ALGEBRE LINEAIRE

T.D. n°3

1. Est-ce que ces vecteurs sont linéairement dépendants (L.D.) ou indépendants (L.I.) ? Si ils sont L.D, donner la combinaison linéaire.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Calculer le rang des matrices suivantes :
$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Soit $U \in M_{p\times 1}(R)$. Quel est le rang de la matrice $U.U^T$?

4. Calculer le rang de la matrice suivante en fonction de $\lambda \in R$: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

5. Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

6. On appelle déterminant de Van der Monde les déterminants du type $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$, $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$. Démontrer que $D_3 = (c-b)(c-a)(b-a)$.

   De la même manière, trouver D_4 Quelle serait la formule pour $D_n, n \in N^*$?

7. Soit $A \in M_{nxn}(R)$, et $\alpha \in R^*$. Démontrer que : $\det(\alpha \mathrm{A}) = \alpha^{\mathrm{n}} \det(\mathrm{A})$

8. Soit A une matrice orthogonale de dimension quelconque. Démontrer que $\det(A) = \pm 1$.

9. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver le cofacteur de l'élément a_{23}.

10. Calculer det(A) et A^{co} pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier le résultat obtenu en calculant AA^{CO}.

Noëlle Stolfi
Département Informatique.

11. Calculer les déterminants: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & a & a & a \\ a & 0 & a & a \\ a & a & 0 & a \\ a & a & a & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{vmatrix}$

12. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ où a,b,c,d sont des réels. Calculer MM^T.

Trouver alors le déterminant de M, sans le calculer directement.

Noëlle Stolfi
Département Informatique.