浙江工业大学最优化方法试卷 2010-1

学院、班级______________ 学号______________ 姓名______________

一	二	三	四	五	六	七	八	总分

一、（10 分）考虑下述三个数列：

$$u_k = c^k, (0<c<1),$$

$$v_k = k^{-k},$$

$$w_k = a^{p^k}, (0<a<1, p>1),$$

证明它们分别具有线性，超线性和阶数为 p 的收敛率。

$\lim_{k\to\infty} u_k = 0$，$\lim_{k\to\infty} \frac{|c^{k+1}-0|}{|c^k-0|} = c$ 故 u_k 具有线性收敛率

$\lim_{k\to\infty} v_k = 0$，$\lim_{k\to\infty} \frac{|(k+1)^{-(k+1)}-0|}{|k^{-k}-0|} = \lim_{k\to\infty}(1-\frac{1}{k+1})^{k+1}\cdot\frac{1}{k}$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{k} = 0$，故 v_k 具有超线性收敛率

$\lim_{k\to\infty} w_k = 0$，$\lim_{k\to\infty} \frac{|a^{p^{k+1}}-0|}{|a^{p^k}-0|^p} = 1$，故 w_k 具有阶数为 p 的收敛率

二、（10 分）设多元函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ 和一元函数 $\phi: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ 都是凸函数，并且

函数 ϕ 单调非减，证明复合函数 $h(x)=\phi(f(x)), x\in\mathbb{R}^n$ 是凸函数。

由 f 的凸性 $\Rightarrow f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$，

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$，$\lambda\in(0,1)$

$h(\lambda x+(1-\lambda)y) = \phi(f(\lambda x+(1-\lambda)y))$

由 ϕ 单调非减性 $\le \phi(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))$

由 ϕ 的凸性 $\le \lambda\phi(f(x))+(1-\lambda)\phi(f(y))$

$= \lambda h(x)+(1-\lambda)h(y)$

三、（10分）线性搜索方法中的逐次插值逼近法都有哪些？并简要叙述逐次插值逼近法的基本思想和特点。

逐次插值逼近法有：三点二次插值，两点二次插值（两种，一种用到两个函数值一个导数值，另一种用到一个函数值两个导数值），两点三次插值。

基本思想：逐次用低次（不高于三次）插值多项式近似目标函数并用插值多项式的极小点逼近目标函数的极小点。

特点：对解析性质较好的函数收敛快，迭代次数少。

四、（10分）证明：对于正定二次函数的极小化问题

$$(P_1):\ \min_{x\in R^n} f(x)=\frac{1}{2}x^TGx-b^Tx,$$

在 x_k 处沿方向 d_k 作精确线性搜索的步长因子 $\alpha_k=-\dfrac{g_k^Td_k}{d_k^TGd_k}$（其中

$g_k=Gx_k-b$ 为 $f(x)$ 在 x_k 处的梯度）。

$$f(x_k+\alpha d_k)=\varphi(\alpha)=\frac{1}{2}d_k^TGd_k\cdot\alpha^2+d_k^T(Gx_k-b)\cdot\alpha$$
$$+\frac{1}{2}x_k^TGx_k-x_k^Tb_k$$

关于 α 的二次函数 $\varphi(\alpha)$ 的极小点

$$\alpha_k=-\frac{d_k^T(Gx_k-b)}{2\cdot\frac{1}{2}d_k^TGd_k}=-\frac{g_k^Td_k}{d_k^TGd_k}$$

或 $$\varphi'(\alpha)=d_k^T\nabla f(x_k+\alpha d_k)$$
$$=d_k^T(G(x_k+\alpha d_k)-b)=0$$
$$\Rightarrow \alpha_k=-\frac{g_k^Td_k}{d_k^TGd_k}$$

$\varphi''(\alpha)=d_k^TGd_k>0 \Rightarrow \alpha_k$ 为 $\varphi(\alpha)$ 的极小点.

五、（15 分）试用最优性条件求解如下无约束优化问题的局部最优解：

$$(P_2):\ \min_{x\in R^2} f(x)=2x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+2x_1^3+x_1^4$$

$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}4x_1-2x_2+6x_1^2+4x_1^3\\ 2x_2-2x_1\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\quad x^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ x^{(2)}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad x^{(3)}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}4+12x_1+12x_1^2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

$\nabla^2 f(x^{(1)})=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，$x^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 为局部最优解.

$\nabla^2 f(x^{(2)})=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ 不定，$x^{(2)}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 不是局部最优解.

$\nabla^2 f(x^{(3)})=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，$x^{(3)}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ 为局部最优解.

六、（15 分）对于无约束最优化问题

$$(P_3):\ \min_{x\in\mathbf{R}^2} f(x)=x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1,$$

取初始点 $x^{(0)}=(1,1)^T$，试分别用最速下降法和带步长因子的牛顿法从 $x^{(0)}$ 出发迭代一次。

将 $f(x)$ 写成 $f(x)=\frac{1}{2}x^TGx-b^Tx$ 的形式，有

$$G=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&4\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$$

$$g_k=\nabla f(x^{(k)})=Gx^{(k)}-b=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&4\end{pmatrix}x^{(k)}-\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$$

最速下降法：$x^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$g_0=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$

$$d_0=-g_0=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$$

$$\alpha_0=-\frac{d_0^Tg_0}{d_0^TGd_0}=\frac{1}{4}$$

$$x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha_0d_0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

带步长因子的牛顿法：$d_0=-G^{-1}g_0=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$$\alpha_0=-\frac{d_0^Tg_0}{d_0^TGd_0}=1$$

$$x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha_0d_0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

七、（18分）对于约束最优化问题：

$$(P_4):\quad \begin{aligned} \min\ & (x_1-2)^2+(x_2-1)^2 \\ s.t.\ & -x_1-x_2+2\ge 0, \\ & -x_1^2+x_2\ge 0. \end{aligned}$$

（1）写出(P_4)的KKT条件；（2）求出(P_4)的KKT点，并判断它（们）是否为全局最优解（写出理由）。（方程$2t^3-t-2=0$有唯一实根$t_*\approx 1.1654$。）

(1) KKT条件：
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2x_1-4 \\ 2x_2-2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ \lambda_1(x_1+x_2-2)=0 \\ \lambda_2(x_1^2-x_2)=0 \\ \lambda_1\ge 0,\ \lambda_2\ge 0 \\ -x_1-x_2+2\ge 0 \\ -x_1^2+x_2\ge 0 \end{cases}$$

(2) (a) $\lambda_1=0,\ \lambda_2=0 \Rightarrow x=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 矛盾

(b) $\lambda_1=0,\ x_1^2-x_2=0 \Rightarrow x=\begin{pmatrix} 1.1654 \\ 1.1654^2 \end{pmatrix}$ 矛盾.

(c) $x_1+x_2-2=0,\ \lambda_2=0 \Rightarrow x=\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ 矛盾

(d) $x_1+x_2-2=0,\ x_1^2-x_2=0 \Rightarrow$

$$x^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x^{(2)}=\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=\frac{2}{3} \\ \lambda_2=\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-\frac{32}{3} \\ \lambda_2=-\frac{14}{3} \end{cases}$$ 矛盾

故KKT点为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

目标函数的Hesse矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$正定，为凸函数

$-x_1-x_2+2$ 为线性函数，既凸又凹，故$-x_1-x_2+2\ge 0$为凸集，

$x_1^2-x_2$ 的Hesse矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$半正定，故$-x_1^2+x_2\ge 0$为凸集，

问题(P4)为凸规划，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$为全局最优解.

八、（12分）对于非线性约束最优化问题

$$(P_5):\quad \begin{aligned} \min\ & x_1+2x_2 \\ s.t.\ & x_2-x_1^2\geq 0, \\ & x_1-1\geq 0. \end{aligned}$$

写出其对数障碍罚函数 $P(x;\mu)$，并利用对数罚函数方法和一阶最优性条件求解 (P_5)。

$$P(x;\mu)=x_1+2x_2-\mu\log(x_2-x_1^2)-\mu\log(x_1-1)$$

其一阶必要条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x_1}=1+\dfrac{2\mu x_1}{x_2-x_1^2}-\dfrac{\mu}{x_1-1}=0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial x_2}=2-\dfrac{\mu}{x_2-x_1^2}=0 \end{cases}$$

解得

$$x_1(\mu)=\frac{1}{8}\left[3+\sqrt{9+16(1+\mu)}\right]$$

$$x_2(\mu)=\frac{3}{4}\mu+\frac{1}{32}\left[17+3\sqrt{9+16(1+\mu)}\right]$$

由对数罚函数法的原理，令 $\mu\to 0+$，可得

$$\lim_{\mu\to 0+} x_1(\mu)=1,$$

$$\lim_{\mu\to 0+} x_2(\mu)=1$$

故 (P_5) 的解为 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.