Graphes et Langages

Chapitre 3
Graphes valués

Leo Donati Noëlle Stolfi

Université de Nice Sophia Antipolis
IUT Nice Côte d'Azur
DUT Informatique

2015-2016

Chapitre 3 : Graphes valués

1. Graphes valués
   - Définitions
   - Matrice des poids
   - Chemins
2. Plus court chemin
   - Problème
   - Algorithme de Dijkstra
   - Voyageur de commerce
3. Graphes probabilistes
   - Définition
   - Etat probabiliste
   - Etat stable

Définition

Graphe valué

Un graphe valué est un graphe (en général orienté) dans lequel les arcs portent une information numérique : appelé le poids de l'arc.

Définition

$G = (V, E, \gamma, \omega)$ est un graphe valué si (V, E, γ) est un graphe orienté et

$$\omega : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

est un fonction qui associe à chaque arc $a \in E$ son poids $\omega(a)$.

Applications

Applications des graphes valués

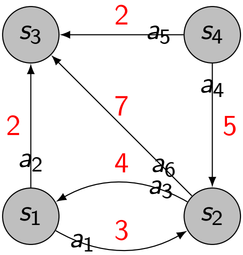
Les graphes valués servent à modéliser les situations dans lesquelles les liens qui lient les objets comportent une information chiffrée

- une distance (dans une carte)
- un coût (péage par exemple)
- un débit maximal (connexion internet)
- un temps de parcours (en montagne)
- le diamètre d'une canalisation (pour l'eau, le gaz)
- une intensité (dans un circuit électrique)

Exemple 1

$G = (V, E, \gamma, w)$

- $V = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$
- $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$
- $\gamma(a_1) = (s_1, s_2)$ et $\omega(a_1) = 3$
- $\gamma(a_2) = (s_1, s_3)$ et $\omega(a_2) = 2$
- $\gamma(a_3) = (s_2, s_1)$ et $\omega(a_3) = 4$
- $\gamma(a_4) = (s_4, s_2)$ et $\omega(a_4) = 5$
- $\gamma(a_5) = (s_4, s_3)$ et $\omega(a_5) = 2$
- $\gamma(a_6) = (s_2, s_3)$ et $\omega(a_6) = 7$



Remarques

En général les graphes valués

- n'ont pas de boucles
- ont des poids strictement positifs
- peuvent être aussi non orientés

Matrice des poids

Définition

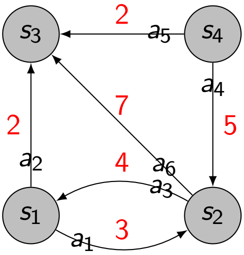
Soit $G = (V, E, \gamma, \omega)$ un graphe valué simple avec des sommets numérotés de 1 à n :

$$V = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$$

La matrice des poids de G est une matrice carrée W, $n \times n$, dont l'entrée (i, j) donne

- le poids de l'arête dont le début est le sommet s_i et la fin est le sommet s_j, si elle existe
- ou bien ∞ s'il n'y a pas d'arête entre les deux sommets
- ou bien 0 sur la diagonale.

Exemple 1



Matrice des poids

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & \infty \\ 4 & 0 & 7 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cas des arêtes parallèles

Si le graphe valué comporte des arêtes parallèles, on ne peut pas définir sa matrice de poids.
En ajoutant deux sommets en plus sur les arêtes parallèles, on augmente le nombre de sommets mais on obtient un graphe simple.

Poids d'un chemin

Définition

Dans un graphe valué, le poids d'un chemin est égal à la somme des poids de tous les arcs qui composent ce chemin.

Remarque

Cette façon additive d'associer un poids à un chemin correspond à la situation où les poids sont des distances, des temps de parcours ou des coûts.
Mais dans certains cas ça n'a pas de sens :

- pour un débit
- pour un diamètre
- pour une intensité électrique

Dans ces cas on associe à un chemin plutôt soit le minimum des poids de chaque arête ou bien le maximum.

Chapitre 3 : Graphes valués

1. Graphes valués
   - Définitions
   - Matrice des poids
   - Chemins
2. Plus court chemin
   - Problème
   - Algorithme de Dijkstra
   - Voyageur de commerce
3. Graphes probabilistes
   - Définition
   - Etat probabiliste
   - Etat stable

Enoncé du problème

Plus court chemin

Etant donné un graphe valué, on veut savoir :

- quel est le chemin de poids minimal entre un sommet A et un sommet B
- quel est le chemin de poids minimal entre un sommet A et tous les autres sommets
- quel est le chemin minimal pour chaque paire de sommets.

Dans tous les cas ce chemin de poids minimal sera appelé plus court chemin.

Algorithme de Dijkstra

Edsger Dijkstra (1930–2002)

- Physicien et informaticien néerlandais, professeur à l'université technique d'Eindhoven.
- Il a contribué au développement de langages informatiques (ALGOL, concept de programmation structurée).
- Reçoit le prix Turing en 1972.
- Il est à l'origine d'un algorithme qui permet de trouver le plus court chemin à partir d'un sommet donné vers tous les autres sommets à condition que le graphe soit connexe et de poids non nul.

Algorithme

Pour trouver les plus court trajet à partir de A :

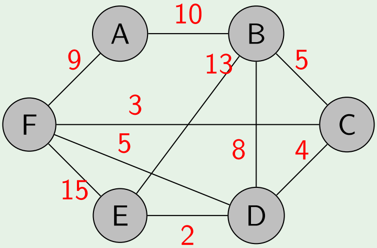
On attribue au départ le poids 0 au sommet A et l'infini à tous les autres. Puis :

- parmi tous les sommets non sélectionnés, on choisit le sommet X dont le poids est le plus faible.
- pour chaque sommet Y adjacent à X on calcule la valeur S :

$$S = \omega(X) + \text{ poids de l'arête qui relie X à Y}$$

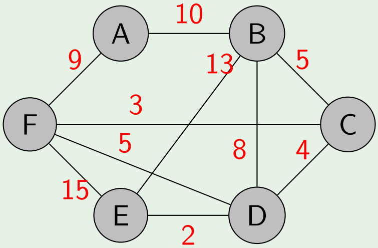
  - si $S < \omega(X)$ on raye le poids marqué et on le remplace par S, en notant le sommet X d'où l'on vient.
  - si $S >$ poids déjà marqué, on ne change rien.

Exemple



	A	B	C	D	E	F	Retenu
Départ	0	∞	∞	∞	∞	∞	A 0
De A vers	XXX	10 A	∞	∞	∞	9 A	F 9 A
De F vers	XXX	10 A	12 F	14 F	24 F	XXX	B 10 A
De B vers	XXX	XXX	12 F	14 F	23 B	XXX	C 12 F
De C vers	XXX	XXX	XXX	14 F	23 B	XXX	D 14 F
De D vers	XXX	XXX	XXX	XXX	16 D	XXX	E 16 D

Résultats



À partir de A le plus court chemin vers :

- B est de longueur 10 : chemin A-B ;
- C est de longueur 12 : chemin A-F-C ;
- D est de longueur 14 : chemin A-F-D ;
- E est de longueur 16 : chemin A-F-D-E ;

Problème du voyageur de commerce

Problème d'optimisation

Etant donné un nombre de villes séparées par des distances connues, le voyageur de commerce veut organiser son itinéraire pour passer par toutes les villes (une et une seule fois, comme dans un circuit hamiltonien) en parcourant la plus courte distance possible.

Mathématiquement

Etant donné un graphe valué, trouver un circuit hamiltonien de poids minimal.

Complexité

On ne connaît pas d'algorithme permettant de résoudre ce problème en général en temps polynomial. Dans les problèmes de grande taille, on doit donc se contenter de solutions approchées.

Chapitre 3 : Graphes valués

1 Graphes valués
- Définitions
- Matrice des poids
- Chemins

2 Plus court chemin
- Problème
- Algorithme de Dijkstra
- Voyageur de commerce

3 Graphes probabilistes
- Définition
- Etat probabiliste
- Etat stable

Graphe probabiliste

Définition

On appelle graphe probabiliste un graphe valué, tel que la somme des poids des arc sortants de chaque sommet est égale à 1.

Application

Ce type de graphe est généralement utilisé pour modéliser des passages d'un objet ou d'un individu d'un état à un autre, lorsque ces passages sont aléatoires. Par exemple, une machine est en panne ou fonctionne parfaitement (deux états 0 et 1). Les poids des arcs sont alors les probabilités de passage d'un état à l'autre.

Matrice de transition

Définition

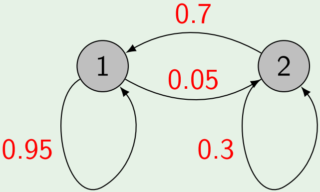
Pour un graphe à n sommets, la matrice de transition M est la matrice carrée de dimension n telle que le terme m_{ij} est égal à 0 s'il n'y a pas d'arc entre les sommets i et j ou à la probabilité associée à cet arc lorsqu'il y en a un.

Remarques

- C'est tout simplement la matrice des poids du graphe valué sauf qu'au lieu de mettre ∞ en absence d'arc, on met 0 (probabilité nulle).
- Avec la propriété que la somme des lignes est égal à 1

Exemple

Quand un buteur d'une équipe de rugby réussit une pénalité, mis en confiance, il réussit la suivante avec une probabilité égale à $0,95$. S'il la manque il n'aura plus que 7 chances sur 10 de réussir la suivante.



La matrice de transition de ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Etat probabiliste

Définition

Soit une expérience aléatoire à k issues possibles.

- A chaque issue i est associée une probabilité p_i.
- Après n expérience, l'objet étudié peut se trouver dans différents états que l'on peut décrire par une matrice ligne P_n dont les termes sont les probabilités p_i d'être dans chaque état.
- Cet état évolue lorsqu'on réalise plusieurs fois la même expérience dans les mêmes conditions.

Exemple du rugbyman

Exemple du buteur de rugby

Si à l'entrainement il passe 9 pénalités sur 10, on a un état initial :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Cet état va évoluer au fur et à mesure des pénalités.
La probabilité de réussir la deuxième pénalité est $0,9 \times 0,95 + 0,1 \times 0,7$. Ceci est

$$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0.925 & 0.075 \end{pmatrix}$$

où M est la matrice de transition associée au graphe.
Donc $0,075$ est la probabilité que la deuxième pénalité soit marquée.

Etat probabiliste après n étapes

En faisant le même raisonnement, on trouverait que la probabilité de réussir le tir suivant serait

$$P_2 = P_1 \times M$$

Nous en déduisons que le vecteur ligne P_{n+1} qui décrit l'état probabiliste à l'étape $n+1$ est

$$P_{n+1} = P_n \times M = P_0 \times M^{n+1}$$

- Un graphe probabiliste indique les différents états possibles d'un système et les probabilités de passage d'un état à l'autre.
- la matrice de transition M qui rassemble les probabilités permet d'étudier l'évolution du système. La matrice M^n permet de trouver l'état du système à la nième étape.

Etat stable

Définition

Un état probabiliste est stable si et seulement s'il n'évolue pas lors de la répétition de l'expérience.

Trouver l'état stable

On doit donc résoudre une équation du type

$$P_s = P_s \times M$$

ce qui se traduira par un système d'équations linéaires.

Exemple d'état stable

Exemple du rugbyman

Si la matrice de transition est

$$M = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

alors l'état stable $P_s = (x, y)$ est tel que $x + y = 1$ et $P_s = P_s \cdot M$ ce qui donne le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x + y & = & 1 \\ 0.95x + 0.7y & = & x \\ 0.05x + 0.3y & = & y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x + y & = & 1 \\ -0.05x + 0.7y & = & 0 \\ 0.05x - 0.7y & = & 0 \end{array} \right.$$

et donc $P_s \approx (0.93,\ 0.07)$.