M121 : Mathématiques Discrètes

TD1 : Logique Intuitive

2015-2016

1. Prouver, à l'aide d'une table de vérité, les lois de Morgan :
   a) non(P ou Q) $\sim$ non(P) et non(Q)
   b) non(P et Q) $\sim$ non(P) ou non(Q)

   Appliquer ces règles en écrivant la négation des assertions suivantes :
   a) n est pair et strictement supérieur à 10
   b) Pierre et Paul vont à l'école
   c) $x = 2$ et $x^2 \neq 4$
2. Écrire la table de vérité des propositions suivantes :
   a) (P ou ($P \Rightarrow Q$))
   b) (P et non(Q)) $\Rightarrow$ (non(P) et (Q))
   c) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$
3. Paul a deux grands amis Jean et Claude : chaque fois qu'il va à une fête ses deux amis y vont aussi. Étant donnée la phrase précédente, laquelle (lesquelles) parmi les affirmations suivantes est forcément vraie ?
   a) Hier Claude est allé à une fête, donc sûrement Paul y était aussi.
   b) Paul est allé hier à une fête, donc sûrement il y avait aussi Jean et Claude.
   c) Jean et Claude étaient hier à une fête donc il y avait aussi Paul.
   d) Hier il y avait une fête à laquelle Paul n'est pas allé, donc ni Jean ni Claude n'y étaient pas.
   e) Hier il y avait une fête à laquelle Claude n'est pas allé, donc Paul n'y était pas.
4. À l'aide de tables de vérité :
   a) prouver l'équivalence entre une implication et sa contraposée
   b) dire dans quel cas une implication et sa réciproque ont la même valeur de vérité
5. Pour chacune des implications suivantes écrire sa négation, sa contraposée et sa réciproque :
   a) « S'il pleut alors je prends le parapluie »
   b) « Je chante toujours sous la douche »

c) « Si Pierre prend le bus alors il arrive à l'heure »

d) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

e) $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

6. Pour pouvoir être sélectionné dans l'équipe de foot de l'Université il est *nécessaire*, mais pas *suffisant*, de savoir bien jouer au foot et avoir moins de 26 ans. Laquelle parmi les situations suivantes est *incompatible* avec cette règle ?
   a) Julien joue bien au foot, a moins de 26 ans et n'a pas été pris.
   b) Julien joue bien au foot, a moins de 26 ans et a été sélectionné.
   c) Julien ne sait pas bien jouer au foot, a moins de 26 ans et n'a pas été sélectionné.
   d) Julien ne sait pas bien jouer au foot, a moins de 26 ans et a été sélectionné.
   e) Julien joue bien au foot, a plus de 26 ans et n'a pas été sélectionné.
7. On considère le prédicat $P(x, y) = x \geq y$ avec $x \in E = \{4, 7, 9\}$ et $y \in F = \{2, 4, 8\}$
   a) Pour chacune des 9 façons d'*instancier* les variables libres, dire si la proposition obtenue est vraie ou fausse ;
   b) Pour chacune des 8 façons de *quantifier* les variables libres, dire si la proposition obtenue est vraie ou fausse.
8. Sarah affirme que tous les étudiants de Médecine ont fait le bac S. Laquelle, parmi les conditions suivantes, doit *nécessairement* se vérifier afin que l'affirmation de Sarah soit fausse ?
   a) Il doit exister au moins un étudiant de Médecine avec un bac STI.
   b) Aucun étudiant de Médecine doit avoir passé un bac S.
   c) Il doit exister au moins un étudiant de Médecine qui n'a pas passé un bac S.
   d) Il doit exister au moins un étudiant qui a passé un bac S mais n'est pas inscrit en Médecine.
   e) Tous les étudiants qui ne sont pas inscrits en Médecine doivent avoir passé un bac S.
9. Écrire la négation des assertions suivantes et dire si elles sont vraies ou fausses :
   a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
   b) $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ n > m$
   c) $\forall m \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n > m$
   d) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ ((x \geq 1) \text{ et } (y \geq 0)) \Rightarrow (xy < 1)$
10. Écrire la *négation* des assertions suivantes :
    a) Tous les hommes sont mortels
    b) Je vais toujours à l'école
    c) Il n'y a personne à la maison
    d) J'ai toujours raison
    e) Je n'ai jamais tort
11. Prouver l'affirmation suivante par un raisonnement au *cas par cas* :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - 2| < x^2 - 2x + 3$$

12. Prouver, en utilisant un raisonnement *par contraposée*, l'affirmation suivante :

    Soient x et y deux nombres réels ; si x et y sont différents, alors les nombres $(x+1)(y-1)$ et $(x-1)(y+1)$ le sont aussi.

13. Montrer par un raisonnement *par l'absurde* que si n est un entier positif alors n^2+1 n'est pas le carré d'un entier naturel.

14. Montrer par un raisonnement *par récurrence* que l'on a :

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}$$