时间序列分析与R 语言实战
第五章：非平稳时间序列（一）

Outline

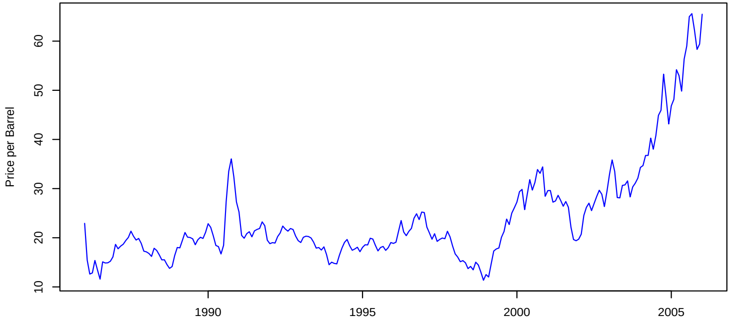
1. 非平稳时间序列案例
2. 平稳序列与非平稳序列的比较
   - 统计属性
   - 图形特征
3. 趋势
   - 确定趋势
   - 随机趋势

Outline

1. 非平稳时间序列案例
2. 平稳序列与非平稳序列的比较
   - 统计属性
   - 图形特征
3. 趋势
   - 确定趋势
   - 随机趋势

非平稳时间序列案例

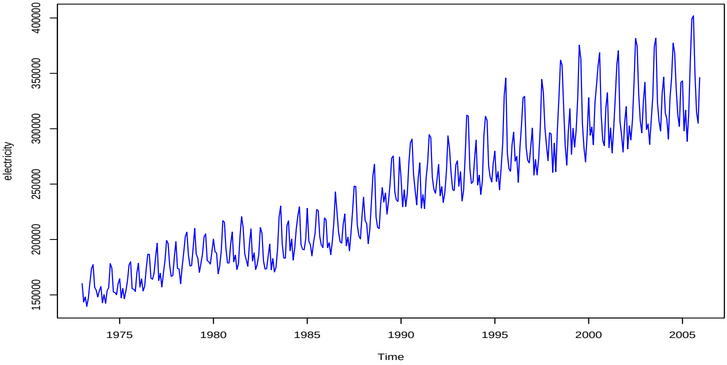
例 5.1：1986 年 1 月到 2006 年 1 月，每桶原油的月度价格时间序列图




```
> win.graph(width=4.875,height=3,pointsize=8)
> data(oil.price)
> plot(oil.price, ylab='Price per Barrel',type='l')
```

非平稳时间序列案例

例 5.2：1973 年 1 月到 2005 年 12 月，美国月度发电量的时间序列图

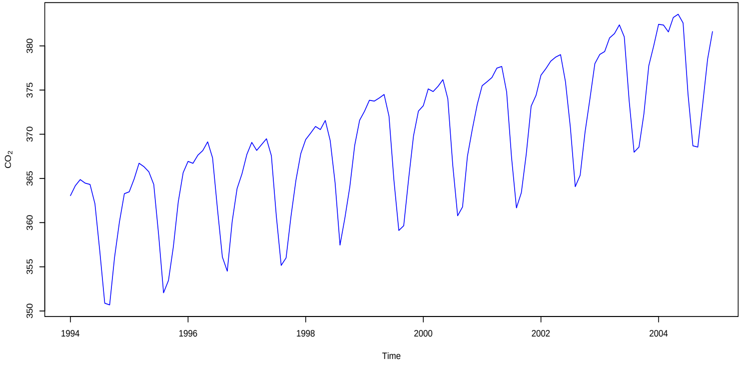



```
> data(electricity); plot(electricity)
```

非平稳时间序列案例

例 5.3：1994 年 1 月到 2004 年 12 月，加拿大 Alert 月度 CO_2 水平的时间序列图

```
> data(co2);    plot(co2);
```



Outline

1. 非平稳时间序列案例
2. 平稳序列与非平稳序列的比较
   - 统计属性
   - 图形特征
3. 趋势
   - 确定性趋势
   - 随机趋势

Outline

1. 非平稳时间序列案例
2. 平稳序列与非平稳序列的比较
   - 统计属性
   - 图形特征
3. 趋势
   - 确定性趋势
   - 随机趋势

统计属性上的比较

平稳时间序列：

- 均值为常数，序列围绕均值上下波动
- 自协方差只依赖于时间间隔
- 多数平稳序列，随滞后项的增加，自相关函数迅速衰减

非平稳时间序列：

- 或不具有固定的均值
- 或自协方差不只依赖于时间间隔
- 随滞后项的增加，自相关函数通常不会迅速衰减

统计属性上的比较

模型：

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t$$

假设 $Y_0 = 0$ 为初始条件。

- $|\phi| < 1$ 时，序列 $\{Y_t\}$ 平稳。
- $|\phi| = 1$ 时，

$$Y_t = e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + \cdots + e_1$$

随机游动过程：

$$E(Y_t) = 0$$
$$Var(Y_t) = t\sigma_e^2$$
$$\gamma_{t,s} = t\sigma_e^2\,,\ 1 \leq t \leq s$$

因此，$\{Y_t\}$ 是非平稳序列。

统计属性上的比较

模型：

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t$$

假设 $Y_0 = 0$ 为初始条件。

- 考虑 $|\phi| > 1$ 的情况，不妨取 $\phi = 3$，可得：

  $$Y_t = e_t + 3e_{t-1} + 3^2 e_{t-2} + \cdots + 3^{t-1} e_1 + 3^t Y_0$$

  即，

  $$Y_t = e_t + 3e_{t-1} + 3^2 e_{t-2} + \cdots + 3^{t-1} e_1$$

  从而：

  $$E(Y_t) = 0$$
  $$Var(Y_t) = \frac{1}{8}(9^t - 1)\sigma_e^2$$
  $$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = \frac{3^k}{8}(9^{t-k} - 1)\sigma_e^2$$

  因此，$\{Y_t\}$ 是非平稳序列。

Outline

1. 非平稳时间序列案例
2. 平稳序列与非平稳序列的比较
   - 统计属性
   - 图形特征
3. 趋势
   - 确定性趋势
   - 随机趋势

图像特征上的比较

平稳时间序列：

- 无明显的趋势和周期性
- 多数平稳序列，样本自相关函数 ACF 呈指数衰减或截尾

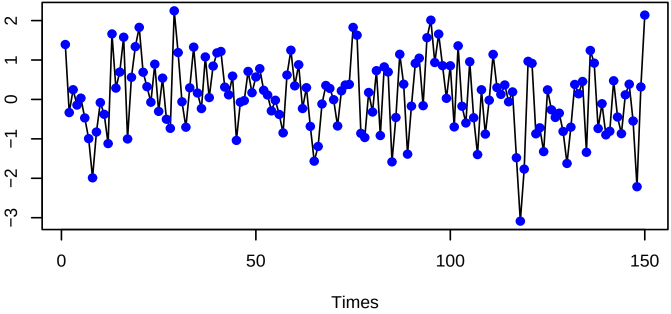
非平稳时间序列：

- 可观察到明显的趋势或周期性
- 非平稳序列，样本自相关函数 ACF 一般缓慢衰减

图像特征上的比较：平稳序列

平稳序列：

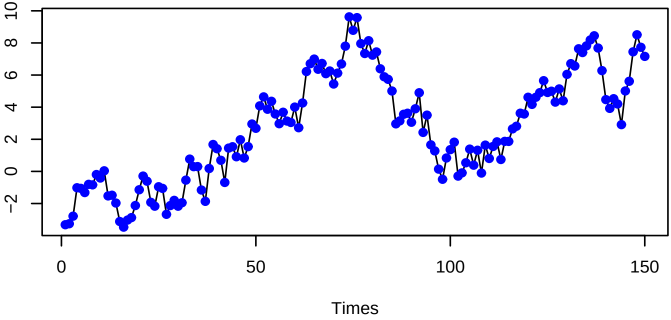
$$Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t, \quad \phi = 0.3$$



图像特征上的比较：平稳序列

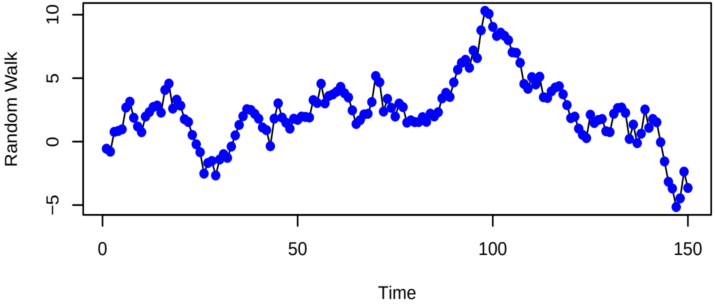
平稳序列：

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t, \quad \phi = 0.98$$



非平稳序列：

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t$$



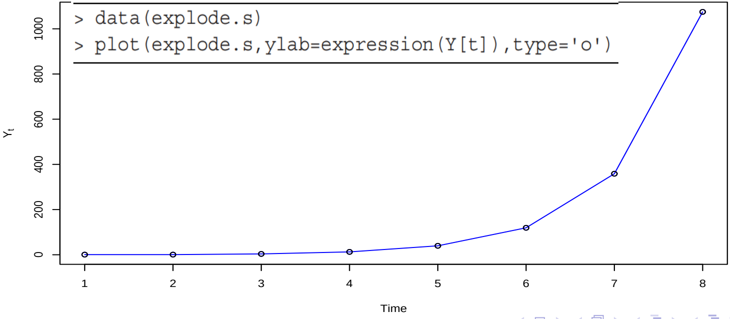
图像特征上的比较：非平稳序列

爆炸式增长：

$$Y_t = 3Y_{t-1} + e_t$$

t	1	2	3	4	5	6	7	8
e_t	0.63	-1.25	1.80	1.51	1.56	0.62	0.64	-0.98
Y_t	0.63	0.64	3.72	12.67	39.57	119.32	358.60	1075.00

```
> data(explode.s)
> plot(explode.s,ylab=expression(Y[t]),type='o')
```



Outline

1. 非平稳时间序列案例
2. 平稳序列与非平稳序列的比较
   - 统计属性
   - 图形特征
3. 趋势
   - 确定趋势
   - 随机趋势

Outline

1. 非平稳时间序列案例
2. 平稳序列与非平稳序列的比较
    - 统计属性
    - 图形特征
3. 趋势
    - 确定趋势
    - 随机趋势

确定趋势

回顾：具有时变均值的任何时间序列都是非平稳的，如第三章中的

$$Y_t = \mu_t + X_t$$

例：

- 线性趋势：

$$\mu_t = \beta_0 + \beta_1 t$$

- 二次趋势

$$\mu_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$$

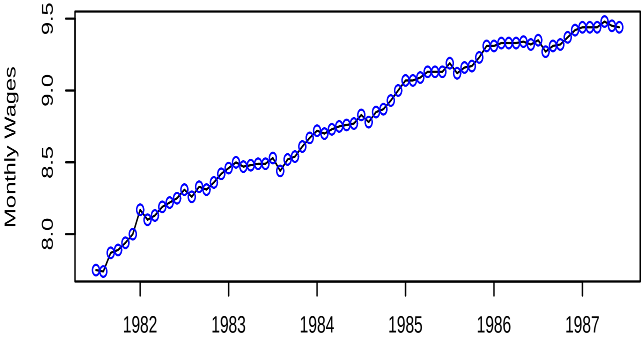
- 余弦趋势

$$\mu_t = \beta \cos(2\pi f t + \Phi)$$

注： 仅当有理由相信该确定性趋势“永远”是恰当时，才认为该模型是合理的。

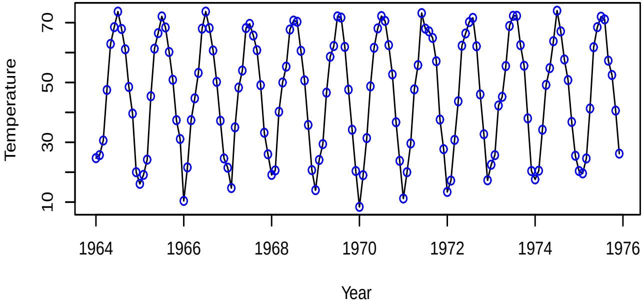
确定趋势

例 3.5：程序包TSA 中的数据文件*wages*，包含1981.07——1987.06期间，美国服装和纺织品行业公认的平均时薪，单位为以美元计的月度值。




```
> win.graph(width=4.875, height=2.5,pointsize=8)
> data(wages); plot(wages,type='l',ylab='wages')
> points(wages,col='blue')
```

例 3.2： Dubuque月平均气温的时间序列图




```
> data(tempdub)
> plot(tempdub,ylab='Temperature')
```

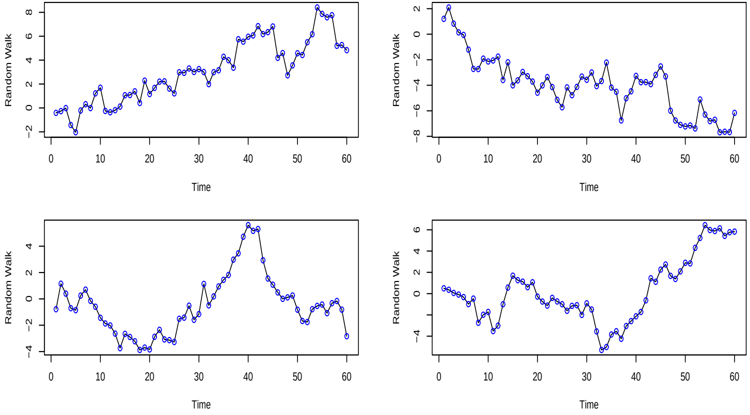
Outline

1. 非平稳时间序列案例
2. 平稳序列与非平稳序列的比较
   - 统计属性
   - 图形特征
3. 趋势
   - 确定趋势
   - 随机趋势

随机趋势

随机游动过程不含任何确定性趋势：

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t$$



时间序列分析与R 语言实战
第五章：非平稳时间序列（二）：平稳化方法

Outline

1. 差分
2. 对数变换
3. 幂变换

Outline

1. 差分
2. 对数变换
3. 幂变换

差分：一阶差分

随机游动过程：

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t$$

- 可重新表达为

$$Y_t - Y_{t-1} = e_t$$

- 记 $\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$，则

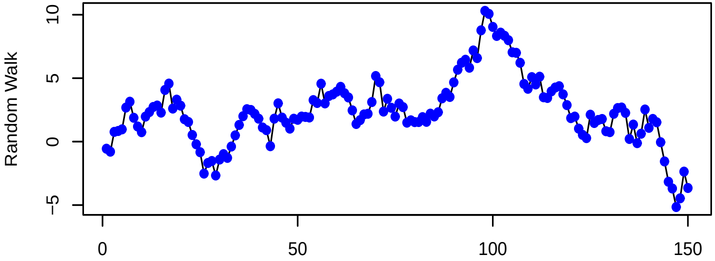
$$\nabla Y_t = e_t$$

- 称 ∇Y_t 为 Y_t 的一阶差分，序列 $\{\nabla Y_t\}$ 是平稳的

差分：一阶差分

随机游动过程：

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t$$

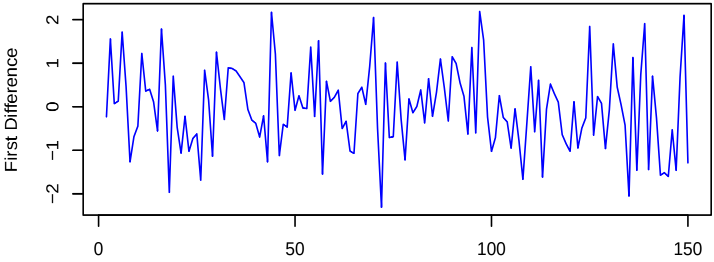



```
> data(rwalk)
> win.graph(width=8, height=6,pointsize=8)
> plot(rwalk,type='o',ylab='Random Walk')
```

差分：一阶差分

随机游动过程的一阶差分：

$$\nabla Y_t = e_t$$




```
> data(rwalk)
> win.graph(width=8, height=6,pointsize=8)
> plot(diff(rwalk),type='l',ylab='First Difference')
```

差分：一阶差分

模型：

$$Y_t = M_t + X_t$$

其中 M_t 随时间缓慢变化，X_t 是零均值平稳序列。

- **M_t 是确定的**：假设 M_t 在每两个连续时间点内几乎是不变的。以 $\beta_{0,t}$ 作为 t 时刻的 M_t 估计值，

$$\min_{\beta_{0,t}} \sum_{j=0}^{1} (Y_{t-j} - \beta_{0,t})^2$$

记 $J_1 = \sum_{j=0}^{1} (Y_{t-j} - \beta_{0,t})^2$，

$$\frac{\partial J_1(\beta_{0,t})}{\partial \beta_{0,t}} = -2 \sum_{j=0}^{1} (Y_{t-j} - \beta_{0,t}) = 0$$

$$\Longrightarrow \beta_{0,t} = \frac{1}{2}(Y_t + Y_{t-1})$$

差分：一阶差分

- M_t 估计值：

$$\hat{M}_t = \frac{1}{2}(Y_t + Y_{t-1})$$

- 去趋势：

$$\begin{aligned} Y_t - \hat{M}_t &= Y_t - \frac{1}{2}(Y_t + Y_{t-1}) \\ &= \frac{1}{2}(Y_t - Y_{t-1}) \\ &= \frac{1}{2}\nabla Y_t \end{aligned}$$

- 模型可重新表达为：

$$\nabla Y_t = 2X_t$$

差分：一阶差分

- **M_t 是随机的**：假设 M_t 序列由随机游动模型支配的，且随时间缓慢变化。例：

$$Y_t = M_t + e_t, \qquad M_t = M_{t-1} + \varepsilon_t$$

其中，序列 $\{e_t\}$ 和 $\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声，相互独立。

$$\nabla Y_t = \nabla M_t + \nabla e_t = \varepsilon_t + e_t - e_{t-1}$$

  - 方差：

$$Var(\nabla Y_t) = \sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_e^2$$

  - 协方差：

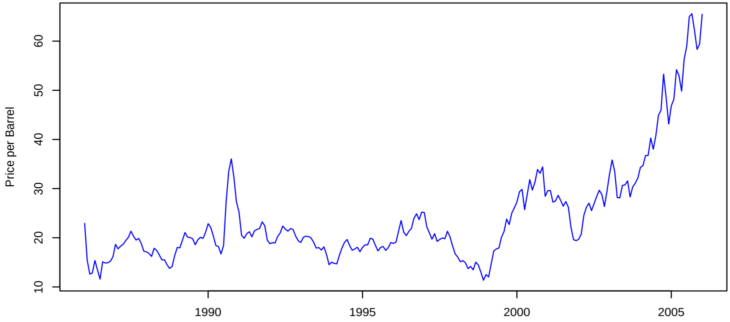
$$\gamma_k = \begin{cases} -\sigma_e^2 & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

  - 自相关函数：

$$\rho_k = \begin{cases} -\dfrac{1}{2 + \sigma_\varepsilon^2/\sigma_e^2} & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

一阶差分：石油价格序列

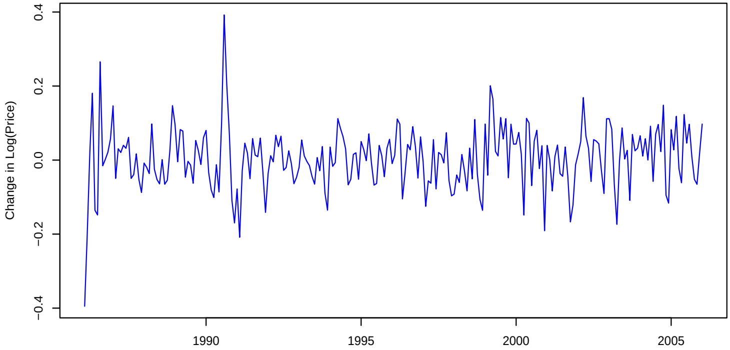
例 5.1：1986 年 1 月到 2006 年 1 月，每桶原油的月度价格时间序列图




```
data("oil.price")
win.graph(width=6, height=3,pointsize=8)
plot(oil.price,ylab='Price Barrel',type='l')
```

一阶差分：石油价格序列

石油价格序列取对数之后再进行差分所得时间序列图




```
> data("oil.price")
> win.graph(width=8, height=6,pointsize=8)
> plot(diff(log(oil.price)),ylab='Change in Log(Price)')
> abline(h=0,col='red')
```

差分：二阶差分

模型：

$$Y_t = M_t + X_t$$

- M_t 是确定的：假设 M_t 在时域的三个连续时间点上是线性的。以 $\beta_{0,t} + j\beta_{1,t}$ 作为 $t+j$ 时刻的 M_{t+j} 估计值，

$$\min \sum_{j=-1}^{1} (Y_{t+j} - (\beta_{0,t} + j\beta_{1,t}))^2$$

记 $J_2 = \sum_{j=-1}^{1} (Y_{t+j} - (\beta_{0,t} + j\beta_{1,t}))^2$，

$$\frac{\partial J_2(\beta_{0,t})}{\partial \beta_{0,t}} = -2\sum_{j=-1}^{1} (Y_{t+j} - (\beta_{0,t} + j\beta_{1,t})) = 0$$

$$\Longrightarrow \beta_{0,t} = \frac{1}{3}(Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1})$$

差分：二阶差分

- M_t 估计值：

$$\hat{M}_t = \frac{1}{3}(Y_{t+1} + Y_t + Y_{t-1})$$

- 去趋势：

$$\begin{aligned} Y_t - \hat{M}_t &= Y_t - \frac{1}{3}(Y_{t+1} + Y_t + Y_{t-1}) \\ &= -\frac{1}{3}(Y_{t+1} - 2Y_t + Y_{t-1}) \\ &= -\frac{1}{3}\nabla(\nabla Y_{t+1}) \\ &= -\frac{1}{3}\nabla^2 Y_{t+1} \end{aligned}$$

- 模型可重新表达为：

$$\nabla^2 Y_{t+1} = -3X_t$$

差分：二阶差分

- M_t 是随机的：例：

$$Y_t = M_t + e_t, \qquad M_t = M_{t-1} + W_t, \qquad W_t = W_{t-1} + \varepsilon_t$$

其中，序列 $\{e_t\}$ 和 $\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声，相互独立。

  - 一阶差分

$$\nabla Y_t = \nabla M_t + \nabla e_t = W_t + \nabla e_t$$

  - 二阶差分

$$\begin{aligned}\nabla^2 Y_t &= \nabla W_t + \nabla^2 e_t \\ &= \varepsilon_t + (e_t - e_{t-1}) - (e_{t-1} - e_{t-2}) \\ &= \varepsilon_t + e_t - 2e_{t-1} + e_{t-2}\end{aligned}$$

差分：二阶差分

序列 $\{\nabla^2 Y_t\}$，

- 方差：

$$Var(\nabla^2 Y_t) = \sigma_\varepsilon^2 + 6\sigma_e^2$$

- 协方差：

$$\gamma_k = \begin{cases} -4\sigma_e^2 & k=1 \\ -\sigma_e^2 & k=2 \\ 0 & k \geq 3 \end{cases}$$

- 自相关函数：

$$\rho_k = \begin{cases} -\dfrac{4}{6+\sigma_\varepsilon^2/\sigma_e^2} & k=1 \\ -\dfrac{1}{6+\sigma_\varepsilon^2/\sigma_e^2} & k=2 \\ 0 & k \geq 3 \end{cases}$$

Outline

1. 差分
2. 对数变换
3. 幂变换

对数变换：泰勒展开

泰勒公式

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 邻域处任意可导，则

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 R_n 是泰勒公式的余项，即 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小

例： 求 $f(x)=\log(1+x)$ 在 $x_0=0$ 处的展开式。

$$f(x_0)=0,\ \ f'(x_0)=\frac{1}{1+x_0}=1,\cdots,\ \ f^{(n)}(x_0)=(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x_0)^n}$$

则，

$$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

对数变换

序列的散度变大，与序列值的增加有关。

例： 假设对任意 t，$Y_t > 0$，

$$E(Y_t) = \mu_t, \qquad \sqrt{Var(Y_t)} = \mu_t \sigma$$

$\log(Y_t)$ 在 μ_t 处的泰勒展开：

$$\log(Y_t) \approx \log(\mu_t) + \frac{Y_t - \mu_t}{\mu_t}$$

则：

$$E[\log(Y_t)] \approx \log(\mu_t), \qquad Var[\log(Y_t)] \approx \sigma^2$$

对数变换

从一个时刻到下一个时刻，Y_t 趋于相对稳定的百分比变化，

$$Y_t = (1 + X_t)Y_{t-1}$$

其中，$100X_t$ 即相应的百分比。

$$\log(Y_t) - \log(Y_{t-1}) = \log(\frac{Y_t}{Y_{t-1}}) = \log(1 + X_t)$$

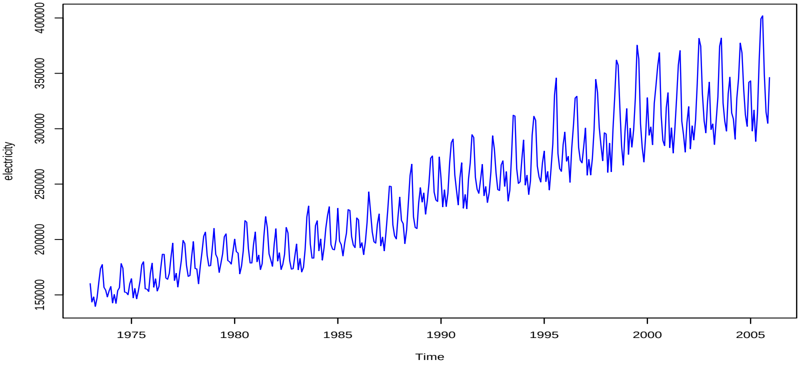
例：若$|X_t| < 0.2$，则$\log(1 + X_t) \approx X_t$，于是

$$\nabla[\log(Y_t)] \approx X_t$$

注：金融中，自然对数差分通常称为收益率。

对数变换：美国月度发电量序列

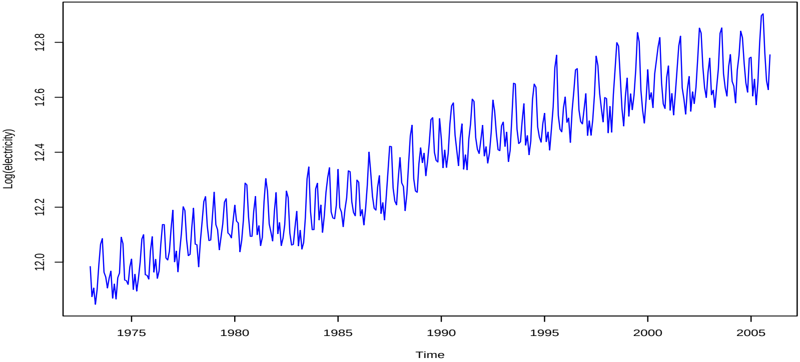
例 5.2：1973 年 1 月到 2005 年 12 月，美国月度发电量的时间序列图




```
> data(electricity); plot(electricity)
```

对数变换：美国月度发电量序列

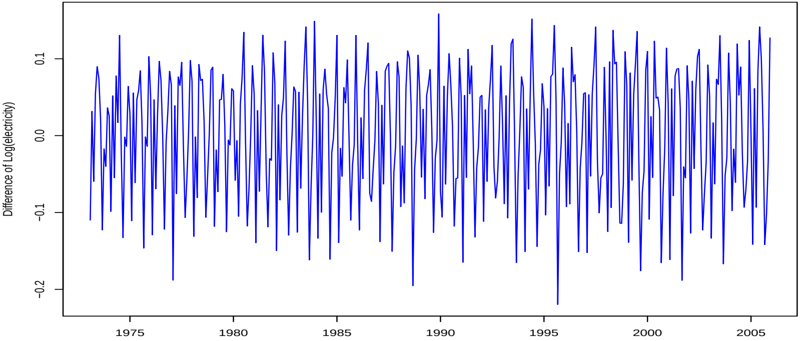
美国月度发电量取对数之后的时间序列图




```
> plot(log(electricity),ylab='Log(electricity)')
```

对数变换：美国月度发电量序列

美国月度发电量取对数之后再进行差分所得时间序列图




```
plot(diff(log(electricity)),
        ylab='Difference of Log(electricity)')
```

Outline

1. 差分
2. 对数变换
3. 幂变换

幂变换

Box-Cox 变换

给定参数 λ，变换为

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \log x & \lambda = 0 \end{cases}$$

特别的，$\lambda \to 0$ 时，$g(x)$ 平滑变化。

证明 $\lambda \to 0$ 时，$\frac{x^\lambda - 1}{\lambda} \to \log x$：

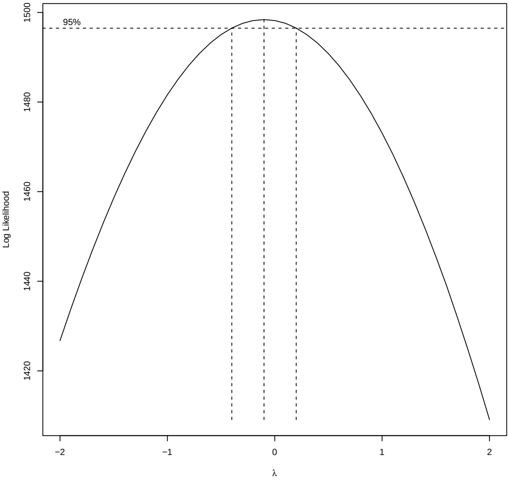
$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{x^\lambda - 1}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\frac{d}{d\lambda}(x^\lambda - 1)}{\frac{d\lambda}{d\lambda}} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{x^\lambda \log(x)}{1} = \log x$$

其中，$x^\lambda - 1 = e^{\lambda \log x} - 1$。

幂变换：美国月度发电量

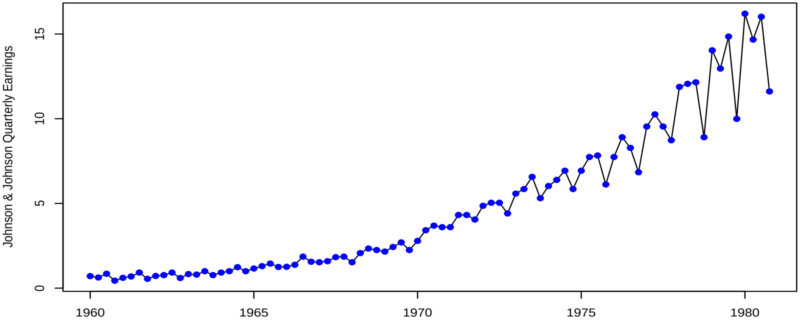
对美国月度发电量序列计算 λ

```
> BoxCox.ar(electricity)
```



幂变换：强生公司股票收益

例 5.4：1960 年到 1980 年，强生公司股票收益的季度数据序列

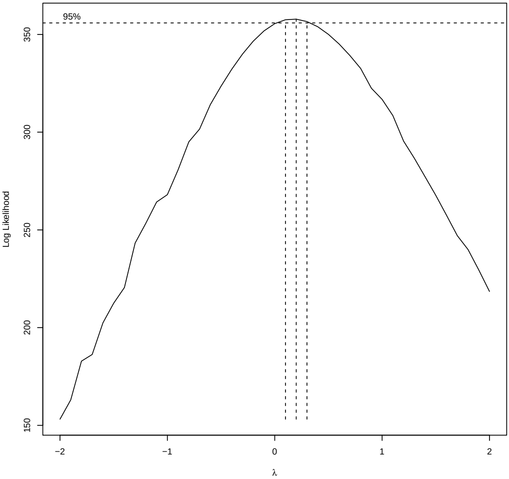



```
>data(JJ); win.graph(width=7, height=4,pointsize=8)
>plot(JJ,ylab='Johnson & Johnson Quartly Earnings',
     xlab='Times', type='l')
>points(JJ,col='blue',type='p',pch=19)
```

幂变换：强生公司股票收益

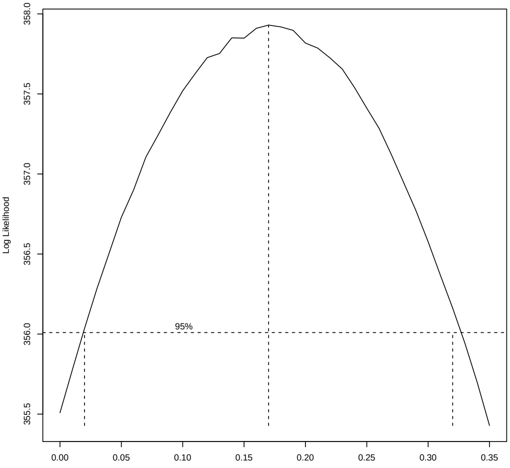
画图，确定幂变换最优 λ 区间 $[0.02, 0.32]$。

```
> BoxCox.ar(JJ)
```



幂变换：强生公司股票收益

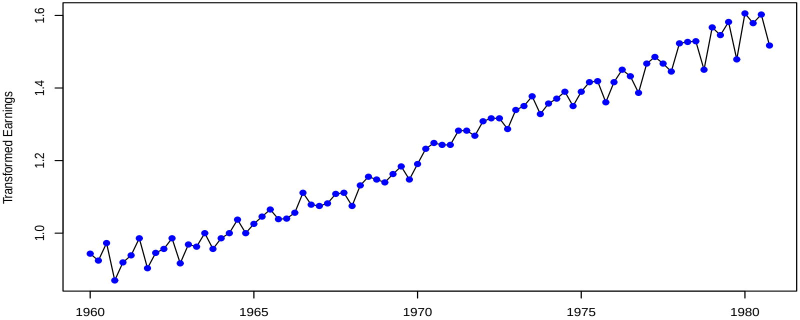
锁定区间，确定幂变换最优 $\lambda = 0.17$




```
> BoxCox.ar(JJ, lambda=seq(0,0.35,0.01))
```

幂变换：强生公司股票收益

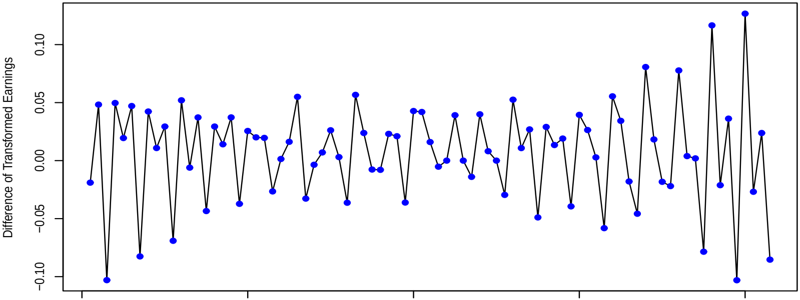
对强生公司股票收益的季度数据进行幂变换 x^λ 。




```
> win.graph(width=7, height=4,pointsize=8)
> plot(JJ^0.17,ylab='Transformed Earnings',
     xlab='Times',type='l')
> points(JJ^0.17,col='blue',type='p',pch=19)
```

幂变换：强生公司股票收益

对强生公司股票收益的季度数据进行幂变换，之后再差分




```
>win.graph(width=7, height=4,pointsize=8)
>plot(diff(JJ^0.17,difference=1),type='l',xlab='Times',
     ylab='Difference of Transformed Earnings')
>points(diff(JJ^0.17),col='blue',type='p',pch=19)
```

时间序列分析与R 语言实战
第五章：非平稳时间序列（三）：ARIMA模型

Outline

1. ARIMA 模型
2. IMA(d, q) 模型
3. ARI(p, d) 模型
4. ARIMA 模型中的常数项

Outline

1. ARIMA 模型
2. IMA(d, q) 模型
3. ARI(p, d) 模型
4. ARIMA 模型中的常数项

ARIMA 模型

- 若一个时间序列 $\{Y_t\}$ 的 d 阶差分 $W_t = \nabla^d Y_t$ 是一个平稳的 ARMA 过程，则称 $\{Y_t\}$ 为自回归滑动平均求和模型。
- 若 W_t 服从 ARMA(p, q) 模型，则称 $\{Y_t\}$ 为 ARIMA(p, d, q) 过程。

令 $W_t = \nabla^d Y_t$ ，则ARIMA(p, d, q) 过程：

$$W_t = \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \cdots + \phi_p W_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \cdots - \theta_q e_{t-q}$$

ARIMA 模型：延迟算子

延迟算子

延迟算子或者滞后算子，可作用于序列的时间指标，令时间向后倒退一个时期形成一个新序列，记作 B。

- 特别地，

$$BY_t = Y_{t-1}, \quad B^m Y_t = Y_{t-m}$$

- 线性：对任何常数 a，b，c 和序列 $\{Y_t\}$，$\{X_t\}$，有

$$B(aY_t + bX_t + c) = aBY_t + bBX_t + c$$

ARIMA 模型：延迟算子

MA(q):

- 模型：

$$Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \cdots - \theta_q e_{t-q}$$

- 延迟算子表达：

$$Y_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q) e_t$$

- MA 特征多项式：

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$$

ARIMA 模型：延迟算子

AR(p):

- 模型：

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + e_t$$

- 延迟算子表达：

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) Y_t = e_t$$

- AR 特征多项式：

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

$$W_t = \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \cdots + \phi_p W_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \cdots - \theta_q e_{t-q}$$

延迟算子表达：

- ARMA(p, q)：
$$\phi(B) W_t = \theta(B) e_t$$
- d 阶差分：
$$W_t = \nabla^d Y_t = (1 - B)^d Y_t$$
- ARIMA(p, d, q)：
$$\phi(B)(1 - B)^d Y_t = \theta(B) e_t$$

注：在平稳性条件 $\phi(B) = 0$ 中的 B 被当作方程中的虚拟变量。

ARIMA 模型：一般表达

一般表达：

$$Y_t = \psi_0 e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \cdots$$

延迟算子：

$$Y_t = (\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots)e_t$$

ARIMA(p, d, q)：

$$\phi(B)(1-B)^d Y_t = \theta(B)e_t$$

可得：

$$\phi(x)(1-x)^d(\psi_0 + \psi_1 x + \psi_2 x^2 + \cdots) = \theta(x)$$

即：

$$\begin{aligned}&(1-\phi_1 x-\phi_2 x^2-\cdots-\phi_p x^p)(1-x)^d(\psi_0+\psi_1 x+\psi_2 x^2+\cdots)\\&=1-\theta_1 x-\theta_2 x^2-\cdots-\theta_q x^q\end{aligned}$$

例： ARIMA(p, 1, q) 过程

$$W_t = \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \cdots + \phi_p W_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \cdots - \theta_q e_{t-q}$$

- $W_t = \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$：

$$\begin{aligned} Y_t - Y_{t-1} = \phi_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \phi_2(Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \cdots \\ + \phi_p(Y_{t-p} - Y_{t-p-1}) \\ + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \cdots - \theta_q e_{t-q} \end{aligned}$$

- 差分方程形式：

$$\begin{aligned} Y_t = (1+\phi_1)Y_{t-1} + (\phi_2 - \phi_1)Y_{t-2} + (\phi_3 - \phi_2)Y_{t-3} + \cdots \\ + (\phi_p - \phi_{p-1})Y_{t-p} - \phi_p Y_{t-p-1} \\ + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \cdots - \theta_q e_{t-q} \end{aligned}$$

ARIMA 模型：ARIMA(p, 1, q)

AR 特征多项式：

- 序列 $\{Y_t\}$：

$$\begin{aligned}\phi(x) &= 1-(1+\phi_1)x-(\phi_2-\phi_1)x^2-(\phi_3-\phi_2)x^3+\cdots\\ &\qquad -(\phi_p-\phi_{p-1})x^p+\phi_p x^{p+1}\\ &= 1-x-\phi_1 x(1-x)-\phi_2 x^2(1-x)-\cdots-\phi_p x^p(1-x)\\ &= (1-\phi_1 x-\phi_2 x^2-\cdots-\phi_p x^p)(1-x)\end{aligned}$$

- 序列 $\{\nabla Y_t\}$：

$$\phi(x) = 1-\phi_1 x-\phi_2 x^2-\cdots-\phi_p x^p$$

ARIMA 模型

当 $t < -m$ 时，取 $Y_t = 0$，

- ARIMA(p, 1, q):

$$Y_t = \sum_{j=-m}^{t} W_j$$

- ARIMA(p, 2, q):

$$Y_t = \sum_{j=-m}^{t} \sum_{i=-m}^{j} W_i = \sum_{j=0}^{t+m} (j+1) W_{t-j}$$

Outline

1. ARIMA 模型
2. IMA(d, q) 模型
3. ARI(p, d) 模型
4. ARIMA 模型中的常数项

IMA 模型

IMA(d, q) 模型：

$$\nabla^d Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \cdots - \theta_q e_{t-q}$$

- IMA(1, 1) 模型，令 $W_t = \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$：

$$W_t = e_t - \theta e_{t-1}$$

- IMA(2, 2) 模型，令 $W_t = \nabla^2 Y_t = \nabla Y_t - \nabla Y_{t-1}$：

$$W_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}$$

IMA 模型：IMA(1, 1)

IMA(1, 1) 模型：

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t - \theta e_{t-1}$$

- 用 W_t 表示：

$$W_t = e_t - \theta e_{t-1}$$

- 用白噪声表示：

$$\begin{aligned} Y_t &= \sum_{j=-m}^{t} W_j \\ &= e_t + (1-\theta)e_{t-1} + (1-\theta)e_{t-2} + \cdots + (1-\theta)e_{-m} - \theta e_{-m-1} \end{aligned}$$

IMA 模型：IMA(1, 1)

$$Y_t = e_t + (1-\theta)e_{t-1} + (1-\theta)e_{t-2} + \cdots + (1-\theta)e_{-m} - \theta e_{-m-1}$$

- 方差：
$$Var(Y_t) = [1 + (t+m)(1-\theta)^2 + \theta^2]\sigma_e^2$$
则，$t \uparrow$，$Var(Y_t) \uparrow$。
- 协方差：
$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = [(1-\theta) + (t-k+m)(1-\theta)^2 + \theta^2]\sigma_e^2$$

IMA 模型：IMA(1, 1)

$$Y_t = e_t + (1-\theta)e_{t-1} + (1-\theta)e_{t-2} + \cdots + (1-\theta)e_{-m} + \theta)e_{-m-1}$$

- 自相关函数：

$$Corr(Y_t, Y_{t-k}) = \frac{(1-\theta) + (t-k+m)(1-\theta)^2 + \theta^2}{\sqrt{[1+(t+m)(1-\theta)^2+\theta^2][1+(t-k+m)(1-\theta)^2+\theta^2]}}$$

则，对于较大的 m 和中等的 k ，$Corr(Y_t, Y_{t-k}) \approx 1$

IMA 模型：IMA(2, 2)

IMA(2, 2) 模型：

$$\nabla^2 Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}$$

即，

$$Y_t = 2Y_{t-1} - Y_{t-2} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}$$

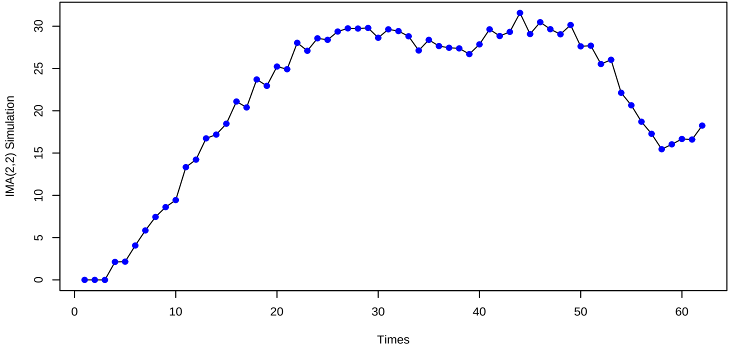
从而，

$$\begin{aligned} Y_t &= \sum_{j=0}^{t+m} (j+1) W_{t-j} \\ &= e_t + \sum_{j=1}^{t+m} \psi_j e_{t-j} - [(t+m+1)\theta_1 + (t+m)\theta_2] e_{-m-1} \\ &\quad - (t+m+1)\theta_2 e_{-m-2} \end{aligned}$$

其中，$\psi_j = 1 + \theta_2 + (1 - \theta_1 - \theta_2) j$，$j = 1, 2, 3, \cdots, t+m$。

IMA 模型：IMA(2, 2)

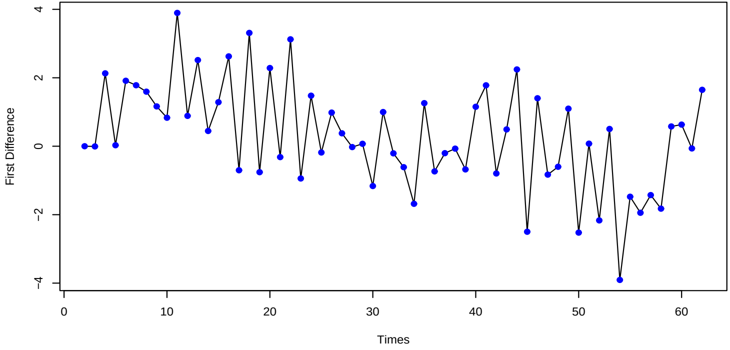
$\theta_1 = 1$，$\theta_2 = -0.6$ 的 IMA(2, 2) 序列模拟图：




```
> data(ima22.s)
> plot(ima22.s,ylab='IMA(2,2) Simulation',type='o')
```

IMA 模型：IMA(2, 2)

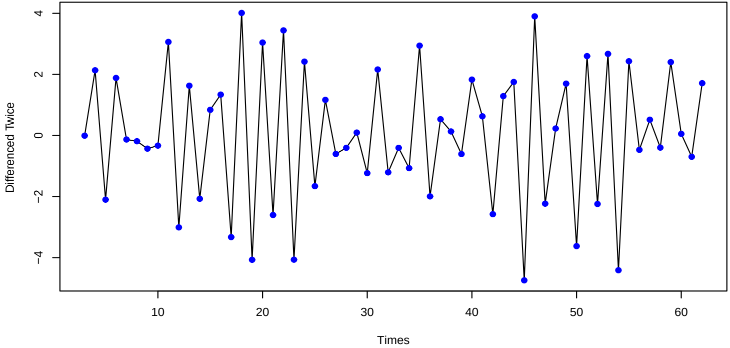
模拟的 IMA(2, 2) 序列的一次差分：




```
> plot(diff(ima22.s),ylab='First Difference',type='o')
```

IMA 模型：IMA(2, 2)

模拟的 IMA(2, 2) 序列的二次差分：




```
> plot(diff(ima22.s,difference=2),ylab='Differenced
   Twice',type='o')
```

Outline

1. ARIMA 模型
2. IMA(d, q) 模型
3. ARI(p, d) 模型
4. ARIMA 模型中的常数项

ARI 模型

ARI(p, d) 模型：

$$W_t = \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \cdots + \phi_p W_{t-p} + e_t$$

其中 $W_t = \nabla^d Y_t$

- ARI(1, 1) 模型，令 $W_t = \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$：

$$W_t = \phi W_{t-1} + e_t$$

- ARI(2, 2) 模型，令 $W_t = \nabla^2 Y_t = \nabla Y_t - \nabla Y_{t-1}$：

$$W_t = \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + e_t$$

ARI 模型：ARI(1, 1)

ARI(1, 1) 模型：

$$W_t = \phi W_{t-1} + e_t$$

- 用 Y_t 表示：

$$Y_t - Y_{t-1} = \phi(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + e_t$$

  或，

$$Y_t = (1 + \phi)Y_{t-1} - \phi Y_{t-2} + e_t$$

  其中 $|\phi| < 1$。

- 用 B 表示：

$$(1 - \phi B)(1 - B)Y_t = e_t$$

- 一般表达：

$$Y_t = \psi_0 e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \cdots$$

ARI 模型：ARI(1, 1)

关系式：

$$(1-\phi x)(1-x)(\psi_0+\psi_1 x+\psi_2 x^2+\cdots)=1$$

或，

$$[1-(1+\phi)x+\phi x^2](\psi_0+\psi_1 x+\psi_2 x^2+\cdots)=1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \psi_0=1 \\ -(1+\phi)+\psi_1=0 \\ \phi-(1+\phi)\psi_1+\psi_2=0 \\ \cdots \\ \phi\psi_{k-2}-(1+\phi)\psi_{k-1}+\psi_k=0, \quad k\geq 2 \end{cases}$$

显示解：

$$\psi_k=\frac{1-\phi^{k+1}}{1-\phi}, \quad k\geq 1$$

Outline

1. ARIMA 模型
2. IMA(d, q) 模型
3. ARI(p, d) 模型
4. ARIMA 模型中的常数项

ARIMA 模型中的常数项

令 $W_t = \nabla^d Y_t$，则ARIMA(p, d, q) 过程：

- 若 $E(W_t) = 0$，

$$\begin{aligned} W_t &= \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \cdots + \phi_p W_{t-p} \\ &\quad + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \cdots - \theta_q e_{t-q} \end{aligned}$$

- 若 $E(W_t) = \mu$，

$$\begin{aligned} W_t - \mu &= \phi_1 (W_{t-1} - \mu) + \phi_2 (W_{t-2} - \mu) + \cdots + \phi_p (W_{t-p} - \mu) \\ &\quad + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \cdots - \theta_q e_{t-q} \end{aligned}$$

或引入常数项，

$$\begin{aligned} W_t &= \theta_0 + \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \cdots + \phi_p W_{t-p} \\ &\quad + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \cdots - \theta_q e_{t-q} \end{aligned}$$

ARIMA 模型中的常数项

若 $E(W_t) = \mu$，常数项为 θ_0，

$$\begin{aligned} W_t = \theta_0 + \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \cdots + \phi_p W_{t-p} \\ + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \cdots - \theta_q e_{t-q} \end{aligned}$$

求常数均值，

$$\begin{aligned} \mu =& \ \theta_0 + (\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p)\mu \\ \Longrightarrow \mu =& \ \frac{\theta_0}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p} \\ \text{或 } \theta_0 =& \ \mu(1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p) \end{aligned}$$

ARIMA 模型中的常数项

例：含常数项的 IMA(1, 1)

$$Y_t = Y_{t-1} + \theta_0 + e_t - \theta e_{t-1}$$

令 $W_t = Y_t - Y_{t-1}$,

$$W_t = \theta_0 + e_t - \theta e_{t-1}$$

从而

$$Y_t = e_t + (1-\theta)e_{t-1} + (1-\theta)e_{t-2} + \cdots + (1-\theta)e_{-m} - \theta e_{-m-1} + (t+m+1)\theta_0$$

等价于

$$Y_t = Y_t' + \beta_0 + \beta_1 t$$

其中 Y_t' 是不含常数项的 IMA(1, 1) 序列。
注： 含常数项的 IMA(1, 1) 多了个线性确定时间趋势项。

ARIMA 模型中的常数项

若 $E(W_t) = E(\nabla^d Y_t) \neq 0$，则 ARIMA$(p, d, q)$ 过程：

$$Y_t = Y'_t + \mu_t$$

- Y'_t 是不含常数项的 ARIMA(p, d, q) 序列
- μ_t 是 d 阶确定趋势多项式

注：$d = 2$，$\theta_0 \neq 0$ 时，为二次确定时间趋势。