Graphes et Langages

TD2 : Graphes orientés

2015-2016

1. Soit le graphe orienté $G = (V, E, \gamma)$ défini par
   - $V = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$
   - $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$
   - l'application γ définie par
     - $\gamma(a_1) = (s_5, s_1)$
     - $\gamma(a_2) = (s_2, s_1)$
     - $\gamma(a_3) = (s_4, s_5)$
     - $\gamma(a_4) = (s_4, s_2)$
     - $\gamma(a_5) = (s_3, s_2)$
     - $\gamma(a_6) = (s_3, s_3)$

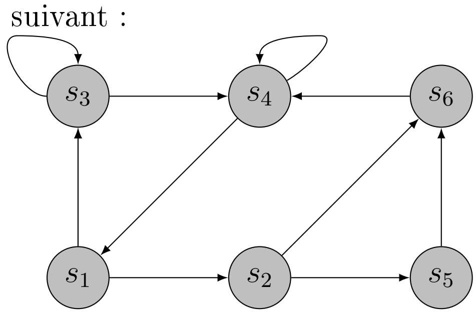
   a) Donner l'ordre et le degré de G, ainsi que le degré entrant et sortant de chaque sommet

   b) Écrire la matrice d'adjacence de G

   c) Dire si le graphe est simple, symétrique, antisymétrique, transitif, fortement connexe ?

   d) Donner la fermeture transitive de G

2. Soit le graphe orienté G suivant :



   a) Quel est l'ordre de ce graphe, son degré, les degrés entrants et sortants de chaque sommet ?

   b) Écrire la matrice d'adjacente de G

   c) Dire si le graphe est simple, symétrique, antisymétrique, transitif, fortement connexe ?

   d) Ce graphe comporte-t-il des circuits ? Lesquels ?

e) Donner la fermeture transitive de G

3. Soit le graphe orienté défini par la matrice d'adjacence suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dessinez ce graphe, donnez les degrés entrant et sortant de chaque sommet.

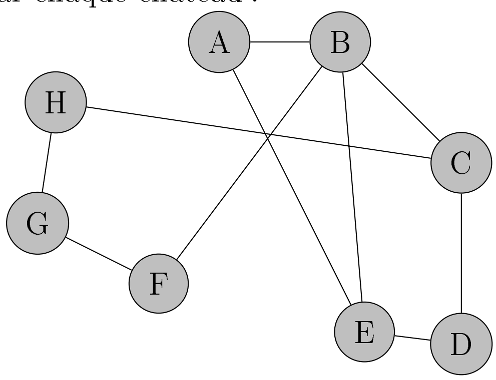
b) Ce graphe est-il simple, fortement connexe, symétrique ?

c) Trouvez un circuit eulérien d'origine s_1

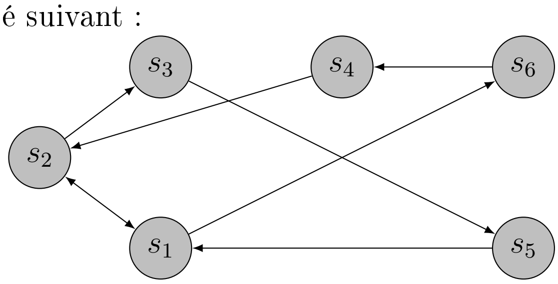
d) Trouvez un circuit hamiltonien d'origine s_2

4. Soit G un graphe non orienté simple d'ordre 5 tel que les premiers sommets sont de degré respectif 4, 2, 1, 2. Quel est le degré du 5° sommet ? Donnez toutes les réponses possibles et faites des dessins.

5. Les châteaux de la Loire. Un voyagiste organise des circuits (au sens touristique) parmi les châteaux de la Loire. Huit châteaux peuvent être visités, représentés par les sommets du graphe ci-dessous. Les routes qu'empruntent les bus correspondent aux arêtes du graphe. Est il possible de trouver une chaîne permettant de passer une fois et une seule par chaque château ?



6. Soit le graphe orienté suivant :

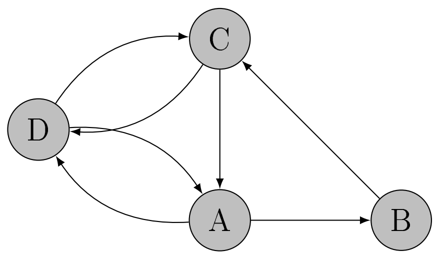


a) trouver un circuit eulérien d'origine 1

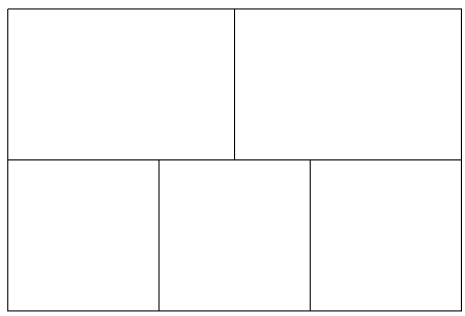
b) trouver un circuit hamiltonien d'origine 2

c) trouver un circuit hamiltonien d'origine 1

7. Un club de 9 joueurs se réunit autour d'une table ronde à 9 places chaque jour. Une règle du club interdit que dans la même semaine un joueur ait deux fois la même personne assise à coté de lui. Combien de jours par semaine peuvent-ils se réunir au maximum ? Donnez l'organisation de la table de chaque jour. Que se passe-t-il si une semaine un joueur est absent et ils se retrouvent à 8 ?
8. Soit le graphe orienté suivant :



   a) Donnez sa matrice d'adjacence M
   b) Calculer les matrices M^2, M^3, M^4
   c) Déduisez-en le nombre de circuits de longueur 3, le nombre de circuits de longueur 4 passant par A ;
   d) Déduisez-en tous les chemins de longueur 4 de B vers D et de C vers D.
9. La *matrice des distances* d'un graphe (orienté ou non) est une matrice carrée dont la taille est égale au nombre de sommets du graphe et qui contient en ligne i et colonne j la distance entre le sommet s_i et le sommet s_j. S'il n'existe pas de chemin de s_i à s_j, on dit que la distance est infinie et l'on met le symbole ∞ dans la matrice. Donnez la matrice des distances des graphes des exercices 1,2 et 3 et déduisez-en leur diamètre.
10. Prouver que lors d'une réunion de n personnes, il y a au moins deux personnes ayant le même nombre d'amis.
11. On veut gribouiller la figure suivante (sans lever le stylo) de façon à rayer chacun des 16 segments une et une seule fois. Comment faire ?



12. Considérons les graphes orientés définis ci–dessous par leur matrice d'adjacence. Sont-ils sans circuits ? Si oui, construire leur noyau et les partager en niveaux.

   a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13. Calculez les niveaux du graphe suivant et re-dessinez-le selon les niveaux.