

# Mathématiques Discrètes

## Exercices du chapitre 3

- 1) Soient les ensembles  $E = \{a, b, c, d\}$  et  $F = \{x, y, z, t, v\}$  et les applications  $f_i: E \rightarrow F$ ,  $i = 1, 2, 3$  définies par le tableau ci-dessous :

	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$a$	$x$	$v$	$z$
$b$	$z$	$x$	$x$
$c$	$y$	$y$	$t$
$d$	$x$	$z$	$v$

- a) Dire quelles applications sont injectives, surjectives ou bijectives ;  
 b) Si on pose  $A = \{a, b, c\} \subset E$  et  $B = \{x, y, z\} \subset F$ , calculer  $f_i(A)$  et  $f_i^{-1}(B)$  ;

- 2) Soit la fonction *double*

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto 2n$$

$$\text{et } A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- a) calculer  $f(A), f(f(A)), f^{-1}(A), f(f^{-1}(A)), f^{-1}(f(A)), f(\mathbb{N}), f^{-1}(\mathbb{N})$ .  
 b) la fonction  $f$  est-elle injective, surjective ?
- 3) Soit  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  ; calculer  $f(x^2), f(x-1), f(1/x), f(x+1/x), f(f(x))$ .
- 4) Soit  $f(x) = 3 - x^2$  ; étudier la fonction  $f$  et dire pourquoi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  n'est ni injective, ni surjective. Donner deux sous ensembles  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}$  tels que  $f: A \rightarrow B$  soit bijective.
- 5) Soit  $f(x) = \frac{2x+4}{3x-3}$  ; donner deux sous ensembles  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}$  tels que  $f: A \rightarrow B$  soit bijective. Donner alors sa réciproque.
- 6) Soit l'ensemble  $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  et l'on considère la fonction  $f$  définie sur le produit cartésien  $E \times E$  par

$$f: E \times E \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

- a) Donnez les ensembles  $f(E \times E)$ ,  $f(\{2\} \times E)$  et  $f^{-1}(\{0\})$ .  
 b) Dites, en justifiant vos réponses si  $f$  est injective et/ou surjective.
- 7) Parmi les relations suivantes, lesquelles sont des relations d'équivalence ?
- a) Sur  $\mathbb{N}$ ,  $xRy$  si  $|x - y|$  est impair ;  
 b) Sur l'ensemble des cercles du plan,  $cRc'$  si  $c$  et  $c'$  sont concentriques ;  
 c) Sur l'ensemble des cercles du plan,  $cRc'$  si  $c$  et  $c'$  sont sécants ;  
 d) Sur l'ensemble des mots français,  $M R M'$  si  $M$  et  $M'$  sont des anagrammes.

## Mathématiques Discrètes

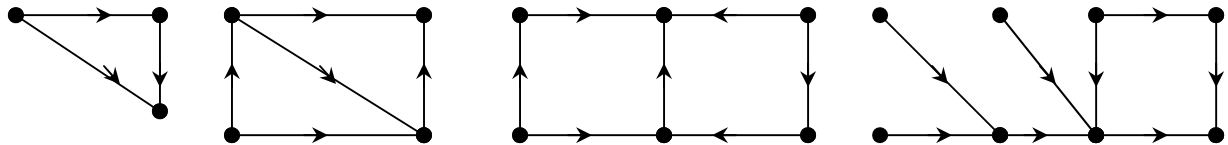
8) Soit la relation  $R$  sur l'ensemble  $E = \{a, b, c, d\}$  donnée par le tableau suivant :

<b>R</b>	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>
<b>a</b>	X		X	
<b>b</b>		X	X	
<b>c</b>			X	
<b>d</b>			X	X

Dites en justifiant vos réponses si cette relation est :

- une application de  $E$  dans  $E$  ;
- une relation d'équivalence sur  $E$  ;
- une relation d'ordre sur  $E$  ;

9) On considère les diagrammes de Hasse suivant :



- Quelles sont les flèches inutiles ?
- Donnez la représentation cartésienne de ces relations d'ordre. Est-ce un ordre total, partiel ? Justifiez vos réponses.
- Quels sont les éléments maximaux, minimaux, plus petit élément, plus grand élément ?

10) Les représentations cartésiennes suivantes sont-elles des relations d'ordre ? Si oui, dessiner le diagramme de Hasse. L'ordre est-il total ou partiel ? Donner les éléments minimaux, maximaux, plus grand élément et plus petit élément

<b>R</b>	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>	<b>f</b>
<b>a</b>	X					
<b>b</b>	X	X		X	X	
<b>c</b>	X		X	X	X	X
<b>d</b>				X		
<b>e</b>	X			X	X	X
<b>f</b>		X				X

<b>R</b>	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>	<b>f</b>
<b>a</b>	X		X			
<b>b</b>		X	X		X	X
<b>c</b>			X			
<b>d</b>	X	X	X	X	X	X
<b>e</b>			X		X	
<b>f</b>			X			X