浙江工业大学《最优化方法》期末试卷

（ 2020 ~ 2021 第 一 学 期 ）

学院、班级__________________ 学号__________________姓名_______________

一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分

一、（10 分）求出函数

$$f\left(x_1,x_2\right)=20x_1^4-8x_1^3+4x_1^2-8x_1^2x_2+x_2^2$$

的所有稳定点，并判断它们是极大值点、极小值点还是鞍点。

二、（10 分）考虑无约束优化问题

$$\min f\left(x_1,x_2\right)=(x_1-1)^4+(x_1-x_2)^2,$$

选取初始点 $x^{(0)}=\left(0,0\right)^{\mathrm{T}}$，利用带精确步长因子的牛顿法迭代一步。

三、（12 分）利用逐次插值逼近法求解一维极小化问题

$$\min_{\alpha\ge 0}\varphi(\alpha)=\alpha^3-4\alpha\ ,$$

（1）取插值点 $\alpha_1=1$， $\alpha_2=2$，利用插值条件 $\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\varphi'(\alpha_1)$ 构造二次插值多项式，求出插值多项式的极小点 $\bar{\alpha}$；

（2）若采用二分法求解该问题，给定初始区间 $[1,2]$，则下一步迭代的区间是什么？若要求最后区间长度不超过 δ=10^{-3}，则二分法需迭代多少步？

（3）简要对比上述两个方法的优缺点。

四、（10 分）考虑下列问题：

$$\begin{aligned}
\min\ \ & x_1^2-x_2-3x_3\\
s.t.\ \ & -x_1-x_2-x_3\ge 0,\\
& x_1^2+2x_2-x_3=0,\\
& x_3\ge 0.
\end{aligned}$$

（1） 给出可行点 $\bar{x}=\left(-1,0,1\right)^{\mathrm{T}}$ 处的积极约束和线性化可行方向 $d=\left(d_1,d_2,d_3\right)^{\mathrm{T}}$ 应满足的条件（用 d_1,d_2,d_3 的表达式给出)；

（2） 给出可行点 $\bar{x}=\left(-1,0,1\right)^{\mathrm{T}}$ 处的最速下降方向，并判断它是否为线性化可行方向；

（3） 该问题是凸规划吗？为什么？

五、（10 分）求解二次规划问题

$$\begin{aligned} \min\ & \frac{3}{2}x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3 \\ s.t.\ \ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{aligned}$$

的最优解及对应的 Lagrange 乘子。

六、（10 分）利用对数障碍函数法求解

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 + 2x_2 \\ s.t.\ \ & x_2 - x_1^2 \ge 0, \\ & x_1 - 1 \ge 0. \end{aligned}$$

七、（16 分）（1）取初始点 $x^{(0)}=(0,0)^{\mathrm{T}}$，用 FR 共轭梯度法求解

$$\min_{x\in R^2}\ f(x)=x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2+2x_2+2,$$

其中 FR 公式：$\beta_{k-1}=\dfrac{g_k^{\mathrm{T}}g_k}{g_{k-1}^{\mathrm{T}}g_{k-1}}$。

（2）与最速下降法和牛顿法相比，共轭梯度法有哪些优点？试从计算量、存储量、收敛速度等方面讨论。

八、（12 分）考虑非线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min\ & 4x_1-3x_2\\
s.t.\ & 4-x_1-x_2\geq 0,\\
& -(x_1-3)^2+x_2+1\geq 0.
\end{aligned}
$$

求其 KKT 点和对应的 Lagrange 乘子。

九、（10 分）给定正数 $a_i, c_i, i=1,\ldots,n$ 及正数 b，考虑问题

$$\begin{aligned} \min\ & f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{x_i} \\ s.t.\ & \sum_{i=1}^{n}a_i x_i=b, \\ & x_i\ge 0, i=1,\ldots,n. \end{aligned}$$

利用 KKT 条件证明该问题的最优值为

$$f(x^*)=\frac{1}{b}\left[\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i c_i}\right]^2.$$