ALGEBRE LINEAIRE

T.D. n°2

1. Appliquer l'algorithme de Gauss à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Calculer l'inverse des matrices suivantes : $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ est singulière.

4. A quelle condition l'inverse d'une matrice diagonale de $M_{n\times n}(R)$ existe-t-elle ? Quelle est alors cette matrice inverse ?

5. Vérifier que l'inverse de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(R)$ où a, b, c, d sont des réels quelconques vérifiant ad-bc $\neq 0$ est $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

6. Démontrer que pour toute matrice inversible A on a: $(A^{-1})^T A^T = I$, et $A^T (A^{-1})^T = I$. Quelle est donc l'inverse de A^T ? Que peut-on dire de l'inverse d'une matrice symétrique ? Vérifier ce résultat sur la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Soient $X, A \in M_{p\times p}(R)$, avec X singulière et A inversible. Démontrer que les matrices XA et AX sont singulières. (Faire un raisonnement par l'absurde).

8. Comment s'écrit l'inverse du produit ABC où A, B, C sont trois matrices carrées inversibles?

9. Soit $U \in M_{p\times 1}(R)$. Démontrer que UU^T est une matrice de $M_{p\times p}(R)$ et qu'elle est singulière.

Noëlle Stolfi
I.U.T. de Nice Côte d'Azur, Département Informatique.