Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

# Supersymétrie à Quatre Dimensions

**AHL LAAMARA Rachid**

Faculté des Sciences
Université Mohamed V, Rabat

**Master Physique Mathématique**

# Sommaire

1 **Introduction**

2 **Symétries Bosoniques en TQC**

- *Symétrie de Poincaré*
- *Groupe* $SL(2,\mathbf{C})$
- *Groupes de Symétrie Internes*

3 **Algèbre supersymmétrique et ses représentations**

- *Algèbre Supersymétrique à 1+3 dimensions*
- *Représentations Irréductibles & Unitaires de* $S\mathcal{P}_4^N$
- *Représentations non Massives de* $S\mathcal{P}_4^N$

- La supersymétrie est une nouvelle symétrie échangeant entre les bosons et fermions.
- Se situe dans la théorie des super-algèbres de Lie.
- Outre les générateurs de Poincaré $P_\mu$ and $M_{\mu\nu}$ obéissant des relations de commutations, la supersymétrie fait intervenir des charges fermioniques $Q_\alpha$ satisfaisant à des relations d'anticommutations.
- La supersymétrie prévoie des bosons et des fermions de meme masses (ayant pas de support expérimentale à $(1+3)$ dimensions) ; c'est pas une symétrie exacte de la nature, elle doit etre brisée aux faibles énérgies.

**But du cours :** Résoudre les relations de l'algèbre supersymétrique et construire des modèles de théories des champs supersymétriques

Symétries bosoniques en physique (Groupes de Lie)

| Symétries géometriques $G_{geo}$ | Symétries internes $G_{in}$ |
|---|---|
| ↓ | ↓ |
| Changement de repères | Changement des phases des champs de matières |
| ↓ | ↓ |
| Groupes de relativité | Symétries de Jauge |
| ↓ | ↓ |
| ex. Groupe de Poincaré | ex. Groupe de Maxwell $U(1)$ |

Avant l'avénement de la supersymétrie :

**Le groupe de symétrie physique G le plus général (TQC) :**

$$G = G_{geo} \times G_{int}$$

## Symétrie de Poincaré

- Le groupe de symétrie de la mécanique relativiste (effets gravitationnels ignorés) dans l'espace-temps de Minkowski à 4 dimensions $x^\mu = (x^0 = ct, x^i)$.
- Sous groupe des transformations supersymétrique.
- Transformations linéaires des coordonnées $\{x\}$ d'espace-temps.

**Groupe de Poincaré $\mathcal{P}_4$**

Translations $T \in T_4$

paramètres continues $a^\mu$ indépendentes de $x$

$$a^\mu = \left(a^0, a^1, a^2, a^3\right); \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\nu} = 0,$$

Rotations $R \in O(1,3) = Z_2 \times SO(1,3)$

Six paramètres (3 nombres réels et 3 angles) $\theta_1$, ..., $\theta_6$ pour les six plans de $\mathbf{R}^{1,3}$

Matrice $4 \times 4$ antisymétrique

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ -\theta_1 & 0 & \theta_4 & \theta_5 \\ -\theta_2 & -\theta_4 & 0 & \theta_6 \\ -\theta_3 & -\theta_5 & -\theta_6 & 0 \end{pmatrix}$$

- Le groupe de Poncaré $\mathcal{P}_4$ a un total de $4 + 6 = 10$ paramètres continues.

## Translations spatio-temporelles : $T_4$

- Eléments $T : x^\mu \longrightarrow x^\mu + a^\mu$ ou $a^\mu$ est une constante et $T = \exp(iaP)$
- $P_\mu$ = générateurs des quatres translations sur l'epace des fonctions $F(x)$

$$P_\mu = -i\partial_\mu$$

- Générateurs hermitiques (observables physiques) : $P_\mu^\dagger = P_\mu$
- Commutent entre eux $[P_\mu, P_\nu] = 0$

## Rotations spatio-temporelles $SO(1,3)$

- Eléments $R : x^\mu \longrightarrow \Lambda^\mu_\nu . x^\nu$ où $\Lambda^\mu_\nu$ est une martice $4 \times 4$ orthogonale à six parametres constants $\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_{.\rho}\Lambda^\nu_{.\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$, $\det \Lambda = 1$
- $R = \exp i\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$ où $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\mu\nu}$ sont les six paramètres du groupe
- $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ : les generateurs hermitiques usuelles du groupe de Lorentz des rotations dans les six plans $(x^\mu, x^\nu)$ de $\mathbf{R}^{1,3}$ vérifiant :

$$M_{\mu\nu} = (x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu) = -i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu).$$

## Algèbre de Poincaré

- Vérifiée par les générateurs $P_\mu = -i\partial_\mu$ et $M_{\mu\nu} = (x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu)$ :

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0. \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i(\eta_{\nu\rho} P_\mu - \eta_{\mu\rho} P_\nu) \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i(\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma}) + (\rho \longleftrightarrow \sigma) \end{aligned} \tag{1}$$

- $P_\mu$ se transforme comme un vecteur lors d'une transformation $Lambda$ de Lorentz, $P^\mu \to P'^\mu = \Lambda^\mu_\nu . P^\nu = (\exp i\omega_{\rho\sigma} M^{\rho\sigma} \cdot P \cdot \exp -i\omega_{\rho\sigma} M^{\rho\sigma})^\mu$
- Les translations et les rotations ne commutent pas entre elles $\to$ le groupe de Poincaré est un produit semi-directe des translations et des rotations ; $\mathcal{P}_4 = T_4 \times SO(1,3)$
- La masse au repos $m_0$, ( $\left[P^2, M_{\mu\nu}\right] = 0$ )
- Les representations irréductibles du groupe $\mathcal{P}_4$ sont caractérisées par les spins $s$ demi-entiers de $SO(1,3)$ $\to$ d'où l'utilité de l'étude de $SO(1,3)$ et $SL(2,\mathbf{C})$.

- Groupe de Lie de matrices $M$

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \det M &= ad-bc=1, MM^{\dagger}\neq I \end{aligned}$$

- Trois paramètres complexes = six réels ; comme le groupe de Lorentz $SO(1,3)$ $\rightarrow$ Homomorphisme $SO(1,3)\sim SL(2,\mathbf{C})$
- Correspondences entre les présentations :

| Représentations de $SO(1,3)$ | Représentations de $SL(2,\mathbf{C})$ |
|---|---|
| Scalaire $\phi(x)$ : $\mathbf{0}$ | $(0,0)=\left(\left[\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\right]_a,0\right)=\ldots$ |
| Spineur de Weyl non pointé $\psi_a(x)$ : $\mathbf{2}$ | $\left(\frac{1}{2},0\right)$ |
| Spineur de Weyl non pointé $\overline{\chi}_{\dot{a}}(x)$ : $\mathbf{2}^*$ | $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ |
| Vecteur $A_\mu(x)=\sigma_\mu^{a\dot{a}}A_{a\dot{a}}(x)$ : $\mathbf{4}_v$ | $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes\left(0,\frac{1}{2}\right)$ |
| Spineur de Dirac $\Psi_\alpha^{(D)}(x)$ : $\mathbf{4}_D=\mathbf{2}\oplus\mathbf{2}^*$ | $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\left(0,\frac{1}{2}\right)$ |
| Spineur de Majorana $\Psi_\alpha^{(M)}(x)$ : $\mathbf{4}_M=\mathbf{2}\oplus\overline{\mathbf{2}}$ | $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\overline{\left(\frac{1}{2},0\right)}$ |
| Tenseur symetrique de Weyl $f_{ab}(x)$ : $\mathbf{3}$ | $(1,0)=\left(\left[\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\right]_s,0\right)$ |
| Tenseur symetrique de Weyl $f_{\dot{a}\dot{b}}(x)$ : $\mathbf{3}^*$ | $(0,1)=\left(0,\left[\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\right]_s\right)$ |
| Tenseur antisymétrique de $SO(1,3)$ $F_{\mu\nu}(x)$ : $\mathbf{6}=\mathbf{3}\oplus\mathbf{3}^*$ | $(1,1)=(1,0)\oplus(0,1)$ |

- En plus de l'invariance relativiste qui est une symétrie géométrique, les modèles de TQC admettent des symétries internes, elles touchent les champs de matière décrivant les differentes types de particules en jeu et leurs intéractions.
- De point de vue mathématique, les symétries ont une structure de groupe algébrique $G$ : tout élément $g$ a un inverse $g^{-1}$ et il existe un élément neutre $e \equiv I_{id}$.

**Groupes discrets**

- Nombre d'élément $N$ discret ( en pratique fini)
- $G = \{g_1 \equiv e, g_2, ..., g_N\}$
  $=\{g_i; \quad i \in \mathbf{J} = \{1, ..., N\}\}$.
- Ex. Groupe cyclique $G = Z_N$

  $Z_N = \left\{g_i = \omega^i; \quad i \in \mathbf{J} = \{1, ..., N\}\right\}$

**Groupes continus**

- Une infinité continue d'éléments $g$
- Paramètres de groupe continues $\alpha_1, ..., \alpha_d$
- Souvent des groupes de lie ; Ex. Symétries de translations, rotations... etc
- $g = \exp i(\alpha_1 T_1 + ... + \alpha_d T_d)$
  $\equiv \exp i\left(\sum_{n=1}^{d} \alpha_n T_n\right)$
- $\{T_n\}$ : générateurs de l'algèbre de Lie g associée au groupe $\mathbf{G}$
  $[T_i, T_j] = C_{ij}^k T_k$ ; $C_{ij}^k$ des constantes de structures.

## Groupe de Lie globale

- $\partial_\mu \alpha_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_n =$ cstes spatio-temporelles

## Groupe de Lie local

- $\partial_\mu \alpha_n \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_n = \alpha_n(x)$

## Groupe de Lie compactes

- Paramètres $\alpha_j$ reels, $\alpha_j \in [0, 2\pi]$ générateurs $T_n$ hermitians $T_n^\dagger = T_n$
- Ex. $U(N)$ et orthogonaux $SO(N)$
- Eléments du groupe $g = \exp i\alpha$, $\alpha = \alpha_n(x)\, T_n$ agissent sur les champs de matière $\Phi$ et les champs de jauge $A_\mu(x)$ comme

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= g\Phi(x)\, g^{-1} \\ A'_\mu(x) &= gA_\mu(x)\, g^{-1} - g\partial_\mu g^{-1}. \end{aligned}$$

- Présérvent le spin des champ ; un boson est échangé en boson et un fermion en fermion.

## Groupes non compactes

- Certains paramètres $\alpha_j$ du groupe n'appartienent plus à des intervalles fermés bornés.
- Ex. Groupe $SO(1,3)$ : paramètres des rotations dans les plans $\left(x^i, x^j\right)$ sont des nombres réeels quelconque.
- Le volume de l'espace des paramètres $\omega_{0i}$ est donc infini :

$$\int_{R^3} d\omega_{01}\, d\omega_{02}\, d\omega_{03} = \infty,$$

## Théorème de Coleman-Mandula

> Le groupe $G$ des symétries les plus générales de la matrice $\mathbf{S}$ des Théories Quantiques des Champs est
>
> $$G = \mathcal{P}_4 \otimes G_{interne}$$

- Les relations de commutations entre les générateurs du groupe $G$ :

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0. \\
[M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i(\eta_{\nu\rho} P_\mu - \eta_{\nu\rho} P_\mu) \\
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i(\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma}) + (\rho \longleftrightarrow \sigma), \\
[P_\mu, B_l] &= 0, \qquad [M_{\mu\nu}, B_l] = 0, \\
[B_l, B_m] &= i C_{lm}^k B_k.
\end{aligned}$$

- Les générateurs $B_l$ de $G_{interne}$, satisfont les relations de commutations usuelles $[B_l, B_m] = i C_{lm}^k B_k$, et commutent avec les générateurs de $SO(1,3)$
- $\rightarrow$ $B_l$ sont des scalaires de Lorentz, ne peuvent pas avoir des indices de Weyl et de Lorentz.

- Supersymétrie ou algèbre de Lie graduée $Z_2$ = Structure algèbrique qui fait intervenir à la foix des opérateurs bosoniques avec une statistique commutatnte et des opérateurs fermioniques avec une statistique anticommutante.

**Opérateurs bosoniques $B_I$**

- Soit les générateurs de $\mathcal{P}_4$, soit de $G_{int}$.
- Aucune phase exp $i\varphi$ n'est générée quand on transpose une paire $B_I B_J$ en $B_J B_I$ :

$$B_I B_J = B_J B_I + C_{IJ}^K \; B_K,$$

- En TQC, avec des courants de charge conservés $J_I^\mu$, $\partial_\mu J_I^\mu(x) = 0$, les $B_I$ sont les charges conservées associées :

$$B_I = \int d^3x \; J_I^\mu(x)$$

**Opéraeurs fermioniques $F_\alpha$**

- Spieurs de Majorana satisfaisant des relations d'anticommutations
- Générant une phase exp $\pm i\pi$ lors des transpositions

$$F_\alpha F_\beta = -F_\beta F_\alpha + C_{\alpha\beta}^K B_K;$$

- Aucune phase entre les $F_\alpha$ et $B_I$ :

$$B_I F_\alpha = F_\alpha B_I + C_{I\alpha}^\beta \; F_\beta.$$

- Interprétés comme des charges physiques associées à des courants conservés fermioniques $J_\alpha^\mu(x)$ en théories supersymétriques.

$$F_\alpha = \int d^3x \; J_\alpha^\mu(x)$$

## Théorème LHS

(1) Parmi toutes les algèbres de Lie $Z_2$ graduées engendrées par $\left\{P_\mu, M_{\mu\nu}, Q_a^i, \overline{Q}_{\dot{a}j}, B_l\right\}$, seule l'algèbre supersymétrique $S\mathcal{P}_4$ et ses extensions $S\mathcal{P}_4^N$, incluant des charges centrales $Z^{ij}$ et $\overline{Z}_{ij}$, génèrent des symétries de la matrice $S$ compatibles avec la TQC.

(2) La forme la plus générale de ces superalgèbres $S\mathcal{P}_4^N$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\left\{Q_a^i, \overline{Q}_{\dot{a}j}\right\} &= -2\sigma^\mu_{a\dot{a}} P_\mu \delta^i_j, \\
\left\{Q_a^i, Q_b^j\right\} &= \varepsilon_{ab} Z^{ij}; \qquad \left\{\overline{Q}_{\dot{a}i}, \overline{Q}_{\dot{b}j}\right\} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \overline{Z}_{ij}, \\
\left[Z^{ij}, S\mathcal{P}_4^N\right] &= 0; \qquad \left[\overline{Z}_{ij}, S\mathcal{P}_4^N\right] = 0 \\
\left[P_\mu, P_\nu\right] &= 0; \qquad \left[M_{\mu\nu}, P_\rho\right] = i\left(\eta_{\nu\rho} P_\mu - \eta_{\nu\rho} P_\mu\right) \\
\left[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}\right] &= -i\left(\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma}\right) + \left(\rho \longleftrightarrow \sigma\right), \\
\left[M_{\mu\nu}, Q_a^i\right] &= -\sigma_a^{\mu\nu b} Q_b^i; \qquad \left[M_{\mu\nu}, \overline{Q}_{\dot{a}j}\right] = \overline{\sigma}^{\mu\nu\dot{b}}_{\dot{a}} \overline{Q}_{\dot{b}j}; \\
\left[B_l, B_m\right] &= i C^k_{lm} B_k; \qquad \left[P_\mu, B_l\right] = 0, \qquad \left[M_{\mu\nu}, B_l\right] = 0, \\
\left[B_l, Q_a^i\right] &= -\left(S_l\right)^i_j Q_a^j, \qquad \left[B_l, \overline{Q}_{\dot{a}i}\right] = \left(S_l^*\right)^j_i \overline{Q}_{\dot{a}j}.
\end{aligned}$$

Où $Z^{ij} = -Z^{ji} = \sum a_l^{ij} B_l$

- L'algèbre supersymétrique $S\mathcal{P}_4^N$ (Super Poincaré) fait intervenir quatre blocs :

### (1) Symétrie de Poincaré

Le groupe $\mathcal{P}_4$ est un sous groupe de $S\mathcal{P}_4^N$ où $N$ désigne le nombre de charges supersymétriques de Majorana à 1+3 dimensions :

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0. \\
[M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i(\eta_{\nu\rho}P_\mu - \eta_{\nu\rho}P_\mu) \\
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma}) + (\rho \longleftrightarrow \sigma).
\end{aligned}$$

### (2) L'algèbre de symétrie interne

Algèbre du groupe $G_{int}$ agissant comme un groupe d'automorphisme faisant tourner les N charges supersymétriques entre-elles :

$$\Big[[B_l, B_m] = iC_{lm}^k B_k\Big].$$

### (3) Théorème de Coleman Mandula

Les générateurs $B_l$ des symétries internes sont des scalaires de Lorentz :

$$[P_\mu, B_l] = 0, \qquad [M_{\mu\nu}, B_l] = 0, \tag{2}$$

C.à.d. il n'exite aucune connection entre les deux types de charges et donc aucun

## (4) Théorème LHS

**(a) Sous Bloc 41** Concerne la structure des générateurs supersymétriques (fermioniques) $Q_a^i, \overline{Q}_{\dot{a}j}$ :

$$\left[M_{\mu\nu}, Q_a^i\right] = -\sigma_a^{\mu\nu b} Q_b^i; \qquad \left[M_{\mu\nu}, \overline{Q}_{\dot{a}j}\right] = \overline{\sigma}_{\dot{a}}^{\mu\nu\dot{b}} \overline{Q}_{\dot{b}j};$$

Où $\sigma_a^{\mu\nu b}$ et $\overline{\sigma}_{\dot{a}}^{\mu\nu\dot{b}}$ sont respectivement les générateurs du groupe de Lorentz dans les représentations spinorielles $(1/2, 0)$ et $(0, 1/2)$.

**(b) Sous Bloc 42** Fait intervenir des anticommutateurs entre des charges fermioniques donnant des générateurs bosoniques.

$$\begin{aligned} \left\{Q_a^i, \overline{Q}_{\dot{a}j}\right\} &= -2\sigma^\mu_{a\dot{a}} P_\mu \delta^i_j, \\ \left\{Q_a^i, Q_b^j\right\} &= \varepsilon_{ab} Z^{ij}, \\ \left\{\overline{Q}_{\dot{a}i}, \overline{Q}_{\dot{b}j}\right\} &= \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \overline{Z}_{ij}. \end{aligned}$$

Les charges centrales $Z^{ij}$ et $\overline{Z}_{ij}$ vont jouer un role très important au niveau de l'étude des représentations supersymétriques et de leurs classifications.

### (4) Théorème LHS

**(c) Sous Bloc 43** Outre les indices spinoriels de $Sl(2,C) \sim SO(1,3)$, les générateurs supersymétriques $Q_a^i$ et $\overline{Q}_{\dot{a}j}$ portent également un indice $i$ qui prend les valeurs $i = 1, ..., N \rightarrow$ les générateurs supersymétriques se transforment dans des representation $S_l$ et $\left(-S_l^*\right)$ de l'algèbre de Lie $G_{in}$ engendrée par les $B_l$ :

$$\left[B_l, Q_a^i\right] = -\left(S_l\right)_j^i Q_a^j, \qquad \left[B_l, \overline{Q}_{\dot{a}i}\right] = \left(S_l^*\right)_i^j \overline{Q}_{\dot{a}j},$$

Ces relations sont très significatives car elles montrent clairement comment la supersymétrie connecte symétrie géométrique $\mathcal{P}_4$ et symétrie interne $G_{in}$.

$$\text{Symétrie Géométrique } \mathcal{P}_4 \quad \Longrightarrow \left[Q_a^i \text{ - } \overline{Q}_{\dot{a}j}\right] \quad \Longleftarrow \quad \text{Symétrie Interne}$$

- Les charges centrales $Z^{ij} = -Z^{ji}$ et $\overline{Z}_{ij} = -\overline{Z}_{ji}$ constituent un système de $N(N-1)/2$ opérateurs complexes, existent seulement pour $N \geq 2$.
- Les charges centrales $Z^{ij} = \sum_l a_l^{ij} B_l$ et $\overline{Z}_{ij} = \sum_l \overline{a}_{ij}^{l} B_l$ de l'algèbre supersymétrique : Des générateurs qui commutent avec tous les autres

$$\left[Z^{ij}, SP_4^N\right] = \left[\overline{Z}_{ij}, SP_4^N\right] = 0. \tag{3}$$

- $Z^{ij}$ et $\overline{Z}_{ij}$ peuvent être diagonalisée simultanement dans une base $\mathcal{B}_{propre}$ :
  - Décomposition de la représentation $\mathbf{N}$ du groupe $G_{int}$ comme $(2, [N/2])$ $\left(i \equiv \left(\tau, i'\right) \right.$ avec $\tau = 1, 2$ et $\left. i' = 1, ..., [N/2]\right)$
  - $Z^{ij}$ comme produit tensoriel de matrice $2 \times 2$ antisymetrique $\varepsilon$ et matrice symétrique $[N/2] \times [N/2]$ diagonalisable $S$

$$\begin{aligned} Q_a^i &= Q_a^{\tau i'}; \qquad \overline{Q}_{\dot{a}j} = \overline{Q}_{\dot{a}\sigma j'} \\ Z^{ij} &= Z^{\tau i' \sigma j'} \equiv \varepsilon^{\tau\sigma} S^{i'j'}, \end{aligned}$$

- On obtient dans la base $\mathcal{B}_{propre}$ :

$$\begin{aligned} \left\{\widetilde{Q}_a^{\tau i'}, \widetilde{\overline{Q}}_{\dot{a}\sigma j'}\right\} &= -2\sigma^{\mu}_{a\dot{a}} P_\mu \delta^{i'}_{j'} \delta^{\tau}_{\sigma}, \\ \left\{\widetilde{Q}_a^{\tau i'}, \widetilde{Q}_b^{\sigma j'}\right\} &= \varepsilon_{ab} \varepsilon^{\tau\sigma} Z_{i'} \delta^{i'j'}, \qquad \left\{\widetilde{\overline{Q}}_{\dot{a}\tau i'}, \widetilde{\overline{Q}}_{\dot{b}\sigma j'}\right\} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \varepsilon_{\tau\sigma} \overline{Z}_{i'} \delta_{i'j'}. \end{aligned}$$

## Etats à une particule

- Pour un état $|p>$ à une particule libre, $p = -m^2$, $P_\mu$ mesure l'énergie impulsion :

$$\begin{array}{rcl} P_\mu|p & > & = p_\mu|p>; \\ P^2 & = & -E^2 + \mathbf{P}^2 = -M^2 = -m^2 I \end{array} \quad (4)$$

- Dans le repère de repos :

$$|p> = |m; \mathbf{p} = \mathbf{0}>; P_\mu = (-M, \mathbf{0}) \quad (5)$$

- Ce repère facilite l'etude explicite des représentations supersymétriques irreductibles puisqu'on a :

$$-2\sigma^\mu_{a\dot{b}} P_\mu = \delta_{ab}. \quad (6)$$

- Le retour à un repère quelconque où $|p'> = |E'; \mathbf{p}' \neq \mathbf{0}>$ et $P'_\mu = (-\mathbf{E}', \mathbf{P}')$ se fait par les boost de Lorentz :

$$p'^\mu = \Lambda^\mu_0 \; E + \Lambda^\mu_i \; p^i = \Lambda^\mu_0 \; m. \quad (7)$$

- Startégie (Méthode de Wigner) : (1) Construire les représentations supersymétriques de l'algèbre dans le repère à repos $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, (2) Utiliser des transformations de Boost de Lorentz pour couvrir les représentations supersymétriques avec $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$.

- Pour construire les représentations, on se fixe d'abord dans un premier temps sur les anticommutateurs, ensuite on considère la superalgèbre totale.
- Les relations d'anticommutation des charges supersymétriques $Q_a^i$ et $\overline{Q}_{\dot{a}j}$ dépendent de $P_\mu = (-M, \mathbf{0})$ et de $Z^{ij}$ $\rightarrow$ Leurs solutions vont naturellement en dépendre
- On distingue trois cas particuliers :
  **(i)** $M \neq 0, Z = 0$ : Représentations supersymétriques (on va commencer par le traiter)
  **(ii)** $M \neq 0, Z \neq 0$ : Représentations avec charges centrales (à voir après)
  **(iii)** $M = 0, Z = 0$ : interdit car $|Z| \leq 2|M|$ (à voir après).
- **Cas (i) :** Tenant compte de l'identité $\overline{Q}_j^{\dot{a}} = \left(Q_a^j\right)^\dagger$ et au repère de repos, l'algèbre supersymétrique se réduit à une algèbre de Clifford à $(2N + 2N)$ dimensions.

$$\begin{aligned} \left\{Q_a^i, Q_b^{\dagger j}\right\} &= \delta^{ij}\delta_{ab}, \\ \left\{Q_a^i, Q_b^j\right\} &= 0, \qquad \left\{Q_a^{i\dagger}, Q_b^{j\dagger}\right\} = 0. \end{aligned}$$

- Il y'a alors $2N$ opérateurs $Q_b^{\dagger j}$ et $2N$ opérateurs $Q_a^i$ que nous intérpretons respectivement comme des opérateurs de création et d'annihilation de particules supersymétriques.

- Il y'a $N$ operateurs de Majorana $\rightarrow$ toutes leurs combinaisons linéaires unitaires peuvent etre vues comme générateurs supersymétriques.
- L'ensemble des matrices de passages entre ces différents bases forme le groupe d'automorphisme de $\mathcal{SP}_4^N$.
- Parmi les groupes de symétries faisant tourner les générateurs de Majorana entre eux, on distingue :

**Groupe $SO(4N)$**

Changement :

$$\begin{aligned}
\Gamma^l &= \frac{1}{\sqrt{4M}}\left[Q_1^i + \left(Q_1^i\right)^\dagger\right], \\
\Gamma^{N+l} &= \frac{1}{\sqrt{4M}}\left[Q_2^i + \left(Q_2^i\right)^\dagger\right], \\
\Gamma^{2N+l} &= \frac{i}{\sqrt{4M}}\left[Q_1^i - \left(Q_1^i\right)^\dagger\right], \\
\Gamma^{3N+l} &= \frac{i}{\sqrt{4M}}\left[Q_2^i - \left(Q_2^i\right)^\dagger\right].
\end{aligned}$$

C'est une algèbre de Clifford ayant un groupe d'invariance $SO(4N)$ :

$$SO(4N): \Gamma^r \rightarrow \Gamma'^r = O_s^r \Gamma^s, \qquad OO^T = I_{4N},$$

### Groupe $SU(2) \times U(N)$

$$
\begin{aligned}
Q_a^i &\to Q_a^{\prime i} = \left(U_a^b \otimes V_j^i\right) Q_b^j; \qquad UU^\dagger = I, \det U = 1, \\
Q_a^{i\dagger} &\to Q_a^{\prime i\dagger} = Q_b^{j\dagger} \left(U_a^{\dagger b} \otimes V_j^{\dagger i}\right); \qquad VV^\dagger = I, \det V = 1,
\end{aligned}
$$

Les eqs d'anticommutation restent invariantes.

### Groupe $SU(2) \times SP(N)$

Changement :

$$
q_a^l = \frac{1}{\sqrt{2M}} Q_a^l; \qquad q_a^{N+l} = \frac{1}{\sqrt{2M}} \varepsilon_{ab} \left(Q_b^i\right)^\dagger
$$

Les éqs d'anticommutation deviennent :

$$
\{q_a^r, q_b^s\} = -\varepsilon_{ab} \Omega^{rs},
$$

qui sont manifestement symplectiques.

## Etape 1 : Vide de Clifford

Etat fondamental $|C>$ noté par son spin $|j>$ caractérisé par :

$$Q_a^i|C>=0, \qquad P^2|C>=-M^2|C>; \qquad \mathbf{P}|C>=\mathbf{0}. \tag{8}$$

Décrit l'état à une particule libre de masse $m$ et d'impulsion $\mathbf{p}=\mathbf{0}$.

## Etape 2 : Etats de la Représentation : Etats Excités

Agir par des monomes de $Q_b^{\dagger j}$ sur $|C>$ pour obtenir les états excités au dessus de l'état fondamental $|C>$ :

$$|C^{(r)}>=\frac{1}{\sqrt{r!}}Q_{b_1}^{\dagger j_1}...Q_{b_r}^{\dagger j_r}|C>; \qquad r=1,...,r \tag{9}$$

Pour $r$ fixé, il y'a $C_{2N}^r=\frac{(2N)!}{r!(2N-r)!}$ monomes $Q_{b_1}^{\dagger j_1}...Q_{b_r}^{\dagger j_r}$.
Le nombre $d$ d'états indépendents $|C^{(r)}>$ possibles des représentations supersymétriques irréductibles et unitaires $\mathcal{R}$ pour un vide de Clifford $=$ la dimension de $\mathcal{R}$ :

$$\dim\mathcal{R}=2^{2N}\dim\mathcal{D}_C$$

Où $\mathcal{D}_C$ est le degré de dégénéréscence du vide.

### Etape 1 : Vide de Clifford

On part d'un état à une particule libre au repos, de masse $m$, de momment angulaire $j$ et de projection $j_z$

$$|p^2 = -m^2; \mathbf{p} = \mathbf{0}; \quad j,\ j_z >$$

L'état se transforme dans la representation $\mathcal{D}^j$ de $SO(3)$ de dimension $(2j+1)$
$\rightarrow$ Le vide de Clifford est formé par les états dégénérés de $\mathcal{D}^j$ :

$$|C >= \left\{ |m^2; \mathbf{p} = \mathbf{0}; \quad j,\ j_z > \right\}_{-j \leq j_z \leq j}$$

Le vide de Clifford Satisfait

$$\begin{aligned} P^2|C &> = -M^2|C >; \qquad \mathbf{P}|C >= \mathbf{0}|C >; \\ \mathbf{J}^2|C &> = j(j+1)|C >; \qquad J_z|C >= j_z|C > \\ Q^{i_r}_{a_r}|C &> = 0; \quad 1 \leq r \leq 2N. \end{aligned}$$

**Etape 2 : Etats $\left\{|C^{(n)}>\right\}_{0\leq n\leq 2N}$**

Action par tous les monomes possibles des opérateurs $Q^\dagger$ sur $|C> \rightarrow (2j+1)\, C_{2N}^n$ états

$$|C^{(n)}>= \frac{1}{\sqrt{n!}} Q_{a_1}^{i_1\,\dagger} Q_{a_2}^{i_2\,\dagger} \dots Q_{a_n}^{i_n\,\dagger} |C> .$$

Un système total $\left\{|C^{(n)}>\right\}_{0\leq n\leq 2N}$ de $(2j+1)\times 2^{2N}$ états engendrant les représentations irréductibles supersymétriques $\mathcal{R}$.

**Etape 3 : Etats $\{|C^n>\}_{0\leq n\leq 2N}$**

Passer de $P_\mu = (-M, \mathbf{0})$ à $P_\mu = (-E, \mathbf{p} \neq \mathbf{0})$ arbitraire par des boosts de Lorentz

Obtenir les états des représentations supersymétriques irréductibles et unitaires de $S\mathcal{P}_4^N$ de masse $m$ :

$$\left\{ \prod_{n=1}^{2N} Q_{a_n}^{i_n\,\dagger} \quad |\left(p^2 = -m^2; \mathbf{p}; \quad j,\ j_z\right)_{-j\leq j_z\leq j} > \right\}$$

Recouvrir les représentations supersymétriques irréductibles selon les valeurs de $j = 0, 1/2, 1, \dots$

On donne des résultats particuliers concernant les représentations supersymétriques irréductibles et unitaires :

**Multiplet Chiral massif N=1, D=4**

Cas simple où le moment angulaire $j = 0$ et $N = 1$, un seul générateur de Majorana $\left(Q_a, Q_a^\dagger\right) \equiv \left(Q_{\pm\frac{1}{2}}, Q^\dagger_{\pm\frac{1}{2}}\right) \to$ la représentation supersymétrique $\mathcal{R}$ :

$$\begin{aligned} \phi &= |0>; \\ \psi_{\pm\frac{1}{2}} &= Q^\dagger_{\pm\frac{1}{2}}|0>; \\ F &= \frac{1}{\sqrt{2}} Q^\dagger_{\frac{1}{2}} Q^\dagger_{-\frac{1}{2}}|0>, \end{aligned}$$

$\phi$ et $F$ des champs scalaires de Lorentz à $s = 0$
$\psi_a$ un fermion de Weyl à quatre dimensions avec $s = \frac{N}{2} = \frac{1}{2}$
Multiplet Chiral massif N=1, D=4 = Représentation scalaire =

$$\left(0^2, \frac{1}{2}\right)$$

## Multiplet Chiral massif N=1, D=4

Vide $|C>$ avec moment angulaire $j$ quelconque ($j = 0, 1/2, 1, ....$) $\rightarrow$ les $2^2 = 4$ états des multiplets

$$\begin{aligned} \phi_j &= |j>; \\ \psi_{j\pm\frac{1}{2}} &= Q^\dagger_{\pm\frac{1}{2}}|j>; \\ F_j &= Q^\dagger_{\frac{1}{2}} Q^\dagger_{-\frac{1}{2}}|j>. \end{aligned}$$

Représentation supersymétrique avec les états de spin $j$, $j-\frac{1}{2}$, $j+\frac{1}{2}$ notée par le multiplet

$$\left(j^2, j \pm \frac{1}{2}\right).$$

Pour $j = 0$ : on retrouve le multiplet scalaire.
Pour $j = \frac{1}{2}$ : multiplet vectoriel massif $N = 1$, $D = 4 =$

$$\left(0, \frac{1}{2}^2, 1\right)$$

Représentations contenant des scalaires avec $s=0$, spineurs de Weyl $s=1/2$, champs de Rarita Schwinger $s=3/2$, au max un graviton de $s=2$ ). Ici, $\Theta_j$ : Multiplets supersymétriques avec un état fondamental de spin $j$

## Multiplets massifs pour N=1,2,3,4.

*Représentations N=1,D=4*

| Spin $s$ des Etats de supermultiplet | $\Theta_0$ | $\Theta_{1/2}$ | $\Theta_1$ | $\Theta_{3/2}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 1 | | |
| 1/2 | 1 | 2 | 1 | |
| 1 | | 1 | 2 | 1 |
| 3/2 | | | 1 | 2 |
| 2 | | | | 1 |

*Représentations N=2, D=4*

| Spin S des Etats de supermultiplet | $\Theta_0$ | $\Theta_{1/2}$ | $\Theta_1$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 4 | 1 |
| 1/2 | 4 | 6 | 4 |
| 1 | 1 | 4 | 6 |
| 3/2 | | 1 | 4 |
| 2 | | | 1 |

### Multiplets massifs pour N=1,2,3,4.

- *Représentations N=3, D=4*

| Spin S des Etats de supermultiplet | $\Theta_0$ | $\Theta_{1/2}$ |
|---|---|---|
| 0 | 14 | 14 |
| 1/2 | 14 | 20 |
| 1 | 6 | 15 |
| 3/2 | 1 | 6 |
| 2 | | 1 |

- *Représentations N=4*

| Spin S des Etats de supermultiplet | $\Theta_0$ |
|---|---|
| 0 | 42 |
| 1/2 | 48 |
| 1 | 27 |
| 3/2 | 8 |
| 2 | 1 |

- Représentation $\mathcal{R}$ irréductible supersymétrique massive $\rightarrow 2^{2N}$ états de particules $\rightarrow$ supermultiplet $(\{b\};\{f\})$ : $2^{2N-1}$ états bosoniques $|b>$ et $2^{2N-1}$ états fermioniques $|f>$
- Ex. Multiplet vectoriel $N=1$ massif $\left(0,\frac{1}{2}^{2},1\right)$ :
  $2^{2N-1}=2$ bosons de spin $0$ et $1 \rightarrow (1+3)=4$ degrées de liberté $\{b\}=\{0,1\}$
  $+\ 2^{2N-1}=2$ fermions de spin $1/2 \rightarrow (2+2)=4$ degrées de liberté $\{f\}=\left\{\frac{1}{2}^{2}\right\}$.
- L'opérateur qui compte le nombre de particules de fermions $(-)^{F}$ :

$$(-)^{F}|b>=|b>; \qquad (-)^{F}|f>=-|f>,$$

- Egalité des degrés de liberté bosoniques et fermioniques dans une représentation supersymétrique :

$$Tr_{\mathcal{R}}(-)^{F}=\sum_{n\in\mathcal{R}}<n|(-)^{F}|n>=0.$$

## Théorème

Dans toute représentation ( multiplet ) supersymétrique $\mathcal{R}$, nous avons les propriétés suivantes :

**(a)** Il y'a autant de degrés de liberté bosoniques que fermioniques. Ces dégrés de liberté sont adéquatement classés dans des représentations du groupe d'automorphisme $SU(2) \times SP(2N)$. Les $2^{2N}$ états de la représentation supersymétrique $\mathcal{R}$ sont réparties suivant les représentations $\left(R_{SU(2)}; R_{SP(2N)}\right)$ du groupe $SU(2) \times SP(2N)$ de la facon suivante

$$2^{2N} = \oplus_{k=0}^{N} \quad \left( \quad \frac{\mathbf{N-k}}{\mathbf{2}} \quad ; \quad [\mathbf{k}]_{antisym} \quad \right)$$

ou $[\mathbf{k}]_{antisym}$ sont des représentations *complètement antisymétriques* de $SP(2N)$ portant un spin $s = \frac{N-k}{2}$ de $SU(2)$. La dimension des $[\mathbf{k}]_{antisym}$ est,

$$\dim [\mathbf{k}]_{antisym} = \frac{N+1-k}{N+1} C_{2N+2}^{k}$$

**(b)** Toutes les particules des représentations supersymétriques irréductibles $\mathcal{R}$ ont la meme masse $m$.

- Les particules n'ont pas de masse ( $P^2 = 0$ ) et on parle plutot de nombre quantique d'helicité $h$ avec deux états de polarisations possibles ( $h = \pm\lambda$ ) au lieu de spin $s$
- Pour les étudier, on se place dans un repère particulier genre lumière ; l'invariance relativiste fait le reste du travail.

**repère genre lumière**

$p^\mu = (E,0,0,E)$, la relation $-2\sigma^\mu_{a\dot{a}} P_\mu$ se simplifie :

$$-2\sigma^\mu_{a\dot{a}} P_\mu = 2\begin{pmatrix} 2E & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

Relations d'anticommutations se réduisent après avoir posé $Q^i \equiv Q_1^i$ et $Q_j^\dagger \equiv \overline{Q}_{\dot{1}j}$ à

$$\begin{aligned} \left\{Q^i, Q_j^\dagger\right\} &= 4E\delta_j^i; \\ \left\{Q^i, Q^j\right\} &= 0; \qquad \left\{Q_i^\dagger, Q_j^\dagger\right\} = 0. \end{aligned}$$

Les autres eqs sont essentiellement des eqs de nilpotence,

$$\left\{Q_2^i, \overline{Q}_{\dot{2}j}\right\} = 0 = \left\{Q_2^i, Q_2^j\right\} = 0; \qquad \left\{\overline{Q}_{\dot{2}i}, \overline{Q}_{\dot{2}j}\right\} = 0;$$

Trivialement réalisées comme $Q_2^i = \overline{Q}_{\dot{2}i} = 0$, $\forall i = i, ..., N$

## Représentations irréductibles

- $Q_i^\dagger$ et $Q^i$ sont interprétés comme des opérateurs de création et d'annihilation d'états à une particule d'hélicité $1/2$
- Obéissent à une algèbre de Clifford à $(N+N)$ opérateurs.
- Comme pour les représentations irréductibles massives : une base $\mathcal{B} = \left\{ |C^{(n)}_{\lambda+n/2} >; 0 \leq n \leq N \right\}$ de l'espace de représentation des $Q_i^\dagger$ et $Q^i$ est construite comme :

$$\begin{aligned} |C_{\lambda_0} &> \quad ; \qquad Q^i |C_{\lambda_0} >= 0; \\ |C^{(n)}_{\lambda_0+n/2} &> \quad = \frac{1}{\sqrt{n!}} Q^\dagger_{j_1} \ldots Q^\dagger_{j_n} |C_{\lambda_0} >; \qquad 1 \leq n \leq N. \end{aligned}$$

- $|C^{(n)}_{\lambda+n/2} >$ ont une dégénéréscence de degré $C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$
- L'espace de représentation a donc une dimension $2^N = \sum_{n=0}^N C_N^n$.

- Résumé des multiplets supersymétriques irréductibles non massifs à quatre dimensions selon les valeurs de l'extension $N$
- L'invariance CPT de ces multipets est assurée en tenant compte des deux signes $\lambda$.

## Muliplets non Massifs N=1 à D=4

| $\frac{\lambda_0+\frac{n}{2}\rightarrow}{\lambda_0\downarrow}$ | -2 | -3/2 | -1 | -1/2 | 0 | 1/2 | 1 | 3/2 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -2 | 1 | 1 | | | | | | | |
| -3/2 | | 1 | 1 | | | | | | |
| -1 | | | 1 | 1 | | | | | |
| -1/2 | | | | 1 | 1 | | | | |
| 0 | | | | | 1 | 1 | | | |
| 1/2 | | | | | | 1 | 1 | | |
| 1 | | | | | | | 1 | 1 | |
| 3/2 | | | | | | | | 1 | 1 |

## Muliplets non Massifs N=2 à D=4

| $\frac{\lambda_0+\frac{n}{2}\rightarrow}{\lambda_0\downarrow}$ | -2 | -3/2 | -1 | -1/2 | 0 | 1/2 | 1 | 3/2 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| -3/2 | | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| -1 | | | 1 | 2 | 1 | | | | |
| -1/2 | | | | 1 | 2 | 1 | | | |
| 0 | | | | | 1 | 2 | 1 | | |
| 1/2 | | | | | | 1 | 2 | 1 | |
| 1 | | | | | | | 1 | 2 | 1 |

- La supersymétrie CPT change le signe de l'hélicité, seul le multiplet avec $\lambda_0 = -1/2$ est alors CPT invariant.
- Pour les autres, il faut prendre un multiplet réductible avec les deux signes de $\lambda_0$.

**Muliplets non Massifs N=3 à D=4**

| $\frac{\lambda_0 + \frac{n}{2} \rightarrow}{\lambda_0 \downarrow}$ | -2 | -3/2 | -1 | -1/2 | 0 | 1/2 | 1 | 3/2 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -2 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| -3/2 | | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| -1 | | | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| -1/2 | | | | 1 | 3 | 3 | 1 | | |
| 0 | | | | | 1 | 3 | 3 | 1 | |
| 1/2 | | | | | | 1 | 3 | 3 | 1 |

## Muliplets non Massifs N=4 à D=4

| $\frac{\lambda_0+\frac{n}{2}\rightarrow}{\lambda_0\downarrow}$ | -2 | -3/2 | -1 | -1/2 | 0 | 1/2 | 1 | 3/2 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -2 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | |
| -3/2 | | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| -1 | | | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| -1/2 | | | | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
| 0 | | | | | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |

- Le cas où les charges centrales $Z^{ij}$ ne sont plus égaux à zero, les relations d'anticommutations entre charges supersymétriques :

$$\begin{aligned}\left\{ Q_a^{\tau m}, (Q_b^{\sigma n})^\dagger \right\} &= 2M\ \delta_a^b \delta_\sigma^\tau \delta_n^m; \\ \{Q_a^{\tau m}, Q_b^{\sigma n}\} &= \varepsilon_{ab}\varepsilon^{\tau\sigma}\delta^{mn} Z_m, \\ \left\{ (Q_a^{\tau m})^\dagger, (Q_b^{\sigma n})^\dagger \right\} &= \varepsilon^{ab}\varepsilon_{\tau\sigma}\delta_{mn}\overline{Z}_m\end{aligned}$$

- Ces relations peuvent toujours être ramenées à une algèbre de Clifford. En utilisant le choix de base

$$\begin{aligned} q_a^m &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[Q_a^{1m} + \varepsilon_{ab}\left(Q_b^{2m}\right)^\dagger\right]; \quad (q_a^m)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(Q_a^{1m}\right)^\dagger - \varepsilon_{ab} Q_b^{2m}\right] \\ p_a^m &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[Q_a^{1m} - \varepsilon_{ab}\left(Q_b^{2m}\right)^\dagger\right]; \quad (p_a^m)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(Q_a^{1m}\right)^\dagger + \varepsilon_{ab} Q_b^{2m}\right]\end{aligned}$$

L'algèbre supersymétrique devient :

$$\begin{aligned}\left\{ q_a^m, (q_b^n)^\dagger \right\} &= (2M + Z_m)\ \delta_a^b \delta_n^m; \\ \left\{ p_a^m, (p_b^n)^\dagger \right\} &= (2M - Z_m)\ \delta_a^b \delta_n^m; \\ \{q_a^m, q_b^n\} &= \{p_a^m, p_b^n\} = \{q_a^m, p_b^n\} = 0\end{aligned}$$

- Les seuls termes non nuls de ces anticommutateurs sont des opérateurs positifs, alors

$$2M - Z_m \geq 0 \Leftrightarrow Z_m \leq 2M, \quad \forall m = 1, ..., [N/2].$$

$\rightarrow$ Contrainte importante pour l'étude des représentations supersymétriques.

- Cas de particules non massives $M=0$ : tous les $Z_m$ doivent etre nuls et les représentations supersymétriques non massives ne portent pas de charges centrales.
- Cas ou le seuil $Z_m \leq 2M$ est saturé :

$$Z_m = 2M, \quad \forall m = 1, ..., [N/2].$$

- $\left\{p_a^m, \left(p_b^n\right)^\dagger\right\} = \left\{p_a^m, p_b^n\right\} = 0$ trivialement résolues par $p_a^m = 0$ et on a :

$$\begin{aligned} \left\{q_a^m, (q_b^n)^\dagger\right\} &= 4M\ \delta_a^b \delta_n^m; \\ \{q_a^m, q_b^n\} &= 0. \end{aligned}$$

$\rightarrow$ algèbre de Clifford à $[N/2]+[N/2]$ opérateurs.

- La méthode de construction des représentations irréductibles de cette algèbre est similaire à celle utilisée auparavant.
- Cas où un certain nombre $r$ d'opérateurs $Z_l$ sont nuls :

$$\begin{aligned} Z_l &= 2M, \quad l = 1, ..., r., \\ Z_l &\leq 2M, \quad l = r+1, ..., [N/2], \end{aligned}$$

- les opérateurs $p_a^l$, $1 \leq l \leq r$ sont trivialement résolues par $p_a^l = 0$.

Pour plus de détails, consulter les notes de cours du Master Physique Mathématique.