Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Stolfi Noelle
Donati Leo

Université Nice Sophia Antipolis
IUT Nice Côte d'Azur

5 décembre 2014

Définition de $\mathbb{R}^n$

Définition

Soit n un entier naturel non nul. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est la donnée de l'ensemble de vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *avec $x_i \in \mathbb{R}$ et de deux opérations :*

- *Somme :* $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$
- *Multiplication externe :* $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (\lambda, v) & \mapsto & \lambda v \end{array}$

satisfaisant les propriétés suivantes :

Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- $u + v = v + u$
- $u + 0 = 0 + u = u$
- $(u + v) + w = u + (v + w)$
- $1.u = u$
- $-1.u = -u$ et $u + (-u) = 0$
- $0u = 0$
- $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$

Sous-espace vectoriel

Définition

V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ ssi

$$\forall u, v \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u + \mu v \in V$$

Définition

V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ ssi $\forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \in V$$

$$u + v \in V$$

$$\lambda u \in V$$

Exemple

Exemple

$\mathbb{R}^n$ est sev de lui même.
Dans $\mathbb{R}^2$, la droite $\mathcal{D}, -2x + y = 0$ est un sev.
Dans $\mathbb{R}^3$, le plan $\mathcal{P}, x + y + z = 0$ est un sev.
Dans $\mathbb{R}^2, -2x + y + 1 = 0$ n'est pas un sev.
Dans $\mathbb{R}^2$, le cercle $x^2 + y^2 = 1$ n'est pas un sev.
Dans $\mathbb{R}^2$, la parabole P :$y - x^2 = 0$ n'est pas un sev.

Exemple

Exemple

On considère le système linéaire :

$$\begin{cases} x+2y-z &= 0 \\ 2x+5y-z &= 0 \\ -x-5y-2z &= 0 \end{cases}$$

On démontre que c'est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Théorème

Théorème 1

Soit (S) le système linéaire de p équations et n inconnues est :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots a_{pn}x_n &= 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S) est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Preuve : en exercice.

Exemple

Soit V le sous-espace vectoriel engendré par $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Trouver les équations de ce sous-espace vectoriel.

Théorème

Théorème 2

Soient $V_1, \dots, V_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Preuve : en exercice
On l'appelle **sous-espace vectoriel engendré par** $V_1, \dots, V_p$.
On le note $\langle V_1, \dots, V_p \rangle$.
Les vecteurs sont les générateurs.

Base

Définition

- *Un ensemble de vecteurs A de $\mathbb{R}^n$ est appelé* **système générateur** *de $\mathbb{R}^n$ si tout élément de $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire des vecteurs de A.*
- *Un ensemble de vecteurs A de $\mathbb{R}^n$ est appelé* **système libre** *de $\mathbb{R}^n$ si tous les vecteurs de A sont linéairement indépendants.*
- *Un ensemble de vecteurs A de $\mathbb{R}^n$ est appelé* **base** *de $\mathbb{R}^n$ si c'est un système libre et générateur.*

Par exemple, c'est le cas de la base canonique.

Pour $\mathbb{R}^n$

Tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

C'est **la base canonique de** $\mathbb{R}^n$.

Exemple

Est ce que $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$?

Est ce que $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$?

Exprimer le vecteur $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\{a_1, a_2\}$. Faire un dessin.

Les coordonnées des vecteurs sont modifiées lorsqu'on change de base.

Définition

La dimension d'un espace vectoriel (fini) est le nombre de vecteurs d'une de ses bases.

$\mathbb{R}^n$ est de dimension n.
Toute base de $\mathbb{R}^n$ a n vecteurs.

Trouver la dimension du sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$

Pour un sous espace vectoriel

On retrouve les mêmes définitions que pour $\mathbb{R}^n$.

Définition

Une base d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ est un système libre et générateur de V.

Soit $\{a_1, \ldots, a_k\}$ une base du sous espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$.
Toute autre base de V a k vecteurs.
L'entier k est appelé dimension de V.
Un sous-espace vectoriel de dimension 1 est une droite vectorielle.
Un sous-espace vectoriel de dimension 2 est un plan vectoriel.
Un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$ est un hyperplan.