# ALGEBRE LINEAIRE

## T.D. n°1

1. Pour chacun des cas suivants, calculer les matrices A+B ; Ax ; Bx ; 3A :

- $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$
- $A=(i+j)_{1\le i\le 3,1\le j\le 3}\in M_{3\times 3}(R), B=\left((-1)^{i+j}\right)_{1\le i\le 3,1\le j\le 3}\in M_{3\times 3}(R), x=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$

2. Soient $A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 3 & 0 & -1 & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$. Calculer les produits AB, AD, BC, CB, et CD. Peut-on faire d'autres produits entre ces matrices ? Si oui, faire les calculs. Calculer aussi A(BC) et (AB)C. Quelles sont les transposées des matrices A, B et C ?

3. Calculer $A^3-2A^2+A$ avec $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

4. Quelles dimensions doivent avoir deux matrices A et B pour que les deux produits AB et BA puissent exister ?

5. Calculer $A, A^2, A^3, A^4$ avec $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Même question pour $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Que remarque-t-on ?

6. Trouver les matrices A et B de $M_{2\times 2}(R)$ telles que : $\begin{cases}2A-B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\\ A+B=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 2 & -5\end{pmatrix}\end{cases}$.

7. Soient $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Calculer AB, AC. Que peut-on dire de l'implication $AB=AC\Rightarrow B=C$ dans l'ensemble des matrices ?

8. Trouver toutes les matrices de $M_{2\times 2}(R)$ commutant avec la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

**Noëlle Stolfi**
**I.U.T. de Nice Côte d'azur, Département Informatique, DUT 1ère année.**

9. Soient A une matrice carrée. Démontrer que $A + A^T$ est une matrice symétrique. Démontrer aussi que $A^TA$ et $AA^T$ sont des matrices symétriques.

10. Démontrer que toute matrice carrée peut s'écrire sous la forme A = S + T où S est symétrique et T antisymétrique. Vérifier ce résultat avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

11. Soient A et B 2 matrices carrées symétriques. Démontrer que :
$AB$ symétrique $\Leftrightarrow$ $AB = BA$.

12. Vérifier que les matrices suivantes sont orthogonales : $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

13. Démontrer que le produit de 2 matrices orthogonales de la même dimension est une matrice orthogonale.