

M121 : Mathématiques discrètes

TD6 : Arithmétique

2015-2016

1. Ecrivez la décomposition en facteurs premiers des nombres 132, 133, 134, 135, 136, 137 et 138. Déduisez-en le pgcd de 132 et 138, ainsi que leur ppcm. Les nombres 132 et 133 sont-ils premiers entre eux ?
2. Combien de division faut-il faire dans le pire des cas avant de savoir si 361 est premier ? Est-il premier ?
3. Indicatrice d'Euler : l'indicatrice Φ d'Euler est une fonction qui à tout entier n associe le nombre d'entiers positifs inférieurs à n et premiers avec n . Par exemple ? $\Phi(10) = 4$ car les nombres 1, 3, 7, 9 sont premiers avec 10. Calculer $\Phi(20)$, $\Phi(21)$, $\Phi(22)$, $\Phi(23)$, $\Phi(24)$ puis $\Phi(200)$.
4. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd des nombres 105 et 84, ainsi que du 12-ème et du 11-ème nombre de Fibonacci. Que remarque-t-on dans ce cas ?
5. Écrire l'identité de Bezout pour $a = 100$ et $b = 148$. Déduisez-en toutes les solutions des équations diophantiennes :

$$100x + 148y = 10$$

$$100x + 148y = 12$$

6. Résoudre l'équation diophantienne :

$$144x + 60y = 24$$

7. Dire quelles congruences parmi les suivantes sont vraies et lesquelles sont fausses :
 - a) $10 \equiv 14 \pmod{15}$
 - b) $33 \equiv 3 \pmod{7}$
 - c) $105 \equiv 0 \pmod{5}$
 - d) $107 \equiv 152 \pmod{15}$
 - e) $413 \equiv 1 \pmod{5}$
8. Prouver les congruences suivantes :
 - a) $2^{4k+2} \equiv 4 \pmod{5} \forall k \geq 0$;
 - b) $24^6 \equiv 1 \pmod{13}$

9. Dire si les congruences suivantes ont une solution :
- a) $10x \equiv 14 \pmod{15}$
 - b) $10x \equiv 14 \pmod{18}$
 - c) $10x \equiv 14 \pmod{21}$
10. Résoudre les équations aux congruences suivantes :
- a) $2x \equiv 3 \pmod{8}$
 - b) $2x \equiv 4 \pmod{8}$
 - c) $2x \equiv 4 \pmod{9}$
 - d) $3x \equiv 6 \pmod{11}$
 - e) $3x \equiv 7 \pmod{8}$
 - f) $12x \equiv 7 \pmod{21}$
 - g) $12x \equiv 7 \pmod{73}$
11. Écrire les tables d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et comparer avec les tables de l'algèbre de Boole \mathbb{B}^2 . Quelles sont les différences ?
12. Écrire les tables d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$.
13. Résoudre dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ les équations
- a) $x^2 = 2$
 - b) $x^2 = -2$
14. Donnez tous les éléments de $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$ ainsi que sa table de multiplication.