

M121 : Mathématiques discrètes

TD5 : Algèbre de Boole et Calcul Propositionnel

2015-2016

1. Dans une algèbre de Boole \mathbb{B} quelconque, prouver les propriétés suivantes :
 - a) $x + 1 = 1$
 - b) $x \cdot 0 = 0$
 - c) $x + (x \cdot y) = x$
 - d) $x + (\bar{x} \cdot y) = x + y$
2. Dans une algèbre de Boole \mathbb{B} quelconque, on définit une nouvelle opération binaire "implique" par :

$$x \Rightarrow y = \bar{x} + y$$

Calculer dans \mathbb{B} les expressions suivantes :

- a) $0 \Rightarrow y$
- b) $1 \Rightarrow y$
- c) $x \Rightarrow 0$
- d) $x \Rightarrow 1$
- e) $\overline{x \Rightarrow \bar{y}}$
- f) $\bar{x} \Rightarrow y$
- g) $(x \cdot y) \Rightarrow x$

Prouver les formules de distributivité suivantes

- a) $x \Rightarrow (y + z) = (x \Rightarrow y) + (x \Rightarrow z)$
- b) $x \Rightarrow (y \cdot z) = (x \Rightarrow y) \cdot (x \Rightarrow z)$
- c) $(x \cdot y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) + (y \Rightarrow z)$
- d) $(x + y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \cdot (y \Rightarrow z)$

3. Construire une algèbre de Boole à 8 éléments en prenant les nombres de 0 à 7 (qui s'ils sont écrits en binaire peuvent être vus comme des éléments de \mathbb{B}_2^3) avec comme opérations booléennes le *ou bit-à-bit*, le *et* bit-à-bit, et le complément à 1. Qui joue alors le rôle du 0, du 1 ? Donner la table de chaque opération.
4. Donner la liste de toutes les opérations booléennes à 2 arguments.
5. Dans une île, il y a deux types d'indigènes :
 - les honnêtes qui disent toujours la vérité,

– les menteurs qui ne disent jamais la vérité.

On rencontre deux indigènes A et B ; on note P_A la proposition "A est honnête" et P_B la proposition "B est honnête".

- a) Que peut-on dire des deux indigènes A et B si A déclare "Nous sommes tous les deux des menteurs" ?
- b) Même question si cette fois A déclare "Nous ne sommes pas tous les deux des honnêtes" ?

6. Deux cellules contiennent chacune une princesse ou un tigre. Sur la porte de chaque cellule se trouve une affiche qui dit :

- Porte 1 : il y a un tigre dans cette cellule ou il y a une princesse dans l'autre.
- porte 2 : il y a une princesse dans l'autre cellule.

- a) Sachant que les affiches sont vraies toutes les deux ou fausse toutes les deux, que contiennent les cellules ?
- b) Sachant maintenant qu'une affiche est vraie si la cellule contient une princesse et fausse si elle contient un tigre, que peut-on en conclure ?

7. Soient p, p', q, q' quatre symboles propositionnels et soit I la fonction d'interprétation définie par

$$I(p) = 1, I(p') = 0, I(q) = 1, I(q') = 0$$

Donner l'interprétation par I des formules propositionnelles suivantes :

- a) $F_1 = (p \wedge p') \Rightarrow (q \vee q')$
- b) $F_2 = ((p \Rightarrow p') \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg q')) \Rightarrow \neg p$
- c) $F_3 = ((\neg(p \Rightarrow p')) \Rightarrow (q \Rightarrow q')) \Rightarrow (p \wedge q)$

8. Pour chaque proposition suivante, dire si elle est valide (tautologie), insatisfaisable ou satisfaisable :

- a) $F_1 = (\neg p) \wedge (p \Rightarrow q)$
- b) $F_2 = p \wedge (p \Rightarrow q)$
- c) $F_3 = (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
- d) $F_4 = (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
- e) $F_5 = (p \wedge \neg p) \Rightarrow \neg q$
- f) $F_6 = (p \vee \neg p) \Rightarrow \neg q$