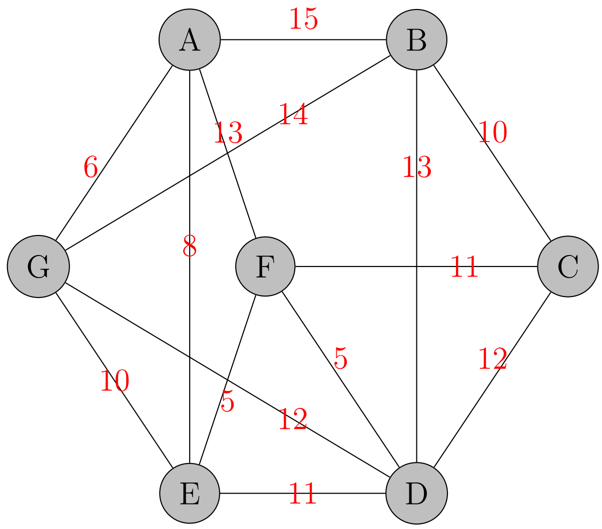
Graphes et Langages

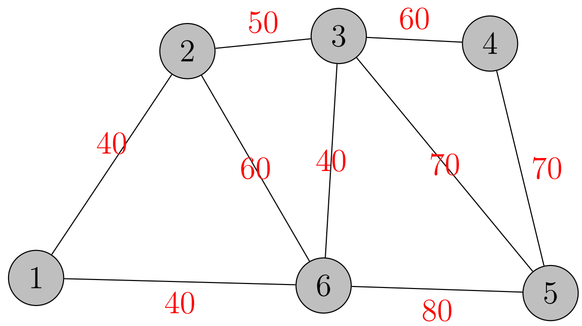
TD3 : Graphes valués

2015-2016

1. Appliquer l'algorithme de Dijkstra au graphe ci-dessous, en cherchant le plus court trajet de A vers C.



2. Un voyagiste organise des circuits (au sens touristique) parmi les châteaux de la Loire. Six châteaux peuvent être visités représentés dans le graphe par des points numérotés. Les routes qu'empruntent les bus correspondent aux segments tracés entre ces points et la distance (en km) entre les villes est notée sur chaque segment. Les circuits doivent durer 5 jours et commencer au château 1 et finir au château 4 (un chateau par jour et une fois et une seule bien-sûr !).



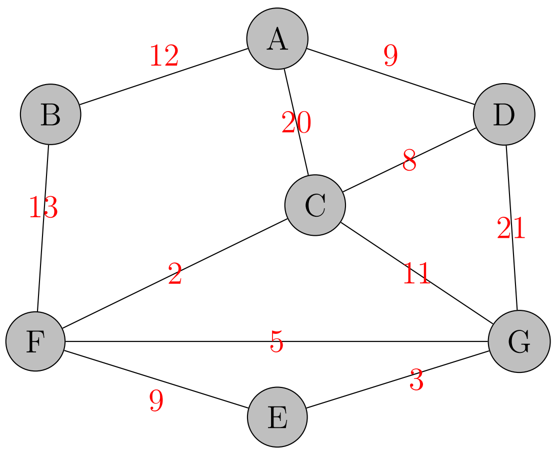
   a) Y a -t-il plusieurs circuits possibles ?

b) Pour des raisons économiques on cherche à trouver le circuit le plus court en km.

3. A l'aide de l'algorithme de Dijkstra déterminer la chaine de poids minimal du sommet 1 vers le sommet 3 dans le graphe orienté valué donné par la matrice des poids suivante :

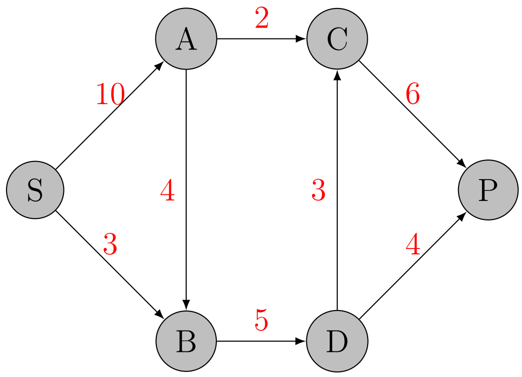
$$W = \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & \infty & 6 & \infty & 5 \\ \infty & 0 & 8 & 12 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 8 & 0 & 9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 6 & 0 & \infty & \infty & 14 \\ 7 & \infty & \infty & 5 & 0 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 8 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Des touristes sont logés dans un hôtel noté A. Un guide fait visiter 6 sites touristiques notés B, C, D, E, F et G. Les tronçons de routes qu'il peut emprunter sont représentés sur le graphe ci-dessous. Le long de chaque arête figure la distance en km des différents tronçons.
   — à partir de l'hôtel, le guide peut-il emprunter tous les morceaux de route passant une fois et une seule par chacun d'eux ?
   — même question s'il doit finir son circuit à l'hôtel ?
   — existe -t -il un circuit revenant à l'hôtel passant par tous les sites touristiques ?
   — déterminer le plus court chemin de l'hôtel au site E.



5. **Problème de flot maximal** : soit un graphe orienté valué avec une unique source et un unique puits (comme le graphe ci-dessous). On appelle un tel graphe un *réseau* si l'on considère que le poids d'un arc représente la *capacité* du lien entre les noeuds (et donc la quantité de matière ou de données qui peuvent transiter d'un noeud vers l'autre). Un *flot* dans un réseau est une fonction $f : E \mapsto R$ définie sur chaque arc avec les contraintes suivantes :
   — $\forall a \in E,\ f(a) \leq \omega(a)$, le flot sur un arc ne peut pas dépasser la capacité de cet arc
   — pour tout sommet qui n'est ni la source, ni le puits la somme des flots des arcs entrants est égal à la somme des flots des arcs sortants (plus brièvement le flot entrant est égal au flot sortant).

Un problème typique d'optimisation des réseaux consiste à trouver le flot maximal qui peut sortir de la source et arriver au puits. Quel est le flot maximal dans le graphe ci-dessous ?



6. Dans un atelier fonctionnent deux machines M_1 et M_2 qui peuvent tomber en panne avec la même probabilité p. Il y a trois états pour l'ensemble des deux machines : aucune machine en panne, deux machines en panne, ou une seule en panne. Modéliser ces situations par un graphe probabiliste à 3 états. Quelle est la matrice de transition ?

7. Chaque année, des habitants des grandes villes partent s'installer à la campagne ; Et vice versa, des habitants des campagnes viennent à la ville. Imaginons que les échanges se font à taux constant. Par exemple :
   — chaque année, 30% des habitants de la ville partent à la campagne (et 70% restent en ville)
   — chaque année, 20% des "campagnards" vont en ville.

   Supposons que l'état probabiliste de départ est donné par la matrice $P_0 = \begin{pmatrix} 10^5 & 10^4 \end{pmatrix}$, c'est à dire 100 000 habitants en ville et 10 000 à la campagne. Combien d'habitants y aura-t-il en ville après 10 ans ? Va-t-il se créer un équilibre ?

8. Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqure d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :
   — étant immunisé (I), il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec probabilité 0,1 ;
   — étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5
   — étant malade, il peut le rester avec probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8.

   Quel peut être l'état de l'individu au bout de trois mois pour chacune des situations suivantes :
   — il est immunisé,
   — il est non malade et non immunisé,
   — il est malade.

   Pouvez-vous donner des éléments sur la proportion d'individus malades dans la population étudiée à long terme ?