浙江工业大学《最优化方法》期末试卷

（ 2018 ~ 2019 第 一 学 期 ）

学院、班级__________________ 学号__________________姓名_______________

一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分

一、（10 分）证明序列 $x_k=\dfrac{1}{k^2}$，$y_k=\dfrac{1}{k!}$ 分别具有次线性、超线性的收敛率。

二、（10 分）证明：函数 $f(x_1,x_2)=e^{x_1}e^{x_2}$ 为凸函数。

三、（10 分）给定函数 $f(x)=(6+x_1+x_2)^2+(2-3x_1-3x_2-x_1x_2)^2$，求其在点 $\overline{x}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ 处的牛顿方向，并判断牛顿方向是否为下降方向。

四、（10 分）考虑下列问题：

$$\begin{aligned} &\min x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 - 12x_3 \\ &s.t.\ \ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ &\qquad x_1 - 2x_2 \geq -3, \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

（1）在可行点 $\overline{x} = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 处的起作用约束有哪些？

（2）给出 $\overline{x}$ 处的可行方向 $d = (d_1, d_2, d_3)^{\mathrm{T}}$ 应满足的条件（用 d_1, d_2, d_3 的表达式给出）；

（3）判断 $\overline{d} = (0,-1,1)$ 是否为 $\overline{x}$ 处的可行下降方向（给出理由）。

五、（10 分）求出函数

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 - 2x_1^2x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

的所有稳定点，并判断它们是极大值点、极小值点还是鞍点。

六、（10 分）考虑问题 $\min f\left(x_1, x_2\right)=x_1^2+2x_2^2-x_1^2 x_2$，选 $x^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 作为初始迭代点，

（1） 求 $x^{(0)}$ 处的最速下降方向 d_0，并给出 $\varphi(\alpha)=f\left(x^{(0)}+\alpha d_0\right)$ 的表达式；

（2） 利用三点二次插值法求 $\min\limits_{\alpha\geq 0}\varphi(\alpha)$ 的近似最优解，取插值点 $\alpha_1=0$，$\alpha_2=\frac{1}{2}$，$\alpha_3=1$，求出插值多项式的极小点 $\overline{\alpha}$，并判断下一步迭代的三个插值点是哪些；

（3） 还有哪些不用导数的精确线搜索方法？求解上述问题时它们跟三点二次插值法相比哪个更好？

七、（10 分）利用对数障碍函数法求解

$$\begin{aligned}&\min\ \ 2x_1+3x_2\\&s.t.\ \ \ 1-2x_1^2-x_2^2\geq 0.\end{aligned}$$

八、（16 分）（1）取初始点 $x^{(0)}=(0,0)^{\mathrm{T}}$，用 FR 共轭梯度法求解

$$\min_{x\in R^2}\ f(x)=\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_2-2x_1,$$

其中 FR 公式：$\beta_{k-1}=\dfrac{g_k^{\mathrm{T}}g_k}{g_{k-1}^{\mathrm{T}}g_{k-1}}$。

（2）对这类函数的极小化问题，还有哪些方法可以在有限步终止？

九、（14 分）考虑约束最优化问题：

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 - 14x_1 + x_2^2 - 6x_2 \\ s.t.\ & 2 - x_1 - x_2 \ge 0, \\ & 3 - x_1 - 2x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

列出其 KKT 条件并求出其 KKT 点。