计算机图形学冬学期读书报告 ——
球面谐波光照

姓名 赵悦晨　　学号 22021231

一、简介

从物理规律的角度出发，一系列基于光线追踪的离线渲染方法可以得到接近照片级的真实度，但是算法的复杂度过高，常常一张图片需要几十乃至上千个小时的渲染，无法应用到电子游戏、VR 等实时交互系统中去。

基于光栅化的渲染管线，有一些算法可以达到每秒三十帧以上的渲染速度，它们不追求算法在物理角度的正确性，只希望通过其他技巧使渲染结果在人看来有较高的真实度。

使用光线追踪方法时不需要考虑阴影的生成问题，全局光照也可以简单地获得，其挑战主要在于优化算法的运行速度以及减少蒙特卡洛积分产生的噪声。对于光栅化方法，如何在渲染结果中体现出阴影、全局光照，并尽量减少运行时的开销是主要挑战。有一类预计算的方法通过在运行前计算和存储场景的部分信息来减少运行时的计算开销，球面谐波光照（Spherical harmonic lighting）就是其中一种方法。

球面谐波光照通过预计算在模型表面存储函数信息，这些信息体现模型对来自各个方向的光照的响应。在运行时，只需在模型的顶点上做一次向量点乘就可以获得每个顶点的颜色。此方法可以应用于漫反射（diffuse）表面或光滑（glossy）表面，可以体现模型的自体阴影（self-shadowing）和自体反射（self-interreflection），甚至可以体现邻近物体的渗色效果（color bleeding）。

本文介绍球面谐波光照在漫反射表面的原理和应用。

二、球面谐波函数

与一维空间中的傅里叶变换类似，球面谐波函数提供了一组定义在球面坐标上的标准正交基函数。

2.1 伴随勒让德多项式

伴随勒让德多项式（Associated Legendre Polynomials）通常使用符号 P 表示，并有两个参数 l 和 m 。使用递归方法，P_l^m 定义如下：

$$\begin{cases}(l-m)P_l^m = x(2l-1)P_{l-1}^m - (l+m-1)P_{l-2}^m \\ P_m^m = (-1)^m(2m-1)!!\,(1-x^2)^{m/2} \\ P_{m+1}^m = x(2m+1)P_m^m\end{cases}$$

其中 $l = 0,1,2,\ldots$，$m \in [0,l] \cap N$ 。

2.2 球面谐波函数

在球坐标

$$\begin{cases}sin\theta cos\varphi = x \\ sin\theta sin\varphi = y \\ cos\theta = z\end{cases}$$

中，球面谐波函数 y 定义为

$$y_l^m(\theta,\varphi) = \begin{cases}\sqrt{2}K_l^m cos(m\varphi)P_l^m(cos\theta), & m > 0 \\ \sqrt{2}K_l^m sin(-m\varphi)P_l^{-m}(cos\theta), & m < 0 \\ K_l^0 P_l^0(cos\theta), & m = 0\end{cases}$$

其中 $l = 0,1,2,\ldots,n$，n 是球谐函数的“带数”（number of bands）。$m \in [-l,l] \cap Z$ 。K_l^m 是使函数标准化的量：

$$K_l^m = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}$$

$y_l^m(\theta,\varphi)$ 是定义域呈三角形分布的一组基函数，通过

$$i = l(l+1) + m$$

可以将它们映射为一个一维列表：

$$y_i(\theta,\varphi) = y_l^m(\theta,\varphi)$$

2.3 球面谐波函数的性质

2.3.1 正交归一化

球谐函数是正交归一化（orthonormal）的，两个不同基函数乘积的全域积分等于 0，两个相同基函数乘积的全域积分等于 1。

$$\int_S y_i(\omega)y_j(\omega)\,d\omega = \begin{cases}0, & i \neq j \\ 1, & i = j\end{cases}$$

根据此性质，当对两个定义在球面上的函数的乘积做积分时，可以将它们分别投影到球

谐函数上，得到两组相对于球谐基函数的系数，则原积分等于两个系数向量的内积。

$$\int_S f(\omega)g(\omega)\,d\omega=\sum_{i=0}^{n^2-1}f_i g_i$$

对高质量实时渲染而言，球谐函数的这个性质最为重要，它允许我们在求解渲染方程时使用一次内积计算代替积分计算，从而节省大量时间。

2.3.2 旋转不变性

设 R 是球面上的任意旋转，

$$g(\omega)=f(R(\omega))$$

则

$$\tilde{g}(\omega)=\tilde{f}(R(\omega))$$

其中 $\tilde{g}$、$\tilde{f}$ 分别是 g、f 投影到球谐函数上再重建得到的近似。

这个性质说明，如果在渲染中光源发生了旋转，不必对旋转后的光照函数再做投影计算系数，而只需将旋转后的采样点输入函数就可以正常计算积分。

三、使用球面谐波函数计算光照

3.1 光照函数与转移函数

高质量的渲染依赖于求解渲染方程

$$L_o=L_e+\int_S L_i f_r(n\cdot\omega)d\omega$$

其中，L_o是出射光的辐射亮度（Radiance），L_e 是物体自身发出的光，L_i 是从立体角 ω 入射的光；f_r 是 BRDF；n 是表面单位法向量。

对于指定光源的场景，模型表面不存在 L_e 。对于漫反射表面，BRDF 的值与入射出射方向无关，为常数 $\frac{\rho}{\pi}$ ，从而出射光表示如下：

$$L_o=\int_S L_i\frac{\rho}{\pi}(n\cdot\omega)d\omega$$

令

$$\begin{cases} L_i = f(\omega) \\ \frac{\rho}{\pi}(n \cdot \omega) = g(\omega) \end{cases}$$

则

$$L_o = \int_S f(\omega) g(\omega)\, d\omega = \sum_{i=0}^{n^2-1} f_i g_i$$

其中 $f(\omega)$ 称作光照函数（lighting function），$g(\omega)$ 称作转移函数（transfer function）。求解它们乘积的积分的过程可以用系数向量的点乘代替。在渲染时，对模型的每个顶点求出颜色，再使用 Gouraud 方法插值得到面片上的颜色。

3.2 转移函数的计算

3.2.1 无阴影

不计算阴影效果的情形，转移函数是

$$g(\omega) = \frac{\rho}{\pi}(n \cdot \omega)$$

将它投影到球谐函数上，得到 n^2 个系数，就可以在运行时用于计算：

$$g_i = \int_S g(\omega) y_i(\omega)\, d\omega$$

一般使用蒙特卡洛方法计算上式积分。

3.2.2 有自阴影

对于考虑自阴影的情形，需要在转移函数中加入可见项，对它使用光线追踪的方法预计算。

$$g(\omega) = V(\omega) \frac{\rho}{\pi}(n \cdot \omega)$$

其中 $V(\omega)$ 是可见项（visibility term），若该方向的射线可以到达光源，$V(\omega)$ 为 1，若被模型自身遮挡，则为 0。

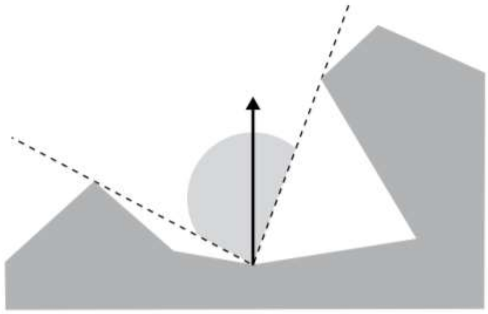

图 1采样计算带自阴影的转移函数

计算系数的方法与上一小节相同:

$$g_i = \int_S g(\omega) y_i(\omega)\, d\omega$$

如（图 1），在球面上采样时沿采样方向发射射线来决定可见项的取值。

3.3 光照函数的计算

对于光照函数 $f(\omega)$ ，一般认为光源在无穷远处，在假设模型不存在的情况下计算顶点的受光，以此作为光照函数。

四、球谐光照的限制

对于较均匀的光照，用低频分量就可以达到很好的近似，取带数 $n = 3\sim5$，即长度为 9~25 的系数向量，就可以得到质量较高的渲染结果。但是对于存在突然变化的光照，其高频分量较多，需要非常多的系数才能较好地近似，那样的计算开销太大。因此球谐光照只适用于低频光照场景。

在考虑自体阴影的情形下，转移函数中引入了可见项 $V(\omega)$ ，因此在可见与不可见的交界处，转移函数产生了截断，引入高频分量。因此在考虑自体阴影时对转移函数并不能达到非常准确的近似，渲染结果中存在走样的可能。

在考虑自体反射的情形下（本文未提及，参考资料[1] 、[2] 中有详细说明），球谐光照假设模型上每一点处的光照函数都是相同的，显然不符合实际情况，因为光源与模型的距离有限。

在光源不变或只做以模型为中心的旋转时，可以对光照函数做预计算，存储起来，这样运行时的计算就变得非常简单。但是如果光源的形状、数量等在渲染过程中发生变化，以我目前的理解来看，这个问题是球谐光照不能解决的。

参考资料

[1] Peter-Pike Sloan, Jan Kautz, and John Snyder. 2002. Precomputed radiance transfer for real-time rendering in dynamic, low-frequency lighting environments. In Proceedings of the 29th annual conference on Computer graphics and interactive techniques (SIGGRAPH '02). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 527–536.

[2] Green, R. . "Spherical harmonic lighting: The gritty details." Game Developers Conference 2003.