & \quad \frac{1}{4} p_3 (B z_2 z_2 + 4 G z_3 z_2 - 4 a z_2 z_3 - B z_3 z_3 + B (z_2 z_2 - z_3 z_3)) + \\ & \quad \left. \frac{1}{4} p_2 (-1 + 2 B z_3 z_2 + 2 b z_2 z_3 - a (-4 z_2 z_2 + 4 z_3 z_3)) \right) \end{aligned}$$

`In[]:= h := q.A.Q`

In[]:= **h**

$$\begin{aligned} \text{Out[]} = & p_0 p_1 - i p_1 \left(i p_0 + \frac{1}{4} i p_1 (z_2 Z_2 + z_3 Z_3) + \right. \\ & \frac{1}{4} p_3 (B z_2 Z_2^2 + 2 G z_3 Z_2^2 - Z_3 - 4 a z_2 Z_2 Z_3 - 2 B z_3 Z_2 Z_3 - b z_2 Z_3^2 + 2 a z_3 Z_3^2) + \\ & \left. \frac{1}{4} p_2 (-Z_2 + 2 a z_2 Z_2^2 + B z_3 Z_2^2 + 2 b z_2 Z_2 Z_3 - 4 a z_3 Z_2 Z_3 + 2 g z_2 Z_3^2 - b z_3 Z_3^2) \right) + \\ & p_3 \left(\frac{1}{4} i p_1 (-z_3 + b z_2^2 Z_2 - 4 a z_2 z_3 Z_2 - B z_3^2 Z_2 + 2 g z_2^2 Z_3 - 2 b z_2 z_3 Z_3 + 2 a z_3^2 Z_3) + \right. \\ & \frac{1}{4} p_3 (-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a (4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3)) + \\ & \left. \frac{1}{4} p_2 (b z_2 Z_2 - 4 a z_3 Z_2 + 4 g z_2 Z_3 - b z_3 Z_3 + b (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) \right) + \\ & p_2 \left(\frac{1}{4} i p_1 (-z_2 + 2 a z_2^2 Z_2 + 2 B z_2 z_3 Z_2 + 2 G z_3^2 Z_2 + b z_2^2 Z_3 - 4 a z_2 z_3 Z_3 - B z_3^2 Z_3) + \right. \\ & \frac{1}{4} p_3 (B z_2 Z_2 + 4 G z_3 Z_2 - 4 a z_2 Z_3 - B z_3 Z_3 + B (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) + \\ & \left. \frac{1}{4} p_2 (-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a (-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3)) \right) \end{aligned}$$

In[]:= **dz₂ := 2 * D[h, P₂]**

In[]:= **dz₂**

$$\begin{aligned} \text{Out[]} = & 2 \left(\frac{1}{4} i p_1 (-z_2 + 2 a z_2^2 Z_2 + 2 B z_2 z_3 Z_2 + 2 G z_3^2 Z_2 + b z_2^2 Z_3 - 4 a z_2 z_3 Z_3 - B z_3^2 Z_3) + \right. \\ & \frac{1}{4} p_3 (B z_2 Z_2 + 4 G z_3 Z_2 - 4 a z_2 Z_3 - B z_3 Z_3 + B (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) + \\ & \left. \frac{1}{4} p_2 (-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a (-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3)) \right) \end{aligned}$$

In[]:= **ExpandAll[%]**

$$\begin{aligned} \text{Out[]} = & -\frac{p_2}{2} - \frac{1}{2} i p_1 z_2 + 2 a p_2 z_2 Z_2 + B p_3 z_2 Z_2 + i a p_1 z_2^2 Z_2 + B p_2 z_3 Z_2 + \\ & 2 G p_3 z_3 Z_2 + i B p_1 z_2 z_3 Z_2 + i G p_1 z_3^2 Z_2 + b p_2 z_2 Z_3 - 2 a p_3 z_2 Z_3 + \\ & \frac{1}{2} i b p_1 z_2^2 Z_3 - 2 a p_2 z_3 Z_3 - B p_3 z_3 Z_3 - 2 i a p_1 z_2 z_3 Z_3 - \frac{1}{2} i B p_1 z_3^2 Z_3 \end{aligned}$$

In[]:= **dz₂ . / z₂ → 2**

In[]:= **dz₂**

$$\begin{aligned} \text{Out[]} = & 2 \left(\frac{1}{4} i p_1 (-z_2 + 2 a z_2^2 Z_2 + 2 B z_2 z_3 Z_2 + 2 G z_3^2 Z_2 + b z_2^2 Z_3 - 4 a z_2 z_3 Z_3 - B z_3^2 Z_3) + \right. \\ & \frac{1}{4} p_3 (B z_2 Z_2 + 4 G z_3 Z_2 - 4 a z_2 Z_3 - B z_3 Z_3 + B (z_2 Z_2 - z_3 Z_3)) + \\ & \left. \frac{1}{4} p_2 (-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a (-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3)) \right) \end{aligned}$$

$$In[*]:= \mathbf{dz}_2 /. \mathbf{z}_2 \rightarrow 2$$

$$Out[*]= 2 \left(\frac{1}{4} \mathfrak{I} p_1 \left(-2 + 8 a Z_2 + 4 B z_3 Z_2 + 2 G z_3^2 Z_2 + 4 b Z_3 - 8 a z_3 Z_3 - B z_3^2 Z_3 \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{4} p_3 \left(2 B Z_2 + 4 G z_3 Z_2 - 8 a Z_3 - B z_3 Z_3 + B \left(2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{4} p_2 \left(-1 + 2 B z_3 Z_2 + 4 b Z_3 - a \left(-8 Z_2 + 4 z_3 Z_3 \right) \right) \right)$$

$$In[*]:= \mathbf{dz}_2$$

$$Out[*]= 2 \left(\frac{1}{4} \mathfrak{I} p_1 \left(-z_2 + 2 a z_2^2 Z_2 + 2 B z_2 z_3 Z_2 + 2 G z_3^2 Z_2 + b z_2^2 Z_3 - 4 a z_2 z_3 Z_3 - B z_3^2 Z_3 \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{4} p_3 \left(B z_2 Z_2 + 4 G z_3 Z_2 - 4 a z_2 Z_3 - B z_3 Z_3 + B \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{4} p_2 \left(-1 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - a \left(-4 z_2 Z_2 + 4 z_3 Z_3 \right) \right) \right)$$

$$In[*]:= \mathbf{dz}_3 := 2 * \mathbf{D}[\mathbf{h}, \mathbf{P}_3]$$

$$In[*]:= \mathbf{dz}_3$$

$$Out[*]= 2 \left(\frac{1}{4} \mathfrak{I} p_1 \left(-z_3 + b z_2^2 Z_2 - 4 a z_2 z_3 Z_2 - B z_3^2 Z_2 + 2 g z_2^2 Z_3 - 2 b z_2 z_3 Z_3 + 2 a z_3^2 Z_3 \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{4} p_3 \left(-1 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 - a \left(4 z_2 Z_2 - 4 z_3 Z_3 \right) \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{4} p_2 \left(b z_2 Z_2 - 4 a z_3 Z_2 + 4 g z_2 Z_3 - b z_3 Z_3 + b \left(z_2 Z_2 - z_3 Z_3 \right) \right) \right)$$

$$In[*]:= \mathbf{dp}_2 := -2 * \mathbf{D}[\mathbf{h}, \mathbf{Z}_2]$$

$$In[*]:= \mathbf{dp}_2$$

$$Out[*]= -2 \left(P_3 \left(\frac{1}{4} p_2 \left(2 b z_2 - 4 a z_3 \right) + \frac{1}{4} p_3 \left(-4 a z_2 - 2 B z_3 \right) + \frac{1}{4} \mathfrak{I} p_1 \left(b z_2^2 - 4 a z_2 z_3 - B z_3^2 \right) \right) + \right. \\ P_2 \left(\frac{1}{4} p_2 \left(4 a z_2 + 2 B z_3 \right) + \frac{1}{4} p_3 \left(2 B z_2 + 4 G z_3 \right) + \frac{1}{4} \mathfrak{I} p_1 \left(2 a z_2^2 + 2 B z_2 z_3 + 2 G z_3^2 \right) \right) - \\ \mathfrak{I} p_1 \left(\frac{1}{4} \mathfrak{I} p_1 z_2 + \frac{1}{4} p_2 \left(-1 + 4 a z_2 Z_2 + 2 B z_3 Z_2 + 2 b z_2 Z_3 - 4 a z_3 Z_3 \right) + \right. \\ \left. \left. \frac{1}{4} p_3 \left(2 B z_2 Z_2 + 4 G z_3 Z_2 - 4 a z_2 Z_3 - 2 B z_3 Z_3 \right) \right) \right)$$

$$In[*]:= \mathbf{dp}_3 := -2 * \mathbf{D}[\mathbf{h}, \mathbf{Z}_3]$$

$$In[*]:= \mathbf{dp}_3$$

$$Out[*]= -2 \left(P_3 \left(\frac{1}{4} p_3 \left(-2 b z_2 + 4 a z_3 \right) + \frac{1}{4} p_2 \left(4 g z_2 - 2 b z_3 \right) + \frac{1}{4} \mathfrak{I} p_1 \left(2 g z_2^2 - 2 b z_2 z_3 + 2 a z_3^2 \right) \right) + \right. \\ P_2 \left(\frac{1}{4} p_2 \left(2 b z_2 - 4 a z_3 \right) + \frac{1}{4} p_3 \left(-4 a z_2 - 2 B z_3 \right) + \frac{1}{4} \mathfrak{I} p_1 \left(b z_2^2 - 4 a z_2 z_3 - B z_3^2 \right) \right) - \\ \mathfrak{I} p_1 \left(\frac{1}{4} \mathfrak{I} p_1 z_3 + \frac{1}{4} p_3 \left(-1 - 4 a z_2 Z_2 - 2 B z_3 Z_2 - 2 b z_2 Z_3 + 4 a z_3 Z_3 \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{4} p_2 \left(2 b z_2 Z_2 - 4 a z_3 Z_2 + 4 g z_2 Z_3 - 2 b z_3 Z_3 \right) \right)$$

In[*]:= **u₂ :=**

**dz₂ /. {z₂ → s * Exp[I * t] + s^3 * v₂, z₃ → c * s + s^3 * v₃, Z₂ → s * Exp[-I * t] + s^3 * v₂,
Z₃ → c * s + s^3 * v₃, p₁ → -1, p₂ → -I * s * Exp[I * t] + s^3 * w₂,
p₃ → s * I * c + s^3 * w₃, P₂ → I * s * Exp[-I * t] + s^3 * w₂, P₃ → -s * I * c + s^3 * w₃}**

In[*]:= **u₂**

$$\begin{aligned} \text{Out[*]} = & 2 \left(-\frac{1}{4} i \left(-e^{i t} s - s^3 v_2 + 2 a (e^{i t} s + s^3 v_2)^2 (e^{-i t} s + s^3 v_2) + 2 B (e^{i t} s + s^3 v_2) (c s + s^3 v_3) \right. \right. \\ & \left. \left(e^{-i t} s + s^3 v_2 \right) + 2 G (c s + s^3 v_3)^2 (e^{-i t} s + s^3 v_2) + b (e^{i t} s + s^3 v_2)^2 (c s + s^3 v_3) - \right. \\ & \left. 4 a (e^{i t} s + s^3 v_2) (c s + s^3 v_3) (c s + s^3 v_3) - B (c s + s^3 v_3)^2 (c s + s^3 v_3) \right) + \\ & \frac{1}{4} (-1 + 2 B (c s + s^3 v_3) (e^{-i t} s + s^3 v_2) + 2 b (e^{i t} s + s^3 v_2) (c s + s^3 v_3) - \\ & a (-4 (e^{i t} s + s^3 v_2) (e^{-i t} s + s^3 v_2) + 4 (c s + s^3 v_3) (c s + s^3 v_3))) (-i e^{i t} s + s^3 w_2) + \\ & \frac{1}{4} (B (e^{i t} s + s^3 v_2) (e^{-i t} s + s^3 v_2) + 4 G (c s + s^3 v_3) (e^{-i t} s + s^3 v_2) - \\ & 4 a (e^{i t} s + s^3 v_2) (c s + s^3 v_3) - B (c s + s^3 v_3) (c s + s^3 v_3) + \\ & B ((e^{i t} s + s^3 v_2) (e^{-i t} s + s^3 v_2) - (c s + s^3 v_3) (c s + s^3 v_3))) (i c s + s^3 w_3) \end{aligned}$$

In[*]:= **ExpandAll[%]**

$$\begin{aligned} \text{Out[*]} = & i e^{i t} s - i B c s^3 - \frac{1}{2} i B c^3 s^3 - 3 i a e^{i t} s^3 + 2 i a c^2 e^{i t} s^3 - \frac{3}{2} i b c e^{2 i t} s^3 + i c^2 e^{-i t} G s^3 + \\ & \frac{1}{2} i s^3 v_2 - 4 i a s^5 v_2 - 2 i b c e^{i t} s^5 v_2 - \frac{1}{2} i b c s^7 v_2^2 - i a e^{-i t} s^7 v_2^2 - 2 i B s^5 v_3 + \\ & 4 i a c e^{i t} s^5 v_3 + 2 i a c s^7 v_2 v_3 - i B e^{-i t} s^7 v_2 v_3 + \frac{1}{2} i B c s^7 v_3^2 - i e^{-i t} G s^7 v_3^2 - i B c e^{i t} s^5 v_2 - \\ & 3 i a e^{2 i t} s^5 v_2 + i c^2 G s^5 v_2 - 4 i a e^{i t} s^7 v_2 v_2 - i a s^9 v_2^2 v_2 - 2 i B e^{i t} s^7 v_3 v_2 - i B s^9 v_2 v_3 v_2 - \\ & i G s^9 v_3^2 v_2 - \frac{1}{2} i B c^2 s^5 v_3 + 2 i a c e^{i t} s^5 v_3 - \frac{3}{2} i b e^{2 i t} s^5 v_3 - 2 i b e^{i t} s^7 v_2 v_3 - \\ & \frac{1}{2} i b s^9 v_2^2 v_3 + 4 i a e^{i t} s^7 v_3 v_3 + 2 i a s^9 v_2 v_3 v_3 + \frac{1}{2} i B s^9 v_3^2 v_3 - \frac{s^3 w_2}{2} + 2 a s^5 w_2 - \\ & 2 a c^2 s^5 w_2 + B c e^{-i t} s^5 w_2 + b c e^{i t} s^5 w_2 + b c s^7 v_2 w_2 + 2 a e^{-i t} s^7 v_2 w_2 - 2 a c s^7 v_3 w_2 + \\ & B e^{-i t} s^7 v_3 w_2 + B c s^7 v_2 w_2 + 2 a e^{i t} s^7 v_2 w_2 + 2 a s^9 v_2 v_2 w_2 + B s^9 v_3 v_2 w_2 - 2 a c s^7 v_3 w_2 + \\ & b e^{i t} s^7 v_3 w_2 + b s^9 v_2 v_3 w_2 - 2 a s^9 v_3 v_3 w_2 + B s^5 w_3 - B c^2 s^5 w_3 - 2 a c e^{i t} s^5 w_3 + 2 c e^{-i t} G s^5 w_3 - \\ & 2 a c s^7 v_2 w_3 + B e^{-i t} s^7 v_2 w_3 - B c s^7 v_3 w_3 + 2 e^{-i t} G s^7 v_3 w_3 + B e^{i t} s^7 v_2 w_3 + 2 c G s^7 v_2 w_3 + \\ & B s^9 v_2 v_2 w_3 + 2 G s^9 v_3 v_2 w_3 - B c s^7 v_3 w_3 - 2 a e^{i t} s^7 v_3 w_3 - 2 a s^9 v_2 v_3 w_3 - B s^9 v_3 v_3 w_3 \end{aligned}$$

In[*]:= **Collect**[% , s]

$$\begin{aligned} \text{Out[*]} = & \, i e^{i t} s + s^3 \left(-i B c - \frac{1}{2} i B c^3 - 3 i a e^{i t} + 2 i a c^2 e^{i t} - \frac{3}{2} i b c e^{2 i t} + i c^2 e^{-i t} G + \frac{i v_2}{2} - \frac{w_2}{2} \right) + \\ & s^5 \left(-4 i a v_2 - 2 i b c e^{i t} v_2 - 2 i B v_3 + 4 i a c e^{i t} v_3 - i B c e^{i t} V_2 - \right. \\ & \quad 3 i a e^{2 i t} V_2 + i c^2 G V_2 - \frac{1}{2} i B c^2 V_3 + 2 i a c e^{i t} V_3 - \frac{3}{2} i b e^{2 i t} V_3 + 2 a w_2 - \\ & \quad \left. 2 a c^2 w_2 + B c e^{-i t} w_2 + b c e^{i t} w_2 + B w_3 - B c^2 w_3 - 2 a c e^{i t} w_3 + 2 c e^{-i t} G w_3 \right) + \\ & s^7 \left(-\frac{1}{2} i b c v_2^2 - i a e^{-i t} v_2^2 + 2 i a c v_2 v_3 - i B e^{-i t} v_2 v_3 + \frac{1}{2} i B c v_3^2 - i e^{-i t} G v_3^2 - \right. \\ & \quad 4 i a e^{i t} v_2 V_2 - 2 i B e^{i t} v_3 V_2 - 2 i b e^{i t} v_2 V_3 + 4 i a e^{i t} v_3 V_3 + b c v_2 w_2 + 2 a e^{-i t} v_2 w_2 - \\ & \quad 2 a c v_3 w_2 + B e^{-i t} v_3 w_2 + B c V_2 w_2 + 2 a e^{i t} V_2 w_2 - 2 a c V_3 w_2 + b e^{i t} V_3 w_2 - 2 a c v_2 w_3 + \\ & \quad \left. B e^{-i t} v_2 w_3 - B c v_3 w_3 + 2 e^{-i t} G v_3 w_3 + B e^{i t} V_2 w_3 + 2 c G V_2 w_3 - B c V_3 w_3 - 2 a e^{i t} V_3 w_3 \right) + \\ & s^9 \left(-i a v_2^2 V_2 - i B v_2 v_3 V_2 - i G v_3^2 V_2 - \frac{1}{2} i b v_2^2 V_3 + 2 i a v_2 v_3 V_3 + \frac{1}{2} i B v_3^2 V_3 + 2 a v_2 V_2 w_2 + \right. \\ & \quad \left. B v_3 V_2 w_2 + b v_2 V_3 w_2 - 2 a v_3 V_3 w_2 + B v_2 V_2 w_3 + 2 G v_3 V_2 w_3 - 2 a v_2 V_3 w_3 - B v_3 V_3 w_3 \right) \end{aligned}$$

In[*]:= **ExpandAll**[dz₂]

$$\begin{aligned} \text{Out[*]} = & -\frac{p_2}{2} - \frac{1}{2} i p_1 z_2 + 2 a p_2 z_2 Z_2 + B p_3 z_2 Z_2 + i a p_1 z_2^2 Z_2 + B p_2 z_3 Z_2 + \\ & 2 G p_3 z_3 Z_2 + i B p_1 z_2 z_3 Z_2 + i G p_1 z_3^2 Z_2 + b p_2 z_2 Z_3 - 2 a p_3 z_2 Z_3 + \\ & \frac{1}{2} i b p_1 z_2^2 Z_3 - 2 a p_2 z_3 Z_3 - B p_3 z_3 Z_3 - 2 i a p_1 z_2 z_3 Z_3 - \frac{1}{2} i B p_1 z_3^2 Z_3 \end{aligned}$$

In[*]:= **u₃** :=

$$\begin{aligned} & dz_3 /. \{z_2 \rightarrow s * \text{Exp}[I * t] + s^3 * v_2, z_3 \rightarrow c * s + s^3 * v_3, Z_2 \rightarrow s * \text{Exp}[-I * t] + s^3 * V_2, \\ & \quad Z_3 \rightarrow c * s + s^3 * V_3, p_1 \rightarrow -1, p_2 \rightarrow -I * s * \text{Exp}[I * t] + s^3 * w_2, \\ & \quad p_3 \rightarrow s * I * c + s^3 * w_3, P_2 \rightarrow I * s * \text{Exp}[-I * t] + s^3 * W_2, P_3 \rightarrow -s * I * c + s^3 * W_3\} \end{aligned}$$

In[*]:= **u₃**

$$\begin{aligned} \text{Out[*]} = & 2 \left(-\frac{1}{4} i \left(-c s - s^3 v_3 + b (e^{i t} s + s^3 v_2)^2 (e^{-i t} s + s^3 V_2) - 4 a (e^{i t} s + s^3 v_2) (c s + s^3 v_3) \right. \right. \\ & \quad \left. (e^{-i t} s + s^3 V_2) - B (c s + s^3 v_3)^2 (e^{-i t} s + s^3 V_2) + 2 g (e^{i t} s + s^3 v_2)^2 (c s + s^3 V_3) - \right. \\ & \quad \left. 2 b (e^{i t} s + s^3 v_2) (c s + s^3 v_3) (c s + s^3 V_3) + 2 a (c s + s^3 v_3)^2 (c s + s^3 V_3) \right) + \\ & \frac{1}{4} \left(b (e^{i t} s + s^3 v_2) (e^{-i t} s + s^3 V_2) - 4 a (c s + s^3 v_3) (e^{-i t} s + s^3 V_2) + \right. \\ & \quad 4 g (e^{i t} s + s^3 v_2) (c s + s^3 V_3) - b (c s + s^3 v_3) (c s + s^3 V_3) + \\ & \quad \left. b ((e^{i t} s + s^3 v_2) (e^{-i t} s + s^3 V_2) - (c s + s^3 v_3) (c s + s^3 V_3)) \right) (-i e^{i t} s + s^3 w_2) + \\ & \frac{1}{4} (-1 - 2 B (c s + s^3 v_3) (e^{-i t} s + s^3 V_2) - 2 b (e^{i t} s + s^3 v_2) (c s + s^3 V_3) - \\ & \quad a (4 (e^{i t} s + s^3 v_2) (e^{-i t} s + s^3 V_2) - 4 (c s + s^3 v_3) (c s + s^3 V_3))) (i c s + s^3 w_3) \end{aligned}$$

In[]:= **ExpandAll[%]**

$$\begin{aligned}
 \text{Out[]}= & 2 i a c s^3 + i a c^3 s^3 - \frac{1}{2} i B c^2 e^{-i t} s^3 - \frac{3}{2} i b e^{i t} s^3 + i b c^2 e^{i t} s^3 - 3 i c e^{2 i t} g s^3 - 2 i b s^5 v_2 - \\
 & 4 i c e^{i t} g s^5 v_2 - \frac{1}{2} i b e^{-i t} s^7 v_2^2 - i c g s^7 v_2^2 + \frac{1}{2} i s^3 v_3 + 4 i a s^5 v_3 + 2 i b c e^{i t} s^5 v_3 + \\
 & i b c s^7 v_2 v_3 + 2 i a e^{-i t} s^7 v_2 v_3 - i a c s^7 v_3^2 + \frac{1}{2} i B e^{-i t} s^7 v_3^2 - \frac{1}{2} i B c^2 s^5 V_2 + 2 i a c e^{i t} s^5 V_2 - \\
 & \frac{3}{2} i b e^{2 i t} s^5 V_2 - 2 i b e^{i t} s^7 v_2 V_2 - \frac{1}{2} i b s^9 v_2^2 V_2 + 4 i a e^{i t} s^7 v_3 V_2 + 2 i a s^9 v_2 v_3 V_2 + \\
 & \frac{1}{2} i B s^9 v_3^2 V_2 + i a c^2 s^5 V_3 + i b c e^{i t} s^5 V_3 - 3 i e^{2 i t} g s^5 V_3 - 4 i e^{i t} g s^7 v_2 V_3 - i g s^9 v_2^2 V_3 + \\
 & 2 i b e^{i t} s^7 v_3 V_3 + i b s^9 v_2 v_3 V_3 - i a s^9 v_3^2 V_3 + b s^5 w_2 - b c^2 s^5 w_2 - 2 a c e^{-i t} s^5 w_2 + \\
 & 2 c e^{i t} g s^5 w_2 + b e^{-i t} s^7 v_2 w_2 + 2 c g s^7 v_2 w_2 - b c s^7 v_3 w_2 - 2 a e^{-i t} s^7 v_3 w_2 - 2 a c s^7 V_2 w_2 + \\
 & b e^{i t} s^7 V_2 w_2 + b s^9 v_2 V_2 w_2 - 2 a s^9 v_3 V_2 w_2 - b c s^7 V_3 w_2 + 2 e^{i t} g s^7 V_3 w_2 + 2 g s^9 v_2 V_3 w_2 - \\
 & b s^9 v_3 V_3 w_2 - \frac{s^3 w_3}{2} - 2 a s^5 w_3 + 2 a c^2 s^5 w_3 - B c e^{-i t} s^5 w_3 - b c e^{i t} s^5 w_3 - b c s^7 v_2 w_3 - \\
 & 2 a e^{-i t} s^7 v_2 w_3 + 2 a c s^7 v_3 w_3 - B e^{-i t} s^7 v_3 w_3 - B c s^7 V_2 w_3 - 2 a e^{i t} s^7 V_2 w_3 - \\
 & 2 a s^9 v_2 V_2 w_3 - B s^9 v_3 V_2 w_3 + 2 a c s^7 V_3 w_3 - b e^{i t} s^7 V_3 w_3 - b s^9 v_2 V_3 w_3 + 2 a s^9 v_3 V_3 w_3
 \end{aligned}$$

In[]:= **Collect[%, s]**

$$\begin{aligned}
 \text{Out[]}= & s^3 \left(2 i a c + i a c^3 - \frac{1}{2} i B c^2 e^{-i t} - \frac{3}{2} i b e^{i t} + i b c^2 e^{i t} - 3 i c e^{2 i t} g + \frac{i V_3}{2} - \frac{w_3}{2} \right) + \\
 & s^5 \left(-2 i b v_2 - 4 i c e^{i t} g v_2 + 4 i a v_3 + 2 i b c e^{i t} v_3 - \frac{1}{2} i B c^2 V_2 + \right. \\
 & \quad 2 i a c e^{i t} V_2 - \frac{3}{2} i b e^{2 i t} V_2 + i a c^2 V_3 + i b c e^{i t} V_3 - 3 i e^{2 i t} g V_3 + b w_2 - \\
 & \quad \left. b c^2 w_2 - 2 a c e^{-i t} w_2 + 2 c e^{i t} g w_2 - 2 a w_3 + 2 a c^2 w_3 - B c e^{-i t} w_3 - b c e^{i t} w_3 \right) + \\
 & s^7 \left(-\frac{1}{2} i b e^{-i t} v_2^2 - i c g v_2^2 + i b c v_2 v_3 + 2 i a e^{-i t} v_2 v_3 - i a c v_3^2 + \frac{1}{2} i B e^{-i t} v_3^2 - \right. \\
 & \quad 2 i b e^{i t} v_2 V_2 + 4 i a e^{i t} v_3 V_2 - 4 i e^{i t} g v_2 V_3 + 2 i b e^{i t} v_3 V_3 + b e^{-i t} v_2 w_2 + 2 c g v_2 w_2 - \\
 & \quad b c v_3 w_2 - 2 a e^{-i t} v_3 w_2 - 2 a c V_2 w_2 + b e^{i t} V_2 w_2 - b c V_3 w_2 + 2 e^{i t} g V_3 w_2 - b c v_2 w_3 - \\
 & \quad \left. 2 a e^{-i t} v_2 w_3 + 2 a c v_3 w_3 - B e^{-i t} v_3 w_3 - B c V_2 w_3 - 2 a e^{i t} V_2 w_3 + 2 a c V_3 w_3 - b e^{i t} V_3 w_3 \right) + \\
 & s^9 \left(-\frac{1}{2} i b v_2^2 V_2 + 2 i a v_2 v_3 V_2 + \frac{1}{2} i B v_3^2 V_2 - i g v_2^2 V_3 + i b v_2 v_3 V_3 - i a v_3^2 V_3 + b v_2 V_2 w_2 - \right. \\
 & \quad \left. 2 a v_3 V_2 w_2 + 2 g v_2 V_3 w_2 - b v_3 V_3 w_2 - 2 a v_2 V_2 w_3 - B v_3 V_2 w_3 - b v_2 V_3 w_3 + 2 a v_3 V_3 w_3 \right)
 \end{aligned}$$

In[]:= **k2 :=**

$$\begin{aligned}
 & \text{dp}_2 /. \{z_2 \rightarrow s * \text{Exp}[I * t] + s^3 * v_2, z_3 \rightarrow c * s + s^3 * v_3, Z_2 \rightarrow s * \text{Exp}[-I * t] + s^3 * V_2, \\
 & \quad Z_3 \rightarrow c * s + s^3 * V_3, p_1 \rightarrow -1, p_2 \rightarrow -I * s * \text{Exp}[I * t] + s^3 * w_2, \\
 & \quad p_3 \rightarrow s * I * c + s^3 * w_3, P_2 \rightarrow I * s * \text{Exp}[-I * t] + s^3 * W_2, P_3 \rightarrow -s * I * c + s^3 * W_3\}
 \end{aligned}$$

In[*]:= **k₂**

$$\begin{aligned} \text{Out[*]} = & -2 \left(i \left(-\frac{1}{4} i \left(e^{i t} s + s^3 v_2 \right) + \right. \right. \\ & \frac{1}{4} \left(-1 + 4 a \left(e^{i t} s + s^3 v_2 \right) \left(e^{-i t} s + s^3 v_2 \right) + 2 B \left(c s + s^3 v_3 \right) \left(e^{-i t} s + s^3 v_2 \right) + \right. \\ & 2 b \left(e^{i t} s + s^3 v_2 \right) \left(c s + s^3 v_3 \right) - 4 a \left(c s + s^3 v_3 \right) \left(c s + s^3 v_3 \right) \left. \right) \left(-i e^{i t} s + s^3 w_2 \right) + \\ & \frac{1}{4} \left(2 B \left(e^{i t} s + s^3 v_2 \right) \left(e^{-i t} s + s^3 v_2 \right) + 4 G \left(c s + s^3 v_3 \right) \left(e^{-i t} s + s^3 v_2 \right) - \right. \\ & 4 a \left(e^{i t} s + s^3 v_2 \right) \left(c s + s^3 v_3 \right) - 2 B \left(c s + s^3 v_3 \right) \left(c s + s^3 v_3 \right) \left. \right) \left(i c s + s^3 w_3 \right) \left. \right) + \\ & \left(-\frac{1}{4} i \left(2 a \left(e^{i t} s + s^3 v_2 \right)^2 + 2 B \left(e^{i t} s + s^3 v_2 \right) \left(c s + s^3 v_3 \right) + 2 G \left(c s + s^3 v_3 \right)^2 \right) + \right. \\ & \frac{1}{4} \left(4 a \left(e^{i t} s + s^3 v_2 \right) + 2 B \left(c s + s^3 v_3 \right) \right) \left(-i e^{i t} s + s^3 w_2 \right) + \\ & \frac{1}{4} \left(2 B \left(e^{i t} s + s^3 v_2 \right) + 4 G \left(c s + s^3 v_3 \right) \right) \left(i c s + s^3 w_3 \right) \left. \right) \left(i e^{-i t} s + s^3 w_2 \right) + \\ & \left(-\frac{1}{4} i \left(b \left(e^{i t} s + s^3 v_2 \right)^2 - 4 a \left(e^{i t} s + s^3 v_2 \right) \left(c s + s^3 v_3 \right) - B \left(c s + s^3 v_3 \right)^2 \right) + \right. \\ & \frac{1}{4} \left(2 b \left(e^{i t} s + s^3 v_2 \right) - 4 a \left(c s + s^3 v_3 \right) \right) \left(-i e^{i t} s + s^3 w_2 \right) + \\ & \left. \frac{1}{4} \left(-4 a \left(e^{i t} s + s^3 v_2 \right) - 2 B \left(c s + s^3 v_3 \right) \right) \left(i c s + s^3 w_3 \right) \right) \left(-i c s + s^3 w_3 \right) \left. \right) \end{aligned}$$

In[*]:= **ExpandAll[%]**

$$\begin{aligned} \text{Out[*]} = & -B c s^3 - \frac{1}{2} B c^3 s^3 - 5 a e^{i t} s^3 - 2 a c^2 e^{i t} s^3 + \frac{1}{2} b c e^{2 i t} s^3 + 3 c^2 e^{-i t} G s^3 - \frac{s^3 v_2}{2} - \\ & 6 a s^5 v_2 - 2 a c^2 s^5 v_2 + B c e^{-i t} s^5 v_2 + b c e^{i t} s^5 v_2 + \frac{1}{2} b c s^7 v_2^2 - a e^{-i t} s^7 v_2^2 - \\ & 3 B s^5 v_3 - B c^2 s^5 v_3 - 2 a c e^{i t} s^5 v_3 + 2 c e^{-i t} G s^5 v_3 - 2 a c s^7 v_2 v_3 - B e^{-i t} s^7 v_2 v_3 - \\ & \frac{1}{2} B c s^7 v_3^2 - e^{-i t} G s^7 v_3^2 - 2 a e^{2 i t} s^5 v_2 + 2 c^2 G s^5 v_2 + B c s^7 v_2 v_2 - 2 a e^{i t} s^7 v_2 v_2 - \\ & B e^{i t} s^7 v_3 v_2 + 2 c G s^7 v_3 v_2 - B c^2 s^5 v_3 - b e^{2 i t} s^5 v_3 - 2 a c s^7 v_2 v_3 - b e^{i t} s^7 v_2 v_3 - \\ & B c s^7 v_3 v_3 + 2 a e^{i t} s^7 v_3 v_3 + \frac{1}{2} i s^3 w_2 - 4 i a s^5 w_2 - 2 i B c e^{-i t} s^5 w_2 - 4 i a e^{-i t} s^7 v_2 w_2 - \\ & 2 i B e^{-i t} s^7 v_3 w_2 - i B c s^7 v_2 w_2 - 2 i a e^{i t} s^7 v_2 w_2 - 2 i a s^9 v_2 v_2 w_2 - i B s^9 v_3 v_2 w_2 + \\ & 2 i a c s^7 v_3 w_2 - i b e^{i t} s^7 v_3 w_2 - i b s^9 v_2 v_3 w_2 + 2 i a s^9 v_3 v_3 w_2 - 2 i B s^5 w_3 - \\ & 4 i c e^{-i t} G s^5 w_3 - 2 i B e^{-i t} s^7 v_2 w_3 - 4 i e^{-i t} G s^7 v_3 w_3 - i B e^{i t} s^7 v_2 w_3 - 2 i c G s^7 v_2 w_3 - \\ & i B s^9 v_2 v_2 w_3 - 2 i G s^9 v_3 v_2 w_3 + i B c s^7 v_3 w_3 + 2 i a e^{i t} s^7 v_3 w_3 + 2 i a s^9 v_2 v_3 w_3 + \\ & i B s^9 v_3 v_3 w_3 + i B c e^{i t} s^5 w_2 + 3 i a e^{2 i t} s^5 w_2 - i c^2 G s^5 w_2 + 4 i a e^{i t} s^7 v_2 w_2 + \\ & i a s^9 v_2^2 w_2 + 2 i B e^{i t} s^7 v_3 w_2 + i B s^9 v_2 v_3 w_2 + i G s^9 v_3^2 w_2 - B c s^7 w_2 w_2 - 2 a e^{i t} s^7 w_2 w_2 - \\ & 2 a s^9 v_2 w_2 w_2 - B s^9 v_3 w_2 w_2 - B e^{i t} s^7 w_3 w_2 - 2 c G s^7 w_3 w_2 - B s^9 v_2 w_3 w_2 - 2 G s^9 v_3 w_3 w_2 + \\ & \frac{1}{2} i B c^2 s^5 w_3 - 2 i a c e^{i t} s^5 w_3 + \frac{3}{2} i b e^{2 i t} s^5 w_3 + 2 i b e^{i t} s^7 v_2 w_3 + \frac{1}{2} i b s^9 v_2^2 w_3 - \\ & 4 i a e^{i t} s^7 v_3 w_3 - 2 i a s^9 v_2 v_3 w_3 - \frac{1}{2} i B s^9 v_3^2 w_3 + 2 a c s^7 w_2 w_3 - b e^{i t} s^7 w_2 w_3 - \\ & b s^9 v_2 w_2 w_3 + 2 a s^9 v_3 w_2 w_3 + B c s^7 w_3 w_3 + 2 a e^{i t} s^7 w_3 w_3 + 2 a s^9 v_2 w_3 w_3 + B s^9 v_3 w_3 w_3 \end{aligned}$$

In[]:= **Collect**[% , s]

$$\begin{aligned}
 \text{Out[]} = & s^3 \left(-B c - \frac{B c^3}{2} - 5 a e^{i t} - 2 a c^2 e^{i t} + \frac{1}{2} b c e^{2 i t} + 3 c^2 e^{-i t} G - \frac{v_2}{2} + \frac{i w_2}{2} \right) + \\
 & s^5 \left(-6 a v_2 - 2 a c^2 v_2 + B c e^{-i t} v_2 + b c e^{i t} v_2 - 3 B v_3 - B c^2 v_3 - 2 a c e^{i t} v_3 + 2 c e^{-i t} G v_3 - \right. \\
 & 2 a e^{2 i t} V_2 + 2 c^2 G V_2 - B c^2 V_3 - b e^{2 i t} V_3 - 4 i a w_2 - 2 i B c e^{-i t} w_2 - 2 i B w_3 - 4 i c e^{-i t} G w_3 + \\
 & i B c e^{i t} W_2 + 3 i a e^{2 i t} W_2 - i c^2 G W_2 + \frac{1}{2} i B c^2 W_3 - 2 i a c e^{i t} W_3 + \frac{3}{2} i b e^{2 i t} W_3 \left. \right) + \\
 & s^7 \left(\frac{1}{2} b c v_2^2 - a e^{-i t} v_2^2 - 2 a c v_2 v_3 - B e^{-i t} v_2 v_3 - \frac{1}{2} B c v_3^2 - e^{-i t} G v_3^2 + B c v_2 V_2 - \right. \\
 & 2 a e^{i t} v_2 V_2 - B e^{i t} v_3 V_2 + 2 c G v_3 V_2 - 2 a c v_2 V_3 - b e^{i t} v_2 V_3 - B c v_3 V_3 + 2 a e^{i t} v_3 V_3 - \\
 & 4 i a e^{-i t} v_2 w_2 - 2 i B e^{-i t} v_3 w_2 - i B c V_2 w_2 - 2 i a e^{i t} V_2 w_2 + 2 i a c V_3 w_2 - i b e^{i t} V_3 w_2 - \\
 & 2 i B e^{-i t} v_2 w_3 - 4 i e^{-i t} G v_3 w_3 - i B e^{i t} V_2 w_3 - 2 i c G V_2 w_3 + i B c V_3 w_3 + 2 i a e^{i t} V_3 w_3 + \\
 & 4 i a e^{i t} v_2 w_2 + 2 i B e^{i t} v_3 w_2 - B c w_2 w_2 - 2 a e^{i t} w_2 w_2 - B e^{i t} w_3 w_2 - 2 c G w_3 w_2 + \\
 & 2 i b e^{i t} v_2 w_3 - 4 i a e^{i t} v_3 w_3 + 2 a c w_2 w_3 - b e^{i t} w_2 w_3 + B c w_3 w_3 + 2 a e^{i t} w_3 w_3 \left. \right) + \\
 & s^9 \left(-2 i a v_2 V_2 w_2 - i B v_3 V_2 w_2 - i b v_2 V_3 w_2 + 2 i a v_3 V_3 w_2 - i B v_2 V_2 w_3 - \right. \\
 & 2 i G v_3 V_2 w_3 + 2 i a v_2 V_3 w_3 + i B v_3 V_3 w_3 + i a v_2^2 W_2 + i B v_2 v_3 W_2 + \\
 & i G v_3^2 W_2 - 2 a v_2 w_2 W_2 - B v_3 w_2 W_2 - B v_2 w_3 W_2 - 2 G v_3 w_3 W_2 + \frac{1}{2} i b v_2^2 W_3 - \\
 & 2 i a v_2 v_3 W_3 - \frac{1}{2} i B v_3^2 W_3 - b v_2 w_2 W_3 + 2 a v_3 w_2 W_3 + 2 a v_2 w_3 W_3 + B v_3 w_3 W_3 \left. \right)
 \end{aligned}$$

In[]:= **ExpandAll**[dp2]

$$\begin{aligned}
 \text{Out[]} = & -\frac{1}{2} i p_1 p_2 - \frac{1}{2} p_1^2 z_2 - 2 a p_2 P_2 z_2 - B p_3 P_2 z_2 - b p_2 P_3 z_2 + 2 a p_3 P_3 z_2 - i a p_1 P_2 z_2^2 - \frac{1}{2} i b p_1 P_3 z_2^2 - \\
 & B p_2 P_2 z_3 - 2 G p_3 P_2 z_3 + 2 a p_2 P_3 z_3 + B p_3 P_3 z_3 - i B p_1 P_2 z_2 z_3 + 2 i a p_1 P_3 z_2 z_3 - \\
 & i G p_1 P_2 z_3^2 + \frac{1}{2} i B p_1 P_3 z_3^2 + 2 i a p_1 p_2 z_2 z_2 + i B p_1 p_3 z_2 z_2 + i B p_1 p_2 z_3 z_2 + \\
 & 2 i G p_1 p_3 z_3 z_2 + i b p_1 p_2 z_2 z_3 - 2 i a p_1 p_3 z_2 z_3 - 2 i a p_1 p_2 z_3 z_3 - i B p_1 p_3 z_3 z_3
 \end{aligned}$$