1 Définition

2 Algorithme de Gauss et résolution

3 Méthode de Cramer

Systèmes linéaires

Stolfi Noelle
Donati Leo

Université Nice Sophia Antipolis
IUT Nice Côte d'Azur

1er décembre 2014

Notation avec les matrices

Le système (S) se note $AX = b$ avec $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

Exemple

Le système

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 & = & 1 \\ x_1 - 9x_3 & = & 2 \end{cases}$$

s'écrit $AX = b$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Définition d'un systéme linéaire

Définition

Un système linéaire (S) de p équations et n inconnues est :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots a_{pn}x_n & = & b_p \end{cases}$$

où les symboles $a_{11}, \dots, a_{pn}, b_1, \dots, b_p$ sont des réels donnés.

Une solution du système (S) est un vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ satisfaisant les p équations.
Résoudre le système (S) signifie trouver toutes les solutions.

Alors diverses possibilités apparaissent :

- La dernière ligne (ou plusieurs lignes) est nulle sauf le dernier coefficient. Le système (S) n'a pas de solution.
- Il y a le même nombre d'équations que d'inconnues : la dernière ligne permet alors de trouver la derniére inconnue, et puis " en remontant " le système on en déduit toutes les inconnues. Le système (S) a dans ce cas une solution unique.
- Il y a plus d'inconnues que d'équations. On choisit dans la dernière ligne, un ou plusieurs paramètres. On exprime alors les autres inconnues en fonction de ce(s) paramètre(s). Le système (S) a une infinité de solutions.

Avec l'Algorithme de Gauss

- On écrit le système (S) sous forme matricielle $AX = b$
- On considère la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} & | & b_p \end{pmatrix}$
- On lui applique l'algorithme de Gauss jusqu'à obtenir une matrice de la forme : $\begin{pmatrix} * & \dots & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & * \end{pmatrix}$

Exemple 1 - suite

Exemple

Après application de l'algorithme de Gauss on a $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ A la fin de l'algorithme, la dernière ligne est nulle sauf le dernier coefficient. Donc le système n'a pas de solution : $\mathcal{S} = \emptyset$

Exemple 1

Exemple 1

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 & = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 & = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 & = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 & = -4 \end{cases}$$

On écrit le système sous forme matricielle et on applique l'algorithme de Gauss à la matrice $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -4 \end{array}\right)$

Exemple 2 - suite

Exemple

Après application de l'algorithme de Gauss on a $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ On choisit un paramètre par exemple x_4, et on exprime les solution en fonction de ce paramètre ; il y a une infinité de solutions.

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ 3 + x_4 \\ 6 + 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemple 2

Exemple 2

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 & = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 & = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 & = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 & = -3 \end{cases}$$

On écrit le système sous forme matricielle et on applique l'algorithme de Gauss à $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$

Exemple 3 - suite

Exemple

Après application de l'algorithme de Gauss on a $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$ Le système a une unique solution :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemple 3

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 & = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 & = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 & = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = -4 \end{cases}$$

On écrit le système sous forme matricielle et on applique l'algorithme de Gauss à la matrice $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 2 & -4 \end{array}\right)$

Formule de Cramer

Soit A une matrice carrée inversible. On note par $V_1, V_2, \dots, V_n$ ses colonnes. Alors la solution X du système $AX = b$ est donnée par :

$$x_k = \frac{det(V_1, \dots, V_{k-1}, b, V_{k+1}, \dots, V_n)}{det(A)}, \text{ pour } k = 1, \dots, n$$

Système de Cramer

Définition

Un système linéaire (S) $AX = b$ est dit de Cramer si la matrice A du système est carrée et inversible.

Théorème

Un système de Cramer a une unique solution.

Preuve : cette solution est $X = A^{-1}b$.

En appliquant la formule, on obtient :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 10 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{-32}{-16} = 2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 10 & -2 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{-16}{-16} = 1$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 10 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{16}{-16} = -1$$

Exemple

Résoudre avec la méthode de Cramer :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 & = & -3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = & 10 \end{cases}$$

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$.
La matrice A est bien inversible, $det(A) = -16$. Donc on est bien dans le cas d'un système de Cramer.

Il faut étudier les cas :

- $c \neq 3$ et $c \neq -3$, le système est de Cramer, on a une solution unique.

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-6}{c^2-9} \\ -\frac{-3c^2+9}{c^2-9} \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} - \{3, -3\} \right\}$$

- $c = 3$, le système n'est pas de Cramer. On trouve qu'il n'a pas de solution.
- $c = -3$, le système n'est pas de Cramer. On trouve qu'il n'a pas de solution.

Exemple

Résoudre avec la méthode de Cramer, en fonction du paramètre c :

$$\begin{cases} c^2x_1 - 3x_2 & = & 3 \\ -3x_1 + x_2 & = & -3 \end{cases}$$

On a $A = \begin{pmatrix} c^2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$. Le déterminant de la matrice A est $det(A) = c^2 - 9 = (c-3)(c+3)$.
Plusieurs cas sont à étudier.