

M222, Exemple de DS

Les documents ainsi que les appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Simplifier (si cela est possible) les expressions suivantes (f désigne une fonction). Les petits "o" doivent être entendus au voisinage de 0.

1. $o(x^2) + o(x)$
2. $o(x^2)/x$
3. $o(f)/o(f)$
4. $2o(f)$

Exercice 2

Calculer les dérivées premières des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition (à préciser)

1. $\sin(\sin(x))$
2. $\ln(x)/x$
3. $x \cos(x)$
4. $(x+1)/(x^2+2)$

Exercice 3

Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes

1. $\cos(x)$
2. e^{1+x}
3. $\ln(1-x)$
4. $(1+2x)^2$
5. $(1+x)^{10}$
6. $\frac{\sin(x)}{x}$

Exercice 4

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeable par continuité en 0 ?

1. $\cos(1/x)$
2. $x \cos(1/x)$

3. $x \sin(\ln(|x|))$
4. $\frac{\cos(x)-1}{x}$

Exercice 5

Les suites suivantes sont-elles : convergentes vers une limite finie, divergentes vers $+\infty$ (ou $-\infty$), divergente. Si elle sont convergentes, déterminer leur limite.

1. $u_n = (-1)^n$
2. $u_n = (-1)^n/n$
3. $u_n = (-1)^n n$
4. $u_n = n \sin(1/n)$
5. $u_n = \frac{n^2+n^7-n^3}{n^4(n^3+1)}$
6. $u_n = \frac{n^5+1}{n^2+n+1}$

Exercice 6

Déterminer la nature (convergente, absolument convergente, divergente) des séries de termes généraux

1.

$$u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n^3 + 2n + 1}$$

2.

$$u_n = \ln \left(\frac{n^3 + 5n^6 + 1}{(n^3 + 1)(n^4 - 1)} \right)$$

3.

$$u_n = \cos(1/n) - 1.$$

4.

$$u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 7

On souhaite calculer une approximation de $\pi/2$ basée sur la formule

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!^2}{(2k+1)!}$$

Ecrire en **Python** une fonction **Sumpi** qui prend en argument un entier n et renvoie la somme partielle à l'ordre n de la série précédente.