差 分 方 程

一、差分

二、差分方程的概念

三、一阶常系数线性差分方程

四、二阶常系数线性差分方程

一、差分

微分方程是自变量连续取值的问题, 但在很多实际问题中, 有些变量不是连续取值的. 例如, 经济变量收入、储蓄等都是时间序列, 自变量 t 取值为0, 1, 2, ⋯, 数学上把这种变量称为离散型变量. 通常用差商来描述因变量对自变量的变化速度.

定义1 设函数 $y=f(x)$, 记为 y_x, 则差

$$y_{x+1}-y_x$$

称为函数 y_x 的一阶差分, 记为Δy_x, 即

$$\Delta y_x = y_{x+1}-y_x.$$

$$\Delta(\Delta y_x) = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x = (y_{x+2} - y_{x+1}) - (y_{x+1} - y_x)$$

$$= y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$$

为二阶差分, 记为$\Delta^2 y_x$, 即

$$\Delta^2 y_x = \Delta(\Delta y_x) = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$$

同样可定义三阶差分$\Delta^3 y_x$, 四阶差分$\Delta^4 y_x$, 即

$$\Delta^3 y_x = \Delta(\Delta^2 y_x),$$

$$\Delta^4 y_x = \Delta(\Delta^3 y_x) .$$

例1 求$\Delta(x^3)$, $\Delta^2(x^3)$, $\Delta^3(x^3)$, $\Delta^4(x^3)$.

解 $\Delta(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1,$

$$\Delta^2(x^3) = \Delta(3x^2 + 3x + 1)$$

$$= 3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1 - (3x^2 + 3x + 1)$$

$$= 6x + 6,$$

$$\Delta^3(x^3) = \Delta(6x + 6) = 6(x+1) + 6 - (6x + 6)$$

$$= 6,$$

$$\Delta^4(x^3) = \Delta(6) - 6 = 0.$$

二、差分方程的概念

定义2 含有自变量、未知函数及其差分的方程, 称为差分方程.

差分方程的一般形式为

$$F(x,\ y_x,\ \Delta y_x, \cdots, \Delta^n y_x) = 0. \qquad (1)$$

差分方程中可以不含自变量 x 和未知函数 y_x, 但必须含有差分.

式(1)中, 当 $n = 1$ 时, 称为一阶差分方程;

当 $n = 2$ 时, 称为二阶差分方程.

例2 将差分方程

$$\Delta^2 y_x + 2\Delta y_x = 0$$

表示成不含差分的形式.

解 $\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$, $\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$,

代入得

$$y_{x+2} - y_x = 0.$$

由此可以看出, 差分方程能化为含有某些不同下标的整标函数的方程.

定义3 含有未知函数几个时期值的符号的方程, 称为差分方程.

其一般形式为

$$G(x,\ y_x,\ y_{x+1},\ \cdots,\ y_{x+n}) = 0. \qquad (2)$$

定义3中要求 $y_x,\ y_{x+1},\ \cdots,\ y_{x+n}$不少于两个.

例如, $y_{x+2} + y_{x+1} = 0$为差分方程, $y_x = x$不是差分方程.

差分方程式(2)中, 未知函数下标的最大差数为 n, 则称差分方程为n 阶差分方程.

定义4 如果一个函数代入差分后, 方程两边恒等, 则称此函数为该差分方程的解.

例3 验证函数 $y_x = 2x + 1$是差分方程 $y_{x+1} - y_x = 2$的解.

解 $y_{x+1} = 2(x + 1) + 1 = 2x + 3,$

$y_{x+1} - y_x = 2x + 3 - (2x + 1) = 2,$

所以$y_x = 2x + 1$是差分方程 $y_{x+1} - y_x = 2$的解.

定义5 差分方程的解中含有任意常数, 且任意常数的个数与差分方程的阶数相等, 这样的解称为差分方程的通解。

三、一阶常系数线性差分方程

一阶常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{x+1} - ay_x = f(x). \qquad (3)$$

其中 a 为不等于零的常数.

当 $f(x) = 0$ 时, 即

$$y_{x+1} - ay_x = 0 \qquad (4)$$

称为齐次差分方程; 当 $f(x) \neq 0$时, 称为非齐次差分方程.

先求齐次差分方程 $y_{x+1} - ay_x = 0$的解

设 y_0 已知, 代入方程可知

$$y_1 = ay_0,$$

$$y_2 = a^2 y_0,$$

$$\cdots\ \cdots$$

$$y_x = a^x y_0,$$

令$y_0 = C$, 则得齐次差分方程的通解为

$$y_x = Ca^x. \tag{5}$$

例4 求差分方程 $y_{x+1} + 2y_x = 0$的通解.

解 这里 $a = -2$, 由公式(5)得, 通解为

$$y_x = C(-2)^x .$$

再讨论非齐次差分方程 $y_{x+1}-ay_x=f(x)$解的结构

定理 设 y_0^*是非齐次差分方程(3)对应的齐次差分方程(4)的通解, $\tilde{y}_x$ 是(3)的一个特解, 则 $y_x=y_x^*+\tilde{y}_x$ 是方程(3)的通解.

下面用待定系数法来求两种类型函数的特解.

(1) 令$f(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$

设特解的待定式为

$$\tilde{y}_x=B_0+B_1x+\cdots+B_mx^m \quad (a\neq 1) \tag{6}$$

或

$$\tilde{y}_x=(B_0+B_1x+\cdots+B_mx^m)x \quad (a=1) \tag{7}$$

其中$B_0, B_1, \cdots, B_m$为待定系数.

例5 求差分方程 $y_{x+1}-2y_x=3x^2$ 的一个特解.

解 这里 $a=2$, 设 $\tilde{y}_x=B_0+B_1x+B_2x^2$,

代入差分方程, 得

$$B_0+B_1(x+1)+B_2(x+1)^2-2(B_0+B_1x+B_2x^2)=3x^2.$$

整理, 得

$$(-B_0+B_1+B_2)+(-B_1+2B_2)x-B_2x^2=3x^2.$$

比较系数, 得

$$\begin{cases}-B_0+B_1+B_2=0,\\-B_1+2B_2=0,\\-B_2=3.\end{cases}$$

解出 $B_0=-9,\ B_1=-6,\ B_2=-3,$

故所求特解为 $\tilde{y}_x=-9-6x-3x^2.$

例6 求差分方程 $y_{x+1}-y_x=x+1$ 的通解.

解 对应的齐次方程 $y_{x+1}-y_x=0$的通解为

$$y_x^*=C.$$

这里 $a=1$, 设 $\tilde{y}_x=x(B_0+B_1x)$, 代入差分方程, 得

$$(x+1)[B_0+B_1(x+1)]-x(B_0+B_1x)=x+1.$$

整理, 得

$$2B_1x+B_0+B_1=x+1.$$

比较系数, 得

$$\begin{cases}2B_1=1,\\ B_0+B_1=1,\end{cases}$$

解出 $$B_0=B_1=\frac{1}{2},$$

故所求通解为 $$\tilde{y}_x=C+\frac{1}{2}x(x+1).$$

(2) $f(x) = Cb^x$

设特解的待定式为

$$\tilde{y}_x = kb^x \quad (b \neq a) \tag{8}$$

或

$$\tilde{y}_x = kxb^x \quad (b = a) \tag{9}$$

其中 k 为待定系数.

例7 求差分方程 $y_{x+1}-\frac{1}{2}y_x=\left(\frac{5}{2}\right)^x$ 的通解.

解 对应的齐次方程 $y_{x+1}-\frac{1}{2}y_x=0$ 的通解为

$$y_x^*=C\left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

因为 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$, 故可设特解为

$$\tilde{y}_x=k\left(\frac{5}{2}\right)^x,$$

则

$$k\left(\frac{5}{2}\right)^{x+1}-\frac{1}{2}k\left(\frac{5}{2}\right)^x=\left(\frac{5}{2}\right)^x,$$

解出

$$k = \frac{1}{2}.$$

则所求通解为

$$y_x = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^x + C\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

四、二阶常系数线性差分方程

形如

$$y_{x+2} + ay_{x+1} + by_x = f(x). \tag{10}$$

(其中 a , $b \neq 0$, 且均为常数)的方程, 称为二阶常系数线性差分方程. 当 $f(x) = 0$ 时, 即

$$y_{x+2} + ay_{x+1} + by_x = 0 \tag{11}$$

称为齐次差分方程; 当 $f(x) \neq 0$时, 称为非齐次差分方程.

类似于二阶线性常微分方程, 二阶线性差分方程与其有相同的解的结构. 故先求齐次方程(11)的通解.

当 λ 为常数时，$y_x=\lambda^x$和它的各阶差商有倍数关系,所以可设 $y_x=\lambda^x$为方程(11)的解.

代如方程(11)得

$$\lambda^{x+2}+a\lambda^{x+1}+b\lambda^x=0,$$

$$\lambda^2+a\lambda+b=0, \tag{12}$$

方程(12)称为齐次差分方程(11)的特征方程.

由特征方程的根的情况可得齐次方程的通解:

特征方程的解	$\lambda^{x+2}+a\lambda^{x+1}+b\lambda^x=0$的通解
两个不相等的实根 λ_1,λ_2	$y_x=C_1\lambda_1^x+C_2\lambda_2^x$
两个相等实根 $\lambda_1=\lambda_2$	$y_x=(C_1+C_2x)\lambda_1^x$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta\,\mathrm{i}$	$y_x=(C_1\cos\theta x+C_2\sin\theta x)r^x$ $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\quad \tan\theta=\dfrac{\beta}{\alpha}$

例8 求差分方程 $y_{x+2} - 7y_{x+1} + 6y_x = 0$的通解.

解 特征方程为

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0.$$

方程的根为 $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 6.$

原方程的通解为

$$y_x = C_1 + C_2 \cdot 6^x.$$

例9 求差分方程 $y_{x+2}-4y_{x+1}+16y_x=0$满足条件$y_0=0$, $y_1=1$的特解.

解 特征方程为

$$\lambda^2-4\lambda+16=0.$$

方程的根为 $\lambda_{1,2}=2\pm 2\sqrt{3}i,$

$$r=4,\quad \theta=\frac{\pi}{3}.$$

原方程的通解为

$$y_x=\left(C_1\cos\frac{\pi}{3}x+C_2\sin\frac{\pi}{3}x\right)4^x.$$

代入初始条件 $y_0=0, y_1=1$ 得

$$\begin{cases} \left(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0\right) 4^0 = 0, \\ \left(C_1 \cos \dfrac{\pi}{3} + C_2 \sin \dfrac{\pi}{3}\right) 4^1 = 1, \end{cases}$$

解出

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

故所求特解为

$$y_x = 4^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} x.$$

(1) $f(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$

根据非齐次差分方程 $y_{x+2} + ay_{x+1} + by_x = f(x)$的函数 $f(x)$的形式, 用待定系数法可求出一个特解.

设特解的待定式为

$$\tilde{y}_x = B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m \quad (1 + a + b \neq 0),$$

$$\tilde{y}_x = (B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m)x \quad (1 + a + b = 0\text{且}a + 2 \neq 0)$$

$$\tilde{y}_x = (B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m)x^2 \quad (1 + a + b = a + 2 = 0).$$

其中$B_0, B_1, \cdots, B_m$为待定系数.

例10 求差分方程 $y_{x+2}+y_{x+1}-2y_x=12x$的通解.

解 对应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+\lambda-2=0.$$

方程的根为 $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1,$

齐次方程的通解为

$$y_x^*=C_1+C_2(-2)^x.$$

因为 $a=1,\ b=-2,\ 1+a+b=0,$ 但 $a+2=3\neq 0,$所以, 设非齐次方程的一个特解为

$$\tilde{y}_x=(B_0+B_1x)x,$$

代入原方程, 得

$$[B_0+B_1(x+2)](x+2)+[B_0+B_1(x+1)](x+1)-(B_0+B_1x)x=12x.$$

整理, 得

$$6B_1x + 3B_0 + 5B_1 = 12x.$$

比较系数, 得

$$\begin{cases} 6B_1 = 12, \\ 3B_0 + 5B_1 = 0, \end{cases}$$

解出

$$B_0 = -\frac{10}{3}, \quad B_1 = 2,$$

故所求通解为 $$y_x = C_1 + C_2(-2)^x - \frac{10}{3}x + 2x^2.$$

(2) $f(x) = Cq^x$

设特解的待定式为

$$\tilde{y}_x = Bq^x \quad (q\text{不是特征根});$$

$$\tilde{y}_x = Bxq^x \quad (q\text{是特征方程单根});$$

$$\tilde{y}_x = Bx^2q^x \quad (q\text{是二重特征根}).$$

其中 B 为待定系数.

例11 求差分方程 $y_{x+2}-3y_{x+1}+2y_x=2^x$的一个特解.

解 对应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2-3\lambda+2=0.$$

方程的根为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,$

因为 $q=2=\lambda_2$, 设特解为

$$\tilde{y}_x=Bx2^x,$$

代入原方程, 得

$$B(x+2)2^{x+2}-3B(x+1)2^{x+1}+2Bx\cdot 2^x=2^x,$$

$$B=\frac{1}{2},$$

所求特解为 $\tilde{y}_x=\frac{1}{2}x\cdot 2^x=x\cdot 2^x.$