浙江工业大学《最优化方法》期末试卷

（ 2019 ~ 2020 第 一 学 期 ）

学院、班级__________________ 学号__________________姓名_______________

一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分

一、（10 分）证明 $f(x)=x_1e^{-(x_1+x_2)}$ 在任何区域都不是凸函数。

二、（10 分）求出函数

$$f\left(x_1,x_2\right)=x_1x_2(3-x_1-x_2)$$

的所有稳定点，并判断它们是极大值点、极小值点还是鞍点。

三、（12 分）考虑无约束优化问题

$$\min f\left(x_1, x_2\right) = (1-x_1)^2 + 2(x_2 - x_1^2)^2,$$

选取初始点 $x^{(0)} = \left(\frac{1}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$，利用最速下降法和带步长因子的牛顿法，选择精确线搜索，各迭代一步，并判断哪个方法得到的是该问题的最优解。

四、（10 分）考虑约束最优化问题：

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4 \\ s.t.\ & c_1(x) = x_1 - x_2 + 2 \geq 0, \\ & c_2(x) = -x_1^2 + x_2 - 1 \geq 0, \\ & c_3(x) = x_1 \geq 0, \\ & c_4(x) = x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

（1）验证该问题为凸规划问题；

（2）给出可行点 $\bar{x} = \left(0,1\right)^{\mathrm{T}}$ 处的线性化可行方向 $d = \left(d_1, d_2\right)^{\mathrm{T}}$ 应满足的条件（用 d_1, d_2 的表达式给出）；并判断 $\bar{x}$ 处的线性化可行方向集合与可行方向集合是否相等。

五、（12 分）利用逐次插值逼近法求解一维极小化问题

$$\min_{\alpha\geq 0}\varphi(\alpha)=-4\alpha^3+10\alpha^2-5\alpha+1,$$

（1）取插值点 $\alpha_1=0$， $\alpha_2=1$，利用插值条件 $\varphi(\alpha_1),\varphi'(\alpha_1),\varphi'(\alpha_2)$ 构造二次插值多项式，求出插值多项式的极小点 $\bar{\alpha}$，为保证每步迭代原函数在两个插值点处的导数值异号，下一步迭代的两个插值点是哪些？

（2）仍取 $\alpha_1=0$，利用插值条件 $\varphi(\alpha_1),\varphi'(\alpha_1),\varphi''(\alpha_1)$ 构造二次插值多项式，则插值多项式的极小点 $\tilde{\alpha}$ 又会是多少？

（3）简要对比上述两个方法的优缺点。

六、（10 分）利用对数障碍函数法求解

$$\begin{aligned}&\min\ \ x_1x_2\\&s.t.\ \ -2x_1+x_2+3\geq 0.\end{aligned}$$

七、（14 分）（1）取初始点 $x^{(0)}=(6,3)^{\mathrm{T}}$，用 FR 共轭梯度法求解

$$\min_{x\in R^2}\ f(x)=\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2,$$

其中 FR 公式：$\beta_{k-1}=\dfrac{g_k^{\mathrm{T}}g_k}{g_{k-1}^{\mathrm{T}}g_{k-1}}$。

（2）与最速下降法和牛顿法相比，共轭梯度法有哪些优点？试从计算量、存储量、收敛速度等方面讨论。

八、（12 分）求原点$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$到凸集$S=\left\{x\middle|x_1+x_2-4\geq 0，2x_1+x_2-5\geq 0\right\}$的最小距离，将该问题写成二次规划问题，列出其 KKT 条件并进行求解。

九、（10 分）考虑二次函数极小化问题

$$\min f(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+b^{\mathrm{T}}x,$$

其中 A 为对称正定矩阵。设 $\bar{x}$ 是 $f(x)$ 的极小点， p 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，$x^{(1)}=\bar{x}+p$，

证明：（1） $\nabla f(x^{(1)})=\lambda p$.

（2）如果用最速下降法，从 $x^{(1)}$ 出发，采用精确线搜索，则一步可达最优解 $\bar{x}$ 。