Algorithme de Gauss et Applications

Stolfi Noelle
Donati Leo

Université Nice Sophia Antipolis
IUT Nice Côte d'Azur

20 novembre 2015

Définition : inverse

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$*. La matrice* $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ *est l'inverse de* A *ssi*

$$AB = BA = I$$

Notation

On note $B = A^{-1}$.

Propriété

L'inverse de $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ si elle existe, est unique.

Preuve : par l'absurde.

Une matrice qui a une inverse est dite **inversible**. Toutes les matrices carrées ne sont pas inversibles. On dit alors qu'elles sont **singulières.**

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est singulière.

Soit $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$. On a

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \\ \vdots \\ L_p \end{array} \end{array}$$

Les lignes de A sont numérotées L_1, ..., L_p.

Opérations sur les lignes

- échange de lignes
- multiplication d'une ligne par un réel non nul
- ajout à une ligne du multiple d'une autre.

ALGORITHME

1. La première colonne de A est non nulle.
   - si $a_{11} \neq 0$ (PIVOT)

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1, \forall i = 2 \dots p$$

   - si $a_{11} = 0$

$$L_1 \leftrightarrow L_i \text{ pour } a_{i1} \neq 0$$

   Et on recommence...

2. La première colonne de A est nulle. Alors

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & (\ A'\ ) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$ On recommence sur A'.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Après application de l'algorithme de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -16/7 \end{pmatrix}$$

Exercice

Appliquer l'algorithme de Gauss à : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Application : calcul de l'inverse d'une matrice

Soit A une matrice carrée. On utilise l'algorithme de Gauss de manière à transformer A en la matrice identité. Et en même temps, on applique les mêmes opérations sur la matrice identité I pour la transformer en A^{-1}.

Exemple

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Aprés application de l'algorithme de Gauss, on aura :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Que se passe-t-il au cours de l'algorithme si la matrice n'est pas inversible ?

Exemple

Appliquons l'algorithme pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La ligne de 0 nous indique que la matrice A n'est pas inversible. Inutile de poursuivre l'algorithme.

Définition

Le rang d'une matrice M est le nombre de lignes non nulles après application de l'algorithme de Gauss. On le note $rang(M)$.

Exemple

Calculer le rang de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

On trouve $rang(A) = 2$.

Théorème

Soit $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$.

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow rang(A) = n$$

Exemple

On a vu que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a pour $rang(A) = 2$. On sait donc que A est singulière.

Définition

Soient $V_1, \ldots, V_k$ k vecteurs de même dimension. Une combinaison linéaire de ces vecteurs est une somme de leurs multiples

$$a_1 V_1 + \cdots + a_k V_k, \text{ avec } a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \text{ non tous nuls}$$

On dit que ces vecteurs sont linéairement dépendants (L.D.) si il existe une combinaison linéaire nulle.

Exemple

Soient

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$6V_1 - 4V_2 - 5V_3 = 0$$

Les vecteurs sont L.D.

Comment savoir si des vecteurs sont L.D. ?

Exemple

Soient

$$V_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Cherchons une combinaison linéaire de ces vecteurs
$a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3 = 0$ avec a_1, a_2, a_3 non tous nuls.

Propriété

Tout ensemble de k vecteurs distincts de dimension p, avec $k > p$ est L.D.

Soit un ensemble de k vecteurs $V_1, V_2, \ldots, V_k$ de dimension p.

Méthode

Pour vérifier si cet ensemble est L.D on construit une matrice A ayant comme colonne les vecteurs $V_1, V_2, \ldots, V_k$.
On lui applique l'algorithme de Gauss.
Si la matrice obtenue a moins de k lignes non nulles alors l'ensemble est L.D.

Exemple

Soient

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On construit la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

On applique l'algorithme de Gauss.

Théorème

Soit $A \in M_{pp}(\mathbb{R})$ une matrice . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible

(ii) $rang(A) = p$

(iii) Les colonnes de A forment un ensemble de vecteurs L.I.