浙江工业大学《最优化方法》期末试卷

答案及评分标准

（ 2020 ~ 2021 第 一 学 期 ）

学院、班级________________ 学号________________姓名______________

一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分

一、（10 分）求出函数

$$f\left(x_1,x_2\right)=20x_1^4-8x_1^3+4x_1^2-8x_1^2x_2+x_2^2$$

的所有稳定点，并判断它们是极大值点、极小值点还是鞍点。

解：由 $\nabla f\left(x_1,x_2\right)=\begin{pmatrix}80x_1^3-24x_1^2+8x_1-16x_1x_2\\ -8x_1^2+2x_2\end{pmatrix}=0\Rightarrow$ ---------（2 分）

驻点为 $x^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},x^{(2)}=\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix},x^{(3)}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$. ---------（5 分）

$\nabla^2 f\left(x_1,x_2\right)=\begin{pmatrix}240x_1^2-48x_1+8-16x_2 & -16x_1\\ -16x_1 & 2\end{pmatrix}$ ---------（7 分）

$\nabla^2 f\left(x^{(1)}\right)=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，正定，所以 $x^{(1)}$ 为极小值点；

$\nabla^2 f\left(x^{(2)}\right)=\begin{pmatrix}28 & -8\\ -8 & 2\end{pmatrix}$，不定，所以 $x^{(2)}$ 为鞍点；

$\nabla^2 f\left(x^{(3)}\right)=\begin{pmatrix}136 & -16\\ -16 & 2\end{pmatrix}$，正定，所以 $x^{(3)}$ 为极小值点。 ---------（10 分）

二、（10 分）考虑无约束优化问题

$$\min f\left(x_1,x_2\right)=(x_1-1)^4+(x_1-x_2)^2,$$

选取初始点 $x^{(0)}=\left(0,0\right)^{\mathrm{T}}$，利用带精确步长因子的牛顿法迭代一步。

解：$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}4(x_1-1)^3+2(x_1-x_2)\\ 2x_2-2x_1\end{pmatrix},\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}12(x_1-1)^2+2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ ---------（3 分）

$\nabla f(x^{(0)})=\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix},\nabla^2 f(x^{(0)})=\begin{pmatrix}14 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ ---------（5 分）

$d_N=-\nabla^2 f(x^{(0)})^{-1}\nabla f(x^{(0)})=\begin{pmatrix}1/3\\ 1/3\end{pmatrix}$, ---------（7 分）

$\alpha_0=\arg\min_{\alpha\ge 0} f(x^{(0)}+\alpha d_N)=\arg\min_{\alpha\ge 0}\left(\frac{1}{3}\alpha-1\right)^4=3,$ ---------（9 分）

$x^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ---------（10 分）

三、（12 分）利用逐次插值逼近法求解一维极小化问题

$$\min_{\alpha\ge 0}\varphi(\alpha)=\alpha^3-4\alpha,$$

（1）取插值点 $\alpha_1=1$，$\alpha_2=2$，利用插值条件 $\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\varphi'(\alpha_1)$ 构造二次插值多项式，求出插值多项式的极小点 $\bar{\alpha}$；

（2）若采用二分法求解该问题，给定初始区间 $[1,2]$，则下一步迭代的区间是什么？若要求最后区间长度不超过 $\delta=10^{-3}$，则二分法需迭代多少步？

（3）简要对比上述两个方法的优缺点。

解：（1）$\varphi'(\alpha)=3\alpha^2-4$，设插值函数 $q(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c$，则由插值条件得

$$\begin{cases} q(\alpha_1)=a+b+c=\varphi(1)=-3 \\ q(\alpha_2)=4a+2b+c=\varphi(2)=0 \\ q'(\alpha_1)=2a+b=\varphi'(1)=-1 \end{cases}$$ ---------（3 分）

$$\Rightarrow a=4,b=-9,c=2$$

$$\bar{\alpha}=-\frac{b}{2a}=\frac{9}{8}$$ ---------（6 分）

（2）采用二分法，$\varphi'(1)=-1,\varphi'(2)=8$，区间中点处 $\varphi'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{11}{4}>0$，

所以为保证新区间两端点处导数异号，取下一步迭代区间为 $[1,3/2]$，

若要求最后区间长度不超过 $\delta=10^{-3}$，则二分法迭代步数 n 满足

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n\le\frac{10^{-3}}{2-1},$$

即最少迭代 10 步。 ---------（10 分）

（3）二分法程序简单易行，线性收敛速度（收敛阶为 1 阶），收敛比为 $\frac{1}{2}$，（1）中的两点二次插值法为超线性收敛速度，收敛阶约为 1.618，在处理解析性质较好的函数时效果比二分法要好。

---------（12 分）

四、（10 分）考虑下列问题：

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2-x_2-3x_3 \\ s.t.\ & -x_1-x_2-x_3\ge 0,(1) \\ & x_1^2+2x_2-x_3=0,(2) \\ & x_3\ge 0. \qquad (3) \end{aligned}$$

（1） 给出可行点 $\bar{x}=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 处的积极约束和线性化可行方向 $d=(d_1,d_2,d_3)^{\mathrm{T}}$ 应满足的条件（用 d_1,d_2,d_3 的表达式给出）；

（2） 给出可行点 $\bar{x}=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 处的最速下降方向，并判断它是否为线性化可行方向；

（3） 该问题是凸规划吗？为什么？

解：（1）将可行点 $\bar{x}=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 代入各约束，取等号的为(1)和(2)，故积极约束为(1)和(2)，

约束(1)的梯度为 $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$，约束(2)的梯度为 $\begin{pmatrix}2x_1\\2\\-1\end{pmatrix}$，在 $\bar{x}=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 处为 $\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$，线性化可行方向

$d=(d_1,d_2,d_3)^{\mathrm{T}}$ 应满足

$$\begin{cases} d^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\ge 0,\ (a)\\ d^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}=0.\ (b)\end{cases}$$ ---------（4 分）

（2）目标函数的梯度函数为$\begin{pmatrix}2x_1\\-1\\-3\end{pmatrix}$，在 $\bar{x}$ 处的最速下降方向为$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，不满足条件$(b)$，因此不是线性化可行方向。 ---------（8 分）

（3）该问题不是凸规划，因为约束(2)是等式约束，但不是线性约束，故可行域不是凸集。 ---------（10 分）

五、（10 分）求解二次规划问题

$$\begin{aligned}&\min\ \frac{3}{2}x_1^2-x_1x_2+x_2^2-x_2x_3+\frac{1}{2}x_3^2+x_1+x_2+x_3\\&s.t.\quad x_1+2x_2+x_3=4.\end{aligned}$$

的最优解及对应的 Lagrange 乘子。

解：设约束的 Lagrange 乘子为λ，则利用 Lagrange 方法得

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}3x_1-x_2+1\\-x_1+2x_2-x_3+1\\-x_2+x_3+1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\\ x_1+2x_2+x_3=4\end{cases}$$ ---------（5 分）

解之得 $x=\left(\frac{7}{18},\frac{11}{9},\frac{7}{6}\right),\lambda=\frac{17}{18}.$ ---------（10 分）

六、（10 分）利用对数障碍函数法求解

$$\begin{aligned}&\min\ x_1+2x_2\\&s.t.\quad x_2-x_1^2\ge 0,\\&\qquad\ \ x_1-1\ge 0.\end{aligned}$$

解：$P(x;\mu)=x_1+2x_2-\mu\log(x_2-x_1^2)-\mu\log(x_1-1)$ ---------（2 分）

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial x_1}=1+2\mu\dfrac{x_1}{x_2-x_1^2}-\mu\dfrac{1}{x_1-1}=0\\ \dfrac{\partial P}{\partial x_2}=2-\mu\dfrac{1}{x_2-x_1^2}=0\end{cases}$$ ---------（5 分）

解得$\begin{cases}x_1(\mu)=\dfrac{1}{8}\left[3+\sqrt{9+16(1+\mu)}\right]\\ x_2(\mu)=\dfrac{3}{4}\mu+\dfrac{1}{32}\left[17+3\sqrt{9+16(1+\mu)}\right]\end{cases}$ ---------（8 分）

令 $\mu\to 0+$ 得 $x=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ---------（10 分）

七、（16 分）（1）取初始点 $x^{(0)}=(0,0)^{\mathrm{T}}$，用 FR 共轭梯度法求解

$$\min_{x\in R^2}\ f(x)=x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2+2x_2+2,$$

其中 FR 公式：$\beta_{k-1}=\dfrac{g_k^{\mathrm{T}}g_k}{g_{k-1}^{\mathrm{T}}g_{k-1}}$。

（2）与最速下降法和牛顿法相比，共轭梯度法有哪些优点？试从计算量、存储量、收敛速度等方面讨论。

解：（1）$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}2x_1-2x_2\\-2x_1+4x_2+2\end{pmatrix},G=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&4\end{pmatrix},$ ---------（4 分）

$x^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},g_0=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},d_0=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix},\alpha_0=-\dfrac{d_0^{\mathrm{T}}g_0}{d_0^{\mathrm{T}}Gd_0}=\dfrac{1}{4},$ ---------（6 分）

$x^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix},g_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_0=\dfrac{g_1^{\mathrm{T}}g_1}{g_0^{\mathrm{T}}g_0}=\dfrac{1}{4},$ ---------（8 分）

$d_1=-g_1+\beta_0d_0=\begin{pmatrix}-1\\-1/2\end{pmatrix},\alpha_1=-\dfrac{d_1^{\mathrm{T}}g_1}{d_1^{\mathrm{T}}Gd_1}=1,$ ---------（10 分）

$x^{(2)}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},g_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$ ---------（12 分）

（2）最速下降法程序简单，具有线性收敛速度，步长采用精确线搜索时迭代产生锯齿现象，收敛缓慢。

牛顿法局部收敛，在最优解附近具有二阶收敛速度，每步迭代需要存储和计算 Hesse 矩阵并求逆，存储量大，计算量大。

共轭梯度法全局收敛，具有线性收敛速度，每步迭代不需要矩阵存储与计算，存储量小，计算量小，是解大型非线性规划的首选方法。

---------（16 分）

八、（12 分）考虑非线性规划问题

$$\begin{aligned}\min\ & 4x_1-3x_2\\ s.t.\ & 4-x_1-x_2\ge 0,\\ & -(x_1-3)^2+x_2+1\ge 0.\end{aligned}$$

求其 KKT 点和对应的 Lagrange 乘子。

KKT 条件为 $\begin{cases}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}6-2x_1\\1\end{pmatrix}\\ \lambda_1(4-x_1-x_2)=0\\ \lambda_2(-(x_1-3)^2+x_2+1)=0\\ 4-x_1-x_2\ge 0\\ -(x_1-3)^2+x_2+1\ge 0\\ \lambda_1\ge 0,\lambda_2\ge 0\end{cases}$ ---------（4 分）

a) 当 $\lambda_1=0,\lambda_2=0$ 时，矛盾； ---------（6 分）

b) 当 $\lambda_1=0,-(x_1-3)^2+x_2+1=0$ 时，$\lambda_2=-3$，违背乘子非负条件； ---------（8 分）

c) 当$4-x_1-x_2=0, \lambda_2=0$时，矛盾； ---------（10 分）

d) 当$4-x_1-x_2=0, -(x_1-3)^2+x_2+1=0$时，

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$，前者对应的$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$，满足乘子非负条件，所以是 KKT 点，

后者对应的$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/3 \\ -7/3 \end{pmatrix}$，违背乘子非负条件。

综上所述，点$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$为唯一的 KKT 点。 ---------（12 分）

九、（10 分）给定正数$a_i, c_i, i=1,\ldots,n$及正数b，考虑问题

$$\min f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{x_i}$$
$$s.t.\ \sum_{i=1}^{n}a_i x_i=b,$$
$$x_i\geq 0, i=1,\ldots,n.$$

利用 KKT 条件证明该问题的最优值为

$$f(x^*)=\frac{1}{b}\left[\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i c_i}\right]^2.$$

证明：设等式约束的乘子为λ，不等式约束的乘子为$\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$，列出 KKT 条件

$$\begin{cases} -\dfrac{c}{x_i^2}+\lambda a_i-\mu_i=0, i=1,\ldots,n & (1) \\ \mu_i x_i=0, i=1,\ldots,n & (2) \\ \sum_{i=1}^{n}a_i x_i=b & (3) \end{cases}$$
---------（4 分）

由$x_i\neq 0 \Rightarrow \mu_i=0$

代入（1），得$x_i=\sqrt{\dfrac{c_i}{\lambda a_i}}$，代入（3），解得$\lambda=\dfrac{1}{b^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i c_i}\right]^2$. ---------（6 分）

由（1）推出$\lambda a_i x_i=\dfrac{c}{x_i}\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\dfrac{c_i}{x_i}=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i x_i=\lambda b=\dfrac{1}{b}\left[\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i c_i}\right]^2$ ---------（8 分）

又该问题为凸规划，故 KKT 点为全局最优解，得证。 ---------（10 分）