Chapitre 1 - Intégrale à une seule variable

Stolfi Noelle - Leo Donati
noelle.stolfi@unice.fr - leo.donati@unice.fr

Université Nice Sophia Antipolis
IUT Nice Côte d'Azur

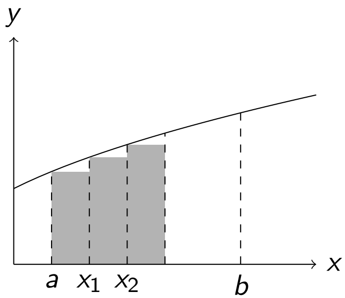
25 août 2016

Définition

On appelle subdivision de $[a, b]$ une suite de points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, $x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}$, ..., $x_n = b$.

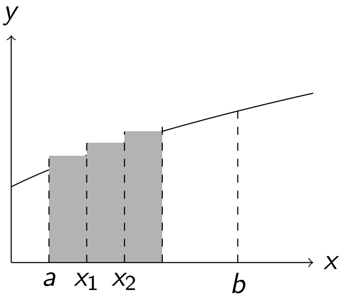
On construit ainsi deux types de rectangles

- R_k^- rectangle de base $[x_{k-1}, x_k]$ et de hauteur $f(x_{k-1})$
- R_k^+ rectangle de base $[x_{k-1}, x_k]$ et de hauteur $f(x_k)$



Aire de $R_k^- = |x_k - x_{k-1}| f(x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} f(x_{k-1})$

Rectangles R_k^+



Aire de $R_k^+ = |x_k - x_{k-1}| f(x_k) = \frac{b-a}{n} f(x_k)$

On définit deux suites :

$$S_n^- = \sum_{k=1}^{n} \text{Aire } R_k^- = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})$$

$$S_n^+ = \sum_{k=1}^{n} \text{Aire } R_k^+ = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

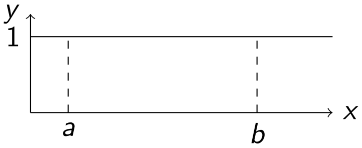
La suite $(S_n^-)_n$ est croissante et majorée par l'aire engendrée par la courbe.
Les deux suites sont convergentes. On montre qu'elles ont la même limite, on la note $S = \int_a^b f(x)dx$. C'est l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$

Exemple

Calculons par cette méthode $\int_a^b 1dx$.

$$S_n^- = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})$$

$$S_n^- = \frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + \dots f(x_n)) = \frac{b-a}{n}n = b-a$$



Proposition

- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^a f(x) = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
- $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$

1) Si f est décroissante et positive sur $[a, b]$, on procède de même en échangeant les rôles de R_k^+ et R_k^-.
2) Si f est positive sur $[a, b]$, on découpe $[a, b]$ en sous-intervalles sur lesquels f est monotone.
3) Si f est négative sur $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b -f(x)dx$.

Formule de la moyenne

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, alors $\exists c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Preuve :

Intégrale et primitive

On pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Théorème

$F'(x) = f(x)$

Preuve : $F'(x) = lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$
$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$. On utilise la formule de la moyenne, donc $\exists c \in [x, x+h]$ tel que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = (x+h-x)f(c) = f(c)$$

En faisant tendre h verx 0, on obtient $F'(x) = f(x)$

Soit G une autre primitive de f. Alors $F(x) = G(x) + C$, $\forall x$, $C \in \mathbb{R}$.

- Si $x = a$, alors $F(a) = G(a) + C$, or $F(a) = 0$, donc $G(a) = -C$ et $F(x) = G(x) - G(a)$
- Si $x = b$, alors $F(b) = G(b) - G(a)$

Donc

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

Exemple

Calculer $\int_0^1 x^2 dx$ et $\int_0^{\pi/2} \cos(2x)dx$

Primitives usuelles

Fonction f	$\int f(x)dx$
$u'u^n$ avec $n \neq -1$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$u'u^{-1}$	$\ln\lvert u\rvert$
$u'e^u$	e^u
$u' \cos u$	$\cos u$
$u' \sin u$	$\sin u$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$\arctan u$
$\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$	$\arcsin u$
$\frac{-u'}{\sqrt{u^2+1}}$	$\arccos u$

Intégration par parties

On connait la formule $(fg)' = f'g + fg'$, donc $(fg)' - f'g = fg'$. On en déduit la formule de l'intégration par parties.

Proposition

$$\int_a^b fg' dx = [fg]_a^b - \int_a^b f' g dx$$

Exemple

Calculer $\int_0^\pi x \sin x dx$

Changement de variable

On veut calculer $I = \int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Posons $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow t^2 = x$

On déduit que : $2t\ dt = dx$

Remplaçons dans

$$I = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+t}}{t}2t\ dt = 2\frac{1}{2}\sqrt{1+t}\ dt$$

Donc

$$I = 2[\frac{(1+t)^{3/2}}{3/2}]_1^2 = \frac{4}{3}(3^{3/2} - 2^{3/2})$$

Stolfi Noelle - Leo Donati noelle.stolfi@unice.fr - leo.donati@unic

Primitive de fractions rationnelles

- Pour $f(x) = \frac{N(x)}{(x-a)(x-b)} = E(x) + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$

$$\int f(x)dx = \int E(x)dx + A \ln|x-a| + B \ln|x-b|$$

- Pour $f(x) = \frac{N(x)}{(x-a)^n} = E(x) + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_1}{(x-a)}$
  Or $\int \frac{dx}{(x-a)^p} = \frac{1}{1-p}(x-a)^{-p+1}$ et $\int \frac{dx}{(x-a)} = \ln|x-a|$

Intégrale d'une fonction sur un intervalle infini

On cherche à calculer $I = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$.
On pose

$$I_A = \int_1^A \frac{dx}{x^2} = \int_1^A x^{-2}dx = [\frac{-1}{x}]_1^A$$

On fait tendre A vers $+\infty$

$$lim_{A\to+\infty} I(A) = 1 = I$$