浙江工业大学《最优化方法》期末试卷

(2018 ~ 2019 第一学期)

一、 (8 分) 写出函数 $f(x_1,x_2) = x_1^{1/3}x_2^{1/3}$ 的 Hesse 矩阵，并以此证明当 $x_1 > 0, x_2 > 0$ 时该函数为凹函数。

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{3}x_1^{-\frac{2}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{1}{3}x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{-\frac{2}{3}}. \quad (\cdots 2分)$$

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9}x_1^{-\frac{5}{3}}x_2^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{9}x_1^{-\frac{2}{3}}x_2^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{9}x_1^{-\frac{2}{3}}x_2^{-\frac{2}{3}} & -\frac{2}{9}x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{-\frac{5}{3}} \end{pmatrix} \quad (\cdots 5分)$$

$(\nabla^2 f)_{11} < 0$, $\det(\nabla^2 f) = \frac{1}{27}x_1^{-\frac{4}{3}}x_2^{-\frac{4}{3}} > 0$, $\nabla^2 f$ 负定 该函数为凹函数

$(\cdots 8分)$

二、 (10 分) 利用三点二次插值法求 $\min\limits_{\alpha\geq 0} \varphi(\alpha) = \alpha^3 - 2\alpha$ 的近似最优解，取插值点 $\alpha_1 = 0, \alpha = 1, \alpha_3 = 2$，求出插值多项式的极小点 $\bar{\alpha}$，并判断下一步迭代的三个插值点是哪些。

$$q(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$$

$$\left.\begin{aligned} q(0) &= c = 0 \\ q(1) &= a+b+c = -1 \\ q(2) &= 4a+2b+c = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a=3,\ b=-4,\ c=0. \ (\cdots 5分)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{3} \quad (\cdots 8分)$$

$$\varphi(\bar{\alpha}) = \frac{8}{27} - \frac{4}{3} = -\frac{28}{27} < -1.$$

故下次三个插值点为 $0, \frac{2}{3}, 1$. $(\cdots 10分)$

三、 (10 分) 利用最优性条件求出函数

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{32}x_1^4 + x_1^2x_2^2 - x_1 - x_2^2$$

的局部极小点。

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}x_1^3 + 2x_1x_2^2 - 1 \\ 2x_1^2x_2 - 2x_2 \end{pmatrix} = 0 \ (\cdots 2分) \Rightarrow 驻点\ x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{7}}{4} \end{pmatrix}, x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{7}}{4} \end{pmatrix}. \ (\cdots 5分)$$

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{3}{8}x_1^2 + 2x_2^2 & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & 2x_1^2 - 2 \end{pmatrix} (\cdots 7分)$$

$\nabla^2 f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ 正定, 为局部极小点.

$\nabla^2 f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\sqrt{7} \\ -\sqrt{7} & 0 \end{pmatrix}$ 不定.

$\nabla^2 f(x^{(3)}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & 0 \end{pmatrix}$ 不定.

$(\cdots 10分)$

四、 (10 分) 考虑问题 $\min f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2^2+2x_2^4$，选 $x^{(0)}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ 作为初始迭代点。

(1) 求 $x^{(0)}$ 处的最速下降方向 d_0，并用解析法求出沿 d_0 的精确线搜索步长 α_0；

(2) 求 $x^{(0)}$ 处的牛顿方向 d_N，判断其是否为下降方向并给出理由；

(3) 如果采用二分法计算 (1) 中的 α_0，初始区间为 $[0,5]$，要求最后区间的长度不超过 $\delta=0.01$，则其所需的迭代步数 n 是多少？

(1) $\nabla f=\begin{pmatrix}2x_1-2x_2^2\\-4x_1x_2+8x_2^3\end{pmatrix}$ $d_0=-g_0=-\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$. (…2分)

$\varphi(\alpha)=f(x^{(0)}+\alpha d_0)=f(2-2\alpha,1)=(1-2\alpha)^2+1$. 故 $\alpha_0=\frac{1}{2}$. (…4分)

(2) $\nabla^2 f=\begin{pmatrix}2 & -4x_2\\-4x_2 & 24x_2^2-4x_1\end{pmatrix}$ $G_0=\begin{pmatrix}2 & -4\\-4 & 16\end{pmatrix}$

$d_N=-G_0^{-1}g_0=\begin{pmatrix}-2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ (…6分) $d_N^Tg_0=-4<0$，为下降方向 (…8分)

(3) $(\frac{1}{2})^n<\frac{0.01}{5}$，$\Rightarrow$ 所需迭代步数 n 至少为 9. (…10分)

五、 (10 分) 考虑问题

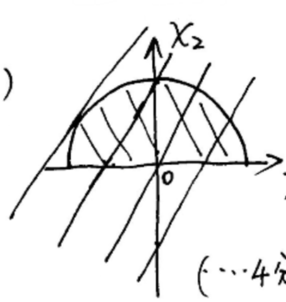
$$\begin{aligned}\min\quad & 2x_1-x_2\\ \text{s.t.}\quad & \begin{cases}x_1^2+x_2^2\le 1\\ x_2\ge 0\end{cases}\end{aligned}$$

(1) 画出此问题的可行域和等高线；

(2) 利用几何图形求出其最优解；

(3) 在可行点 $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ 处，搜索方向 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 是可行方向吗？是下降方向吗？

(1)



(…4分)

(2) $\begin{cases}x_2=-\frac{1}{2}x_1\\x_1^2+x_2^2=1\\x_2\ge 0\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\\\frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$ (…6分)

(3) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 是可行方向. (…8分)

不是下降方向 (…10分)

六、 (10 分) 求解二次规划问题：

$$\begin{aligned}\min\quad & q(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2\\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2+x_3=1.\end{aligned}$$

并求出其最优 Lagrange 乘子。

$$L(x,\lambda)=q(x)-\lambda(x_1+x_2+x_3-1) \quad (\cdots 3分)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1}&=2x_1-x_2-\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial x_2}&=2x_2-x_1-\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial x_3}&=2x_3-\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}&=x_1+x_2+x_3-1=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow x=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$(\cdots 7分)$$

$$\lambda=\frac{2}{5} \quad (\cdots 10分)$$

七、 (12 分) 考虑约束最优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2-x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2-2x_1-x_2\ge 0, \\ & x_1-1\ge 0. \end{aligned}$$

写出其二次罚函数 $Q(x;\mu)$ 和对数障碍函数 $P(x;\mu)$，并用对数障碍法求解。

$$Q=x_1^2-x_2+\frac{1}{2\mu}\left[(\min\{2-2x_1-x_2,0\})^2+(\min\{x_1-1,0\})^2\right] \quad (\cdots 3分)$$

$$P(x;\mu)=x_1^2-x_2-\mu\log(2-2x_1-x_2)-\mu\log(x_1-1) \quad (\cdots 6分)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x_1}&=2x_1+\frac{2\mu}{2-2x_1-x_2}-\frac{\mu}{x_1-1}=0\\ \frac{\partial P}{\partial x_2}&=-1+\frac{\mu}{2-2x_1-x_2}=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1(\mu)\\ x_2(\mu)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{\mu}{2}+1}\\ 2-\mu-\sqrt{2\mu+4}\end{pmatrix}$$

$$(\cdots 9分)$$

$$\left(\begin{pmatrix}x_1(\mu)\\ x_2(\mu)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{\mu}{2}+1}\\ 2-\mu+\sqrt{2\mu+4}\end{pmatrix}\text{舍去}\right).$$

$$\mu\to 0+ \Rightarrow x^*=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$(\cdots 12分)$$

八、 (16 分)

(1) 取初始点 $x^{(0)}=(-3,-1)^{\mathrm{T}}$，用 FR 共轭梯度法求解

$$\min_{x\in\mathbf{R}^2} f(x)=x_1^2+\frac{5}{2}x_2^2-2x_1x_2-2x_1-x_2,$$

其中，FR 公式：$\beta_{k-1}=\dfrac{g_k^{\mathrm{T}}g_k}{g_{k-1}^{\mathrm{T}}g_{k-1}}$。

(2) 对这类函数的极小化问题，还有哪些方法可以在有限步终止？

(1) $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x_1-2x_2-2 \\ 5x_2-2x_1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = Gx - b$ (…2分)

$g_0 = Gx^{(0)} - b = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $d_0 = -g_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ (…4分)

$\alpha_0 = -\dfrac{d_0^T g_0}{d_0^T G d_0} = \dfrac{36}{72} = \dfrac{1}{2}$ (…6分)

$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 d_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\beta_0 = \dfrac{g_1^T g_1}{g_0^T g_0} = 1$ (… 8分)

$d_1 = -g_1 + \beta_0 d_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ (…10分)

$\alpha_1 = -\dfrac{d_1^T g_1}{d_1^T G d_1} = \dfrac{36}{108} = \dfrac{1}{3}$ (…12分)

$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (… 14分)

$g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $x^{(2)}$ 为最优解.

(2) 牛顿法、拟牛顿法。(16 分)

九、 (14 分) 考虑约束最优化问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 5 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0, \\ & 6 - 3x_1 - x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(1) 证明该问题为凸规划；

(2) 列出其 KKT 条件并判断 $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 是否为其 KKT 点，如果是，求出对应的 Lagrange 乘子；如果不是，说明理由。

(1) $\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 正定，为凸函数 (…2分)

$\nabla^2 c_1 = \begin{pmatrix} -2 & \\ & -2 \end{pmatrix}$ 负定，为凹函数，$c_1 \ge 0$ 为凸集 (…4分)

c_2 为线性函数，既凸又凹，$c_2 \ge 0$ 为凸集。(…6分)

故该问题为凸规划。

(2)
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 4x_1+2x_2-10 \\ 2x_1+2x_2-10 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} & ① \\ 5-x_1^2-x_2^2 \ge 0 & ② \\ 6-3x_1-x_2 \ge 0 & ③ \\ \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0 & ④ \\ \lambda_1(5-x_1^2-x_2^2)=0 & ⑤ \\ \lambda_2(6-3x_1-x_2)=0 & ⑥ \end{cases}$$
(…12分)

$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 代入上式①，得 $\lambda_1^*=1$，$\lambda_2^*=0$。

满足②③④⑤⑥，故 x^* 为KKT点。(…14分)