ALGEBRE LINEAIRE

T.D. n°5

1. Montrer que
$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4, 2x-2y=0 \text{ et } 3z-2t=0\right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Parmi ces trois ensembles quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

   a) $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2=1\right\}$

   b) $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3, e^{x+2y-z}=1\right\}$

   c) $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3, x^2+y+z=0\right\}$.

3. Donner les équations qui définissent ces sous-espaces vectoriels :

   a) $\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

   b) $\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$

   c) $\left\langle\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix}\right\rangle$

4. Quel est l'ensemble des vecteurs générateurs de :

   a) $x+y-z=0$

   b) $\begin{cases}x-z=0\\y+4z=0\end{cases}$

   c) $\begin{cases}x+y+2z=0\\3x+3y-1=0\\x+y-z=0\end{cases}$

   d) $\begin{cases}2x+2y+7z-t=0\\3x-y+2z+4t=0\\x+y+3z+t=0\end{cases}$

5. Comment prouve-t-on que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs constituent une base ?

6. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$. Trouver une condition sur a,b,c réels pour qu'un vecteur $w=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ complète les deux vecteurs précédents en une base de $\mathbb{R}^3$.

7. Démontrer que les vecteurs $u=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},w=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^4$. Réécrire le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

8. Soient les vecteurs
$$u=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}5\\4\\-1\\-3\end{pmatrix},w=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-2\end{pmatrix}.$$
   - Donner l'équation du sous espace vectoriel qu'ils engendrent.
   - Sont-ils linéairement indépendants ?
   - Les compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

9. Démontrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et l'ensemble des matrices diagonales sont des sous-espaces vectoriels de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

10. Démontrer que l'ensemble des fonctions paires est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions réelles.

Noëlle Stolfi
I.U.T. de Nice Côte d'azur, Département Informatique.