

清华大学研究生公共课教材——数学系列

# 最优化理论与算法 习题解答

陈宝林 编

清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

本书对《最优化理论与算法(第2版)》中的习题全部给出了解答. 其中, 计算题基本按书中给出的方法步骤完成, 有利于对最优化方法的理解和掌握; 证明题用到一些有关的数学知识和解题技巧, 对提高数学素质及深入理解最优化理论与算法是有益的.

本书可供广大读者学习、运用和讲授运筹学时参考.

版权所有, 侵权必究. 侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

## 图书在版编目(CIP)数据

最优化理论与算法习题解答/陈宝林编. --北京: 清华大学出版社, 2012. 5

(清华大学研究生公共课教材. 数学系列)

ISBN 978-7-302-28467-3

I. ①最… II. ①陈… III. ①最优化理论—研究生—题解 ②最优化算法—研究生—题解  
IV. ①O242. 23-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 064434 号

责任编辑: 刘 颖

封面设计: 常雪影

责任校对: 王淑云

责任印制: 张雪娇

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编: 100084

社 总 机: 010-62770175 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者: 北京国马印刷厂

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×230mm 印 张: 14 字 数: 305 千字

版 次: 2012 年 5 月第 1 版 印 次: 2012 年 5 月第 1 次印刷

印 数: 1~3000

定 价: 28.00 元

产品编号: 047087-01

最优化理论与算法是用数学方法研究最优方案, 因此, 像一般数学分支一样, 有严密的逻辑性, 要想看懂不十分困难; 但要深入理解, 掌握精髓, 融会贯通, 并不容易; 要提高分析问题、解决问题的能力, 学以致用, 就更加困难. 要想真正学好这门学科, 必须重视做题. 在学习的过程中, 往往遇到一种现象, 一看就懂, 一做就错, 这正好说明做题在学习数学类课程中的重要作用. 可以说, 做题是打开最优化理论之门的钥匙, 是真正学懂、会用最优化理论与算法的一个重要途径.

本书出版的目的是满足教学和自学的需要, 促进运筹学的学习、研究和应用. 衷心希望广大读者, 在做题时严守独立思考, 发挥创造性和丰富的想象力, 切忌先看题解后做习题. 还要强调, 这里给出的解答是一家之言, 仅供参考, 不作为标准答案. 倘若本书禁锢读者思路, 就违背了作者初衷.

由于水平有限, 错误在所难免, 欢迎广大读者批评指正.

编 者

2012 年 2 月

第1章 引言题解	1
第2章 线性规划的基本性质题解	10
第3章 单纯形方法题解	18
第4章 对偶原理及灵敏度分析题解	68
第5章 运输问题题解	91
第7章 最优性条件题解	101
第8章 算法题解	112
第9章 一维搜索题解	113
第10章 使用导数的最优化方法题解	118
第11章 无约束最优化的直接方法题解	133
第12章 可行方向法题解	155
第13章 惩罚函数法题解	174
第14章 二次规划题解	183
第15章 整数规划简介题解	193
第16章 动态规划简介题解	208

## 引言题解

1. 用定义验证下列各集合是凸集:

$$(1) S = \{(x_1, x_2) | x_1 + 2x_2 \geq 1, x_1 - x_2 \geq 1\}; \quad (2) S = \{(x_1, x_2) | x_2 \geq |x_1|\};$$

$$(3) S = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 \leq 10\}.$$

证 (1) 对集合  $S$  中任意两点  $x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}$ ,  $x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix}$  及每个数  $\lambda \in [0, 1]$ , 有

$$\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} = \begin{bmatrix} \lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)} \\ \lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)} \end{bmatrix}.$$

由题设, 有

$$\begin{aligned} & [\lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)}] + 2[\lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)}] \\ &= \lambda(x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}) + (1-\lambda)(x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)}) \geq \lambda + (1-\lambda) = 1, \\ & [\lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)}] - [\lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)}] \\ &= \lambda(x_1^{(1)} - x_2^{(1)}) + (1-\lambda)(x_1^{(2)} - x_2^{(2)}) \geq \lambda + (1-\lambda) = 1, \end{aligned}$$

因此,  $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in S$ , 故  $S$  是凸集.

(2) 对集合  $S$  中任意两点  $x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}$  和  $x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix}$  及每个数  $\lambda \in [0, 1]$ , 有

$$\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} = \begin{bmatrix} \lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)} \\ \lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)} \end{bmatrix}.$$

由题设, 有

$$\lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)} \geq \lambda |x_1^{(1)}| + (1-\lambda)|x_1^{(2)}| \geq |\lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)}|,$$

因此  $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in S$ , 故  $S$  是凸集.

(3) 对集合  $S$  中任意两点  $x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}$  和  $x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix}$  及每个数  $\lambda \in [0, 1]$ , 有

$$\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} = \begin{bmatrix} \lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)} \\ \lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)} \end{bmatrix}.$$

由题设,有

$$\begin{aligned} & [\lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)}]^2 + [\lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)}]^2 \\ &= \lambda^2 x_1^{(1)2} + 2\lambda(1-\lambda)x_1^{(1)}x_1^{(2)} + (1-\lambda)^2 x_1^{(2)2} + \lambda^2 x_2^{(1)2} + 2\lambda(1-\lambda)x_2^{(1)}x_2^{(2)} \\ &+ (1-\lambda)^2 x_2^{(2)2} = \lambda^2 [x_1^{(1)2} + x_2^{(1)2}] + (1-\lambda)^2 [x_1^{(2)2} + x_2^{(2)2}] + \lambda(1-\lambda)[2x_1^{(1)}x_1^{(2)} \\ &+ 2x_2^{(1)}x_2^{(2)}] \leq 10\lambda^2 + 10(1-\lambda)^2 + \lambda(1-\lambda)[x_1^{(1)2} + x_1^{(2)2} + x_2^{(1)2} + x_2^{(2)2}] \\ &\leq 10\lambda^2 + 10(1-\lambda)^2 + 20\lambda(1-\lambda) = 10, \end{aligned}$$

因此  $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in S$ , 故  $S$  是凸集.

2. 设  $C \subset \mathbb{R}^p$  是一个凸集,  $p$  是正整数. 证明下列集合  $S$  是  $\mathbb{R}^n$  中的凸集:

$$S = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, x = A\rho, \rho \in C\},$$

其中  $A$  是给定的  $n \times p$  实矩阵.

证 对任意两点  $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$  及每个数  $\lambda \in [0, 1]$ , 根据集合  $S$  的定义, 存在  $\rho_1, \rho_2 \in C$ , 使  $x^{(1)} = A\rho_1, x^{(2)} = A\rho_2$ , 因此必有  $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} = \lambda A\rho_1 + (1-\lambda)A\rho_2 = A[\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2]$ . 由于  $C$  是凸集, 必有  $\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2 \in C$ , 因此  $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in S$ , 故  $S$  是凸集.

3. 证明下列集合  $S$  是凸集:

$$S = \{x \mid x = Ay, y \geq 0\},$$

其中  $A$  是  $n \times m$  矩阵,  $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ .

证 对任意的  $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$  及每个数  $\lambda \in [0, 1]$ , 存在  $y_1, y_2 \geq 0$ , 使  $x^{(1)} = Ay_1, x^{(2)} = Ay_2$ , 因此有  $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} = A[\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2]$ , 而  $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \geq 0$ , 故  $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in S$ , 即  $S$  是凸集.

4. 设  $S$  是  $\mathbb{R}^n$  中一个非空凸集. 证明对每一个整数  $k \geq 2$ , 若  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)} \in S$ , 则

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x^{(i)} \in S,$$

其中  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1 (\lambda_i \geq 0, i=1, 2, \dots, k)$ .

证 用数学归纳法. 当  $k=2$  时, 由凸集的定义知上式显然成立. 设  $k=m$  时结论成立, 当  $k=m+1$  时, 有

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x^{(i)} = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^{(i)} + \lambda_{m+1} x^{(m+1)} = \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i \right) \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x^{(i)} + \lambda_{m+1} x^{(m+1)},$$

其中  $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$ . 根据归纳法假设,

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x^{(i)} \in S.$$

由于  $\sum_{i=1}^m \lambda_i + \lambda_{m+1} = 1$ , 因此  $(\sum_{i=1}^m \lambda_i) \hat{x} + \lambda_{m+1} x^{(m+1)} \in S$ , 即  $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x^{(i)} \in S$ . 于是当  $k=m+1$  时结论也成立. 从而得证.

5. 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $l \times n$  矩阵,  $c \in \mathbb{R}^m$ , 证明下列两个系统恰有一个有解:

系统 1  $Ax \leq 0, Bx = 0, c^T x > 0$ , 对某些  $x \in \mathbb{R}^n$ .

系统 2  $A^T y + B^T z = c, y \geq 0$ , 对某些  $y \in \mathbb{R}^m$  和  $z \in \mathbb{R}^l$ .

证 由于  $Bx = 0$  等价于

$$\begin{cases} Bx \leq 0, \\ Bx \geq 0. \end{cases}$$

因此系统 1 有解, 即

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ -B \end{bmatrix} x \leq 0, \quad c^T x > 0 \text{ 有解.}$$

根据 Farkas 定理, 得

$$(A^T \quad B^T \quad -B^T) \begin{bmatrix} y \\ u \\ v \end{bmatrix} = c, \quad \begin{bmatrix} y \\ u \\ v \end{bmatrix} \geq 0$$

无解. 记  $u-v=z$ , 即得

$$A^T y + B^T z = c, \quad y \geq 0$$

无解. 反之亦然.

6. 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $c \in \mathbb{R}^m$ , 则下列两个系统恰有一个有解:

系统 1  $Ax \leq 0, x \geq 0, c^T x > 0$ , 对某些  $x \in \mathbb{R}^n$ .

系统 2  $A^T y \geq c, y \geq 0$ , 对某些  $y \in \mathbb{R}^m$ .

证 若系统 1 有解, 即

$$\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} x \leq 0, \quad c^T x > 0$$

有解, 则根据 Farkas 定理, 有

$$(A^T - I) \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = c, \quad \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \geq 0$$

无解, 即  $A^T y - u = c, y \geq 0, u \geq 0$  无解, 亦即

$$A^T y \geq c, \quad y \geq 0$$

无解.

反之, 若  $A^T y \geq c, y \geq 0$  有解, 即

$$A^T y - u = c, \quad y \geq 0, u \geq 0$$

有解, 亦即

$$(A^T - I) \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = c, \quad \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \geq 0$$

有解. 根据 Farkas 定理, 有

$$\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} x \leq 0, \quad c^T x > 0$$

无解, 即

$$Ax \leq 0, \quad x \geq 0, \quad c^T x > 0$$

无解.

7. 证明  $Ax \leq 0, c^T x > 0$  有解. 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

证 根据 Farkas 定理, 只需证明

$$A^T y = c, \quad y \geq 0$$

无解. 事实上,  $A^T y = c$ , 即

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

对此线性方程组的增广矩阵做初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

此线性方程组  $A^T y = c$  的系数矩阵与增广矩阵的秩不等, 因此无解, 即  $A^T y = c, y \geq 0$  无解.

根据 Farkas 定理,  $Ax \leq 0, c^T x > 0$  有解.

8. 证明下列不等式组无解:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 < 0, \\ 3x_1 - x_2 < 0, \\ 17x_1 + 11x_2 > 0. \end{cases}$$

证 将不等式组写作

$$Ax < 0, \quad \text{其中} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \\ -17 & -11 \end{bmatrix}.$$

根据 Gordan 定理, 只需证明  $A^T y = 0, y \geq 0, y \neq 0$  有解. 对系数矩阵  $A^T$  做初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -17 \\ 3 & -1 & -11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -17 \\ 0 & -10 & 40 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

$A^T y = 0$  的同解线性方程组为

$$\begin{cases} y_1 = 5y_3, \\ y_2 = 4y_3, y_3 \text{ 任意.} \end{cases}$$

显然  $A^T y = 0, y \geq 0, y \neq 0$  有解. 根据 Gordan 定理, 原来的不等式组无解.

9. 判别下列函数是否为凸函数:

- (1)  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2$ ;
- (2)  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2$ ;
- (3)  $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 + e^{x_1+x_2}$ ;
- (4)  $f(x_1, x_2) = x_1e^{-(x_1+x_2)}$ ;
- (5)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_3$ .

解 (1)  $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$  为半正定矩阵, 故  $f(x_1, x_2)$  是凸函数.

(2)  $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$  为不定矩阵, 故  $f(x_1, x_2)$  不是凸函数.

(3)  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2(x_1 - x_2) + 4x_2 + e^{x_1+x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2(x_1 - x_2) + 4x_1 + e^{x_1+x_2},$   
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2 + e^{x_1+x_2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 2 + e^{x_1+x_2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2 + e^{x_1+x_2},$

因此 Hesse 矩阵

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 + e^{x_1+x_2} & 2 + e^{x_1+x_2} \\ 2 + e^{x_1+x_2} & 2 + e^{x_1+x_2} \end{bmatrix} = (2 + e^{x_1+x_2}) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

为半正定矩阵, 因此  $f(x)$  是凸函数.

(4)  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = e^{-(x_1+x_2)} - x_1e^{-(x_1+x_2)} = (1-x_1)e^{-(x_1+x_2)}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_1e^{-(x_1+x_2)},$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = (x_1 - 2)e^{-(x_1+x_2)}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = (x_1 - 1)e^{-(x_1+x_2)}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = x_1e^{-(x_1+x_2)},$

于是 Hesse 矩阵

$$\nabla^2 f(x) = e^{-(x_1+x_2)} \begin{bmatrix} x_1 - 2 & x_1 - 1 \\ x_1 - 1 & x_1 \end{bmatrix}$$

为不定矩阵, 故  $f(x)$  不是凸函数.

(5)  $f(x)$  的 Hesse 矩阵为

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

做合同变换:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{44}{7} \end{bmatrix}$$

由此可得  $\nabla^2 f(x)$  为不定矩阵, 因此  $f(x)$  不是凸函数.

10. 设  $f(x_1, x_2) = 10 - 2(x_2 - x_1^2)^2$ ,

$$S = \{(x_1, x_2) \mid -11 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\},$$

$f(x_1, x_2)$  是否为  $S$  上的凸函数?

$$\text{解 } \frac{\partial f}{\partial x_1} = 8x_1(x_2 - x_1^2), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -4(x_2 - x_1^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 8(x_2 - 3x_1^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 8x_1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -4,$$

函数  $f(x_1, x_2)$  的 Hesse 矩阵为

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 8(x_2 - 3x_1^2) & 8x_1 \\ 8x_1 & -4 \end{bmatrix}.$$

易知  $\nabla^2 f(x)$  在集合  $S$  上不是半正定矩阵, 如在点  $(0, 1)$  处的 Hesse 矩阵是  $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ , 是不定矩阵. 因此  $f(x_1, x_2)$  不是  $S$  上的凸函数.

11. 证明  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x$  为严格凸函数的充要条件是 Hesse 矩阵  $A$  正定.

证 先证必要性. 设  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x$  是严格凸函数. 根据定理 1.4.14, 对任意非零向量  $x$  及  $\bar{x} = 0$ , 必有

$$f(x) > f(0) + \nabla f(0)^T x. \quad (1)$$

将  $f(x)$  在  $\bar{x} = 0$  处展开, 有

$$f(x) = f(0) + \nabla f(0)^T x + \frac{1}{2}x^T \nabla^2 f(0)x + o(\|x\|^2). \quad (2)$$

由(1)式和(2)式知

$$\frac{1}{2}x^T \nabla^2 f(0)x + o(\|x\|^2) > 0.$$

由于  $f(x)$  是二次凸函数,  $\nabla^2 f(0) = A$ ,  $o(\|x\|^2) = 0$ , 因此  $x^T Ax > 0$ , 即  $A$  正定.

再证充分性. 设  $A$  正定, 对任意两个不同点  $x$  和  $\bar{x}$ , 根据中值定理, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T \nabla^2 f(\hat{x})(x - \bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T A(x - \bar{x}) \end{aligned}$$

$$> f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}).$$

根据定理 1.4.14,  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x$  是严格凸函数.

12. 设  $f$  是定义在  $\mathbb{R}^n$  上的凸函数,  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的点,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  是非负数, 且满足  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$ , 证明:

$$f(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \dots + \lambda_k x^{(k)}) \leq \lambda_1 f(x^{(1)}) + \lambda_2 f(x^{(2)}) + \dots + \lambda_k f(x^{(k)}).$$

证 用数学归纳法. 当  $k=2$  时, 根据凸函数的定义, 必有

$$f(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}) \leq \lambda_1 f(x^{(1)}) + \lambda_2 f(x^{(2)}).$$

设  $k=m$  时不等式成立. 当  $k=m+1$  时, 有

$$\begin{aligned} & f(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \dots + \lambda_m x^{(m)} + \lambda_{m+1} x^{(m+1)}) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x^{(2)} + \dots + \frac{\lambda_m}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x^{(m)}\right) + \lambda_{m+1} x^{(m+1)}\right). \end{aligned}$$

记

$$\hat{x} = \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x^{(2)} + \dots + \frac{\lambda_m}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x^{(m)}.$$

由于  $f(x)$  是凸函数,  $\sum_{i=1}^m \lambda_i + \lambda_{m+1} = 1, \lambda_i \geq 0$ , 根据凸函数定义, 有

$$f\left(\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i\right)\hat{x} + \lambda_{m+1} x^{(m+1)}\right) \leq \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i\right)f(\hat{x}) + \lambda_{m+1} f(x^{(m+1)}).$$

根据归纳法假设, 有

$$f(\hat{x}) \leq \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} f(x^{(1)}) + \frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} f(x^{(2)}) + \dots + \frac{\lambda_m}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} f(x^{(m)}).$$

代入上式, 则有

$$f(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \dots + \lambda_{m+1} x^{(m+1)}) \leq \lambda_1 f(x^{(1)}) + \lambda_2 f(x^{(2)}) + \dots + \lambda_{m+1} f(x^{(m+1)}),$$

即  $k=m+1$  时, 不等式也成立. 从而得证.

13. 设  $f$  是  $\mathbb{R}^n$  上的凸函数, 证明: 如果  $f$  在某点  $x \in \mathbb{R}^n$  处具有全局极大值, 则对一切点  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x)$  为常数.

证 用反证法. 设  $f(x)$  在点  $\bar{x}$  处具有全局极大值, 且在点  $x^{(1)}$  处有  $f(x^{(1)}) < f(\bar{x})$ . 在过点  $x^{(1)}$  和  $\bar{x}$  的直线上任取一点  $x^{(2)}$ , 使得

$$\bar{x} = \lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)}, \quad \lambda \in (0, 1).$$

分两种情形讨论:

(1) 若  $f(x^{(2)}) \leq f(x^{(1)})$ , 由于  $f(x)$  是凸函数, 必有

$$f(\bar{x}) = f(\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)})$$

$$\begin{aligned} &\leq \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda)f(x^{(2)}) \\ &\leq \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda)f(x^{(1)}) = f(x^{(1)}), \text{矛盾.} \end{aligned}$$

(2) 若  $f(x^{(2)}) > f(x^{(1)})$ , 由于  $f(x)$  是凸函数, 必有

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \\ &\leq \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda)f(x^{(2)}) \\ &< \lambda f(x^{(2)}) + (1-\lambda)f(x^{(2)}) = f(x^{(2)}), \text{矛盾.} \end{aligned}$$

综上,  $f(x)$  必为常数.

14. 设  $f$  是定义在  $\mathbb{R}^n$  上的函数, 如果对每一点  $x \in \mathbb{R}^n$  及正数  $t$  均有  $f(tx) = tf(x)$ , 则称  $f$  为正齐次函数. 证明  $\mathbb{R}^n$  上的正齐次函数  $f$  为凸函数的充要条件是, 对任何  $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$f(x^{(1)} + x^{(2)}) \leq f(x^{(1)}) + f(x^{(2)}).$$

证 先证必要性. 设正齐次函数  $f(x)$  是凸函数, 则对任意两点  $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ , 必有

$$f\left(\frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(2)}\right) \leq \frac{1}{2}f(x^{(1)}) + \frac{1}{2}f(x^{(2)}).$$

由于  $f(x)$  是正齐次函数, 有

$$f\left(\frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(2)}\right) = \frac{1}{2}f(x^{(1)} + x^{(2)}).$$

代入前式得

$$\frac{1}{2}f(x^{(1)} + x^{(2)}) \leq \frac{1}{2}f(x^{(1)}) + \frac{1}{2}f(x^{(2)}),$$

即

$$f(x^{(1)} + x^{(2)}) \leq f(x^{(1)}) + f(x^{(2)}).$$

再证充分性. 设正齐次函数  $f(x)$  对任意的  $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$  满足

$$f(x^{(1)} + x^{(2)}) \leq f(x^{(1)}) + f(x^{(2)}),$$

则对任意的  $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$  及每个数  $\lambda \in (0, 1)$ , 必有

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \leq f(\lambda x^{(1)}) + f((1-\lambda)x^{(2)}) = \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda)f(x^{(2)}).$$

因此  $f(x)$  是  $\mathbb{R}^n$  上的凸函数.

15. 设  $S$  是  $\mathbb{R}^n$  中非空凸集,  $f$  是定义在  $S$  上的实函数. 若对任意的  $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$  及每一个数  $\lambda \in (0, 1)$ , 均有

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \leq \max\{f(x^{(1)}), f(x^{(2)})\},$$

则称  $f$  为拟凸函数.

试证明: 若  $f(x)$  是凸集  $S$  上的拟凸函数,  $\bar{x}$  是  $f(x)$  在  $S$  上的严格局部极小点, 则  $\bar{x}$  也是  $f(x)$  在  $S$  上的严格全局极小点.

证 用反证法. 设  $\bar{x}$  是严格局部极小点, 即存在  $\bar{x}$  的  $\delta$  邻域  $N_\delta(\bar{x})$ , 对于每个  $x \in S \cap N_\delta(\bar{x})$  且  $x \neq \bar{x}$ , 有  $f(x) > f(\bar{x})$ , 但  $\bar{x}$  不是严格全局极小点, 即存在点  $\hat{x} \in S, \hat{x} \neq \bar{x}$ , 使得

$$f(\hat{x}) \leq f(\bar{x}).$$

由于  $f(x)$  是凸集  $S$  上的拟凸函数, 对每个  $\lambda \in (0, 1)$  有

$$f(\lambda \hat{x} + (1-\lambda)\bar{x}) \leq f(\bar{x}).$$

对充分小的  $\lambda, \lambda \hat{x} + (1-\lambda)\bar{x} \in S \cap N_\delta(\bar{x})$ , 这与  $\bar{x}$  是严格局部极小点相矛盾. 因此,  $\bar{x}$  也是严格全局极小点.

16. 设  $S$  是  $\mathbb{R}^n$  中一个非空开凸集,  $f$  是定义在  $S$  上的可微实函数. 如果对任意两点  $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$ , 有  $(x^{(1)} - x^{(2)})^T \nabla f(x^{(2)}) \geq 0$  蕴含  $f(x^{(1)}) \geq f(x^{(2)})$ , 则称  $f(x)$  是伪凸函数.

试证明: 若  $f(x)$  是开凸集  $S$  上的伪凸函数, 且对某个  $\bar{x} \in S$  有  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ , 则  $\bar{x}$  是  $f(x)$  在  $S$  上的全局极小点.

证 设存在  $\bar{x} \in S$  使得  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ . 由于  $f(x)$  是开凸集  $S$  上的伪凸函数, 按伪凸函数的定义, 对任意的  $x \in S, (x - \bar{x})^T \nabla f(\bar{x}) = 0$  蕴含  $f(x) \geq f(\bar{x})$ , 因此  $\bar{x}$  是  $f(x)$  在  $S$  上的全局极小点.

## 第2章

## CHAPTER 2

## 线性规划的基本性质题解

1. 用图解法解下列线性规划问题:

$$\begin{aligned} (1) \min \quad & 5x_1 - 6x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ & 2x_1 - x_2 \leq 5, \\ & x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \min \quad & 13x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 7x_1 + 3x_2 \geq 19, \\ & 10x_1 + 2x_2 \leq 11, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \min \quad & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ & x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ & x_1 + x_2 \geq 1, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \max \quad & 3x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 - x_2 \geq 0, \\ & x_1 + x_2 \leq 5, \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 21, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \min \quad & -x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 - 7x_2 \geq 8, \\ & x_1 - x_2 \leq 5, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \max \quad & -20x_1 + 10x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \geq 10, \\ & -10x_1 + x_2 \leq 10, \\ & -5x_1 + 5x_2 \leq 25, \\ & x_1 + 4x_2 \geq 20, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \max \quad & 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -2x_1 + x_2 \geq -4, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

解 以上各题的可行域均为多边形界定的平面区域,对极小化问题沿负梯度方向移动目标函数的等值线,对极大化问题沿梯度方向移动目标函数的等值线,即可达到最优解,当最优解存在时,下面只给出答案.

(1) 最优解  $(x_1, x_2) = (0, 5)$ , 最优值  $f_{\min} = -30$ .

(2) 最优解  $(x_1, x_2) = \left(\frac{27}{4}, \frac{7}{4}\right)$ , 最优值  $f_{\min} = -5$ .

实际上,本题最优解并不惟一,连结  $(5, 0)$  与  $\left(\frac{27}{4}, \frac{7}{4}\right)$  的线段上的点均为最优解.

(3) 可行域是空集,不存在极小点.

(4) 最优解  $(x_1, x_2) = \left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right)$ , 最优值  $f_{\max} = 25$ .

(5) 最优解  $(x_1, x_2) = \left(\frac{7}{4}, \frac{3}{8}\right)$ , 最优值  $f_{\min} = -6$ .

实际上,本题最优解并不惟一,连结点  $\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{8}\right)$  和点  $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{8}\right)$  的线段上的点都是最优解.

(6) 最优解  $(x_1, x_2) = \left(\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right)$ , 最优值  $f_{\max} = \frac{120}{7}$ .

(7) 最优解  $(x_1, x_2) = \left(\frac{11}{4}, \frac{9}{4}\right)$ , 最优值  $f_{\max} = \frac{21}{2}$ .

实际上,本题最优解并不惟一,连结点  $\left(\frac{11}{4}, \frac{9}{4}\right)$  与点  $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$  的线段上的点均为最优解.

2. 下列问题都存在最优解,试通过求基本可行解来确定各问题的最优解.

$$(1) \max \quad 2x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 16, \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 12, \\ & x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

$$(2) \min \quad -2x_1 + x_2 + x_3 + 10x_4$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20, \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 10, \\ & x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

$$(3) \min \quad x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

解 (1) 约束系数矩阵和约束右端向量分别为

$$A = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

目标系数向量  $c = (c_1, c_2, c_3, c_4) = (2, 5, 0, 0)$ .

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, c_B = (c_1, c_2) = (2, 5),$$



$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{20}{3} \end{bmatrix}.$$

相应的基本可行解及目标函数值分别为  $x^{(1)} = (\frac{8}{3}, \frac{20}{3}, 0, 0)^T$ ,  $f = c_B x_B = \frac{116}{3}$ .

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, c_B = (c_1, c_3) = (2, 0),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

相应的基本可行解及目标函数值分别为  $x^{(2)} = (6, 0, 10, 0)^T$ ,  $f = c_B x_B = 12$ .

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, c_B = (c_1, c_4) = (2, 0),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -20 \end{bmatrix};$$

$$\text{令 } B = [p_2 \ p_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, c_B = (c_2, c_3) = (5, 0),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix};$$

$$\text{令 } B = [p_2 \ p_4] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, c_B = (c_2, c_4) = (5, 0),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

基本可行解及相应的目标函数值分别为  $x^{(3)} = (0, 8, 0, 4)^T$ ,  $f = c_B x_B = 40$ .

$$\text{令 } B = [p_3 \ p_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix}, c_B = (c_3, c_4) = (0, 0).$$

相应的基本可行解及目标函数值分别为  $x^{(4)} = (0, 0, 16, 12)^T$ ,  $f = c_B x_B = 0$ .

综上, 得最优解  $\bar{x} = (0, 8, 0, 4)^T$ , 最优值  $f_{\max} = 40$ .

(2) 约束系数矩阵和约束右端向量分别为

$$A = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

目标系数向量  $c = (c_1, c_2, c_3, c_4) = (-2, 1, 1, 10)$ .

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_2] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, c_B = (c_1, c_2) = (-2, 1),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

相应的基本可行解及目标函数值分别为  $x^{(1)} = (30, 50, 0, 0)^T$ ,  $f = c_B x_B = -10$ .

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, c_B = (c_1, c_3) = (-2, 1),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

相应的基本可行解及目标函数值分别为  $x^{(2)} = (5, 0, 25, 0)^T$ ,  $f = c_B x_B = 15$ .

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_4] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, c_B = (c_1, c_4) = (-2, 10),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{2} \\ \frac{25}{2} \end{bmatrix};$$

$$\text{令 } B = [p_2 \ p_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, c_B = (c_2, c_3) = (1, 1),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 30 \end{bmatrix};$$

$$\text{令 } B = [p_2 \ p_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, c_B = (c_2, c_4) = (1, 10),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

相应的基本可行解和目标函数值分别为  $x^{(3)} = (0, 10, 0, 10)^T, f = c_B x_B = 110$ .

$$\text{令 } B = [p_3 \ p_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, c_B = (c_3, c_4) = (1, 10),$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

相应的基本可行解及目标函数值分别为  $x^{(4)} = (0, 0, 15, 5)^T, f = c_B x_B = 65$ .

综上, 最优解  $\bar{x} = (30, 50, 0, 0)^T$ , 最优值  $f_{\min} = -10$ .

(3) 引进松弛变量  $x_4, x_5$ , 化为标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 6, \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5, \end{aligned}$$

记作

$$A = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (1, -1, 0, 0, 0).$$

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_1, c_2) = (1, -1),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix};$$

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_1, c_3) = (1, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix}.$$

得到相应的基本可行解和目标函数值分别为  $x^{(1)} = (\frac{4}{3}, 0, \frac{11}{3}, 0, 0)^T, f = c_B x_B = \frac{4}{3}$ .

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_1, c_4) = (1, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 11 \end{bmatrix};$$

$$\text{令 } B = [p_1 \ p_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_1, c_5) = (1, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

得到相应的基本可行解及目标函数值分别为  $x^{(2)} = (5, 0, 0, 0, 11)^T, f = c_B x_B = 5$ .

$$\text{令 } B = [p_2 \ p_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_2, c_3) = (-1, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

得到相应的基本可行解及目标函数值分别为  $x^{(3)} = (0, 4, 1, 0, 0)^T, f = c_B x_B = -4$ .

$$\text{令 } B = [p_2 \ p_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_2, c_4) = (-1, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$\text{令 } B = [p_2 \ p_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_2, c_5) = (-1, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

得到相应的基本可行解及目标函数值分别为  $x^{(4)} = (0, 5, 0, 0, 1)^T, f = c_B x_B = -5$ .

$$\text{令 } B = [p_3 \ p_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_3, c_4) = (0, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

得到相应的基本可行解及目标函数值分别为  $x^{(5)} = (0, 0, 3, 2, 0)^T, f = c_B x_B = 0$ .

$$\text{令 } B = [p_3 \ p_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_3, c_5) = (0, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix};$$

$$\text{令 } B = [p_4 \ p_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } c_B = (c_4, c_5) = (0, 0),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

得到相应的基本可行解及目标函数值分别为  $x^{(6)} = (0, 0, 0, 5, 6)^T, f = c_B x_B = 0$ .

综上, 最优解  $\bar{x} = (0, 5, 0, 0, 1)^T$ , 最优值  $f_{\min} = -5$ .

3. 设  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$  是  $Ax = b$  的一个解, 其中  $A = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  是  $m \times n$  矩阵,  $A$  的秩为  $m$ . 证明  $x^{(0)}$  是基本解的充要条件为  $x^{(0)}$  的非零分量  $x_{i_1}^{(0)}, x_{i_2}^{(0)}, \dots, x_{i_m}^{(0)}$ , 对应的列  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}$  线性无关.

证 先证必要性. 设

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

是基本解, 记  $B = [p_{B_1} \ p_{B_2} \ \dots \ p_{B_m}]$ , 则  $x^{(0)}$  非零分量对应的列  $\{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}\} \subset \{p_{B_1} \ p_{B_2} \ \dots \ p_{B_m}\}$ . 由于  $p_{B_1}, p_{B_2}, \dots, p_{B_m}$  线性无关, 因此  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}$  线性无关.

再证充分性. 设  $x^{(0)}$  的非零分量对应的列  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}$  线性无关. 由于  $A$  的秩为  $m$ , 因此  $S \leq m$ .  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}$  可扩充成一组基  $p_{i_1}, \dots, p_{i_m}, p_{i_{m+1}}, \dots, p_{i_n}$ . 记

$$B = (p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_{m+1}}, \dots, p_{i_n}),$$

于是  $x^{(0)}$  可记作:  $\begin{bmatrix} x_B^{(0)} \\ x_N^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ , 即  $x^{(0)}$  是基本解.

4. 设  $S = \{x | Ax \geq b\}$ , 其中  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $m > n$ ,  $A$  的秩为  $n$ . 证明  $x^{(0)}$  是  $S$  的极点的充要条件是  $A$  和  $b$  可作如下分解:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

其中,  $A_1$  有  $n$  个行, 且  $A_1$  的秩为  $n$ ,  $b_1$  是  $n$  维列向量, 使得  $A_1 x^{(0)} = b_1, A_2 x^{(0)} \geq b_2$ .

证 先证必要性. 设  $x^{(0)}$  是  $S$  的极点. 用反证法. 设  $A, b$  在点  $x^{(0)}$  分解如下:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad A_1 x^{(0)} = b_1, \quad A_2 x^{(0)} > b_2,$$

$A_1$  的秩  $R(A_1) < n$ .  $A_1 x = b_1$  的同解线性方程组记作

$$\hat{A}_1 x = \hat{b}_1.$$

$\hat{A}_1$  是行满秩矩阵,  $R(\hat{A}_1) = R(A_1) < n$ . 不妨假设  $\hat{A}_1$  的前  $R(\hat{A}_1)$  个列线性无关, 记作  $\hat{A}_1 = [B \ N]$ , 其中  $B$  是可逆矩阵. 相应地记

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}, \quad x_B = B^{-1} \hat{b}_1 - B^{-1} N x_N.$$

$A_1 x = b_1$  的解为

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} \hat{b}_1 - B^{-1} N x_N \\ x_N \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中,  $x_N$  是自由未知量, 是  $n - R(A_1)$  维向量.  $S$  的极点

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_B^{(0)} \\ x_N^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} \hat{b}_1 - B^{-1} N x_N^{(0)} \\ x_N^{(0)} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

由于  $A_2 x^{(0)} > b_2$ , 则存在  $x_N^{(0)}$  的  $\delta$  邻域  $N_\delta(x_N^{(0)})$ , 使得当  $x_N \in N_\delta(x_N^{(0)})$  时, 解 (1) 同时满足  $A_1 x = b_1$  和  $A_2 x \geq b_2$ . 在过  $x_N^{(0)}$  的直线上取不同点  $x_N^{(1)}, x_N^{(2)} \in N_\delta(x_N^{(0)})$ , 使  $\lambda x_N^{(1)} + (1 - \lambda) x_N^{(2)} = x_N^{(0)}, \lambda \in (0, 1)$ , 代入 (2) 式, 得到

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= \begin{bmatrix} B^{-1} \hat{b}_1 - B^{-1} N(\lambda x_N^{(1)} + (1 - \lambda) x_N^{(2)}) \\ \lambda x_N^{(1)} + (1 - \lambda) x_N^{(2)} \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} B^{-1} \hat{b}_1 - B^{-1} N x_N^{(1)} \\ x_N^{(1)} \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} B^{-1} \hat{b}_1 - B^{-1} N x_N^{(2)} \\ x_N^{(2)} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

这样, 可将  $x^{(0)}$  表示成集合  $S$  中两个不同点的凸组合, 矛盾.

再证充分性. 设在点  $x^{(0)}, A, b$  可作如下分解 (其中  $A_1$  是  $n$  阶方阵):

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad A_1 x^{(0)} = b_1, \quad A_2 x^{(0)} \geq b_2, \quad R(A_1) = n.$$

又设存在  $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$ , 使得

$$x^{(0)} = \lambda x^{(1)} + (1 - \lambda) x^{(2)}, \quad \lambda \in (0, 1). \quad (3)$$

用可逆矩阵  $A_1$  乘 (3) 式两端, 得

$$A_1 x^{(0)} = \lambda A_1 x^{(1)} + (1 - \lambda) A_1 x^{(2)}. \quad (4)$$

由于  $A_1 x^{(0)} = b_1, A_1 x^{(1)} \geq b_1, A_1 x^{(2)} \geq b_1$  及  $\lambda, 1 - \lambda > 0$ , 代入 (4) 式, 则得

$$b_1 = A_1 x^{(0)} = \lambda A_1 x^{(1)} + (1 - \lambda) A_1 x^{(2)} \geq \lambda b_1 + (1 - \lambda) b_1 = b_1,$$

因此有

$$\lambda A_1 x^{(1)} + (1 - \lambda) A_1 x^{(2)} = \lambda b_1 + (1 - \lambda) b_1,$$

移项整理, 即

$$\lambda (A_1 x^{(1)} - b_1) + (1 - \lambda) (A_1 x^{(2)} - b_1) = 0.$$

由于  $\lambda, 1 - \lambda > 0, A_1 x^{(1)} - b_1 \geq 0, A_1 x^{(2)} - b_1 \geq 0$ , 因此  $A_1 x^{(1)} - b_1 = 0, A_1 x^{(2)} - b_1 = 0$ , 从而得到

$$A_1 x^{(0)} = A_1 x^{(1)} = A_1 x^{(2)} = b_1.$$

左乘  $A_1^{-1}$ , 则

$$x^{(0)} = x^{(1)} = x^{(2)}.$$

因此  $x^{(0)}$  是极点.

## 第3章

## CHAPTER 3

## 单纯形方法题解

1. 用单纯形方法解下列线性规划问题:

- (1)  $\min -9x_1 - 16x_2$   
s. t.  $x_1 + 4x_2 + x_3 = 80,$   
 $2x_1 + 3x_2 + x_4 = 90,$   
 $x_j \geq 0, j=1,2,3,4.$
- (2)  $\max x_1 + 3x_2$   
s. t.  $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6,$   
 $-x_1 + x_2 + x_4 = 1,$   
 $x_j \geq 0, j=1,2,3,4.$
- (3)  $\max -x_1 + 3x_2 + x_3$   
s. t.  $3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7,$   
 $-2x_1 + 4x_2 \leq 12,$   
 $-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10,$   
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0.$
- (4)  $\min 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4$   
s. t.  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4,$   
 $4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 6,$   
 $-x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 12,$   
 $x_j \geq 0, j=1,2,3,4.$
- (5)  $\min -3x_1 - x_2$   
s. t.  $3x_1 + 3x_2 + x_3 = 30,$   
 $4x_1 - 4x_2 + x_4 = 16,$   
 $2x_1 - x_2 \leq 12,$   
 $x_j \geq 0, j=1,2,3,4.$

解 (1) 用单纯形方法求解过程如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_3$	1	④	1	0	80
$x_4$	2	3	0	1	90
	9	16	0	0	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_2$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	20
$x_4$	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	30
	5	0	-4	0	-320

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_2$	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	14
$x_1$	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	24
	0	0	-1	-4	-440

最优解  $\bar{x} = (24, 14, 0, 0)$ , 最优值  $f_{\min} = -440$ .

(2) 用单纯形方法求解过程如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_3$	2	3	1	0	6
$x_4$	-1	①	0	1	1
	-1	-3	0	0	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_3$	⑤	0	1	-3	3
$x_2$	-1	1	0	1	1
	-4	0	0	3	3

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
$x_2$	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$
	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{27}{5}$

最优解  $\bar{x} = (\frac{3}{5}, \frac{8}{5}, 0, 0)$ , 最优值  $f_{\max} = \frac{27}{5}$ .

(3) 引入松弛变量  $x_4, x_5, x_6$ , 化成标准形式:

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ & -2x_1 + 4x_2 + x_5 = 12, \\ & -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_6 = 10, \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned}$$

用单纯形方法求解过程如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	3	-1	2	1	0	0	7
$x_5$	-2	④	0	0	1	0	12
$x_6$	-4	3	8	0	0	1	10
	1	-3	-1	0	0	0	0
$x_4$	$\frac{5}{2}$	0	2	1	$\frac{1}{4}$	0	10
$x_2$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	3
$x_6$	$-\frac{5}{2}$	0	⑧	0	$-\frac{3}{4}$	1	1
	$-\frac{1}{2}$	0	-1	0	$\frac{3}{4}$	0	9
$x_4$	$\frac{25}{8}$	0	0	1	$\frac{7}{16}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{39}{4}$
$x_2$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	3
$x_3$	$-\frac{5}{16}$	0	1	0	$-\frac{3}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	$-\frac{13}{16}$	0	0	0	$\frac{21}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{73}{8}$
$x_1$	1	0	0	$\frac{8}{25}$	$\frac{7}{50}$	$-\frac{2}{25}$	$\frac{78}{25}$
$x_2$	0	1	0	$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{114}{25}$
$x_3$	0	0	1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{10}$
	0	0	0	$\frac{13}{50}$	$\frac{77}{100}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{583}{50}$

最优解  $\bar{x} = (\frac{78}{25}, \frac{114}{25}, \frac{11}{10}, 0, 0, 0)$ , 最优值  $f_{\max} = \frac{583}{50}$ .

(4) 引入松弛变量  $x_5, x_6, x_7$ , 化成标准形式:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\
 & 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 6, \\
 & -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_7 = 12, \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 7.
 \end{aligned}$$

用单纯形方法求解过程如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_5$	1	①	1	0	1	0	0	4
$x_6$	4	-1	1	2	0	1	0	6
$x_7$	-1	1	2	3	0	0	1	12
	-3	5	2	1	0	0	0	0
$x_2$	1	1	1	0	1	0	0	4
$x_6$	5	0	2	2	1	1	0	10
$x_7$	-2	0	1	③	-1	0	1	8
	-8	0	-3	1	-5	0	0	-20
$x_2$	1	1	1	0	1	0	0	4
$x_6$	$\frac{19}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$
$x_4$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
	$-\frac{22}{3}$	0	$-\frac{10}{3}$	0	$-\frac{14}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{68}{3}$

最优解  $\bar{x} = (0, 4, 0, \frac{8}{3}, 0, \frac{14}{3}, 0)$ , 最优值  $f_{\min} = -\frac{68}{3}$ .

(5) 引入松弛变量  $x_5$ , 化成标准形式:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & -3x_1 - x_2 \\
 \text{s. t.} \quad & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 30, \\
 & 4x_1 - 4x_2 + x_4 = 16, \\
 & 2x_1 - x_2 + x_5 = 12, \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5.
 \end{aligned}$$

用单纯形方法求解过程如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	3	3	1	0	0	30
$x_4$	④	-4	0	1	0	16
$x_5$	2	-1	0	0	1	12
	3	1	0	0	0	0
$x_3$	0	⑥	1	$-\frac{3}{4}$	0	18
$x_1$	1	-1	0	$\frac{1}{4}$	0	4
$x_5$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	4
	0	4	0	$-\frac{3}{4}$	0	-12

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_2$	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{24}$	0	3
$x_1$	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{24}$	0	7
$x_5$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	1	1
	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	-24

最优解  $\bar{x} = (7, 3, 0, 0, 1)$ , 最优值  $f_{\min} = -24$ .

2. 求解下列线性规划问题:

- (1)  $\min 4x_1 + 6x_2 + 18x_3$   
s. t.  $x_1 + 3x_3 \geq 3$ ,  
 $x_2 + 2x_3 \geq 5$ ,  
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ .
- (2)  $\max 2x_1 + x_2$   
s. t.  $x_1 + x_2 \leq 5$ ,  
 $x_1 - x_2 \geq 0$ ,  
 $6x_1 + 2x_2 \leq 21$ ,  
 $x_1, x_2 \geq 0$ .
- (3)  $\max 3x_1 - 5x_2$   
s. t.  $-x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 4$ ,  
 $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5$ ,  
 $-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1$ ,  
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ .
- (4)  $\min x_1 - 3x_2 + x_3$   
s. t.  $2x_1 - x_2 + x_3 = 8$ ,  
 $2x_1 + x_2 \geq 2$ ,  
 $x_1 + 2x_2 \leq 10$ ,  
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ .
- (5)  $\max -3x_1 + 2x_2 - x_3$   
s. t.  $2x_1 + x_2 - x_3 \leq 5$ ,  
 $4x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$ ,  
 $-x_1 + x_2 + x_3 = 2$ ,  
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ .
- (6)  $\min 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$   
s. t.  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$ ,  
 $-x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 5$ ,  
 $2x_1 - x_2 \leq 7$ ,  
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ .
- (7)  $\min 3x_1 - 2x_2 + x_3$   
s. t.  $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$ ,  
 $2x_1 + 3x_2 \geq 8$ ,  
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ .
- (8)  $\min 2x_1 - 3x_2$   
s. t.  $2x_1 - x_2 - x_3 \geq 3$ ,  
 $x_1 - x_2 + x_3 \geq 2$ ,  
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ .
- (9)  $\min 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4$   
s. t.  $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$ ,  
 $2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6$ ,  
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ ,  
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$ .
- (10)  $\max 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4$   
s. t.  $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$ ,  
 $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6$ ,  
 $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9$ ,  
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$ .

解 (1) 引入松弛变量  $x_4, x_5, x_6$ , 化为标准形式:

$$\begin{aligned} \min & 4x_1 + 6x_2 + 18x_3 \\ \text{s. t.} & x_1 + 3x_3 - x_4 = 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_2 + 2x_3 - x_5 = 5, \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

用单纯形方法求解过程如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_1$	1	0	③	-1	0	3
$x_2$	0	1	2	0	-1	5
	0	0	6	-4	-6	42
$x_3$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
$x_2$	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	-1	3
	-2	0	0	-2	-6	36

最优解  $\bar{x} = (0, 3, 1, 0, 0)$ , 最优值  $f_{\min} = 36$ .

(2) 引入松弛变量  $x_3, x_4, x_5$ , 化成标准形式:

$$\begin{aligned} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ & x_1 - x_2 - x_4 = 0, \\ & 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21, \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

用两阶段法求解. 先求一个基本可行解, 为此引入人工变量  $y$ , 解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min & y \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ & x_1 - x_2 - x_4 + y = 0, \\ & 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21, \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5, y \geq 0. \end{aligned}$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y$	
$x_3$	1	1	1	0	0	0	5
$y$	①	-1	0	-1	0	1	0
$x_5$	6	2	0	0	1	0	21
	1	-1	0	-1	0	0	0
$x_3$	0	2	1	1	0	-1	5
$x_1$	1	-1	0	-1	0	1	0
$x_5$	0	8	0	6	1	-6	21
	0	0	0	0	0	-1	0

得到原线性规划的一个基本可行解. 由此出发求最优解, 过程如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	0	②	1	1	0	5
$x_1$	1	-1	0	-1	0	0
$x_5$	0	8	0	6	1	21
	0	-3	0	-2	0	0
$x_2$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
$x_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
$x_5$	0	0	-4	②	1	1
	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{15}{2}$
$x_2$	0	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
$x_1$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{4}$
$x_4$	0	0	-2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{31}{4}$

最优解  $\bar{x} = (\frac{11}{4}, \frac{9}{4}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ , 最优值  $f_{\max} = \frac{31}{4}$ .

(3) 引入松弛变量  $x_4, x_5, x_6$ , 化成标准形式:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_1 - 5x_2 \\
 \text{s. t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 4, \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 5, \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_6 = 1, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6.
 \end{aligned}$$

用两阶段法求解, 为此引入人工变量  $y$ , 解下列线性规划:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & y \\
 \text{s. t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 4, \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 5, \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_6 + y = 1, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad y \geq 0.
 \end{aligned}$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$y$	
$x_4$	-1	2	4	1	0	0	0	4
$x_5$	1	1	2	0	1	0	0	5
$y$	-1	②	1	0	0	-1	1	1
	-1	2	1	0	0	-1	0	1
$x_4$	0	0	3	1	0	1	-1	3
$x_5$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
$x_2$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0	0	0	0	0	0	-1	0

得到原线性规划的一个基本可行解  $\bar{x} = (0, \frac{1}{2}, 0, 3, \frac{9}{2}, 0)$ .

由此出发求最优解, 过程如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	0	0	③	1	0	1	3
$x_5$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
$x_2$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$
$x_3$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
$x_5$	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	3
$x_2$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{2}{3}$	0
	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{6}$	0	$\frac{10}{3}$	0
$x_3$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
$x_1$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2
$x_2$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	1

最优解  $\bar{x} = (2, 1, 1, 0, 0)$ , 最优值  $f_{\max} = 1$ .

(4) 引入松弛变量  $x_4, x_5$ , 化为标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ & x_1 + 2x_2 + x_5 = 10, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

用两阶段法求解.

引入人工变量  $y$ , 解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & y \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 + y = 2, \\ & x_1 + 2x_2 + x_5 = 10, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

求解过程如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y$	
$x_3$	2	-1	1	0	0	0	8
$y$	②	1	0	-1	0	1	2
$x_5$	1	2	0	0	1	0	10
	2	1	0	-1	0	0	2
$x_3$	0	-2	1	1	0	-1	6
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$x_5$	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	9
	0	0	0	0	0	-1	0

得原线性规划的一个基本可行解  $\hat{x} = (1, 0, 6, 0, 9)$ .

从求得的基本可行解出发, 求最优解. 求解过程如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	0	-2	1	1	0	6
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1
$x_5$	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	9
	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	7

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	4	0	1	-1	0	10
$x_2$	2	1	0	-1	0	2
$x_5$	-3	0	0	②	1	6
	-3	0	0	2	0	4
$x_3$	$\frac{5}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	13
$x_2$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	5
$x_4$	$-\frac{3}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	3
	0	0	0	0	-1	-2

最优解  $\bar{x} = (0, 5, 13, 3, 0)$ , 最优值  $f_{\min} = -2$ .

(5) 引入松弛变量  $x_4, x_5$ , 化成标准形式:

$$\begin{aligned} \max \quad & -3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ & 4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 3, \\ & -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

先引入人工变量  $y_1, y_2$ , 解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + y_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ & 4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 + y_1 = 3, \\ & -x_1 + x_2 + x_3 + y_2 = 2, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5, \quad y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

求解过程如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	
$x_4$	2	1	-1	1	0	0	0	5
$y_1$	4	③	1	0	-1	1	0	3
$y_2$	-1	1	1	0	0	0	1	2
	3	4	2	0	-1	0	0	5
$x_4$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	4
$x_2$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1
$y_2$	$-\frac{7}{3}$	0	②	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	1
	$-\frac{7}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	1



	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	
$x_1$	-4	0	0	1	1	-1	2	6
$x_2$	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_3$	$-\frac{7}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
	0	0	0	0	0	0	-1	0

得到一个基本可行解  $\hat{x} = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 6, 0)$ .

从求得的基本可行解出发求最优解,过程如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_1$	-4	0	0	1	1	6
$x_2$	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_3$	$-\frac{7}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
	$\frac{23}{2}$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$x_4$	3	0	-2	1	0	3
$x_2$	-1	1	1	0	0	2
$x_5$	-7	0	2	0	1	3
	1	0	3	0	0	4

最优解  $\bar{x} = (0, 2, 0, 3, 3)$ , 最优值  $f_{\max} = 4$ .

(6) 引入松弛变量  $x_4, x_5, x_6$ , 化成标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 5, \\ & 2x_1 - x_2 + x_6 = 7, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned}$$

用大 M 法求解.

引入人工变量  $y$ , 取大正数  $M$ , 解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + My \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 + y = 5, \\ & 2x_1 - x_2 + x_6 = 7, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

求解过程如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$y$	
$x_1$	1	1	1	1	0	0	0	9
$y$	-1	②	-1	0	-1	0	1	5
$x_6$	2	-1	0	0	0	1	0	7
	$-M-2$	$2M+3$	$-M-4$	0	$-M$	0	0	$5M$
$x_1$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{13}{2}$
$x_2$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
$x_6$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{19}{2}$
	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	$-M-\frac{3}{2}$	$-\frac{15}{2}$
$x_5$	3	0	3	2	1	0	-1	13
$x_2$	1	1	1	1	0	0	0	9
$x_6$	3	0	1	1	0	1	0	16
	-5	0	-7	-3	0	0	$-M$	-27

最优解  $\bar{x} = (0, 9, 0, 0, 13, 16)$ , 最优值  $f_{\min} = -27$ .

(7) 引入松弛变量  $x_4$ , 化成标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 8, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

用大 M 法求解.

引进人工变量  $y$ , 取大正数  $M$ , 解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 - 2x_2 + x_3 + My \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_4 + y = 8, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

求解过程如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y$	
$x_3$	2	-3	1	0	0	1
$y$	2	③	0	-1	1	8
	$2M-1$	$3M-1$	0	$-M$	0	$8M+1$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y$	
$x_3$	4	0	1	-1	1	9
$x_2$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-M+\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$

最优解  $\bar{x} = (0, \frac{8}{3}, 9, 0)$ , 最优值  $f_{\min} = \frac{11}{3}$ .

(8) 引入松弛变量  $x_4, x_5$ , 化成标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ & x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 2, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

用大  $M$  法求解. 引入人工变量  $y_1, y_2$ , 取大正数  $M$ , 解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - 3x_2 + M(y_1 + y_2) \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + y_1 = 3, \\ & x_1 - x_2 + x_3 - x_5 + y_2 = 2, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5, y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	
$y_1$	②	-1	-1	-1	0	1	0	3
$y_2$	1	-1	1	0	-1	0	1	2
	$3M-2$	$-2M+3$	0	$-M$	$-M$	0	0	$5M$
$x_1$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
$y_2$	0	$-\frac{1}{2}$	③ $\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
	0	$-\frac{1}{2}M+2$	$\frac{3}{2}M-1$	$\frac{1}{2}M-1$	$-M$	$-\frac{3}{2}M+1$	0	$\frac{1}{2}M+3$
$x_1$	1	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
$x_3$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}-M$	$\frac{2}{3}-M$	$\frac{10}{3}$

现行基本可行解下, 对应  $x_2$  的判别数大于 0, 约束系数第 2 列无正元, 人工变量均为非基变量, 取值为 0, 因此不存在有限最优解.

(9) 用修正单纯形法求解. 初始基本可行解未知, 用两阶段法.

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + y_2 + y_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + y_1 = 2, \\ & 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + y_2 = 6, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_3 = 7, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

记约束系数矩阵、约束右端和费用系数向量如下:

$$\begin{aligned} A = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6 \ p_7] &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7) = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

取初始可行基

$$B = [p_5 \ p_6 \ p_7] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

约束右端向量

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

基变量费用系数向量  $c_B = (c_5, c_6, c_7) = (1, 1, 1)$ , 单纯形乘子  $w = c_B B^{-1} = (1, 1, 1)$ , 目标函数值  $f = c_B \bar{b} = 15$ . 构造初表:

	1	1	1	15
$y_1$	1	0	0	2
$y_2$	0	1	0	6
$y_3$	0	0	1	7

第 1 次迭代:

计算现行基下对应各变量的判别数:

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= wp_1 - c_1 = 4, \quad z_2 - c_2 = wp_2 - c_2 = 1, \\ z_3 - c_3 &= wp_3 - c_3 = 0, \quad z_4 - c_4 = wp_4 - c_4 = 1, \\ z_5 - c_5 &= z_6 - c_6 = z_7 - c_7 = 0, \end{aligned}$$

$$z_1 - c_1 = \max_j \{z_j - c_j\} = 4, \text{ 因此 } x_1 \text{ 进基.}$$

主列

$$B^{-1}p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

				$x_1$
	1	1	1	15
$y_1$	1	0	0	2
$y_2$	0	1	0	6
$y_3$	0	0	1	7
	-3	1	1	7
$x_1$	1	0	0	2
$y_2$	-2	1	0	2
$y_3$	-1	0	1	5

第2次迭代:

由上表知,单纯形乘子  $w = (-3, 1, 1)$ , 计算现行基下对应各变量的判别数:

$$z_2 - c_2 = wp_2 - c_2 = 5, \quad z_3 - c_3 = wp_3 - c_3 = -8,$$

$$z_4 - c_4 = wp_4 - c_4 = 5, \quad z_5 - c_5 = wp_5 - c_5 = -4,$$

$$z_1 - c_1 = z_6 - c_6 = z_7 - c_7 = 0, \quad z_2 - c_2 = \max_j \{z_j - c_j\} = 5.$$

计算主列

$$B^{-1}p_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

				$x_2$
	-3	1	1	7
$x_1$	1	0	0	2
$y_2$	-2	1	0	2
$y_3$	-1	0	1	5

	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$
$x_1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$
$x_2$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$y_3$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$

第3次迭代:

由前表知,单纯形乘子  $w = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$ , 计算现行基下对应各变量的判别数:

$$z_3 - c_3 = wp_3 - c_3 = \frac{11}{3}, \quad z_4 - c_4 = wp_4 - c_4 = 0,$$

$$z_5 - c_5 = wp_5 - c_5 = -\frac{2}{3}, \quad z_6 - c_6 = wp_6 - c_6 = -\frac{5}{3},$$

$$z_1 - c_1 = z_2 - c_2 = z_7 - c_7 = 0, \quad z_3 - c_3 = \max_j \{z_j - c_j\} = \frac{11}{3}.$$

计算主列:

$$B^{-1}p_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$	$x_3$
$x_1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$x_2$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{3}$
$y_3$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{3}$
	0	0	0	0	
$x_1$	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	3	
$x_2$	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{7}{11}$	3	
$x_3$	$\frac{1}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	1	

显然,  $\forall j$ , 有  $z_j - c_j \leq 0$ , 一阶段已达最优. 下面进行第2阶段. 从求得的基本可行解

$$\hat{x} = (3, 3, 1, 0)^T$$

出发, 求线性规划的最优解. 记  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (2, 1, -1, -1)$ .

第1次迭代:

基变量为  $x_1, x_2, x_3$ . 先计算单纯形乘子:

$$w = c_B B^{-1} = (2, 1, -1) \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{7}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix} = \left( \frac{2}{11}, \frac{7}{11}, \frac{6}{11} \right).$$

目标函数值  $f = c_B x_B = 8$ . 现行基下对应各变量的判别数:  $z_1 - c_1 = z_2 - c_2 = z_3 - c_3 = 0$ ,

$z_4 - c_4 = wp_4 - c_4 = 2$ . 计算主列:

$$B^{-1} p_4 = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{7}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

				$x_4$
	$\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{6}{11}$	8
$x_1$	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	3
$x_2$	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{7}{11}$	3
$x_3$	$\frac{1}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	1

				$x_4$
				2
				0
				1
				0

	$\frac{12}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{8}{11}$	2
$x_1$	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	3
$x_4$	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{7}{11}$	3
$x_3$	$\frac{1}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	1

第2次迭代:

计算对应各变量的判别数. 因为只有1个非基变量  $x_2$ , 只需计算对应  $x_2$  的判别数.

$$z_2 - c_2 = wp_2 - c_2 = -2 < 0,$$

已经达到最优. 最优解  $\bar{x} = (3, 0, 1, 3)$ , 最优值  $f_{\min} = 2$ .

(10) 用修正单纯形法求解.

初始基本可行解未知, 下面用大M法. 引入人工变量  $y_1, y_2, y_3$ , 取一个大正数M, 解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - M(y_1 + y_2 + y_3) \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + y_1 = 0, \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + y_2 = 6, \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + y_3 = 9, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

记约束系数矩阵、右端向量及目标系数向量如下:

$$A = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6 \ p_7] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b = [0, 6, 9]^T, \quad c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7) = (3, -1, -3, 1, -M, -M, -M).$$

取初始基:

$$B = [p_5 \ p_6 \ p_7] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

单纯形乘子  $w = c_B B^{-1} = [-M, -M, -M]$ , 目标函数值  $f = c_B B^{-1} b = -15M$ . 构造初表:

	$-M$	$-M$	$-M$	$-15M$
$y_1$	1	0	0	0
$y_2$	0	1	0	6
$y_3$	0	0	1	9

第1次迭代:

计算现行基下对应各变量的判别数:

$$z_1 - c_1 = wp_1 - c_1 = -4M - 3, \quad z_2 - c_2 = wp_2 - c_2 = M + 1,$$

$$z_3 - c_3 = wp_3 - c_3 = -4M + 3, \quad z_4 - c_4 = wp_4 - c_4 = -3M - 1,$$

$$z_5 - c_5 = z_6 - c_6 = z_7 - c_7 = 0, \quad z_1 - c_1 = \min\{z_j - c_j\} = -4M - 3.$$

计算主列:

$$B^{-1} p_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

	$-M$	$-M$	$-M$	$-15M$	$x_1$
$y_1$	1	0	0	0	①
$y_2$	0	1	0	6	1
$y_3$	0	0	1	9	2

	$3M+3$	$-M$	$-M$	$-15M$	
$x_1$	1	0	0	0	
$y_2$	-1	1	0	6	
$y_3$	-2	0	1	9	

第2次迭代:

计算现行基下对应各变量的判别数:

$$\begin{aligned} z_2 - c_2 &= wp_2 - c_2 = 9M + 7, & z_3 - c_3 &= wp_3 - c_3 = -8M, \\ z_4 - c_4 &= wp_4 - c_4 = M + 2, & z_5 - c_5 &= wp_5 - c_5 = 4M + 3, \\ z_1 - c_1 &= z_6 - c_6 = z_7 - c_7 = 0, & z_3 - c_3 &= \min\{z_j - c_j\} = -8M. \end{aligned}$$

计算主列:

$$B^{-1}p_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

	$3M+3$	$-M$	$-M$	$-15M$	$x_3$
$x_1$	1	0	0	0	-1
$y_2$	-1	1	0	6	3
$y_3$	-2	0	1	9	⑤

	$-\frac{1}{5}M+3$	$-M$	$\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{5}M$	
$x_1$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	
$y_2$	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	
$x_3$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	

第3次迭代:

计算现行基下对应各变量的判别数:

$$\begin{aligned} z_2 - c_2 &= wp_2 - c_2 = -\frac{3}{5}M + 7, & z_4 - c_4 &= wp_4 - c_4 = \frac{13}{5}M + 2, \\ z_5 - c_5 &= wp_5 - c_5 = \frac{4}{5}M + 3, & z_7 - c_7 &= wp_7 - c_7 = \frac{8}{5}M, \\ z_1 - c_1 &= z_3 - c_3 = z_6 - c_6 = 0. \end{aligned}$$

计算主列:

$$B^{-1}p_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

	$-\frac{1}{5}M+3$	$-M$	$\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{5}M$	$x_2$
$x_1$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{4}{5}$
$y_2$	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	③
$x_3$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{6}{5}$

	$\frac{2}{3}$	$-\frac{35}{3}$	7	-7	
$x_1$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1	1	
$x_2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	-1	1	
$x_3$	0	2	-1	3	

第4次迭代:

$$\begin{aligned} z_4 - c_4 &= wp_4 - c_4 = \frac{97}{3}, & z_5 - c_5 &= wp_5 - c_5 = M + \frac{2}{3}, \\ z_6 - c_6 &= wp_6 - c_6 = M - \frac{35}{3}, & z_7 - c_7 &= wp_7 - c_7 = M + 7. \end{aligned}$$

判别数均非负,已达到最优解. 最优解和最优值分别是  $\bar{x} = (1, 1, 3, 0)$  和  $f_{\max} = -7$ .

3. 证明用单纯形方法求解线性规划问题时,在主元消去前后对应同一变量的判别数有下列关系:

$$(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k),$$

其中  $(z_j - c_j)'$  是主元消去后的判别数, 其余是主元消去前的数据,  $y_{rk}$  为主元.

证 约束矩阵记作  $A = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n]$ , 主元消去前后的基分别记作  $B$  和  $\hat{B}$ , 基变量的费用系数向量分别记作  $c_B$  和  $\hat{c}_B$ , 同时记  $B^{-1}p_j = y_j$  及  $\hat{B}^{-1}p_j = \hat{y}_j$ . 主元消去前后, 单纯形方法中第  $i$  行  $j$  列元素分别记为  $y_{ij}$  和  $\hat{y}_{ij}$ , 主元记作  $y_{rk}$ , 则有下列关系:

$$\begin{cases} \hat{y}_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}}y_{rj}, & i \neq r, \\ \hat{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}. \end{cases}$$

因此, 主元消去前后的判别数  $z_j - c_j$  与  $(z_j - c_j)'$  必有下列关系:

$$\begin{aligned} (z_j - c_j)' &= \hat{c}_B \hat{B}^{-1} p_j - c_j \\ &= \hat{c}_B \hat{y}_j - c_j \\ &= \sum_{i \neq r} c_{B_i} \left( y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj} \right) + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} - c_j \\ &= (z_j - c_j) - c_{B_r} y_{rj} - \sum_{i \neq r} c_{B_i} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj} + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \\ &= (z_j - c_j) - c_{B_r} y_{rj} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \sum_{i \neq r} c_{B_i} y_{ik} + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \\ &= (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \sum_{i=1}^m c_{B_i} y_{ik} + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \\ &= (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \left( \sum_{i=1}^m c_{B_i} y_{ik} - c_k \right) \\ &= (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k). \end{aligned}$$

4. 假设一个线性规划问题存在有限的最小值  $f_0$ . 现在用单纯形方法求它的最优解(最小值点), 设在第  $k$  次迭代得到一个退化的基本可行解, 且只有一个基变量为零 ( $x_j = 0$ ), 此时目标函数值  $f_k > f_0$ , 试证这个退化的基本可行解在以后各次迭代中不会重新出现.

证 设现行基本可行解中, 基变量  $x_{B_r} = x_j = 0$ , 其他基变量均取正值. 目标函数值为  $f_k$ . 若下次迭代中,  $x_p$  进基,  $x_j$  离基, 则迭代后对应非基变量  $x_j$  的判别数为负数, 后续迭代中  $x_j$  不进基. 若下次迭代中,  $x_p$  进基,  $x_j$  仍为基变量, 则  $x_p$  进基后的取值  $x_p = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0, i \neq r \right\} > 0$ , 新的基本可行解处, 目标函数值  $f = f_k - (z_p - c_p)x_p < f_k$ , 由于单纯形方法得到的函数值序列单调减小, 因此原退化的基本可行解不会重复出现.

5. 假设给定一个线性规划问题及其一个基本可行解. 在此线性规划中, 变量之和的上

界为  $\sigma$ , 在已知的基本可行解处, 目标函数值为  $f$ , 最大判别数是  $z_k - c_k$ , 又设目标函数值的允许误差为  $\epsilon$ , 用  $f_0$  表示未知的目标函数的最小值. 证明: 若

$$z_k - c_k \leq \epsilon / \sigma,$$

则

$$f - f_0 \leq \epsilon.$$

证 考虑线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & f \stackrel{\text{def}}{=} cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

在已知基本可行解  $x$  处的目标函数值  $f$  与最小值  $f_0$  有如下关系:

$$f_0 = f - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j,$$

其中  $R$  是非基变量的下标集,  $z_j - c_j$  是对应非基变量  $x_j$  的判别数. 显然有

$$f - f_0 = \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j \leq \sum_{j \in R} (z_k - c_k) x_j \leq \frac{\epsilon}{\sigma} \sum_{j \in R} x_j \leq \frac{\epsilon}{\sigma} \cdot \sigma = \epsilon.$$

6. 假设用单纯形方法解线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

在某次迭代中对应变量  $x_j$  的判别数  $z_j - c_j > 0$ , 且单纯形表中相应的列  $y_j = B^{-1}p_j \leq 0$ . 证明

$$d = \begin{bmatrix} -y_j \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

是可行域的极方向. 其中分量 1 对应  $x_j$ .

证 不妨设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 并记作

$$A = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_m \ \cdots \ p_n] = [B \ p_{m+1} \ \cdots \ p_n].$$

由于

$$Ad = [B \ p_{m+1} \ \cdots \ p_j \ \cdots \ p_n] \begin{bmatrix} -B^{-1}p_j \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -p_j + p_j = 0,$$

且  $d \geq 0$ , 因此  $d$  是可行域的方向.

下面证明  $d$  是极方向. 设  $d$  可表示成可行域的两个方向  $d^{(1)}$  和  $d^{(2)}$  的正线性组合, 即

$$d = \lambda d^{(1)} + \mu d^{(2)}, \quad (1)$$

其中  $\lambda, \mu > 0, d^{(1)} \geq 0, d^{(2)} \geq 0$ , 比较(1)式两端的各分量, 易知  $d^{(1)}$  和  $d^{(2)}$  有下列形式:

$$d^{(1)} = \begin{bmatrix} d_B^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d^{(2)} = \begin{bmatrix} d_B^{(2)} \\ 0 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_j, b_j > 0.$$

由于  $d^{(1)}$  是可行域的方向, 因此  $Ad^{(1)} = 0, d^{(1)} \geq 0$ , 即

$$Bd_B^{(1)} + a_j p_j = 0. \quad (2)$$

同理, 由  $Ad^{(2)} = 0$ , 知

$$Bd_B^{(2)} + b_j p_j = 0. \quad (3)$$

由(2)式及(3)式得到

$$\frac{1}{a_j} Bd_B^{(1)} = \frac{1}{b_j} Bd_B^{(2)}.$$

两端左乘  $B^{-1}$ , 则有

$$d_B^{(2)} = \frac{b_j}{a_j} d_B^{(1)}.$$

代入方向  $d^{(2)}$ , 从而得到

$$d^{(2)} = \frac{b_j}{a_j} d^{(1)}, \quad \text{其中 } a_j, b_j > 0,$$

即  $d^{(1)}, d^{(2)}$  是同向非零向量. 因此方向  $d$  不能表示成两个不同方向的正线性组合,  $d$  是可行域的极方向.

7. 用关于变量有界情形的单纯形方法解下列问题:

- (1)  $\min 3x_1 - x_2$   
s. t.  $x_1 + x_2 \leq 9$ ,  
 $0 \leq x_j \leq 6, \quad j=1, 2.$
- (2)  $\max -x_1 - 3x_3$   
s. t.  $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$ ,  
 $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$ ,  
 $0 \leq x_1 \leq 4$ ,  
 $0 \leq x_2 \leq 4$ ,  
 $0 \leq x_3 \leq 4$ ,  
 $0 \leq x_4 \leq 12.$
- (3)  $\min x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$   
s. t.  $x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 6$ ,  
 $2x_1 + x_2 - x_3 \geq 2$ ,
- (4)  $\max 4x_1 + 6x_2$   
s. t.  $2x_1 + x_2 \leq 4$ ,  
 $3x_1 - x_2 \leq 9$ ,

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &\leq 8, & 0 \leq x_1 \leq 4, \\ 0 \leq x_1 \leq 3, & & 0 \leq x_2 \leq 3, \\ 1 \leq x_2 \leq 4, & & \\ 0 \leq x_3 \leq 10, & & \\ 2 \leq x_4 \leq 5. & & \end{aligned}$$

解 (1) 引进松弛变量  $x_3$ , 写成下列形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 - x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ & 0 \leq x_i \leq 6, \quad i=1, 2, \quad x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

取初始基本可行解:

$$x_B = x_3 = 9, \quad x_{N_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{目标函数值 } f_0 = 0.$$

单纯形表如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$x_3$	1	①	1	9
	-3	1	0	0
	1	1		

取下界的非基变量下标集  $R_1 = \{1, 2\}$ , 取上界的非基变量下标集  $R_2 = \emptyset$ . 已用符号 1 标注在表下.

选择  $x_2$  作为进基变量, 令  $x_2 = 0 + \Delta_2 = \Delta_2$ , 计算  $\Delta_2$ :

$$\beta_1 = \frac{9-0}{1} = 9, \quad \beta_2 = \infty, \quad \beta_3 = 6-0 = 6,$$

令  $\Delta_2 = \min\{9, \infty, 6\} = 6$ , 因此,  $x_2 = 6$ , 取值上界, 仍为非基变量, 基变量是  $x_3$ , 取值改变:

$$x_B = x_3 = \hat{b} - y_2 \Delta_2 = 9 - 6 = 3, \quad f = f_0 - (z_2 - c_2)x_2 = 0 - 1 \times 6 = -6.$$

修改单纯形表如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$x_3$	1	1	1	3
	-3	1	0	-6
	1	u		

已经达到最优, 最优解  $\bar{x} = (0, 6, 3)$ , 最优值  $f_{\min} = -6$ .

(2) 用两阶段法求解. 先求一个基本可行解, 为此解下列线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & y \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + y = 6, \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ & 0 \leq x_1 \leq 4, \\ & 0 \leq x_2 \leq 4, \\ & 0 \leq x_3 \leq 4, \\ & 0 \leq x_4 \leq 12, \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

取初始基本可行解:

$$x_B = \begin{bmatrix} y \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad x_{N_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

单纯形表如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y$	
$y$	②	-2	1	0	1	6
$x_4$	1	2	1	1	0	10
	2	-2	1	0	0	6
	1	1	1			

选择变量  $x_1$ , 令  $x_1 = 0 + \Delta_1 = \Delta_1$ , 下面计算增量  $\Delta_1$ :

$$\beta_1 = \min \left\{ \frac{6-0}{2}, \frac{10-0}{1} \right\} = 3, \quad \beta_2 = \infty, \quad \beta_3 = 4.$$

令  $\Delta_1 = \min\{3, \infty, 4\} = 3$ , 因此  $x_1 = 3$ . 未达  $x_1$  的上界, 作为进基变量.

$$\begin{bmatrix} y \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad f = f_0 - (z_1 - c_1)x_1 = 6 - 2 \times 3 = 0,$$

$y$  离基, 修改单纯形表如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y$	
$x_1$	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
$x_4$	0	3	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	7
	0	0	0	0	-1	0
		1	1	1		

一阶段问题已经达到最优, 修改单纯形表, 进行第二阶段:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	3
$x_4$	0	3	$\frac{1}{2}$	1	7
	0	1	$\frac{5}{2}$	0	-3
		1	1		

已经达到最优, 最优解  $\bar{x} = (3, 0, 0, 7)$ , 最优值  $f_{\max} = -3$ .

(3) 用两阶段法求解. 先解下列线性规划, 求一个基本可行解:

$$\begin{aligned} \min \quad & y \\ \text{s. t.} \quad & x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 6, \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 - x_6 + y = 2, \\ & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_7 = 8, \\ & 0 \leq x_1 \leq 3, \\ & 1 \leq x_2 \leq 4, \\ & 0 \leq x_3 \leq 10, \\ & 2 \leq x_4 \leq 5, \\ & x_5, x_6, x_7, y \geq 0. \end{aligned}$$

取初始基本可行解:

$$x_{N_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ y \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad f = 1.$$

单纯形表如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$y$
$x_5$	1	-1	1	-2	1	0	0	11
$y$	②	1	-1	0	0	-1	0	1
$x_7$	-1	1	-1	1	0	0	1	5
	2	1	-1	0	0	-1	0	1
	1	1	1	1		1		

选择变量  $x_1$ , 令  $x_1 = \Delta_1$ , 计算  $\Delta_1$  的取值:



$$\beta_1 = \min\left\{\frac{11-0}{1}, \frac{1-0}{2}\right\} = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \infty, \quad \beta_3 = 3-0 = 3.$$

令  $\Delta_1 = \min\left\{\frac{1}{2}, \infty, 3\right\} = \frac{1}{2}$ . 修改右端列, 取  $x_1 = \frac{1}{2}$ , 原来基变量的取值为

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ y \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{2} \\ 0 \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix},$$

$y$  离基,  $x_1$  进基, 新基下目标值  $f = f_0 - (z_1 - c_1)\Delta_1 = 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$ . 修改后单纯形表如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$y$	
$x_5$	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{21}{2}$
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_7$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$
	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	

得到原来线性规划的一个基本可行解.

下面进行第二阶段, 从求得的基本可行解出发, 求最优解. 为此, 先修改上面单纯形表.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_5$	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{21}{2}$
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$x_7$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{11}{2}$
	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	1	1	1	1	1	1	1	

选择变量  $x_4$ , 令  $x_4 = 2 + \Delta_4$ , 下面求  $\Delta_4$ :

$$\beta_1 = \frac{11}{2} - 0 = \frac{11}{2}, \quad \beta_2 = \infty, \quad \beta_3 = 5 - 2 = 3.$$

令  $\Delta_4 = \min\left\{\frac{11}{2}, \infty, 3\right\} = 3$ ,  $x_4$  取上界值.

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ x_1 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{33}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}, \quad f = f_0 - (z_4 - c_4)\Delta_4 = \frac{1}{2} - 1 \times 3 = -\frac{5}{2}.$$

修改单纯形表右端列, 得下表:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_5$	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{33}{2}$
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$x_7$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$
	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$
	1	1	1	1	1	1	1	

求得最优解  $\bar{x} = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, 5, \frac{33}{2}, 0, \frac{5}{2}\right)$ , 最优值  $f_{\min} = -\frac{5}{2}$ .

(4) 引入松弛变量  $x_3, x_4$ , 化成

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ & 3x_1 - x_2 + x_4 = 9, \\ & 0 \leq x_1 \leq 4, \\ & 0 \leq x_2 \leq 3, \\ & x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad x_{N_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

目标函数值  $f_0 = 0$ . 列表如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_3$	2	1	1	0	4
$x_4$	3	-1	0	1	9
	-4	-6	0	0	0
	1	1	1	1	

选择  $x_2$ , 令  $x_2 = 0 + \Delta_2$ . 下面求  $\Delta_2$ :

$$\beta_1 = \frac{4-0}{1} = 4, \quad \beta_2 = \infty, \quad \beta_3 = 3-0 = 3, \quad \Delta_2 = \min\{4, \infty, 3\} = 3.$$

非基变量  $x_2$  改为取值上界, 令  $x_2=3$ . 仍取  $x_3, x_4$  作为基变量. 修改右端列:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad f = f_0 - (x_2 - c_2)\Delta_2 = 18,$$

得下列单纯形表:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_3$	②	1	1	0	1
$x_4$	3	-1	0	1	12
	-4	-6	0	0	18
	1	u			

还未达到最优.

选择变量  $x_1$ , 令  $x_1=0+\Delta_1$  计算  $\Delta_1$ :

$$\beta_1 = \min\left\{\frac{1-0}{2}, \frac{12-0}{3}\right\} = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \infty, \quad \beta_3 = 4-0 = 4.$$

$$\text{令 } \Delta_1 = \min\left\{\frac{1}{2}, \infty, 4\right\} = \frac{1}{2}. \text{ 取}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{21}{2} \end{bmatrix}, \quad f = f_0 - (x_1 - c_1)\Delta_1 = 18 - (-4) \times \frac{1}{2} = 20.$$

$x_1$  进基,  $x_3$  离基取下界. 经迭代得到新单纯形表:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$x_4$	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{21}{2}$
	0	-4	2	0	20
		u	1		

已经达到最优, 最优解  $\bar{x} = \left(\frac{1}{2}, 3, 0, \frac{21}{2}\right)$ , 最优值  $f_{\max} = 20$ .

8. 用分解算法解下列线性规划问题:

$$(1) \max x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 8,$$

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$(2) \max 5x_1 - 2x_3 + x_4$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 30,$$

$$x_1 + x_2 \leq 12,$$

$$\begin{aligned} x_3 + 2x_4 &\leq 10, \\ -x_3 + x_4 &\leq 4, \\ x_j &\geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

$$(3) \max x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + x_3 \leq 12,$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 8,$$

$$x_3 \leq 3,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$2x_1 - x_2 \leq 9,$$

$$-x_3 + x_4 \leq 2,$$

$$x_3 + 2x_4 \leq 10,$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4.$$

$$(4) \min -2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4$$

$$\text{s. t. } x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 20,$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1 \leq 4,$$

$$x_3 - 5x_4 \leq 5,$$

$$-x_3 + 2x_4 \leq 2,$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4.$$

$$(5) \min -x_1 - 8x_2 - 5x_3 - 6x_4$$

$$\text{s. t. } x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 7,$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6,$$

$$5x_1 + x_2 \leq 5,$$

$$3x_3 + 4x_4 \geq 12,$$

$$x_3 \leq 4,$$

$$x_4 \leq 3,$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4.$$

解 (1) 把线性规划写为下列形式:

$$\max cx$$

$$\text{s. t. } Ax \leq b,$$

$$x \in S,$$

其中,  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ ,  $c = (1, 3, -1, 1)$ ,  $A = (1, 1, 1, 1)$ ,  $b = 8$ ,

$$S = \left\{ x \mid \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ -x_3 + x_4 \leq 4 \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4 \end{cases} \right\}.$$

引入松弛变量  $v \geq 0$ . 设集合  $S$  有  $t$  个极点, 有  $l$  个极方向, 则每个  $x \in S$  可表示为

$$x = \sum_{j=1}^t \lambda_j x^{(j)} + \sum_{j=1}^l \mu_j d^{(j)},$$

$$\sum_{j=1}^t \lambda_j = 1,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, t,$$

$$\mu_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, l.$$

主规划为

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^t (cx^{(j)})\lambda_j + \sum_{j=1}^l (cd^{(j)})\mu_j \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^t (Ax^{(j)})\lambda_j + \sum_{j=1}^l (Ad^{(j)})\mu_j + v = b, \\ & \sum_{j=1}^t \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, t, \\ & \mu_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad v \geq 0. \end{aligned}$$

下面用修正单纯形法解主规划.

取集  $S$  一个极点  $x^{(1)} = (0, 0, 0, 0)^T$ , 将其对应的变量  $\lambda_1$  和松弛变量  $v$  作为初始基变量, 初始基

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

在主规划中, 基变量的目标系数  $\hat{c}_B = (0, cx^{(1)}) = (0, 0)$ . 在基  $B$  下, 单纯形乘子  $(w, \alpha) =$

$\hat{c}_B B^{-1} = (0, 0)$ , 约束右端  $\bar{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 目标函数值  $f = \hat{c}_B \bar{b} = 0$ . 修正单纯形法中, 初表如下:

	0	0	0
$v$	1	0	8
$\lambda_1$	0	1	1

第1次迭代:

解子规划, 求最小判别数:

$$\begin{aligned} \min \quad & (wA - c)x + \alpha \\ \text{s. t.} \quad & x \in S. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_3 + 2x_4 \leq 10, \\ & -x_3 + x_4 \leq 4, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

化为标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_5 = 6, \\ & x_3 + 2x_4 + x_6 = 10, \\ & -x_3 + x_4 + x_7 = 4, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 7. \end{aligned}$$

用单纯形法求解如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_5$	1	①	0	0	1	0	0	6
$x_6$	0	0	1	2	0	1	0	10
$x_7$	0	0	-1	1	0	0	1	4
	1	3	-1	1	0	0	0	0
$x_2$	1	1	0	0	1	0	0	6
$x_6$	0	0	1	2	0	1	0	10
$x_7$	0	0	-1	①	0	0	1	4
	-2	0	-1	1	-3	0	0	-18
$x_2$	1	1	0	0	1	0	0	6
$x_6$	0	0	3	0	0	1	-2	2
$x_4$	0	0	-1	1	0	0	1	4
	-2	0	0	0	-3	0	-1	-22

主规划的最小判别数  $z_2 - c_2 = -22$ , 集合  $S$  的一个极点  $x^{(2)} = (0, 6, 0, 4)^T$ . 计算主列:

$$y_2 = B^{-1} \begin{bmatrix} Ax^{(2)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

			$\lambda_2$
	0	0	0
$v$	1	0	8
$\lambda_1$	0	1	1
	$\frac{11}{5}$	0	$\frac{88}{5}$
$\lambda_2$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{4}{5}$
$\lambda_1$	$-\frac{1}{10}$	1	$\frac{1}{5}$

第2次迭代:

先解子规划,求最小判别数:

由第1次迭代结果知,在新基下单纯形乘子  $w = \frac{11}{5}, \alpha = 0, wA - c = \left(\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{16}{5}, \frac{6}{5}\right)$ .

$$\min (wA - c)x + \alpha$$

$$\text{s. t. } x \in S.$$

即

$$\min \frac{6}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{16}{5}x_3 + \frac{6}{5}x_4$$

$$\text{s. t. } x \in S.$$

修改第1次迭代中子规划最优表最后一行,然后用单纯形法求子规划最优解:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_2$	1	1	0	0	1	0	0	6
$x_6$	0	0	3	0	0	1	-2	2
$x_4$	0	0	-1	1	0	0	①	4
	-2	0	-\frac{22}{5}	0	-\frac{4}{5}	0	\frac{6}{5}	0

$x_2$	1	1	0	0	1	0	0	6
$x_6$	0	0	1	2	0	1	0	10
$x_7$	0	0	-1	1	0	0	1	4
	-2	0	-\frac{16}{5}	-\frac{6}{5}	-\frac{4}{5}	0	0	-\frac{24}{5}

得到集合  $S$  的一个极点  $x^{(3)} = (0, 6, 0, 0)$ , 现行主规划最小判别数  $z_3 - c_3 = -\frac{24}{5}, \lambda_3$  进基.

$$y_3 = B^{-1} \begin{bmatrix} Ax^{(3)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

	$\lambda_3$
$\lambda_2$	$\frac{11}{5}$
$\lambda_1$	$-\frac{1}{10}$

$\frac{88}{5}$	$-\frac{24}{5}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

	1	12	20
$\lambda_2$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\lambda_3$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$

第3次迭代:

解子规划求最小判别数:

$$wA - c = 1 \cdot (1, 1, 1, 1) - (1, 3, -1, 1) = (0, -2, 2, 0).$$

$$\min (wA - c)x + \alpha$$

$$\text{s. t. } x \in S.$$

即

$$\min -2x_2 + 2x_3 + 12$$

$$\text{s. t. } x \in S.$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_2$	1	1	0	0	1	0	0	6
$x_6$	0	0	1	2	0	1	0	10
$x_7$	0	0	-1	1	0	0	1	4
	-2	0	-2	0	-2	0	0	0

子规划的最小值为0, 即主规划在现行基下最小判别数为0, 因此达到最优. 最优解是

$$\bar{x} = \lambda_2 x^{(2)} + \lambda_3 x^{(3)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

最优值  $f_{\max} = 20$ .

(2) 第一个约束记作  $A_1 x_1 + A_2 x_2 \leq b$ , 其中  $A_1 = (1, 1), A_2 = (1, 1), b = 30$ . 相应地, 记  $c =$

$$(c_1, c_2), c_1 = (5, 0), c_2 = (-2, 1), S_1 = \left\{ x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \right\}, S_2 = \left\{ x_2 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} -x_3 + x_4 \leq 2 \\ x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \right. \right\}.$$

线性规划记为:

$$\max c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\text{s. t. } A_1 x_1 + A_2 x_2 \leq b,$$

$$x_1 \in S_1,$$

$$x_2 \in S_2.$$

由于  $S_1, S_2$  均是有界集, 不存在方向, 设  $S_1$  的极点为  $x_1^{(j)}, j = 1, 2, \dots, t_1, S_2$  的极点为  $x_2^{(j)},$

$j=1, 2, \dots, t_2$ , 引入松弛变量  $v \geq 0$ .

主规划如下:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{t_1} (c_1 x_1^{(j)}) \lambda_{1j} + \sum_{j=1}^{t_2} (c_2 x_2^{(j)}) \lambda_{2j} \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^{t_1} (A_1 x_1^{(j)}) \lambda_{1j} + \sum_{j=1}^{t_2} (A_2 x_2^{(j)}) \lambda_{2j} + v = b, \\ & \sum_{j=1}^{t_1} \lambda_{1j} = 1, \\ & \sum_{j=1}^{t_2} \lambda_{2j} = 1, \\ & \lambda_{1j} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, t_1, \\ & \lambda_{2j} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, t_2. \end{aligned}$$

分别取  $S_1$  和  $S_2$  的极点

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

初始基变量  $v, \lambda_{11}, \lambda_{21}$ , 初始基矩阵  $B$  为三阶单位矩阵. 单纯形乘子和约束右端向量分别是

$$(w, \alpha) = \hat{c}_B B^{-1} = (0, 0, 0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0, 0, 0), \quad \bar{b} = B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

用修正单纯形方法解主规划, 初表如下:

	0	0	0	0
$v$	1	0	0	30
$\lambda_{11}$	0	1	0	1
$\lambda_{21}$	0	0	1	1

第1次迭代:

为确定进基变量, 分别求解下列两个子规划. 先解第一个子规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & (wA_1 - c_1)x_1 + \alpha_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \in S_1. \end{aligned} \quad (1)$$

即

$$\begin{aligned} \min \quad & -5x_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 12, \\ & 2x_1 - x_2 \leq 9, \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

子规划的最优解和最优值分别是  $x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, Z_{1,\min} = -35$ .

再解第二个子规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & (wA_2 - c_2)x_2 + \alpha_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_2 \in S_2. \end{aligned} \quad (2)$$

即

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_3 - x_4 \\ \text{s. t.} \quad & -x_3 + x_4 \leq 2, \\ & x_3 + 2x_4 \leq 10, \\ & x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划最优解和最优值分别是  $x_2^{(2)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, Z_{2,\min} = -2$ .

对应  $\lambda_{12}$  的判别数  $x_{12} - c_{12} = -35$ , 最小, 因此  $\lambda_{12}$  作为进基变量. 主列是

$$y_1^{(2)} = B^{-1} \begin{bmatrix} A_1 x_1^{(2)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

下面作主元消去运算:

	0	0	0	0	$\lambda_{12}$	-35
$v$	1	0	0	30		12
$\lambda_{11}$	0	1	0	1		①
$\lambda_{21}$	0	0	1	1		0
	0	35	0	35		
$v$	1	-12	0	18		
$\lambda_{12}$	0	1	0	1		
$\lambda_{21}$	0	0	1	1		

第2次迭代:

先解子规划确定进基变量.

解子规划(1):

$$\begin{aligned} \min \quad & -5x_1 + 35 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 12, \end{aligned}$$

$$2x_1 - x_2 \leq 9,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

子规划的最优解和最优值分别是  $x_1^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ ,  $Z_{1,\min} = 0$ .

解子规划(2):

$$\min 2x_3 - x_4$$

$$\text{s. t. } -x_3 + x_4 \leq 2,$$

$$x_3 + 2x_4 \leq 10,$$

$$x_3, x_4 \geq 0.$$

子规划的最优解和最优值分别是  $x_2^{(3)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $Z_{2,\min} = -2$ .

$\lambda_{23}$ 进基, 计算主列:

$$y_2^{(3)} = B^{-1} \begin{bmatrix} A_2 x_2^{(3)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

				$\lambda_{23}$		
		0	35	0	35	-2
$v$		1	-12	0	18	2
$\lambda_{12}$		0	1	0	1	0
$\lambda_{21}$		0	0	1	1	①

		0	35	2	37
$v$		1	-12	-2	16
$\lambda_{12}$		0	1	0	1
$\lambda_{23}$		0	0	1	1

第3次迭代:

子规划(1)计算结果同前.

子规划(2), 即

$$\min 2x_3 - x_4 + 2$$

$$\text{s. t. } -x_3 + x_4 \leq 2,$$

$$x_3 + 2x_4 \leq 10,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

子规划(2)的最优值  $Z_{3,\min} = 0$ .

经两次迭代, 在现行基下, 对应各变量的判别数均大于或等于0, 因此达到最优. 最优解

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \lambda_{12} x_1^{(2)} \\ \lambda_{23} x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad f_{\max} = 37.$$

(3) 将线性规划记为

$$\max cx$$

$$\text{s. t. } Ax \leq 12,$$

$$x \in S,$$

其中  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $c = (1, 2, 1)$ ,  $A = (1, 1, 1)$ ,

$$S = \left\{ x \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \right\}.$$

设  $S$  有  $t$  个极点  $x^{(j)}$ ,  $j=1, 2, \dots, t$ , 有  $l$  个极方向  $d^{(j)}$ ,  $j=1, 2, \dots, l$ . 引入松弛变量  $v \geq 0$ . 主规划如下:

$$\begin{aligned} \max & \sum_{j=1}^t (cx^{(j)}) \lambda_j + \sum_{j=1}^l (cd^{(j)}) \mu_j \\ \text{s. t. } & \sum_{j=1}^t (Ax^{(j)}) \lambda_j + \sum_{j=1}^l (Ad^{(j)}) \mu_j + v = 12, \\ & \sum_{j=1}^t \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, t, \\ & \mu_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad v \geq 0. \end{aligned}$$

下面用修正单纯形方法解主规划:

取集合  $S$  的一个极点  $x^{(1)} = (0, 0, 0)^T$ , 初始基变量为  $v$  和  $\lambda_1$ , 初始基  $B$  是二阶单位矩阵. 单纯形乘子  $(w, \alpha) = c_B B^{-1} = (0, 0)$ , 约束右端  $b = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}$  现行基本可行解下的目标函数值  $f=0$ . 初表为

	0	0	0
$v$	1	0	12
$\lambda_1$	0	1	1

第1次迭代:

解子规划,求最小判别数:

$$\begin{aligned} \min \quad & (wA - c)x + \alpha \\ \text{s. t.} \quad & x \in S, \end{aligned}$$

其中  $wA - c = (-1, -2, -1)$ , 上式即

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ & x_3 \leq 3, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

用单纯形方法求解,求得集合  $S$  的一个极方向,  $d^{(1)} = (2, 1, 0)^T$ .

主规划中,对应  $\mu_1$  的判别数  $(wA - c)d^{(1)} = -4$ ,  $\mu_1$  进基,主列

$$y_1 = B^{-1} \begin{bmatrix} A d^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下:

			$\mu_1$
	0	0	0
$v$	1	0	12
$\lambda_1$	0	1	1
	$\frac{4}{3}$	0	16
$\mu_1$	$\frac{1}{3}$	0	4
$\lambda_1$	0	1	1
			-4
			③
			0

第2次迭代:

先解子规划,求判别数:

$$wA - c = \frac{4}{3}(1, 1, 1) - (1, 2, 1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

子规划为

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ & x_3 \leq 3, \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

用单纯形方法求得子规划最优解  $x^{(2)} = (4, 6, 0)^T$ , 最小值  $z = -\frac{8}{3}$ .  $\lambda_2$  为进基变量, 主列

$$y_2 = B^{-1} \begin{bmatrix} A x^{(2)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下:

			$\lambda_2$
	$\frac{4}{3}$	0	16
$\mu_1$	$\frac{1}{3}$	0	4
$\lambda_1$	0	1	1
	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{56}{3}$
$\mu_1$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\lambda_2$	0	1	1
			$-\frac{8}{3}$
			$\frac{10}{3}$
			①

第3次迭代:

$wA - c = \frac{4}{3}(1, 1, 1) - (1, 2, 1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ,  $w = \frac{4}{3}$ ,  $\alpha = \frac{8}{3}$ . 子规划如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{8}{3} \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ & x_3 \leq 3, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划最优解  $x^{(3)} = (4, 6, 0)^T$ , 最优值  $z = 0$ . 结果表明, 主规划已达最优解. 原问题的最优解为

$$\bar{x} = \lambda_2 x^{(2)} + \mu_1 d^{(1)} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{20}{3} \\ 0 \end{bmatrix},$$

最优值  $f_{\max} = \frac{56}{3}$ .

(4) 将线性规划写成下列形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{s. t.} \quad & A_1 x_1 + A_2 x_2 \leq 20, \\ & x_1 \in S_1, \\ & x_2 \in S_2, \end{aligned}$$

其中,  $x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $x_2 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ ,  $c_1 = (-2, 4)$ ,  $c_2 = (-1, 1)$ ,  $A_1 = (1, 2)$ ,  $A_2 = (4, 1)$ .

$$S_1 = \left\{ x_1 \mid \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \right\}, \quad S_2 = \left\{ x_2 \mid \begin{cases} x_3 - 5x_4 \leq 5 \\ -x_3 + 2x_4 \leq 2 \\ x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \right\}.$$

$S_1$  是有界集, 设有  $t_1$  个极点  $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(t_1)}$ .  $S_2$  是无界集, 设有  $t_2$  个极点, 有  $l$  个极方向. 引入松弛变量  $v$ . 主规划如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{t_1} (c_1 x_1^{(j)}) \lambda_{1j} + \sum_{j=1}^{t_2} (c_2 x_2^{(j)}) \lambda_{2j} + \sum_{j=1}^l (c_2 d^{(j)}) \mu_j \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^{t_1} (A_1 x_1^{(j)}) \lambda_{1j} + \sum_{j=1}^{t_2} (A_2 x_2^{(j)}) \lambda_{2j} + \sum_{j=1}^l (A_2 d^{(j)}) \mu_j + v = 20, \\ & \sum_{j=1}^{t_1} \lambda_{1j} = 1, \\ & \sum_{j=1}^{t_2} \lambda_{2j} = 1, \\ & \lambda_{1j} \geq 0, j = 1, 2, \dots, t_1, \\ & \lambda_{2j} \geq 0, j = 1, 2, \dots, t_2, \\ & \mu_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, l, v \geq 0. \end{aligned}$$

取  $S_1$  的极点  $x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $S_2$  的极点  $x_2^{(1)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . 初始基变量取  $v, \lambda_{11}, \lambda_{21}$ .

初始基  $B$  是三阶单位矩阵, 单纯形乘子  $(w, \alpha_1, \alpha_2) = (0, 0, 0)$ , 目标值  $z = 0$ , 初始单纯形表如下:

	0	0	0	0
$v$	1	0	0	20
$\lambda_{11}$	0	1	0	1
$\lambda_{21}$	0	0	1	1

第1次迭代:

解下列子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_1 - c_1)x_1 + \alpha_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \in S_1. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 4x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 3, \\ & x_1 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划的最优解  $x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 最优值  $z_1 = 8$ , 即主规划中对应  $\lambda_{12}$  的判别数是 8.  $\lambda_{12}$  进基, 主列

$$y_{12} = B^{-1} \begin{bmatrix} A_1 x_1^{(2)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下:

					$\lambda_{12}$
	0	0	0	0	8
$v$	1	0	0	20	4
$\lambda_{11}$	0	1	0	1	①
$\lambda_{21}$	0	0	1	1	0
	0	-8	0	-8	
$v$	1	-4	0	16	
$\lambda_{12}$	0	1	0	1	
$\lambda_{21}$	0	0	1	1	

第2次迭代:

解下列子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_1 - c_1)x_1 + \alpha_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \in S_1. \end{aligned}$$

即



$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 4x_2 - 8 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 3, \\ & x_1 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划的最优解同第1次迭代,最优值  $z_1 = 0$ . 现行解下,对应  $\lambda_{1j}$  的判别数均小于或等于0.

再解子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_2 - c_2)x_2 + \alpha_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_2 \in S_2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & x_3 - x_4 \\ \text{s. t.} \quad & x_3 - 5x_4 \leq 5, \\ & -x_3 + 2x_4 \leq 2, \\ & x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

用单纯形方法解子规划,可知无界.  $S_2$  的一个极方向  $d^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ . 在主规划中,对应于  $\mu_1$  的

判别数  $(wA_2 - c_2)d^{(1)} = (1, -1) \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 4, \mu_1$  进基,主列

$$y = B^{-1} \begin{bmatrix} A_2 d^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下:

		0	-8	0	-8	
$v$		1	-4	0	16	
$\lambda_{12}$		0	1	0	1	
$\lambda_{21}$		0	0	1	1	
		$-\frac{4}{21}$	$-\frac{152}{21}$	0	$-\frac{232}{21}$	
$\mu_1$		$\frac{1}{21}$	$-\frac{4}{21}$	0	$\frac{16}{21}$	
$\lambda_{12}$		0	1	0	1	
$\lambda_{21}$		0	0	1	1	

$\mu_1$
4
(21)
0
0

第3次迭代:

解子规则

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_1 - c_1)x_1 + \alpha_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \in S_1, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{38}{21}x_1 - \frac{92}{21}x_2 - \frac{152}{21} \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 3, \\ & x_1 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划的最优解  $x_1^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1^{(2)}$ , 最优值  $z_1 = 0$ .

再解子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_2 - c_2)x_2 + \alpha_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_2 \in S_2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{5}{21}x_3 - \frac{25}{21}x_4 \\ \text{s. t.} \quad & x_3 - 5x_4 \leq 5, \\ & -x_3 + 2x_4 \leq 2, \\ & x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划最优解  $x_2^{(2)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 最优值  $z_2 = \frac{25}{21}$ .

主规划中,对应  $\lambda_{22}$  的判别数为  $\frac{25}{21}$ , 主列

$$y = B^{-1} \begin{bmatrix} A_2 x_2^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{21} & -\frac{4}{21} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{21} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下:

$\lambda_{22}$

	$-\frac{4}{21}$	$-\frac{152}{21}$	0	$-\frac{232}{21}$
$\mu_1$	$\frac{1}{21}$	$-\frac{4}{21}$	0	$\frac{16}{21}$
$\lambda_{12}$	0	1	0	1
$\lambda_{21}$	0	0	1	1

$\frac{25}{21}$
$(\frac{20}{21})$
0
1

	$-\frac{1}{4}$	-7	0	$-\frac{12}{1}$
$\lambda_{22}$	$\frac{1}{20}$	$-\frac{4}{20}$	0	$\frac{16}{20}$
$\lambda_{12}$	0	1	0	1
$\lambda_{21}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{4}{20}$	1	$\frac{4}{20}$

第4次迭代:  
解子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_1 - c_1)x_1 + a_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \in S_1, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{7}{4}x_1 - \frac{9}{2}x_2 - 7 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 3, \\ & x_1 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划最优解  $x_1^{(4)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1^{(2)}$ , 最优值  $z_1 = 0$ .

解子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_2 - c_2)x_2 + a_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_2 \in S_2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & -\frac{5}{4}x_4 \\ \text{s. t.} \quad & x_3 - 5x_4 \leq 5, \\ & -x_3 + 2x_4 \leq 2, \\ & x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划最优解  $x_2^{(3)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2^{(2)}$ , 最优值  $z_2 = 0$ .

主规划对应各变量的判别数均小于或等于0, 因此达到最优. 主规划的最优解是  $\lambda_{12} = 1, \lambda_{21} = \frac{4}{20}, \lambda_{22} = \frac{16}{20}$ , 其余变量均为非基变量, 取值为0.

原来问题最优解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{12}x_1^{(2)} \\ \lambda_{21}x_2^{(1)} + \lambda_{22}x_2^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{最优值 } f_{\min} = -12.$$

(5) 线性规划写成下列形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & A_1x_1 + A_2x_2 \leq b \\ & x_1 \in S_1, \\ & x_2 \in S_2, \end{aligned}$$

其中  $x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, c_1 = [-1, -8], c_2 = [-5, -6], A_1 = [1, 4], A_2 = [5, 2], b = 7$ .

$$S_1 = \left\{ x_1 \mid \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 5x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \right\}, \quad S_2 = \left\{ x_2 \mid \begin{cases} 3x_3 + 4x_4 \geq 12 \\ x_3 \leq 4 \\ x_4 \leq 3 \\ x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \right\}.$$

$S_1$  和  $S_2$  均为有界集. 设  $S_1$  有  $t_1$  个极点:  $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(t_1)}$ ,  $S_2$  有  $t_2$  个极点:  $x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_2^{(t_2)}$ . 主规划写成

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{t_1} (c_1x_1^{(j)})\lambda_{1j} + \sum_{j=1}^{t_2} (c_2x_2^{(j)})\lambda_{2j} \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^{t_1} (A_1x_1^{(j)})\lambda_{1j} + \sum_{j=1}^{t_2} (A_2x_2^{(j)})\lambda_{2j} + v = b, \\ & \sum_{j=1}^{t_1} \lambda_{1j} = 1, \\ & \sum_{j=1}^{t_2} \lambda_{2j} = 1, \\ & \lambda_{1j} \geq 0, j = 1, 2, \dots, t_1, \\ & \lambda_{2j} \geq 0, j = 1, 2, \dots, t_2, v \geq 0. \end{aligned}$$

下面用修正单纯形方法解主规划.

先给定初始基. 取  $S_1$  的一个极点  $x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $S_2$  的一个极点  $x_2^{(1)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

初始基变量为  $v, \lambda_{11}, \lambda_{21}$ . 构造初表:

	0	0	0	0
$v$	1	0	0	7
$\lambda_{11}$	0	1	0	1
$\lambda_{21}$	0	0	1	1

第1次迭代:

解子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_1 - c_1)x_1 + a_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \in S_1, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 8x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ & 5x_1 + x_2 \leq 5, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划最优解  $x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 最优值  $z_1 = 16$ . 可知主规划中对应  $\lambda_{12}$  的判别数为 16,  $\lambda_{12}$  进基, 主列

$$y = B^{-1} \begin{bmatrix} A_1 x_1^{(2)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下:

	0	0	0	0	$\lambda_{12}$
					16
$v$	1	0	0	7	8
$\lambda_{11}$	0	1	0	1	1
$\lambda_{21}$	0	0	1	1	0

	-2	0	0	-14
$\lambda_{12}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{7}{8}$
$\lambda_{11}$	$-\frac{1}{8}$	1	0	$\frac{1}{8}$
$\lambda_{21}$	0	0	1	1

第2次迭代:

解子规划

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_1 - c_1)x_1 + a_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \in S_1, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ & 5x_1 + x_2 \leq 5, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划的最优解  $x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = x_1^{(1)}$ , 最优值  $z_1 = 0$ . 即主规划中对应  $\lambda_{1j}$  的最大判别数为 0.

再解子规划

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_2 - c_2)x_2 + a_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_2 \in S_2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & -5x_3 + 2x_4 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_3 + 4x_4 \geq 12, \\ & x_3 \leq 4, \\ & x_4 \leq 3, \\ & x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

用两阶段法求得子规划最优解  $x_2^{(2)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ , 最优值  $z_2 = 6$ , 即主规划中对应  $\lambda_{22}$  的判别数为 6,  $\lambda_{22}$  进基, 主列为

$$y = B^{-1} \begin{bmatrix} A_2 x_2^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下:

					$\lambda_{22}$
		-2	0	0	-14
$\lambda_{12}$		$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{7}{8}$
$\lambda_{11}$		$-\frac{1}{8}$	1	0	$\frac{1}{8}$
$\lambda_{21}$		0	0	1	1
		-2	0	-6	-20
$\lambda_{12}$		$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$
$\lambda_{11}$		$-\frac{1}{8}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$
$\lambda_{22}$		0	0	1	1
					6
					$\frac{3}{4}$
					$-\frac{3}{4}$
					①

第3次迭代:

解子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (uA_1 - c_1)x_1 + \alpha_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \in S_1, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ & 5x_1 + x_2 \leq 5, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划最优解  $x_1^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = x_1^{(2)}$ , 最优值  $z_1 = 0$ .

解子规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & (uA_2 - c_2)x_2 + \alpha_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_2 \in S_2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & -5x_3 + 2x_4 - 6 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_3 + 4x_4 \geq 12, \\ & x_3 \leq 4, \\ & x_4 \leq 3, \\ & x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

子规划的最优解  $x_2^{(3)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = x_2^{(2)}$ , 最优值  $z_2 = 0$ .

主规划已达到最优, 最优解是:  $\lambda_{11} = \frac{7}{8}, \lambda_{12} = \frac{1}{8}, \lambda_{22} = 1$ , 其余变量均为非基变量, 取值为0.

原来问题最优解:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}x_1^{(1)} + \lambda_{12}x_1^{(2)} \\ \lambda_{22}x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

最优值  $f_{\min} = -20$ .

## 对偶原理及灵敏度分析题解

1. 写出下列原问题的对偶问题:

$$\begin{aligned}
 (1) \max \quad & 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 15, \\
 & -x_1 + 2x_2 - 7x_3 \geq 3, \\
 & x_1 + x_3 = 1, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 (2) \min \quad & -4x_1 - 5x_2 - 7x_3 + x_4 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 1, \\
 & 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 \leq -3, \\
 & x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -5, \\
 & x_1, x_2, x_4 \geq 0.
 \end{aligned}$$

解 (1) 对偶问题如下:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 15w_1 + 3w_2 + w_3 \\
 \text{s. t.} \quad & 3w_1 - w_2 + w_3 \geq 4, \\
 & w_1 + 2w_2 \geq -3, \\
 & 2w_1 - 7w_2 + w_3 \geq 5, \\
 & w_1 \geq 0, \\
 & w_2 \leq 0.
 \end{aligned}$$

(2) 对偶问题如下:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & w_1 - 3w_2 - 5w_3 \\
 \text{s. t.} \quad & w_1 + 2w_2 + w_3 \leq -4, \\
 & w_1 - 6w_2 + 4w_3 \leq -5, \\
 & 2w_1 + 3w_2 + 3w_3 = -7, \\
 & -w_1 + w_2 + 2w_3 \leq 1, \\
 & w_1 \geq 0, \\
 & w_2 \leq 0.
 \end{aligned}$$

2. 给定原问题

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 - x_2 + x_3 \geq 1, \\
 & x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

已知对偶问题的最优解  $(w_1, w_2) = (\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$ , 利用对偶性质求原问题的最优解.

解 对偶问题:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & w_1 + 2w_2 \\
 \text{s. t.} \quad & w_1 + w_2 \leq 4, \\
 & -w_1 + 2w_2 \leq 3, \\
 & w_1 - 3w_2 \leq 1, \\
 & w_1 \geq 0, \\
 & w_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

由于对偶问题的最优解  $w_1 = \frac{5}{3} > 0, w_2 = \frac{7}{3} > 0$ , 因此原问题的前两个约束在最优解处是紧约束. 又知对偶问题的第3个约束在最优解处是松约束, 因此原问题在最优解处  $x_3 = 0$ . 从而得下列线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

解得原问题的最优解  $x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = 0$ , 最优值为  $\frac{19}{3}$ .

3. 给定下列线性规划问题

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 10x_1 + 7x_2 + 30x_3 + 2x_4 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 - 6x_3 + x_4 \leq -2, \\
 & x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 \leq -7, \\
 & x_2, x_3, x_4 \leq 0.
 \end{aligned}$$

(1) 写出上述原问题的对偶问题.

(2) 用图解法求对偶问题的最优解.

(3) 利用对偶问题的最优解及对偶性质求原问题的最优解和目标函数的最优值.

解 (1) 对偶问题如下:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & -2w_1 - 7w_2 \\
 \text{s. t.} \quad & w_1 + w_2 = 10, \\
 & w_2 \leq 7,
 \end{aligned}$$

$$-6w_1 + 5w_2 \leq 30,$$

$$w_1 - w_2 \leq 2,$$

$$w_1, w_2 \geq 0.$$

(2) 对偶问题的可行域是直线  $w_1 + w_2 = 10$  上的一段, 容易在坐标平面上画出, 这里从略. 对偶问题最优解  $(w_1, w_2) = (3, 7)$ , 最优值为  $-55$ .

(3) 由于对偶问题的最优解中,  $w_1 > 0, w_2 > 0$ , 因此在原问题最优解处, 有

$$\begin{cases} x_1 - 6x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = -7. \end{cases}$$

由于对偶问题在点  $(3, 7)$  处第 3、4 个约束是松约束, 因此原问题中  $x_3 = x_4 = 0$ . 代入方程组, 得到原问题的最优解为  $x_1 = -2, x_2 = -5, x_3 = x_4 = 0$ , 最优值为  $-55$ .

#### 4. 给定线性规划问题

$$\min \quad 5x_1 + 21x_3$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 - x_2 + 6x_3 \geq b_1,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

其中  $b_1$  是某一个正数, 已知这个问题的一个最优解为  $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})$ .

(1) 写出对偶问题.

(2) 求对偶问题的最优解.

解 (1) 对偶问题如下:

$$\max \quad b_1 w_1 + w_2$$

$$\text{s. t.} \quad w_1 + w_2 \leq 5,$$

$$-w_1 + w_2 \leq 0,$$

$$6w_1 + 2w_2 \leq 21,$$

$$w_1, w_2 \geq 0.$$

(2) 利用互补松弛性质求对偶问题的最优解. 由于原问题在最优解处  $x_1 > 0, x_3 > 0$ , 因此有

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 5, \\ 6w_1 + 2w_2 = 21. \end{cases}$$

解得对偶问题的最优解:  $w_1 = \frac{11}{4}, w_2 = \frac{9}{4}$ , 最优值为  $\frac{31}{4}$ .

#### 5. 给定原始的线性规划问题

$$\min \quad cx$$

$$\text{s. t.} \quad Ax = b,$$

$$x \geq 0.$$

假设这个问题与其对偶问题是可行的. 令  $w^{(0)}$  是对偶问题的一个已知的最优解.

(1) 若用  $\mu \neq 0$  乘原问题的第  $k$  个方程, 得到一个新的原问题, 试求其对偶问题的最优解.

(2) 若将原问题第  $k$  个方程的  $\mu$  倍加到第  $r$  个方程上, 得到新的原问题, 试求其对偶问题的最优解.

$$\text{解 不妨设 } A \text{ 是 } m \times n \text{ 矩阵, 并记 } A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

于是原问题可写作

$$\min \quad cx$$

$$\text{s. t.} \quad A_i x = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x \geq 0.$$

其对偶问题可写作

$$\max \quad \sum_{i=1}^m b_i w_i$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^m w_i A_i \leq c. \quad (2)$$

(1) 用  $\mu \neq 0$  乘 (1) 式中第  $k$  个方程后, 对偶问题为

$$\max \quad b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + \mu b_k w_k + \dots + b_m w_m$$

$$\text{s. t.} \quad w_1 A_1 + \dots + \mu w_k A_k + \dots + w_m A_m \leq c.$$

显然,  $w = (w_1^{(0)}, \dots, \frac{1}{\mu} w_k^{(0)}, \dots, w_m^{(0)})$  是对偶问题的可行解, 且对偶目标函数值等于原问题的最优值, 因此是对偶问题的最优解.

(2) 变化后的原问题为

$$\min \quad cx$$

$$\text{s. t.} \quad A_1 x = b_1,$$

$$\vdots$$

$$A_k x = b_k,$$

$$\vdots$$

$$(A_r + \mu A_k) x = b_r + \mu b_k,$$

$$\vdots$$

$$A_m x = b_m,$$

$$x \geq 0.$$

其对偶问题是:

$$\begin{aligned} \max \quad & b_1 w_1 + \cdots + b_k w_k + \cdots + (b_r + \mu b_k) w_r + \cdots + b_m w_m \\ \text{s. t.} \quad & w_1 A_1 + \cdots + w_k A_k + \cdots + w_r (A_r + \mu A_k) + \cdots + w_m A_m \leq c. \end{aligned}$$

显然,  $w = (w_1^{(0)}, \dots, w_k^{(0)} - \mu w_r^{(0)}, \dots, w_r^{(0)}, \dots, w_m^{(0)})$  是可行解, 且在此点处对偶问题的目标函数值等于原问题的最优值, 因此是对偶问题的最优解.

#### 6. 考虑线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

其中  $A$  是  $m$  阶对称矩阵,  $c^T = b$ . 证明若  $x^{(0)}$  是上述问题的可行解, 则它也是最优解.

证 对偶问题是

$$\begin{aligned} \max \quad & wb \\ \text{s. t.} \quad & wA \leq c. \end{aligned}$$

显然,  $w = x^{(0)T}$  是对偶问题的可行解, 且在此点处对偶问题的目标函数值等于原问题在  $x^{(0)}$  点处的函数值. 因此  $x^{(0)}$  是最优解.

#### 7. 用对偶单纯形法解下列问题:

- (1)  $\min 4x_1 + 6x_2 + 18x_3$   
s. t.  $x_1 + 3x_3 \geq 3$ ,  
 $x_2 + 2x_3 \geq 5$ ,  
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ .
- (2)  $\max -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 8x_4$   
s. t.  $-2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3$ ,  
 $x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 \geq 8$ ,  
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$ .
- (3)  $\max x_1 + x_2$   
s. t.  $x_1 - x_2 - x_3 = 1$ ,  
 $-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1$ ,  
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ .
- (4)  $\max -4x_1 + 3x_2$   
s. t.  $4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 32$ ,  
 $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 14$ ,  
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$ .
- (5)  $\min 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5$   
s. t.  $-x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 + x_6 + x_8 = 1$ ,  
 $x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 + x_8 = 4$ ,  
 $-2x_3 + 3x_4 - 3x_5 + x_7 + x_8 = 2$ ,  
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 8$ .

解 (1) 引进松弛变量  $x_4, x_5$ , 化成标准形式, 并给定初始对偶可行的基本解:

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 + 6x_2 + 18x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 - 3x_3 + x_4 = -3, \\ & -x_2 - 2x_3 + x_5 = -5, \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

用表格形式计算如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_4$	-1	0	-3	1	0	-3
$x_5$	0	-1	-2	0	1	-5
	-4	-6	-18	0	0	0
$x_4$	-1	0	-3	1	0	-3
$x_2$	0	1	2	0	-1	5
	-4	0	-6	0	-6	30
$x_3$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
$x_2$	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	-1	3
	-2	0	0	-2	-6	36

最优解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 3, 1)$ , 最优值  $f_{\min} = 36$ .

(2) 引进松弛变量  $x_5, x_6$ , 给定初始对偶可行的基本解. 问题化成

$$\begin{aligned} \max \quad & -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 8x_4 \\ \text{s. t.} \quad & -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 = 3, \\ & -x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 + x_6 = -8, \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned}$$

用表格形式计算如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_5$	-2	5	3	-5	1	0	3
$x_6$	-1	-2	-5	-6	0	1	-8
	3	2	4	8	0	0	0
$x_5$	$-\frac{13}{5}$	$\frac{19}{5}$	0	$-\frac{43}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{9}{5}$
$x_3$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{6}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
	$\frac{11}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{16}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{32}{5}$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	$\frac{13}{43}$	$-\frac{19}{43}$	0	1	$-\frac{5}{43}$	$-\frac{3}{43}$	$\frac{9}{43}$
$x_3$	$\frac{7}{43}$	$\frac{40}{43}$	1	0	$\frac{6}{43}$	$-\frac{5}{43}$	$\frac{58}{43}$
	$\frac{53}{43}$	$\frac{78}{43}$	0	0	$\frac{16}{43}$	$\frac{44}{43}$	$-\frac{304}{43}$

最优解  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, \frac{58}{43}, \frac{9}{43})$ , 最优值  $f_{\max} = -\frac{304}{43}$ .

(3) 先给定一个基本解, 为此将线性规划化作

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ & -x_3 + x_4 = -2, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

构造扩充问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ & -x_3 + x_4 = -2, \\ & x_2 + x_3 + x_5 = M, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

其中  $M > 0$ , 很大.

用表格形式求解扩充问题:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_1$	1	-1	-1	0	0	1
$x_4$	0	0	-1	1	0	-2
$x_5$	0	①	1	0	1	M
	0	-2	-1	0	0	1
$x_1$	1	0	0	0	1	M+1
$x_4$	0	0	⊖1	1	0	-2
$x_2$	0	1	1	0	1	M
	0	0	1	0	2	2M+1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_1$	1	0	0	0	1	M+1
$x_3$	0	0	1	-1	0	2
$x_2$	0	1	0	1	1	M-2
	0	0	0	1	2	2M-1

扩充问题的最优解是  $(M+1, M-2, 2, 0, 0)$ , 最优值为  $2M-1$ . 显然, 原来线性规划无上界.

(4) 先给出一个基本解, 为此将线性规划写作:

$$\begin{aligned} \max \quad & -4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ & -3x_1 - 2x_2 + x_4 = -23, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

构造扩充问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & -4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ & -3x_1 - 2x_2 + x_4 = -23, \\ & x_1 + x_2 + x_5 = M, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

其中  $M > 0$ , 很大.

用表格形式求解过程如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	1	1	1	0	0	9
$x_4$	-3	-2	0	1	0	-23
$x_5$	1	①	0	0	1	M
	4	-3	0	0	0	0
$x_3$	0	0	1	0	⊖1	9-M
$x_4$	-1	0	0	1	2	2M-23
$x_2$	1	1	0	0	1	M
	7	0	0	0	3	3M



	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_5$	0	0	-1	0	1	$M-9$
$x_4$	-1	0	2	1	0	-5
$x_2$	1	1	1	0	0	9
	7	0	3	0	0	27

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_5$	0	0	-1	0	1	$M-9$
$x_1$	1	0	-2	-1	0	5
$x_2$	0	1	3	1	0	4
	0	0	17	7	0	-8

扩充问题的最优解为 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (5, 4, 0, 0, M-9)$ , 最优值为-8.

原来问题的最优解:  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5, 4, 0, 0)$ , 最优值  $f_{\max} = -8$ .

(5) 先求一个基本解, 将线性规划化成

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 \\
 \text{s. t.} \quad & -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = -3, \\
 & x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 + x_8 = 4, \\
 & -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_7 = -2, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 8.
 \end{aligned}$$

用表格形式求解如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	
$x_6$	-2	1	1	1	-1	1	0	0	-3
$x_8$	1	1	-3	2	-2	0	0	1	4
$x_7$	-1	-1	1	1	-1	0	1	0	-2
	-4	-3	-5	-1	-2	0	0	0	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	
$x_5$	2	-1	-1	-1	1	-1	0	0	3
$x_8$	5	-1	-5	0	0	-2	0	1	10
$x_7$	1	-2	0	0	0	-1	1	0	1
	0	-5	-7	-3	0	-2	0	0	6

最优解为 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (0, 0, 0, 0, 3, 0, 1, 10)$ , 最优解  $f_{\min} = 6$ .

8. 用原始-对偶算法解下列问题:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \max \quad -x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 - 6x_5 \\
 & \text{s. t.} \quad -5x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 6, \\
 & \quad \quad 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 - x_7 = 3, \\
 & \quad \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 7. \\
 (2) \quad & \min \quad 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 9x_5 + x_6 \\
 & \text{s. t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\
 & \quad \quad x_4 + x_5 + x_6 = 8, \\
 & \quad \quad x_1 + x_3 + x_5 = 12, \\
 & \quad \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6.
 \end{aligned}$$

解 (1) 对偶问题是

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 6w_1 + 3w_2 \\
 \text{s. t.} \quad & -5w_1 + 2w_2 \geq -1, \\
 & 2w_1 + w_2 \geq -3, \\
 & 6w_1 + w_2 \geq -7, \\
 & -w_1 + w_2 \geq -4, \\
 & w_1 + 2w_2 \geq -6, \\
 & -w_1 \geq 0, \\
 & -w_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

显然,  $w^{(0)} = (0, 0)$  是对偶问题的一个可行解. 在  $w^{(0)}$  起作用的约束指标集为  $Q = \{6, 7\}$ .

一阶段问题为

$$\begin{aligned}
 \min \quad & y_1 + y_2 \\
 \text{s. t.} \quad & -5x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + y_1 = 6, \\
 & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 - x_7 + y_2 = 3,
 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 7,$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

列表如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{x}_6$	$\hat{x}_7$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	
$y_1$	-5	2	6	-1	1	-1	0	1	0	6
$y_2$	2	1	1	1	2	0	-1	0	1	3
	-3	3	7	0	3	-1	-1	0	0	9
	1	3	7	4	6	0	0			0

表的最后一行是在  $w^{(0)} = (0, 0)$  处对偶约束函数值  $w^{(0)} p_j - c_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 7$ ) 及对偶目标函数值 0. 表格上端用符号“△”标出限定原始问题包含的变量.

限定原始问题已经达到最优, 最优值  $9 > 0$ . 修改对偶问题的可行解, 令

$$\theta = \max \left\{ \frac{-(w^{(0)} p_j - c_j)}{v^{(0)} p_j} \mid v^{(0)} p_j > 0 \right\} = \max \left\{ \frac{-3}{3}, \frac{-7}{7}, \frac{-6}{3} \right\} = -1,$$

把第 3 行的  $\theta$  倍加到第 4 行. 然后, 解新的限定原始问题:

	$x_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	
$y_1$	-5	2	⑥	-1	1	-1	0	1	0	6
$y_2$	2	1	1	1	2	0	-1	0	1	3
	-3	3	7	0	3	-1	-1	0	0	9
	4	0	0	4	3	1	1			-9

	$x_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	
$x_3$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	1
$y_2$	$\frac{17}{6}$	② $\frac{2}{3}$	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{1}{6}$	-1	$-\frac{1}{6}$	1	2
	$\frac{17}{6}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{1}{6}$	-1	$-\frac{7}{6}$	0	2
	4	0	0	4	3	1	1			-9

	$x_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	
$x_3$	$-\frac{9}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0
$x_2$	$\frac{17}{4}$	1	0	$\frac{7}{4}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	3
	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
	4	0	0	4	3	1	1			-9

原问题的最优解和最优值如下:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 3, 0, 0, 0, 0, 0), \quad f_{\max} = -9.$$

(2) 对偶问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & 15w_1 + 8w_2 + 12w_3 \\ \text{s. t.} \quad & w_1 + w_3 \leq 5, \\ & w_1 \leq 2, \\ & w_1 + w_3 \leq 3, \\ & w_2 \leq 7, \\ & w_2 + w_3 \leq 9, \\ & w_2 \leq 1. \end{aligned}$$

取对偶问题的一个可行解, 令  $(w_1, w_2, w_3) = (1, 1, 1)$ , 对偶问题起作用约束指标集  $Q = \{6\}$ .

一阶段问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + y_2 + y_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 15, \\ & x_4 + x_5 + x_6 + y_2 = 8, \\ & x_1 + x_3 + x_5 + y_3 = 12, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

下面用表格形式求解. 顶上有标识符号“△”的变量属于限定原始问题. 表中最后一行是对偶约束函数值  $w p_j - c_j$  和对偶目标函数值  $w b$ . 求解过程如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{x}_6$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\hat{y}_3$	
$y_1$	1	1	1	0	0	0	1	0	0	15
$y_2$	0	0	0	1	1	①	0	1	0	8
$y_3$	1	0	1	0	1	0	0	0	1	12
	2	1	2	1	2	1	0	0	0	35
	-3	-1	-1	-6	-7	0				35

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{x}_6$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\hat{y}_3$	
$y_1$	1	1	1	0	0	0	1	0	0	15
$x_6$	0	0	0	1	1	1	0	1	0	8
$y_3$	1	0	1	0	1	0	0	0	1	12
	2	1	2	0	1	0	0	-1	0	27
	-3	-1	-1	-6	-7	0				35

限定原始问题已达到最优解, 求最小比值  $\theta$ :

$$\theta = \min \left\{ \frac{-(-3)}{2}, \frac{-(-1)}{1}, \frac{-(-1)}{2}, \frac{-(-7)}{1} \right\} = \frac{1}{2}.$$

修改对偶问题的可行解, 然后解限定原始问题:

	$x_1$	$x_2$	$\hat{x}_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{x}_6$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\hat{y}_3$	
$y_1$	1	1	1	0	0	0	1	0	0	15
$x_6$	0	0	0	1	1	1	0	1	0	8
$y_3$	1	0	①	0	1	0	0	0	1	12
	2	1	2	0	1	0	0	-1	0	27
	-2	$-\frac{1}{2}$	0	-6	$-\frac{13}{2}$	0				$\frac{97}{2}$

	$x_1$	$x_2$	$\hat{x}_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{x}_6$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\hat{y}_3$	
$y_1$	0	1	0	0	-1	0	1	0	-1	3
$x_6$	0	0	0	1	1	1	0	1	0	8
$x_3$	1	0	1	0	1	0	0	0	1	12
	0	1	0	0	-1	0	0	-1	-2	3
	-2	$-\frac{1}{2}$	0	-6	$-\frac{13}{2}$	0				$\frac{97}{2}$

限定原始问题达到最优, 计算  $\theta$ :

$$\theta = \min \left\{ \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1} \right\} = \frac{1}{2}.$$

修改对偶问题的可行解, 继续解限定原始问题:

	$x_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{x}_6$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\hat{y}_3$	
$y_1$	0	①	0	0	-1	0	1	0	-1	3
$x_6$	0	0	0	1	1	1	0	1	0	8
$x_3$	1	0	1	0	1	0	0	0	1	12
	0	1	0	0	-1	0	0	-1	-2	3
	-2	0	0	-6	-7	0				50

	$x_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{x}_6$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\hat{y}_3$	
$x_2$	0	1	0	0	-1	0	1	0	-1	3
$x_6$	0	0	0	1	1	1	0	1	0	8
$x_3$	1	0	1	0	1	0	0	0	1	12
	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
	-2	0	0	-6	-7	0				50

原问题最优解和最优值如下:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 3, 12, 0, 0, 8), \quad f_{\min} = 50.$$

9. 给定下列线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ & x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 4, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

它的最优单纯形表如下表:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$x_1$	1	3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$
	0	-6	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{26}{3}$

(1) 若右端向量  $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$  改为  $b' = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ , 原来的最优基是否还为最优基? 利用原来的最优表求新问题的最优解.

(2) 若目标函数中  $x_1$  的系数由  $c_1 = -2$  改为  $c'_1$ , 那么  $c'_1$  在什么范围内时原来的最优解也是新问题的最优解?

解 (1) 先计算改变后的右端列向量

$$\bar{b}' = B^{-1}b' = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}, \quad c_B \bar{b}' = (1, -2) \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix} = -\frac{22}{3}.$$

右端向量  $b$  改为  $b'$  后, 原来的最优基已不是可行基, 对应各变量的判别数不变. 下面用对偶单纯形法求最优解:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$x_1$	1	3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$
	0	-6	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{22}{3}$
$x_5$	0	3	-3	-1	1	2
$x_1$	1	1	2	1	0	2
	0	-1	-5	-2	0	-4

新问题的最优解  $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 0)$ , 最优值  $f_{\min} = -4$ .

(2)  $c_1$  改为  $c'_1$  后, 令对应各变量的判别数

$$\begin{cases} z'_1 - c'_1 = 0, \\ z'_2 - c'_2 = -6 + 3(c'_1 + 2) \leq 0, \\ z'_3 - c'_3 = 0 + 0(c'_1 + 2) \leq 0, \\ z'_4 - c'_4 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(c'_1 + 2) \leq 0, \\ z'_5 - c'_5 = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}(c'_1 + 2) \leq 0. \end{cases}$$

解得  $c'_1 \leq -1$ . 因此, 当  $c'_1 \leq -1$  时原来的最优解也是新问题的最优解.

10. 考虑下列线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & -5x_1 + 5x_2 + 13x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20, \\ & 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 90, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

先用单纯形方法求出上述问题的最优解, 然后对原来问题分别进行下列改变, 试用原来问题的最优表求新问题的最优解:

(1) 目标函数中  $x_3$  的系数  $c_3$  由 13 改变为 8.

(2)  $b_1$  由 20 改变为 30.

(3)  $b_2$  由 90 改变为 70.

(4)  $A$  的列  $\begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix}$  改变为  $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ .

(5) 增加约束条件  $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$ .

解 先引入松弛变量  $x_4, x_5$ , 化成标准形式:

$$\begin{aligned} \max \quad & -5x_1 + 5x_2 + 13x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 20, \\ & 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 + x_5 = 90, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

用单纯形方法求最优解, 过程如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_4$	-1	①	3	1	0	20
$x_5$	12	4	10	0	1	90
	5	-5	-13	0	0	0
$x_2$	-1	1	3	1	0	20
$x_5$	16	0	-2	-4	1	10
	0	0	2	5	0	100

最优解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 20, 0)$ , 最优值  $f_{\max} = 100$ .

(1) 非基变量  $x_3$  的目标系数  $c_3$  由 13 改变为 8 后, 对应  $x_3$  的判别数

$$z'_3 - c'_3 = (z_3 - c_3) + (c_3 - c'_3) = 2 + (13 - 8) = 7 > 0.$$

最优解不变, 仍为  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 20, 0)$ ,  $f_{\max} = 100$ .

(2)  $b_1$  由 20 改变为 30 后, 原来最优单纯形表的右端向量变为

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

用对偶单纯形方法计算如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_2$	-1	1	3	1	0	30
$x_5$	16	0	-2	-4	1	-30
	0	0	2	5	0	150
$x_2$	23	1	0	-5	$\frac{3}{2}$	-15
$x_3$	-8	0	1	2	$-\frac{1}{2}$	15
	16	0	0	1	1	120
$x_4$	$-\frac{23}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{3}{10}$	3
$x_3$	$\frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	9
	$\frac{103}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{13}{10}$	117

最优解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 9)$ , 最优值  $f_{\max} = 117$ .

(3)  $b_2$  由 90 改变为 70 后, 原来最优表的右端向量变为

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

用对偶单纯形法求解如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_2$	-1	1	3	1	0	20
$x_5$	16	0	-2	-4	1	-10
	0	0	2	5	0	100
$x_2$	23	1	0	-5	$\frac{3}{2}$	5
$x_3$	-8	0	1	2	$-\frac{1}{2}$	5
	16	0	0	1	1	90

最优解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 5, 5)$ , 最优值  $f_{\max} = 90$ .

(4) 约束矩阵  $A$  的列  $\begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix}$  改为  $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$  后, 对应  $x_1$  的判别数

$$z_1 - c_1 = c_B B^{-1} p_1 - c_1 = (5, 0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} - (-5) = 5 > 0.$$

最优解仍为  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 20, 0)$ ,  $f_{\max} = 100$ .

(5) 增加约束条件  $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$  后, 原来的最优解不满足这个约束条件, 修改原来的最优表, 将新增加约束的系数置于最后一行:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_2$	-1	1	3	1	0	0	20
$x_5$	16	0	-2	-4	1	0	10
$x_6$	2	3	5	0	0	1	50
	0	0	2	5	0	0	100

将第 1 行的  $(-3)$  倍加到第 3 行, 把对应  $x_2$  的列化成单位向量, 然后用对偶单纯形法求解:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_2$	-1	1	3	1	0	0	20
$x_5$	16	0	-2	-4	1	0	10
$x_6$	5	0	-4	-3	0	1	-10
	0	0	2	5	0	0	100
$x_2$	$\frac{11}{4}$	1	0	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{25}{2}$
$x_5$	$\frac{27}{2}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	15
$x_3$	$-\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$
	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	95

最优解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, \frac{25}{2}, \frac{5}{2})$ ,  $f_{\max} = 95$ .

11. 考虑下列问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 9, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

(1) 用单纯形方法求出最优解.

(2) 假设费用系数向量  $c = (-1, 1, -2)$  改为  $(-1, 1, -2) + \lambda(2, 1, 1)$ ,  $\lambda$  是实参数, 对  $\lambda$  的所有值求出问题的最优解.

解 (1) 将所求问题化为标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 9, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

用单纯形方法求解:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_4$	1	1	1	1	0	6
$x_5$	-1	2	3	0	1	9
	1	-1	2	0	0	0
$x_4$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	3
$x_3$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	3
	$\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	-6
$x_1$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
$x_3$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{4}$
	0	$-\frac{11}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{39}{4}$

最优解  $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{9}{4}, 0, \frac{15}{4})$ ,  $f_{\min} = -\frac{39}{4}$ .

(2) 目标系数摄动后, 问题改变为

$$\begin{aligned} \min \quad & (-1 + 2\lambda)x_1 + (1 + \lambda)x_2 + (-2 + \lambda)x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

判别数行改变为  $(c_B B^{-1} A - c) + (c'_B B^{-1} A - c')\lambda$ , 其中  $A$  是约束矩阵, 按此式修改原来的最优表, 得到表 1:

表 1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_1$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
$x_3$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{4}$
	0	$-\frac{11}{4} + \frac{1}{4}\lambda$	0	$-\frac{5}{4} + \frac{7}{4}\lambda$	$-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\lambda$	$-\frac{39}{4} + \frac{33}{4}\lambda$

令

$$\begin{cases} -\frac{11}{4} + \frac{1}{4}\lambda \leq 0, \\ -\frac{5}{4} + \frac{7}{4}\lambda \leq 0, \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\lambda \leq 0, \end{cases}$$

解得  $-1 \leq \lambda \leq \frac{5}{7}$ . 当  $\lambda \in [-1, \frac{5}{7}]$  时, 最优解不变. 最优解为  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{9}{4}, 0, \frac{15}{4}, 0, 0)$ , 最优值  $f^*(\lambda) = -\frac{39}{4} + \frac{33}{4}\lambda$ .

当  $\lambda > \frac{5}{7}$  时, 表 1 不再是最优表,  $x_4$  进基, 得到表 2:

表 2

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_4$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	3
$x_3$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	3
	$\frac{5}{3} - \frac{7}{3}\lambda$	$-\frac{7}{3} - \frac{1}{3}\lambda$	0	0	$-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\lambda$	$-6 + 3\lambda$

当  $\lambda \in [\frac{5}{7}, 2]$  时, 最优解  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 3, 3, 0)$ , 最优值  $f^*(\lambda) = -6 + 3\lambda$ .

当  $\lambda > 2$  时,  $x_5$  进基, 得到表 3:

表 3

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_4$	1	1	1	1	0	6
$x_5$	-1	2	3	0	1	9
	$1-2\lambda$	$-1-\lambda$	$2-\lambda$	0	0	0

当  $\lambda \in [2, +\infty)$  时, 最优解  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 6, 9)$ , 最优值  $f^*(\lambda) = 0$ .

当  $\lambda < -1$  时, 表 1 不再是最优表,  $x_5$  进基, 修改表 1, 得到表 4:

表 4

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_1$	1	1	1	1	0	6
$x_5$	0	3	4	1	1	15
	0	$-2+\lambda$	$1+\lambda$	$-1+2\lambda$	0	$-6+12\lambda$

令

$$\begin{cases} -2+\lambda \leq 0, \\ 1+\lambda \leq 0, \\ -1+2\lambda \leq 0, \end{cases}$$

当  $\lambda \in (-\infty, -1]$  时, 最优解  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (6, 0, 0, 0, 15)$ , 最优值  $f^*(\lambda) = -6+12\lambda$ .

12. 考虑下列问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 6, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(1) 用单纯形方法求出最优解.

(2) 将约束右端  $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$  改变为  $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\lambda \geq 0$ , 求含参数线性规划的最优解.

解 (1) 将所求问题化为标准形式, 用单纯形方法求解:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_3$	1	1	1	0	6
$x_4$	-1	2	0	1	6
	1	3	0	0	0
$x_3$	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	3
$x_2$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	3
	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	-9
$x_1$	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
$x_2$	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-14

最优解  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 4, 0, 0)$ , 最优值  $f_{\min} = -14$ .

(2) 将含参数线性规划化为标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 6 - \lambda, \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 + \lambda, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

修改问题(1)中的最优表:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b + \lambda B^{-1}b' = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda \\ 4 \end{bmatrix},$$

$f(\lambda) = c_B x_B = -14 + \lambda$ . 在现行基下, 参数规划的单纯形表如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$2-\lambda$
$x_2$	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-14+\lambda$

当  $\lambda \in [0, 2]$  时, 最优解  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2 - \lambda, 4, 0, 0)$ , 最优值  $f^*(\lambda) = -14 + \lambda$ .

当  $\lambda > 2$  时,  $2 - \lambda < 0$ , 用对偶单纯形法, 得下表:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_4$	-3	0	-2	1	$-6 + 3\lambda$
$x_2$	1	1	1	0	$6 - \lambda$
	-2	0	-3	0	$-18 + 3\lambda$

当  $\lambda \in [2, 6]$  时, 最优解  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 6 - \lambda, 0, -6 + 3\lambda)$ , 最优值  $f^*(\lambda) = -18 + 3\lambda$ .

当  $\lambda > 6$  时, 无可行解.

## 第5章

### 运输问题题解

1. 设一运输问题具有 3 个产地  $A_i$ , 3 个销地  $B_j$ ,  $A_i$  供给  $B_j$  的货物量为  $x_{ij}$ , 问下列每一组变量可否作为一组基变量?

- (1)  $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{33}$ ;
- (2)  $x_{12}, x_{13}, x_{22}, x_{23}, x_{31}$ ;
- (3)  $x_{13}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{33}$ ;
- (4)  $x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{31}, x_{32}, x_{33}$ ;
- (5)  $x_{11}, x_{14}, x_{22}, x_{33}$ .

解 (1) 可作为一组基变量;

(2) 含闭回路, 不能作为一组基变量;

(3) 可作为一组基变量;

(4) 变量个数大于 5, 必含闭回路, 不能作为一组基变量;

(5) 变量个数小于 5, 不能作为一组基变量.

2. 设有运输问题如下表:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	8	7	5	4	8
$A_2$	6	3	5	9	6
$A_3$	10	9	7	8	7
$b_j$	5	4	6	6	

(1) 用西北角法求一基本可行解;

(2) 用最小元素法求一基本可行解;



(3) 分别计算出在两个基本可行解下的目标函数值。

解 (1) 用西北角法, 计算结果如下表:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	8 5	7 3	5 /	4 /	8, 3, 0
$A_2$	6 /	3 1	5 5	9 /	6, 5, 0
$A_3$	10 /	9 /	7 1	8 6	7, 6, 0
$b_j$	5 0	4 1 0	6 1 0	6 0	

基本可行解中, 基变量取值为

$$(x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}) = (5, 3, 1, 5, 1, 6),$$

其余变量为非基变量, 取值为 0. 目标函数值

$$f = 8 \times 5 + 7 \times 3 + 3 \times 1 + 5 \times 5 + 7 \times 1 + 8 \times 6 = 144.$$

(2) 用最小元素法, 计算结果如下:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	8 /	7 /	5 2	4 6	8, 2, 0
$A_2$	6 /	3 4	5 2	9 /	6, 2, 0
$A_3$	10 5	9 /	7 2	8 /	7, 5, 0
$b_j$	5 0	4 0	6 4 2 0	6 0	

基本可行解中, 基变量取值为

$$(x_{13}, x_{14}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{33}) = (2, 6, 4, 2, 5, 2).$$

目标函数值

$$f = 5 \times 2 + 4 \times 6 + 3 \times 4 + 5 \times 2 + 10 \times 5 + 7 \times 2 = 120.$$

3. 考虑对应下表的运输问题:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	4	5	6	5	20
$A_2$	7	10	5	6	20
$A_3$	8	9	12	7	50
$b_j$	15	25	20	30	

(1) 用西北角法求一初始基本可行解;

(2) 由(1)中求得的基本可行解出发, 用表上作业法求最优解, 使总运输费用最小.

解 (1) 用西北角法求得初始基本可行解如下表所示:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	4 15	5 5	6 /	5 /	20, 5, 0
$A_2$	7 /	10 20	5 /	6 /	20, 0
$A_3$	8 /	9 0	12 20	7 30	50, 30, 0
$b_j$	15 0	25 20 0	20 0	30 0	

(2) 下面用表上作业法求最优解, 求解过程如下:

先计算对偶变量  $w_i, v_j$  和判别数  $z_{ij} - c_{ij}$ , 判别数列于每个方格的左下角:

	$v_j$	4	5	8	3	
$w_i$		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
0	$A_1$	4 15	5	6 2	5 -2	20
5	$A_2$	7 2	10 20	5 8	6 2	20
4	$A_3$	8 0	9 0	12 20	7 30	50
	$b_j$	15	25	20	30	

取进基变量  $x_{23}$ , 构成闭回路  $x_{23}, x_{33}, x_{32}, x_{22}$ , 令

$$\begin{cases} x_{23} = \theta \geq 0, \\ x_{33} = 20 - \theta \geq 0, \\ x_{32} = 0 + \theta \geq 0, \\ x_{22} = 20 - \theta \geq 0. \end{cases}$$

求得  $\theta$  的最大取值,  $\theta=20$ . 新的基本可行解如下表所示:

	$v_j$	4	5	8	3	
$w_i$		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
0	$A_1$	4 15	5	6 2	5 -2	20
-3	$A_2$	7 -6	10 -8	5 20	6 -6	20
4	$A_3$	8 0	9 20	12 0	7 30	50
	$b_j$	15	25	20	30	

取进基变量  $x_{13}$ , 构成闭回路  $x_{13}, x_{33}, x_{32}, x_{12}$ , 调整量  $\theta=0$ , 新的基本可行解如下表所示:

	$v_j$	4	5	6	3	
$w_i$		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
0	$A_1$	4 15	5	6 0	5 -2	20
-1	$A_2$	7 -4	10 -6	5 20	6 -4	20
4	$A_3$	8 0	9 20	12 -2	7 30	50
	$b_j$	15	25	20	30	

已经达到最优解, 最优解为

$$(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{32}, x_{34}) = (15, 5, 0, 20, 20, 30),$$

其余  $x_{ij}=0$ . 最优值

$$f = 4 \times 15 + 5 \times 5 + 6 \times 0 + 5 \times 20 + 9 \times 20 + 7 \times 30 = 575.$$

4. 设有 3 个产地 4 个销地的运输问题, 产量  $a_i$ , 销量  $b_j$  及单位运价  $c_{ij}$  的数值如下表:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	6	4	3	7	9
$A_2$	9	8	10	5	12
$A_3$	4	7	6	10	14
$b_j$	8	9	10	11	

(1) 转化成产销平衡运输问题;

(2) 用西北角法求一基本可行解, 并由此出发求最优解, 使总运输费用最小;

(3) 用最小元素法求一基本可行解, 进而求出最优解, 使总运输费用最小.

解 (1)  $\sum_{i=1}^3 a_i = 35$ ,  $\sum_{j=1}^4 b_j = 38$ , 销量大于产量. 引进虚拟产地  $A_4$ , 虚拟产量  $a_4 = 38 - 35 = 3$ , 虚拟单位运价  $c_{4j} = 0, j=1, 2, 3, 4$ . 然后再用表上作业法求解产销平衡运输问题.

(2) 先用西北角法求出一个基本可行解, 计算结果如下表:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	8	1			9, 1, 0
$A_2$		8	4		12, 4, 0
$A_3$			6	8	14, 8, 0
$A_4$				3	3, 0
$b_j$	8	9	10	11	
	0	8	6	3	
		0	0	0	

求得的基本可行解中, 基变量取值

$$(x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}, x_{44}) = (8, 1, 8, 4, 6, 8, 3),$$

其余为非基变量, 取值均为 0.

再由求得的基本可行解出发, 求最优解, 求解过程如下.

先计算对偶变量  $w_i, v_j$  和判别数  $z_{ij} - c_{ij}$ , 计算结果列于下表, 其中对应基变量的判别数均为 0, 对应非基变量的判别数置于每个方格的左下角.

	$v_j$	6	4	6	10	
$w_i$		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
0	$A_1$	6 8	4 1	3 3	7 3	9
4	$A_2$	9 1	8 8	10 4	5 9	12
0	$A_3$	4 2	7 -3	6 6	10 8	14
-10	$A_4$	0 -4	0 -6	0 -4	0 3	3
	$b_j$	8	9	10	11	

取进基变量  $x_{24}$ , 构成闭回路  $x_{24}, x_{34}, x_{33}, x_{23}$ . 令

$$\begin{cases} x_{24} = \theta \geq 0, \\ x_{34} = 8 - \theta \geq 0, \\ x_{33} = 6 + \theta \geq 0, \\ x_{23} = 4 - \theta \geq 0, \end{cases}$$

取  $\theta=4$ , 修改运输表, 给出新的基本可行解, 并计算对偶变量  $w_i, v_j$  和判别数  $z_{ij} - c_{ij}$ , 计算结果置于下表:

	$v_j$	6		4		-3		1		
$w_i$		$B_1$		$B_2$		$B_3$		$B_4$		$a_i$
0	$A_1$	6		4		3		7		9
		8		1		-6		-6		
4	$A_2$	9		8		10		5		12
		1		8		-9		4		
9	$A_3$	4		7		6		10		14
		11		6		10		4		
-1	$A_4$	0		0		0		0		3
		5		3		-4		3		
	$b_j$	8		9		10		11		

取进基变量  $x_{31}$ , 构成闭回路  $x_{31}, x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{24}, x_{34}$ . 令

$$\begin{cases} x_{31} = \theta \geq 0, \\ x_{11} = 8 - \theta \geq 0, \\ x_{12} = 1 + \theta \geq 0, \\ x_{22} = 8 - \theta \geq 0, \\ x_{24} = 4 + \theta \geq 0, \\ x_{34} = 4 - \theta \geq 0, \end{cases}$$

取  $\theta=4$ , 得到新的基本可行解. 计算出相应的对偶变量  $w_i, v_j$  和判别数  $z_{ij} - c_{ij}$ , 计算结果置于下表:

	$v_j$	6	4	8	1	
$w_i$		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
0	$A_1$	6 4	4 5	3 5	7 -6	9
4	$A_2$	9 1	8 4	10 2	5 8	12
-2	$A_3$	4 4	7 -5	6 10	10 -11	14
-1	$A_4$	0 5	0 3	0 7	0 3	3
	$b_j$	8	9	10	11	

取进基变量  $x_{13}$ , 构成闭回路  $x_{13}, x_{33}, x_{31}, x_{11}$ . 令

$$\begin{cases} x_{13} = \theta \geq 0, \\ x_{33} = 10 - \theta \geq 0, \\ x_{31} = 4 + \theta \geq 0, \\ x_{11} = 4 - \theta \geq 0, \end{cases}$$

取  $\theta=4$ , 得到新的基本可行解. 计算相应的  $w_i, v_j, z_{ij} - c_{ij}$  置于下表:

	$v_j$	1	4	3	1	
$w_i$		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
0	$A_1$	6 -5	4 5	3 4	7 -6	9
4	$A_2$	9 -4	8 4	10 -3	5 8	12
3	$A_3$	4 8	7 0	6 6	10 -6	14
-1	$A_4$	0 0	0 3	0 2	0 3	3
	$b_j$	8	9	10	11	

取进基变量  $x_{42}$ , 构成闭回路  $x_{42}, x_{22}, x_{24}, x_{44}$ . 令

$$\begin{cases} x_{42} = \theta \geq 0, \\ x_{22} = 4 - \theta \geq 0, \\ x_{24} = 8 + \theta \geq 0, \\ x_{44} = 3 - \theta \geq 0, \end{cases}$$

取  $\theta=3$ , 得到新的基本可行解及相应的  $w_i, v_j, z_{ij} - c_{ij}$  置于下表:

	$v_j$	1	4	3	1	
$w_i$		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
0	$A_1$	6 -5	4 5	3 4	7 -6	9
4	$A_2$	9 -4	8 1	10 -3	5 11	12
3	$A_3$	4 8	7 0	6 6	10 -6	14
-4	$A_4$	0 -3	0 3	0 -1	0 -3	3
	$b_j$	8	9	10	11	

判别数均非正, 已经达到最优解. 最优解中基变量取值

$$(x_{12}, x_{13}, x_{22}, x_{24}, x_{31}, x_{33}) = (5, 4, 1, 11, 8, 6),$$

其余非虚拟变量  $x_{ij}=0$ . 最优值

$$f = 4 \times 5 + 3 \times 4 + 8 \times 1 + 5 \times 11 + 4 \times 8 + 6 \times 6 = 163.$$

用户  $B_2$  的需求量没有得到满足, 缺量为 3.

(3) 先用最小元素法求一个基本可行解, 计算结果如下表:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	6 /	4 /	3 9	7 /	9, 0
$A_2$	9 /	8 1	10 /	5 11	12, 1, 0
$A_3$	4 8	7 5	6 1	10 /	14, 6, 5, 0
$A_4$	0 /	0 3	0 /	0 /	3, 0
$b_j$	8 0	9 4 3 0	10 1 0	11 0	

用最小元素法求得一个基本可行解, 其中基变量的取值是

$$(x_{13}, x_{22}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{42}) = (9, 1, 11, 8, 5, 1, 3),$$

其余为非基变量, 取值均为零. 目标函数值为

$$f = 3 \times 9 + 8 \times 1 + 5 \times 11 + 4 \times 8 + 7 \times 5 + 6 \times 1 + 0 \times 3 = 163.$$

由于目标函数已经达到最优值, 因此上述基本可行解已经是最优解.

## 第7章

### 最优性条件题解

#### 1. 给定函数

$$f(x) = \frac{x_1 + x_2}{3 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2},$$

求  $f(x)$  的极小点.

解 令

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{3 - x_1^2 - 2x_1 x_2}{(3 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)^2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{3 - x_2^2 - 2x_1 x_2}{(3 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)^2} = 0, \end{cases}$$

得到驻点

$$x^{(1)} = (1, 1), \quad x^{(2)} = (-1, -1).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{-18x_1 - 12x_2 + 2x_1^3 - 2x_2^3 + 6x_1^2 x_2}{(3 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{-12x_1 - 18x_2 - 2x_1^3 + 2x_2^3 + 6x_1 x_2^2}{(3 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{-12x_1 - 12x_2 + 6x_1^2 x_2 + 6x_1 x_2^2}{(3 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)^3},$$

$$\nabla^2 f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

由于  $\nabla^2 f(x^{(1)})$  为负定矩阵,  $\nabla^2 f(x^{(2)})$  为正定矩阵, 因此  $f(x)$  的极小点是  $x^{(2)} = (-1, -1)$ .

#### 2. 考虑非线性规划问题

$$\min \quad (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$\text{s. t.} \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 5,$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

检验  $\bar{x} = (2, 1)^T$  是否为 K-T 点.

解 非线性规划写作

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1^2 - x_2^2 + 5 \geq 0, \\ & x_1 + 2x_2 - 4 = 0, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

在点  $\bar{x}$ , 目标函数的梯度为  $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ , 前两个约束是起作用约束, 梯度分别是  $\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ . K-T 条件如下:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} - w \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} - v \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{即} \begin{cases} 4w - v - 2 = 0, \\ 2w - 2v - 2 = 0, \end{cases}$$

解得  $w = \frac{1}{3}, v = -\frac{2}{3}, w \geq 0$ , 因此  $\bar{x} = (2, 1)^T$  是 K-T 点.

3. 考虑下列非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 4 - x_1 - x_2 \geq 0, \\ & x_2 + 7 \geq 0, \\ & -(x_1 - 3)^2 + x_2 + 1 \geq 0. \end{aligned}$$

求满足 K-T 必要条件的点.

解 目标函数  $f(x) = 4x_1 - 3x_2$ , 约束函数  $g_1(x) = 4 - x_1 - x_2, g_2(x) = x_2 + 7$  和  $g_3(x) = -(x_1 - 3)^2 + x_2 + 1$  的梯度分别是

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_3(x) = \begin{bmatrix} -2(x_1 - 3) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

最优解的一阶必要条件如下:

$$\begin{cases} \nabla f(x) - \sum_{i=1}^3 w_i \nabla g_i(x) = 0, \\ w_i g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ w_1, w_2, w_3 \geq 0, \\ g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} w_1 + 2w_3(x_1 - 3) + 4 = 0, \\ w_1 - w_2 - w_3 - 3 = 0, \\ w_1(4 - x_1 - x_2) = 0, \\ w_2(x_2 + 7) = 0, \\ w_3[-(x_1 - 3)^2 + x_2 + 1] = 0, \\ w_1, w_2, w_3 \geq 0, \\ 4 - x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_2 + 7 \geq 0, \\ -(x_1 - 3)^2 + x_2 + 1 \geq 0. \end{cases}$$

求解上述 K-T 条件, 得到非线性规划的 K-T 点  $x_1 = 1, x_2 = 3$ , 相应的乘子  $(w_1, w_2, w_3) = (\frac{16}{3}, 0, \frac{7}{3})$ .

4. 给定非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \left(x_1 - \frac{9}{4}\right)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1^2 + x_2 \geq 0, \\ & x_1 + x_2 \leq 6, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

判别下列各点是否为最优解:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

解 将非线性规划写作

$$\begin{aligned} \min \quad & \left(x_1 - \frac{9}{4}\right)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1^2 + x_2 \geq 0, \\ & -x_1 - x_2 + 6 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

由于给定的非线性规划是凸规划, 因此只需检验上述各点是否为 K-T 点.

检验点  $x^{(1)}$ :  $x^{(1)}$  是可行点, 只有第 1 个约束是起作用约束, K-T 条件如下:

$$\begin{cases} 2\left(x_1 - \frac{9}{4}\right) + 2w_1 x_1 = 0, \\ 2(x_2 - 2) - w_1 = 0, \\ w_1 \geq 0. \end{cases}$$

经检验,  $x^{(1)}$  是最优解, 最优值等于  $\frac{5}{8}$ , K-T 乘子  $w_1 = \frac{1}{2}$ .

检验点  $x^{(2)}$ :  $x^{(2)}$  不是可行解.

检验点  $x^{(3)}$ :  $x^{(3)}$  是可行解, 起作用约束只有  $x_1 \geq 0$ , K-T 条件如下:

$$\begin{cases} 2(x_1 - \frac{9}{4}) - w_3 = 0, & (1) \\ 2(x_2 - 2) = 0, & (2) \\ w_3 \geq 0. & (3) \end{cases}$$

由方程(1)得  $w_3 = -\frac{9}{2}$ , 不满足方程(3), 因此  $x^{(3)}$  不是 K-T 点.

5. 用 K-T 条件求解下列问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 - x_2 - 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 - x_2 - x_3 \geq 0, \\ & x_1^2 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{aligned}$$

解 记作  $f(x) = x_1^2 - x_2 - 3x_3$ ,  $g_1(x) = -x_1 - x_2 - x_3$ ,  $h(x) = x_1^2 + 2x_2 - x_3$ . 目标函数和约束函数的梯度分别为

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \nabla h(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

最优解的一阶必要条件如下:

$$\begin{cases} 2x_1 + w - 2wx_1 = 0, \\ -1 + w - 2v = 0, \\ -3 + w + v = 0, \\ w(-x_1 - x_2 - x_3) = 0, \\ w \geq 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 \geq 0, \\ x_1^2 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解得 K-T 点  $\bar{x} = (-\frac{7}{2}, -\frac{35}{12}, \frac{77}{12})$ ,  $w = \frac{7}{3}$ ,  $v = \frac{2}{3}$ , Lagrange 函数为

$$L(x, w, v) = x_1^2 - x_2 - 3x_3 - w(-x_1 - x_2 - x_3) - v(x_1^2 + 2x_2 - x_3),$$

Hesse 矩阵为

$$\nabla^2 L(x, w, v) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

在点  $\bar{x}$ , 两个约束均是起作用约束, 梯度

$$\nabla g(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \nabla h(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

解方程组

$$\begin{cases} \nabla g(\bar{x})^T d = 0, \\ \nabla h(\bar{x})^T d = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} -d_1 - d_2 - d_3 = 0, \\ -7d_1 + 2d_2 - d_3 = 0. \end{cases}$$

得解  $d = (d_1, 2d_1, -3d_1)^T$ . 由于  $d^T \nabla_x^2 L(\bar{x}, w, v)d = \frac{2}{3}d_1^2 > 0$ , 因此最优解  $\bar{x} = (-\frac{7}{2}, -\frac{35}{12}, \frac{77}{12})$ ,

最优值  $f(\bar{x}) = -\frac{49}{12}$ .

6. 求解下列问题

$$\begin{aligned} \max \quad & 14x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2 + 7 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3. \end{aligned}$$

解 将非线性规划写作

$$\begin{aligned} \min \quad & -14x_1 + x_1^2 - 6x_2 + x_2^2 - 7 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 - x_2 + 2 \geq 0, \\ & -x_1 - 2x_2 + 3 \geq 0. \end{aligned}$$

目标函数和约束函数的梯度分别为

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 14 \\ 2x_2 - 6 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

最优解的一阶必要条件为

$$\begin{cases} 2x_1 - 14 + w_1 + w_2 = 0, \\ 2x_2 - 6 + w_1 + 2w_2 = 0, \\ w_1(-x_1 - x_2 + 2) = 0, \\ w_2(-x_1 - 2x_2 + 3) = 0, \\ w_1, w_2 \geq 0, \\ -x_1 - x_2 + 2 \geq 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3 \geq 0. \end{cases}$$

解得 K-T 点  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ , 乘子  $w_1 = 8, w_2 = 0$ . 由于是凸规划, 因此  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$  是最优解, 最优值  $f_{\max} = 33$ .

7. 求原点  $x^{(0)} = (0, 0)^T$  到凸集

$$S = \{x \mid x_1 + x_2 \geq 4, 2x_1 + x_2 \geq 5\}$$

的最小距离.

解 求最小距离可表达成下列凸规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 - 4 \geq 0, \\ & 2x_1 + x_2 - 5 \geq 0. \end{aligned}$$

K-T 条件如下:

$$\begin{cases} 2x_1 - w_1 - 2w_2 = 0, \\ 2x_2 - w_1 - w_2 = 0, \\ w_1(x_1 + x_2 - 4) = 0, \\ w_2(2x_1 + x_2 - 5) = 0, \\ w_1, w_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 - 4 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5 \geq 0. \end{cases}$$

解得 K-T 点  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 最小距离  $d = 2\sqrt{2}$ .

8. 考虑下列非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1^2 - (x_2 - 4)^2 + 16 \geq 0, \\ & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 13 = 0. \end{aligned}$$

判别下列各点是否为局部最优解:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{32}{5} \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 + \sqrt{13} \end{bmatrix}.$$

解 目标函数  $f(x) = x_2$  及约束函数  $g(x) = -x_1^2 - (x_2 - 4)^2 + 16$ ,  $h(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 13$  的梯度分别为

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla g(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2(x_2 - 4) \end{bmatrix}, \quad \nabla h(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 2(x_2 - 3) \end{bmatrix}.$$

Lagrange 函数  $L(x, w, v) = x_2 - w[-x_1^2 - (x_2 - 4)^2 + 16] - v[(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 13]$ ,

$$\nabla_x^2 L(x, w, v) = \begin{bmatrix} 2(w-v) & 0 \\ 0 & 2(w-v) \end{bmatrix}.$$

检验  $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ : 两个约束均为起作用约束.

$$\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla g(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \nabla h(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix},$$

K-T 条件为

$$\begin{cases} 4v = 0, \\ 1 - 8w + 6v = 0, \\ w \geq 0, \end{cases}$$

解得  $w = \frac{1}{8}, v = 0$ . 在  $x^{(1)}$  满足一阶必要条件.

解方程组

$$\begin{cases} \nabla g(x^{(1)})^T d = 0, \\ \nabla h(x^{(1)})^T d = 0, \end{cases} \quad \text{其中 } d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, \quad \text{即 } \begin{cases} 8d_2 = 0, \\ -4d_1 - 6d_2 = 0, \end{cases}$$

得到  $d = 0$ . 方向集  $G = \{d \mid d \neq 0, \nabla g(x^{(1)})^T d = 0, \nabla h(x^{(1)})^T d = 0\} = \emptyset$ , 因此  $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  是局部最优解.

检验  $x^{(2)} = \left(\frac{16}{5}, \frac{32}{5}\right)^T$ : 两个约束均是起作用约束.

$$\nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla g(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -\frac{32}{5} \\ -\frac{24}{5} \end{bmatrix}, \quad \nabla h(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{34}{5} \end{bmatrix},$$

K-T 条件为

$$\begin{cases} \frac{32}{5}w - \frac{12}{5}v = 0, \\ 1 + \frac{24}{5}w - \frac{34}{5}v = 0, \\ w \geq 0, \end{cases}$$

解得  $w = \frac{3}{40}, v = \frac{1}{5}$ ,  $x^{(2)}$  是 K-T 点.

求方向集  $G$ , 为此解下列方程组:

$$\begin{cases} \nabla g(x^{(2)})^T d = 0, \\ \nabla h(x^{(2)})^T d = 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} -\frac{32}{5}d_1 - \frac{24}{5}d_2 = 0, \\ \frac{12}{5}d_1 + \frac{34}{5}d_2 = 0, \end{cases}$$

得到  $d = 0, G = \{d \mid d \neq 0, \nabla g(x^{(2)})^T d = 0, \nabla h(x^{(2)})^T d = 0\} = \emptyset$ , 因此  $x^{(2)} = \left(\frac{16}{5}, \frac{32}{5}\right)^T$  是最优解.



检验  $x^{(3)} = (2, 3 + \sqrt{13})^T$ :  $x^{(3)}$  是可行点, 等式约束是起作用约束,  $\nabla h(x^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{13} \end{bmatrix}$ , K-T 条件为

$$1 - 2\sqrt{13}v = 0, \quad v = \frac{\sqrt{13}}{26}.$$

求方向集  $G$ :

$$G = \{d \mid d \neq 0, \nabla h(x^{(3)})^T d = 0\} = \{d \mid d = \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix}, d_1 \neq 0\}.$$

在点  $x^{(3)}$ ,  $g(x) \geq 0$  是不起作用约束, 因此乘子  $w=0$ , Lagrange 函数的 Hesse 矩阵为

$$\nabla_x^2 L(x^{(3)}, w, v) = \begin{bmatrix} -2v & 0 \\ 0 & -2v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}.$$

$$d^T \nabla_x^2 L(x^{(3)}, 0, \frac{1}{\sqrt{13}}) d = (d_1, 0) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{13}} d_1^2 < 0.$$

因此  $x^{(3)} = (2, 3 + \sqrt{13})^T$  不满足二阶必要条件, 不是最优解.

9. 考虑下列非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}[(x_1 - 1)^2 + x_2^2] \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + \beta x_2^2 = 0. \end{aligned}$$

讨论  $\beta$  取何值时  $\bar{x} = (0, 0)^T$  是局部最优解?

解 记  $f(x) = \frac{1}{2}[(x_1 - 1)^2 + x_2^2]$ ,  $h(x) = -x_1 + \beta x_2^2$ , 则

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \nabla h(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2\beta x_2 \end{bmatrix},$$

$$L(x, v) = \frac{1}{2}[(x_1 - 1)^2 + x_2^2] - v(-x_1 + \beta x_2^2),$$

$$\nabla_x^2 L(x, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 2\beta v \end{bmatrix}.$$

K-T 条件为

$$\begin{cases} x_1 - 1 + v = 0, \\ x_2 - 2\beta v x_2 = 0. \end{cases}$$

代入  $\bar{x} = (0, 0)^T$ , 得到  $v=1$ . 在点  $\bar{x} = (0, 0)^T$  处

$$\nabla_x^2 L(\bar{x}, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 2\beta \end{bmatrix}, \quad \nabla h(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

方向集  $\bar{G} = \{d \mid \nabla h(\bar{x})^T d = 0\} = \{(0, d_2)^T \mid d_2 \in \mathbb{R}\}$ . 令

$$(0, d_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} = (1 - 2\beta)d_2^2 > 0,$$

得到  $\beta < \frac{1}{2}$ . 当  $\beta < \frac{1}{2}$  时,  $\bar{x}$  是最优解. 当  $\beta = \frac{1}{2}$  时, 将约束问题化为无约束问题, 即

$$\min \quad \frac{1}{2}(x_1^2 + 1).$$

显然, 极小点是  $x_1 = 0$ , 因此  $\bar{x} = (0, 0)^T$  是极小点. 综上, 当  $\beta \leq \frac{1}{2}$  时  $\bar{x} = (0, 0)^T$  是局部最优解.

10. 给定非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s. t.} \quad & Ax = 0, \\ & x^T x \leq \gamma^2, \end{aligned}$$

其中  $A$  为  $m \times n$  矩阵 ( $m < n$ ),  $A$  的秩为  $m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  且  $c \neq 0$ ,  $\gamma$  是一个正数. 试求问题的最优解及目标函数最优值.

解 由于目标函数是线性函数, 可行域是闭凸集, 必存在最优解, 且最优值  $f_{\min}$  可在边界上达到, 因此可通过求解下列非线性规划求得最优解.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s. t.} \quad & Ax = 0, \\ & -x^T x + \gamma^2 = 0. \end{aligned}$$

K-T 条件如下:

$$\begin{cases} c - A^T v + 2v_{m+1}x = 0, \\ Ax = 0, \\ -x^T x + \gamma^2 = 0. \end{cases}$$

其中  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$  和  $v_{m+1}$  是 K-T 乘子. 由于  $A$  行满秩, 因此  $AA^T$  可逆. 解上述非线性方程组, 结果如下:

$$\text{乘子:} \quad v = (AA^T)^{-1}Ac, \quad v_{m+1} = -\frac{f_{\min}}{2\gamma^2};$$

$$\text{最优值:} \quad f_{\min} = -\gamma \sqrt{c^T (c - A^T v)};$$

$$\text{最优解:} \quad x = \frac{\gamma^2}{f_{\min}} (c - A^T v) \quad (f_{\min} \neq 0).$$

当  $c = A^T v$  时, 最优解不惟一, 最优值  $f_{\min} = 0$ .

### 11. 给定非线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T x, \quad x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{s. t.} \quad & x^T x \leq 1, \end{aligned}$$

其中  $b \neq 0$ . 证明向量  $\bar{x} = b / \|b\|$  满足最优性的充分条件.

证明 将非线性规划写作:

$$\begin{aligned} \min \quad & -b^T x, \quad x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{s. t.} \quad & 1 - x^T x \geq 0. \end{aligned}$$

K-T 条件如下:

$$\begin{cases} -b + wx = 0, \\ w(1 - x^T x) = 0, \\ w \geq 0. \end{cases}$$

解得 K-T 点  $x = \frac{b}{\|b\|}$ . 由于上述非线性规划是凸规划, 因此 K-T 条件是最优解的充分条件.

### 12. 给定原问题

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1^2 + x_2 \geq 0, \\ & x_1 \geq 1, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

写出上述原问题的对偶问题. 将原问题中第 3 个约束条件和变量的非负限制记作

$$x \in D = \{x \mid x_1 + 2x_2 \leq 10, \quad x_1, x_2 \geq 0\}.$$

解 Lagrange 对偶函数

$$\theta(w_1, w_2) = \inf\{(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 - w_1(-x_1^2 + x_2) - w_2(x_1 - 1) \mid x \in D\}.$$

对偶问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & \theta(w_1, w_2) \\ \text{s. t.} \quad & w_1, w_2 \geq 0. \end{aligned}$$

### 13. 考虑下列原问题

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

(1) 分别用图解法和最优性条件求解原问题.

(2) 写出对偶问题.

(3) 求解对偶问题.

(4) 用对偶理论说明对偶规划的最优值是否等于原问题的最优值.

(5) 用有关定理说明原问题的 K-T 乘子与对偶问题的最优解之间的关系.

解 (1) 记  $f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2, g(x) = -x_1 + x_2 - 1$ , 则

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2(x_2 + 1) \end{bmatrix}, \quad \nabla g(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

最优性条件如下:

$$\begin{cases} 2(x_1 - 1) + w = 0, \\ 2(x_2 + 1) - w = 0, \\ w(-x_1 + x_2 - 1) = 0, \\ w \geq 0, \\ -x_1 + x_2 - 1 \geq 0. \end{cases}$$

解得最优解  $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, w = 3$ , 最优值  $f_{\min} = \frac{9}{2}$ .

### (2) Lagrange 函数

$$L(w) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - w(-x_1 + x_2 - 1),$$

对偶问题的目标函数为

$$\begin{aligned} \theta(w) &= \inf\{(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - w(-x_1 + x_2 - 1) \mid x \in \mathbb{R}^2\}, \\ &= \inf\{x_1^2 - 2x_1 + wx_1\} + \inf\{x_2^2 + 2x_2 - wx_2\} + w + 2. \end{aligned}$$

当  $w \geq 0$  时,  $\inf\{x_1^2 - 2x_1 + wx_1\} = -\frac{1}{4}(w^2 - 4w + 4)$ ,  $\inf\{x_2^2 + 2x_2 - wx_2\} = -\frac{1}{4}(w^2 - 4w + 4)$ , 对偶问题的目标函数  $\theta(w) = -\frac{1}{2}w^2 + 3w$ . 对偶问题如下:

$$\begin{aligned} \max \quad & -\frac{1}{2}w^2 + 3w \\ \text{s. t.} \quad & w \geq 0. \end{aligned}$$

### (3) 对偶问题的最优性条件为

$$\begin{cases} -w + 3 + w_1 = 0, \\ w_1 w = 0, \\ w_1 \geq 0, \\ w \geq 0. \end{cases}$$

对偶问题的最优解  $w = 3$ , 乘子  $w_1 = 0$ , 最优值  $\theta_{\max} = \frac{9}{2}$ .

(4) 由于原问题是凸规划, 因此对偶问题与原问题的最优值相等.

(5) 对于凸规划, 在适当的约束规格下, 原问题的 K-T 乘子是对偶问题的最优解.

## 算法题解

1. 定义算法映射如下:

$$A(x) = \begin{cases} \left[ \frac{3}{2} + \frac{1}{4}x, 1 + \frac{1}{2}x \right], & x \geq 2, \\ \frac{1}{2}(x+1), & x < 2. \end{cases}$$

证明  $A$  在  $x=2$  处不是闭的.

证明 问题的证明只需举一反例.

令  $x^{(k)} = 2 - \frac{1}{k}$ , 令正整数  $k \rightarrow +\infty$ , 则  $\bar{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = 2, A(\bar{x}) = 2$ . 相应地, 算法产生序列  $\{y^{(k)}\}$ , 其中

$$y^{(k)} = \frac{1}{2} \left[ \left( 2 - \frac{1}{k} \right) + 1 \right] = \frac{3}{2} - \frac{1}{2k}, \quad \text{则 } \bar{y} = \lim_{k \rightarrow +\infty} y^{(k)} = \frac{3}{2} \notin A(\bar{x}).$$

因此  $A(x)$  在  $x=2$  处不是闭的.

2. 在集合  $X=[0, 1]$  上定义算法映射

$$A(x) = \begin{cases} [0, x), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

讨论在以下各点处  $A$  是否为闭的:

$$x^{(1)} = 0, \quad x^{(2)} = \frac{1}{2}.$$

答案 算法映射  $A$  在  $x^{(1)}=0$  处是闭的, 在  $x^{(2)}=\frac{1}{2}$  处不是闭的.

3. 求以下各序列的收敛级:

$$(1) \gamma_k = \frac{1}{k}; \quad (2) \gamma_k = \left( \frac{1}{k} \right)^k.$$

答案 序列  $\left\{ \frac{1}{k} \right\}$  为 1 级收敛; 序列  $\left\{ \left( \frac{1}{k} \right)^k \right\}$  为超线性收敛.

## 一维搜索题解

1. 分别用 0.618 法和 Fibonacci 法求解下列问题:

$$\min e^{-x} + x^2.$$

要求最终区间长度  $L \leq 0.2$ , 取初始区间为  $[0, 1]$ .

解 (1) 用 0.618 法求解.

第 1 次迭代: 初始区间记作  $[a_1, b_1] = [0, 1]$ , 目标函数记作  $f(x) = e^{-x} + x^2$ . 计算试探点  $\lambda_1, \mu_1$  及在试探点处目标函数值:

$$\lambda_1 = a_1 + 0.382(b_1 - a_1) = 0.382, \quad f(\lambda_1) = e^{-0.382} + 0.382^2 = 0.828,$$

$$\mu_1 = a_1 + 0.618(b_1 - a_1) = 0.618, \quad f(\mu_1) = e^{-0.618} + 0.618^2 = 0.921.$$

$f(\lambda_1) < f(\mu_1)$ , 因此令  $a_2 = a_1 = 0, b_2 = \mu_1 = 0.618, b_2 - a_2 = 0.618 > 0.2$ .

第 2 次迭代:

$$\lambda_2 = a_2 + 0.382(b_2 - a_2) = 0.236, \quad f(\lambda_2) = e^{-0.236} + 0.236^2 = 0.845,$$

$$\mu_2 = \lambda_1 = 0.382, \quad f(\mu_2) = f(\lambda_1) = 0.828.$$

$f(\lambda_2) > f(\mu_2)$ , 因此令  $a_3 = \lambda_2 = 0.236, b_3 = b_2 = 0.618, b_3 - a_3 = 0.382 > 0.2$ .

第 3 次迭代:

$$\lambda_3 = \mu_2 = 0.382, \quad f(\lambda_3) = f(\mu_2) = 0.828,$$

$$\mu_3 = a_3 + 0.618(b_3 - a_3) = 0.472, \quad f(\mu_3) = e^{-0.472} + 0.472^2 = 0.847.$$

$f(\lambda_3) < f(\mu_3)$ , 因此令  $a_4 = a_3 = 0.236, b_4 = \mu_3 = 0.472, b_4 - a_4 = 0.236 > 0.2$ .

第 4 次迭代:

$$\lambda_4 = a_4 + 0.382(b_4 - a_4) = 0.326, \quad f(\lambda_4) = e^{-0.326} + 0.326^2 = 0.828,$$

$$\mu_4 = \lambda_3 = 0.382, \quad f(\mu_4) = f(\lambda_3) = 0.828.$$

令  $a_5 = a_4 = 0.236, b_5 = \mu_4 = 0.382, b_5 - a_5 = 0.146 < 0.2$ .

最优解  $\bar{x} \in [0.236, 0.382]$ .

(2) 用 Fibonacci 法求解.

先求计算函数值次数  $n, F_n \geq (b_1 - a_1)/L = 5$ , 取  $n = 5$ .

第 1 次迭代:

$$\lambda_1 = a_1 + \frac{F_3}{F_5}(b_1 - a_1) = 0.375, \quad f(\lambda_1) = e^{-0.375} + 0.375^2 = 0.828,$$

$$\mu_1 = a_1 + \frac{F_4}{F_5}(b_1 - a_1) = 0.625, \quad f(\mu_1) = e^{-0.625} + 0.625^2 = 0.926.$$

$f(\lambda_1) < f(\mu_1)$ , 因此令  $a_2 = a_1 = 0, b_2 = \mu_1 = 0.625$ .

第 2 次迭代:

$$\lambda_2 = a_2 + \frac{F_2}{F_4}(b_2 - a_2) = 0.25, \quad f(\lambda_2) = e^{-0.25} + 0.25^2 = 0.842,$$

$$\mu_2 = \lambda_1 = 0.375, \quad f(\mu_2) = f(\lambda_1) = 0.828.$$

$f(\lambda_2) > f(\mu_2)$ , 因此令  $a_3 = \lambda_2 = 0.25, b_3 = b_2 = 0.625$ .

第 3 次迭代:

$$\lambda_3 = \mu_2 = 0.375, \quad f(\lambda_3) = f(\mu_2) = 0.828,$$

$$\mu_3 = a_3 + \frac{F_2}{F_3}(b_3 - a_3) = 0.5, \quad f(\mu_3) = e^{-0.5} + 0.5^2 = 0.857.$$

$f(\lambda_3) < f(\mu_3)$ , 因此令  $a_4 = a_3 = 0.25, b_4 = \mu_3 = 0.5$ .

第 4 次迭代必有  $\lambda_4 = \mu_4 = \frac{1}{2}(a_4 + b_4) = 0.375$ , 取分辨常数  $\delta = 0.01$ , 令  $\lambda_5 = \lambda_4 = 0.375$ ,  $\mu_5 = 0.375 + 0.01 = 0.385$ ,  $f(\lambda_5) = 0.828$ ,  $f(\mu_5) = e^{-0.385} + 0.385^2 = 0.829$ , 故令  $a_5 = a_4 = 0.25, b_5 = \mu_5 = 0.385$ .

最优解  $\bar{x} \in [0.25, 0.385]$ .

2. 考虑下列问题:

$$\min 3x^4 - 4x^3 - 12x^2.$$

(1) 用牛顿法迭代 3 次, 取初点  $x^{(0)} = -1.2$ ;

(2) 用割线法迭代 3 次, 取初点  $x^{(1)} = -1.2, x^{(2)} = -0.8$ ;

(3) 用抛物线法迭代 3 次, 取初点  $x^{(1)} = -1.2, x^{(2)} = -1.1, x^{(3)} = -0.8$ .

解 目标函数记作  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ , 则导函数

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x, \quad f''(x) = 36x^2 - 24x - 24.$$

(1) 用牛顿法求解

迭代公式:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f'(x^{(k)})}{f''(x^{(k)})}.$$

在点  $x^{(0)} = -1.2, f'(x^{(0)}) = -9.216, f''(x^{(0)}) = 56.64$ , 代入公式, 得到后继点  $x^{(1)} = -1.037$ .

在点  $x^{(1)} = -1.037, f'(x^{(1)}) = -1.398, f''(x^{(1)}) = 39.601$ , 代入公式, 得到后继点  $x^{(2)} = -1.002$ .

在点  $x^{(2)} = -1.002, f'(x^{(2)}) = -0.072, f''(x^{(2)}) = 36.192$ , 代入公式, 得到  $x^{(3)} = -1.000$ . 这时  $f(x^{(3)}) = -5$ .

实际上,  $\bar{x} = -1$  是精确的局部极小点.

(2) 用割线法求解

迭代公式:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f'(x^{(k)}) - f'(x^{(k-1)})} f'(x^{(k)}).$$

第 1 次迭代: 由  $x^{(1)} = -1.2, x^{(2)} = -0.8$  求后继点  $x^{(3)}$ . 易知  $f'(-1.2) = -9.216, f'(-0.8) = 5.376$ . 代入迭代公式, 得到  $x^{(3)} = -0.947$ .

第 2 次迭代: 由  $x^{(2)} = -0.8, x^{(3)} = -0.947$  求后继点  $x^{(4)}$ . 在点  $x^{(3)}, f'(x^{(3)}) = 1.775$ , 代入迭代公式, 得到  $x^{(4)} = -1.019$ .

第 3 次迭代: 由  $x^{(3)} = -0.947, x^{(4)} = -1.019$  求后继点  $x^{(5)}$ . 易知  $f'(x^{(3)}) = 1.775, f'(x^{(4)}) = -0.701$ , 代入公式, 得到  $x^{(5)} = -0.999$ .

(3) 用抛物线法求解

迭代公式为

$$B_1 = (x^{(2)^2} - x^{(3)^2})f(x^{(1)}), \quad B_2 = (x^{(3)^2} - x^{(1)^2})f(x^{(2)}),$$

$$B_3 = (x^{(1)^2} - x^{(2)^2})f(x^{(3)}), \quad C_1 = (x^{(2)} - x^{(3)})f(x^{(1)}),$$

$$C_2 = (x^{(3)} - x^{(1)})f(x^{(2)}), \quad C_3 = (x^{(1)} - x^{(2)})f(x^{(3)}),$$

$$\bar{x} = \frac{B_1 + B_2 + B_3}{2(C_1 + C_2 + C_3)}.$$

第 1 次迭代: 记  $x^{(1)} = -1.2, x^{(2)} = -1.1, x^{(3)} = -0.8$ , 各点函数值分别为  $f(-1.2) = -4.147, f(-1.1) = -4.804, f(-0.8) = -4.403$ . 将已知数据代入迭代公式, 得到  $\bar{x} = -0.985$ , 在点  $\bar{x}$  处, 目标函数值  $f(\bar{x}) = -4.996$ .

第 2 次迭代: 记  $x^{(1)} = -1.1, x^{(2)} = -0.985, x^{(3)} = -0.8$ , 各点函数值分别为  $f(-1.1) = -4.804, f(-0.985) = -4.996, f(-0.8) = -4.403$ , 代入迭代公式, 得到  $\bar{x} = -0.990$ . 在点  $\bar{x}$  处, 目标函数值  $f(\bar{x}) = -4.998$ .

第 3 次迭代: 记  $x^{(1)} = -1.1, x^{(2)} = -0.990, x^{(3)} = -0.985$ , 各点函数值分别为  $f(-1.1) = -4.804, f(-0.990) = -4.998, f(-0.985) = -4.996$ , 代入迭代公式, 得到  $\bar{x} = -1.008$ . 对应的目标函数值  $f(\bar{x}) = -4.999$ .  $\bar{x} = -1.008$  是经过 3 次迭代得到的比较好的近似解.

需要说明, 以上 3 种方法给出的结果, 均为局部极小点或其近似解, 不可作为全局极小点的近似解. 易知, 全局极小点  $x^* = 2$ .

### 3. 用三次插值法求解

$$\min x^4 + 2x + 4.$$

解 令  $f(x) = x^4 + 2x + 4$ , 则  $f'(x) = 4x^3 + 2$ . 取两点  $x_1 < x_2$ , 使得  $f'(x_1) < 0, f'(x_2) > 0$ , 然后利用下式计算近似解  $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = x_1 + (x_2 - x_1) \left[ 1 - \frac{f'(x_2) + w + z}{f'(x_2) - f'(x_1) + 2w} \right],$$

其中  $z$  和  $w$  如下:

$$s = \frac{3[f(x_2) - f(x_1)]}{x_2 - x_1}, \quad z = s - f'(x_1) - f'(x_2),$$

$$w^2 = z^2 - f'(x_1)f'(x_2) \quad (w > 0).$$

第1次迭代: 取  $x_1 = -1, x_2 = 0$ , 则  $f(x_1) = 3, f(x_2) = 4, f'(x_1) = -2 < 0, f'(x_2) = 2 > 0$ . 代入迭代公式, 计算得到:  $s = 3, z = 3, w^2 = 13, w = \sqrt{13}$ . 近似解

$$\bar{x} = -\frac{5 + \sqrt{13}}{4 + 2\sqrt{13}} \approx -0.768.$$

第2次迭代: 由于  $f'(-0.768) = 0.188 > 0$ , 令  $x_1 = -1, x_2 = -0.768$ , 经计算得到:  $f(x_1) = 3, f(x_2) = 2.812, f'(x_1) = -2, f'(x_2) = 0.188, s = -2.431, z = -0.619, w^2 = 0.759, w = \sqrt{0.759}$ . 代入迭代公式, 得到新的近似解:

$$\bar{x} = -1 + 0.232 \left[ 1 + \frac{0.431 - \sqrt{0.759}}{2.188 + 2\sqrt{0.759}} \right] \approx -0.794.$$

经两次迭代得到近似解  $\bar{x} = -0.794$ . 易知精确解  $x^* = -\sqrt[3]{0.5} \approx -0.794$ .

### 4. 设函数 $f(x)$ 在 $x^{(1)}$ 与 $x^{(2)}$ 之间存在极小点, 又知

$$f_1 = f(x^{(1)}), \quad f_2 = f(x^{(2)}), \quad f'_1 = f'(x^{(1)}).$$

作二次插值多项式  $\varphi(x)$ , 使

$$\varphi(x^{(1)}) = f_1, \quad \varphi(x^{(2)}) = f_2, \quad \varphi'(x^{(1)}) = f'_1.$$

求  $\varphi(x)$  的极小点.

解 设  $\varphi(x) = a + bx + cx^2$ , 则  $\varphi'(x) = b + 2cx$ . 根据假设, 得到以  $a, b, c$  为未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a + bx^{(1)} + cx^{(1)2} = f_1, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + bx^{(2)} + cx^{(2)2} = f_2, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 2cx^{(1)} = f'_1. & (3) \end{cases}$$

由方程(1)和方程(2)得到

$$(x^{(2)} - x^{(1)})b + (x^{(2)2} - x^{(1)2})c = f_2 - f_1,$$

即

$$b + (x^{(2)} + x^{(1)})c = \frac{f_2 - f_1}{x^{(2)} - x^{(1)}}. \quad (4)$$

由方程(3)和方程(4)解得

$$c = \frac{f_2 - f_1 - (x^{(2)} - x^{(1)})f'_1}{(x^{(2)} - x^{(1)})^2}, \quad b = \frac{-2x^{(1)}(f_2 - f_1) + (x^{(2)2} - x^{(1)2})f'_1}{(x^{(2)} - x^{(1)})^2},$$

故得  $\varphi(x)$  的极小点

$$\bar{x} = -\frac{b}{2c} = \frac{2x^{(1)}(f_2 - f_1) - (x^{(2)2} - x^{(1)2})f'_1}{2[f_2 - f_1 - (x^{(2)} - x^{(1)})f'_1]}.$$

## 第10章

## CHAPTER 10

## 使用导数的最优化方法题解

## 1. 给定函数

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

求在以下各点处的最速下降方向:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

解  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = -400x_1(x_2 - x_1^2) - 2(1 - x_1), \frac{\partial f}{\partial x_2} = 200(x_2 - x_1^2).$

在点  $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 最速下降方向  $d = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ; 在点  $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $x^{(2)}$  是驻点;

在点  $x^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ , 最速下降方向  $d = \begin{bmatrix} -751 \\ 250 \end{bmatrix}$ .

## 2. 给定函数

$$f(x) = (6 + x_1 + x_2)^2 + (2 - 3x_1 - 3x_2 - x_1x_2)^2.$$

求在点

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

处的牛顿方向和最速下降方向.

解  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2(10x_1 + 8x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1x_2^2), \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2(8x_1 + 10x_2 + 3x_1^2 + 6x_1x_2 + x_1^2x_2),$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2(10 + 6x_2 + x_2^2), \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2(10 + 6x_1 + x_1^2), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 2(8 + 6x_1 + 6x_2 + 2x_1x_2).$$

在点  $\hat{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ , 最速下降方向

$$d = -\nabla f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 344 \\ -56 \end{bmatrix};$$

Hesse 矩阵及其逆分别为

$$\nabla^2 f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 164 & -56 \\ -56 & 4 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f(\hat{x})^{-1} = -\frac{1}{2480} \begin{bmatrix} 4 & 56 \\ 56 & 164 \end{bmatrix},$$

因此牛顿方向为

$$d = -\nabla^2 f(\hat{x})^{-1} \nabla f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \frac{22}{31} \\ -\frac{126}{31} \end{bmatrix}.$$

## 3. 用最速下降法求解下列问题:

$$\min x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 - 3x_2.$$

取初点  $x^{(1)} = (1, 1)^T$ , 迭代两次.

解 第1次迭代, 从  $x^{(1)}$  出发沿最速下降方向搜索.

设  $f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 - 3x_2$ , 则

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 + 1 \\ -2x_1 + 8x_2 - 3 \end{bmatrix},$$

故

$$\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad d^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad x^{(1)} + \lambda d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda \\ 1 - 3\lambda \end{bmatrix}.$$

取

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) = (1 - \lambda)^2 - 2(1 - \lambda)(1 - 3\lambda) + 4(1 - 3\lambda)^2 + (1 - \lambda) - 3(1 - 3\lambda),$$

令

$$\varphi'(\lambda) = -2(1 - \lambda) + 2(1 - 3\lambda) + 6(1 - \lambda) - 24(1 - 3\lambda) - 1 + 9 = 0,$$

解得

$$\lambda_1 = \frac{5}{31}, \quad x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 d^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{26}{31} \\ \frac{16}{31} \end{bmatrix}.$$

第2次迭代, 从  $x^{(2)}$  出发, 沿最速下降方向搜索.

$$d^{(2)} = -\nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -\frac{51}{31} \\ \frac{17}{31} \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} + \lambda d^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{31}(26 - 51\lambda) \\ \frac{1}{31}(16 + 17\lambda) \end{bmatrix},$$

取

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= f(x^{(2)} + \lambda d^{(2)}) = \frac{1}{31^2}(26 - 51\lambda)^2 - \frac{2}{31^2}(26 - 51\lambda)(16 + 17\lambda) \\ &\quad + \frac{4}{31^2}(16 + 17\lambda)^2 + \frac{1}{31}(26 - 51\lambda) - \frac{3}{31}(16 + 17\lambda),\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}\varphi'(\lambda) &= -\frac{2 \times 51}{31^2}(26 - 51\lambda) + \frac{2 \times 51}{31^2}(16 + 17\lambda) \\ &\quad - \frac{2 \times 17}{31^2}(26 - 51\lambda) + \frac{8 \times 17}{31^2}(16 + 17\lambda) - \frac{51}{31} - \frac{3 \times 17}{31} = 0,\end{aligned}$$

得到

$$\lambda_2 = \frac{5}{19}, \quad x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda_2 d^{(2)} = \begin{bmatrix} 239 \\ 589 \\ 389 \\ 589 \end{bmatrix}.$$

#### 4. 考虑函数

$$f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2.$$

(1) 画出函数  $f(x)$  的等值线, 并求出极小点.

(2) 证明若从  $x^{(1)} = (0, 0)^T$  出发, 用最速下降法求极小点  $\bar{x}$ , 则不能经有限步迭代达到  $\bar{x}$ .

(3) 是否存在  $x^{(1)}$ , 使得从  $x^{(1)}$  出发, 用最速下降法求  $f(x)$  的极小点, 经有限步迭代即收敛?

解 (1) 记  $f(x) = (x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 1)^2 - 8$ , 等值线方程为

$$\frac{(x_1 - 2)^2}{k + 8} + \frac{(x_2 - 1)^2}{\frac{k + 8}{4}} = 1 \quad (k > -8),$$

等值线是一族椭圆, 中心在点  $(2, 1)$ , 长半轴等于  $\sqrt{k + 8}$ , 短半轴等于  $\frac{1}{2}\sqrt{k + 8}$ . 极小点  $\bar{x} = (2, 1)^T$ .

(2) 假设从  $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  出发, 经有限步迭代即达到点  $\bar{x}$ , 则存在一个迭代点  $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \neq \bar{x}$ ,

使得  $\bar{x} = \hat{x} - \lambda \nabla f(\hat{x})$ , 即

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2(\hat{x}_1 - 2) \\ 8(\hat{x}_2 - 1) \end{bmatrix}, \quad \lambda > 0.$$

经整理得方程组

$$\begin{cases} (1 - 2\lambda) \hat{x}_1 + 4\lambda - 2 = 0, \\ (1 - 8\lambda) \hat{x}_2 + 8\lambda - 1 = 0. \end{cases}$$

下面分 3 种情形讨论:

若  $\lambda = \frac{1}{2}$ , 则

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{梯度 } \nabla f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 2(\hat{x}_1 - 2) \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

显然,  $\nabla f(\hat{x})$  与  $\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}$  既不正交, 也不共线, 这是不可能的, 因此  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ .

若  $\lambda = \frac{1}{8}$ , 则

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \text{梯度 } \nabla f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 8(\hat{x}_2 - 1) \end{bmatrix} \neq 0.$$

$\nabla f(\hat{x})$  与  $\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}$  仍然既不正交也不共线, 因此不可能, 即  $\lambda \neq \frac{1}{8}$ .

若  $\lambda \neq \frac{1}{2}$  且  $\lambda \neq \frac{1}{8}$ , 则  $\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{x}$ , 矛盾.

综上所述, 从  $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  出发, 用最速下降法, 经有限步迭代不可能达到极小点.

(3) 存在初点  $x^{(1)}$ , 使得从  $x^{(1)}$  出发, 用最速下降法, 经有限步迭代达到极小点. 例如, 从  $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  出发, 经一次迭代达到极小点  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

#### 5. 设有函数

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c,$$

其中  $A$  为对称正定矩阵. 又设  $x^{(1)} (\neq \bar{x})$  可表示为

$$x^{(1)} = \bar{x} + \mu p,$$

其中  $\bar{x}$  是  $f(x)$  的极小点,  $p$  是  $A$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量. 证明:

(1)  $\nabla f(x^{(1)}) = \mu \lambda p$ .

(2) 如果从  $x^{(1)}$  出发, 沿最速下降方向作精确的一维搜索, 则一步达到极小点  $\bar{x}$ .

证 (1) 先证第 1 个等式. 易知

$$\nabla f(x^{(1)}) = A x^{(1)} + b = A(\bar{x} + \mu p) + b = (A \bar{x} + b) + \mu A p.$$

由于  $\bar{x}$  是  $f(x)$  的极小点, 故  $\nabla f(\bar{x}) = A \bar{x} + b = 0$ , 而  $A p = \lambda p$ , 因此

$$\nabla f(x^{(1)}) = \mu \lambda p.$$

(2) 从  $x^{(1)}$  出发, 用最速下降法搜索, 并考虑 (1) 中结论, 则有

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \beta \nabla f(x^{(1)}) = \bar{x} + \mu p - \beta(\mu \lambda p) = \bar{x} + (1 - \beta \lambda) \mu p.$$

由于  $A$  是对称正定矩阵, 因此特征值  $\lambda \neq 0$ . 令  $\beta = \frac{1}{\lambda}$ , 则  $x^{(2)} = \bar{x}$ .

6. 设有函数

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c,$$

其中  $A$  为对称正定矩阵. 又设  $x^{(1)} (\neq \bar{x})$  可表示为

$$x^{(1)} = \bar{x} + \sum_{i=1}^m \mu_i p^{(i)},$$

其中  $m > 1$ , 对所有  $i, \mu_i \neq 0, p^{(i)}$  是  $A$  的属于不同特征值  $\lambda_i$  的特征向量,  $\bar{x}$  是  $f(x)$  的极小点.

证明从  $x^{(1)}$  出发用最速下降法不可能一步迭代终止.

证 假设经一步迭代终止, 即

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \lambda \nabla f(x^{(1)}) = \bar{x} + \sum_{i=1}^m \mu_i p^{(i)} - \lambda \nabla f(x^{(1)}) = \bar{x},$$

则必有

$$\sum_{i=1}^m \mu_i p^{(i)} - \lambda \nabla f(x^{(1)}) = 0. \quad (1)$$

已知

$$x^{(1)} = \bar{x} + \sum_{i=1}^m \mu_i p^{(i)},$$

上式两端左乘可逆矩阵  $A$ , 再加上向量  $b$ , 并考虑到  $A\bar{x} + b = 0$  及  $\nabla f(x^{(1)}) = Ax^{(1)} + b$ , 得到

$$\nabla f(x^{(1)}) = \sum_{i=1}^m \mu_i A p^{(i)} = \sum_{i=1}^m \mu_i \lambda_i p^{(i)}. \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式, 经整理有

$$\sum_{i=1}^m \mu_i (1 - \lambda \lambda_i) p^{(i)} = 0.$$

由于  $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(m)}$  线性无关, 则

$$\mu_i (1 - \lambda \lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

已知  $\mu_i \neq 0$ , 因此

$$1 - \lambda \lambda_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

由于  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m (m > 1)$  是互不相同正数, 同时满足上述  $m$  个条件的  $\lambda$  不存在, 因此用最速下降法搜索不可能经一步迭代终止.

7. 考虑下列问题:

$$\min f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$A$  为对称正定矩阵. 设从点  $x^{(k)}$  出发, 用最速下降法求后继点  $x^{(k+1)}$ . 证明:

$$f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)}) = \frac{[\nabla f(x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)})]^2}{2 \nabla f(x^{(k)})^T A \nabla f(x^{(k)})}.$$

证 最速下降法迭代公式为

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda_k \nabla f(x^{(k)}). \quad (1)$$

式中  $\lambda_k$  是从  $x^{(k)}$  出发, 沿方向  $d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$  搜索的移动步长, 记

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(k)} - \lambda \nabla f(x^{(k)})),$$

则

$$\begin{aligned} \varphi'(\lambda) &= \nabla f(x^{(k)} - \lambda \nabla f(x^{(k)}))^T (-\nabla f(x^{(k)})) \\ &= -[A(x^{(k)} - \lambda \nabla f(x^{(k)})) + b]^T \nabla f(x^{(k)}) \\ &= -[\nabla f(x^{(k)}) - \lambda A \nabla f(x^{(k)})]^T \nabla f(x^{(k)}). \end{aligned}$$

令  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 解得步长

$$\lambda_k = \frac{\nabla f(x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)})}{\nabla f(x^{(k)})^T A \nabla f(x^{(k)})}. \quad (2)$$

两点目标函数值之差为:

$$f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)}) = \frac{1}{2} x^{(k)T} A x^{(k)} - \frac{1}{2} x^{(k+1)T} A x^{(k+1)} + b^T (x^{(k)} - x^{(k+1)}). \quad (3)$$

式中,

$$\begin{aligned} x^{(k+1)T} A x^{(k+1)} &= (x^{(k)} - \lambda_k \nabla f(x^{(k)}))^T A (x^{(k)} - \lambda_k \nabla f(x^{(k)})) = x^{(k)T} A x^{(k)} \\ &\quad - 2\lambda_k x^{(k)T} A \nabla f(x^{(k)}) + \lambda_k^2 \nabla f(x^{(k)})^T A \nabla f(x^{(k)}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} b^T (x^{(k)} - x^{(k+1)}) &= (\nabla f(x^{(k)}) - A x^{(k)})^T (\lambda_k \nabla f(x^{(k)})) \\ &= \lambda_k \nabla f(x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)}) - \lambda_k x^{(k)T} A \nabla f(x^{(k)}). \end{aligned} \quad (5)$$

将(4)式, (5)式代入(3)式, 并注意到(2)式, 则

$$\begin{aligned} f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)}) &= -\frac{1}{2} \lambda_k^2 \nabla f(x^{(k)})^T A \nabla f(x^{(k)}) + \lambda_k \nabla f(x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)}) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{[\nabla f(x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)})]^2}{\nabla f(x^{(k)})^T A \nabla f(x^{(k)})} + \frac{[\nabla f(x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)})]^2}{\nabla f(x^{(k)})^T A \nabla f(x^{(k)})} \\ &= \frac{[\nabla f(x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)})]^2}{2 \nabla f(x^{(k)})^T A \nabla f(x^{(k)})}. \end{aligned}$$

8. 设  $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$ ,  $A$  是对称正定矩阵. 用最速下降法求  $f(x)$  的极小点, 迭代公式如下:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{g_k^T g_k}{g_k^T A g_k} g_k, \quad (10.1)$$

其中  $g_k$  是  $f(x)$  在点  $x^{(k)}$  处的梯度. 令

$$E(x) = \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T A (x - \bar{x}) = f(x) + \frac{1}{2} \bar{x}^T A \bar{x},$$



其中  $\bar{x}$  是  $f(x)$  的极小点. 证明迭代算法 (10.1) 式满足

$$E(x^{(k+1)}) = \left[ 1 - \frac{(g_k^T g_k)^2}{(g_k^T A g_k)(g_k^T A^{-1} g_k)} \right] E(x^{(k)}).$$

(提示: 直接计算  $[E(x^{(k)}) - E(x^{(k+1)})]/E(x^{(k)})$ , 并注意到  $A(x^{(k)} - \bar{x}) = g_k$ .)

证

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{E(x^{(k+1)})}{E(x^{(k)})} \\ &= \frac{E(x^{(k)}) - E(x^{(k+1)})}{E(x^{(k)})} \\ &= \frac{(x^{(k)} - \bar{x})^T A (x^{(k)} - \bar{x}) - (x^{(k+1)} - \bar{x})^T A (x^{(k+1)} - \bar{x})}{(x^{(k)} - \bar{x})^T A (x^{(k)} - \bar{x})} \\ &= \frac{(x^{(k)} - \bar{x})^T A (x^{(k)} - \bar{x}) - \left( x^{(k)} - \bar{x} - \frac{g_k^T g_k}{g_k^T A g_k} g_k \right)^T A \left( x^{(k)} - \bar{x} - \frac{g_k^T g_k}{g_k^T A g_k} g_k \right)}{(x^{(k)} - \bar{x})^T A (x^{(k)} - \bar{x})} \\ &= \frac{\frac{2g_k^T g_k}{g_k^T A g_k} g_k^T A (x^{(k)} - \bar{x}) - \left( \frac{g_k^T g_k}{g_k^T A g_k} \right)^2 g_k^T A g_k}{g_k^T A^{-1} g_k} \\ &= \frac{(g_k^T g_k)^2}{(g_k^T A g_k)(g_k^T A^{-1} g_k)}. \end{aligned}$$

两边乘以  $E(x^{(k)})$ , 经移项, 得到

$$E(x^{(k+1)}) = \left[ 1 - \frac{(g_k^T g_k)^2}{(g_k^T A g_k)(g_k^T A^{-1} g_k)} \right] E(x^{(k)}).$$

9. 设  $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$ ,  $A$  为对称正定矩阵, 任取初始点  $x^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ . 证明最速下降法

(10.1) 式产生的序列  $\{x^{(k)}\}$  收敛于唯一的极小点  $\bar{x}$ , 并且对每一个  $k$ , 成立

$$E(x^{(k+1)}) \leq \left( \frac{M-m}{M+m} \right)^2 E(x^{(k)}), \quad (10.2)$$

其中  $E(x) = \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T A (x - \bar{x})$ ,  $M$  和  $m$  分别是矩阵  $A$  的最大和最小特征值.

(提示: 利用习题 8 的结果和 Kantorovich 不等式. 这个不等式是, 对任意的非零向量  $x$ , 有

$$\frac{(x^T x)^2}{(x^T A x)(x^T A^{-1} x)} \geq \frac{4mM}{(m+M)^2}. \quad (10.3)$$

先证不等式 (10.2), 再证收敛性.)

证 由 8 题所证, 有

$$E(x^{(k+1)}) = \left\{ 1 - \frac{(g_k^T g_k)^2}{(g_k^T A g_k)(g_k^T A^{-1} g_k)} \right\} E(x^{(k)}). \quad (1)$$

根据 Kantorovich 不等式, 有

$$\frac{(g_k^T g_k)^2}{(g_k^T A g_k)(g_k^T A^{-1} g_k)} \geq \frac{4mM}{(m+M)^2}.$$

代入 (1) 式, 由于  $E(x^{(k)}) \geq 0$ , 必有

$$E(x^{(k+1)}) \leq \left[ 1 - \frac{4mM}{(m+M)^2} \right] E(x^{(k)}), \quad \text{即 } E(x^{(k+1)}) \leq \left( \frac{M-m}{M+m} \right)^2 E(x^{(k)}).$$

序列  $\{E(x^{(k)})\}$  是单调递减有下界的正数列, 必收敛于  $E(\bar{x}) = 0$ , 因此  $\|x^{(k)} - \bar{x}\| \rightarrow 0 (k \rightarrow +\infty)$ . 由此可知, 迭代产生的序列  $\{x^{(k)}\}$  收敛于惟一极小点  $\bar{x}$ .

10. 证明向量  $(1, 0)^T$  和  $(3, -2)^T$  关于矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

共轭.

证 由于

$$(1, 0) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = (2, 3) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 0,$$

因此  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$  关于  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  共轭.

11. 给定矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

关于  $A, B$  各求出一组共轭方向.

解 不惟一, 仅举一例.

如  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$  关于  $A$  共轭.  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  关于  $B$  共轭.

12. 设  $A$  为  $n$  阶实对称正定矩阵, 证明  $A$  的  $n$  个互相正交的特征向量  $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$  关于  $A$  共轭.

证 设  $A p^{(i)} = \lambda_i p^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n$ . 已知当  $i \neq j$  时,  $p^{(i)T} p^{(j)} = 0$ . 因此

$$p^{(i)T} A p^{(j)} = \lambda_j p^{(i)T} p^{(j)} = 0, \quad i \neq j.$$

故  $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$  关于  $A$  共轭.

13. 设  $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)} \in \mathbb{R}^n$  为一组线性无关向量,  $H$  是  $n$  阶对称正定矩阵, 令向量  $d^{(k)}$  为

$$d^{(k)} = \begin{cases} p^{(k)}, & k = 1, \\ p^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} \left[ \frac{d^{(i)T} H p^{(k)}}{d^{(i)T} H d^{(i)}} \right] d^{(i)}, & k = 2, \dots, n. \end{cases}$$

证明  $d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(n)}$  关于  $H$  共轭.

证 用数学归纳法.

当  $k=2$  时

$$\begin{aligned} d^{(1)T} H d^{(2)} &= p^{(1)T} H \left( p^{(2)} - \frac{d^{(1)T} H p^{(2)}}{d^{(1)T} H d^{(1)}} d^{(1)} \right) \\ &= p^{(1)T} H \left( p^{(2)} - \frac{p^{(1)T} H p^{(2)}}{p^{(1)T} H p^{(1)}} p^{(1)} \right) \\ &= p^{(1)T} H p^{(2)} - p^{(1)T} H p^{(2)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

即  $d^{(1)}, d^{(2)}$  关于  $H$  共轭.

设  $k < n$  时结论成立, 即对所有不同的正整数  $j, t \leq k < n$ , 有  $d^{(j)T} H d^{(t)} = 0$ .

当  $k=n$  时, 有

$$\begin{aligned} d^{(j)T} H d^{(n)} &= d^{(j)T} H \left[ p^{(n)} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d^{(i)T} H p^{(n)}}{d^{(i)T} H d^{(i)}} d^{(i)} \right] \quad (j < n) \\ &= d^{(j)T} H p^{(n)} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d^{(i)T} H p^{(n)}}{d^{(i)T} H d^{(i)}} d^{(j)T} H d^{(i)} \\ &= d^{(j)T} H p^{(n)} - d^{(j)T} H p^{(n)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此,  $k=n$  时结论成立, 即  $d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(n)}$  关于  $H$  共轭.

14. 用共轭梯度法求解下列问题:

(1)  $\min \frac{1}{2} x_1^2 + x_2^2$ , 取初始点  $x^{(1)} = (4, 4)^T$ .

(2)  $\min x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2 + 2$ , 取初始点  $x^{(1)} = (0, 0)^T$ .

(3)  $\min (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$ , 取初始点  $x^{(1)} = (1, 3)^T$ .

(4)  $\min 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + 3x_1 - 4x_2$ , 取初始点  $x^{(1)} = (3, 4)^T$ .

(5)  $\min 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + 5x_2^2$ , 取初始点  $x^{(1)} = (2, -2)^T$ .

解 目标函数记作  $f(x)$ , 在点  $x^{(k)}$  处目标函数的梯度记作  $g_k = \nabla f(x^{(k)})$ .

(1)  $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$ , 搜索方向记作  $d^{(k)}$ .

第1次迭代:

$$d^{(1)} = -g_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad x^{(1)} + \lambda d^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 - 4\lambda \\ 4 - 8\lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) = \frac{1}{2} (4 - 4\lambda)^2 + (4 - 8\lambda)^2.$$

令  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 得到

$$\lambda_1 = \frac{5}{9}, \quad \text{故 } x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{16}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{bmatrix}.$$

第2次迭代:

$$g_2 = \begin{bmatrix} \frac{16}{9} \\ -\frac{8}{9} \end{bmatrix}, \quad \beta_1 = \frac{\|g_2\|^2}{\|g_1\|^2} = \frac{4}{81}, \quad -g_2 + \beta_1 d^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{16}{9} \\ \frac{8}{9} \end{bmatrix} + \frac{4}{81} \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix} = \frac{40}{81} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

令  $d^{(2)} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 则

$$x^{(2)} + \lambda d^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{16}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{9} - 4\lambda \\ -\frac{4}{9} + \lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(2)} + \lambda d^{(2)}) = \frac{1}{2} \left( \frac{16}{9} - 4\lambda \right)^2 + \left( -\frac{4}{9} + \lambda \right)^2.$$

令  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 得到

$$\lambda_2 = \frac{4}{9}, \quad \text{故 } x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda_2 d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{最优解 } \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(2)  $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2 \end{bmatrix}$ ,  $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

第1次迭代:

$$d^{(1)} = -g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad x^{(1)} + \lambda d^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\lambda \end{bmatrix}, \quad \varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) = 8\lambda^2 - 4\lambda + 2.$$

令  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 得到

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}, \quad \text{故 } x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

第2次迭代:

$$\beta_1 = \frac{\|g_2\|^2}{\|g_1\|^2} = \frac{1}{4}, \quad d^{(2)} = -g_2 + \beta_1 d^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$x^{(2)} + \lambda d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda \\ -\frac{1}{2}(1 + \lambda) \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(2)} + \lambda d^{(2)}) = \lambda^2 + \frac{1}{2} (1 + \lambda)^2 - \lambda(1 + \lambda) - (1 + \lambda) + 2.$$

令  $\varphi'(\lambda)=0$ , 得到  $\lambda_2=1$ , 故

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \nabla f(\mathbf{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{最优解 } \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$(3) \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2(x_1-2) \\ 4(x_2-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

第1次迭代:

$$\mathbf{d}^{(1)} = -\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(1)} + \lambda \mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1+2\lambda \\ 3-8\lambda \end{bmatrix},$$

$\varphi(\lambda) = (2\lambda-1)^2 + 2(2-8\lambda)^2$ . 令  $\varphi'(\lambda)=0$ , 得到  $\lambda_1 = \frac{17}{66}$ , 故

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{50}{33} \\ \frac{31}{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{32}{33} \\ -\frac{8}{33} \end{bmatrix}.$$

第2次迭代:

$$\beta_1 = \frac{\|\mathbf{g}_2\|^2}{\|\mathbf{g}_1\|^2} = \frac{16}{33^2}, \quad -\mathbf{g}_2 + \beta_1 \mathbf{d}^{(1)} = \frac{8 \times 17}{33^2} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

令

$$\mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)} + \lambda \mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{50}{33} + 8\lambda \\ \frac{31}{33} + \lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = f(\mathbf{x}^{(2)} + \lambda \mathbf{d}^{(2)}) = \left(8\lambda - \frac{16}{33}\right)^2 + 2\left(\lambda - \frac{2}{33}\right)^2.$$

令  $\varphi'(\lambda)=0$ , 得到  $\lambda_2 = \frac{2}{33}$ , 故  $\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\nabla f(\mathbf{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 最优解  $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

$$(4) \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_2 + 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

第1次迭代

$$\mathbf{d}^{(1)} = -\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} -23 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(1)} + \lambda \mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3-23\lambda \\ 4-10\lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = 2(3-23\lambda)^2 + 2(3-23\lambda)(4-10\lambda) + (4-10\lambda)^2 + 3(3-23\lambda) - 4(4-10\lambda).$$

令  $\varphi'(\lambda)=0$ , 得到  $\lambda_1 = \frac{629}{3236} \approx 0.194$ , 故

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3-23\lambda_1 \\ 4-10\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.462 \\ 2.06 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} 1.272 \\ -2.804 \end{bmatrix}.$$

第2次迭代:

$$\beta_1 = \frac{\|\mathbf{g}_2\|^2}{\|\mathbf{g}_1\|^2} = 0.015, \quad \mathbf{d}^{(2)} = -\mathbf{g}_2 + \beta_1 \mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1.617 \\ 2.654 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(2)} + \lambda \mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1.462 - 1.617\lambda \\ 2.06 + 2.654\lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = 2(-1.462 - 1.617\lambda)^2 + 2(-1.462 - 1.617\lambda)(2.06 + 2.654\lambda) + (2.06 + 2.654\lambda)^2 + 3(-1.462 - 1.617\lambda) - 4(2.06 + 2.654\lambda).$$

令  $\varphi'(\lambda)=0$ , 即  $7.380\lambda - 9.499=0$ , 得  $\lambda_2 = 1.287$ ,

$$\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)} + \lambda_2 \mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} -3.543 \\ 5.476 \end{bmatrix}, \quad \nabla f(\mathbf{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} -0.22 \\ -0.134 \end{bmatrix}.$$

得近似解  $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3.543 \\ 5.476 \end{bmatrix}$ . 精确最优解  $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3.5 \\ 5.5 \end{bmatrix}$ , 误差是计算造成的.

$$(5) \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 10x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

第1次迭代:

$$\mathbf{d}^{(1)} = -\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(1)} + \lambda \mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2-4\lambda \\ -2+16\lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = f(\mathbf{x}^{(1)} + \lambda \mathbf{d}^{(1)}) = 2(2-4\lambda)^2 + 2(2-4\lambda)(-2+16\lambda) + 5(-2+16\lambda)^2.$$

令  $\varphi'(\lambda)=0$ , 解得  $\lambda_2 = \frac{17}{148}$ , 于是得到

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{57}{37} \\ -\frac{6}{37} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} \frac{216}{37} \\ \frac{54}{37} \end{bmatrix}.$$

第2次迭代:

$$\beta_1 = \frac{\|\mathbf{g}_2\|^2}{\|\mathbf{g}_1\|^2} = \left(\frac{27}{74}\right)^2, \quad -\mathbf{g}_2 + \beta_1 \mathbf{d}^{(1)} = \frac{27 \times 17}{37^2} \begin{bmatrix} -19 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

令

$$\mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} -19 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)} + \lambda \mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{57}{37} - 19\lambda \\ -\frac{6}{37} + 2\lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = f(\mathbf{x}^{(2)} + \lambda \mathbf{d}^{(2)}) = 2\left(\frac{57}{37} - 19\lambda\right)^2 + 2\left(\frac{57}{37} - 19\lambda\right)\left(-\frac{6}{37} + 2\lambda\right) + 5\left(-\frac{6}{37} + 2\lambda\right)^2.$$

令  $\varphi'(\lambda)=0$ , 得到  $\lambda_2 = \frac{3}{37}$ , 故  $\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\nabla f(\mathbf{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 最优解  $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

15. 设将 FR 共轭梯度法用于有三个变量的函数  $f(x)$ , 第 1 次迭代, 搜索方向  $d^{(1)} = (1, -1, 2)^T$ , 沿  $d^{(1)}$  作精确一维搜索, 得到点  $x^{(2)}$ , 又设

$$\frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_1} = -2, \quad \frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_2} = -2,$$

那么按共轭梯度法的规定, 从  $x^{(2)}$  出发的搜索方向是什么?

解 记  $g_i = \nabla f(x^{(i)})$ . 由一维搜索知,  $g_2^T d^{(1)} = 0$ , 由此得到  $g_2 = (-2, -2, 0)^T$ . 根据 FR 共轭梯度法规定,

$$g_1 = -d^{(1)} = (-1, 1, -2)^T, \quad \beta_1 = \frac{\|g_2\|^2}{\|g_1\|^2} = \frac{4}{3}, \quad \text{则 } d^{(2)} = -g_2 + \beta_1 d^{(1)} = \left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)^T.$$

16. 设  $A$  为  $n$  阶对称正定矩阵, 非零向量  $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)} \in \mathbb{R}^n$  关于矩阵  $A$  共轭. 证明:

$$(1) x = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)T} A x}{p^{(i)T} A p^{(i)}} p^{(i)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2) A^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)} p^{(i)T}}{p^{(i)T} A p^{(i)}}.$$

证 (1) 由假设,  $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$  是  $\mathbb{R}^n$  中  $n$  个线性无关向量, 可作为一组基,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , 可令

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i p^{(i)}.$$

上式两端左乘  $p^{(i)T} A$ , 则  $p^{(i)T} A x = \lambda_i p^{(i)T} A p^{(i)}$ , 从而

$$\lambda_i = \frac{p^{(i)T} A x}{p^{(i)T} A p^{(i)}}.$$

代入上式, 则

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)T} A x}{p^{(i)T} A p^{(i)}} p^{(i)}.$$

(2) 记  $A^{-1} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ , 由 (1) 所证,  $\beta_j$  可表示为

$$\beta_j = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)T} A \beta_j}{p^{(i)T} A p^{(i)}} p^{(i)} = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)} p^{(i)T} A \beta_j}{p^{(i)T} A p^{(i)}}.$$

因此可以写作

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)} p^{(i)T} A (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{p^{(i)T} A p^{(i)}} = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)} p^{(i)T}}{p^{(i)T} A p^{(i)}},$$

即

$$A^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)} p^{(i)T}}{p^{(i)T} A p^{(i)}}.$$

17. 设有非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} x^T A x \\ \text{s. t.} \quad & x \geq b, \end{aligned}$$

其中  $A$  为  $n$  阶对称正定矩阵. 设  $\bar{x}$  是问题的最优解. 证明  $\bar{x}$  与  $\bar{x} - b$  关于  $A$  共轭.

证 此问题属于凸规划,  $\bar{x}$  必是 K-T 点, 即满足

$$\begin{cases} A \bar{x} - w^T = 0, \\ w(\bar{x} - b) = 0, \\ w \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

(2)

由方程 (1), 得  $w = \bar{x}^T A$ , 两边右乘  $\bar{x} - b$ , 考虑到方程 (2), 则有

$$\bar{x}^T A (\bar{x} - b) = w(\bar{x} - b) = 0,$$

即  $\bar{x}$  与  $\bar{x} - b$  关于  $A$  共轭.

18. 用 DFP 方法求解下列问题:

$$\min x_1^2 + 3x_2^2,$$

取初始点及初始矩阵为

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

解 记  $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2$ , 则  $g_k = \nabla f(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 6x_2 \end{bmatrix}$ . 第 1 次迭代:

$$g_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad d^{(1)} = -H_1 g_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad x^{(1)} + \lambda d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1+2\lambda \\ -1+4\lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) = (1+2\lambda)^2 + 3(-1+4\lambda)^2.$$

令  $\varphi'(\lambda) = 4(1+2\lambda) + 24(-1+4\lambda) = 0$ , 得  $\lambda_1 = \frac{5}{26}$ , 故

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1+2\lambda_1 \\ -1+4\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{13} \\ -\frac{3}{13} \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} \frac{36}{13} \\ -\frac{18}{13} \end{bmatrix}.$$

第 2 次迭代:

记

$$p^{(1)} = x^{(2)} - x^{(1)} = \lambda_1 d^{(1)} = \frac{5}{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad q^{(1)} = g_2 - g_1 = \begin{bmatrix} \frac{36}{13} \\ -\frac{18}{13} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{10}{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = H_1 + \frac{p^{(1)} p^{(1)T}}{p^{(1)T} q^{(1)}} - \frac{H_1 q^{(1)} q^{(1)T} H_1}{q^{(1)T} H_1 q^{(1)}} = \frac{1}{650} \begin{bmatrix} 493 & -28 \\ -28 & 113 \end{bmatrix}, \quad -H_2 g_2 = \frac{18 \times 169}{650 \times 13} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{令 } d^{(2)} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } x^{(2)} + \lambda d^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{18}{13} \\ -\frac{3}{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{13} - 6\lambda \\ -\frac{3}{13} + \lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = \left(\frac{18}{13} - 6\lambda\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{13} + \lambda\right)^2. \text{ 令 } \varphi'(\lambda) = 0,$$

得到  $\lambda_2 = \frac{9}{39}$ , 故  $x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\nabla f(x^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . 最优解为  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

19. 用 DFP 方法求解问题的过程中, 已知

$$H_k = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad p^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad q^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

求矩阵  $H_{k+1}$ .

解 代入相应公式, 得到

$$H_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

20. 假如用 DFP 方法求解某问题时算得

$$H_k = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad p^{(k)} = \begin{bmatrix} 17 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad q^{(k)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix},$$

这些数据有什么错误?

解  $p^{(k)T} q^{(k)} = (17 \ 2) \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} = -5 < 0$ , 运用 DFP 方法求解过程中, 应有  $p^{(k)T} q^{(k)} > 0$ .

## 第11章

### 无约束最优化的直接方法题解

1. 用模式搜索法求解下列问题:

(1)  $\min x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 7$ , 取初始点  $x^{(1)} = (0, 0)^T$ , 初始步长  $\delta = 1$ ,  $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{4}$ .

(2)  $\min x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 2x_1x_2$ , 取初始点  $x^{(1)} = (1, 1)^T$ , 初始步长  $\delta = 1, \alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$ .

解 (1) 记  $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 7$ , 坐标方向  $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 初始点  $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 则  $f(x^{(1)}) = 7$ .

从  $y^{(1)} = x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  出发, 进行探测移动:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = 4 < f(y^{(1)}) = 7.$$

故令  $y^{(2)} = y^{(1)} + \delta e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 这时  $f(y^{(2)}) = 4$ .

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = 7 > f(y^{(2)}), \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = 3 < f(y^{(2)}),$$

故令  $y^{(3)} = y^{(2)} - \delta e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ , 这时  $f(y^{(3)}) = 3, f(y^{(3)}) < f(y^{(1)})$ , 故取第 2 个基点  $x^{(2)} =$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ , 这时  $f(x^{(2)}) = 3$ . 沿方向  $x^{(2)} - x^{(1)}$  进行模式移动:

$$\text{令 } y^{(1)} = x^{(2)} + \alpha(x^{(2)} - x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \text{ 则 } f(y^{(1)}) = 3.$$

从  $y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$  出发, 进行探测移动:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = 4 > f(y^{(1)}), \quad f(y^{(1)} - \delta e_1) = 4 > f(y^{(1)}),$$

故令  $y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ , 这时  $f(y^{(2)}) = 3$ .

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = 2 < f(y^{(2)}),$$

故令  $y^{(3)} = y^{(2)} + \delta e_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ , 这时  $f(y^{(3)}) = 2$ ,  $f(y^{(3)}) < f(x^{(2)})$ , 故取第 3 个基点  $x^{(3)} =$

$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ , 这时  $f(x^{(3)}) = 2$ . 沿方向  $x^{(3)} - x^{(2)}$  进行模式移动:

$$\text{令 } y^{(1)} = x^{(3)} + \alpha(x^{(3)} - x^{(2)}) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } f(y^{(1)}) = 3.$$

从  $y^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$  出发, 进行探测移动:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = 6 > f(y^{(1)}), \quad f(y^{(1)} - \delta e_1) = 2 < f(y^{(1)}),$$

故令  $y^{(2)} = y^{(1)} - \delta e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = 3 > f(y^{(2)}) = 2, \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = 3 > f(y^{(2)}),$$

故令  $y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = x^{(3)}$ .

缩小步长, 令  $\delta = \frac{1}{4}$ , 取  $y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ , 则  $f(y^{(1)}) = 2$ .

从  $y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  出发, 进行探测移动:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = \frac{33}{16} > f(y^{(1)}), \quad f(y^{(1)} - \delta e_1) = \frac{33}{16} > f(y^{(1)}),$$

故令  $y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ , 这时  $f(y^{(2)}) = 2$ .

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = \frac{33}{16} > f(y^{(2)}), \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = \frac{33}{16} > f(y^{(2)}).$$

本轮探测失败. 基点  $x^{(3)}$  已经是最优解.

(2) 记  $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 2x_1x_2$ , 从  $y^{(1)} = x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  出发, 进行探测移动:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = -6 < f(y^{(1)}) = -3,$$

故令  $y^{(2)} = y^{(1)} + \delta e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 这时  $f(y^{(2)}) = -6$ .

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = -4 > f(y^{(2)}), \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = -4 > f(y^{(2)}).$$

故令  $y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 这时  $f(y^{(3)}) = -6 < f(x^{(1)})$ . 令  $x^{(2)} = y^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . 沿方向  $x^{(2)} - x^{(1)}$  进

行模式移动:

$$\text{令 } y^{(1)} = x^{(2)} + \alpha(x^{(2)} - x^{(1)}) = 2x^{(2)} - x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } f(y^{(1)}) = -7.$$

从  $y^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  出发, 进行第 2 轮探测:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = -6 > f(y^{(1)}), \quad f(y^{(1)} - \delta e_1) = -6 > f(y^{(1)}),$$

故令  $y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 这时  $f(y^{(2)}) = -7$ .

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = -7 = f(y^{(2)}), \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = -3 > f(y^{(2)}),$$

故令  $y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ . 基点  $x^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $f(x^{(3)}) = -7$ . 进行模式移动:

$$\text{令 } y^{(1)} = x^{(3)} + \alpha(x^{(3)} - x^{(2)}) = 2x^{(3)} - x^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } f(y^{(1)}) = -6.$$

从  $y^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$  出发, 进行第 3 轮探测:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = -3 > f(y^{(1)}), \quad f(y^{(1)} - \delta e_1) = -7 < f(y^{(1)}) = -6,$$

故令  $y^{(2)} = y^{(1)} - \delta e_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 这时  $f(y^{(2)}) = -7$ .

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = -7 = f(y^{(2)}), \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = -3 > f(y^{(2)}),$$

故令  $y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = x^{(3)}$ .

退回到  $x^{(3)}$ , 减小步长, 令  $\delta = \frac{1}{2}$ , 进行第 4 轮探测:

$$\text{令 } y^{(1)} = x^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(1)}) = -7.$$

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = -6.75 > f(y^{(1)}), \quad f(y^{(1)} - \delta e_1) = -6.75 > f(y^{(1)}),$$

故令  $y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = -7.5 < f(y^{(2)}) = -7,$$

故令  $y^{(3)} = y^{(2)} + \delta e_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 这时  $f(y^{(3)}) < f(x^{(3)})$ . 令基点  $x^{(4)} = y^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 则  $f(x^{(4)}) =$

-7.5. 沿方向  $x^{(4)} - x^{(3)}$  进行模式移动:

令  $y^{(1)} = x^{(4)} + \alpha(x^{(4)} - x^{(3)}) = 2x^{(4)} - x^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 则  $f(y^{(1)}) = -7$ .

从  $y^{(1)}$  出发, 进行第 5 轮探测:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = -7.75 < f(y^{(1)}),$$

故令  $y^{(2)} = y^{(1)} + \delta e_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 这时  $f(y^{(2)}) = -7.75$ .

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = -6.75 > f(y^{(2)}), \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = -7.75 = f(y^{(2)}),$$

故令  $y^{(3)} = y^{(2)}$ . 取基点  $x^{(5)} = y^{(3)} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 这时  $f(x^{(5)}) = -7.75$ . 沿方向  $x^{(5)} - x^{(4)}$  作模式

移动:

令  $y^{(1)} = x^{(5)} + \alpha(x^{(5)} - x^{(4)}) = 2x^{(5)} - x^{(4)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 则  $f(y^{(1)}) = -7.5$ .

从  $y^{(1)}$  出发, 进行第 6 轮探测:

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = -7.75 < f(y^{(1)}),$$

故令  $y^{(2)} = y^{(1)} + \delta e_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 这时  $f(y^{(2)}) = -7.75$ .

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = -6.75 > f(y^{(2)}), \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = -7.75 = f(y^{(2)}),$$

故令  $y^{(3)} = y^{(2)}$ , 这时  $f(y^{(3)}) = -7.75 = f(x^{(5)})$ .

第 7 轮探测:

令  $\delta = \frac{1}{4}$ ,  $y^{(1)} = x^{(5)} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 则  $f(y^{(1)}) = -7.75$ .

$$f(y^{(1)} + \delta e_1) = -7.9375 < f(y^{(1)}),$$

故令  $y^{(2)} = y^{(1)} + \delta e_1 = \begin{bmatrix} 3.75 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 这时  $f(y^{(2)}) = -7.9375$ .

$$f(y^{(2)} + \delta e_2) = -7.6875 > f(y^{(2)}), \quad f(y^{(2)} - \delta e_2) = -7.9375 = f(y^{(2)}),$$

故令  $y^{(3)} = y^{(2)}$ , 这时  $f(y^{(3)}) < f(x^{(5)}) = -7.75$ . 令  $x^{(6)} = y^{(3)} = \begin{bmatrix} 3.75 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

继续做下去, 可以得到更好的近似解. 易知问题的精确解  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

2. 用 Rosenbrock 方法解下列问题:

(1)  $\min (x_2 - 2x_1)^2 + (x_2 - 2)^4$ , 取初始点  $x^{(1)} = (3, 0)^T$ , 初始步长

$$\delta_1^{(0)} = \delta_2^{(0)} = \frac{1}{10}, \quad \alpha = 2, \quad \beta = -\frac{1}{2}.$$

要求迭代两次.

(2)  $\min x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - x_1x_2 + 3$ , 取初始点  $x^{(1)} = (0, 8)^T$ , 初始步长

$$\delta_1^{(0)} = \delta_2^{(0)} = 1, \quad \alpha = 3, \quad \beta = -\frac{1}{2}.$$

解 (1) 记  $f(x) = (x_2 - 2x_1)^2 + (x_2 - 2)^4$ .

第 1 轮探测:

$$y^{(1)} = x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f(y^{(1)}) = f(x^{(1)}) = 52, \quad d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\delta_{11} = \delta_{21} = 0.1, \quad f(y^{(1)} + \delta_{11}d^{(1)}) = 54.44 > f(y^{(1)}), \quad \text{故令 } \delta_{12} = -0.05,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(2)}) = 52.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{21}d^{(2)}) = 47.842 < f(y^{(2)}), \quad \text{故令 } \delta_{22} = 0.2,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{21}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

第 2 轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad f(y^{(1)}) = 47.842, \quad \delta_{12} = -0.05, \quad \delta_{22} = 0.2.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{12}d^{(1)}) = 46.672 < f(y^{(1)}), \quad \text{故令 } \delta_{13} = -0.1,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{12}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.95 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(2)}) = 46.672.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{22}d^{(2)}) = 39.712 < f(y^{(2)}), \quad \text{故令 } \delta_{23} = 0.4,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{22}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.95 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(3)}) = 39.712.$$

第 3 轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.95 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad f(y^{(1)}) = 39.712, \quad \delta_{13} = -0.1, \quad \delta_{23} = 0.4.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{13}d^{(1)}) = 37.512 < f(y^{(1)}), \quad \text{故令 } \delta_{14} = -0.2,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{13}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.85 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(2)}) = 37.512.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{23}d^{(2)}) = 27.856 < f(y^{(2)}), \quad \text{故令 } \delta_{24} = 0.8,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{23}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.85 \\ 0.7 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(3)}) = 27.856.$$

第4轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.85 \\ 0.7 \end{bmatrix}, \quad f(y^{(1)}) = 27.856, \quad \delta_{14} = -0.2, \quad \delta_{24} = 0.8.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{14}d^{(1)}) = 24.016 < f(y^{(1)}), \quad \text{故令 } \delta_{15} = -0.4,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{14}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.65 \\ 0.7 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(2)}) = 24.016.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{24}d^{(2)}) = 14.503 < f(y^{(2)}), \quad \text{故令 } \delta_{25} = 1.6,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{24}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.65 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(3)}) = 14.503.$$

第5轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.65 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \quad f(y^{(1)}) = 14.503, \quad \delta_{15} = -0.4, \quad \delta_{25} = 1.6.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{15}d^{(1)}) = 9.063 < f(y^{(1)}), \quad \text{故令 } \delta_{16} = -0.8,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{15}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.25 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(2)}) = 9.063.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{25}d^{(2)}) = 3.424 < f(y^{(2)}), \quad \text{故令 } \delta_{26} = 3.2,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{25}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.25 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(3)}) = 3.424.$$

第6轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.25 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad f(y^{(1)}) = 3.424, \quad \delta_{16} = -0.8, \quad \delta_{26} = 3.2.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{16}d^{(1)}) = 1.504 < f(y^{(1)}), \quad \text{故令 } \delta_{17} = -1.6,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{16}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(2)}) = 1.504.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{26}d^{(2)}) = 353.440 > f(y^{(2)}), \quad \text{故令 } \delta_{27} = -1.6,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(3)}) = 1.504.$$

第7轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad f(y^{(1)}) = 1.504, \quad \delta_{17} = -1.6, \quad \delta_{27} = -1.6.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{17}d^{(1)}) = 13.024 > f(y^{(1)}), \quad \text{故令 } \delta_{18} = 0.8,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(2)}) = 1.504.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{27}d^{(2)}) = 2.023 > f(y^{(2)}),$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(y^{(3)}) = 1.504.$$

沿两个方向探测均失败,  $f(y^{(3)}) < f(x^{(1)})$ , 令

$$x^{(2)} = y^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(x^{(2)}) = 1.504.$$

下面构造一组新的单位正交方向. 为此先求出沿每个方向移动步长的代数和. 由于

$$x^{(2)} - x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.55 \\ 3.1 \end{bmatrix},$$

沿  $d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  移动步长的代数和  $\lambda_1 = -1.55$ , 沿  $d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  移动步长的代数和  $\lambda_2 = 3.1$ . 再用

施密特正交化方法构造一组新的标准正交基. 令

$$p^{(1)} = \lambda_1 d^{(1)} + \lambda_2 d^{(2)} = -1.55 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3.1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.55 \\ 3.1 \end{bmatrix},$$

$$p^{(2)} = \lambda_2 d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.1 \end{bmatrix}.$$

把  $p^{(1)}, p^{(2)}$  正交化, 令

$$q^{(1)} = p^{(1)} = \begin{bmatrix} -1.55 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \quad q^{(2)} = p^{(2)} - \frac{p^{(2)T} q^{(1)}}{q^{(1)T} q^{(1)}} q^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.24 \\ 0.62 \end{bmatrix}.$$

再单位化, 令

$$d^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.447 \\ 0.894 \end{bmatrix}, \quad d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.894 \\ 0.447 \end{bmatrix}.$$

从探测得到的点  $x^{(2)}$  出发, 沿着新的单位正交方向  $d^{(1)}, d^{(2)}$  进行新一阶段的探测. 下面给出进一步探测过程.

第1轮探测:

$$\text{令 } y^{(1)} = x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 1.504. \text{ 记 } \delta_{11} = \delta_{21} = 0.1, \alpha = 2, \beta = -0.5. \text{ 探测方向为}$$

$$d^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.447 \\ 0.894 \end{bmatrix}, \quad d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.894 \\ 0.447 \end{bmatrix}.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{11}d^{(1)}) = 2.142 > f(y^{(1)}), \quad \text{故令 } \delta_{12} = -0.05,$$



$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 1.504.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{21}d^{(2)}) = 1.723 > f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{22} = -0.05,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 1.504 = f(x^{(2)}), \text{ 继续探测.}$$

第2轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.1 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 1.504, \delta_{12} = -0.05, \delta_{22} = -0.05.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{12}d^{(1)}) = 1.251 < f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{13} = -0.1,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{12}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.472 \\ 3.055 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 1.251.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{22}d^{(2)}) = 1.171 < f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{23} = -0.1,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{22}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.427 \\ 3.033 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 1.171.$$

第3轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.427 \\ 3.033 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 1.171, \delta_{13} = -0.1, \delta_{23} = -0.1.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{13}d^{(1)}) = 0.794 < f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{14} = -0.2,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{13}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.472 \\ 2.944 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 0.794.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{23}d^{(2)}) = 0.671 < f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{24} = -0.2,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{23}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.383 \\ 2.899 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 0.671.$$

第4轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.383 \\ 2.899 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 0.671, \delta_{14} = -0.2, \delta_{24} = -0.2.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{14}d^{(1)}) = 0.319 < f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{15} = -0.4,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{14}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.472 \\ 2.720 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 0.319.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{24}d^{(2)}) = 0.161 < f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{25} = -0.4,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{24}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.293 \\ 2.631 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 0.161.$$

第5轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.293 \\ 2.631 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 0.161, \delta_{15} = -0.4, \delta_{25} = -0.4.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{15}d^{(1)}) = 0.456 > f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{16} = 0.2,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.293 \\ 2.631 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 0.161.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{25}d^{(2)}) = 0.380 > f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{26} = 0.2,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.293 \\ 2.631 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 0.161.$$

沿两个方向探测均失败,  $f(y^{(3)}) < f(x^{(2)}) = 1.504$ , 根据算法规定, 需构造一组新的单位正交方向, 再进行新的探测阶段. 这里不再做下去. 至此, 得到近似解:

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.293 \\ 2.631 \end{bmatrix}, f(x^{(3)}) = 0.161.$$

问题的精确解  $x^* = (1, 2)^T$ .

(2) 记  $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - x_1x_2 + 3$ , 取初始探测方向  $d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . 初始点

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

第1轮探测:

$$y^{(1)} = x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 67, \delta_{11} = \delta_{21} = 1, \alpha = 3, \beta = -\frac{1}{2}.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{11}d^{(1)}) = 57 < f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{12} = 3,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{11}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 57.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{21}d^{(2)}) = 73 > f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{22} = -0.5,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 57.$$

第2轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 57, \delta_{12} = 3, \delta_{22} = -0.5.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{12}d^{(1)}) = 39 < f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{13} = 9,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{12}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 39.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{22}d^{(2)}) = 33.25 < f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{23} = -1.5,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{22}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7.5 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 33.25.$$

第3轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7.5 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 33.25, \delta_{13} = 9, \delta_{23} = -1.5.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{13}d^{(1)}) = 91.75 > f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{14} = -4.5,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7.5 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 33.25.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{23}d^{(2)}) = 19 < f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{24} = -4.5,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{23}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 19.$$

第4轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 19, \delta_{14} = -4.5, \delta_{24} = -4.5.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{14}d^{(1)}) = 43.75 > f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{15} = 2.25,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 19.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{24}d^{(2)}) = 3.25 < f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{25} = -13.5,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{24}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 3.25.$$

第5轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 3.25, \delta_{15} = 2.25, \delta_{25} = -13.5.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{15}d^{(1)}) = 16.188 > f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{16} = -1.125,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 3.25.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{25}d^{(2)}) = 199 > f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{26} = 6.75,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 3.25.$$

沿两个方向探测均失败,  $f(y^{(3)}) < f(x^{(1)}) = 67$ .

$$\text{令 } x^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(x^{(2)}) = 3.25.$$

构造一组新的探测方向:

$$\lambda_1 = 1 + 3 = 4, \lambda_2 = -0.5 - 1.5 - 4.5 = -6.5.$$

令

$$p^{(1)} = \lambda_1 d^{(1)} + \lambda_2 d^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6.5 \end{bmatrix}, p^{(2)} = \lambda_2 d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6.5 \end{bmatrix}.$$

把  $p^{(1)}, p^{(2)}$  正交化, 令

$$q^{(1)} = p^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6.5 \end{bmatrix}, q^{(2)} = p^{(2)} - \frac{p^{(2)T}q^{(1)}}{q^{(1)T}q^{(1)}}q^{(1)} = \begin{bmatrix} -2.901 \\ -1.785 \end{bmatrix}.$$

再单位化, 令

$$d^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.524 \\ -0.852 \end{bmatrix}, d^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.852 \\ -0.524 \end{bmatrix}.$$

从探测得到的  $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}$  出发, 沿着新构造的单位正交方向探测.

第1轮探测:

$$y^{(1)} = x^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 3.25, \delta_{11} = \delta_{21} = 1, \alpha = 3, \beta = -\frac{1}{2}.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{11}d^{(1)}) = 7.383 > f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{12} = -0.5,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 3.25.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{21}d^{(2)}) = 1.346 < f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{22} = 3,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \delta_{21}d^{(2)} = \begin{bmatrix} 3.148 \\ 0.976 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 1.346.$$

第2轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 3.148 \\ 0.976 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 1.346, \delta_{12} = -0.5, \delta_{22} = 3.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{12}d^{(1)}) = 0.590 < f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{13} = -1.5,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \delta_{12}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.886 \\ 1.402 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 0.590.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{22}d^{(2)}) = 2.204 > f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{23} = -1.5,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.886 \\ 1.402 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 0.590.$$

第3轮探测:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.886 \\ 1.402 \end{bmatrix}, f(y^{(1)}) = 0.590, \delta_{13} = -1.5, \delta_{23} = -1.5.$$

$$f(y^{(1)} + \delta_{13}d^{(1)}) = 2.664 > f(y^{(1)}), \text{ 故令 } \delta_{14} = 0.75,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.886 \\ 1.402 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(2)}) = 0.590.$$

$$f(y^{(2)} + \delta_{23}d^{(2)}) = 3.523 > f(y^{(2)}), \text{ 故令 } \delta_{24} = 0.75,$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.886 \\ 1.402 \end{bmatrix}, \text{ 这时 } f(y^{(3)}) = 0.590.$$

沿两个方向探测均失败,  $f(y^{(3)}) < f(x^{(2)}) = 3.25$ . 令

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.886 \\ 1.402 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(\mathbf{x}^{(3)}) = 0.590.$$

需构造新的单位正交方向, 再进行探测. 这里不再作下去. 近似解

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.886 \\ 1.402 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(\mathbf{x}^{(3)}) = 0.590.$$

实际上, 问题最优解

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^*) = 0.$$

3. 用单纯形搜索法求解下列问题:

(1)  $\min 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$ , 取初始单纯形的顶点

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix},$$

取因子  $\alpha=1, \gamma=2, \beta=\frac{1}{2}$ . 要求迭代 4 次.

(2)  $\min (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_1 + x_2 - 4)^2$ , 取初始单纯形的顶点

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix},$$

取因子  $\alpha=1, \gamma=2, \beta=\frac{1}{2}$ . 要求画出这个算法的进程.

解 (1) 第 1 次迭代:

$f(\mathbf{x}^{(1)})=45, f(\mathbf{x}^{(2)})=125, f(\mathbf{x}^{(3)})=61$ , 最高点  $\mathbf{x}^{(h)}=\mathbf{x}^{(2)}$ , 次高点  $\mathbf{x}^{(g)}=\mathbf{x}^{(3)}$ , 最低点  $\mathbf{x}^{(l)}=\mathbf{x}^{(1)}$ . 线段  $\mathbf{x}^{(1)}\mathbf{x}^{(3)}$  的中点为

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix},$$

最高点  $\mathbf{x}^{(2)}$  经过点  $\bar{\mathbf{x}}$  的反射点为

$$\mathbf{x}^{(4)} = \bar{\mathbf{x}} + \alpha(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(2)}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(4)}) = 13 < f(\mathbf{x}^{(1)}) = 45.$$

进行扩展, 令

$$\mathbf{x}^{(5)} = \bar{\mathbf{x}} + \gamma(\mathbf{x}^{(4)} - \bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(5)}) = 8 < f(\mathbf{x}^{(4)}) = 13.$$

用扩展点  $\mathbf{x}^{(5)}$  取代最高点  $\mathbf{x}^{(2)}$ , 得到新的单纯形, 其顶点为

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

第 2 次迭代:

$f(\mathbf{x}^{(1)})=45, f(\mathbf{x}^{(2)})=8, f(\mathbf{x}^{(3)})=61$ . 最高点  $\mathbf{x}^{(h)}=\mathbf{x}^{(3)}$ , 次高点  $\mathbf{x}^{(g)}=\mathbf{x}^{(1)}$ , 最低点

$$\mathbf{x}^{(l)}=\mathbf{x}^{(2)}.$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 8.5 \end{bmatrix}.$$

最高点  $\mathbf{x}^{(3)}$  经过点  $\bar{\mathbf{x}}$  的反射点为

$$\mathbf{x}^{(4)} = \bar{\mathbf{x}} + \alpha(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(4)}) = 4 < f(\mathbf{x}^{(1)}) = 8.$$

进行扩展, 令

$$\mathbf{x}^{(5)} = \bar{\mathbf{x}} + \gamma(\mathbf{x}^{(4)} - \bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3.5 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(5)}) = 42.25 > f(\mathbf{x}^{(4)}) = 4.$$

用  $\mathbf{x}^{(4)}$  替换最高点  $\mathbf{x}^{(3)}$ , 得到新的单纯形, 顶点是

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

第 3 次迭代:

$f(\mathbf{x}^{(1)})=45, f(\mathbf{x}^{(2)})=8, f(\mathbf{x}^{(3)})=4$ , 最高点  $\mathbf{x}^{(h)}=\mathbf{x}^{(1)}$ , 次高点  $\mathbf{x}^{(g)}=\mathbf{x}^{(2)}$ , 最低点  $\mathbf{x}^{(l)}=\mathbf{x}^{(3)}$ .

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{x}^{(1)}$  经  $\bar{\mathbf{x}}$  的反射点为

$$\mathbf{x}^{(4)} = \bar{\mathbf{x}} + \alpha(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(4)}) = 101 > f(\mathbf{x}^{(g)}) = 8.$$

由于  $\min\{f(\mathbf{x}^{(1)}), f(\mathbf{x}^{(4)})\} = f(\mathbf{x}^{(1)}) = 45$ , 将  $\mathbf{x}^{(1)}$  向  $\bar{\mathbf{x}}$  压缩, 令

$$\mathbf{x}^{(5)} = \bar{\mathbf{x}} + \beta(\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(5)}) = 8 < f(\mathbf{x}^{(1)}) = 45.$$

用  $\mathbf{x}^{(5)}$  替换  $\mathbf{x}^{(1)}$ , 得到新的单纯形, 其顶点记为

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

第 4 次迭代:

$f(\mathbf{x}^{(1)})=8, f(\mathbf{x}^{(2)})=8, f(\mathbf{x}^{(3)})=4$ . 由于  $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$  两点函数值相等, 任取其一作为最高点, 不妨令  $\mathbf{x}^{(h)}=\mathbf{x}^{(1)}$ .  $\mathbf{x}^{(2)}\mathbf{x}^{(3)}$  的中点是

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{x}^{(1)}$  经  $\bar{\mathbf{x}}$  的反射点为

$$\mathbf{x}^{(4)} = \bar{\mathbf{x}} + \alpha(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(4)}) = 36 > f(\mathbf{x}^{(g)}) = 8.$$

由于  $\min\{f(\mathbf{x}^{(1)}), f(\mathbf{x}^{(4)})\} = f(\mathbf{x}^{(1)})$ , 将  $\mathbf{x}^{(1)}$  向  $\bar{\mathbf{x}}$  压缩, 令

$$x^{(5)} = \bar{x} + \beta(x^{(1)} - \bar{x}) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7.5 \end{bmatrix}, \quad f(x^{(5)}) = 2.25 < f(x^{(1)}) = 8.$$

用  $x^{(5)}$  替换  $x^{(1)}$ , 得到新的单纯形, 其顶点记为

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7.5 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7.5 \end{bmatrix} \text{ 作为近似解. 精确解 } x^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(2) 第2个问题与(1)题解法类似, 经多次迭代, 得到以下列3点为顶点的单纯形:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.53 \\ 1.938 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.655 \\ 1.688 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.81 \\ 1.375 \end{bmatrix}.$$

其中  $x^{(2)}$  可作为近似解, 函数值  $f(x^{(2)}) = 0.334$ . 精确解  $x^* = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)^T$ ,  $f(x^*) = \frac{1}{3}$ . 由于迭代进展比较缓慢, 迭代过程从略.

4. 用 Powell 方法解下列问题:

$$\min \quad \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1,$$

取初始点和初始搜索方向分别为

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad d^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

解 第1轮搜索:

记  $f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1$ , 置  $x^{(1,0)} = x^{(0)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ . 从  $x^{(1,0)}$  出发, 沿  $d^{(1,1)}$  搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,1)}),$$

其中

$$x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,1)} = \begin{bmatrix} -2 + \lambda \\ 4 \end{bmatrix}.$$

记

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,1)}) = \frac{3}{2}(-2 + \lambda)^2 + 8 - 4(-2 + \lambda) - 2(-2 + \lambda).$$

令  $\varphi'(\lambda) = 3(-2 + \lambda) - 4 - 2 = 0$ , 得  $\lambda_1 = 4$ , 故

$$x^{(1,1)} = x^{(1,0)} + \lambda_1 d^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

再从  $x^{(1,1)}$  出发, 沿  $d^{(1,2)}$  搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(1,1)} + \lambda d^{(1,2)})$$

其中

$$x^{(1,1)} + \lambda d^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 + \lambda \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1,1)} + \lambda d^{(1,2)}) = 6 + \frac{1}{2}(4 + \lambda)^2 - 2(4 + \lambda) - 4.$$

取  $\varphi'(\lambda) = (4 + \lambda) - 2 = 0$ , 得  $\lambda_2 = -2$ , 故

$$x^{(1,2)} = x^{(1,1)} + \lambda_1 d^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

令

$$d^{(1,3)} = x^{(1,2)} - x^{(1,0)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

从  $x^{(1,2)}$  出发, 沿方向  $d^{(1,3)}$  搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(1,2)} + \lambda d^{(1,3)}),$$

其中

$$x^{(1,2)} + \lambda d^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 2 + 4\lambda \\ 2 - 2\lambda \end{bmatrix}.$$

令

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= f(x^{(1,2)} + \lambda d^{(1,3)}) \\ &= \frac{3}{2}(2 + 4\lambda)^2 + \frac{1}{2}(2 - 2\lambda)^2 - (2 + 4\lambda)(2 - 2\lambda) - 2(2 + 4\lambda), \end{aligned}$$

取  $\varphi'(\lambda) = 12(2 + 4\lambda) - 2(2 - 2\lambda) - 4(2 - 2\lambda) + 2(2 + 4\lambda) - 8 = 0$ , 则得  $\lambda_3 = -\frac{2}{17}$ , 经第1轮搜索, 得到

$$x^{(1)} = x^{(1,2)} + \lambda_3 d^{(1,3)} = \begin{bmatrix} \frac{26}{17} \\ \frac{38}{17} \end{bmatrix}.$$

第2轮搜索:

$$d^{(2,1)} = d^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d^{(2,2)} = d^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad x^{(2,0)} = x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{26}{17} \\ \frac{38}{17} \end{bmatrix}.$$

从  $x^{(2,0)}$  出发, 沿  $d^{(2,1)}$  搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(2,0)} + \lambda d^{(2,1)}),$$

其中

$$x^{(2,0)} + \lambda d^{(2,1)} = \begin{bmatrix} \frac{26}{17} \\ \frac{38}{17} \\ \frac{26}{17} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{17} \\ \frac{38}{17} + \lambda \\ \frac{26}{17} + \lambda \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = \frac{3}{2} \left( \frac{26}{17} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{38}{17} + \lambda \right)^2 - \frac{26}{17} \left( \frac{38}{17} + \lambda \right) - 2 \times \frac{26}{17},$$

取  $\varphi'(\lambda) = \frac{38}{17} + \lambda - \frac{26}{17} = 0$ , 得  $\lambda_1 = -\frac{12}{17}$ , 故

$$x^{(2,1)} = x^{(2,0)} + \lambda_1 d^{(2,1)} = \begin{bmatrix} \frac{26}{17} \\ \frac{26}{17} \\ \frac{26}{17} \end{bmatrix}.$$

从  $x^{(2,1)}$  出发, 沿  $d^{(2,2)}$  搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(2,1)} + \lambda d^{(2,2)}),$$

其中

$$x^{(2,1)} + \lambda d^{(2,2)} = \begin{bmatrix} \frac{26}{17} \\ \frac{26}{17} \\ \frac{26}{17} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{17} + 4\lambda \\ \frac{26}{17} - 2\lambda \\ \frac{26}{17} - 2\lambda \end{bmatrix}.$$

令

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= f(x^{(2,1)} + \lambda d^{(2,2)}) \\ &= \frac{3}{2} \left( \frac{26}{17} + 4\lambda \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{26}{17} - 2\lambda \right)^2 - \left( \frac{26}{17} + 4\lambda \right) \left( \frac{26}{17} - 2\lambda \right) - 2 \left( \frac{26}{17} + 4\lambda \right), \end{aligned}$$

取  $\varphi'(\lambda) = 12 \left( \frac{26}{17} + 4\lambda \right) - 2 \left( \frac{26}{17} - 2\lambda \right) - 4 \left( \frac{26}{17} - 2\lambda \right) + 2 \left( \frac{26}{17} + 4\lambda \right) - 8 = 0$ , 得到  $\lambda_2 = -\frac{18}{289}$ , 故

$$x^{(2,2)} = \begin{bmatrix} \frac{370}{17^2} \\ \frac{478}{17^2} \\ \frac{478}{17^2} \end{bmatrix}.$$

由于

$$x^{(2,2)} - x^{(2,0)} = -\frac{24}{17^2} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$\text{令 } d^{(2,3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

从  $x^{(2,2)}$  出发, 沿方向  $d^{(2,3)}$  搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(2,2)} + \lambda d^{(2,3)}),$$

其中

$$x^{(2,2)} + \lambda d^{(2,3)} = \begin{bmatrix} \frac{370}{17^2} + 3\lambda \\ \frac{478}{17^2} + 7\lambda \\ \frac{478}{17^2} + 7\lambda \end{bmatrix}.$$

令  $\varphi(\lambda) = f(x^{(2,2)} + \lambda d^{(2,3)})$ , 取  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 得到  $\lambda_3 = -\frac{27}{17^2}$ , 故

$$x^{(2)} = x^{(2,3)} = x^{(2,2)} + \lambda_3 d^{(2,3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

已经达到最优解  $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $f(x^*) = -1$ .

5. 用改进的 Powell 方法解下列问题:

$$\min (-x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_2 - x_3)^2,$$

取初始点和初始搜索方向分别为

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad d^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

解 第1轮搜索:

记  $f(x) = (-x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_2 - x_3)^2$ ,  $x^{(1,0)} = x^{(0)}$ ,  $f(x^{(1,0)}) = 2$ .

从  $x^{(1,0)}$  出发沿  $d^{(1,1)}$  搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,1)}),$$

其中

$$x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \lambda \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,1)}) = (-\lambda + 1)^2 + \lambda^2 + (\lambda + 1)^2,$$

取  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 得到  $\lambda_1 = 0$ , 因此

$$x^{(1,1)} = x^{(1,0)} + \lambda_1 d^{(1,1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad f(x^{(1,1)}) = 2.$$

从  $x^{(1,1)}$  出发,沿  $d^{(1,2)}$  搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(1,1)} + \lambda d^{(1,2)}),$$

其中

$$x^{(1,1)} + \lambda d^{(1,2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 + \lambda \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1,1)} + \lambda d^{(1,2)}) = (1 + \lambda)^2 + \lambda^2 + (1 + \lambda)^2,$$

取  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 得到  $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$ , 从而有

$$x^{(1,2)} = x^{(1,1)} + \lambda_2 d^{(1,2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad f(x^{(1,2)}) = \frac{2}{3}.$$

从  $x^{(1,2)}$  出发,沿  $d^{(1,3)}$  搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(1,2)} + \lambda d^{(1,3)}),$$

其中

$$x^{(1,2)} + \lambda d^{(1,3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} + \lambda \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1,2)} + \lambda d^{(1,3)}) = \left(\frac{1}{3} + \lambda\right)^2 + \left(\frac{2}{3} + \lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)^2,$$

取  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 得到  $\lambda_3 = -\frac{2}{9}$ , 因此

$$x^{(1,3)} = x^{(1,2)} + \lambda_3 d^{(1,3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{18} \end{bmatrix}, \quad f(x^{(1,3)}) = \frac{42}{81}.$$

令

$$d^{(1,4)} = x^{(1,3)} - x^{(1,0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} \end{bmatrix},$$

从  $x^{(1,0)}$  出发,沿方向  $d^{(1,4)}$  搜索:

$$\min_{\lambda} f(x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,4)}),$$

其中

$$x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,4)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{2}{3}\lambda \\ \frac{1}{2} - \frac{2}{9}\lambda \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(1,0)} + \lambda d^{(1,4)}) = \left(1 - \frac{8}{9}\lambda\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\lambda\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{9}\lambda\right)^2,$$

取  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 得到  $\lambda_4 = \frac{9}{8}$ , 因此

$$x^{(1)} = x^{(1,0)} + \lambda_4 d^{(1,4)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad f(x^{(1)}) = \frac{1}{2}.$$

$$\max\{f(x^{(1,0)}) - f(x^{(1,1)}), f(x^{(1,1)}) - f(x^{(1,2)}), f(x^{(1,2)}) - f(x^{(1,3)})\}$$

$$= \max\left\{0, \frac{4}{3}, \frac{12}{81}\right\}$$

$$= f(x^{(1,1)}) - f(x^{(1,2)}).$$

$$\text{记 } x^{(2,0)} = x^{(1)}, \left[ \frac{f(x^{(1,0)}) - f(x^{(2,0)})}{f(x^{(1,1)}) - f(x^{(1,2)})} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{8}} < \lambda_4 = \frac{9}{8}.$$

第2轮搜索:

$$d^{(2,1)} = d^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d^{(2,2)} = d^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d^{(2,3)} = d^{(1,4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(2,0)} = \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(2,0)}) = \frac{1}{2}.$$

从  $\mathbf{x}^{(2,0)}$  出发, 沿  $\mathbf{d}^{(2,1)}$  搜索:

$$\min_{\lambda} f(\mathbf{x}^{(2,0)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,1)}),$$

其中

$$\mathbf{x}^{(2,0)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \lambda \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = f(\mathbf{x}^{(2,0)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,1)}) = (-\lambda)^2 + \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)^2,$$

取  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 得到  $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ , 则

$$\mathbf{x}^{(2,1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(2,1)}) = \frac{1}{6}.$$

从  $\mathbf{x}^{(2,1)}$  出发, 沿  $\mathbf{d}^{(2,2)}$  搜索:

$$\min_{\lambda} f(\mathbf{x}^{(2,1)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,2)}),$$

其中

$$\mathbf{x}^{(2,1)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} + \lambda \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = f(\mathbf{x}^{(2,1)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,2)}) = \left(\frac{1}{3} + \lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{6} + \lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - \lambda\right)^2,$$

取  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 得到  $\lambda_2 = -\frac{1}{9}$ , 于是

$$\mathbf{x}^{(2,2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{36} \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(2,2)}) = \frac{7}{54}.$$

从  $\mathbf{x}^{(2,2)}$  出发, 沿  $\mathbf{d}^{(2,3)}$  搜索:

$$\min_{\lambda} f(\mathbf{x}^{(2,2)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,3)}),$$

其中

$$\mathbf{x}^{(2,2)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{36} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} - \frac{2}{3}\lambda \\ \frac{5}{36} - \frac{2}{9}\lambda \end{bmatrix}.$$

令

$$\varphi(\lambda) = f(\mathbf{x}^{(2,2)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,3)}) = \left(\frac{2}{9} - \frac{8}{9}\lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{18} + \frac{4}{9}\lambda\right)^2 + \left(\frac{5}{18} - \frac{4}{9}\lambda\right)^2,$$

取  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 得到  $\lambda_3 = \frac{1}{4}$ , 因此

$$\mathbf{x}^{(2,3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^{(2,3)}) = \frac{1}{18}.$$

令

$$\mathbf{d}^{(2,4)} = \mathbf{x}^{(2,3)} - \mathbf{x}^{(2,0)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

从  $\mathbf{x}^{(2,0)}$  出发, 沿  $\mathbf{d}^{(2,4)}$  搜索:

$$\min_{\lambda} f(\mathbf{x}^{(2,0)} + \lambda \mathbf{d}^{(2,4)}),$$

其中

$$x^{(2,0)} + \lambda d^{(2,4)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\lambda \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\lambda \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\lambda \end{bmatrix}.$$

令  $\varphi(\lambda) = f(x^{(2,0)} + \lambda d^{(2,4)}) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\lambda\right)^2$ , 取  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 得到  $\lambda_4 = \frac{3}{2}$ , 因此

$$x^{(2)} = x^{(2,0)} + \lambda_4 d^{(2,4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

已经达到最优解.

## 第12章

### 可行方向法题解

1. 对于下列每种情形, 写出在点  $x \in S$  处的可行方向集:

(1)  $S = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$ ; (2)  $S = \{x | Ax \leq b, Ex = e, x \geq 0\}$ ;

(3)  $S = \{x | Ax \geq b, x \geq 0\}$ .

解 答案如下:

(1)  $\{d | Ad = 0, I_1 d \geq 0\}$ ;

(2)  $\{d | A_1 d \leq 0, Ed = 0, I_1 d \geq 0\}$ ;

(3)  $\{d | A_1 d \geq 0, I_1 d \geq 0\}$ .

各式中,  $A_1$  和  $I_1$  分别是  $x$  处起作用约束系数矩阵.

2. 考虑下列问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 - 12x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

求出在点  $\hat{x} = (1, 1, 0)^T$  处的一个下降可行方向.

解 目标函数  $f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 - 12x_3$  的梯度是

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 6 \\ x_1 + 4x_2 - 2 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad \text{故 } \nabla f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

在  $\hat{x} = (1, 1, 0)^T$  处起作用约束有

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

在  $\hat{x}$  处可行方向满足下列条件:



$$\begin{cases} d_1 + d_2 + d_3 = 0, \\ d_3 \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

下降方向满足  $\nabla f(\hat{x})^T d < 0$ , 即

$$-3d_1 + 3d_2 - 12d_3 < 0. \quad (2)$$

同时满足上述 3 个条件的方向是  $\hat{x}$  处下降可行方向. 如  $d = (0, -1, 1)^T$ .

3. 用 Zoutendijk 方法求解下列问题:

$$(1) \min x_1^2 + 4x_2^2 - 34x_1 - 32x_2$$

$$\text{s. t. } 2x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$x_2 \leq 2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

取初始点  $x^{(1)} = (1, 2)^T$ .

$$(2) \min x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3 - 4x_1 - 6x_2$$

$$\text{s. t. } x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

取初始可行点  $x^{(1)} = (0, 0, 0)^T$ .

解 (1) 将问题写作:

$$\min x_1^2 + 4x_2^2 - 34x_1 - 32x_2$$

$$\text{s. t. } -2x_1 - x_2 \geq -6$$

$$-x_2 \geq -2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{目标函数的梯度 } \nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 34 \\ 8x_2 - 32 \end{bmatrix}.$$

第 1 次迭代:

在点  $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -32 \\ -16 \end{bmatrix}$ , 起作用约束和不起作用约束的系数矩阵分别记为

$$A_1 = [0, -1], A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{约束右端分别记为 } b_1 = [-2], b_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

先求在  $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  处下降可行方向  $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$ , 解下列线性规划问题:

$$\min \nabla f(x^{(1)})^T d$$

$$\text{s. t. } A_1 d \geq 0,$$

$$|d_1| \leq 1,$$

$$|d_2| \leq 1.$$

用单纯形方法, 求得

$$d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

再从  $x^{(1)}$  出发, 沿可行下降方向  $d^{(1)}$  搜索:

$$\min f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)})$$

$$\text{s. t. } 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}.$$

(1)

其中  $\lambda_{\max}$  是步长  $\lambda$  的上限. 为使后继点是可行点,  $\lambda$  必须满足

$$A_2(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \geq b_2.$$

记

$$\hat{d} = A_2 d^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = b_2 - A_2 x^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

则

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} \mid \hat{d}_i < 0 \right\} = \left\{ \frac{-2}{-2} \right\} = 1.$$

问题(1)即

$$\min (1 + \lambda)^2 - 34\lambda - 82$$

$$\text{s. t. } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

解得  $\lambda_1 = 1$ , 后继点

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 d^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -30 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

第 2 次迭代:

在  $x^{(2)}$  处起作用约束和不起作用约束系数矩阵分别记为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

相应的约束右端记为

$$b_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

求在  $x^{(2)}$  处可行下降方向  $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$ :

$$\min \nabla f(x^{(2)})^T d$$

$$\text{s. t. } A_1 d \geq 0,$$

$$|d_1| \leq 1,$$

$$|d_2| \leq 1.$$

用单纯形方法求得  $d^{(2)} = (0, 0)^T$ .

根据教材中定理 12.1.2,  $x^{(2)} = (2, 2)^T$  是 K-T 点. 由于给定问题是凸规划, 因此  $x^{(2)}$  也是最优解, 最优值  $f_{\min} = -112$ .

(2) 目标函数的梯度记为

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 6 \\ -2x_1 + x_2 + 6x_3 \end{bmatrix}.$$

第 1 次迭代:

在点  $x^{(1)} = (0, 0, 0)^T$ , 目标函数的梯度, 起作用约束系数矩阵, 不起作用约束系数矩阵及约束右端, 分别记为

$$\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = [-1, -2, -1], \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = -4.$$

先求在  $x^{(1)}$  处下降可行方向  $d = (d_1, d_2, d_3)^T$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(x^{(1)})^T d \\ \text{s. t.} \quad & A_1 d \geq 0, \\ & |d_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

用单纯形方法, 求得下降可行方向

$$d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

再从  $x^{(1)}$  出发, 沿方向  $d^{(1)}$  搜索:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}. \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\lambda_{\max}$  是步长  $\lambda$  的上限. 为保持可行性,  $\lambda$  必须满足

$$A_2(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \geq b_2.$$

记  $\hat{d} = A_2 d^{(1)} = -4, \hat{b} = b_2 - A_2 x^{(1)} = -4$ , 则

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} \mid \hat{d}_i < 0 \right\} = 1.$$

问题(1)即

$$\begin{aligned} \min \quad & 6\lambda^2 - 10\lambda \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

解得  $\lambda_1 = \frac{5}{6}$ . 后继点

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 d^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}, \quad f(x^{(2)}) = -4.167.$$

第 2 次迭代:

在点  $x^{(2)} = (\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6})^T$ , 目标函数的梯度  $\nabla f(x^{(2)}) = (-\frac{19}{6}, -1, \frac{25}{6})^T$ . 在  $x^{(2)}$  无起作用约束, 因此令

$$d^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{19}{6} \\ 1 \\ -\frac{25}{6} \end{bmatrix}.$$

从  $x^{(2)}$  出发, 沿最速下降方向  $d^{(2)}$  搜索:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x^{(2)} + \lambda d^{(2)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}. \end{aligned} \quad (2)$$

计算步长  $\lambda$  的上限  $\lambda_{\max}$ .

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{d} = A_2 d^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{19}{6} \\ 1 \\ -\frac{25}{6} \end{bmatrix},$$

$$\hat{b} = b_2 - A_2 x^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} \mid \hat{d}_i < 0 \right\} = \min \left\{ \left( -\frac{2}{3} \right) / (-1), \left( -\frac{5}{6} \right) / \left( -\frac{25}{6} \right) \right\} = \frac{1}{5}.$$

问题(2)即

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(\lambda) = f(x^{(2)} + \lambda d^{(2)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

令  $\varphi'(\lambda)=0$ , 得到  $\lambda_2=0.159$ , 后继点

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda_2 d^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.337 \\ 0.992 \\ 0.171 \end{bmatrix}, \quad f(x^{(3)}) = -6.418.$$

第3次迭代:

在点  $x^{(3)}$  不存在起作用约束, 令

$$d^{(3)} = -\nabla f(x^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0.676 \\ 0.524 \\ 0.656 \end{bmatrix}.$$

从  $x^{(3)}$  出发, 沿  $d^{(3)}$  搜索:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x^{(3)} + \lambda d^{(3)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}. \end{aligned} \quad (3)$$

求  $\lambda_{\max}$ :

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = b_2 - A_2 x^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.508 \\ -1.337 \\ -0.992 \\ -0.171 \end{bmatrix},$$

$$\hat{d} = A_2 d^{(3)} = \begin{bmatrix} -2.38 \\ 0.676 \\ 0.524 \\ 0.656 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\max} = \min \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} \mid \hat{d}_i < 0 \right\} = 0.213.$$

问题(3)即

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(\lambda) = f(x^{(3)} + \lambda d^{(3)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq 0.213. \end{aligned}$$

令  $\varphi'(\lambda)=0$ , 得到  $\lambda_3=0.213$ .

$$x^{(4)} = x^{(3)} + \lambda_3 d^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.481 \\ 1.104 \\ 0.311 \end{bmatrix}, \quad f(x^{(4)}) = -6.570.$$

经3次迭代, 得近似解  $x^{(4)} = (1.481, 1.104, 0.311)^T$ , 目标函数值  $f(x^{(4)}) = -6.570$ . 不

再迭代. 运用最优性条件, 求得问题的精确解  $x^* = (2, \frac{3}{4}, \frac{1}{2})^T$ ,  $f_{\min} = -6.75$ .

4. 用梯度投影法求解下列问题:

$$\begin{aligned} (1) \min \quad & (4-x_2)(x_1-3)^2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1+x_2 \leq 3, \\ & x_1 \leq 2, \\ & x_2 \leq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned} \quad \begin{aligned} (2) \min \quad & x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 5 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

取初始点  $x^{(1)} = (2, 0)^T$ .

取初始点  $x^{(1)} = (1, 2)^T$ .

$$\begin{aligned} (3) \min \quad & x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 - 12x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ & x_1 - 2x_2 \geq -3, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

取初始点  $x^{(1)} = (1, 0, 1)^T$ .

解 (1) 目标函数  $f(x) = (4-x_2)(x_1-3)^2$ , 梯度

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1-3)(4-x_2) \\ -(x_1-3)^2 \end{bmatrix}.$$

第1次迭代:

在点  $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  处, 目标函数梯度为  $\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}$ , 起作用约束和不起作用约束系数

矩阵, 相应的约束右端, 分别为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

投影矩阵

$$P = I - A_1^T (A_1 A_1^T)^{-1} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d^{(1)} = -P \nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$w = (A_1 A_1^T)^{-1} A_1 \nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

从  $A_1$  中去掉第2行, 记为

$$\hat{A}_1 = [-1, -1].$$

投影矩阵

$$\hat{P} = I - \hat{A}_1^T (\hat{A}_1 \hat{A}_1^T)^{-1} \hat{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

投影方向

$$\hat{d}^{(1)} = -\hat{P} \nabla f(x^{(1)}) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

从  $x^{(1)}$  出发, 沿  $\hat{d}^{(1)}$  搜索:

$$\begin{aligned} \min & f(x^{(1)} + \lambda \hat{d}^{(1)}) \\ \text{s. t. } & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}. \end{aligned} \quad (1)$$

求步长上限  $\lambda_{\max}$ :

$$\hat{b} = b_2 - A_2 x^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \hat{d} = A_2 \hat{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

故

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} \mid \hat{d}_i < 0 \right\} = \frac{1}{2}.$$

问题(1)即

$$\begin{aligned} \min & 8(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 \\ \text{s. t. } & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

得到沿  $\hat{d}^{(1)}$  方向搜索步长  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ , 后继点

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 \hat{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(x^{(2)}) = 3.$$

第2次迭代:

在点  $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  处有

$$\nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

投影矩阵

$$P = I - A_1^T (A_1 A_1^T)^{-1} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$d^{(2)} = -P \nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w = (A_1 A_1^T)^{-1} A_1 \nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} > 0,$$

$x^{(2)} = (2, 1)^T$  是 K-T 点, 满足最优解的二阶充分条件, 因此也是最优解.  $f_{\min} = 3$ .

(2) 在点  $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  处, 目标函数梯度、起作用约束及不起作用约束的系数矩阵、相应的约束右端分别为

$$\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = [0, 1], \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

投影矩阵

$$P = I - A_1^T (A_1 A_1^T)^{-1} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

搜索方向

$$d^{(1)} = -P \nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

从  $x^{(1)}$  出发, 沿  $d^{(1)}$  搜索:

$$\begin{aligned} \min & f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \\ \text{s. t. } & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}. \end{aligned} \quad (1)$$

求步长  $\lambda$  的上限  $\lambda_{\max}$ :

$$\hat{b} = b_2 - A_2 x^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \hat{d} = A_2 d^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix},$$

故

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} \mid \hat{d}_i < 0 \right\} = \frac{1}{2}.$$

问题(1)即

$$\begin{aligned} \min & (2 - 4\lambda)^2 + 5 \\ \text{s. t. } & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

求得步长  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ , 后继点

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(x^{(2)}) = 5.$$

由于目标函数等值线是以  $(0, -1)$  为中心的一族同心圆, 因此  $x^{(2)} = (0, 0)^T$  已是最优解.

(3) 第1次迭代:

在点  $x^{(1)} = (1, 0, 1)^T$  处, 目标函数梯度、不等式约束中起作用约束和不起作用约束的系数矩阵及右端、等式约束系数矩阵、起作用约束系数矩阵分别为:

$$\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad A_1 = [0, 1, 0], \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = 0, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = [1, 1, 1], \quad M = \begin{bmatrix} A_1 \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

投影矩阵

$$P = I - M^T(MM^T)^{-1}M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

搜索方向

$$d^{(1)} = -P \nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

从  $x^{(1)}$  出发, 沿  $d^{(1)}$  搜索:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}. \end{aligned}$$

求步长上限  $\lambda_{\max}$ :

$$\hat{b} = b_2 - A_2 x^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{d} = A_2 d^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix},$$

故

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} \mid \hat{d}_i < 0 \right\} = \frac{1}{4}.$$

问题(1)即

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

令  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 则得  $\lambda = 1$ . 取搜索步长  $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ .

后继点

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{这时 } f(x^{(2)}) = -24.$$

第2次迭代:

在点  $x^{(2)}$  处, 有

$$\nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

投影矩阵

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = [1 \quad 1 \quad 1], \quad M = \begin{bmatrix} A_1 \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$P = I - M^T(MM^T)^{-1}M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

令

$$d^{(2)} = -P \nabla f(x^{(2)}) = [0 \quad 0 \quad 0]^T, \quad w = (MM^T)^{-1}M \nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -12 \end{bmatrix},$$

其中  $u = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} \geq 0$ , 因此  $x^{(2)} = (0, 0, 2)^T$  是 K-T 点. 由于是凸规划, K-T 点就是最优解, 最优

目标函数值  $f_{\min} = -24$ .

5. 用既约梯度法求解下列问题:

$$(1) \min \quad 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \quad (2) \min \quad (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad \text{s. t.} \quad x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$x_1 + 5x_2 + x_4 = 5, \quad x_1, x_2 \geq 0,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad \text{取初始点 } x^{(1)} = (1, 0)^T.$$

取初始点  $x^{(1)} = (1, 0, 1, 4)^T$ .

解 (1)  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$ ,  $\nabla f(x) = (4x_1 - 2x_2 - 4, -2x_1 + 4x_2 - 6, 0, 0)^T$ , 等式约束系数矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

第1次迭代:

先求既约梯度. 在  $x^{(1)} = (1, 0, 1, 4)^T$ , 目标函数的梯度为  $\nabla f(x^{(1)}) = (0, -8, 0, 0)^T$ . 取基

$$x_B^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{非基变量 } x_N^{(1)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla_{x_N} f(x) = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

既约梯度

$$r(x_N^{(1)}) = \nabla_{x_N} f(x) - (B^{-1}N)^T \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{令 } d_N^{(1)} = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}, d_B^{(1)} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_4 \end{bmatrix} = -B^{-1}Nd_N^{(1)} = \begin{bmatrix} -8 \\ -32 \end{bmatrix}.$$

搜索方向  $d^{(1)} = [-8, 8, 0, -32]^T$ . 从  $x^{(1)}$  出发, 沿方向  $d^{(1)}$  搜索:

$$\min f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)})$$

$$\text{s. t. } 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}.$$

(1)

其中步长上限

$$\lambda_{\max} = \left\{ -\frac{x_j^{(1)}}{d_j^{(1)}} \mid d_j^{(1)} < 0 \right\} = \min \left\{ -\frac{1}{8}, -\frac{4}{-32} \right\} = \frac{1}{8}.$$

问题(1)即

$$\min \varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)})$$

$$\text{s. t. } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{8}.$$

令  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 解得  $\lambda = \frac{1}{12} < \frac{1}{8}$ , 令步长  $\lambda_1 = \frac{1}{12}$ , 后继点

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 d^{(1)} = \left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3} \right]^T, \text{ 这时 } f(x^{(2)}) = -\frac{14}{3}.$$

第2次迭代:

$$x^{(2)} = \left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3} \right]^T, \nabla f(x^{(2)}) = [-4, -4, 0, 0]^T.$$

令

$$x_B^{(2)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$x_N^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \nabla_{x_N} f(x) = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

既约梯度

$$r(x_N^{(2)}) = \nabla_{x_N} f(x) - (B^{-1}N)^T \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

下面确定搜索方向, 令

$$d_N^{(2)} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, d_B^{(2)} = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = -B^{-1}Nd_N^{(2)} = \begin{bmatrix} -8 \\ -24 \end{bmatrix}.$$

搜索方向  $d^{(2)} = [4, 4, -8, -24]^T$ . 从  $x^{(2)}$  出发, 沿  $d^{(2)}$  搜索:

$$\min f(x^{(2)} + \lambda d^{(2)})$$

$$\text{s. t. } 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}.$$

(2)

其中步长上限

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ -\frac{x_j^{(2)}}{d_j^{(2)}} \mid d_j^{(2)} < 0 \right\} = \frac{1}{18}.$$

问题(2)即

$$\min \varphi(\lambda) = f(x^{(2)} + \lambda d^{(2)})$$

$$\text{s. t. } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{18}.$$

令  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 得到  $\lambda = \frac{1}{2} > \frac{1}{18}$ , 因此令  $\lambda_2 = \frac{1}{18}$ , 后继点

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda_2 d^{(2)} = \left( \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}, 0 \right)^T, \text{ 这时 } f(x^{(3)}) = -6.346.$$

第3次迭代:

$$x^{(3)} = \left( \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}, 0 \right)^T, \nabla f(x^{(3)}) = \left[ -\frac{32}{9}, -\frac{32}{9}, 0, 0 \right]^T.$$

令

$$x_B^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{8}{9} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} -\frac{32}{9} \\ -\frac{32}{9} \end{bmatrix},$$

$$x_N^{(3)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \nabla_{x_N} f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

既约梯度

$$r(x_N^{(3)}) = \nabla_{x_N} f(x) - (B^{-1}N)^T \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} \frac{32}{9} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由于  $x_3 = \frac{5}{9} > 0$ , 在搜索方向中应令  $d_3 = -\frac{32}{9}$ , 因此令

$$d_N^{(3)} = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{32}{9} \\ 0 \end{bmatrix}, d_B^{(3)} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = -B^{-1}Nd_N^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{40}{9} \\ -\frac{8}{9} \end{bmatrix}.$$

搜索方向  $d^{(3)} = \left[ \frac{40}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{32}{9}, 0 \right]^T$ . 从  $x^{(3)}$  出发, 沿  $d^{(3)}$  搜索:

$$\min f(x^{(3)} + \lambda d^{(3)})$$

$$\text{s. t. } 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}.$$

(3)

其中步长上限

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ -\frac{x_j^{(3)}}{d_j^{(3)}} \mid d_j^{(3)} < 0 \right\} = \frac{5}{32}.$$

问题(3)即

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(\lambda) = f(x^{(3)} + \lambda d^{(3)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \frac{5}{32}. \end{aligned}$$

令  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 解得  $\lambda = \frac{4}{31} < \frac{5}{32}$ , 令  $\lambda_3 = \frac{4}{31}$ , 后继点

$$x^{(4)} = x^{(3)} + \lambda_3 d^{(3)} = \left( \frac{35}{31}, \frac{24}{31}, \frac{3}{31}, 0 \right)^T, \text{ 这时 } f(x^{(4)}) = -7.16.$$

第4次迭代:

$$x^{(4)} = \left( \frac{35}{31}, \frac{24}{31}, \frac{3}{31}, 0 \right)^T, \quad \nabla f(x^{(4)}) = \left[ -\frac{32}{31}, -\frac{160}{31}, 0, 0 \right]^T.$$

令

$$x_B^{(4)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{35}{31} \\ \frac{24}{31} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} -\frac{32}{31} \\ -\frac{160}{31} \end{bmatrix},$$

$$x_N^{(4)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{31} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla_{x_N} f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

既约梯度

$$r(x_N^{(4)}) = \nabla_{x_N} f(x) - (B^{-1}N)^T \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{32}{31} \end{bmatrix}.$$

由于  $x_4^{(4)} = 0$ , 搜索方向  $d^{(4)}$  中应令  $d_4 = 0$ , 因此

$$d_N^{(4)} = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_B^{(4)} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = -B^{-1}Nd_N^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

搜索方向  $d^{(4)} = [0, 0, 0, 0]^T$ , 因此  $x^{(4)}$  是 K-T 点. 由于给定问题是凸规划, 因此  $x^{(4)}$  就是最优解. 最优值  $f_{\min} = -7.161$ .

(2) 引进松弛变量  $x_3$ , 将(2)题化为

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

初始点  $x^{(1)} = (1, 0, 1)^T$ ,  $f(x^{(1)}) = 5$ . 目标函数的梯度为  $\nabla f(x) = [2(x_1 - 2), 2(x_2 - 2), 0]^T$ .

第1次迭代:

$$x^{(1)} = (1, 0, 1)^T, \quad \nabla f(x^{(1)}) = [-2, -4, 0]^T.$$

令

$$x_B^{(1)} = x_1 = 1, \quad B = [1], \quad \nabla_{x_B} f(x) = [-2],$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad N = [1, 1], \quad \nabla_{x_N} f(x) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

既约梯度

$$r(x_N^{(1)}) = \nabla_{x_N} f(x) - (B^{-1}N)^T \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(-2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{令 } d_N^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, d_B^{(1)} = -B^{-1}Nd_N^{(1)} = 0.$$

搜索方向  $d^{(1)} = [0, 2, -2]^T$ . 从  $x^{(1)}$  出发, 沿  $d^{(1)}$  搜索:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}. \end{aligned} \quad (1)$$

其中步长上限

$$\lambda_{\max} = \min \left\{ -\frac{x_j^{(1)}}{d_j^{(1)}} \mid d_j^{(1)} < 0 \right\} = \frac{1}{2}.$$

问题(1)即

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$x^{(1)} + \lambda d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\lambda \\ 1 - 2\lambda \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = 1 + (2\lambda - 2)^2.$$

令  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 得到  $\lambda = 1 > \frac{1}{2}$ . 令  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ , 后继点  $x^{(2)} = (1, 1, 0)^T$ ,  $f(x^{(2)}) = 2$ .

第2次迭代:

$$x^{(2)} = (1, 1, 0)^T, \quad \nabla f(x^{(2)}) = [-2, -2, 0]^T.$$

令

$$x_B^{(2)} = x_1 = 1, \quad B = [1], \quad \nabla_{x_B} f(x) = -2,$$

$$x_N^{(2)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N = [1, 1], \quad \nabla_{x_N} f(x) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

既约梯度

$$r(x_N^{(2)}) = \nabla_{x_N} f(x) - (B^{-1}N)^T \nabla_{x_B} f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

由于  $x^{(2)} = (1, 1, 0)^T$  中  $x_3^{(2)} = 0$ , 因此令

$$d_N^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, d_B^{(2)} = -Bnd_N^{(2)} = 0, d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$x^{(2)}$  是 K-T 点, 由于给定问题是凸规划, 因此  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  是最优解,  $f_{\min} = 2$ .

6. 用 Frank-Wolfe 方法求解下列问题:

$$\begin{aligned} (1) \min & x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t. } & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ & x_1 + 5x_2 + x_4 = 6, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad \begin{aligned} (2) \min & x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + 4x_2 + 4 \\ \text{s. t. } & x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

取初始点  $x^{(1)} = (1, 1, 3)^T$ .

取初始点  $x^{(1)} = (2, 0, 1, 4)^T$ , 迭代 2 次.

解 (1) 令  $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$ , 则  $\nabla f(x) = (2x_1 - x_2 - 2, -x_1 + 2x_2 + 3, 0, 0)^T$ , 可行域记作  $S$ .

第 1 次迭代:

$$x^{(1)} = (2, 0, 1, 4)^T, \quad \nabla f(x^{(1)}) = (2, 1, 0, 0)^T.$$

先解线性规划, 确定搜索方向:

$$\begin{aligned} \min & \nabla f(x^{(1)})^T x \\ \text{s. t. } & x \in S. \end{aligned}$$

上式即

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t. } & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ & x_1 + 5x_2 + x_4 = 6, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

线性规划最优解  $y^{(1)} = (0, 0, 3, 6)^T$ .

令搜索方向

$$d^{(1)} = y^{(1)} - x^{(1)} = (-2, 0, 2, 2)^T,$$

则  $\nabla f(x^{(1)})^T d^{(1)} = -4$ .

从  $x^{(1)}$  出发, 沿  $d^{(1)}$  搜索:

$$\begin{aligned} \min & \varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \\ \text{s. t. } & 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

令  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 得  $\lambda = \frac{1}{2}$ , 令步长  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ , 得到

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 d^{(1)} = (1, 0, 2, 5)^T, \quad \text{这时 } f(x^{(2)}) = -1.$$

第 2 次迭代:

$$x^{(2)} = (1, 0, 2, 5)^T, \quad \nabla f(x^{(2)}) = (0, 2, 0, 0)^T.$$

解线性规划, 确定搜索方向:

$$\begin{aligned} \min & \nabla f(x^{(2)})^T x \\ \text{s. t. } & x \in S. \end{aligned}$$

上式即

$$\begin{aligned} \min & 2x_2 \\ \text{s. t. } & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ & x_1 + 5x_2 + x_4 = 6, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

线性规划最优解  $y^{(2)} = (0, 0, 3, 6)^T$ .

令搜索方向

$$d^{(2)} = y^{(2)} - x^{(2)} = (-1, 0, 1, 1)^T,$$

则  $\nabla f(x^{(2)})^T d^{(2)} = 0$ .

$x^{(2)} = (1, 0, 2, 5)^T$  是 K-T 点, 由于给定问题是凸规划, 因此也是最优解.

(2) 令  $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + 4x_2 + 4$ , 则  $\nabla f(x) = (2x_1 - x_2, -x_1 + 4x_2 + 4, 0)^T$ , 可行域记作  $S$ .

第 1 次迭代:

$$x^{(1)} = (1, 1, 3)^T, \quad \nabla f(x^{(1)}) = (1, 7, 0)^T.$$

先解线性规划, 确定搜索方向:

$$\begin{aligned} \min & \nabla f(x^{(1)})^T x \\ \text{s. t. } & x \in S. \end{aligned}$$

上式即

$$\begin{aligned} \min & x_1 + 7x_2 \\ \text{s. t. } & x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

线性规划最优解  $y^{(1)} = (0, 0, 5)^T$ .

令搜索方向

$$d^{(1)} = y^{(1)} - x^{(1)} = [-1, -1, 2]^T,$$

则  $\nabla f(x^{(1)})^T d^{(1)} = -8$ .

从  $x^{(1)}$  出发, 沿  $d^{(1)}$  搜索:

$$\begin{aligned} \min & \varphi(\lambda) = f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \\ \text{s. t. } & 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

令  $\varphi'(\lambda) = 0$ , 解得  $\lambda = 2$ , 为保持可行性, 令步长  $\lambda_1 = 1$ . 则

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 d^{(1)} = (0, 0, 5)^T, \quad f(x^{(2)}) = 4.$$

第 2 次迭代:

$$x^{(2)} = (0, 0, 5)^T, \quad \nabla f(x^{(2)}) = [0, 4, 0]^T.$$



解线性规划,确定搜索方向:

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(x^{(2)})^T x \\ \text{s. t.} \quad & x \in S. \end{aligned}$$

上式即

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

线性规划最优解  $y^{(2)} = (0, 0, 5)^T$ .

令  $d^{(2)} = y^{(2)} - x^{(2)} = (0, 0, 0)^T$ , 则  $\nabla f(x^{(2)})^T d^{(2)} = 0$ ,  $x^{(2)} = (0, 0, 5)^T$  是 K-T 点, 也是最优解.

7. 考虑约束  $Ax \leq b$ , 令  $P = I - A_1^T(A_1 A_1^T)^{-1} A_1$ , 其中  $A_1$  的每一行是在已知点  $\hat{x}$  处的紧约束的梯度, 试解释下列各式的几何意义:

- (1)  $P \nabla f(\hat{x}) = 0$ ;
- (2)  $P \nabla f(\hat{x}) = \nabla f(\hat{x})$ ;
- (3)  $P \nabla f(\hat{x}) \neq 0$ .

解 (1)  $P \nabla f(\hat{x})$  是向量  $\nabla f(\hat{x})$  在矩阵  $A_1$  的零空间上的投影,  $P \nabla f(\hat{x}) = 0$  表明  $\nabla f(\hat{x})$  在  $A_1$  的零空间上的投影为零向量, 因此在  $\hat{x}$  处不存在下降可行方向.

(2)  $P \nabla f(\hat{x}) = \nabla f(\hat{x})$  表示  $\nabla f(\hat{x})$  在  $A_1$  的零空间上的投影等于  $\nabla f(\hat{x})$ , 因此  $\nabla f(\hat{x})$  在  $A_1$  的零空间上.

(3)  $P \nabla f(\hat{x}) \neq 0$ , 表明  $\nabla f(\hat{x})$  在  $A_1$  的零空间上的投影不等于零向量, 因此  $d = -P \nabla f(\hat{x})$  是  $\hat{x}$  处下降可行方向.

8. 考虑问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s. t.} \quad & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l. \end{aligned}$$

设  $\hat{x}$  是可行点,  $I = \{i | g_i(\hat{x}) = 0\}$ . 证明  $\hat{x}$  为 K-T 点的充要条件是下列问题的目标函数的最优值为零:

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(\hat{x})^T d \\ \text{s. t.} \quad & \nabla g_i(\hat{x})^T d \geq 0, \quad i \in I, \\ & \nabla h_j(\hat{x})^T d = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l, \\ & -1 \leq d_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

证  $\hat{x}$  为 K-T 点的充要条件是, 存在乘子  $w_i \geq 0 (i \in I)$  和  $v_j (j = 1, 2, \dots, l)$ , 使得

$$\nabla f(\hat{x}) - \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\hat{x}) - \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\hat{x}) = 0. \quad (1)$$

记  $A_1 = [\nabla g_{i_1}(\hat{x}), \nabla g_{i_2}(\hat{x}), \dots, \nabla g_{i_k}(\hat{x})]$ ,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_k)^T$ ,  $B = [\nabla h_1(\hat{x}), \nabla h_2(\hat{x}), \dots, \nabla h_l(\hat{x})]$ ,  $v = (v_1, v_2, \dots, v_l)^T = p - q$ ,  $p \geq 0, q \geq 0$ . (1) 式可写成

$$(-A_1, -B, B) \begin{bmatrix} w \\ p \\ q \end{bmatrix} = -\nabla f(\hat{x}), \quad \begin{bmatrix} w \\ p \\ q \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2)$$

根据 Farkas 定理(参看定理 1.4.6), 系统(2)有解的充要条件是系统

$$\begin{bmatrix} -A_1^T \\ -B^T \\ B^T \end{bmatrix} d \leq 0, \quad -\nabla f(\hat{x})^T d > 0. \quad (3)$$

无解, 即

$$\begin{cases} \nabla f(\hat{x})^T d < 0, \\ A_1^T d \geq 0, \\ B^T d = 0 \end{cases}$$

无解. 因此线性规划的最优值为零.

## 第13章

## CHAPTER 13

## 惩罚函数法题解

1. 用外点法求解下列问题:

(1)  $\min x_1^2 + x_2^2$

s. t.  $x_2 = 1$ ;

(3)  $\min -x_1 - x_2$

s. t.  $1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$ ;

(5)  $\min -x_1 x_2 x_3$

s. t.  $72 - x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$ .

解 (1) 记  $f(x) = x_1^2 + x_2^2, h(x) = x_2 - 1$ , 定义罚函数

$$F(x, \sigma) = f(x) + \sigma h^2(x) = x_1^2 + x_2^2 + \sigma(x_2 - 1)^2, \quad \sigma > 0, \text{ 很大.}$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2x_1 = 0, \\ 2x_2 + 2\sigma(x_2 - 1) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\bar{x}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sigma}{1+\sigma} \end{bmatrix}, \quad \text{令 } \sigma \rightarrow +\infty, \text{ 则 } \bar{x}_\sigma \rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

 $\bar{x}$  为最优解, 最优值  $f_{\min} = 1$ .

(2)  $\min x_1^2 + x_2^2$

s. t.  $x_1 + x_2 - 1 = 0$ ;

(4)  $\min x_1^2 + x_2^2$

s. t.  $2x_1 + x_2 - 2 \leq 0,$   
 $x_2 \geq 1$ ;

(2) 记  $f(x) = x_1^2 + x_2^2, h(x) = x_1 + x_2 - 1$ . 定义罚函数

$$F(x, \sigma) = f(x) + \sigma h^2(x) = x_1^2 + x_2^2 + \sigma(x_1 + x_2 - 1)^2, \quad \sigma > 0, \text{ 很大.}$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\sigma(x_1 + x_2 - 1) = 0, \\ 2x_2 + 2\sigma(x_1 + x_2 - 1) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\bar{x}_\sigma = \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{1+2\sigma} \\ \frac{\sigma}{1+2\sigma} \end{bmatrix}, \quad \text{令 } \sigma \rightarrow +\infty, \text{ 则 } \bar{x}_\sigma \rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

 $\bar{x}$  为最优解, 最优值  $f_{\min} = \frac{1}{2}$ .(3) 记  $f(x) = -x_1 - x_2, h(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2$ . 定义罚函数

$$F(x, \sigma) = f(x) + \sigma h^2(x) = -x_1 - x_2 + \sigma(1 - x_1^2 - x_2^2)^2, \quad \sigma > 0, \text{ 很大.}$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -1 - 4\sigma x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0, \\ -1 - 4\sigma x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0. \end{cases}$$

当点  $x$  不在可行域上时,  $1 - x_1^2 - x_2^2 \neq 0$ , 由上式得  $x_1 = x_2$ , 代入上式, 则有

$$8\sigma x_1^3 - 4\sigma x_1 - 1 = 0,$$

即

$$2x_1^3 - x_1 = \frac{1}{4\sigma}.$$

由于有界闭域上的连续函数存在极小点, 可令  $\sigma \rightarrow +\infty$ , 则

$$2\bar{x}_1^3 - \bar{x}_1 = 0.$$

从而得到最小值点:  $\bar{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ , 最小值  $f_{\min} = -\sqrt{2}$ .

(4) 记  $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ ,  $g_1(x) = -2x_1 - x_2 + 2$ ,  $g_2(x) = x_2 - 1$ . 定义罚函数:

$$F(x, \sigma) = x_1^2 + x_2^2 + \sigma[(\max\{0, 2x_1 + x_2 - 2\})^2 + (\max\{0, 1 - x_2\})^2]$$

下面, 分作 4 种情形, 分别求解:

① 若极小点是可行域的内点, 令

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_2} = 0. \end{cases}$$

解得  $\bar{x} = (0, 0)^T$ ,  $\bar{x}$  不是可行解.

② 若极小点在可行域的两条边界线上, 则取

$$F(x, \sigma) = x_1^2 + x_2^2 + \sigma(-2x_1 - x_2 + 2)^2 + \sigma(x_2 - 1)^2.$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2x_1 - 4\sigma(-2x_1 - x_2 + 2) = 0, \\ 2x_2 - 2\sigma(-2x_1 - x_2 + 2) + 2\sigma(x_2 - 1) = 0. \end{cases}$$

解得

$$x(\sigma) = \left( \frac{4\sigma + 2\sigma^2}{1 + 6\sigma + 4\sigma^2}, \frac{3\sigma + 4\sigma^2}{1 + 6\sigma + 4\sigma^2} \right)^T.$$

令  $\sigma \rightarrow +\infty$ , 得到  $\bar{x} = \left( \frac{1}{2}, 1 \right)^T$ .  $\bar{x}$  是可行点, 但不是 K-T 点.

③ 若极小点在可行域的第 1 条边界上, 则取

$$F(x, \sigma) = x_1^2 + x_2^2 + \sigma(-2x_1 - x_2 + 2)^2.$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2x_1 - 4\sigma(-2x_1 - x_2 + 2) = 0, \\ 2x_2 - 2\sigma(-2x_1 - x_2 + 2) = 0. \end{cases}$$

解得

$$x(\sigma) = \left( \frac{4\sigma}{1 + 5\sigma}, \frac{2\sigma}{1 + 5\sigma} \right)^T.$$

令  $\sigma \rightarrow +\infty$ , 得  $\bar{x} = \left( \frac{4}{5}, \frac{2}{5} \right)^T$ , 不是可行解.

④ 若极小点在可行域的第 2 条边界上, 取

$$F(x, \sigma) = x_1^2 + x_2^2 + \sigma(x_2 - 1)^2.$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2x_1 = 0, \\ 2x_2 + 2\sigma(x_2 - 1) = 0. \end{cases}$$

解得

$$x(\sigma) = \left( 0, \frac{\sigma}{1 + \sigma} \right)^T.$$

令  $\sigma \rightarrow +\infty$ , 得到  $\bar{x} = (0, 1)^T$ . 经检验,  $\bar{x}$  是可行解, 也是 K-T 点. 由于给定问题是凸规划, 因此  $\bar{x}$  是最优解, 最优值  $f_{\min} = 1$ .

(5) 记  $f(x) = -x_1x_2x_3$ ,  $h(x) = 72 - x_1 - 2x_2 - 2x_3$ . 定义罚函数

$$F(x, \sigma) = f(x) + \sigma h^2(x) = -x_1x_2x_3 + \sigma(72 - x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2, \sigma > 0.$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_1} = -x_2x_3 - 2\sigma(72 - x_1 - 2x_2 - 2x_3) = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_2} = -x_1x_3 - 4\sigma(72 - x_1 - 2x_2 - 2x_3) = 0, \\ \frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x_3} = -x_1x_2 - 4\sigma(72 - x_1 - 2x_2 - 2x_3) = 0. \end{cases}$$

解非线性方程组, 得解

$$\bar{x}(\sigma) = \begin{bmatrix} 12(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4\sigma}) \\ 6(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4\sigma}) \\ 6(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4\sigma}) \end{bmatrix}.$$

令  $\sigma \rightarrow +\infty$ , 得到  $\bar{x} = (24, 12, 12)^T$ , 易知  $\bar{x}$  是 K-T 点, 且满足二阶充分条件, 因此是最优解, 最优值  $f_{\min} = -3456$ .

2. 考虑下列非线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^3 + x_2^3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 = 1. \end{aligned}$$

(1) 求问题的最优解;

## (2) 定义罚函数

$$F(x, \sigma) = x_1^3 + x_2^3 + \sigma(x_1 + x_2 - 1)^2,$$

讨论能否通过求解无约束问题

$$\min F(x, \sigma),$$

来获得原来约束问题的最优解? 为什么?

解 (1) 将  $x_2 = 1 - x_1$  代入目标函数, 化成无约束问题:

$$\min f(x_1) = 3x_1^3 - 3x_1 + 1.$$

令  $f'(x_1) = 6x_1 - 3 = 0$ , 得到  $x_1 = \frac{1}{2}$ . 约束问题的最优解  $\bar{x} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ ,  $f_{\min} = \frac{1}{4}$ .

(2) 不能通过解  $\min F(x, \sigma)$  来获得约束问题的最优解. 因为不满足所有无约束问题最优解含于紧集的条件.

## 3. 用内点法求解下列问题:

$$(1) \min x$$

$$\text{s. t. } x \geq 1;$$

$$(2) \min (x+1)^2$$

$$\text{s. t. } x \geq 0.$$

解 (1) 定义障碍函数

$$G(x, r_k) = x + \frac{r_k}{x-1},$$

解下列问题:

$$\min G(x, r_k)$$

$$\text{s. t. } x \in \text{int } S,$$

其中  $S = \{x | x-1 \geq 0\}$ ,  $r_k$  是罚因子,  $r_k > 0$ , 很小. 令

$$\frac{dG(x, r_k)}{dx} = 1 - \frac{r_k}{(x-1)^2} = 0,$$

解得  $x_k = 1 + \sqrt{r_k}$ . 令  $r_k \rightarrow 0$ , 得到  $\bar{x} = 1$ ,  $\bar{x}$  是最优解, 最优值  $f_{\min} = 1$ .

## (2) 定义障碍函数

$$G(x, r_k) = (x+1)^2 - r_k \ln x,$$

其中  $r_k > 0$ , 很小. 解下列问题:

$$\min G(x, r_k)$$

$$\text{s. t. } x \in \text{int } S,$$

其中  $S = \{x | x \geq 0\}$ . 令

$$\frac{dG(x, r_k)}{dx} = 2(x+1) - \frac{r_k}{x} = 0,$$

得解

$$x_k = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+2r_k}).$$

令  $r_k \rightarrow 0$ , 则  $x_k \rightarrow \bar{x} = 0$ ,  $\bar{x}$  是最优解, 最优值  $f_{\min} = 1$ .

## 4. 考虑下列问题:

$$\min x_1 x_2$$

$$\text{s. t. } g(x) = -2x_1 + x_2 + 3 \geq 0.$$

## (1) 用二阶最优性条件证明点

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

是局部最优解. 并说明它是否为全局最优解?

## (2) 定义障碍函数为

$$G(x, r) = x_1 x_2 - r \ln g(x),$$

试用内点法求解此问题, 并说明内点法产生的序列趋向点  $\bar{x}$ .

解 (1) 在点  $\bar{x}$ , 目标函数和约束函数的梯度分别是

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad \nabla g(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$g(x) \geq 0$  是起作用约束. 令

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} - w \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

解得  $w = \frac{3}{4} > 0$ , 因此  $\bar{x}$  是 K-T 点.

## 取 Lagrange 函数

$$L(x, w) = x_1 x_2 - w(-2x_1 + x_2 + 3),$$

则

$$\nabla_x^2 L(x, w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

令

$$\nabla g(\bar{x})^T d = [-2, 1] \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 0, \text{ 则 } d_2 = 2d_1.$$

方向集

$$G = \left\{ d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \mid -2d_1 + d_2 = 0, d \neq 0 \right\} = \left\{ d \mid d = d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, d_1 \neq 0 \right\}.$$

$\forall d \in G$ , 有

$$d^T \nabla_x^2 L(\bar{x}, w) d = 4d_1^2 > 0.$$

因此  $\bar{x} = \left( \frac{3}{4}, -\frac{3}{2} \right)^T$  是严格局部最优解. 显然,  $\bar{x}$  不是全局最优解.

(2) 对于障碍函数

$$G(x, r) = x_1 x_2 - r \ln(-2x_1 + x_2 + 3),$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial G(x, r)}{\partial x_1} = x_2 + \frac{2r}{-2x_1 + x_2 + 3} = 0, \\ \frac{\partial G(x, r)}{\partial x_2} = x_1 - \frac{r}{-2x_1 + x_2 + 3} = 0. \end{cases}$$

此方程组的解为

$$\bar{x}(r) = \left( \frac{3 + \sqrt{9 - 16r}}{8}, -\frac{3 + \sqrt{9 - 16r}}{4} \right)^T.$$

令  $r \rightarrow 0$ , 则

$$\bar{x}(r) \rightarrow \bar{x} = \left( \frac{3}{4}, -\frac{3}{2} \right)^T.$$

5. 用乘子法求解下列问题:

$$\begin{aligned} (1) \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \geq 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \min \quad & x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + 1)^2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 1. \end{aligned}$$

解 (1) 定义增广 Lagrange 函数

$$\begin{aligned} \Phi(x, w, \sigma) &= x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2\sigma} [(\max\{0, w - \sigma(x_1 - 1)\})^2 - w^2] \\ &= \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2\sigma} \{[w - \sigma(x_1 - 1)]^2 - w^2\}, & x_1 - 1 \leq \frac{w}{\sigma}, \\ x_1^2 + x_2^2 - \frac{w^2}{2\sigma}, & x_1 - 1 > \frac{w}{\sigma}, \end{cases} \end{aligned}$$

则

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \begin{cases} 2x_1 - [w - \sigma(x_1 - 1)], & x_1 - 1 \leq \frac{w}{\sigma}, \\ 2x_1, & x_1 - 1 > \frac{w}{\sigma}, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 2x_2.$$

设第  $k$  次迭代取乘子  $w^{(k)}, \sigma$ , 求  $\Phi(x, w^{(k)}, \sigma)$  的极小点. 令

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 2x_1 - [w^{(k)} - \sigma(x_1 - 1)] = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 2x_2 = 0, \end{cases}$$

解得

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w^{(k)} + \sigma}{2 + \sigma} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

修改  $w^{(k)}$ , 令

$$w^{(k+1)} = \max\{0, w^{(k)} - \sigma(x_1^{(k)} - 1)\} = \frac{2(w^{(k)} + \sigma)}{2 + \sigma}.$$

当  $w^{(k)} < 2$  时,  $w^{(k+1)} - w^{(k)} = \frac{\sigma(2 - w^{(k)})}{2 + \sigma} > 0$ , 因此  $\{w^{(k)}\}$  是单调增加有上界的数列, 必有极

限. 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $w^{(k)} \rightarrow 2, x^{(k)} \rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .  $\bar{x}$  为最优解, 最优值  $f_{\min} = 1$ .

(2) 定义增广 Lagrange 函数

$$\begin{aligned} \Phi(x, w, \sigma) &= f(x) + \frac{1}{2\sigma} [(\max\{0, w_1 - \sigma g_1(x)\})^2 - w_1^2 \\ &\quad + (\max\{0, w_2 - \sigma g_2(x)\})^2 - w_2^2] \\ &= x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + 1)^2 + \frac{1}{2\sigma} [(\max\{0, w_1 - \sigma x_1\})^2 \\ &\quad - w_1^2 + (\max\{0, w_2 - \sigma(x_2 - 1)\})^2 - w_2^2] \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} &= \begin{cases} 1 - (w_1 - \sigma x_1), & x_1 \leq \frac{w_1}{\sigma}, \\ 1, & x_1 > \frac{w_1}{\sigma}, \end{cases} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= \begin{cases} \frac{2}{3}(x_2 + 1) - [w_2 - \sigma(x_2 - 1)], & x_2 - 1 \leq \frac{w_2}{\sigma}, \\ \frac{2}{3}(x_2 + 1), & x_2 - 1 > \frac{w_2}{\sigma}. \end{cases} \end{aligned}$$

第  $k$  次迭代中, 令

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0,$$

即

$$\begin{cases} 1 - (w_1^{(k)} - \sigma x_1) = 0, \\ \frac{2}{3}(x_2 + 1) - [w_2^{(k)} - \sigma(x_2 - 1)] = 0, \end{cases}$$

解得

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w_1^{(k)} - 1}{\sigma} \\ \frac{3w_2^{(k)} + 3\sigma - 2}{2 + 3\sigma} \end{bmatrix}.$$

修正乘子  $w^{(k)}$ , 令

$$w_1^{(k+1)} = \max\{0, w_1^{(k)} - \sigma x_1^{(k)}\} = 1,$$

$$w_2^{(k+1)} = \max\left\{0, w_2^{(k)} - \sigma\left(\frac{3w_2^{(k)} + 3\sigma - 2}{2 + 3\sigma} - 1\right)\right\} = \frac{2(w_2^{(k)} + 2\sigma)}{2 + 3\sigma}.$$

当  $w_2^{(k)} < \frac{4}{3}$  时, 数列  $\{w_2^{(k)}\}$  单调增加有上界, 必有极限. 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $w_2^{(k)} \rightarrow \frac{4}{3}$ , 因此最优

乘子  $\bar{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ . 最优解如下:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f_{\min} = \frac{4}{3}.$$

## 第14章

▶▶▶ CHAPTER 14

## 二次规划题解

1. 用 Lagrange 方法求解下列问题:

$$(1) \min \quad 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - x_1 - x_2$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + x_2 = 1;$$

$$(2) \min \quad \frac{3}{2}x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 4.$$

解 (1) 定义 Lagrange 函数

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - x_1 - x_2 - \lambda(x_1 + x_2 - 1),$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 - 1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 - 1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = -(x_1 + x_2 - 1) = 0, \end{cases}$$

解得最优解

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad \text{Lagrange 乘子 } \lambda = \frac{3}{4}.$$

(2) 定义 Lagrange 函数

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{3}{2}x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3 - \lambda(x_1 + 2x_2 + x_3 - 4),$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_1} = 3x_1 - x_2 + 1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_2} = -x_1 + 2x_2 - x_3 + 1 - 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_3} = -x_2 + x_3 + 1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda} = -x_1 - 2x_2 - x_3 + 4 = 0, \end{cases}$$

求得最优解

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = \left(\frac{7}{18}, \frac{11}{9}, \frac{7}{6}\right)^T, \lambda = \frac{17}{18}.$$

2. 用起作用集方法求解下列问题:

$$\begin{aligned} (1) \min \quad & 9x_1^2 + 9x_2^2 - 30x_1 - 72x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -2x_1 - x_2 \geq -4, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned} \quad \begin{aligned} (2) \min \quad & x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 - x_2 \geq -2, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

取初始可行点  $x^{(1)} = (0, 0)^T$ .

取初始可行点  $x^{(1)} = (0, 0)^T$ .

解 (1) 记  $f(x) = 9x_1^2 + 9x_2^2 - 30x_1 - 72x_2$ , 则

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 18x_1 - 30 \\ 18x_2 - 72 \end{bmatrix}, \quad H = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} \end{bmatrix},$$

$$\text{约束系数矩阵 } A = \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ a^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{约束右端向量 } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

第1次迭代:

$$\text{初始点 } x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, g_1 = \nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -30 \\ -72 \end{bmatrix}, \text{起作用约束集 } I_1^{(1)} = \{2, 3\}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

求校正量  $\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \delta^T H \delta + \nabla f(x^{(1)})^T \delta \\ \text{s. t.} \quad & A_1 \delta = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & 9\delta_1^2 + 9\delta_2^2 - 30\delta_1 - 72\delta_2 \\ \text{s. t.} \quad & \delta_1 = 0, \\ & \delta_2 = 0. \end{aligned}$$

即

(1)

解得  $\bar{\delta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . 下面判别  $x^{(1)}$  是否为最优解.

计算 Lagrange 乘子

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = (A_1 H^{-1} A_1^T)^{-1} A_1 H^{-1} g_1 = \begin{bmatrix} -30 \\ -72 \end{bmatrix},$$

$x^{(1)}$  还不是最优解. 从(1)式中去掉第2个约束, 置  $I_2^{(1)} = \{2\}$ , 再求校正量:

$$\begin{aligned} \min \quad & 9\delta_1^2 + 9\delta_2^2 - 30\delta_1 - 72\delta_2 \\ \text{s. t.} \quad & \delta_1 = 0. \end{aligned}$$

解得  $\bar{\delta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ . 令

$$d^{(1)} = \bar{\delta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

从  $x^{(1)}$  出发, 沿  $d^{(1)}$  搜索, 令

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 d^{(1)}.$$

取步长  $\alpha_1 = \min\{1, \hat{\alpha}_1\}$ , 其中

$$\hat{\alpha}_1 = \min \left\{ \frac{b_i - a^{(i)} x^{(1)}}{a^{(i)} d^{(1)}} \mid i \notin I_2^{(1)}, a^{(i)} d^{(1)} < 0 \right\} = \frac{b_1 - a^{(1)} x^{(1)}}{a^{(1)} d^{(1)}} = 1.$$

令  $\alpha_1 = 1$ , 得点

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 d^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

在  $x^{(2)}$  起作用约束集为  $I_3^{(1)} = \{1, 2\}$ .

第2次迭代:

初始点  $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $g_2 = \nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 起作用约束集  $I_1^{(2)} = \{1, 2\}$ , 起作用约束矩阵

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \alpha_1 = 1.$$

计算 Lagrange 乘子

$$\lambda = (A_1 H^{-1} A_1^T)^{-1} A_1 H^{-1} g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \end{bmatrix},$$

从  $I_1^{(2)}$  中去掉 2, 置  $I_2^{(2)} = \{1\}$ ,  $A_1 = (-2, -1)$ . 求校正量  $\delta = (\delta_1, \delta_2)^T$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \delta^T H \delta + \nabla f(x^{(2)})^T \delta \\ \text{s. t.} \quad & A_1 \delta = 0. \end{aligned}$$

即

$$\min \quad 9\delta_1^2 + 9\delta_2^2 - 30\delta_1$$

$$\text{s. t. } -2\delta_1 - \delta_2 = 0.$$

$$\text{解得 } \bar{\delta} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T.$$

令  $d^{(2)} = \bar{\delta} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T$ , 从  $x^{(2)}$  出发沿  $d^{(2)}$  搜索, 令

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \alpha_2 d^{(2)},$$

其中搜索步长  $\alpha_2 = \min\{1, \hat{\alpha}_2\}$ , 其中  $\hat{\alpha}_2 = \min\left\{\frac{b_i - a^{(i)} x^{(2)}}{a^{(i)} d^{(2)}} \mid i \notin I_2^{(2)}, a^{(i)} d^{(2)} < 0\right\} = \frac{b_3 - a^{(3)} x^{(2)}}{a^{(3)} d^{(2)}} = 6$ ,

因此取  $\alpha_2 = 1$ . 后继点

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}.$$

第3次迭代:

$$\text{初始点 } x^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}, g_3 = \nabla f(x^{(3)}) = \begin{bmatrix} -24 \\ -12 \end{bmatrix}, \text{起作用约束集 } I_1^{(3)} = \{1\}, A_1 = (-2, -1),$$

$\alpha_2 = 1$ , 计算 Lagrange 乘子

$$\lambda = (A_1 H^{-1} A_1^T)^{-1} A_1 H^{-1} g_3 = 12 > 0,$$

因此,  $x^{(3)}$  是最优解, 最优值  $f_{\min} = -149$ .

(2) 记  $f(x) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1$ , 则梯度

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - 3 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}, H = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

$$\text{约束矩阵 } A = \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ a^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{约束右端向量 } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

第1次迭代:

$$\text{初始点 } x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{梯度 } g_1 = \nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{起作用约束集 } I_1^{(1)} = \{2, 3\}, \text{起作用约束}$$

$$\text{系数矩阵 } A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{求校正量 } \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}:$$

$$\min \frac{1}{2} \delta^T H \delta + \nabla f(x^{(1)})^T \delta$$

$$\text{s. t. } A_1 \delta = 0.$$

即

$$\min \delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_1 \delta_2 - 3\delta_1$$

$$\text{s. t. } \delta_1 = 0,$$

(1)

$$\delta_2 = 0,$$

$$\text{得解 } \bar{\delta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

判别  $x^{(1)}$  是否为最优解, 计算 Lagrange 乘子:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = (A_1 H^{-1} A_1^T)^{-1} A_1 H^{-1} g_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\lambda_2 = -3 < 0$ , 故  $x^{(1)}$  不是最优解. 从(1)式中去掉第1个约束, 置  $I_2^{(1)} = \{3\}$ , 再求校正量:

$$\min \delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_1 \delta_2 - 3\delta_1$$

$$\text{s. t. } \delta_2 = 0,$$

$$\text{解得 } \bar{\delta} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \text{令 } d^{(1)} = \bar{\delta} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{从 } x^{(1)} \text{ 出发沿 } d^{(1)} \text{ 搜索:}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 d^{(1)}.$$

步长  $\alpha_1 = \min\{1, \hat{\alpha}_1\}$ , 其中

$$\hat{\alpha}_1 = \min\left\{\frac{b_i - a^{(i)} x^{(1)}}{a^{(i)} d^{(1)}} \mid i \notin I_2^{(1)}, a^{(i)} d^{(1)} < 0\right\} = \frac{b_1 - a^{(1)} x^{(1)}}{a^{(1)} d^{(1)}} = \frac{4}{3},$$

故令  $\alpha_1 = 1$ , 得后继点

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

第2次迭代:

$$\text{初始点 } x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{梯度 } g_2 = \nabla f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \text{起作用约束集 } I_1^{(2)} = I_2^{(1)} = \{3\}, A_1 =$$

$(0, 1)$ , 由于  $\alpha_1 = 1$ , 计算 Lagrange 乘子



$$\lambda = (A_1 H^{-1} A_1^T)^{-1} A_1 H^{-1} g_2 = -\frac{3}{2},$$

故  $x^{(2)}$  不是最优解, 从  $I_1^{(2)}$  中去掉指标 3, 起作用约束集  $I_2^{(2)} = \emptyset$ , 求校正量

$$\min \frac{1}{2} \delta^T H \delta + \nabla f(x^{(2)})^T \delta$$

即

$$\min \delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_1 \delta_2 - \frac{3}{2} \delta_2.$$

解得  $\bar{\delta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ . 令  $d^{(2)} = \bar{\delta}$ , 从  $x^{(2)}$  出发沿  $d^{(2)}$  搜索:

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \alpha_2 d^{(2)}.$$

步长  $\alpha_2 = \min\{1, \hat{\alpha}_2\}$ , 其中  $\hat{\alpha}_2$  计算如下:

$$\hat{\alpha}_2 = \min \left\{ \frac{b_i - a^{(i)} x^{(2)}}{a^{(i)} d^{(2)}} \mid i \notin I_2^{(2)}, a^{(i)} d^{(2)} < 0 \right\} = \frac{b_1 - a^{(1)} x^{(2)}}{a^{(1)} d^{(2)}} = \frac{1}{3},$$

故令  $\alpha_2 = \frac{1}{3}$ . 在  $x^{(3)}$  起作用约束集为  $I_3^{(2)} = \{1\}$ .

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \frac{1}{3} d^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

第 3 次迭代:

$$\text{初始点 } x^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, g_3 = \nabla f(x^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{起作用约束集 } I_1^{(3)} = I_3^{(2)} = \{1\}, A_1 = (-1, -1,$$

$-1)$ . 由于  $\alpha_2 = \frac{1}{3} < 1$ , 再求校正量  $\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$ :

$$\min \frac{1}{2} \delta^T H \delta + \nabla f(x^{(3)})^T \delta$$

$$\text{s. t. } A_1 \delta = 0.$$

即

$$\min \delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_1 \delta_2 - \delta_2$$

$$\text{s. t. } -\delta_1 - \delta_2 = 0.$$

$$\text{解得 } \bar{\delta} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

令  $d^{(3)} = \bar{\delta}$ , 从  $x^{(3)}$  出发沿  $d^{(3)}$  搜索, 令

$$x^{(4)} = x^{(3)} + \alpha_3 d^{(3)}.$$

步长  $\alpha_3 = \min\{1, \hat{\alpha}_3\}$ ,  $\hat{\alpha}_3$  计算如下:

$$\hat{\alpha}_3 = \min \left\{ \frac{b_i - a^{(i)} x^{(3)}}{a^{(i)} d^{(3)}} \mid i \notin I_1^{(3)}, a^{(i)} d^{(3)} < 0 \right\} = \frac{b_2 - a^{(2)} x^{(3)}}{a^{(2)} d^{(3)}} = 10,$$

故令  $\alpha_3 = 1$ . 后继点

$$x^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

第 4 次迭代:

$$\text{初始点 } x^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, g_4 = \nabla f(x^{(4)}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{起作用约束集 } I_1^{(4)} = \{1\}, A_1 = (-1, -1),$$

$\alpha_3 = 1$ . 计算 Lagrange 乘子:

$$\lambda = (A_1 H^{-1} A_1^T)^{-1} A_1 H^{-1} g_4 = \frac{1}{2} > 0,$$

得到最优解  $x^{(4)} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ ,  $f_{\min} = -\frac{11}{4}$ .

3. 用 Lemke 方法求解下列问题:

$$(1) \min 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 6x_1 - 2x_2$$

$$\text{s. t. } -x_1 - x_2 \geq -2,$$

$$-2x_1 + x_2 \geq -2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0;$$

$$(2) \min 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 9$$

$$\text{s. t. } -x_1 - x_2 - x_3 \geq -3,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

解 (1) 目标函数的 Hesse 矩阵  $H = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ , 一次项系数向量  $c = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}$ , 约束系

数矩阵  $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ , 约束右端向量  $b = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ . 取

$$M = \begin{bmatrix} H & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

线性互补问题是

$$\begin{cases} w - Mz = q, \\ w, z \geq 0, \\ w^T z = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{aligned} w_1 & -4z_1 + 2z_2 - z_3 - 2z_4 = -6, \\ w_2 & + 2z_1 - 2z_2 - z_3 + z_4 = -2, \\ w_3 & + z_1 + z_2 = 2, \\ w_4 & + 2z_1 - z_2 = 2, \\ w_i & \geq 0, z_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ w_i z_i & = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

引入人工变量  $z_0$ , 列下表, 并按规定作主元消去运算:

	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_0$	$q$
$w_1$	1	0	0	0	-4	2	-1	-2	(-1)	-6
$w_2$	0	1	0	0	2	-2	-1	1	-1	-2
$w_3$	0	0	1	0	1	1	0	0	-1	2
$w_4$	0	0	0	1	2	-1	0	0	-1	2

$z_0$	-1	0	0	0	4	-2	1	2	1	6
$w_2$	-1	1	0	0	(6)	-4	0	3	0	4
$w_3$	-1	0	1	0	5	-1	1	2	0	8
$w_4$	-1	0	0	1	6	-3	1	2	0	8

$z_0$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	1	0	1	$\frac{10}{3}$
$z_1$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$
$w_3$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	1	0	0	( $\frac{7}{3}$ )	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{14}{3}$
$w_4$	0	-1	0	1	0	1	1	-1	0	4

$z_0$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	0	0	( $\frac{5}{7}$ )	$\frac{1}{7}$	1	2
$z_1$	$-\frac{3}{14}$	$-\frac{1}{14}$	$\frac{2}{7}$	0	1	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	0	2
$z_2$	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{5}{14}$	$\frac{3}{7}$	0	0	1	$\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{14}$	0	2
$w_4$	$\frac{1}{14}$	$-\frac{9}{14}$	$-\frac{3}{7}$	1	0	0	$\frac{4}{7}$	$-\frac{11}{14}$	0	2

	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_0$	$q$
$z_3$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{14}{5}$
$z_1$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	0	1	0	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$
$z_2$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	0	0	1	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
$w_4$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	0	0	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$

得互补基本可行解

$$(w_1, w_2, w_3, w_4, z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, 0, 0, \frac{2}{5}, \frac{6}{5}, \frac{4}{5}, \frac{14}{5}, 0),$$

得 K-T 点  $(x_1, x_2) = (\frac{6}{5}, \frac{4}{5})$ . 问题是凸规划, K-T 点是最优解, 最优值  $f_{\min} = -7.2$ .

(2) 目标函数的 Hesse 矩阵

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad A = (-1, -1, -1), \quad b = -3,$$

取

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} H & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

线性互补问题是

$$\begin{cases} w - Mz = q, \\ w, z \geq 0, \\ w^T z = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} w_1 & -4z_1 - 2z_2 - 2z_3 - z_4 = -8, \\ w_2 & -2z_1 - 4z_2 \quad \quad - z_4 = -6, \\ w_3 & -2z_1 \quad \quad - 2z_3 - z_4 = -4, \\ w_4 & + z_1 + z_2 + z_3 \quad \quad = 3, \\ w_i & \geq 0, \quad z_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ w_i z_i & \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

引入人工变量  $z_0$ , 列下表, 按规定作主元消去运算.

	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_0$	$q$
$w_1$	1	0	0	0	-4	-2	-2	-1	-1	-8
$w_2$	0	1	0	0	-2	-4	0	-1	-1	-6
$w_3$	0	0	1	0	-2	0	-2	-1	-1	-4
$w_4$	0	0	0	1	1	1	1	0	-1	3

$z_0$	-1	0	0	0	4	2	2	1	1	8
$w_2$	-1	1	0	0	②	-2	2	0	0	2
$w_3$	-1	0	1	0	2	2	0	0	0	4
$w_4$	-1	0	0	1	5	3	3	1	0	11

$z_0$	1	-2	0	0	0	6	-2	1	1	4
$z_1$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	-1	1	0	0	1
$w_3$	0	-1	1	0	0	④	-2	0	0	2
$w_4$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	1	0	8	-2	1	0	6

$z_0$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	①	1	1	1
$z_1$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$
$z_2$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
$w_4$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	1	0	0	2	1	0	2

$z_3$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	1	1	1	1
$z_1$	-1	$\frac{1}{2}$	1	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$z_2$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$w_4$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	0	-1	-2	0

得互补基本可行解

$$(w_1, w_2, w_3, w_4, z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$$

K-T 点  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$ . 由于是凸规划, 因此也是最优解, 最优值  $f_{\min} = 0$ .

## 第15章

### 整数规划简介题解

1. 用分支定界法解下列问题:

$$(1) \min 2x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5,$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ 且为整数};$$

$$(2) \min 4x_1 + 7x_2 + 3x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 5,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 8,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ 且为整数}.$$

解 (1) 先给出一个最优值的上界. 任取一个可行点, 例如  $(0, 0, 2)$ , 目标函数最优值的一个上界  $F_u = -6$ , 解下列松弛问题:

$$\min 2x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5,$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(P)

用单纯形方法求得松弛问题(P)的最优解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \frac{5}{2})$ , 最优值  $f_{\min} = -\frac{15}{2}$ .

由此知, 整数规划最优值的一个下界  $F_l = -\frac{15}{2}$ . 整数规划最优值  $F^* \in [-\frac{15}{2}, -6]$ .

松弛问题(P)的解不满足整数要求, 引进条件  $x_3 \leq [\frac{5}{2}] = 2, x_3 \geq [\frac{5}{2}] + 1 = 3$ . 将整数规划分解成两个子问题:

$$\min 2x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5,$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1,$$

$$x_3 \leq 2,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ 且为整数},$$

(P<sub>1</sub>)

和

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5, \\
 & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1, \\
 & x_3 \geq 3, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ 且为整数.}
 \end{aligned} \quad (P_2)$$

用单纯形方法求解 $(P_1)$ 的松弛问题:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5, \\
 & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1, \\
 & x_3 \leq 2, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0,
 \end{aligned} \quad (\bar{P}_1)$$

得到松弛问题 $(\bar{P}_1)$ 的最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 2)$ ,也是子问题 $(P_1)$ 的最优解,最优值 $f_{\min} = -6 = F_u$ ,子问题 $(P_1)$ 不需要再分解.

再用单纯形方法解 $(P_2)$ 的松弛问题 $(\bar{P}_2)$ :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5, \\
 & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1, \\
 & x_3 \geq 3, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned} \quad (\bar{P}_2)$$

用两阶段法求解 $(\bar{P}_2)$ ,易知无可行解,因此子问题 $(P_2)$ 无可行解.综上,整数规划的最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 2)$ ,最优值 $F^* = -6$ .

(2) 先给出最优值上界.任取可行点 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 2)$ ,整数规划最优值一个上界 $F_u = 17$ .解松弛问题 $(\bar{P})$ :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 5, \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 8, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned} \quad (\bar{P})$$

用单纯形方法求得松弛问题的最优解

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(0, \frac{2}{5}, \frac{19}{5}\right), \quad f_{\min} = \frac{71}{5}.$$

由此知整数规划最优值的一个下界 $F_l = \frac{71}{5}$ ,最优值 $F^* \in \left[\frac{71}{5}, 17\right]$ .

松弛问题的最优解不满足整数要求,引入条件 $x_2 \leq \left[\frac{2}{5}\right] = 0, x_2 \geq \left[\frac{2}{5}\right] + 1 = 1$ ,将整数

规划分解成两个子问题:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 5, \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 8, \\
 & x_2 \leq 0, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ 且为整数,}
 \end{aligned} \quad (P_1)$$

和

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 5, \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 8, \\
 & x_2 \geq 1, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ 且为整数.}
 \end{aligned} \quad (P_2)$$

求解子问题 $(P_1)$ 的松弛问题:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 5, \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 8, \\
 & x_2 \leq 0, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned} \quad (\bar{P}_1)$$

用单纯形方法求得 $(\bar{P}_1)$ 的最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 5)$ ,最优值 $f_{\min} = 15$ . $\bar{x} = (0, 0, 5)^T$ 是子问题 $(P_1)$ 的可行解,也是 $(P_1)$ 的最优解,整数规划最优值新的上界 $F_u = 15$ .

再用单纯形方法解 $(P_2)$ 的松弛问题:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 5, \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 8, \\
 & x_2 \geq 1, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

最优解 $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{7}{3}, 1, 0\right)$ ,最优值 $f_{\min} = \frac{49}{3} > F_u = 15$ .由此可知, $(P_2)$ 没有更好的整数解.

综上,整数规划的最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 5)$ ,最优值 $F^* = 15$ .

2. 用割平面法解下列问题:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \min \quad x_1 - 2x_2 \\
 & \text{s. t.} \quad x_1 + x_2 \leq 10, \\
 & \quad \quad -x_1 + x_2 \leq 5, \\
 (2) \quad & \min \quad 5x_1 + 3x_2 \\
 & \text{s. t.} \quad 2x_1 + x_2 \geq 10, \\
 & \quad \quad x_1 + 3x_2 \geq 9,
 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ 且为整数};$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ 且为整数}.$$

解 (1) 先用单纯形方法解松弛问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

最优表如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
$x_2$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}$
	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{25}{2}$

松弛问题的最优解不满足整数要求, 任选一个取值非整数的基变量, 比如取  $x_1$ , 源约束为

$$x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{5}{2},$$

$x_3$  和  $x_4$  的系数及常数项分别分解为

$$\frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2},$$

切割条件为

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \leq 0, \quad \text{即 } -x_3 - x_4 \leq -1.$$

将此条件置入松弛问题最优表:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
$x_2$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{15}{2}$
$x_5$	0	0	-1	-1	1	-1
	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{25}{2}$

用对偶单纯形方法, 得下表:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_1$	1	0	0	-1	$\frac{1}{2}$	2
$x_2$	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	7
$x_3$	0	0	1	1	-1	1
	0	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	-12

整数规划最优解  $(x_1, x_2) = (2, 7)$ , 最优值  $f_{\min} = -12$ .

(2) 先用单纯形方法解松弛问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 = 10, \\ & x_1 + 3x_2 - x_4 = 9, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

最优表如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{21}{5}$
$x_2$	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$
	0	0	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{129}{5}$

松弛问题的解不满足整数要求, 选择源约束

$$x_1 - \frac{3}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{21}{5},$$

记  $-\frac{3}{5} = -1 + \frac{2}{5}$ ,  $\frac{1}{5} = 0 + \frac{1}{5}$ ,  $\frac{21}{5} = 4 + \frac{1}{5}$ , 切割条件为

$$\frac{1}{5} - \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \leq 0, \quad \text{即 } -2x_3 - x_4 \leq -1.$$

将此约束条件置于松弛问题的最优表, 并用对偶单纯形方法求解:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_1$	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{21}{5}$
$x_2$	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
$x_5$	0	0	-2	①	1	-1
	0	0	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{129}{5}$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_1$	1	0	-1	0	$\frac{1}{5}$	4
$x_2$	0	1	1	0	$-\frac{2}{5}$	2
$x_4$	0	0	2	1	-1	1
	0	0	-2	0	$-\frac{1}{5}$	26

整数规划的最优解  $(x_1, x_2) = (4, 2)$ , 最优值  $f_{\min} = 26$ .

3. 求解下列 0-1 规划:

(1)  $\min 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

s. t.  $-3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \geq -4$ ,

$3x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 3$ ,

$x_1 + x_2 \geq 1$ ,

$x_1, x_2, x_3$  取 0 或 1;

(2)  $\min x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$

s. t.  $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 7x_5 \geq 8$ ,

$x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 \geq 5$ ,

$x_j$  取 0 或 1,  $j = 1, 2, \dots, 5$ ;

(3)  $\min x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 6x_5$

s. t.  $-2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 2$ ,

$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \geq 3$ ,

$x_j$  取 0 或 1,  $j = 1, 2, \dots, 5$ ;

(4)  $\min x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5$

s. t.  $x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_5 \geq 3$ ,

$4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 \geq 2$ ,

$-2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 \geq 1$ ,

$x_j$  取 0 或 1,  $j = 1, 2, \dots, 5$ .

解 (1) 记  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $c = (c_1, c_2, c_3) = (2, 3, 4)$ , 则  $f = cx$ ,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

给定一个可行解  $\bar{x} = (0, 0, 1)^T$ , 最优值的上界  $\bar{f} = 4$ . 下面用隐数法求解.

① 置子问题  $\{\sigma\} = \emptyset$ , 探测点  $\sigma_0 = (0, 0, 0)^T$ ;

②  $c\sigma_0 = 0 < \bar{f} = 4$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1\sigma_0 - b_1 = 4$ ,  $s_2 = A_2\sigma_0 - b_2 = -3$ ,  $s_3 = A_3\sigma_0 - b_3 = -1$ . 违背约束集  $I = \{2, 3\}$ ;

④ 自由变量有  $x_1, x_2, x_3$ ,  $c\sigma_0 + c_1 = 2 < \bar{f} = 4$ ,  $c\sigma_0 + c_2 = 3$ ,  $c\sigma_0 + c_3 = 4$ ;

⑤ 可选集  $J = \{j | c\sigma_0 + c_j < \bar{f}\} = \{1, 2\}$ . 对每个违背约束, 约束函数值可增加的上限为  $q_2 = 3 + 1 = 4$ ,  $q_3 = 1 + 1 = 2$ ,  $s_2 + q_2 = -3 + 4 = 1$ ,  $s_3 + q_3 = -1 + 2 = 1$ ;

⑥ 令  $l = \min\{j | j \in J\} = 1$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{+1\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (1, 0, 0)^T$ ;

②  $c\sigma_0 = 2 < \bar{f} = 4$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1\sigma_0 - b_1 = 1$ ,  $s_2 = A_2\sigma_0 - b_2 = 0$ ,  $s_3 = A_3\sigma_0 - b_3 = 0$ ,  $\sigma_0 = (1, 0, 0)^T$  是可行点, 置  $\bar{x} = \sigma_0 = (1, 0, 0)^T$ ,  $\bar{f} = c\sigma_0 = 2$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{-1\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (0, 0, 0)^T$ ;

②  $c\sigma_0 = 0 < \bar{f} = 2$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1\sigma_0 - b_1 = 4$ ,  $s_2 = A_2\sigma_0 - b_2 = -3$ ,  $s_3 = A_3\sigma_0 - b_3 = -1$ . 违背约束集  $I = \{2, 3\}$ ;

④ 自由变量有  $x_2, x_3$ ,  $c\sigma_0 + c_2 = 3 > \bar{f} = 2$ , 子问题没有更好的可行解.

$\{\sigma\}$  中固定变量全为 0, 探测完毕.

最优解  $\bar{x} = (1, 0, 0)^T$ , 最优值  $f_{\min} = 2$ .

(2) 记  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ , 目标函数系数  $c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (1, 2, 3, 4, 5)$ , 则  $f = cx$ ,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

给定一个可行解  $\bar{x} = (1, 1, 1, 0, 0)^T$ , 最优值上界  $\bar{f} = c\bar{x} = 6$ . 下面用隐数法求解.

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{\emptyset\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $c\sigma_0 = 0 < \bar{f} = 6$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1\sigma_0 - b_1 = -8$ ,  $s_2 = A_2\sigma_0 - b_2 = -5$ . 违背约束集  $I = \{1, 2\}$ ;

④ 自由变量有  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, c\sigma_0 + c_1 = 1 < \bar{f} = 6, c\sigma_0 + c_2 = 2, c\sigma_0 + c_3 = 3, c\sigma_0 + c_4 = 4, c\sigma_0 + c_5 = 5$ ;

⑤ 可选集  $J = \{j | c\sigma_0 + c_j < \bar{f}\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 约束函数值可增加的上限  $q_1 = \sum_{j=1}^5 a_{1j} =$

$$21, q_2 = \sum_{j=1}^5 a_{2j} = 10, s_1 + q_1 = 13, s_2 + q_2 = 5;$$

⑥ 令  $l = \min\{j | j \in J\} = 1$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{+1\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $c\sigma_0 = 1 < \bar{f} = 6$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -6, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -4$ , 违背约束集  $I = \{1, 2\}$ ;

④ 自由变量有  $x_2, x_3, x_4, x_5, c\sigma_0 + c_2 = 3 < \bar{f} = 6, c\sigma_0 + c_3 = 4, c\sigma_0 + c_4 = 5, c\sigma_0 + c_5 = 6$ ;

⑤ 可选集  $J = \{j | c\sigma_0 + c_j < \bar{f}\} = \{2, 3, 4\}$ , 约束函数值可增加的上限  $q_1 = \sum_{j=2}^4 a_{1j} = 12,$

$$q_2 = \sum_{j=2}^4 a_{2j} = 7, s_1 + q_1 = 6, s_2 + q_2 = 3;$$

⑥ 令  $l = \min\{j | j \in J\} = 2$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{+1, +2\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (1, 1, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $c\sigma_0 = 3 < \bar{f} = 6$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -3, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -3$ , 违背约束集  $I = \{1, 2\}$ ;

④ 自由变量有  $x_3, x_4, x_5, c\sigma_0 + c_3 = 6 = \bar{f}$ , 本子问题没有比  $\bar{x}$  好的可行解.

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{+1, -2\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $c\sigma_0 = 1 < \bar{f} = 6$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -6, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -4$ , 违背约束集  $I = \{1, 2\}$ ;

④ 自由变量有  $x_3, x_4, x_5, c\sigma_0 + c_3 = 4 < \bar{f} = 6, c\sigma_0 + c_4 = 5, c\sigma_0 + c_5 = 6 = \bar{f}$ ;

⑤ 可选集  $J = \{j | c\sigma_0 + c_j < \bar{f}\} = \{3, 4\}, q_1 = 9, q_2 = 6, s_1 + q_1 = 3, s_2 + q_2 = 2$ ;

⑥ 令  $l = \min\{j | j \in J\} = 3$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{+1, -2, +3\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (1, 0, 1, 0, 0)^T$ ;

②  $c\sigma_0 = 4 < \bar{f}$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -1, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 0$ , 违背约束集  $I = \{1\}$ ;

④ 自由变量有  $x_4, x_5, c\sigma_0 + c_4 = 8 > \bar{f} = 6$ , 本子问题没有更好的可行解.

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{+1, -2, -3\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $c\sigma_0 = 1 < \bar{f} = 6$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -6, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -4$ , 违背约束集  $I = \{1, 2\}$ ;

④ 自由变量有  $x_4, x_5, c\sigma_0 + c_4 = 5 < \bar{f} = 6, c\sigma_0 + c_5 = 6 = \bar{f}$ ;

⑤ 可选集  $J = \{j | c\sigma_0 + c_j < \bar{f}\} = \{4\}; q_1 = 4, q_2 = 2, s_1 + q_1 = -2, s_2 + q_2 = -2$ . 本子问题没有更好的可行解.

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{-1\}, \sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $c\sigma_0 = 0 < \bar{f} = 6$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -8, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -5$ , 违背约束集  $I = \{1, 2\}$ ;

④ 自由变量有  $x_2, x_3, x_4, x_5, c\sigma_0 + c_2 = 2, c\sigma_0 + c_3 = 3, c\sigma_0 + c_4 = 4, c\sigma_0 + c_5 = 5 < \bar{f} = 6$ ;

⑤ 可选集  $J = \{j | c\sigma_0 + c_j < \bar{f}\} = \{2, 3, 4, 5\}, q_1 = 19, q_2 = 9, s_1 + q_1 = 11, s_2 + q_2 = 4$ ;

⑥ 令  $l = \min\{j | j \in J\} = 2$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{-1, +2\}, \sigma_0 = (0, 1, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $c\sigma_0 = 2 < \bar{f} = 6$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -5, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -4$ , 违背约束集  $I = \{1, 2\}$ ;

④ 自由变量有  $x_3, x_4, x_5, c\sigma_0 + c_3 = 5 < \bar{f} = 6, c\sigma_0 + c_4 = 6 = \bar{f}$ ;

⑤ 可选集  $J = \{j | c\sigma_0 + c_j < \bar{f}\} = \{3\}, q_1 = 5, q_2 = 4, s_1 + q_1 = 0, s_2 + q_2 = 0$ ;

⑥ 令  $l = \min\{j | j \in J\} = 3$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{-1, +2, +3\}, \sigma_0 = (0, 1, 1, 0, 0)^T$ ;

②  $c\sigma_0 = 5 < \bar{f} = 6$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = 0, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 0, \sigma_0$  是可行解, 置  $\bar{x} = \sigma_0 = (0, 1, 1, 0,$

$0)^T, \bar{f} = c\sigma_0 = 5$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{-1, +2, -3\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (0, 1, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $c\sigma_0 = 2 < \bar{f} = 5$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -5, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -4$ , 违背约束集  $I = \{1, 2\}$ ;

④ 自由变量有  $x_4, x_5, c\sigma_0 + c_4 = 6 > \bar{f}$ . 本子问题没有更好可行解.

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{-1, -2\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $c\sigma_0 = 0 < \bar{f} = 5$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -8, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -5$ , 违背约束集  $I = \{1, 2\}$ ;

④ 自由变量有  $x_3, x_4, x_5, c\sigma_0 + c_3 = 3 < \bar{f} = 5, c\sigma_0 + c_4 = 4, c\sigma_0 + c_5 = 5 = \bar{f}$ ;

⑤ 可选集  $J = \{j | c\sigma_0 + c_j < \bar{f}\} = \{3, 4\}, q_1 = 9, q_2 = 6, s_1 + q_1 = 1, s_2 + q_2 = 1$ ;

⑥ 令  $l = \min\{j | j \in J\} = 3$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{-1, -2, +3\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (0, 0, 1, 0, 0)^T$ ;

②  $\alpha_0 = 3 < \bar{f} = 5$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -3, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -1$ , 违背约束集  $I = \{1, 2\}$ ;

④ 自由变量  $x_4, x_5, \alpha_0 + c_4 = 7 > \bar{f} = 5$ . 本子问题没有更好可行解.

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{-1, -2, -3\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $\alpha_0 = 0 < \bar{f} = 5$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -8, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -5$ , 违背约束集  $I = \{1, 2\}$ ;

④ 自由变量有  $x_4, x_5, \alpha_0 + c_4 = 4 < \bar{f} = 5, \alpha_0 + c_5 = 5 = \bar{f}$ ;

⑤ 可选集  $J = \{j | \alpha_0 + c_j < \bar{f}\} = \{4\}, q_1 = 4, q_2 = 2, s_1 + q_1 = -4, s_2 + q_2 = -3$ . 本子问题没有更好可行解.

$\{\sigma\}$  的固定变量均为 0, 探测完毕.

最优解  $\bar{x} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (0, 1, 1, 0, 0)^T$ , 最优值  $\bar{f} = 5$ .

(3) 记  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ , 目标函数系数  $c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (1, 1, 2, 4, 6)$ , 则  $f = cx$ ,

$$A = (a_{ij})_{2 \times 5} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

给定一个可行点  $\bar{x} = (0, 0, 0, 0, 1)^T$ , 目标函数最优值上界  $\bar{f} = c\bar{x} = 6$ . 用隐数法求解.

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{\emptyset\}, \sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $\alpha_0 = 0 < \bar{f} = 6$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -2, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -3$ , 违背约束集  $I = \{1, 2\}$ ;

④ 自由变量有  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \alpha_0 + c_1 = 1 < \bar{f} = 6, \alpha_0 + c_2 = 1, \alpha_0 + c_3 = 2, \alpha_0 + c_4 = 4, \alpha_0 + c_5 = 6 = \bar{f}$ ;

⑤ 可选集  $J = \{j | \alpha_0 + c_j < \bar{f}\} = \{1, 2, 3, 4\}, J_1 = \{j | j \in J, a_{1j} > 0\} = \{2, 3, 4\}, J_2 = \{j | j \in J, a_{2j} > 0\} = \{1, 3, 4\}, q_1 = \sum_{j \in J_1} a_{1j} = 5, q_2 = \sum_{j \in J_2} a_{2j} = 9, s_1 + q_1 = 3, s_2 + q_2 = 6$ ;

⑥ 检验  $J$  中的每个指标, 仍有  $J = \{1, 2, 3, 4\}$ . 令  $l = \min\{j | j \in J\} = 1$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{+1\}, \sigma_0 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $\alpha_0 = 1 < \bar{f} = 6$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -4, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 0$ , 违背约束集  $I = \{1\}$ ;

④ 自由变量有  $x_2, x_3, x_4, x_5, \alpha_0 + c_2 = 2 < \bar{f} = 6, \alpha_0 + c_3 = 3, \alpha_0 + c_4 = 5, \alpha_0 + c_5 = 7 > \bar{f}$ ;

⑤ 可选集  $J = \{j | \alpha_0 + c_j < \bar{f}\} = \{2, 3, 4\}, J_1 = \{j | j \in J, a_{1j} > 0\} = \{2, 3, 4\}, q_1 = \sum_{j \in J_1} a_{1j} =$

$5, s_1 + q_1 = 1$ ;

⑥ 经检验仍有  $J = \{2, 3, 4\}, l = \min\{2, 3, 4\} = 2$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{+1, +2\}, \sigma_0 = (1, 1, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $\alpha_0 = 2 < \bar{f} = 6$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -3, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -2$ , 违背约束集  $I = \{1, 2\}$ ;

④ 自由变量有  $x_3, x_4, x_5, \alpha_0 + c_3 = 4 < \bar{f} = 6, \alpha_0 + c_4 = 6 = \bar{f}$ ;

⑤ 可选集  $J = \{j | \alpha_0 + c_j < \bar{f}\} = \{3\}, q_1 = 3, q_2 = 4, s_1 + q_1 = 0, s_2 + q_2 = 2$ ;

⑥ 置  $l = 3$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{+1, +2, +3\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (1, 1, 1, 0, 0)^T$ ;

②  $\alpha_0 = 4 < \bar{f} = 6$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = 0, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 2$ .  $\sigma_0$  是可行点, 置  $\bar{x} = (1, 1, 1, 0, 0)^T$ ,

$\bar{f} = c\sigma_0 = 4$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{+1, +2, -3\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (1, 1, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $\alpha_0 = 2 < \bar{f} = 4$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -3, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -2$ , 违背约束集  $I = \{1, 2\}$ ;

④ 自由变量有  $x_4, x_5, \alpha_0 + c_4 = 6 > \bar{f} = 4$ . 本子问题无更好的可行解.

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{+1, -2\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $\alpha_0 = 1 < \bar{f} = 4$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -4, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 0$ , 违背约束集  $I = \{1\}$ ;

④ 自由变量有  $x_3, x_4, x_5, \alpha_0 + c_3 = 3 < \bar{f} = 4, \alpha_0 + c_4 = 5 > \bar{f} = 4$ , 可选集  $J = \{3\}, q_1 = 3, q_2 = 4, s_1 + q_1 = -1 < 0, s_2 + q_2 = 4$ . 本子问题无更好的可行解.

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{-1\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $\alpha_0 = 0 < \bar{f} = 4$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -2, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -3$ , 违背约束集  $I = \{1, 2\}$ ;

④ 自由变量有  $x_2, x_3, x_4, x_5, \alpha_0 + c_2 = 1 < \bar{f} = 4, \alpha_0 + c_3 = 2, \alpha_0 + c_4 = 4 = \bar{f}$ ;

⑤ 可选集  $J = \{2, 3\}, J_1 = \{2, 3\}, J_2 = \{3\}, q_1 = 1 + 3 = 4, q_2 = 4, s_1 + q_1 = 2, s_2 + q_2 = 1$ ;

⑥ 检验  $J$  中的每个指标,  $s_2 + q_2 + a_{22} = -1$ , 可选集中去掉指标 2. 令  $J = \{3\}, l = \min\{3\} = 3$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{-1, -2, +3\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (0, 0, 1, 0, 0)^T$ ;

②  $\alpha_0 = 2 < \bar{f} = 4$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = 1, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 1, \sigma_0$  是可行点, 置  $\bar{x} = \sigma_0 = (0, 0, 1, 0, 0)^T$ ,



0)<sup>T</sup>,  $\bar{f} = \alpha_0 = 2$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{-1, -2, -3\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $\alpha_0 = 0 < \bar{f} = 2$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -2, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -3$ , 违背约束集  $I = \{1, 2\}$ ;

④ 自由变量有  $x_4, x_5, \alpha_0 + c_4 = 4 > \bar{f} = 2$ , 子问题  $\{\sigma\}$  无更好的可行解.

$\{\sigma\}$  中固定变量全为 0, 探测完毕. 最优解  $\bar{x} = (0, 0, 1, 0, 0)$ , 最优值  $\bar{f} = 2$ .

(4) 记  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T, c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (1, 3, 4, 6, 7)$ ,

$$A = (a_{ij})_{3 \times 5} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 & -4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

则  $f = cx$ , 最优值上界  $\bar{f} = +\infty$ . 下面用隐数法求解.

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{\emptyset\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $\alpha_0 = 0 < \bar{f} = +\infty$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -3, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -2, s_3 = A_3 \sigma_0 - b_3 = -1$ , 违背约束集  $I = \{1, 2, 3\}$ ;

④ 自由变量有  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \alpha_0 + c_1 = 1 < \bar{f} = +\infty, \alpha_0 + c_2 = 3, \alpha_0 + c_3 = 4, \alpha_0 + c_4 = 6, \alpha_0 + c_5 = 7$ ;

⑤ 可选集  $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 各违背约束中, 属于  $J$  的有正系数的自由变量下标集:  $J_1 = \{1, 3, 5\}, J_2 = \{1, 2, 4\}, J_3 = \{2, 3, 5\}, q_1 = \sum_{j \in J_1} a_{1j} = 5, q_2 = \sum_{j \in J_2} a_{2j} = 8, q_3 = \sum_{j \in J_3} a_{3j} = 7, s_1 + q_1 = 2, s_2 + q_2 = 6, s_3 + q_3 = 6$ ;

⑥ 检验  $J$  中每个指标:  $s_1 + q_1 + a_{12} = -3, s_1 + q_1 + a_{14} = -2$ , 从  $J$  中去掉指标  $\{2, 4\}$ . 令可选集  $J = \{1, 3, 5\}, l = \min\{j | j \in J\} = 1$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{+1\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $\alpha_0 = 1 < \bar{f} = +\infty$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -2, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 2, s_3 = A_3 \sigma_0 - b_3 = -3$ , 违背约束集  $I = \{1, 3\}$ ;

④ 自由变量有  $x_2, x_3, x_4, x_5, \alpha_0 + c_2 = 4 < \bar{f} = +\infty, \alpha_0 + c_3 = 5, \alpha_0 + c_4 = 7, \alpha_0 + c_5 = 8$ ;

⑤ 可选集  $J = \{2, 3, 4, 5\}$ , 各违背约束中, 有正系数的自由变量下标集  $J_1 = \{3, 5\}, J_3 = \{2, 3, 5\}, q_1 = \sum_{j \in J_1} a_{1j} = 4, q_2 = \sum_{j \in J_3} a_{3j} = 7, s_1 + q_1 = 2, s_3 + q_3 = 4$ ;

⑥ 检验  $J$  中每个指标:  $s_1 + q_1 + a_{12} = -3, s_1 + q_1 + a_{14} = -2$ , 从  $J$  中去掉指标  $\{2, 4\}$ . 令可选

集  $J = \{3, 5\}, l = \min\{j | j \in J\} = 3$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{+1, -2, +3\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (1, 0, 1, 0, 0)^T$ ;

②  $\alpha_0 = 5 < \bar{f} = +\infty$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = 1, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 0, s_3 = A_3 \sigma_0 - b_3 = 1, \sigma_0 = (1, 0, 1, 0, 0)^T$

是可行点, 令  $\bar{x} = \sigma_0 = (1, 0, 1, 0, 0)^T$ , 则  $\bar{f} = c\bar{x} = 5$ .

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{+1, -2, -3\}$ , 探测点  $\sigma_0 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $\alpha_0 = 1 < \bar{f} = 5$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -2, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = 2, s_3 = A_3 \sigma_0 - b_3 = -3$ , 违背约束集  $I = \{1, 3\}$ ;

④ 自由变量有  $x_4, x_5, \alpha_0 + c_5 = 7 > \bar{f} = 5$ . 本子问题无更好的可行解.

① 置子问题  $\{\sigma\} = \{-1\}, \sigma_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ ;

②  $\alpha_0 = 0 < \bar{f} = 5$ ;

③ 松弛变量  $s_1 = A_1 \sigma_0 - b_1 = -3, s_2 = A_2 \sigma_0 - b_2 = -2, s_3 = A_3 \sigma_0 - b_3 = -1$ , 违背约束集  $I = \{1, 2, 3\}$ ;

④ 自由变量有  $x_2, x_3, x_4, x_5, \alpha_0 + c_2 = 3 < \bar{f} = 5, \alpha_0 + c_3 = 4, \alpha_0 + c_4 = 6 > \bar{f} = 5$ ;

⑤ 可选集  $J = \{j | c_{\sigma_j} - c_j < \bar{f}\} = \{2, 3\}$ . 各违背约束中, 属于  $J$  的有正系数的自由变量下标集  $J_1 = \{3\}, J_2 = \{2\}, J_3 = \{2, 3\}, q_1 = \sum_{j \in J_1} a_{1j} = 3, q_2 = \sum_{j \in J_2} a_{2j} = 1, q_3 = \sum_{j \in J_3} a_{3j} = 6, s_1 + q_1 = 0, s_2 + q_2 = -1, s_3 + q_3 = 5$ . 本子问题没有更好的可行解.

子问题  $\{\sigma\} = \{-1\}$  中, 固定变量均取 0, 探测完毕. 最优解  $\bar{x} = (1, 0, 1, 0, 0)^T$ , 最优值  $\bar{f} = 5$ .

4. 假设分派甲、乙、丙、丁、戊 5 人去完成 A, B, C, D, E 5 项任务, 每人必须完成一项, 每项任务必须由 1 人完成. 每个人完成各项任务所需时间  $c_{ij}$  如下表所示, 问怎样分派任务才能使完成 5 项任务的总时间最少?

	A	B	C	D	E
甲	16	14	18	17	20
乙	14	13	16	15	17
丙	18	16	17	19	20
丁	19	17	15	16	19
戊	17	15	19	18	21

解 设第  $i$  个人完成第  $j$  项任务的工作量为  $x_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, 5$ . 数学模型如下:

$$\min \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \text{s. t. } & Ax = e, \\ & x_j \geq 0, \text{ 且取 } 0 \text{ 或 } 1, j = 1, 2, \dots, 5, \end{aligned}$$

其中

$$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{15}, \dots, x_{51}, x_{52}, \dots, x_{55})^T, \quad c = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{15}, \dots, c_{51}, c_{52}, \dots, c_{55}),$$

$$A = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{15}, \dots, p_{51}, p_{52}, \dots, p_{55}),$$

$p_{ij}$  的第  $i$  和第  $5+j$  个分量是 1, 其余分量是 0, 向量  $e$  的分量均为 1.

将费用系数向量  $c$  写成矩阵形式:

$$(c_{ij})_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 14 & 18 & 17 & 20 \\ 14 & 13 & 16 & 15 & 17 \\ 18 & 16 & 17 & 19 & 20 \\ 19 & 17 & 15 & 16 & 19 \\ 17 & 15 & 19 & 18 & 21 \end{bmatrix}.$$

下面求约化矩阵  $(\hat{c}_{ij})_{5 \times 5}$ .

令  $u_i = \min_j \{c_{ij}\}, i = 1, 2, \dots, 5$ . 第  $i$  行的每个元素减去本行的最小数  $u_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ ,

得到下列矩阵:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

再从所得矩阵的每一列各元素减去本列的最小数  $v_j (j = 1, 2, \dots, 5)$ , 得到约化矩阵:

$$(\hat{c}_{ij})_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

用最少数直线覆盖矩阵(1)中的全部零元素. 最少直线数是 4, 尚未达到最优解. 未被覆盖元素中最小数  $l = 1$ . 未被覆盖元素减去最小数 1, 两次覆盖元素加 1, 得下列约化矩阵:

$$(\bar{c}_{ij})_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

用最少数直线覆盖矩阵(2)中的全部零元素, 最少直线数是 4, 尚未达到最优解. 未被覆盖元素中最小数  $l = 1$ . 未被覆盖元素减 1, 两次覆盖元素加 1, 得到约化矩阵:

$$\begin{bmatrix} 0 & \oplus & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \oplus & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \oplus \\ 4 & 4 & \oplus & 0 & 1 \\ \oplus & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

用最少数直线覆盖矩阵(3)中的全部零元素, 最少直线数等于 5, 已经得到 5 个独立的零元素. 5 个独立的零元素的选择并不惟一. 例如, 令

$$x_{12} = x_{24} = x_{35} = x_{43} = x_{51} = 1,$$

其中  $x_{ij} = 1$  表示第  $i$  个人完成第  $j$  项任务; 其他  $x_{ij} = 0$ . 最小值

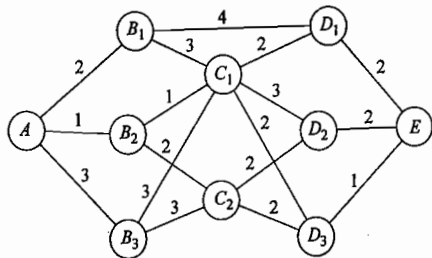
$$f_{\min} = 14 + 15 + 20 + 15 + 17 = 81.$$

## 第16章

## CHAPTER 16

## 动态规划简介题解

1. 假设有一个路网如下图所示, 图中数字表示该路段的长度, 求从 A 到 E 的最短路线及其长度.



解 用逆推解法. 分为 4 个阶段. 第  $k$  阶段的状态变量记作  $s_k$ , 决策变量记作  $u_k$ , 状态转移方程  $s_{k+1} = u_k(s_k)$ . 最优指标函数记作  $f_k(s_k)$ , 表示从  $s_k$  到终端的最短路程.

当  $k=4$  时:

$$f_4(D_1) = 2, u_4(D_1) = E; \quad f_4(D_2) = 2, u_4(D_2) = E; \quad f_4(D_3) = 1, u_4(D_3) = E.$$

当  $k=3$  时:

$$\begin{aligned} f_3(C_1) &= \min\{2 + f_4(D_1), 3 + f_4(D_2), 2 + f_4(D_3)\} \\ &= \min\{2 + 2, 3 + 2, 2 + 1\} \\ &= 3, \quad u_3(C_1) = D_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(C_2) &= \min\{2 + f_4(D_2), 2 + f_4(D_3)\} \\ &= \min\{2 + 2, 2 + 1\} \\ &= 3, \quad u_3(C_2) = D_3. \end{aligned}$$

当  $k=2$  时:

$$f_2(B_1) = \min\{4 + f_4(D_1), 3 + f_3(C_1)\}$$

$$\begin{aligned} &= \min\{4 + 2, 3 + 3\} \\ &= 6, \quad u_2(B_1) = D_1 \text{ 或 } C_1; \\ f_2(B_2) &= \min\{1 + f_3(C_1), 2 + f_3(C_2)\} \\ &= \min\{1 + 3, 2 + 3\} \\ &= 4, \quad u_2(B_2) = C_1; \\ f_2(B_3) &= \min\{3 + f_3(C_1), 3 + f_3(C_2)\} \\ &= \min\{3 + 3, 3 + 3\} \\ &= 6, \quad u_2(B_3) = C_1 \text{ 或 } C_2. \end{aligned}$$

当  $k=1$  时:

$$\begin{aligned} f_1(A) &= \min\{2 + f_2(B_1), 1 + f_2(B_2), 3 + f_2(B_3)\} \\ &= \min\{2 + 6, 1 + 4, 3 + 6\} \\ &= 5, \quad u_1(A) = B_2. \end{aligned}$$

最短路线:  $A \rightarrow B_2 \rightarrow C_1 \rightarrow D_3 \rightarrow E$ .

最短路程:  $f_1(A) = 5$ .

2. 分别用逆推解法及顺推解法求解下列各题:

$$\begin{aligned} (1) \max \quad & 2x_1^2 + 3x_2 + 5x_3 & (2) \max \quad & x_1^2 + 8x_2 + 3x_3^2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8, & \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0; & & x_1, x_2, x_3 \geq 0; \\ (3) \min \quad & x_1 + x_2^2 + 2x_3 & (4) \max \quad & x_1 x_2 x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \geq 10, & \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0; & & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

解 (1) 先用逆推解法

划分为 3 个阶段. 阶段指标  $v_3(x_3) = 5x_3$ ,  $v_2(x_2) = 3x_2$ ,  $v_1(x_1) = 2x_1^2$ . 用  $s_k$  表示第  $k$  阶段的状态变量, 状态转移方程:

$$s_3 - x_3 = 0, \quad s_3 = s_2 - 4x_2, \quad s_2 = s_1 - 2x_1, \quad s_1 = 8.$$

考虑非负限制, 则有

$$x_3 = s_3, \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{4}s_2, \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}s_1.$$

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{x \in D_k(s_k)} \{v_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, & k = 3, 2, 1, \\ f_4(s_4) = 0. \end{cases}$$

当  $k=3$  时:

$$f_3(s_3) = \max_{x_3=s_3} \{5x_3 + f_4(s_4)\} = 5s_3, \quad x_3 = s_3.$$

当  $k=2$  时:

$$\begin{aligned}
 f_2(s_2) &= \max_{0 \leq x_2 \leq \frac{1}{4}s_2} \{3x_2 + f_3(s_3)\} \\
 &= \max_{0 \leq x_2 \leq \frac{1}{4}s_2} \{3x_2 + 5(s_2 - 4x_2)\} \\
 &= 5s_2, \\
 x_2 &= 0.
 \end{aligned}$$

当  $k=1$  时:

$$\begin{aligned}
 f_1(s_1) &= \max_{0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}s_1} \{2x_1^2 + f_2(s_2)\} \\
 &= \max_{0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}s_1} \{2x_1^2 + 5(s_1 - 2x_1)\} \\
 &= 5s_1, \\
 x_1 &= 0.
 \end{aligned}$$

由  $x_1=0$ , 知  $s_2=s_1=8$ ; 由  $x_2=0$ , 知  $s_3=s_2=8$ . 因此  $x_3=s_3=8$ .

最优解  $\bar{x}=(0,0,8)$ , 最优值  $f_{\max}=40$ .

再用顺推解法.

划分为 3 个阶段. 阶段指标  $v_1(x_1)=2x_1^2$ ,  $v_2(x_2)=3x_2$ ,  $v_3(x_3)=5x_3$ . 用  $s_{k+1}$  表示  $k$  阶段末的结束状态, 状态转移方程:

$$s_1 = s_2 - 2x_1 = 0, \quad s_2 = s_3 - 4x_2, \quad s_3 = s_4 - x_3, \quad s_4 = 8.$$

由于  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ , 因此有

$$x_1 = \frac{1}{2}s_2, \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{4}s_3, \quad 0 \leq x_3 \leq s_4.$$

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_{k+1}) = \max\{v_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, & k=1,2,3, \\ f_0(s_1) = 0. \end{cases}$$

当  $k=1$  时:

$$f_1(s_2) = \max_{x_1=\frac{1}{2}s_2} \{2x_1^2 + f_0(s_1)\} = \frac{1}{2}s_2^2, \quad x_1 = \frac{1}{2}s_2.$$

当  $k=2$  时:

$$f_2(s_3) = \max_{0 \leq x_2 \leq \frac{1}{4}s_3} \{3x_2 + f_1(s_2)\} = \max_{0 \leq x_2 \leq \frac{1}{4}s_3} \left\{ 3x_2 + \frac{1}{2}(s_3 - 4x_2)^2 \right\}.$$

由于  $g(x_2) = 3x_2 + \frac{1}{2}(s_3 - 4x_2)^2$  是凸函数, 最大值点是  $x_2=0$  或  $x_2=\frac{1}{4}s_3$ . 因此

$$f_2(s_3) = \begin{cases} \frac{1}{2}s_3^2, & x_2 = 0, \\ \frac{3}{4}s_3, & x_2 = \frac{1}{4}s_3. \end{cases}$$

当  $k=3$  时:

$$\begin{aligned}
 f_3(s_4) &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_4} \{5x_3 + f_2(s_3)\} \\
 &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_4} \left\{ 5x_3 + \frac{1}{2}s_3^2, 5x_3 + \frac{3}{4}s_3 \right\} \\
 &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_4} \left\{ 5x_3 + \frac{1}{2}(s_4 - x_3)^2, 5x_3 + \frac{3}{4}(s_4 - x_3) \right\} \\
 &= 5s_4, \\
 x_3 &= s_4 = 8.
 \end{aligned}$$

由状态转移方程知, 当  $x_3=8$  时,  $s_3=0$ ; 由  $x_2=0$ , 知  $s_2=0$ , 故  $x_1=0$ .

最优解  $\bar{x}=(0,0,8)$ , 最优值  $f_{\max}=40$ .

(2) 先用逆推解法. 划分为 3 个阶段, 阶段指标  $v_3(x_3)=3x_3^2$ ,  $v_2(x_2)=8x_2$ ,  $v_1(x_1)=x_1^2$ . 状态转移方程:

$$s_3 - 2x_3 = 0, \quad s_3 = s_2 - x_2, \quad s_2 = s_1 - x_1, \quad s_1 \leq 6.$$

基本方程:

$$f_k(s_k) = \max_{x_k \in D_k(s_k)} \{v_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \quad k=3,2,1,$$

$$f_4(s_4) = 0.$$

当  $k=3$  时:

$$f_3(s_3) = \max_{x_3=\frac{1}{2}s_3} \{3x_3^2 + f_4(s_4)\} = \frac{3}{4}s_3^2, \quad x_3 = \frac{1}{2}s_3.$$

当  $k=2$  时:

$$\begin{aligned}
 f_2(s_2) &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{8x_2 + f_3(s_3)\} \\
 &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \left\{ 8x_2 + \frac{3}{4}(s_2 - x_2)^2 \right\} \\
 &= 8s_2, \\
 x_2 &= s_2.
 \end{aligned}$$

当  $k=1$  时:

$$\begin{aligned}
 f_1(s_1) &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{x_1^2 + f_2(s_2)\} \\
 &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{x_1^2 + 8(s_1 - x_1)\} \\
 &= 8s_1, \\
 x_1 &= 0.
 \end{aligned}$$

由于求最大值, 令  $s_1=6$ . 利用状态转移方程, 由  $s_1=6, x_1=0$  推得  $s_2=6$ , 故  $x_2=6, s_3=0, x_3=0$ .

最优解  $\bar{x}=(0,6,0)$ , 最优值  $f_{\max}=48$ .

再用顺推解法.

划分为3个阶段. 阶段指标  $v_1(x_1)=x_1^2, v_2(x_2)=8x_2, v_3(x_3)=3x_3^2$ . 状态转移方程:

$$s_1 = s_2 - x_1 = 0, \quad s_2 = s_3 - x_2, \quad s_3 = s_4 - 2x_3, \quad s_4 \leq 6.$$

由于变量有非负的限制, 因此  $x_1 = s_2, 0 \leq x_2 \leq s_3, 0 \leq x_3 \leq \frac{1}{2}s_4$ .

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_{k+1}) = \max\{v_k(x_k) + f_{k-1}(s_k)\}, & k=1, 2, 3, \\ f_0(s_1) = 0. \end{cases}$$

当  $k=1$  时:

$$f_1(s_2) = \max_{x_1=s_2} \{v_1(x_1) + f_0(s_1)\} = s_2^2, \quad x_1 = s_2.$$

当  $k=2$  时:

$$\begin{aligned} f_2(s_3) &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_3} \{v_2(x_2) + f_1(s_2)\} \\ &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_3} \{8x_2 + (s_3 - x_2)^2\} \\ &= 8s_3, \\ x_2 &= s_3. \end{aligned}$$

当  $k=3$  时:

$$\begin{aligned} f_3(s_4) &= \max_{0 \leq x_3 \leq \frac{1}{2}s_4} \{v_3(x_3) + f_2(s_3)\} \\ &= \max_{0 \leq x_3 \leq \frac{1}{2}s_4} \{3x_3^2 + 8(s_4 - 2x_3)\} \\ &= 8s_4, \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

为取最大值, 令  $s_4=6, x_3=0$ . 利用状态转移方程, 推出  $s_3=s_4-2x_3=6, x_2=6, s_2=s_3-x_2=0, x_1=s_2=0$ .

最优解  $\bar{x}=(0, 6, 0)$ , 最优值  $f_{\max}=48$ .

(3) 先用逆推解法.

划分为3个阶段, 阶段指标  $v_3(x_3)=2x_3, v_2(x_2)=x_2^2, v_1(x_1)=x_1$ . 用  $s_k$  表示第  $k$  阶段的状态变量. 状态转移方程:  $s_3-x_3=0, s_3=s_2-x_2, s_2=s_1-x_1, s_1 \geq 10$ .

由于有非负的限制, 因此  $x_3=s_3, 0 \leq x_2 \leq s_2, 0 \leq x_1 \leq s_1$ .

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \min_{x_k \in D_k(s_k)} \{v_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, & k=3, 2, 1, \\ f_4(s_4) = 0. \end{cases}$$

当  $k=3$  时:

$$f_3(s_3) = \min_{x_3=s_3} \{2x_3 + f_4(s_4)\} = 2s_3, \quad x_3 = s_3.$$

当  $k=2$  时:

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \min_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{x_2^2 + f_3(s_3)\} \\ &= \min_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{x_2^2 + 2(s_2 - x_2)\} \\ &= \begin{cases} s_2^2, & s_2 < 1, \\ 2s_2 - 1, & s_2 \geq 1, \end{cases} \\ x_2 &= \begin{cases} s_2, & s_2 < 1, \\ 1, & s_2 \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

当  $k=1$  时:

$$\begin{aligned} f_1(s_1) &= \min_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{x_1 + f_2(s_1 - x_1)\} = s_1 - \frac{1}{4}, \\ x_1 &= s_1 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

为取最小值, 令  $s_1=10, x_1=s_1-\frac{1}{2}=\frac{19}{2}$ , 利用状态转移方程, 得到  $s_2=s_1-x_1=\frac{1}{2}$ ,  $x_2=\frac{1}{2}, s_3=s_2-x_2=0, x_3=s_3=0$ .

最优解  $\bar{x}=(\frac{19}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ , 最优值  $f_{\min}=\frac{39}{4}$ .

再用顺推解法.

划分为3个阶段, 阶段指标  $v_1(x_1)=x_1, v_2(x_2)=x_2^2, v_3(x_3)=2x_3$ . 状态转移方程:  $s_1=s_2-x_1=0, s_2=s_3-x_2, s_3=s_4-x_3, s_4 \geq 10$ . 由于有非负的限制, 因此  $x_1=s_2, 0 \leq x_2 \leq s_3, 0 \leq x_3 \leq s_4$ .

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_{k+1}) = \min\{v_k(x_k) + f_{k-1}(s_k)\}, & k=1, 2, 3, \\ f_0(s_1) = 0. \end{cases}$$

当  $k=1$  时:

$$f_1(s_2) = \min_{x_1=s_2} \{x_1 + f_0(s_1)\} = s_2, \quad x_1 = s_2.$$

当  $k=2$  时:

$$\begin{aligned} f_2(s_3) &= \min_{0 \leq x_2 \leq s_3} \{x_2^2 + f_1(s_2)\} \\ &= \min_{0 \leq x_2 \leq s_3} \{x_2^2 + (s_3 - x_2)\} \end{aligned}$$

$$x_2 = \begin{cases} s_3^2, & \text{当 } s_3 < \frac{1}{2}, \\ s_3 - \frac{1}{4}, & \text{当 } s_3 \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} s_3, & s_3 < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & s_3 \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

当  $k=3$  时:

$$f_3(s_4) = \min_{0 \leq x_3 \leq s_4} \{2x_3 + f_2(s_4 - x_3)\} = s_4 - \frac{1}{4}, \quad x_3 = 0.$$

为取最小值, 令  $s_4 = 10, x_3 = 0$ , 利用状态转移方程求得  $s_3 = s_4 - x_3 = 10, x_2 = \frac{1}{2}, s_2 =$

$$s_3 - x_2 = \frac{19}{2}, x_1 = s_2 = \frac{19}{2}, s_1 = s_2 - x_1 = 0.$$

$$\text{最优解 } \bar{x} = \left(\frac{19}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \text{最优值 } f_{\min} = \frac{39}{4}.$$

(4) 先用逆推解法.

划分为 3 个阶段, 阶段指标:  $v_3(x_3) = x_3, v_2(x_2) = x_2, v_1(x_1) = x_1$ . 状态转移方程:  $s_4 = s_3 - 2x_3 = 0, s_3 = s_2 - x_2, s_2 = s_1 - x_1, s_1 \leq 6$ . 由于有非负的限制, 因此  $x_3 = \frac{1}{2}s_3, 0 \leq x_2 \leq s_2, 0 \leq x_1 \leq s_1$ .

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\{v_k(s_k)f_{k+1}(s_{k+1})\}, & k = 3, 2, 1, \\ f_4(s_4) = 1. \end{cases}$$

当  $k=3$  时:

$$f_3(s_3) = \max_{x_3 = \frac{1}{2}s_3} \{x_3 f_4(s_4)\} = \frac{1}{2}s_3, \quad x_3 = \frac{1}{2}s_3.$$

当  $k=2$  时:

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{x_2 f_3(s_3)\} \\ &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \left\{ \frac{1}{2} x_2 (s_2 - x_2) \right\} \\ &= \frac{1}{8} s_2^2, \\ x_2 &= \frac{1}{2} s_2. \end{aligned}$$

当  $k=3$  时:

$$\begin{aligned} f_1(s_1) &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{x_1 f_2(s_2)\} \\ &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \left\{ \frac{1}{8} x_1 (s_1 - x_1)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{54} s_1^3, \\ x_1 &= \frac{1}{3} s_1. \end{aligned}$$

为求最大值点, 令  $s_1 = 6, x_1 = 2$ , 利用状态转移方程得到  $s_2 = s_1 - x_1 = 4, x_2 = \frac{1}{2} s_2 = 2,$

$$s_3 = s_2 - x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2} s_3 = 1.$$

最优解  $\bar{x} = (2, 2, 1)$ , 最优值  $f_{\max} = 4$ .

再用顺推解法.

划分为 3 个阶段, 阶段指标:  $v_1(x_1) = x_1, v_2(x_2) = x_2, v_3(x_3) = x_3$ . 状态转移方程:  $s_1 = s_2 - x_1 = 0, s_2 = s_3 - x_2, s_3 = s_4 - 2x_3, s_4 \leq 6$ . 由于有非负的限制, 因此  $x_1 = s_2, 0 \leq x_2 \leq s_3, 0 \leq x_3 \leq \frac{1}{2} s_4$ .

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_{k+1}) = \max\{v_k(x_k)f_{k-1}(s_k)\}, & k = 1, 2, 3, \\ f_0(s_1) = 1. \end{cases}$$

当  $k=1$  时:

$$f_1(s_2) = \max_{x_1 = s_2} \{x_1 f_0(s_1)\} = s_2, \quad x_1 = s_2.$$

当  $k=2$  时:

$$\begin{aligned} f_2(s_3) &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_3} \{x_2 f_1(s_2)\} \\ &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_3} \{x_2 (s_3 - x_2)\} \\ &= \frac{1}{4} s_3^2, \\ x_2 &= \frac{1}{2} s_3. \end{aligned}$$

当  $k=3$  时:

$$\begin{aligned} f_3(s_4) &= \max_{0 \leq x_3 \leq \frac{1}{2}s_4} \{x_3 f_2(s_3)\} \\ &= \max_{0 \leq x_3 \leq \frac{1}{2}s_4} \left\{ \frac{1}{4} x_3 (s_4 - 2x_3)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{54} s_4^3,$$

$$x_3 = \frac{1}{6} s_4.$$

求极大值,令  $s_4=6, x_3=\frac{1}{6}s_4=1$ , 利用状态转移方程得到  $s_3=s_4-2x_3=4, x_2=\frac{1}{2}s_3=2, s_2=s_3-x_2=2, x_1=s_2=2$ .

最优解  $\bar{x}=(2,2,1)$ , 最优值  $f_{\max}=4$ .

3. 假设某种机器可在高低两种不同负荷下运行,在高负荷下运行时,每台机器每年产值 20 万元,机器年损坏率 20%,在低负荷下运行时,每台机器每年产值 17 万元,机器年损坏率 10%,开始生产时,完好机器数量为 100 台,试问如何安排机器在高低负荷下的生产,才能使 3 年内总产值最高? (提示:可取第  $k$  年度初完好机器数  $s_k$  作为状态变量).

解 下面用逆推解法.

第  $k$  年度初完好机器数  $s_k$  为状态变量,  $s_1=100$ . 第  $k$  年度分配高负荷下生产的机器数  $x_k$  为决策变量,低负荷下生产的机器数为  $s_k-x_k$ . 阶段指标  $v_k(s_k, x_k)$  为第  $k$  年度产值,即

$$v_k(s_k, x_k) = 20x_k + 17(s_k - x_k) = 17s_k + 3x_k, \quad k=3,2,1.$$

状态转移方程:

$$s_{k+1} = 0.8x_k + 0.9(s_k - x_k) = 0.9s_k - 0.1x_k, \quad k=3,2,1.$$

最优值函数  $f_k(s_k)$  表示从第  $k$  年度初到第 3 年度末最大产值.

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\{v_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, & k=3,2,1, \\ f_4(s_4) = 0. \end{cases}$$

求解过程如下:

当  $k=3$  时:

$$\begin{aligned} f_3(s_3) &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} \{v_3(s_3, x_3) + f_4(s_4)\} \\ &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} \{17s_3 + 3x_3\} \\ &= 20s_3, \\ x_3 &= s_3. \end{aligned}$$

当  $k=2$  时:

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{v_2(s_2, x_2) + f_3(s_3)\} \\ &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{17s_2 + 3x_2 + 20(0.9s_2 - 0.1x_2)\} \\ &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{35s_2 + x_2\} \\ &= 36s_2, \end{aligned}$$

$$x_2 = s_2.$$

当  $k=1$  时:

$$\begin{aligned} f_1(s_1) &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{v_1(s_1, x_1) + f_2(s_2)\} \\ &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{17s_1 + 3x_1 + 36(0.9s_1 - 0.1x_1)\} \\ &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{49.4s_1 - 0.6x_1\} \\ &= 49.4s_1 = 4940(\text{万元}), \\ x_1 &= 0. \end{aligned}$$

利用状态转移方程,由  $s_1=100, x_1=0$  推得  $s_2=90, x_2=90, s_3=72, x_3=72$ .

最优解  $\bar{x}=(0,90,72)$ , 总产值  $f_1(s_1)=4940$  万元.

计划安排: 第 1 年, 100 台机器均在低负荷下生产; 第 2 年初有 90 台完好机器, 均安排高负荷下生产, 第 3 年初完好机器 72 台, 均安排高负荷下生产. 按此计划, 3 年总产值最高, 为 4940 万元.

4. 假设旅行者携带各种货物总重量不得超过 80kg. 现有 A, B, C 三种货物, 每件重量及价值如下表所示, 试问 A, B, C 各携带多少件才能使总价值最大?

货物种类	A	B	C
每件重/kg	15	24	30
每件价值/元	200	340	420

解 设携带货物 A, B, C 分别为  $x_1, x_2, x_3$  件. 问题表达成整数规划如下:

$$\begin{aligned} \max \quad & 200x_1 + 340x_2 + 420x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 15x_1 + 24x_2 + 30x_3 \leq 80, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ 且为整数.} \end{aligned}$$

下面用动态规划逆推解法求解.

按货物种类分为 3 个阶段, 阶段指标  $v_1(x_1)=200x_1, v_2(x_2)=340x_2, v_3(x_3)=420x_3$ .

用  $s_k$  表示第  $k$  阶段的状态变量,  $s_k$  是携带货物重量的上限. 状态转移方程:  $0 \leq s_4 = s_3 - 30x_3, s_3 = s_2 - 24x_2, s_2 = s_1 - 15x_1, s_1 \leq 80$ .

基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\{v_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, & k=3,2,1, \\ f_4(s_4) = 0. \end{cases}$$

首先, 从第 1 阶段开始, 分析最优值函数  $f_k(s_k)$ .

当  $k=1$  时:

$$f_1(s_1) = \max_{\substack{0 \leq 15x_1 \leq 80 \\ x_1 \text{ 为整数}}} \{200x_1 + f_2(s_2)\}$$

$$= \max_{\substack{0 \leq 15x_1 \leq 80 \\ x_1 \text{ 为整数}}} \{200x_1 + f_2(80 - 15x_1)\}$$

$$= \max\{0 + f_2(80), 200 + f_2(65), 400 + f_2(50), 600 + f_2(35), 800 + f_2(20), 1000 + f_2(5)\}.$$

当  $k=2$  时:

$$f_2(s_2) = \max_{\substack{0 \leq 24x_2 \leq s_2 \\ x_2 \text{ 为整数}}} \{340x_2 + f_3(s_2 - 24x_2)\} = \max_{\substack{0 \leq 24x_2 \leq s_2 \\ x_2 \text{ 为整数}}} \{340x_2 + f_3(s_2 - 24x_2)\}.$$

利用上式,对  $f_1(s_1)$  中涉及的  $f_2(s_2)$  分别计算如下:

$$f_2(80) = \max_{\substack{0 \leq 24x_2 \leq 80 \\ x_2 \text{ 为整数}}} \{340x_2 + f_3(80 - 24x_2)\}$$

$$= \max\{0 + f_3(80), 340 + f_3(56), 680 + f_3(32), 1020 + f_3(8)\},$$

$$f_2(65) = \max_{\substack{0 \leq 24x_2 \leq 65 \\ x_2 \text{ 为整数}}} \{340x_2 + f_3(65 - 24x_2)\}$$

$$= \max\{0 + f_3(65), 340 + f_3(41), 680 + f_3(17)\},$$

$$f_2(50) = \max_{\substack{0 \leq 24x_2 \leq 50 \\ x_2 \text{ 为整数}}} \{340x_2 + f_3(50 - 24x_2)\}$$

$$= \max\{0 + f_3(50), 340 + f_3(26), 680 + f_3(2)\},$$

$$f_2(35) = \max_{\substack{0 \leq 24x_2 \leq 35 \\ x_2 \text{ 为整数}}} \{340x_2 + f_3(35 - 24x_2)\}$$

$$= \max\{0 + f_3(35), 340 + f_3(11)\},$$

$$f_2(20) = \max_{\substack{0 \leq 24x_2 \leq 20 \\ x_2 \text{ 为整数}}} \{340x_2 + f_3(20 - 24x_2)\}$$

$$= 0 + f_3(20),$$

$$f_2(5) = 0 + f_3(5).$$

当  $k=3$  时:

$$f_3(s_3) = \max_{\substack{0 \leq 30x_3 \leq s_3 \\ x_3 \text{ 为整数}}} \{420x_3 + f_4(s_3 - 30x_3)\}$$

$$= \max_{\substack{0 \leq 30x_3 \leq s_3 \\ x_3 \text{ 为整数}}} \{420x_3\}$$

$$= 420 \left\lfloor \frac{1}{30} s_3 \right\rfloor, \quad x_3 = \left\lfloor \frac{1}{30} s_3 \right\rfloor.$$

利用  $f_3(s_3) = 420 \left\lfloor \frac{1}{30} s_3 \right\rfloor$  计算  $f_2(s_2)$  中涉及的  $f_3(s_3)$ :

$$f_3(80) = 840, \quad f_3(56) = 420, \quad f_3(32) = 420, \quad f_3(8) = 0, \quad f_3(65) = 840,$$

$$f_3(41) = 420, \quad f_3(17) = 0, \quad f_3(50) = 420, \quad f_3(26) = 0, \quad f_3(2) = 0,$$

$$f_3(35) = 420, \quad f_3(11) = 0, \quad f_3(20) = 0, \quad f_3(5) = 0.$$

代入  $f_2(s_2)$  各表达式,则有

$$f_2(80) = \max\{840, 340 + 420, 680 + 420, 1020 + 0\}$$

$$= 1100, \quad x_2 = 2;$$

$$f_2(65) = \max\{840, 340 + 420, 680 + 0\} = 840, \quad x_2 = 0;$$

$$f_2(50) = \max\{420, 340 + 0, 680 + 0\} = 680, \quad x_2 = 2;$$

$$f_2(35) = \max\{420, 340 + 0\} = 420, \quad x_2 = 0;$$

$$f_2(20) = f_2(5) = 0.$$

最后计算  $f_1(s_1)$ :

将  $f_2(s_2)$  代入  $f_1(s_1)$  的表达式,则有

$$f_1(s_1) = \max\{1100, 200 + 840, 400 + 680, 600 + 420, 800 + 0\} = 1100,$$

$$x_1 = 0;$$

取重量上限,  $s_1 = 80, x_1 = 0$ , 利用状态转移方程得到  $s_2 = s_1 = 80, x_2 = 2, s_3 = 80 - 24 \times 2 = 32, x_3 = \left\lfloor \frac{1}{30} s_3 \right\rfloor = 1$ .

携带货物情况是, A 种 0 件, B 种 2 件, C 种 1 件. 最大总价值 1100.