M222, Séance de TD 2 – Analyse et méthodes numériques

Exercice 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes

1. $f_1(x) = \frac{\cos(x)}{x}$.
2. $f_2(x) = x\ln(x)$.
3. $f_3(x) = x\sin(1/x)$.
4. $f_4(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Exercice 2

1. Montrer que la fonction $f(x) = x\sin(1/x)$ est prolongeable par continuité en $x = 0$.
2. La fonction ainsi obtenue est-elle dérivable en $x = 0$? Justifier votre réponse.

Exercice 3

1. Montrer que la fonction $f(x) = x^2\sin(1/x)$ est prolongeable par continuité en $x = 0$.
2. Montrer que la fonction ainsi obtenue est dérivable. Est-elle $\mathcal{C}^1$.

Exercice 4

Déterminer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre deux des fonctions

1. $g_1(x) = (1+2x)^{-1}$.
2. $g_2(x) = x\ln(1+x^2)$.
3. $g_3(x) = (1+x)\sin(x)$.
4. $g_4(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Exercice 5

Calculer les limites (finies ou infinies, si elles existent) suivantes

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(x)^2}$.

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(|x|)}{\cos(x)-1}$.
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\ln(1+x)^2}$.

Exercice 6

Déterminer le minimum de

1. $$F_1(x) = x^2 + 3x - 4,$$

   sur $\mathbb{R}$.
2. $$F_2(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}$$

   sur l'intervalle $[-2, 3]$.

Exercice 7

Soit $n \geq 2$ un entier et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1+x)^n}.$$

1. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^+$. Quel est-il ?
3. En déduire que pour tout $x \geq 0$,

   $$(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n).$$

4. Montrer que pour tout $x, y \geq 0$,

   $$(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

Exercice 8

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme $P(x) = x^n + ax + b$ admet au plus trois racines réelles.

Exercice 9

Soit x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que

   $$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y.$$

2. On introduit la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par

$$f(t) = \ln(tx + (1-t)y) - t\ln(x) - (1-t)\ln(y).$$

De l'étude de f déduire que pour tout $t \in (-1, 1)$,

$$t\ln x + (1-t)\ln y < \ln(tx + (1-t)y).$$

3. *(subsidiaire)* Donner une interprétation géométrique de la dernière inégalité.