浙江工业大学《最优化方法》期末试卷

(2021 ~ 2022 第一学期)

一、 (8 分) 判别函数 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+6x_2^2+8x_3^2-4x_1x_2-10x_2x_3+6x_1x_3$ 是否为凸函数，并证明。

二、 (10 分) 求出函数

$$f(x_1,x_2)=-x_1^3+3x_1^2+2x_2^3+3x_1x_2^2+9x_1$$

的所有稳定点，并判断它们是极大值点、极小值点还是鞍点。

三、 (12 分) 考虑问题

$$\min\ f(x_1,x_2)=4x_1^2+x_2^2-x_1^2x_2,$$

(1) 求 $x^{(0)}=(3,4)^{\mathrm{T}}$ 处的最速下降方向 d_0，并用解析法求出 d_0 的精确步长 α_0；

(2) 以 $y^{(0)}=(1,1)^{\mathrm{T}}$ 为初始点，用原始牛顿法迭代一步；

(3) 以 $z^{(0)}=(2,0)^{\mathrm{T}}$ 为初始点，用原始牛顿法迭代会失败吗？说明理由。

四、 (12 分) 利用线性搜索方法求解一维极小化问题

$$\min_{\alpha\ge 0}\ \varphi(\alpha)=\alpha^3-12\alpha,$$

(1) 取插值点 $\alpha_1=0,\alpha_2=1,\alpha_3=3$，用三点二次插值法迭代一步，给出下一步的三个插值点；

(2) 取插值点 $\beta_1=1,\beta_2=3$，用插值条件 $\varphi(\beta_1),\varphi'(\beta_1),\varphi'(\beta_2)$ 构造二次插值多项式，求出插值多项式的极小点 $\bar{\beta}$；

(3) 若采用 0.618 法求解该问题，给出初始区间 $[0,3]$，要求最后区间长度不超过 $\delta=10^{-3}$，则至少需要迭代多少步 (写出表达式即可)？

(4) 简要说明上述三种方法的优缺点。

五、 (10 分) 考虑约束最优化问题

$$\begin{aligned}
\min\quad & f(x)=x_1^2+\tfrac{2}{x_1x_2}\\
\text{s.t.}\quad & c_1(x)=-x_1^2+x_2\ge 0,\\
& c_2(x)=2-x_1-x_2\ge 0,\\
& c_3(x)=x_1-0.1\ge 0.
\end{aligned}$$

(1) 给出可行点 $\bar{x}=(1,1)^{\mathrm{T}}$ 处的积极约束和线性化可行方向 $d=(d_1,d_2)^{\mathrm{T}}$ 应满足的条件 (用 d_1,d_2 的表达式给出)；

(2) $\bar{x}$ 处的负梯度方向是线性化可行方向吗？如果不是，请给出 $\bar{x}$ 处的一个线性化可行的下降方向；

(3) 该问题是凸规划吗？证明你的结论。

六、 (10 分) 利用对数障碍函数法求解

$$\begin{aligned}
\min\quad & x_1+x_2\\
\text{s.t.}\quad & 4-x_1^2-4x_2^2\ge 0.
\end{aligned}$$

七、 (16 分)

(1) 取初始点 $x^{(0)}=(1,0)^{\mathrm{T}}$，用 FR 共轭梯度法求解

$$\min_{x\in\mathbf{R}^2} f(x)=\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_2-5x_1+x_2,$$

其中，FR 公式：$\beta_{k-1}=\dfrac{g_k^{\mathrm{T}}g_k}{g_{k-1}^{\mathrm{T}}g_{k-1}}$。

(2) 与最速下降法和牛顿法相比，共轭梯度法有哪些优点？试从计算量、存储量、收敛速度等方面讨论。

八、 (12 分) 考虑非线性规划问题：

$$\begin{aligned}\min\quad & (x_1-3)^2+(x_2-1)^2\\ \text{s.t.}\quad & -x_1^2+x_2\geq 0,\\ & 2x_1+x_2-3=0.\end{aligned}$$

求其 KKT 点和对应的 Lagrange 乘子。

九、 (10 分) 已知二次函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Gx+g^{\mathrm{T}}x$，$G$ 为对称正定矩阵，给定两点 $x^{(1)},x^{(2)}$ 与方向 d，满足 $x^{(1)}-x^{(2)}$ 与 d 线性无关，对于 $i=1,2$，$y^{(i)}$ 是 $f(x)$ 在 $x^{(i)}$ 与方向 d 所长称的线性流形 $\{x|x=x^{(i)}+\alpha d,\alpha\in\mathbf{R}\}$ 中的极小点，证明：方向 $y^{(1)}-y^{(2)}$ 与方向 d 是 $G-$ 共轭的。