Déterminant

Stolfi Noelle
Donati Leo

Université Nice Sophia Antipolis
IUT Nice Côte d'Azur

20 novembre 2015

Déterminant

Définition

A toute matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ *est associé un réel qui s'appelle déterminant et qui se note* $det(A)$ *ou* $|A|$.

Calcul du déterminant pour $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. On trouve $det(A) = 3$.

Calcul du déterminant par développement par ligne ou colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

Définition

On appelle **mineur d'ordre** k *toute matrice obtenue en éliminant* $n-k$ *lignes et* $n-k$ *colonnes de* A *(avec* $k < n$*).*

Notation

On note A_{ij} le mineur obtenu en éliminant la ligne i et la colonne j.

Définition

Le **cofacteur** C_{ij} **de** A *est*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$$

Le signe du cofacteur $(-1)^{i+j}$ est appelé signature.

Méthode de calcul du déterminant

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

C'est le calcul par **développement par rapport à la ligne** i. On peut le faire de manière analogue par rapport à une colonne.
C'est une méthode **récursive**. On part d'une matrice de dimension $n \times n$ et grâce aux mineurs, on réduit au fur et à mesure la dimension jusqu'à avoir une matrice de dimension 2×2 dont on sait calculer le déterminant.

Exemple

Calcul en développant par rapport à la première ligne de :

$$det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A) &= (-1)^{1+1} \times (-2) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)^{1+2} \times (2) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)^{1+3} \times (-3) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-2) \times (-1) - 2 \times (-5) + (-3) \times (-2) \\ &= 18 \end{aligned}$$

Exemple

Exemple

Calculer le déterminant de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Il est intéressant ici de calculer le déterminant en développant par rapport à la dernière colonne car elle contient des 0. On trouve 56.

Propriétés

Dans la suite $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

Propriété 1

- Si on échange 2 lignes (ou 2 colonnes) dans A, alors le déterminant change de signe.
- Si on multiplie une ligne (ou colonne) par $k \in \mathbb{R}^*$, alors le déterminant est multiplié par k.
- Si on ajoute à une ligne (ou colonne) un multiple d'une autre ligne (ou colonne), alors le déterminant ne change pas.

Preuve : en exercice.

Propriétés

Propriété 2

Le déterminant d'une matrice ayant deux lignes (ou colonnes) égales est nul.

Preuve : en exercice.

Propriété 3

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments de sa diagonale.

Preuve : en exercice.

Propriétés

Propriété 4

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

- $det(A^T) = det(A)$
- $det(AB) = det(A)det(B)$
- Si A est inversible alors $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$

Preuve : en exercice.

Toutes ces propriétés nous permettent de simplifier les calculs du déterminant, par exemple en appliquant d'abord l'algorithme de Gauss, de manière à obtenir une matrice triangulaire.

Exemple

Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en appliquant avant l'algorithme de Gauss.

Théorème

Soit $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice . Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) A est inversible
(ii) $rang(A) = n$
(iii) Les colonnes de A forment un ensemble de vecteurs L.I.
(iv) $det(A) \neq 0$

Preuve : tout se déduit de l'algorithme de Gauss...

Définition

Soit $A \in M_{pp}(\mathbb{R})$ une matrice. La comatrice de A notée A^{co} est :

$$A^{co} = (Aji)_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq p}$$

C'est la transposée de la matrice des cofacteurs.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ On trouve $A^{co} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Théorème

Si A est une matrice carrée inversible alors

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} A^{co}$$

Preuve : en exercice

Ceci nous donne une autre méthode pour calculer les inverses des matrices (sans utiliser l'algorithme de Gauss).

Exemple

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$