Université Mohammed V de Rabat
Faculté des Sciences

Master Physique Mathématique (PM)

Supersymétrie à Quatre Dimensions et théories quantiques des champs conformes

Rachid Ahl Laamara

Table des matières

1. Notes préliminaires pour les étudiants du Master PM ; l'orthographe et la grammaire n'ont pas été verifié !

Chapitre 1

Introduction

La supersymétrie est une symétrie échangeant bosons et fermions. Elle va au delà des symétries bosoniques usuelles et permet de dépasser plusièurs obstacles rencontrés avec les méthodes standards des théories quantiques des champs. L'étude des représentations de l'algèbre supersymétriques prévoient des bosons et des fermions de meme masses, chose qui n'a pas de support expérimentale à $(1+3)$ dimensions. La supersymétrie n'est donc pas une symétrie exacte de la nature ; elle doit etre brisée aux faibles énergies.

Outre les générateurs de Poincaré P_μ and $M_{\mu\nu}$ obéissant des relations de commutations, cette nouvelle symétrie fait intervenir des charges fermioniques Q_α satisfaisant à des relations d'anticommutations. Elle se situe dans la théorie des des super-algèbres de Lie faisant intervenir à la fois des commutateurs $[,]$ et des anti-commutateurs $\{,\}$.

En théorie des champs supersymétriques, outre les courants conséevés bosoniques usuelles $J_A^\mu,\ \partial_\mu J_A^\mu = 0$, et les charges $Q_A = \int_{x^o=t_0} d^3x J_A^0(x)$ associées (J_A^μ peut etre par exemple le tenseur énergie impulsion $\Theta_{\mu\nu}$, cas ou la charge conservée associée est $Q_A = P_\nu$), il existe également un courant spinoriel J_α^μ ($\alpha = (a, \dot{a})$) dont la charge conservée $Q_\alpha = \int_{x^o=t_0} d^3x J_\alpha^0(x)$ génére les transformations supersymétriques. L'algèbre des transformations supersymétriques, qui fait intervenir en général plusièurs charges supersymétriques Q_a^i et $\overline{Q}_{\dot{a}i}$; est donnée par

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0; \qquad [M_{\mu\nu}, P_\rho] = i\left(\eta_{\nu\rho}P_\mu - \eta_{\nu\rho}P_\mu\right) \\
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i\left(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma}\right) + (\rho \longleftrightarrow \sigma), \\
\left\{Q_a^i, \overline{Q}_{\dot{a}i}\right\} &= -2\sigma^\mu_{a\dot{a}}P_\mu\delta^i_j, \\
\left\{Q_a^i, Q_b^j\right\} &= \varepsilon_{ab}Z^{ij}; \qquad \left\{\overline{Q}_{\dot{a}i}, \overline{Q}_{\dot{b}j}\right\} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}\overline{Z}_{ij} \\
\left[P_\mu, Q_a^i\right] &= \left[P_\mu, \overline{Q}_{\dot{a}i}\right] = 0 \\
\left[M^{\mu\nu}, Q_a^i\right] &= -\sigma_a^{\mu\nu b}Q_b^i; \qquad \left[M^{\mu\nu}, \overline{Q}_{\dot{a}i}\right] = \overline{\sigma}_{\dot{a}}^{\mu\nu\dot{b}}\overline{Q}_{\dot{b}i} \\
\left[B_l, Q_a^i\right] &= (S_l)^i_j\, Q_a^j; \qquad \left[P_\mu, \overline{Q}_{\dot{a}i}\right] = (-S_l^*)^j_i\, \overline{Q}_{\dot{a}j} \\
[B_l, B_m] &= iC^k_{lm}B_k, \\
[P_\mu, B_l] &= 0, \qquad [M_{\mu\nu}, B_l] = 0
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Dans ces relations Q_a^i et $\overline{Q}_{\dot{a}i}$, $i = 1, ..., N$ sont les générateurs supérsymétriques et B_l sont les générateurs du groupe G_R d'automorphismes des Q_a^i et $\overline{Q}_{\dot{a}i}$ parfois appelé goupe de symétrie R.

Dans ce cours nous étudions des solutions de ces eqs et nous construisons des modèles de théorie des champs supersymétriques.

La première partie de cours est organisée en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous revoyons les symétries bosoniques des modèles de théorie quantique des champs.

Chapitre 2

Symétries Bosoniques en TQC

En liaison avec les notions de géométrie et matière, on peut naivement classer les symétries continues bosoniques (Groupes de Lie) en deux types :

i) Symétries géometriques $G_{géo}$ associées aux changements de repères et décrites par les groupes de relativités dont celui de Poincaré (Lorentz) ; groupe de symétrie d'espace temps de Minkowski. (éffets gravitationels négligés)

ii) Symétries internes G_{in} associées aux changements des phases des champs de matières. Elles correspondent aux symetries de jauge dont le groupe de Maxwell $U(1)$ et le groupe de jauge $U(2) \simeq U(1) \times SU(2)$ du modèle standard des interactions éléctro-faibles sont des cas très particuliers.

Avant l'avénement de la supersymétrie, on pensait que le groupe de symétrie physique G le plus général de (la matrice **S** de) la théorie quantique des champs (TQC) est un *produit directe* de $G_{géo}$ et de G_{in} ; càd de la forme

$$G = G_{géo} \times G_{int} \tag{2.1}$$

La supersymétrie va dépasser cette contrainte et conduira à une révolution dans la concéption de l'échelle quantique puisqu'elle est à la base de la plus part des modèles physiques consistent de nos jours. Pour mieux illustrer ces notions, il nous semble intéressent de commencer par rappeler brièvement certaines propriétes utiles du groupe de Poincaré $\mathcal{P}_4$, ses sous groupes $SO(1,3)$ et $SL(2,C)$ d'une part et des symétries internes (de jauge) d'autre part.

2.1 Symétrie de Poincaré

C'est le groupe de symetrie de la mécanique relativiste ou les effets gravitationnels, portés par la courbure de l'espace temps fonction de la dérivée seconde de la métrique, sont ignorés. C'est un sous groupe très particulier (transformations linéaires) du groupe des transformations générales, $x \to x' = f(x)$, des coordonnées $\{x\}$ d'espace-temps. C'est aussi un sous groupe des transformations supersymétriques objectif de ce cours.

2.1.1 Espace temps $(1+3)\,D$

Nous commencons par présenter nos conventions et notations ainsi que certains résulats sur le groupe de Poincaré à $(1+3)$ dimensions. L'espace temps de Minkowski $\mathbf{R}^{1,3}$ est parametrisé par les coordonnées locales $\left(ct = x^0, x^i\right)$ avec une métrique $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = diag\,(-1,1,1,1)$, $\eta_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} = \delta_\mu{}^\nu$ ou encore,

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Les dérivées spatio-temporelles sont définies par $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \partial_i = \mathbf{\nabla}\right)$, $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(-\frac{\partial}{c\partial t}, \partial^i = \mathbf{\nabla}\right)$ et $\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = -\frac{\partial}{c^2\partial t^2} + \mathbf{\nabla}^2$. Le produit scalaire de deux quadri-vecteurs p_μ et x^ν est en général noté par $px = p_\mu x^\mu = p^\mu x_\mu$. En particulier, la constante de mouvement $p^2 = p_\mu p^\mu$ est donnée par $p^2 = -\left(\frac{E}{c^2}^2 - \mathbf{p}^2\right) = -m_0^2 c^2$. Dans le repère de repos de la particule, que nous utiliserons lors de la construction des représentations de l'algèbre supersymétrique, nous avons $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, et $E_0 = m_0$. Ici c est la vitesse de la lumière qu'on prendra dorénavant $c = 1$; idem pour la constante de Plank $\hbar = 1$.

2.1.2 Groupe de Poincaré $\mathcal{P}_{1,3} \equiv \mathcal{P}_4$

C'est le groupe de symétrie de la mécanique relativiste dans l'espace de Minkowski à $(1+3) = 4$ dimensions. Il est généré par deux types de transformations : Les translations $T \in T_4$ de paramètres continues a^μ indépendentes de x,

$$a^\mu = \left(a^0, a^1, a^2, a^3\right); \qquad \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\nu} = 0, \tag{2.3}$$

et les rotations $R \in O(1,3) = Z_2 \times SO(1,3)$ (Z_2 pour les deux signes du $\det R = \pm 1$) décrites par les six paramètres (3 nombres réels et 3 angles) θ_1, θ_2, ..., θ_6, des six plans de l'espace $\mathbf{R}^{1,3}$. Ces six variables continues sont en general groupées dans une matrice 4×4 antisymétrique $\omega_{\mu\nu}$;

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ -\theta_1 & 0 & \theta_4 & \theta_5 \\ -\theta_2 & -\theta_4 & 0 & \theta_6 \\ -\theta_3 & -\theta_5 & -\theta_6 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Cette facon d'écrire les paramétres des rotations est astucieuse, elle reflète un propriété fondamentale du groupe de Lorentz homogène $SO(1,3)$ et plus généralement des groupe de rotations R dans des espaces réels ou complexes avec $\det R = +1$. Dans le cas d'une rotation dans un plan $\left(x^i, x^j\right)$ par exemple, nous avons la (sous) matrice 2×2 habituelle,

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \det R(\theta) = 1 \tag{2.5}$$

Comme $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + ...$ et $\sin\theta = \theta + \frac{1}{3!}\theta^3 ...$, cette matrice peut étre ré-écrite comme

$$R(\theta) = \exp\theta L, \qquad \det R(\theta) = 1 \Leftrightarrow trL = 0, \tag{2.6}$$

ou le générateur L de la rotation est donné par,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad L^\dagger = -L \tag{2.7}$$

Afin distinguer les six differents plans (x^μ, x^ν) de $\mathbf{R}^{1,3}$, à savoir

$$\begin{array}{lll} \left(x^0, x^1\right); & \left(x^0, x^2\right); & \left(x^0, x^3\right) \\ \left(x^1, x^2\right); & \left(x^1, x^3\right); & \left(x^2, x^3\right), \end{array} \tag{2.8}$$

il est utile d'indéxer les générateurs de rotations L dans les plans (x^μ, x^ν) par les indices μ et ν comme

$$\begin{array}{lll} L^{01} \rightarrow \left(x^0, x^1\right); & L^{02} \rightarrow \left(x^0, x^2\right); & L^{03} \rightarrow \left(x^0, x^3\right) \\ L^{12} \rightarrow \left(x^1, x^2\right); & L^{13} \rightarrow \left(x^1, x^3\right); & L^{23} \rightarrow \left(x^2, x^3\right), \end{array} \tag{2.9}$$

soit encore sous forme condensée

$$L^{\mu\nu} \rightarrow (x^\mu, x^\nu) \tag{2.10}$$

Pour mieux illustrer cette association, dénotons par $\omega_{\mu\nu}$ l'angle de rotation dans le plan (x^μ, x^ν) de $\mathbf{R}^{1,3}$ et par $\omega_{\nu\mu} = -\omega_{\mu\nu}$, la rotation inverse, dans le sense (x^ν, x^μ). La matrice de rotation $R_{\mu\upsilon} \equiv R(\omega_{\mu\nu})$ dans le plan (x^μ, x^ν), est donnée par (la sous matrices 2×2 suivante),

$$\begin{pmatrix} x'^\mu \\ x'^\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega_{\mu\nu} & \sin\omega_{\mu\nu} \\ -\sin\omega_{\mu\nu} & \cos\omega_{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^\mu \\ x^\nu \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

ou $\omega_{0k} = i\alpha_{0k}$ avec α_{0k} trois nombres réels et ou ω_{ij} sont trois angles variant entre 0 et 2π. A titre d'exemple la rotation $R_{01} \equiv R(\omega_{01})$ dans le plan (x^0, x^1) est

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\omega_{01} & \sin\omega_{01} & & \\ -\sin\omega_{01} & \cos\omega_{01} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh\alpha_{01} & \sinh\alpha_{01} & & \\ -\sinh\alpha_{01} & \cosh\alpha_{01} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Les rotations génériques totales $R(\omega)$ du groupe $SO(1,3)$ sont données par le produit $R(\omega) = \prod_{\mu\nu} R(\omega_{\mu\nu}) = \prod_{\mu\nu} \exp \omega_{\mu\nu} L^{\mu\nu}$ qui, à un détails près (formule de Haussdorf), peuvent etre également présenter sous la forme pratique suivante

$$\begin{aligned}
R(\omega) &= \exp i \sum_{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \equiv \exp i\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \\
M^{\mu\nu} &= -iL^{\mu\nu}, \qquad (M^{\mu\nu})^\dagger = M^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Résumons les choses

Résultats

- Le groupe de Poincaré $\mathcal{P}_4$ a un total de $4+6=10$ paramètres continues. L'ensemble des $T(a)$ et $R(\omega)$ forme deux sous groupes T_4 et $O(1,3) = Z_2 \times SO(1,3)$ de $\mathcal{P}_4$.
- Le groupe de Poincaré est un groupe de Lie ; a chaque paramètre de $\mathcal{P}_4$ est associé un générateur (P pour a et M pour ω). Les éléments $T(a) \in T_4$ et $R(\omega) \in SO(1,3)$ s'ecrivent comme des exponentielles

$$\begin{aligned}
R(\omega) &= \exp i\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}; \qquad \det R(\omega) = 1 \Leftrightarrow TrM = 0, \\
(R)^\dagger &= R^{-1}; \qquad \Leftrightarrow \qquad M^\dagger = M \\
T(a) &= \exp iaP; \qquad (T)^\dagger = T^{-1}; \qquad \Leftrightarrow \qquad P^\dagger = P
\end{aligned} \tag{2.14}$$

- La loi du groupe $\mathcal{P}_4$ est obtenue en calculant le produit de deux éléments $(R_1; a_1)$ et $(R_2; a_2)$,

$$(R_2; \quad a_2) \circ (R_1; \quad a_1) = (R_1.R_2; \quad a_1 + a_2 + R_2 a_1) \tag{2.15}$$

  Cette loi se manifeste au niveau des générateurs P^μ et $M^{\mu\nu}$ par les relations de commutations suivantes définissant également l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré.

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0. \\
[M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i\left(\eta_{\nu\rho} P_\mu - \eta_{\nu\rho} P_\mu\right) \\
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i\left(\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma}\right) + (\rho \longleftrightarrow \sigma)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Voyons maintenant comment ce groupe agit sur l'espace des fonctions définies sur $\mathbf{R}^{1,3}$ et sur les espaces des matrices. Pour des réalisations plus élaborées de cette algèbre ; voir cours du Master PM sur les algèbres de Lie et leurs représentations.

i) Translations spatio-temporelles : T_4

Elles opérent comme

$$T : x^\mu \longrightarrow x^\mu + a^\mu \tag{2.17}$$

ou a^μ est une constante et T est donné par $T = \exp iaP$, avec P_μ définissant les générateurs des quatres translations réalisés sur l'epace des fonctions $F(x)$ par l'opérateur différentielle $P_\mu = -i\partial_\mu$. Ces générateurs de translations sont hermitiques (observables physiques), $P_\mu^\dagger = P_\mu$, et commutent entre eux,

$$[P_\mu, P_\nu] = 0. \tag{2.18}$$

L'action des translations sur les fonctions $F(x)$ définies sur $\mathbf{R}^{1,3}$ est,

$$T : F(x) \longrightarrow F'(x') = T.F(x).T^{\dagger}. \tag{2.19}$$

Sous une transformation infintesimale, $a << 1$, cette relation se réduit au premier ordre à $F'(x') - F'(x) = ia^{\mu}.[P_{\mu}, F(x)] + 0(a^2)$ qui n'est rien d'autre que la derivée de $F(x)$, soit $[P_{\mu}, F(x)] = -i\partial_{\mu}F(x)$.

Résumons

Résultat

- Les translations de $\mathcal{P}_4$ sont engendrées par quatres générateurs hermitiques ; P_0 et P_i. Ces opérateurs forment ensemble un $4-$*vecteur* du groupe des rotations $SO(1,3)$. Autrement dit que P_{μ} se transforme comme un vecteur lors d'une transformation Λ de Lorentz, $P^{\mu} \rightarrow P'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}.P^{\nu} = (\exp i\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma} \cdot P \cdot \exp -i\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma})$ En langage d'algèbre, dire que P_{μ} est un vecteur de Lorentz, c'est équivalent à la relation de commutation

$$[M_{\mu\nu}, P_{\rho}] = i\left(\eta_{\nu\rho}P_{\mu} - \eta_{\mu\rho}P_{\nu}\right), \tag{2.20}$$

qui peut étre aussi écrite sous la forme

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, P_{\rho}] &= (\mathcal{R}_{\mu\nu})^{\sigma}_{\rho} \quad P_{\sigma}, \\ (\mathcal{R}_{\mu\nu})^{\sigma}_{\rho} &= i\left(\eta_{\nu\rho}\eta^{\sigma}_{\mu} - \eta_{\mu\rho}\eta^{\sigma}_{\nu}\right) \end{aligned} \tag{2.21}$$

- Plus généralement, les réprésentations $\mathbf{R}_A$ irréductibles de $SO(1,3)$ ont des relations de commuations spécifiques avec les générateurs $M_{\mu\nu}$. Elles sont données par

$$[M_{\mu\nu}, \mathbf{R}_A] = (\mathcal{M}_{\mu\nu})^{B}_{A} \quad \mathbf{R}_B \tag{2.22}$$

En particulier, nous avons pour les spineurs de Dirac ou Majorana Q_{α} par exemple

$$[M_{\mu\nu}, Q_{\alpha}] = \Sigma^{\beta}_{\mu\nu\alpha}\, Q_{\beta}. \tag{2.23}$$

En supersymétrie le role de $\mathbf{R}_A$ va etre joué par P_{μ} , $M_{\mu\nu}$, et un spineur de Majorana Q_{α}, générateur des transformations supersymétriques.

ii) Rotations spatio-temporelles $SO(1,3)$

Les transformations de $SO(1,3)$ opérent comme

$$R : x^{\mu} \longrightarrow \Lambda^{\mu}_{\nu}.x^{\nu}, \quad \det \Lambda = 1, \tag{2.24}$$

ou Λ^{μ}_{ν} est une martice 4×4 orthogonale à six parametres constants, $\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{.\rho}\Lambda^{\nu}_{.\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$, et R est donné par $R = \exp i\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$, avec $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\mu\nu}$ donnant les six parametres du groupe et $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ les generateurs hermitiques usuelles du groupe de Lorentz. Ces $M_{\mu\nu}$ génerent les rotations dans les six plans (x^{μ}, x^{ν}) de $\mathbf{R}^{1,3}$; Ils s'écrivent dans la representation differentielle comme ;

$$M_{\mu\nu} = (x_{\mu}P_{\nu} - x_{\nu}P_{\mu}) = -i(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu}). \tag{2.25}$$

Sous une transformation infinitesimale, $\omega << 1$, nous obtenons après dévelopement de $F'(x') = R.F(x).R^{\dagger}$, la variation suivante $F'(x) - F'(x) = i\omega_{\mu\nu}.[M^{\mu\nu}, F(x)] + 0(\omega^2)$.

iii) Algèbre de Poincaré

En utilisant les transformations infinitésimales de Poincaré $\exp i(aP + \omega M) \simeq I + i(a^{\mu}P_{\mu} + \omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}) + 0(2)$ et en éffectuant $F'(x') = \exp i(aP + \omega M).F(x).\exp -i(aP + \omega M)$, nous pouvons vérifier facilement que les génétateurs $P_{\mu} = -i\partial_{\mu}$ et $M_{\mu\nu} = (x_{\mu}P_{\nu} - x_{\nu}P_{\mu})$ satisfont l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré,

$$\begin{aligned} [P_{\mu}, P_{\nu}] &= 0. \\ [M_{\mu\nu}, P_{\rho}] &= i\left(\eta_{\nu\rho}P_{\mu} - \eta_{\mu\rho}P_{\nu}\right) \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i\left(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma}\right) + (\rho \longleftrightarrow \sigma) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Noter qu'en général les translations et les rotations ne commutent pas entre elles ; cette propriété reflètent justement le fait que le groupe de Poincaré est un produit semi-directe des translations et des rotations ; $\mathcal{P}_4 = T_4 \times SO(1,3)$. Noter aussi que, outre la masse au repos m_0, ($[P^2, M_{\mu\nu}] = 0$), les representations irréductibles du groupe $\mathcal{P}_4$ sont également caractérisées par les spins s de $SO(1,3)$. Ce spin s est un demi-entier ayant la forme

$$s = \frac{1}{2}(k+l); \quad k, l \in Z^+. \tag{2.27}$$

Selon les valeurs de s, on distingue deux cathégories de representations de $SO(1,3)$ de grande importance physique : (1)

les representations (tensorielles) a spin s entier, $s \in Z^+$, dont le scalaire et le vecteur sont les premiers éléments. (2) *les representations spinorielles de spin* (hélicité pour $m_0 = 0$) $s \in Z^+ + \frac{1}{2}$, dont les spineurs de Dirac et de Majorana.

En supersymétrie les représentations fermioniques sont aussi importante que les bosoniques. Elles jouent un role quasi-similaire, sinon plus important encore, dans la construction de l'algèbre supersymétrique ; c'est pour cela nous avons juger utile de rappeler ci-après l'essentiel des propriétés des representations de $SO(1,3)$ en profitant de l'homomorphisme $SO(1,3) \sim SL(2,\mathbf{C})$.

2.2 Groupe $SL(2,\mathbf{C})$

Le groupe $SL(2,\mathbf{C})$ est un groupe de Lie à six paramètres, il peut etre imaginé comme une extension complexe du groupe $SU(2,\mathbf{C})$ des matrices unitaires U de détérminant 1, $UU^\dagger = I$ et $detU = 1$. Dans le cas de $SL(2,\mathbf{C})$, ses matrices M

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d; \\ \det M &= ad - bc = 1, \end{aligned} \tag{2.28}$$

ne sont plus unitaires, $MM^\dagger \neq I$, et par suite $SL(2,\mathbf{C})$ est un groupe à trois parametres complexes ou encore $3+3=6$ parametres réels tous comme le groupe de Lorentz $SO(1,3)$. Cette égalité entre les nombres de parametres est une première manifestation de l'homomorphisme $SO(1,3) \sim SL(2,\mathbf{C})$.

De cette présentation, il en découle que les matrices M et sa conjugée M^* ne sont plus équivalentes, càd qu'il n'existe pas de matrice V de $SL(2,\mathbf{C})$ reliant M et M^* ;

$$\begin{aligned} M^* &= \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}; \quad a^*d^* - b^*c^* = 1, \\ M^* &\neq VMV^{-1}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Par conséquent le groupe $SL(2,\mathbf{C})$ a deux representations fondamentales (deux spineurs de Weyl) souvent notées par $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ contrairement au cas de $SU(2,\mathbf{C})$ ou il y'a uniquement une seule représentation à savoir $\frac{1}{2}$. Ces deux representations correspondent aux deux solutions possibles de

$$s = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{2}, l = 0 \;\text{ ou }\; k = 0, l = \frac{1}{2}. \tag{2.30}$$

Intuitivement si l'on imaginerait $SO(1,3)$ comme grosso-modo $SO(4)$, les deux représentations spinorielles apparaissent alors de facon naturelle comme résultat de l'homomorphisme $SO(4,R) \sim SU(2,\mathbf{C}) \times SU(2,\mathbf{C})$. Il bien entendu que le groupe $SO(1,3)$ n'a rien avoir avec $SO(4)$ et leurs représentations non plus.

2.2.1 Davantage sur Homomorphisme $SO(1,3) \sim SL(2,\mathbf{C})$

Outre les réalisations différentielles (1.15), les eqs (1.21) ont plusieurs autres solutions dont les plus importantes sont celles caractérisées par la paire de nombres quantiques $(j_1; j_2)$; avec j_1 et j_2 sont des demi-entiers positifs ; càd j_1, $j_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, ...$eqs(1.22). Ces réalisations sont des représentations du groupe $SL(2,C)$

à plus haut poids généralisant. Elles généralisent le cas des matrices 2×2 introduites auparavant eqs(1.23-24). Avant de voir comment ces représentations interviennent en TQC à $(1+3)$ dimensions, commencons par établir l'homomorphisme $SO(1,3;\mathbf{R}) \sim SL(2,\mathbf{C})$. Une facon simple de rendre compte de cette identification, est de noter que tout quadri-vecteur de $SO(1,3;\mathbf{R})$ ayant 4 composantes peut etre representer soit :

i) par un vecteur ligne ou colonne,

$$v_\mu = (v_0, v_1, v_2, v_3), \quad v^\mu = \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

ii) par une matrice 2×2 hermitienne $v_{a\dot{a}}$

$$v_{a\dot{a}} = \begin{pmatrix} -v_0 + v_3 & v_1 - iv_2 \\ v_1 + iv_2 & -v_0 - v_3 \end{pmatrix}, \quad (v_{a\dot{a}})^\dagger = v_{a\dot{a}} \tag{2.32}$$

Cette matrice a elle aussi $2\times 2 = 4$ composantes réelles exactement comme le quadrivecteur v^μ. Les deux facons d'écrire le quadrivecteur de $SO(1,3)$ traduisent effevtivement l'homomorphisme $SO(1,3;\mathbf{R}) \sim SL(2,\mathbf{C})$ et permettent une correspondence $1:1$ entre l'invariant v^2 de $SO(1,3;\mathbf{R})$ construit à partir de v_μ et l'invariant $\det(v_{a\dot{a}})$ de $SL(2,\mathbf{C})$. En effet dénotons par $v'_\mu = (\Lambda v)_\mu$ la transformée de Lorentz de v_μ, et par $v'_{a\dot{a}} = \left(MvM^\dagger\right)_{a\dot{a}}$ la transformée de $v_{a\dot{a}}$ par M, matrice 2×2 complexe ($\det M = \det M^\dagger = 1$) du groupe $SL(2,\mathbf{C})$, nous avons d'une part

$$\begin{aligned} v^2 &= v_\mu v^\mu = -\left(v_0^2 - \mathbf{v}^2\right) \\ v^2 &= v'^2 = -\left(v_0'^2 - \mathbf{v}'^2\right), \end{aligned} \tag{2.33}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \det(v_{a\dot{a}}) &= v_0^2 - \mathbf{v}^2 \\ \det\left(v'_{a\dot{a}}\right) &= v_0'^2 - \mathbf{v}'^2 = v_0^2 - \mathbf{v}^2, \end{aligned} \tag{2.34}$$

vu que $\det\left(v'_{a\dot{a}}\right) = \det\left(MvM^\dagger\right) = \det M \det(v_{a\dot{a}}) \det M^\dagger = \det(v_{a\dot{a}})$. Ainsi la norme du quadri-vecteur v_μ de Lorentz est associée avec le détérminant de $v_{a\dot{a}}$. On se référera dorénavant à cette identification par

$$\mathbf{4}_v \in SO(1,3) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{2},\mathbf{2}) \equiv \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \in SL(2,\mathbf{C}), \tag{2.35}$$

ou la dimension $2 = 2\times\frac{1}{2}+1$. Plus généralement, nous avons les premières corréspondences suivantes,

Représentations de $SO(1,3)$	Représentations de $SL(2,\mathbf{C})$
Scalaire $\phi(x)$: $\mathbf{0}$	$(0,0) = \left(\left[\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\right]_a, 0\right) = ...$
Spineur de Weyl non pointé $\psi_a(x)$: $\mathbf{2}$	$\left(\frac{1}{2},0\right)$
Spineur de Weyl non pointé $\overline{\chi}_{\dot{a}}(x)$: $\mathbf{2}^*$	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$
Vecteur $A_\mu(x) = \sigma_\mu^{a\dot{a}} A_{a\dot{a}}(x)$: $\mathbf{4}_v$	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},0\right)\otimes\left(0,\frac{1}{2}\right)$
Spineur de Dirac $\Psi_\alpha^{(D)}(x)$: $\mathbf{4}_D = \mathbf{2}\oplus\mathbf{2}^*$	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\left(0,\frac{1}{2}\right)$
Spineur de Majorana $\Psi_\alpha^{(M)}(x)$: $\mathbf{4}_M = \mathbf{2}\oplus\overline{\mathbf{2}}$	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\overline{\left(\frac{1}{2},0\right)}$
Tenseur symetrique de Weyl $f_{ab}(x)$: $\mathbf{3}$	$(1,0) = \left(\left[\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\right]_s, 0\right)$
Tenseur symetrique de Weyl $f_{\dot{a}\dot{b}}(x)$: $\mathbf{3}^*$	$(0,1) = \left(0,\left[\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\right]_s\right)$
Tenseur antisymétrique de $SO(1,3)$ $F_{\mu\nu}(x)$: $\mathbf{6} = \mathbf{3}\oplus\mathbf{3}^*$	$(1,1) = (1,0)\oplus(0,1)$

(2.36)

De ce tableau, nous voyons que toutes ces représentations sont essentiellemnt obtenues à partir de $\left(\frac{1}{2},0\right)$ et $\left(\frac{1}{2},0\right)$; donc des spineurs de Weyl que nous commentons brièvement dans ce qui suit.

2.2.2 Spineurs de Weyl

Dans les notations de Van der Waerden, les deux spineurs de Weyl du groupe de $SL(2,C)$, donc du groupe de Lorentz homogène, sont repésentées par ;

$$\begin{array}{lcl} \left(\frac{1}{2},0\right) & \rightarrow & \psi_a, \quad a=1,2 \\ \left(0,\frac{1}{2}\right) & \rightarrow & \overline{\psi}_{\dot{a}}, \quad \dot{a}=\dot{1},\dot{2}. \end{array} \tag{2.37}$$

A ces spineurs non pointés et pointés avec indices en bas, on associe, par l'aide des tenseurs antisymetriques ε^{ab} et $\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}$, les spineurs de Weyl d'indices en haut suivants

$$\begin{aligned} \psi^a &= \varepsilon^{ab}\psi_b, \quad \overline{\psi}^{\dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\overline{\psi}_{\dot{b}} \\ \psi_a &= \varepsilon_{ab}\psi^b, \quad \overline{\psi}_{\dot{a}} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}\overline{\psi}^{\dot{b}}, \end{aligned} \tag{2.38}$$

avec ε comme métrique,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{12} &= \varepsilon_{21} = 1, \quad \varepsilon^{21} = \varepsilon_{12} = -1, \\ \varepsilon_{ab}\varepsilon^{bc} &= \delta_a^c; \quad \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}\varepsilon^{\dot{b}\dot{c}} = \delta_{\dot{a}}{}^{\dot{c}}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Sous des transformations de $SL(2,\mathbf{C})$, ces spineurs se transforment comme

$$\begin{aligned} \psi'_a &= M_a^c.\psi_c; \quad \overline{\psi}'_{\dot{a}} = (M^*)_{\dot{a}}{}^{\dot{c}}\overline{\psi}_{\dot{c}}, \\ \psi'^a &= \left(M^{-1}\right)_b^a\psi^b; \quad \overline{\psi}'^{\dot{a}} = \left([M^*]^{-1}\right)_{\dot{b}}{}^{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{b}} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Notons au passage que les tenseurs antisymétriques ε^{ab} et ε_{ab}, ainsi que leurs homologues pointés $\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}$ et $\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}$, jouent le role d'une métrique pour les indices spinoriels de la meme facon que $\eta_{\mu\nu}$ et $\eta^{\mu\nu}$ pour les indices de $SO(1,3)$. Ils sont invariants sous les transformations de $SL(2,\mathbf{C})$; les transformées ε'_{ab} et $\varepsilon'_{\dot{a}\dot{b}}$ des éléments non nuls sont proportionels aux détérminants des matrices M, M^* qui sont égaux à 1 ;

$$\varepsilon'_{ab} = M_a^c M_b^d \varepsilon_{cd} = \varepsilon_{ab}. \tag{2.41}$$

Des relations similaires sont aussi valables pour les autres tenseurs.

Avec les deux représentations fondamentales de Weyl, $\left(\frac{1}{2},0\right)$ et $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, nous pouvons construire toutes les autres représentations $(j_1,j_2) \equiv \left(\mathbf{D}^{j_1},\mathbf{D}^{*j_2}\right)$ par produit tensoriel ou des sommes directes comme reporté dans le tableau (1.31). La règle de jeu générale est similaire à celle du groupe $SU(2)$ ou l'on a une seule cathégorie de représentations. Ainsi nous avons,

$$\mathbf{D}^j \otimes \mathbf{D}^k = \oplus_{n=|j-k|}^{j+k} \mathbf{D}^n; \qquad \mathbf{D}^{*j} \otimes \mathbf{D}^{*k} = \oplus_{n=|j-k|}^{j+k} \mathbf{D}^{*n} \tag{2.42}$$

Comme exemple d'illustration, le produit tensoriel de deux fondamentales de dimension $2 = 2 \times \frac{1}{2} + 1$ est décomposable comme suit ;

$$\mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} = \oplus_{n=0}^{1} \mathbf{D}^n = \mathbf{D}^0 \oplus \mathbf{D}^3 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \tag{2.43}$$

nous obtenons un scalaire $\psi^c\psi_c$ et un tenseur symétrique $\psi_{(a}\psi_{b)}$,

$$\begin{aligned} \psi_a\psi_b &= \frac{1}{2}\left(\psi_a\psi_b - \psi_b\psi_a\right) + \frac{1}{2}\left(\psi_a\psi_b + \psi_b\psi_a\right) \\ &= \psi_{[a}\psi_{b]} + \psi_{(a}\psi_{b)} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\psi^c\psi_c + \psi_{(a}\psi_{b)} \end{aligned} \tag{2.44}$$

Cette relation se généralise aisément pour le cas de tenseur à plusieurs indices.

Résumons

Résultat

– Les représentations irréductibles de plus haut poids du groupe de $SL(2,\mathbf{C})$ avec un spin $s=\frac{k+l}{2}$ sont associées aux tenseurs suivants avec k indices de Weyl non pointés a_i symétriques et l indices pointés $\dot{a}_j$ symétriques

$$T_{a_1a_2\ldots a_k,\dot{a}_1\dot{a}_2\ldots\dot{a}_l}=T_{(a_1a_2\ldots a_k),(\dot{a}_1\dot{a}_2\ldots\dot{a}_l)} \tag{2.45}$$

– Dans ce cours, nous aurons besoin grosso-modo des représentations citées dans le tableau (1.31) et de quelques relations utiles, à caractère fermioniques, concernant l'élaboration de modèles de théorie des champs supersymétriques. Le coefficient $\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}$ est un des objets utiles intervenant dans ces relations. Regardons le de près.

Symbole $\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}$

La matrice $v_{a\dot{a}}$ eq(1.27) peut etre ré-écrite sous la forme remarquable suivante

$$v_{a\dot{a}}=v_{\mu}.\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}, \tag{2.46}$$

ou le symbole $(\sigma^{\mu})_{a\dot{a}}$ apparait comme le lien entre les trois représentations fondamentales [1] de $SO(1,3)$, est donné par les matrices usuelles σ^i de Pauli, en plus de l'identité,

$$\begin{aligned}\sigma^0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \sigma^1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\\ \sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2.47}$$

Les coefficients $(\sigma^{\mu})_{a\dot{a}}$ jouent alors un role fondamentale dans l'étude des représentations du groupe de Lorentz puisqu'ils pemettent le passage entre l'indice de Lorentz μ (representation $\mathbf{4}_v$) et les indices a ($\left(\frac{1}{2},0\right)$) et $\dot{a}$ ($\left(0,\frac{1}{2}\right)$) de $SL(2,C)$. Ils doivent etre comparer avec le vertex de l'éléctrodynamique quantique (QED),

$$\tag{2.48}$$

La relation (1.27) peut etre inversée pour exprimer le vecteur v_{μ} en fonction des $v_{a\dot{a}}$;

$$v_{\mu}=\overline{\sigma}^{\dot{a}b}_{\mu}v_{a\dot{a}}. \tag{2.49}$$

Les coeifficients $\frac{-1}{2}\overline{\sigma}^{\dot{a}b}_{\mu}$ apparaissant dans cette equation sont les inverses de $\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}$; ils sont donnés par,

$$\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\sigma}^{\dot{c}c}_{\mu}=-2\delta^{c}_{a}\delta_{\dot{a}}{}^{\dot{c}}. \tag{2.50}$$

Ils satisfont, entre autres, les relations suivantes qui decoulent directement des eqs(1.42) ;

$$\begin{aligned}\eta^{\mu\nu}\overline{\sigma}^{\dot{a}a}_{v} &= \varepsilon^{ab}\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\sigma^{\mu}_{b\dot{b}},\\ \left(\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu}+\sigma^{\nu}\overline{\sigma}^{\mu}\right)^{b}_{a} &= -2\eta^{\mu\nu}\delta^{b}_{a}\\ \left(\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}+\overline{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}\right)^{\dot{b}}_{\dot{a}} &= -2\eta^{\mu\nu}\delta^{\dot{b}}_{\dot{a}},\end{aligned} \tag{2.51}$$

Notons au passage que cette identification est justement une extension de la relation de l'espace à trois dimensions connectant les tri-vecteurs v_i de $\mathbf{R}^3$ et la representation vectoriel de $SU(2)$,

$$v_{ab}=v_i.\left(\sigma^i\right)_{ab}; \quad v_i=\sigma^{ab}_{i}v_{ab}. \tag{2.52}$$

D'autres propriétés sur ces symboles sont données dans les exercices suivants.

1. Outre les représentations $\left(\frac{1}{2},0\right)$ et $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, la représentation vectorielle $\mathbf{4}_v$ de $SO(1,3)$ est parfois désignée comme représentation fondamentale.

Exercices

1) Montrer que

$$\overline{\sigma}^0 = \sigma^0; \quad \overline{\sigma}^i = -\sigma^i. \tag{2.53}$$

2) En déduire

$$Tr\sigma^\mu \overline{\sigma}^\nu = -2\eta^{\mu\nu}$$

3) Montrer que les générateurs du groupe des deux représentations spinorielles fondamentales du groupe de Lorentz sont

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[\sigma^\mu, \overline{\sigma}^\nu\right], \qquad \overline{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[\overline{\sigma}^\mu, \sigma^\nu\right]. \tag{2.54}$$

4) Montrer que pour toute matrice M de $SL(2, C)$, nous avons

$$\left(M^T\right)^{-1} = VMV^{-1}, \tag{2.55}$$

ou V est une matrice inversible que l'on détérminera. Calculer $\det V$ et conclure.

2.3 Symétries en Theorie Quantique des Champs

En plus de l'invariance relativiste qui est une symétrie géométrique, les modèles de jauge des théories quantiques des champs admettent d'autres types de symétries continues et eventuellement discretes. Ce type de symétries, souvent désignées par symétries internes, touchent les champs de matières décrivant les differentes types de particules en jeu et leurs intéractions. Les champs physiques usuelles, en absence de gravité, sont classés par des représentations du groupe de Lorentz. Ce sont les champs reportés dans le tableau (1.31) et que nous commentons brièvement ci-après.

2.3.1 Champ scalaire de Lorentz $\phi(x)$

Il se transforme suivant la representation $(0, 0)$ du groupe $SL(2, \mathbf{C}) \sim SO(1, 3; \mathbf{R})$. En absence de source extérieure d'interaction, le champ ϕ satisfait l'equation de Klein Gordon

$$\left(\Box + m^2\right)\phi(x) = 0 \tag{2.56}$$

Quantiquement, ce champ, qui peut etre réel ou complexe, devient un opérateur et est decomposé en intégrale de Fourrier. Pour le cas simple d'un champs réel, nous avons

$$\phi(x) = \int_{\{p^2+m^2=0\}} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[a(p)\,e^{ipx} + a^\dagger(p)\,e^{-ipx}\right], \tag{2.57}$$

ou $a^\dagger(p)$ et $a(p)$ sont réspectivement les opérateurs de création et d'annihilation d'une particule libre d'énérgie impulsion p, avec $p^2 = -m^2$. Ces opérateurs, qui satisfont des relations de commutations canoniques,

$$\left[a(p), a^\dagger(q)\right] = i\delta(p-q), \tag{2.58}$$

opèrent sur l'espace de (Hilbert) Fock $\mathcal{F}$. Vu son caractère scalaire, le champ (neutre) ϕ, ses intéractions sont difficilement détéctable en experience ; ce qui laisse une ombre de mistère sur ce type de champ jusqu'à nos jours.

En théorie, le champ scalaire peut jouer différent roles selon le modèle de théorie de champ étudié ; en physique des particules ou en physique des phénomènes critiques. En physique des particules élémentaires qui nous intéresse dans cette étude ; le champ ϕ est associé au champ de Higgs permettant la brisure spontanée des symétries de jauge et médiateur d'interaction. Ce champs de Higgs est toujours hypothétique ; aucune expérience de physique des hautes énergies n'a permi de le mettre en evidence. En théorie supersymétrique, nous allons voir que pour tous fermions de spin $\frac{1}{2}$ est associé un champ scalaire de spin 0. Ainsi il y aurait plein de champs scalaires dans la nature s il s'averrait que la supersymétrie avait regné quelques temps au cours de l'évolution de l'univers. Le projet LHC du CERN qui démarera vers l'an 2005, apporterait probablement des réponses.

2.3.2 Champs spinoriels de Lorentz

En éléctrodynamique quantique (QED), l'éléctron e^- et le positron e^+ (anti-éléctron) forment tous deux un spineur (bi-spineur) de Dirac à $(2+2)=4$ composantes complexes. Le vertex de l'éléctrodynamique $\overline{\psi}^\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu \psi^\beta$ met en jeu les particules $e^\pm$ adéquatement décrites par le spineur de Dirac ψ_α, son adjoint $\overline{\psi}^\alpha$ et le photon γ.décrit par le champ de Maxwell A_μ. Les matrices $\gamma^\mu_{\alpha\beta}$ sont les matrices de Dirac usuelles qui s'écrivent dans la base de Weyl, que nous avons choisi dans ce cours, comme,

$$\gamma^\mu_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_{ab} \\ \overline{\sigma}^\mu_{\dot{a}\dot{b}} & 0 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

Il faudrait noter ici que d'autres réalisations des matrices γ^μ équivalentes à celles d'en haut sont également possibles ; Ce sont : (1) la réalisation canonique,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}; \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.60}$$

et (2) la représentation de Majorana

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^3 \\ i\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^1 \\ -i\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.61}$$

En supersymétrie et dans d'autres théories comme dans le modèle standard des interactions éléctro-faibles, il est plus pratique d'utiliser la représentation de Weyl (1.54) mais toujours est-il qu on peut utiliser aussi les autres représentations.

Dans ce qui suit nous donnons davantage de détails sur le classement des spineurs à $(1+3)$ dimensions. Il y'a quatre type de spineurs à $(1+3)$ dimensions ;

Champ de Weyl non pointé $\psi^a(x)$ et $\psi_a(x)$

Ce type de spineur, qui se transforme dans la représentation $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ du groupe $SL(2, C)$, a deux composantes ψ_1 et ψ_2 parfois notées aussi ψ_- et ψ_+. Les composantes avec indices en bas et en haut sont liées comme ;

$$\psi_a = \varepsilon_{ab}\psi^b; \quad \Leftrightarrow \quad \psi_1 = -\psi^2; \quad \psi_2 = \psi^1 \tag{2.62}$$

Comme le théorème spin statistique exige que les spineurs doivent anticommuter, il s'ensuit alors que le scalaire composé de la contraction de deux fermions est $\psi^a\psi_a = \psi^1\psi_1 + \psi^2\psi_2 = -\psi^1\psi^2 + \psi^2\psi^1 = -2\psi^1\psi^2 = 2\psi^2\psi^1$. Ce résultat peut etre aussi obtenu directement par le bais de la relation

$$\begin{aligned} \psi^a\psi_a &= \varepsilon_{ab}\psi^a\psi^b, \\ \psi^a\psi_a &= -\psi_a\psi^a. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Notons au passage que les quantités $\psi_1\psi_1$ et $\psi_2\psi_2$ sont identiquement nulles comme conséquence de la statistique (ou encore le principe d'exclusion de Pauli) ;

$$(\psi_1)^2 = (\psi_2)^2 = 0. \tag{2.64}$$

Ce jenre de relation jouera un role fondamentale dans l'étude de la supersymétrie. Les variables ψ qui satisfont cette propriété de nilpotence, $\psi^2 = 0$, sont connues sous le nom de variables de Grassman. Nous aurons l'occasion de les manipuler abondamment dans les chapitres suivants. Notons aussi que l'eq de mouvement du champ $\psi_a(x)$ libre non massif est

$$i\partial_\mu \overline{\sigma}^\mu \psi = 0. \tag{2.65}$$

Pour le cas ou la masse est non nulle, cette eq s'étend comme

$$i\partial_\mu \overline{\sigma}^\mu \psi - m\overline{\psi} = 0. = 0, \tag{2.66}$$

et dépend du champ $\overline{\psi}$, le complexe conjugé de ψ ; c'est un champ de Weyl pointé.

Champ de Weyl pointé $\overline{\psi}_{\dot{a}}(x)$

Ce spineur se transforme dans la representation $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ du groupe $SL(2, C)$. Il a aussi deux composantes $\overline{\psi}_{\dot{1}}$ et $\overline{\psi}_{\dot{2}}$; et est lié au spineur non pointé $\psi^a(x)$ par *conjugaison complexe* ; c'est à dire

$$\overline{\psi}_{\dot{a}}(x) = (\psi^a(x))^* = (\psi^a(x))^\dagger \tag{2.67}$$

Le scalaire $\overline{\psi}_{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{a}} = -\overline{\psi}^{\dot{a}}\overline{\psi}_{\dot{a}}$ n'est alors autre que l'hermitique (complexe) conjugé de $\psi^a\psi_a$. Nous avons également $\left(\overline{\psi}_{\dot{1}}\right)^2 = \left(\overline{\psi}_{\dot{2}}\right)^2 = 0$. L'équation du mouvement est

$$i\partial_\mu \sigma^\mu \overline{\psi} + m\psi = 0, \tag{2.68}$$

elle dépend de ψ.

Champ de Dirac $\Psi_\alpha(x)$

C'est ce champ qui intervient en QED ; il se transforme dans la représentation somme directe $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)$ du groupe $SL(2, C)$. Il est formé d'un spineur de Weyl pointé $\overline{\chi}_{\dot{a}}$ et d'un autre non pointé ψ^a formant au total un champ a quatre composantes complexes ; soit huit reelles. Il est souvent désigné par bi-spineur vu le fait qu'il est constitué de la somme directe deédeux spineurs de Weyl ;

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi^a \\ \overline{\chi}_{\dot{a}} \end{pmatrix} \tag{2.69}$$

Champ de Majorana $\Psi_\alpha(x)$

Il se transforme dans la representation $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \overline{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}$ du groupe de Lorentz. Ceci veut dire que $\overline{\chi}_{\dot{a}}$ est le complexe conjugé de ψ^a. Le champ de Majorana $\psi_\alpha(x)$ a donc deux composantes complexes independentes, soit quatres composantes réelles.

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi^a \\ \overline{\psi}_{\dot{a}} \end{pmatrix} \tag{2.70}$$

En supersymétrie, il est plus facile de travailler avec les composantes irreductibles de Weyl ; c'est pour cela nous allons fixer notre attention sur les spineurs ψ^a et $\overline{\psi}_{\dot{a}}$.

2.3.3 Champ de jauge $A_\mu(x)$

Le champ de jauge (Maxwell ou de Yang-Mills) $A_\mu(x)$ est un vecteur de Lorentz se transformant suivant la representation produit tensorielle $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right)$ du groupe $SL(2, C)$. Ce champ quadri-vecteur $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ peut etre écrit comme

$$A_{a\dot{a}} = A_\mu.(\sigma^\mu)_{a\dot{a}}. \tag{2.71}$$

Cette écriture est aussi valable pour les coordonnées x^μ de l'espace temps de Minkowski ; soit $x^{a\dot{a}} = A_\mu.(\sigma^\mu)^{a\dot{a}}$, les générateurs de translations de $\mathcal{P}_4$ et des générateurs de rotations de $SO(1, 3)$.

En plus des divers champs cités ci-dessus, d'autres interviennent également dans l'écriture de l'action $S[\phi, \psi, A]$ du système de jauge. C'est le cas par exemple de $\partial_\mu\phi$ se transformant dans la représentation $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ou encore le tenseur éléctromagnétique $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ se transformant dans la representation $(1, 1)$ de $SL(2, C)$. Nous y reviendrons avec des détails sur certains aspects de ces champs plus tard.

2.4 Groupes de Symétrie Internes

2.4.1 Champs en Théorie de Jauge et modèle building

Comme il existe differents type de particules élémentaires en théorie de Yang & Mills avec un groupe de Jauge G, les champs Φ de Lorentz, désignant colléctivement les champs ϕ, ψ, et A_μ présentés ci-dessus, apparaissent avec plusieurs multiplicités. Ainsi, on peut avoir n composantes Φ_k du meme type

$$\Phi_k = (\Phi_1, ..., \Phi_n) \tag{2.72}$$

transformant suivant la représentation $\mathbf{n}$ du groupe de symétrie interne $\mathbf{G}$. On peut également avoir des champs Φ_{ij} ayant deux (ou plusièurs) indices se transformant suivant la représentation $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ (ou en général une représentation $\mathcal{R}(G)$)du groupe $\mathbf{G}$.

2.4.2 Symétries en Physique

Les syméties jouent un role fondamentale en physique des hautes énergies, notament dans la détérmination des quantités physiques (calcul des spectres quantiques) mais aussi dans la compréhension des interactions entre particules élémentaires. De point de vue mathématique, les symétries ont une structure de groupe algébrique G ; càd tout élément (symétrie) g a un inverse g^{-1} et il existe un élément neutre $e \equiv I_{id}$. En général, on distingue ; (i) les groupes discrets sans grand importance dans ce cours, mais qui pourraient s'averer de grandes utilités dans d'autres études et (ii) les groupes continues (de Lie), dont les les groupes de symetries internes que nous vous voulons décrire ici. Disons quelques mots sur les groupes discrets..

Groupes discrets

Ce type groupe de symétrie G a un nombre d'élément N discret (en pratique N est fini)

$$G = \{g_1 \equiv e, g_2, ..., g_N\} = \{g_i; \quad i \in \mathbf{J} = \{1, ..., N\}\}. \tag{2.73}$$

Comme exemples qui revient souvent dans des applications, nous citons

1.*Groupe cyclique, $G = Z_N$*

$$Z_N = \left\{g_i = \omega^i; \quad i \in \mathbf{J} = \{1, ..., N\}\right\}, \tag{2.74}$$

ou $\omega = \exp i\frac{2\pi}{N}$ est appelé le générateur du groupe. Tous les éléments de Z_N sont exprimés en termes de ω. La relation naturelle $\omega^N = 1$ est appelé loi du groupe. Noter que les éléments de Z_N commutent entre eux ;

$$g_i g_j = \omega^i \omega^j = \omega^{i+j} = g_{i+j} = g_j g_i \tag{2.75}$$

On dit que Z_N est un groupe discret commutatif ou abelian. Cette propriété n'est valable pas pour tous les groupes discrets ; il existe aussi des groupes discrets non abelian ;

2.*Groupe dihedral, $G = D_{2N}$*

Ce groupe non commutatif à $2N$ éléments $g_i = a^i$ et $g_{i+N} = ba^i$, $i = 1, ..., N$, admet deux générateurs a et b et une loi de groupe donné par $a^n = b^2 = I_{id}$; $ba = a^{-1}b$ dont une solution est ;

$$a = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}; \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.76}$$

On peut citer plusieurs autres groupes discrets ; par exemple le groupe produit tensoriel $Z_N \otimes Z_N$ ayant N^2 éléments, parfois noté tout simplement par $Z_N \times Z_N$.

2.4.3 Groupes de symétries continues

C'est ce type de groupes qui intervienent en théorie quantique des champs (théorie de jauge) ; ils sont à la base des modèles d'unification des forces fondamentales de la nature. Ce sont des groupes G ayant une infinité continue d'éléments g. Ces ensembles sont caractérisés par des parametres continues $\alpha_1, ..., \alpha_d$ (paramètres de groupe).appartenant à des intervalles $\mathbf{J} \subset \mathbf{R}^d$ ou $\mathbf{C}^d$. Une classe importante de ce type de groupes est donné par les *groupe de Lie* dont les exemples standards sont offerts par les symétries classiques ; symétries de translations, les rotations dans les éspaces reels et complexes euclidiens ou pseudoeuclidiens. Dans ce cas, les éléments $g(\alpha_1, ..., \alpha_d)$ du groupe de Lie $\mathbf{G}$ ont une forme très particulière à savoir

$$g(\alpha_1, ..., \alpha_d) = \exp i(\alpha_1 T_1 + ... + \alpha_d T_d) \equiv \exp i\left(\sum_{n=1}^{d} \alpha_n T_n\right), \tag{2.77}$$

ou $\{T_n\}$ sont les générateurs du groupe G ou plus précisement les générateurs de l'algèbre de Lie $\mathbf{g}$ associé au groupe $\mathbf{G}$. Autement dit ; le groupe $\mathbf{G}$ peut etre vue comme l'exponentielle de $\mathbf{g}$ généralement définie par les relations de commutations suivantes,

$$[T_i, T_j] = C_{ij}^k T_k, \tag{2.78}$$

ou C_{ij}^k sont les constantes de structures satisfaisant les identités de jacobi. Pour plus de détails voir cours du Master PM. Notons au passage que selon que les paramètres du groupe dépendent des coordonnées d'espace temps $\{x\}$ ou non ; on distingue :

Groupe de Lie globale :

$$\partial_\mu \alpha_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_n = \text{cstes spatio-temporelles} \tag{2.79}$$

Groupe de Lie local

$$\partial_\mu \alpha_n \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_n = \alpha_n(x) \tag{2.80}$$

C'est deuxieme type de groupe qui intervient en théorie de Jauge de yang-Mills et de la gravitation. En supersymétrie, nous aurons une situation similaire ; selon que la parametres ϵ du groupe de supersymétrie dépendent de coordonnées x ou non, nous ditinguerons : (a) Supersymétrie globale $\partial_\mu \epsilon = 0$, objet de cette première partie du cours et (b) supergravité ou l'on a $\partial_\mu \epsilon \neq 0$.

Groupes de Lie compactes & non compactes.

Les exemples de g*roupes de Lie compactes ou non compactes* qui reviennent le plus souvent en théorie quantiques des champs sont :

Groupes compactes

Ce sont des groupes dont les éléments sont du type eq(1.72) avec des α_j reels, $\alpha_j \in [0, 2\pi]$, et des générateurs T_n hermitians, $T_n^\dagger = T_n$. C'est le cas des groupes classiques unitaires $U(N)$ et orthogonaux $SO(N)$. Les éléments g, $g = \exp i\alpha$ with $\alpha = \alpha_n(x) T_n$, de ces groupes agissent sur les champs de matières Φ (scalaires ϕ et spinoriels ψ) et les champs de jauge $A_\mu(x)$ comme

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= g\Phi(x) g^{-1} \\ A'_\mu(x) &= gA_\mu(x) g^{-1} - g\partial_\mu g^{-1}. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Infinitésimalement, ces transformations se réduisent à :

$$\begin{aligned} \delta\Phi_j &= i(\alpha)_{jk} \Phi_k; \\ \delta A_\mu &= \partial_\mu \alpha + i[\alpha, A_\mu] \end{aligned} \tag{2.82}$$

Une des particularités des ces transformations est qu'elles présérvent le spin des champ ; un boson est échangé en un boson et un fermion en yn fermion. Autrement dit les groupes de symétries eqs(1-78-79) transforment un scalaire en un scalaire, un spineur en un spineur du meme type et un champ vectoriel en un champ vectoriel. Cette propriété ne sera plus valable en supersymétrie ou bosons sont echangés en fermions et vice versa.

Groupes non compactes

Dans ce cas, certains des paramètres α_j du groupe n'appartienent plus à des intervalles fermés bornés. C'est le cas du groupe $SO(1,3)$ ou les paramétres ω_{0i} des "rotations" dans les plans (x^0, x^i) sont des nombres réels quelconque. Le volume de l'espace des paramètres ω_{0i} est donc infini

$$\int_{R^3} d\omega_{01} d\omega_{02} d\omega_{03} = \infty, \tag{2.83}$$

contairement aux rotations ω_{ij} dans les plans (x^i, x^j) ayant un espace de volume proportionnel à π^3.

Théorème de Coleman-Mandula

Le groupe G des symétries les plus générales de la matrice **S** des TQC est

$$G = \mathcal{P}_4 \otimes G_{interne} \tag{2.84}$$

Autrement dit les relations de commutations entre les différents générateurs du groupe G sont

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0. \\
[M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i\left(\eta_{\nu\rho} P_\mu - \eta_{\nu\rho} P_\mu\right) \\
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i\left(\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma}\right) + (\rho \longleftrightarrow \sigma), \\
[P_\mu, B_l] &= 0, \qquad [M_{\mu\nu}, B_l] = 0, \\
[B_l, B_m] &= iC_{lm}^k B_k.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Les générateurs B_l de $G_{interne}$, satisfaisant les relations de commutations usuelles $[B_l, B_m] = iC_{lm}^k B_k$, et commutent avec les générateurs de de $SO(1,3)$. Ce sont donc des scalaires de Lorentz ; les B_l ne peuvent pas avoir des indices de Weyl et de Lorentz.

Dans le chapitre suivant, nous allons voir que la supersymétrie va au delà de cette restriction en permettant l'introduction d'anticommutateurs au meme titre que les commutateurs dans le jeu. La supersymétrie généralise donc la notion d'algèbre de Lie basée sur le crochet de Lie et ouvrira par la meme occasion un nouveau chapitre en theorie d'algèbre : c'est la théorie des super-algebres de Lie. Dans le chapitre suivant, nous étudions une algèbre particulière de cette théorie en connection avec la physique des hautes energies.

Chapitre 3

Algèbre Supersymétrique & Ses Représentations [1]

Le premier modèle de théorie quantique des champs à $(1+3)$ dimensions invariant supersymétrique a été découvert par Wess et Zumino (WZ) en 1974. Depuis, ce dévelopement spéctaculaire a ouvert tout un axe de recherche en physique des hautes energies, théorie des superalgèbres de Lie et en supergéométrie differentielle. Cette issue, toujours d'actualité, continue à révéler de plus en plus de merveilles à nos jours et semble inévitable dans toute construction quantique consistente. Aujourd'hui, il existe des modèles supersymetriques dans les diverses dimensions d'espace temps $(1+p)$ avec $0 \leq p \leq 10$ avec une multitude d'applications physiques ; en particulier en phénoménologie des particules élémentaires, en physique des phénomènes critiques mais aussi en mathématiques physiques ou des connections remarquables avec la géometrie des variétés differentielles complexes et les modèles sigma non lineaires ont été mise en surface.

La supersymétrie $S\mathcal{P}_4^N$ est une extension de l'invariance relativiste $\mathcal{P}_4$; mais elle n'est pas une symétrie exacte de la nature comme c'est le cas du groupe de Poincaré. Elle prévoit plein de particules qui à nos jours n'ont jamais été observé et doit etre donc brisée dans des scénarios réalistes. En dépit de cela, la supersymétrie semble un chainon fondamental dans la compréhension de l'évolution de notre univers ; le modèle standard supersymétrique minimal (SSMM) des interactions electro-faibles (Chapitres 5-xx) et plus généralement la théorie des supercordes, supposées des cadres adéquats d'unification des forces fondamentales de la nature, césseront d'etre consistants sans la supersymétrie.

Dans ce chapitre, nous étudions le support algèbrique de la supersymétrie et ses représentations irréductibles et unitaires. Parmi les propriétés fondamentales de ces représentations, que nous allons établir au fur et à mesure de cette étude, est qu'il existe la possibilité d'echanger bosons en fermions et vice versa, chose qui n'est pas permi en TQC non supersymétriques. En liaison avec cette proriété extraordinaire ; il y'a cependent un prix à payer ; en occurence l'existence d'une pleinitude de particules supersymétriques étranges avec un spectre de masses plus étranges encore du moins à l'échelle des énergies accessibles. Nous y reviendrons sur la nature précise de ces nouvelles particules et de leurs phénoménologies dans les chapitres suivants.

L'organisation de ce chapitre est comme suit : Dans la section 2.1, nous dérivons la forme générale de l'algèbre supersymétrique $S\mathcal{P}_4^N$ à quatre dimensions. Cette algèbre admet un Casimir, en occurence $P^2 = -M^2$; mais aussi des charges centrales Z qui, ensemble, joueront un role fondamentale dans la classification des réalisations de $S\mathcal{P}_4^N$. Dans la section 2.2, nous étudions ses représentations irreductibles et unitaires massives, $M \neq 0$, sans charges centrales $Z = 0$. Dans la section 3.3, nous construisons les représentations non massives $M \neq 0$. Les représentations supersymétriques avec charges centrales $Z \neq 0$ sont étudiées dans la section 2.4.

1. Notes préliminaires pour les étudiants du Master PM ; l'orthographe et la grammaire n'ont pas été verifié !

3.1 Algèbre Supersymétrique à 1+3 dimensions

Comme le modèle de Wess-Zumino est un modèle de théorie quantique des champs qui va au delà du théorème no go de Coleman et Mandula ; il était naturel de en reprendre les résulats de ce théorème en connection avec le résultat de Wess et Zumino. Cette étude a été entrepris en premier temps par Lopuzanski, Haag & Sohnius (LHS), et ensuite par plusieurs autres auteurs. Nous donnons ce résultat après avoir rappeler certain outils d'algèbre de Lie et de théorie quantiques des Champs.

3.1.1 Graduation

Le théorème LHS, que nous énoncerons dans la sous section 2.1.2, fait intervenir une nouvelle structure qui était pratiquement inconnue avant les années 1970 ; il est basé sur l'introduction au meme pied d'égalité des anticommutateurs

$$\{A, B\} = AB + BA \tag{3.1}$$

que les commutateurs

$$[C, D] = CD - DA. \tag{3.2}$$

Cette structure algèbrique qui fait intervenir à la foix des commutateurs et des anticommutateurs est appelée algèbre de Lie Z_2 graduée ou superalgèbre tout court. Ces superalgèbres etaient inabituelles en théorie de Lie usuelle ou seul le crochet de Lie etait d'usage. Pour mieux illustrer les choses, nous commencons par fixer les idées.

Bosons & Fermions Les opérateurs que nous allons rencontrer ici sont de deux types : (i) opérateurs bosoniques B_I avec une statistique commutatntes et (ii) opérateurs fermioniques F_α avec une statistique anticommutantes.

1- *Opérateurs Bosoniques*

Les B_I de ce cours sont soit les générateurs du groupe Poincaré $\mathcal{P}_4$,

$$B_I \equiv P_\mu, M_{\mu\nu}; \tag{3.3}$$

soit celles du groupe de Lie des symétrie internes G_{int}. Ce dernier peut etre imaginer comme $G_{int} = U(1) \times SU(2)$ engendré par

$$B_I \equiv Y, \sigma^x, \sigma^y, \sigma^z; \tag{3.4}$$

pour le groupe de supersymétrie $S\mathcal{P}_4^2$,ou encore $U(1) \times SU(4)$ de dimension 16 pour le groupe $S\mathcal{P}_4^4$.

Pour tous ces opérateurs B_I, aucune phase $\exp i\varphi$ n'est générée quand on transpose n'importe quelle paire $B_I B_J$ en $B_J B_I$ comme indiqué ci dessous,

$$B_I B_J = B_J B_I + C_{IJ}^K \ B_K, \tag{3.5}$$

tout ce qu'on obtient est un shift $C_{IJ}^K \ B_K$ due à la structure du crochet de Lie. Les $C_{IJ}^K = -C_{JI}^K$ sont naturellemnt les constantes de structures usuelles satisfaisant les identités de Jacobi.

En théorie quantique des champs avec des symétries continues de Lie incarnées par des courants conservées J_I^μ, $\partial_\mu J_I^\mu(x) = 0$, les B_I ne sont autres que les charges conservées asociées.

$$B_I = \int d^3x \ J_I^\mu(x), \qquad [B_I, B_J] = C_{IJ}^K \ B_K. \tag{3.6}$$

Ce sont des fonctions des champs $\Phi(x)$ de particules du système physique. A titre d'exemple, il suffit de rappeler ci-après le courant éléctrique J^μ de QED et le courant J_a^μ de Fermi des interactions faibles ;

$$J^\mu = ie\overline{\psi}^\alpha \gamma_{\alpha\beta}^\mu \psi^\beta, \qquad J_a^\mu = iG_F \overline{\Psi}_i^\alpha \gamma_{\alpha\beta}^\mu \boldsymbol{\sigma}_{ij}^a \Psi_j^\beta. \tag{3.7}$$

ou e est la charge éléctrique et ou G_F est la constante de Fermi. Les charges conservées B et B_a sont données par des intégrales spatiales comme dans l'eq(2.5).

2- *Opérateurs Fermioniques*

Les opérateurs F_α, satisfaisant des relations d'anticommutations, sont des *spineurs de Majorana* avec une phase $\exp \pm i\pi$ générée lors de leurs transpositions

$$F_\alpha F_\beta = -F_\beta F_\alpha + C^K_{\alpha\beta} B_K; \tag{3.8}$$

mais aucune phase entre les F_α et les B_I,

$$B_I F_\alpha = F_\alpha B_I + C^\beta_{I\alpha}\ F_\beta.$$

Les termes additionels $C^K_{\alpha\beta} B_K$ et $C^\beta_{I\alpha}\ F_\beta$. sont dictés par le théorème spin statistique et la fermeture de l'algèbre supersymétrique. De plus tout comme pour les B_I, les opérateurs F_α sont intérprétés comme des charges physiques qui seront associées à des courants conservés férmioniques $J^\mu_\alpha(x)$ en théorie quantique des champs supersymétriques.

$$F_\alpha = \int d^3x\ J^\mu_\alpha(x), \qquad \{F_\alpha, F_\beta\} = C^K_{\alpha\beta} B_K. \tag{3.9}$$

Les charges spinorielles de Majorana F_α, souvent notées par Q_α, sont des charges d'un type nouveau dans le sense qu 'elles n'existent ni en QED, ni dans le modèle standard des interactions electro-faibles ni encore en chromodynamique quantique (QCD) usuelles. Plutard on dévelopera des modèles physiques quasi-réalistes de théorie quantiques des champs supersymétriques. Pour le moment reprenons le théorème LHS.

3.1.2 Théoreme LHS

En partant des memes conditions que celles utilisées dans l'établissement du théorème de Coleman-Mandula et en permettant, en plus des générateurs de Poincaré P_μ et $M_{\mu\nu}$, satisfaisant les relations de commutations (1.16), un ensemble de N générateurs fermioniques $Q^i_\alpha = \left(Q^i_a, \overline{Q}^{\dot{a}}_i\right)$, $i = 1, 2, ..., N$, dans des représéntations de Majorana avec des relations d'anticommutation, le théorème de Coleman mandula se généralise comme suit :

Enoncé du théorème LHS (1) Parmi toutes les algèbres de Lie Z_2 graduée engendrées par $\left\{P_\mu, M_{\mu\nu}, Q^i_a, \overline{Q}_{\dot{a}j}, B_l\right\}$, seule l'algèbre supersymétrique $S\mathcal{P}_4$ et ses extensions $S\mathcal{P}^N_4$, incluant des charges centrales Z^{ij} et $\overline{Z}_{ij}$, générent des symétries de la matrice S compatible avec la théorie quantique des champs.

(2) La forme la plus générale de ces superalgèbres $S\mathcal{P}^N_4$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\left\{Q^i_a, \overline{Q}_{\dot{a}j}\right\} &= -2\sigma^\mu_{a\dot{a}} P_\mu \delta^i_j, \\
\left\{Q^i_a, Q^j_b\right\} &= \varepsilon_{ab} Z^{ij}; \qquad \left\{\overline{Q}_{\dot{a}i}, \overline{Q}_{\dot{b}j}\right\} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \overline{Z}_{ij}, \\
\left[Z^{ij}, S\mathcal{P}^N_4\right] &= 0; \qquad \left[\overline{Z}_{ij}, S\mathcal{P}^N_4\right] = 0 \\
\left[P_\mu, P_\nu\right] &= 0; \qquad \left[M_{\mu\nu}, P_\rho\right] = i\left(\eta_{\nu\rho} P_\mu - \eta_{\nu\rho} P_\mu\right) \\
\left[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}\right] &= -i\left(\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma}\right) + (\rho \longleftrightarrow \sigma), \\
\left[M_{\mu\nu}, Q^i_a\right] &= -\sigma^{\mu\nu b}_a Q^i_b; \qquad \left[M_{\mu\nu}, \overline{Q}_{\dot{a}j}\right] = \overline{\sigma}^{\mu\nu\dot{b}}_{\dot{a}} \overline{Q}_{\dot{b}j}; \\
\left[B_l, B_m\right] &= iC^k_{lm} B_k; \qquad \left[P_\mu, B_l\right] = 0, \qquad \left[M_{\mu\nu}, B_l\right] = 0, \\
\left[B_l, Q^i_a\right] &= -\left(S_l\right)^i_j Q^j_a, \qquad \left[B_l, \overline{Q}_{\dot{a}i}\right] = \left(S^*_l\right)^j_i \overline{Q}_{\dot{a}j}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

ou

$$Z^{ij} = -Z^{ji} = \sum a^{ij}_l B_l$$

et son complexe conjugé $\overline{Z}_{ij}$ sont des opérateurs appartenant au centre de la superalgèbre $S\mathcal{P}^N_4$. Regardons de près ces relations et voyons ce qu'elles nous apprennent.

3.1.3 Propriétés Particulières de $S\mathcal{P}_4^N$

Une premier coup d'oeil sur les relations (2.10) montre qu'elles font intervenir grosso-modo quatre blocs ; dont certains nous sont familiers. Commencons tout d'abord par redécouvrir ce qu'on connait déja et ensuite essayons d'extraire des informations utiles des nouvelles relations.

Bloc 1 : Symétrie de Poincaré

L'algèbre (le groupe) supersymétrique $S\mathcal{P}_4^N$ contient comme sous algèbre (sous groupe) la symétrie de Poincaré à savoir,

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0. \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i\left(\eta_{\nu\rho} P_\mu - \eta_{\nu\rho} P_\mu\right) \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i\left(\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma}\right) + (\rho \longleftrightarrow \sigma)\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Les théories des champs supersymétriques sont alors automatiquemet invariantes rélativites. C'est pour cela que souvent on se réfèrera à l'algèbre supersymétrique comme algèbre superPoincaré qu'on note $S\mathcal{P}_4^N$; ou N désigne le nombre de charges supersymétriques de Majorana à $1+3$ dimensions. Rappelons au passage que cette symétrie admet deux Casimir P^2 et W^2 et par suite de nombres quantiques, en occurence la masse m au repos et le spin $s = \frac{k+l}{2}$. Nous verrons dans un moment que l'opérateur W^2 cessera d'etre un Casimir en théorie supesymétrique.

Bloc 2 : Symetrie Interne

La superalgèbre SP_4^N contient également, comme sous algèbre, l'algèbre de symétrie interne

$$\left[[B_l, B_m] = iC_{lm}^k B_k\right]. \tag{3.12}$$

C'est l'algèbre du groupe de symétrie G_{in} (R-symétrie) qui agit comme un groupe d'automorphisme faisant tourner les N charges supersymétriques entre-elles. Cette sous symétrie jouera un grand role dans l'étude des representations supersymétriques ; elle permet de classer leurs contenus en particules.

Bloc 3 : Théorème de Coleman Mandula

Le théorème LHS décrit par les eqs (2.10) est une extension du théorème de Coleman Mandula ;

$$[P_\mu, B_l] = 0, \qquad [M_{\mu\nu}, B_l] = 0, \tag{3.13}$$

qui stipule que les générateurs B_l des symétries internes sont des scalaires de Lorentz. Ceci veut dire qu'il n'exite aucune connection entre les deux types de charges et donc aucun transfert d'informations entre les deux symétries géometrique et interne. Cette contrainte est naturellement dépassée en supersymétrie.

Bloc 4 : Théorème LHS.

C'est ce bloc qui nous concerne en premier lieu ici ; nous allons l'ouvrir en sous blocs en vue de mieux illustrer ce qu'il contient réellement.

(a) Sous Bloc 41.

Il concerne la structure des générateurs fermioniques $Q_a^i, \overline{Q}_{\dot{a}j}$, qu'on va appeler aussi générateurs supersymétriques ;

$$\left[M_{\mu\nu}, Q_a^i\right] = -\sigma_a^{\mu\nu b} Q_b^i; \qquad \left[M_{\mu\nu}, \overline{Q}_{\dot{a}j}\right] = \overline{\sigma}_{\dot{a}}^{\mu\nu\dot{b}} \overline{Q}_{\dot{b}j}; \tag{3.14}$$

ou $\sigma_a^{\mu\nu b}$ et $\overline{\sigma}_{\dot{a}}^{\mu\nu\dot{b}}$ sont réspectivement les générateurs du groupe de Lorentz dans les réprésentations spinorielles $(1/2, 0)$ et $(0, 1/2)$. Comme pour les champs fermioniques, ces générateurs satisfont des relations de commutations avec les bosons et des relations d'anticommutations entre eux. C'est la relation spin-statistique de la théorie quantique des champs. Ainsi, les Q_a^i et $\overline{Q}_{\dot{a}j}$ ont beaucoup affaire avec le groupe de Poincaré. Plutard, on verra qu'ils ont également affaire avec le groupe de symétrie interne.

(b) Sous Bloc 42

C'est ce bloc qui constitue vraiment la nouveauté en théorie des superalgèbres ; car il fait intervenir des anticommutateurs entre des charges fermioniques donnant des générateurs bosoniques.

$$\begin{aligned} \left\{Q_a^i, \overline{Q}_{\dot{a}j}\right\} &= -2\sigma^\mu_{a\dot{a}} P_\mu \delta^i_j, \\ \left\{Q_a^i, Q_b^j\right\} &= \varepsilon_{ab} Z^{ij}, \\ \left\{\overline{Q}_{\dot{a}i}, \overline{Q}_{\dot{b}j}\right\} &= \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \overline{Z}_{ij}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ici P_μ est l'opérateur enérgie-impulsion et $Z^{ij} = \sum_l a_l^{ij} B_l$ et $\overline{Z}_{ij} = \sum_l \overline{a}^l_{ij} B_l$ sont les charges centrales de l'algèbre supersymétrique ; c'est a dire des générateurs qui commutent avec tous les autres, soit

$$\left[Z^{ij}, S\mathcal{P}_4^N\right] = \left[\overline{Z}_{ij}, S\mathcal{P}_4^N\right] = 0. \tag{3.16}$$

Les $Z^{ij} = -Z^{ji}$ et $\overline{Z}_{ij} = -\overline{Z}_{ji}$ constituent un système de $N(N-1)/2$ opérateurs complexes et n'existent que pour $N \geq 2$. Quoiqu'elles ont l'air d'etre des charges triviales, les charges centrales Z^{ij} et $\overline{Z}_{ij}$ vont jouer un role très important au niveau de l'étude des représentations supersymétriques et de leurs classifications. Ces charges exhibent des propriétés très remarquables en théorie des champs supersymétriques $N = 2$ à $D = 4$. Nous les commenterons avec plus de détails dans la sous section 2.1.3.

(c) Sous Bloc 43

Outre les indices spinoriels de $Sl(2, C) \sim SO(1, 3)$, les générateurs supersymétriques Q_a^i et $\overline{Q}_{\dot{a}j}$ portent également un indice i qui prend les valeurs $i = 1, ..., N$. Ceci signifie ques les générateurs supersymétriques se transforment dans des representation S_l et $(-S_l^*)$ de l'algèbre de Lie G_{in} engendrée par les B_l.

$$\left[B_l, Q_a^i\right] = -\left(S_l\right)^i_j Q_a^j, \qquad \left[B_l, \overline{Q}_{\dot{a}i}\right] = \left(S_l^*\right)^j_i \overline{Q}_{\dot{a}j}, \tag{3.17}$$

Ces relations sont très significatives car elles montrent clairement comment la supersymétrie connecte symétrie géométrique $\mathcal{P}_4$ et symétrie interne G_{in}.

$$\text{Symétrie Géométrique } \mathcal{P}_4 \quad \Longrightarrow \left[Q_a^i \text{ - } \overline{Q}_{\dot{a}j}\right] \quad \Longleftarrow \quad \text{Symétrie Interne} \tag{3.18}$$

3.1.4 Charges Centrales de $S\mathcal{P}_4^N$

Puisqu'elles commutent avec tous les opérateurs de$S\mathcal{P}_4^N$, les charges centrales Z^{ij} et $\overline{Z}_{ij}$ peuvent etre diagonalisée simultanement dans une base $\mathcal{B}_{propre} \equiv \mathcal{B}_p$ appropriée. Une facon de le faire est de factoriser la propriété d'antisymétrie des Z^{ij} et $\overline{Z}_{ij}$. Ceci peut etre achevé en décomposant la représentation **N** du groupe de symétrie interne comme $(2, [N/2])$ et en réalisant Z^{ij} comme produit tensoriel d'une matrice 2×2 antisymetrique ε et une matrice symétrique $[N/2] \times [N/2]$ diagonalisable S. Autrement dit l'indice i est vu comme double indice ; $i \equiv (\tau, i')$ avec $\tau = 1, 2$ et $i' = 1, ..., [N/2]$. Ainsi nous avons,

$$\begin{aligned} i &= 1, ..., N \qquad \rightarrow \qquad i = (\tau, i'), \qquad \tau = 1, 2; \quad i' = 1, ..., [N/2], \\ j &= 1, ..., N \qquad \rightarrow \qquad j = (\sigma, j'), \qquad \sigma = 1, 2; \quad j' = 1, ..., [N/2], \end{aligned} \tag{3.19}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} Q_a^i &= Q_a^{\tau i'}; \qquad \overline{Q}_{\dot{a}j} = \overline{Q}_{\dot{a}\sigma j'} \\ Z^{ij} &= Z^{\tau i' \sigma j'} \equiv \varepsilon^{\tau\sigma} S^{i'j'}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

ou $\varepsilon^{\tau\sigma} = -\varepsilon^{\sigma\tau}$ et $S^{i'j'} = S^{j'i'}$. La matrice Z^{ij} peut etre ré-écrite, sous une forme plus condensée, comme le produit tensoriel de la matrice 2×2 antisymétrique ε et de la matrice $[N/2] \times [N/2]$ symétrique S.

$$Z = \varepsilon \otimes S. \tag{3.21}$$

Comme S est une matrice symétrique, on peut la rendre diagonale $D = VSV^T$ par une transformation complexe V. C'est une matrice $[N/2] \times [N/2]$ et s'étendent comme $U = I_2 \otimes V$ au niveau de tous l'espace. Soient $\widetilde{Q}_a^i \widetilde{Q}_a^i = U_k^i Q_a^k$ et $\overline{\widetilde{Q}}_{\dot{a}i} \overline{\widetilde{Q}}_{\dot{a}i} = \overline{Q}_{\dot{a}j} U_i^{\dagger j}$ les générateurs supersymétriques dans la base $\mathcal{B}_p$, il s'ensuit que

$$Z^{ij} \to \widetilde{Z}^{ij} = U_k^i U_l^j Z^{kl} = \left(UZU^T\right)^{ij}, \tag{3.22}$$

ou encore, pour le cas N entier pair,

$$\widetilde{Z}^{ij} = \varepsilon \otimes VSV^T = \varepsilon \otimes D, \tag{3.23}$$

et la relation suivante pour le cas N entier impair ;

$$\widetilde{Z}^{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon \otimes D & \\ & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

Dans ces relations, D est une matrice $N/2 \times N/2$ diagonale de la forme

$$D = \begin{pmatrix} Z_1 & & & & \\ & Z_2 & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & & & & Z_{[N/2]} \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

Ainsi l'algèbre supersymétrique (2.15) s'écrira dans la base $\mathcal{B}_p$ comme,

$$\begin{aligned} \left\{\widetilde{Q}_a^{\tau i'}, \overline{\widetilde{Q}}_{\dot{a}\sigma j'}\right\} &= -2\sigma^\mu_{a\dot{a}} P_\mu \delta^{i'}_{j'} \delta^\tau_\sigma, \\ \left\{\widetilde{Q}_a^{\tau i'}, \widetilde{Q}_b^{\sigma j'}\right\} &= \varepsilon_{ab} \varepsilon^{\tau\sigma} Z_{i'} \delta^{i'j'}, \qquad \left\{\overline{\widetilde{Q}}_{\dot{a}\tau i'}, \overline{\widetilde{Q}}_{\dot{b}\sigma j'}\right\} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \varepsilon_{\tau\sigma} \overline{Z}_{i'} \delta_{i'j'}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Nous reprenons cette forme de l'agèbre supersymétrique plutard lors de l'études des réalisations avec charges centrales. Pour le moment, nous retournons à la construction des représentations irréductibles et unitaires de $S\mathcal{P}_4^N$.

3.2 Représentations Irréductibles & Unitaires de S$\mathcal{P}_4^N$

Comme la superalgèbre $S\mathcal{P}_4^N$ fait intervenir des commutateurs et des anti-commutateurs, il est plus facile d'étudier séparément leurs réalisations. Ainsi on fixera notre attention dans un premier temps sur les anticommutateurs, ensuite nous nous considérons la superalgèbre dans sa globalité.

3.2.1 Représentations supersymétriques

A. Etats à une particule

Outre les générateurs fermioniques Q_a^i et $\overline{Q}_{\dot{a}j}$, les relations d'anticommuations (2.15) avec $Z^{ij} = 0$ font intervenir l'opérateur P_μ. Ce dernier mesure l'énergie impulsion totale des états de particules $|p_1, ..., p_n>$ de l'espace de Hilbert-Fock des états quantiques du système physique,

$$P_\mu |p_1, ..., p_n> = \left(\sum_i p_{\mu i}\right) |p_1, ..., p_n> \tag{3.27}$$

Pour le cas simple d'un état $|p>$ à une particule libre, avec $p = -m^2$, nous avons la relation suivante

$$\begin{aligned} P_\mu |p &> = p_\mu |p>; \\ P^2 &= -E^2 + \mathbf{P}^2 = -M^2 = -m^2 I \end{aligned} \tag{3.28}$$

qui se réduit à $p = (-m, \mathbf{0})$ dans le repère de repos de la particule ou $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Dans ce repère très particulier, nous avons

$$|p >= |m; \mathbf{p} = \mathbf{0} > \tag{3.29}$$

et donc,

$$P_\mu = (-M, \mathbf{0}) \tag{3.30}$$

Le retour à un repère quelconque ou $|p' >= |E'; \mathbf{p'} \neq \mathbf{0} >$ et $P'_\mu = (-\mathbf{E'}, \mathbf{P'})$ est assurée par les boost de Lorentz.

$$p'^\mu = \Lambda_0^\mu \ E + \Lambda_i^\mu \ p^i = \Lambda_0^\mu \ m. \tag{3.31}$$

L'usage de ce repère très particulier de repos va nous faciliter énormément la tache dans l'etude explicite des représentations supersymétriques irreductibles. En effet, comme $P_\mu = (-M, \mathbf{0})$ et vu que le produit scalaire des quadri-vecteurs ne dépenedent pas du choix du repère,

$$P_\mu Y^\mu = P'_\mu Y'^\mu,$$

tout produit type $P_\mu Y^\mu$ des quadri-vecteurs P_μ and Y^μ se réduit à $P_0 Y^0$ dans le repère de repos. En particulier nous avons $-2\sigma^\mu_{a\dot{a}} P_\mu = 2\sigma^0_{a\dot{a}} M$; qui se réduit davantage à

$$2\sigma^0_{a\dot{a}} M = \delta_{a\dot{a}}, \tag{3.32}$$

avec le choix [2] $M = \frac{1}{2}$ et en tenant compte du fait que $\sigma^0_{a\dot{a}} = \delta_{a\dot{a}}$.

En résumé, dans le repère de repos, nous pouvons toujours ramener la relation $2\sigma^\mu_{a\dot{a}} P_\mu$ apparaissant dans l'eq(2.15) à la forme simple suivante,

$$-2\sigma^\mu_{a\dot{b}} P_\mu = \delta_{ab}. \tag{3.33}$$

Par des boost de Lorentz eq(2.31), nous pouvons aller à tous les autres repères ou $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$. Notre stratégie est de construire les représentations supersymétriques de l'algèbre (2.15) en profitant des simplifications du type celle donnée par la relation (2.33). Une foix le travail fait, nous utilisons des transformations de Boost de Lorentz pour couvrir les représentations supersymétriques avec $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$. Cette facon de faire, connue sous le nom de méthode de Wigner ; a été utilisée auparavant dans la construction des représentations du groupe de Poincaré ; elle se généralise aisement dans notre présente étude.

B. Représentations Irreductibles d'états à une particule massive

Comme les relations d'anticommutations des charges supersymétriques Q^i_a et $\overline{Q}_{\dot{a}j}$

$$\begin{aligned} \left\{Q^i_a, \overline{Q}_{\dot{a}j}\right\} &= -2\sigma^\mu_{a\dot{a}} P_\mu \delta^i_j, \\ \left\{Q^i_a, Q^j_b\right\} &= \varepsilon_{ab} Z^{ij}, \\ \left\{\overline{Q}_{\dot{a}i}, \overline{Q}_{\dot{b}j}\right\} &= \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \overline{Z}_{ij} \end{aligned} \tag{3.34}$$

dépendent de $P_\mu = (-M, \mathbf{0})$ et de Z^{ij}, leurs solutions vont naturellement en dépendre également. Ainsi nous distinguerons les trois cas particuliers suivants : **(i)** $M \neq 0, Z = 0$, **(ii)** $M \neq 0, Z \neq 0$, et **(iii)** $M = 0, Z = 0$. Le cas $M = 0, Z \neq 0$ est interdit car, comme on va le voir, $|Z| \leq 2|M|$. Dans cette sous section nous allons traiter avec détails le premier cas, $M \neq 0, Z = 0$; nous reviendrons sur les autres cas dans les sections 2.3 & 2.4.

2. Dans le repère de repos de la particule, $\left\{Q^i_a, \overline{Q}_{\dot{a}j}\right\} = -2\sigma^\mu_{a\dot{a}} P_\mu \delta^i_j$ se réduit à $\left\{Q^i_a, \overline{Q}_{\dot{a}j}\right\} = 2M \delta_{ab} \delta^i_j$. Par le chamgement $\mathbf{a}^i_a = \frac{1}{\sqrt{2M}} Q^i_a$ et $\mathbf{a}^{i\dagger}_a = \frac{1}{\sqrt{2M}} \overline{Q}^i_{\dot{a}}$, nous avons $\left\{\mathbf{a}^i_a, \mathbf{a}^\dagger_{bj}\right\} = \delta_{ab} \delta^i_j$; ce qui revient tout simplement à prendre $M = 1/2$.

Cas $M \neq 0$ *et* $Z = 0$. Tenant compte des eqs(2.33), ainsi que de l'identité $\overline{Q}_j^{\dot{a}} = \left(Q_a^j\right)^\dagger$, l'algèbre supersymétrique (2.15) se réduit à une algèbre de Clifford à $(2N + 2N)$ dimensions.

$$\begin{aligned} \left\{Q_a^i, Q_b^{\dagger j}\right\} &= \delta^{ij}\delta_{ab}, \\ \left\{Q_a^i, Q_b^j\right\} &= 0, \qquad \left\{Q_a^{i\dagger}, Q_b^{j\dagger}\right\} = 0. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Ainsi il y'a $2N$ opérateurs $Q_b^{\dagger j}$;

$$\left\{Q_a^{i\dagger}, 1 \leq i \leq N, a = 1, 2\right\} = \left\{Q_1^{\dagger 1}, ..., Q_1^{\dagger N}; \qquad Q_2^{\dagger 1}, ..., Q_2^{\dagger N}\right\}, \tag{3.36}$$

et $2N$ opérateurs Q_a^i,

$$\left\{Q_a^i, 1 \leq i \leq N, a = 1, 2\right\} = \left\{Q_1^1, ..., Q_1^N; \qquad Q_2^1, ..., Q_2^N\right\}. \tag{3.37}$$

que nous intérpretons respectivement comme des opérateurs de création et d'annihilation de particules supersymétriques.

Groupe d'Automorphisme de $S\mathcal{P}_4^N$

Comme il y'a N operateurs de Majorana, toutes les combinaisons linéaires unitaires de ces opérateurs peuvent etre vues comme générateurs supersymétriques. L'ensemble des matrices de passages entre ces différents bases forme un groupe communément désigné par groupe d'automorphisme de $S\mathcal{P}_4^N$. Parmi les groupes de symétries faisant tourner les générateurs de Majorana entre eux, on distingue :

(i) Groupe $SU(2) \times U(N)$

Les générateurs supersymétriques Q_a^i et $Q_a^{i\dagger}$ exhibent une symétrie $SU(2) \times U(N)$ manifeste portée par les deux types d'indices, $a = 1, 2$ et $i = 1, ..., N$. Sous des transformations de $SU(2) \times U(N)$ suivantes,

$$\begin{aligned} Q_a^i &\rightarrow Q_a'^i = \left(U_a^b \otimes V_j^i\right) Q_b^j; \qquad UU^\dagger = I, \det U = 1, \\ Q_a^{i\dagger} &\rightarrow Q_a'^{i\dagger} = Q_b^{j\dagger} \left(U_a^{\dagger b} \otimes V_j^{\dagger i}\right); \qquad VV^\dagger = I, \det V = 1, \end{aligned} \tag{3.38}$$

il n'est pas difficile de voir que les eqs(2.35) restent invariantes.

(ii) Groupe $SO(4N)$

Les eqs(2.35) ont en fait un large groupe d'automorphisme à savoir $SO(4N)$. Ce groupe contient la symétrie $SU(2) \times U(N)$ discutée ci-dessus comme sous groupe ; mais il contient également un autre sous groupe d'automorphisme $SU(2) \times SP(N)$ que nous commentons plutard. Pour rendre la symétrie d'automorphisme $SO(4N)$ transparente, il faut faire le changement suivant

$$\begin{aligned} \Gamma^l &= \frac{1}{\sqrt{4M}}\left[Q_1^i + \left(Q_1^i\right)^\dagger\right], \\ \Gamma^{N+l} &= \frac{1}{\sqrt{4M}}\left[Q_2^i + \left(Q_2^i\right)^\dagger\right], \\ \Gamma^{2N+l} &= \frac{i}{\sqrt{4M}}\left[Q_1^i - \left(Q_1^i\right)^\dagger\right], \\ \Gamma^{3N+l} &= \frac{i}{\sqrt{4M}}\left[Q_2^i - \left(Q_2^i\right)^\dagger\right]. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Ces $4N$ opérateurs hermitiques satisfont les relations d'anticommutations suivantes définissant une algèbre de Clifford dans un espacve à $4N$ dimensions.

$$\{\Gamma^r, \Gamma^s\} = \delta^{rs}; \qquad r, s = 1, ..., 4N. \tag{3.40}$$

Cette algèbre a un groupe d'invariance $SO(4N)$ [3] agissant comme

$$SO(4N) : \Gamma^r \to \Gamma'^r = O^r_s \Gamma^s, \qquad OO^T = I_{4N}, \tag{3.41}$$

dont la représentation spinorielle 2^{2N} est réductible en deux représentations fondamentales irréductibles 2_s^{2N-1} et 2_c^{2N-1}.

$$\mathbf{2}^{2N} = \mathbf{2}^{2N-1} \oplus \mathbf{2}^{2N-1}. \tag{3.42}$$

Nous verrons que cette décomposition jouera un role important dans la classification des représentations supersymétriques irréductibles et unitaires. . Bososns et fermions sont dans chacunes des deux $\mathbf{2}^{2N-1}$.

(iii) Groupe $SU(2) \times SP(N)$

Pour rendre la sous symétrie d'automorphisme $SU(2) \times SP(N)$ transparente, on fait le changement

$$q^l_a = \frac{1}{\sqrt{2M}} Q^l_a; \qquad q^{N+l}_a = \frac{1}{\sqrt{2M}} \varepsilon_{ab} \left(Q^i_b\right)^\dagger \tag{3.43}$$

En prenant les hemitiques conjugés de ces opérateurs, il n'est pas difficile de montrer que l'on a :

$$\left(q^l_a\right)^\dagger = \varepsilon^{ab} q^{N+l}_b; \qquad \left(q^{N+l}_a\right)^\dagger = -\varepsilon^{ab} q^l_b \tag{3.44}$$

Ces deux relations peuvent etre re-écrites sous forme plus adéquate,

$$\left(q^r_a\right)^\dagger = \varepsilon^{ab} \Omega^{rs} q^s_b; \qquad r, s = 1, ..., 2N, \tag{3.45}$$

en utilisant la matrice $2N \times 2N$ symplectique Ω

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

Avec les opérateurs q^r_a ; les eqs(2.35) deviennent

$$\{q^r_a, q^s_b\} = -\varepsilon_{ab} \Omega^{rs}, \tag{3.47}$$

qui sont manifestement symplectiques.

3.2.2 Représentations dans le repère de repos

Les repésentations supersymétriques irréductibles et unitaires $\mathcal{R}$ de la superalgèbre (2.35) sont connues et ont une dimension 2^{2N}, $\dim\mathcal{R} = 2^{2N}$. Elles sont généralement obtenues en étapes comme suit.

Etape 1 : Vide de Clifford

Se donner un état fondamental $|C>$ souvent appelé vide de Clifford et parfois noté par son spin $|j>$ tout court. Ce vide est contraint par

$$Q^i_a |C>= 0, \qquad P^2|C>= -M^2|C>; \qquad \mathbf{P}|C>= \mathbf{0}. \tag{3.48}$$

La structure physique précise de ce vide n'est pas triviale ; il décrit l'état à une particule libre de masse m et d'impulsion $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. L'état fondamental $|C>$ est dégénérée pour $j > 0$.

Les Q^i_a sont donc vus comme des opérateurs d'annihilation, et les $Q^{i\dagger}_a$ comme opérateurs de créations de particules supersymétriques.

Etape 2 : Etats de la Représentation : Etats Excités $|C^{(r)}>$.

3. Les groupes $SO(2p)$; p entier positif, ont trois représentations fondamentales irréductibles. La représentation vectorielle de dimension $2p$, la représentation spinorielle de dimension 2_s^{p-1} et la representation cospinorielle de dimension 2_c^{p-1}. La somme directe des representations irreductibles 2_s^{p-1} et 2_s^{p-1} iforme la representation spinorielle (reductible) usuelle : $2^p = 2_s^{p-1} \oplus 2_s^{p-1}$. Pour le cas particulier $p = 4$; toutes les représentations fondamentales irréductibles $2p$, 2_s^{p-1} et 2_s^{p-1} sont équivalentes : c'est la trialité de $SO(8)$.

Agir par des monomes de $Q_b^{\dagger j}$ sur $|C>$ pour obtenir les états excités au dessus de l'état fondamental $|C>$. Elles sont donnés par

$$|C^{(r)}>= \frac{1}{\sqrt{r!}} Q_{b_1}^{\dagger j_1} ... Q_{b_r}^{\dagger j_r} |C>; \qquad r = 1, ..., r \tag{3.49}$$

Comme $\left(Q_1^{\dagger 1}\right)^2 = ... = \left(Q_2^{\dagger N}\right)^2 = 0$ d'aprés les eqs (2.35), il s'ensuit que, pour r fixé, il y'a

$$C_{2N}^r = \frac{(2N)!}{r!\,(2N-r)!} \tag{3.50}$$

monomes $Q_{b_1}^{\dagger j_1} ... Q_{b_r}^{\dagger j_r}$ contenant au maximum $2N$ opérateurs $Q_a^{i\dagger}$. Pour $r = 1$, il y'a tous les $2N$ opérateurs $Q_a^{i\dagger}$ nilpotents eq(2.36). Pour $r = 2$, les monomes possibles sont de la forme

$$Q_{a_1}^{i_1 \dagger} Q_{a_2}^{i_2 \dagger}; \tag{3.51}$$

donc $(2N)^2$ termes à priori. Cependant ces monomes ne sont pas tous indépendants à cause des relations d'anticommutation $\left\{Q_{a_1}^{i_1 \dagger}, Q_{a_2}^{i_2 \dagger}\right\} = 0$ qui peuvent également écrites comme

$$Q_{a_1}^{i_1 \dagger} Q_{a_2}^{i_2 \dagger} = -Q_{a_2}^{i_2 \dagger} Q_{a_1}^{i_1 \dagger}. \tag{3.52}$$

Ainsi les seules monomes possibles sont donnés par la moitié des termes non nul (pour $(i_1, a_1) = (i_2, a_2)$ nous avons $Q_{a_1}^{i_1 \dagger} Q_{a_2}^{i_2 \dagger} = 0$) ; soit

$$\left((2N)^2 - 2N\right)/2 = 2N\,(2N-1)\,/2. \tag{3.53}$$

Cette analyse se généralise aisement pour r quelconque. Le résultat général est ;

r	Monomes Possibles	Nombre d'Etats
1	$Q_a^{i\dagger}$	$2N$
2	$Q_{a_1}^{i_1 \dagger} Q_{a_2}^{i_2 \dagger} \qquad (i_1, a_1) \neq (i_2, a_2)$	$2N\,(2N-1)\,/2$
3	$Q_{a_1}^{i_1 \dagger} Q_{a_2}^{i_2 \dagger} Q_{a_3}^{i_3 \dagger} \qquad (i_1, a_1) \neq (i_2, a_2) \neq (i_3, a_3)$	$2N\,(2N-1)\,(2N-2)\,/6$
...	...	...
$2N$	$Q_1^{\dagger 1}, ..., Q_1^{\dagger N} Q_2^{\dagger 1}, ..., Q_2^{\dagger N}$	1

(3.54)

Le nombre d d'états indépendents $|C^{(r)}>$ possibles des représentations supersymétriques irréductibles et unitaires $\mathcal{R}$ pour un vide de Clifford trivial est donné par la dimension de$\mathcal{R}$

$$\dim \mathcal{R} = \sum_{r=1}^{2N} C_{2N}^r = 2^{2N} \tag{3.55}$$

Cette dimension de $\mathcal{R}$ n'est cependant pas la plus générale ; elle dépend de la nature du vide de Clifford $|C>$ càd s'il se transforme dans une représentation $\mathcal{D}_C$. Selon que $|C>$ est degenerée ($\dim \mathcal{D}_C \neq 0$) ou non $\dim \mathcal{D}_C = 1$, Ainsi on a ;

α) **Cas ou $|C>$ est non dégénéré**

Dans ce cas $|C>$ est un singlet, $\dim \mathcal{D}_C = 1$,

$$d = \dim \mathcal{R} = \sum_{r=1}^{2N} C_{2N}^r = (1+1)^{2N} = 2^{2N} \tag{3.56}$$

β) **Cas ou $|C>$ est dégénéré**

Dans ce cas, $|C>$ se transforme dans une représentation $\mathcal{D}_C$ non triviale. C'est le cas par exemple ou le vide de Clifford $|C>=|j>$ est associé à l'état d'une particule massive libre au repos de moment angulaire j et de projection j_z. avec $-j \leq j_z \leq j$;

$$|C>=|p^2=-m^2;\mathbf{p}=\mathbf{0};\quad j,j_z>. \tag{3.57}$$

Ce vide se transforme dans la représentation $\mathcal{D}^j$ du groupe des rotations $SO(3)\simeq SU(2)$; il est dégénéré et son degré de dégénéréscence n'est autre que la dimension de $\mathcal{D}^j$ à savoir $(2j+1)$. Ainsi l'eq(2.56) se généralise comme,

$$\dim\mathcal{R}=\sum_{r=1}^{2N}C_{2N}^r\dim\mathcal{D}^j=2^{2N}\times(2j+1). \tag{3.58}$$

Plus généralement, nous avons pour un vide de Clifford dans une représentation quelconque $\mathcal{D}_C$

$$\dim\mathcal{R}=2^{2N}\dim\mathcal{D}_C \tag{3.59}$$

3.2.3 Représentation avec p≠0 : Réultat général

La régle générale de construction des représentations supersymétriques irreductibles et unitatires $\mathcal{R}$ dans un repère quelconque (**p≠0 :**) se résume comme suit :

(i) Etat fondamental

On part d'un état a une particule libre au repos, de masse m, de momment angulaire j et de projection j_z

$$|p^2=-m^2;\mathbf{p}=\mathbf{0};\quad j,\ j_z> \tag{3.60}$$

Cet état se transforme donc dans la representation $\mathcal{D}^j$ de $SO(3)$ de dimension $(2j+1)$. Les états dégénérés de $\mathcal{D}^j$ forment le vide de Clifford.

$$|C>=\left\{|m^2;\mathbf{p}=\mathbf{0};\quad j,\ j_z>\right\}_{-j\leq j_z\leq j} \tag{3.61}$$

Ce vide satisfait les relations suivantes

$$\begin{aligned}P^2|C &> =-M^2|C>; \qquad \mathbf{P}|C>=\mathbf{0}|C>;\\ \mathbf{J}^2|C &> =j(j+1)|C>; \qquad J_z|C>=j_z|C>\\ Q_{a_r}^{i_r}|C &> =0; \quad 1\leq r\leq 2N.\end{aligned} \tag{3.62}$$

(ii) Etats $\left\{|C^{(n)}>\right\}_{0\leq n\leq 2N}$ avec p≠0

On agit par tous les monomes possibles des opérateurs $Q^\dagger$ sur le vide $|C>$. Pour un ordre n donné, nous obtenons un système de $(2j+1)\,C_{2N}^n$ états

$$|C^{(n)}>=\frac{1}{\sqrt{n!}}Q_{a_1}^{i_1\dagger}Q_{a_2}^{i_2\dagger}...Q_{a_n}^{i_n\dagger}|C>. \tag{3.63}$$

En variant n entre 1 et $2N$, nous obtenons le nombre total $\left\{|C^{(n)}>\right\}_{0\leq n\leq 2N}$ d'états. C'est un système de $(2j+1)\times 2^{2N}$ engendrant les représentations irréductibles supersymétriques $\mathcal{R}$.

iii) Etats $\{|C^n>\}_{0\leq n\leq 2N}$ dans un repère quelconque.

Par des boost de Lorrentz eq(2.31), qui nous font passer de $P_\mu=(-M,\mathbf{0})$ à $P_\mu=(-E,\mathbf{p}\neq\mathbf{0})$ arbitraire, nous obtenons les états des représentations supersymétriques irréductibles et unitaires de $S\mathcal{P}_4^N$ de masse m. Elles sont donnés par,

$$\left\{\prod_{n=1}^{2N}Q_{a_n}^{i_n\dagger}\quad|\left(p^2=-m^2;\mathbf{p};\quad j,\ j_z\right)_{-j\leq j_z\leq j}>\right\} \tag{3.64}$$

Selon les valeurs de $j=0,1/2,1,...$; on peut recouvrir les représentations supersymétriques irréductibles que nous allons rencontrer en théorie des champs supersymétriques. Dans ce qui suit nous commentons brièvement ces résultats.

3.2.4 Autres Résultats

Nous donnons ici des résultats particuliers concernant les représentations supersymétriques irréductibles et unitaires eqs(2.64). Ces résultats seront utilisées dans la suite de ce cours.

Supermultiplets Chiral et Vectoriel

Ce sont les extensions supersymétriques du champ scalaire ϕ et du champ vectoriel A_μ de la théorie des champs standard. Il joueront un role cruciale dans la construction des modèles physiques supersymétriques.

(1) Multiplet Chiral massif N=1, D=4

Dans toute représentation supersymétrique irréductible $\mathcal{R}$ du groupe $S\mathcal{P}_4^N$, les états à une particule libre ont la meme masse mais des spins différents. Le spin s de ces états varie entre $0 \leq s \leq \frac{N}{2}$. Une facon simple de le voir est d'exhiber un exemple. Pour le cas simple ou le moment angulaire $j = 0$ et $N = 1$; càd un seul générateur de Majorana $\left(Q_a, Q_a^\dagger\right) \equiv \left(Q_{\pm\frac{1}{2}}, Q_{\pm\frac{1}{2}}^\dagger\right)$, la représentation supersymétrique $\mathcal{R}$, souvent désigné par le *multiplet scalaire* ou *multiplet chiral*, est donnée par les états suivants ;

$$\begin{aligned} \phi &= |0>; \\ \psi_{\pm\frac{1}{2}} &= Q_{\pm\frac{1}{2}}^\dagger|0>; \\ F &= \frac{1}{\sqrt{2}}Q_{\frac{1}{2}}^\dagger Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger|0>, \end{aligned} \tag{3.65}$$

ou ϕ et F sont des champs scalaires de Lorentz et ψ_a est un fermion de Weyl à quatre dimensions. Ce multiplet chiral est l'extension supersymétrique du champ scalaire ϕ ; il va jouer un role fondamental en théorie quantique des champs supersymétriques. Noter que dans cette représentation chirale, il y'a trois champs de différent spin ; deux scalaires avec $s = 0$ en occurence ϕ et F et $s = \frac{N}{2} = \frac{1}{2}$ pour ψ_a. On se refèrera à cette représentation scalaire

$$\left(0^2, \frac{1}{2}\right), \tag{3.66}$$

par le nom de multiplet chiral massif $N = 1$, $D = 4$.

(2) Multiplets massifs N=1, D=4

En choisissant un vide $|C>$ avec un moment angulaire j quelconque ($j = 0, 1/2, 1, ...$) ;. les $2^2 = 4$ états des multiplets eqs(2.64) sont donnés par,

$$\begin{aligned} \phi_j &= |j>; \\ \psi_{j\pm\frac{1}{2}} &= Q_{\pm\frac{1}{2}}^\dagger|j>; \\ F_j &= Q_{\frac{1}{2}}^\dagger Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger|j>. \end{aligned} \tag{3.67}$$

On notera cette représentation supersymétrique avec les quatre états de spin j, $j - \frac{1}{2}$, $j + \frac{1}{2}$ et j par le multiplet,

$$\left(j^2, j \pm \frac{1}{2}\right). \tag{3.68}$$

Pour $j = 0$ on redécouvre le multiplet scalaire et pour $j = \frac{1}{2}$, nous obtenons le multiplet vectoriel massif $N = 1$, $D = 4$, en occurence,

$$\left(0, \frac{1}{2}^2, 1\right) \tag{3.69}$$

Le multiplets chiral (2.66) et vectoriel (2.69) et leurs versions non massives, qui sera considérer dans la section suivante, joueront un role fondamental dans la brisure spontanée des symétries de jauge dans les modèles Yang-Mills supersymétriques.

(3) Tableaux Récaputilatif des multiplets massifs pour N=1,2,3,4.

Nous donnons ci après les représentations irréductibles et unitaires supersymétriques contenant au maximum un état avec spin $s = 2$; c'est à dire des scalaires avec $s = 0$, des spineurs de Weyl $s = 1/2$, et des champs de Rarita Schwinger $s = 3/2$, et un seul graviton avec $s = 2$. Les multiplets supersymétriques avec un état fondamental de spin j seont notés par Θ_j et leurs contenus sont exhibés dans les colonnes des tables suivantes.

– *Représentations N=1,D=4*

Spin s des Etats de supermultiplet	Θ_0	$\Theta_{1/2}$	Θ_1	$\Theta_{3/2}$
0	2	1		
1/2	1	2	1	
1		1	2	1
3/2			1	2
2				1

(3.70)

– *Représentations N=2, D=4*

Spin S des Etats de supermultiplet	Θ_0	$\Theta_{1/2}$	Θ_1
0	5	4	1
1/2	4	6	4
1	1	4	6
3/2		1	4
2			1

(3.71)

– *Représentations N=3, D=4*

Spin S des Etats de supermultiplet	Θ_0	$\Theta_{1/2}$
0	14	14
1/2	14	20
1	6	15
3/2	1	6
2		1

(3.72)

– *Représentations N=4*

Spin S des Etats de supermultiplet	Θ_0
0	42
1/2	48
1	27
3/2	8
2	1

(3.73)

3.2.5 Nombre de Particules dans $\mathcal{R}$

Comme nous l'avons vu, il y'a 2^{2N} états de particules dans une représentation irréductible supersymétrique massive. Ces états forment un supermultiplet $(\{b\}\,;\{f\})$; contenant 2^{2N-1} états bosoniques $|b>$ et 2^{2N-1} états fermioniques $|f>$. Pour le multiplet vectoriel $N=1$ massif $\left(0,\frac{1}{2}^2,1\right)$ par exemple, nous avons $2^{2N-1}=2$ bosons de spin 0 et 1 ayant un total de $(1+3)=4$ degrés de liberté ; $\{b\}=\{0,1\}$; et $2^{2N-1}=2$ fermions de spin 1/2 ayant un total de $(2+2)=4$ degrés de liberté ; $\{f\}=\left\{\frac{1}{2}^2\right\}$. L'égalité des degré de liberté bosoniques et fermioniques dans une représentation supersymétrique peut etre également établi directement à partir de l'algèbre supersymétrique. En effet si l'on dénote par $(-)^F$ l'opérateur qui compte le nombre de particules de fermions,

$$(-)^F\,|b>=|b>; \qquad (-)^F\,|f>=-|f>, \tag{3.74}$$

en particulier

$$\left(-\right)^{F}Q+Q\left(-\right)^{F}=0, \tag{3.75}$$

on peut démontrer que la trace de $\left(-\right)^{F}$ sur une représentation supersymétrique $\mathcal{R}$ est nulle.

$$Tr_{\mathcal{R}}\left(-\right)^{F}=\sum_{n\in\mathcal{R}}<n|\left(-\right)^{F}|n>=0. \tag{3.76}$$

Le théorème suivant nous donnera la répartition des degrés de libertés bosoniques et fermioniques dans un multiplet supersymétrique selon les représentations irréductibles du groupe d'automorphisme $SU\left(2\right)\times SP\left(2N\right)$.

Théorème

Dans toute représentation (multiplet) supersymétrique $\mathcal{R}$, nous avons les propriétés suivantes :

(a) Il y'a autant de degrés de liberté bosoniques que fermioniques. Ces dégrés de liberté sont adéquatement classés dans des représentations du groupe d'automorphisme $SU\left(2\right)\times SP\left(2N\right)$. Les 2^{2N} états de la représentation supersymétrique $\mathcal{R}$ sont réparties suivant les représentations $\left(R_{SU(2)}\quad;\quad R_{SP(2N)}\right)$ du groupe $SU\left(2\right)\times SP\left(2N\right)$ de la facon suivante

$$2^{2N}=\oplus_{k=0}^{N}\quad\left(\quad\frac{\mathbf{N-k}}{\mathbf{2}}\quad;\quad[\mathbf{k}]_{antisym}\quad\right) \tag{3.77}$$

ou $[\mathbf{k}]_{antisym}$ sont des représentations *complètement antisymétriques* de $SP\left(2N\right)$ portant un spin $s=\frac{N-k}{2}$ de $SU\left(2\right)$. La dimension des $[\mathbf{k}]_{antisym}$ est,

$$\dim[\mathbf{k}]_{antisym}=\frac{N+1-k}{N+1}C_{2N+2}^{k} \tag{3.78}$$

(b) Toutes les particules des représentations supersymétriques irréductibles $\mathcal{R}$ ont la meme masse m.

Exemple

A titre d'illustration des eqs(2.76), nous considérons ci-après l'exemple du multiplet scalaire ($j=0$) massif $N=2$, $D=4$. Ce multiplet a $2^{2N}=2^{4}=16$ états répartis suivant le groupe $SU\left(2\right)\times SP\left(4\right)$ comme suit

$$\begin{aligned}16 &= \left(\frac{N}{2};[0]_{antisym}\right)\oplus\left(\frac{N-1}{2};[1]_{antisym}\right)\oplus\left(\frac{N-2}{2};[2]_{antisym}\right)\\ &= \left(1,1\right)\oplus\left(\frac{1}{2},4\right)\oplus\left(0,5\right)\end{aligned} \tag{3.79}$$

Indication

Une facon de tester l'eq (2.76) est de noter que la dimension de $\oplus_{k=0}^{N}(\frac{\mathbf{N-k}}{\mathbf{2}};[\mathbf{k}]_{antisym})$ est bien égale à 2^{2N}. En effet, nous avons la partition suivante du nombre $2^{2N}=\sum_{s=N/2}^{0}\left(2j+1\right)a_{j}$ en termes des dimensions des représentations $\left(2j+1\right)$ de $SU\left(2\right)$.

n	2^{2n}
1	$2^{2}=\left(n+1\right)\times1+n\times2n+\left(n-1\right)\times a_{n}$
2	$2^{4}=\left(n+1\right)\times1+n\times2n+\left(n-1\right)\times2\left(2n+1\right)+\left(n-2\right)\times a_{n}$
3	$2^{8}=\left(n+1\right)\times1+n\times2n+\left(n-1\right)\times2\left(n-1\right)\left(2n+1\right)+\left(n-2\right)\times2\left(n-2\right)\left(2n+1\right)2n$
...	...
N	$2^{2N}=\sum_{k=0}^{N}\left(N+1-k\right)\times\frac{N+1-k}{N+1}C_{2N+2}^{k}$

(3.80)

3.3 Représentations non Massives de $\mathrm{S}\mathcal{P}_{4}^{N}$

Dans ce type de représentations, les particules n'ont pas de masse ($P^{2}=0$) et on parlera plutot de nombre quantique d'helicité h avec deux états de polarisations possibles ($h=\pm\lambda$) au lieu de spin s ayant généralement $\left(2s+1\right)$ états. Pour étudier les représentations supersymétriques irréductibles non massives, on se placera dans un repère particulier ou $2\sigma_{a\dot{a}}^{\mu}P_{\mu}$ prend une forme simple ; l'invariance relativiste fera le reste du travail.

3.3.1 Repère genre lumière

Les représentations supersymétriques irréductibles des états à une particule libre non massive,

$$p^2 = -E^2 + \mathbf{p}^2 = 0 \tag{3.81}$$

sont convenablement obtenues dans le repère genre lumière ou $p^\mu = (E, 0, 0, E)$. Dans ce repère, la relation $-2\sigma^\mu_{a\dot{a}} P_\mu$ se simplifie comme,

$$-2\sigma^\mu_{a\dot{a}} P_\mu = 2\begin{pmatrix} 2E & \\ & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.82}$$

Par suite les relations d'anticommutations(2.15) se réduisent, après avoir posé $Q^i \equiv Q^i_1$ et $Q^\dagger_j \equiv \overline{Q}_{\dot{1}j}$, à

$$\begin{aligned} \left\{Q^i, Q^\dagger_j\right\} &= 4E\delta^i_j; \\ \left\{Q^i, Q^j\right\} &= 0; \qquad \left\{Q^\dagger_i, Q^\dagger_j\right\} = 0. \end{aligned} \tag{3.83}$$

Les autres eqs manquantes sont essentiellement des eqs de nilpotence,

$$\left\{Q^i_2, \overline{Q}_{\dot{2}j}\right\} = 0 = \left\{Q^i_2, Q^j_2\right\} = 0; \qquad \left\{\overline{Q}_{\dot{2}i}, \overline{Q}_{\dot{2}j}\right\} = 0; \tag{3.84}$$

elles sont trivialement réalisées comme $Q^i_2 = \overline{Q}_{\dot{2}i} = 0 \;\; \forall i = i, ..., N.$.

3.3.2 Représentations Irréductibles

Les opérateurs $Q^\dagger_i$ et Q^i, interprétés comme des opérateurs de créations et d'annihilations d'états à une particule d'hélicité 1/2, obéissent alors une algèbre de Clifford à $(N + N)$ opérateurs. Comme pour le cas de l'étude précédente des représentations irréductibles massives, une base $\mathcal{B} = \left\{|C^{(n)}_{\lambda+n/2}>; 0 \leq n \leq N\right\}$ de l'espace de représentation des $Q^\dagger_i$ et Q^i est construit comme suit ;

$$\begin{aligned} |C_{\lambda_0} &> \;\; ; \qquad Q^i|C_{\lambda_0}>= 0; \\ |C^{(n)}_{\lambda_0+n/2} &> \;\; = \frac{1}{\sqrt{n!}} Q^\dagger_{j_1} ... Q^\dagger_{j_n} |C_{\lambda_0}>; \qquad 1 \leq n \leq N. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Les états $|C^{(n)}_{\lambda+n/2}>$ ont une dégénéréscence de degré $C^n_N = \frac{N!}{n!(N-n)!}$; l'espace de représentation ci dessus a donc une dimension $2^N = \sum_{n=0}^N C^n_N$.

3.3.3 Muliplets Supersymétriques non Massifs

Nous résumons ici les différents multiplets supersymétriques irréductibles non massifs à quatre dimensions selon les valeurs de l'extension N. L'invariance CPT de ces multipets est assurée en tenant compte des deux signes de l'helicité λ.

Muliplets non Massifs N=1 à D=4

$\frac{\lambda_0+\frac{n}{2}\rightarrow}{\lambda_0\downarrow}$	-2	-3/2	-1	-1/2	0	1/2	1	3/2	2
-2	1	1							
-3/2		1	1						
-1			1	1					
-1/2				1	1				
0					1	1			
1/2						1	1		
1							1	1	
3/2								1	1

(3.86)

Muliplets non Massifs N=2 à D=4

$$\begin{array}{c}(3.87)\end{array}$$

$\frac{\lambda_0+\frac{n}{2}\rightarrow}{\lambda_0\downarrow}$	-2	-3/2	-1	-1/2	0	1/2	1	3/2	2
-2	1	2	1						
-3/2		1	2	1					
-1			1	2	1				
-1/2				1	2	1			
0					1	2	1		
1/2						1	2	1	
1							1	2	1

Sachant que la symétrie CPT change le signe de l'hélécité, seul le multiplet avec $\lambda_0 = -1/2$ est alors CPT invariant. Pour les autres, il faudrait prendre un multiplet réductible avec les deux signes de λ_0.

Muliplets non Massifs N=3 à D=4

$$\begin{array}{c}(3.88)\end{array}$$

$\frac{\lambda_0+\frac{n}{2}\rightarrow}{\lambda_0\downarrow}$	-2	-3/2	-1	-1/2	0	1/2	1	3/2	2
-2	1	3	3	1					
-3/2		1	3	3	1				
-1			1	3	3	1			
-1/2				1	3	3	1		
0					1	3	3	1	
1/2						1	3	3	1

Muliplets non Massifs N=4 à D=4

$$\begin{array}{c}(3.89)\end{array}$$

$\frac{\lambda_0+\frac{n}{2}\rightarrow}{\lambda_0\downarrow}$	-2	-3/2	-1	-1/2	0	1/2	1	3/2	2
-2	1	4	6	4	1				
-3/2		1	4	6	4	1			
-1			1	4	6	4	1		
-1/2				1	4	6	4	1	
0					1	4	6	4	1

Là aussi il existe un multiplet CPT invariant ; c'est celui ayant $\lambda_0 = -1$.

3.4 Représentations de S$\mathcal{P}_4^N$ avec Charges Centrales

Dans cette section nous considèrons le cas ou les charges centrales Z^{ij} ne sont plus égaux à zero et nous nous placons dans le choix ou elles sont représentées par les eqs(2.23-2.26). Dans cette réalisation, les relations d'anticommutations entre charges supersymétriques $Q_a^{\tau m}$ et $\overline{Q}_{\dot{b}\sigma n} \equiv (Q_b^{\sigma n})^\dagger$ s'écrivent comme

$$\begin{aligned}\left\{Q_a^{\tau m}, (Q_b^{\sigma n})^\dagger\right\} &= 2M\ \delta_a^b \delta_\sigma^\tau \delta_n^m ;\\ \left\{Q_a^{\tau m}, Q_b^{\sigma n}\right\} &= \varepsilon_{ab}\varepsilon^{\tau\sigma}\delta^{mn} Z_m ,\\ \left\{(Q_a^{\tau m})^\dagger, (Q_b^{\sigma n})^\dagger\right\} &= \varepsilon^{ab}\varepsilon_{\tau\sigma}\delta_{mn}\overline{Z}_m\end{aligned} \qquad (3.90)$$

Quoique ces relations semblent ne pas définir une algèbre de Clifford, elle peuvent toujours etre ramener à une telle algèbre par des transformations adéquates. En effet, en utilisant le choix de base suivant

$$\begin{aligned} q_a^m &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[Q_a^{1m} + \varepsilon_{ab}\left(Q_b^{2m}\right)^\dagger\right]; \quad (q_a^m)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(Q_a^{1m}\right)^\dagger - \varepsilon_{ab}Q_b^{2m}\right] \\ p_a^m &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[Q_a^{1m} - \varepsilon_{ab}\left(Q_b^{2m}\right)^\dagger\right]; \quad (p_a^m)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(Q_a^{1m}\right)^\dagger + \varepsilon_{ab}Q_b^{2m}\right] \end{aligned} \tag{3.91}$$

l'algèbre supersymétrique () devient

$$\begin{aligned} \left\{q_a^m, (q_b^n)^\dagger\right\} &= (2M + Z_m)\ \delta_a^b \delta_n^m; \\ \left\{p_a^m, (p_b^n)^\dagger\right\} &= (2M - Z_m)\ \delta_a^b \delta_n^m; \\ \{q_a^m, q_b^n\} &= \{p_a^m, p_b^n\} = \{q_a^m, p_b^n\} = 0 \end{aligned} \tag{3.92}$$

Comme les seuls termes non nuls des anticommutateurs ci dessus, en occurence $\left\{q_a^m, (q_a^m)^\dagger\right\} = 2\left\|q_a^m\right\|^2$ et $\left\{p_a^m, (p_a^m)^\dagger\right\} = 2\left\|p_a^m\right\|^2$, sont des opérateurs positifs, il s'ensuit alors que

$$2M - Z_m \geq 0 \Leftrightarrow Z_m \leq 2M, \quad \forall m = 1, ..., [N/2]\,. \tag{3.93}$$

Cette contrainte joue un role crucilale dans l'étude des représentations supersymétriques. En particulier, pour le cas très remarkable de particules non massives, $M = 0$, nous voyons que tous les Z_m doivent etre nuls et par suite les représentations supersymétriques non massives ne portent pas de charges centrales. Une autre propriété remarquable correspond au cas ou le seuil $Z_m \leq 2M$ est saturé

$$Z_m = 2M, \quad \forall m = 1, ..., [N/2]\,. \tag{3.94}$$

Dans ce cas les $\left\{p_a^m, (p_b^n)^\dagger\right\} = \{p_a^m, p_b^n\} = 0$ sont trivialement résolues par $p_a^m = 0$ et par suite les eqs(2.92) se réduisent à

$$\begin{aligned} \left\{q_a^m, (q_b^n)^\dagger\right\} &= 4M\ \delta_a^b \delta_n^m; \\ \{q_a^m, q_b^n\} &= 0. \end{aligned} \tag{3.95}$$

Ces relations défissent une algèbre de Clifford à $[N/2]+[N/2]$ opérateurs. La méthode de construction des représentations irréductibles de cette algèbre est similaire à celle utilisée auparavant. La dernière propriété que nous voulons commenter concerne le cas ou un certain nombre, disons r, d'opérateurs Z_l sont nuls,

$$\begin{aligned} Z_l &= 2M, \quad l = 1, ..., r., \\ Z_l &\leq 2M, \quad l = r+1, ..., [N/2]\,, \end{aligned}$$

Dans ce cas les opérateurs p_a^l, $1 \leq l \leq r$ sont trivialement résolues par $p_a^l = 0$; mais les restant l'algèbre supersymétrique (2.92).

3.5 ANNEXE : Superalgèbres

Outre les charges bosoniques B_I, les supersymétries font intervenir des charges fermioniques Q_α (spineur de Majorana) conservées satisfont des relations de commutations et d'anticommutations dont la forme générale est ;

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= C^K_{\alpha\beta} B_K, \\ [B_I, Q_\alpha] &= C^\beta_{I\alpha}\ Q_\beta. \\ [B_I, B_J] &= C^K_{IJ}\ B_K. \end{aligned} \tag{3.96}$$

La fermeture de ces relations est assuréé par les super-Identité de Jacobi.

$$\begin{aligned} C^K_{IJ} C^J_{RS} + C^K_{RJ} C^J_{SI} + C^K_{SJ} C^J_{IR} &= 0, \\ C^K_{\alpha\beta} C^K_{\alpha\beta} - C^K_{\alpha\beta} C^K_{\alpha\beta} + C^K_{\alpha\beta} C^K_{\alpha\beta} &= 0, \\ C^\beta_{I\alpha} C^\beta_{I\alpha} + C^\beta_{I\alpha} C^\beta_{I\alpha} + C^\beta_{I\alpha} C^\beta_{I\alpha} &= 0 \end{aligned} \tag{3.97}$$

L'algèbre supersymétrique est une superalgèbre très particulière avec une graduation Z_2. Cette dernière est un espace vectoriel avec un super-crochet de Lie defini de la facon suivante,

$$[A, B\} = AB - (-)^r\, BA; \qquad r = 0, 1 \tag{3.98}$$

ou le degré $r = 0$ si B est un opérateur bosonique et $r = 1$ si B est un opérateur fermionique. Dans ces cas le super crochet se réduit à

$$\begin{aligned} [A, B\} &= [A, B] \qquad si\ r = 0, \\ [A, B\} &= \{A, B\} \qquad si\ r = 1. \end{aligned} \tag{3.99}$$

Le super crochet de Lie ainsi défini satisfait la super identité de Jacobi

$$[A, [B, C\}\} + ... \tag{3.100}$$

et aprtage la plupart des propriétés standard des algebres de Lie, tels que lk'existence d'un systeme de racines et une matrice de Cartan.

Chapitre 4

Super-Espace & Super-Champs

Une facon simple de construire les modèles de théorie de champs supersymetriques est d'utilser les techniques de superespace et de superchamp. Cette technique rend la supersymétrie manifeste puisqu'elle simplifie énormément l'addition et la multiplication des representations supersymetriques et de reconnaitre directement les invariants supersymétriques.

4.1 Super-Espace et Variables de Grassman

C'est une extension un peu spéciale de l'espace de Minkowski à $(1+3)$ dimensions. Cette espace est parametrisé par les variables bosoniques d'espace-temps usuellles x^μ et des variables fermioniques θ^a et $\overline{\theta}_{\dot{a}}$ appelées également des variables de Grassman ou variables impaires. Ainsi le superespace N=1 D=4 est parametrisé par les $4+4$ coordonnées suivantes,

$$Z^M = \left(x^\mu, \theta^a, \overline{\theta}_{\dot{a}}\right) \tag{4.1}$$

Pour mieux illustrer les propriétés de ce super-espace et les regles qui gouvernent les fonctions et les opérateurs qui y vivent, nous commencons tous d'abord par revoir quelques notions d'ordre generales.

4.2 Variables de Grassman

En théorie de champs supersymétriques, les variables que l'on rencontrent sont de deux types : variables bosoniques et variables fermioniques.

4.3 Variables Bosoniques

Parmi les variables bosoniques les plus urilisées en théorie des champs on trouve les coordonnées commutantes x^μ de l'espace de Minkowski,

$$x^\mu x^\nu = x^\nu x^\mu \Leftrightarrow [x^\mu, x^\nu] = 0, \tag{4.2}$$

mais aussi d'autres types de variables telles que les champs classiques $\phi_I(x)$ décrivant les particules et satisfaisant elles aussi des relations du genre,

$$\phi_I(x)\,\phi_J(y) = \phi_J(y)\,\phi_I(x) \Leftrightarrow [\phi_I(x), \phi_J(y)] = 0 \tag{4.3}$$

ou encore opérateurs différentiels bosoniques comme le générateur des translations spatio-temporels $P_\mu = i\partial_\mu$

$$\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\nu\partial_\mu \Leftrightarrow [\partial_\mu, \partial_\nu] = 0 \tag{4.4}$$

ou plus generalement des opérateurs plus complexes du genre $B_I = B_I(x, \partial)$,

$$\begin{aligned} B_I B_J &= B_J B_I + F_{IJ} onct\,(B_1, ..., B_N)\,, \\ [B_I, B_J] &= Fonct\,(B_1, ..., B_N) \end{aligned} \tag{4.5}$$

dont les algèbres de Lie correspondant au cas $F_{IJ} = C^L_{IJ} B_L$ forment une classe très particulière.

4.4 Examen

UNIVERSITE MOHAMMED V
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
Lab/PHE-MS
RABAT

Examen : Master PM
Supersymétrie : Durée 3 Heures

Partie I : **Algèbre Supersymétrique** $\mathcal{SP}_4$

On considère l'algèbre supersymmétrique $\mathcal{N} = 1$ à $(1+3)$ dimensions d'espace temps engendrée par les opérateurs fermioniques Q_a, $\overline{Q}_{\dot{a}}$ et bosoniques P_μ habituels satisfaisant les relations de super-commutation suivantes,

$$\begin{aligned} \{Q_a, \overline{Q}_{\dot{a}}\} &= -2\sigma^\mu_{a\dot{a}} P_\mu, \qquad [P_\mu, Q_a] = 0 \\ \{Q_a, Q_b\} &= 0, \qquad \left\{\overline{Q}_{\dot{a}}, \overline{Q}_{\dot{b}}\right\} = 0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

et on se propose d'établir certaines propriétés des ses représentations unitaires. On utilisera les notations du cours (qui sont les mêmes que celle du livre de Wess & Bagger). Soient N_F l'opérateur nombre de fermions et $\Pi = \exp(i\pi N_F)$ l'opérateur à deux états propres ± 1 qui anticommute avec Q_a et $\overline{Q}_{\dot{a}}$; i.e $\Pi Q_a = -Q_a \Pi$ et $\Pi \overline{Q}_{\dot{a}} = -\overline{Q}_{\dot{a}} \Pi$.

1.a) Montrer que pour toute représentation supersymétrique, on a :
α) $Tr\left[\Pi\left\{Q_a, \overline{Q}_{\dot{a}}\right\}\right] = 0$, et
β) $\left[P^2, Q_a\right] = 0$ où $P^2 = P_\mu P^\mu$.

1.b) Que signifie ces deux relations algèbriques ?

2) Pour des applications physiques, notamment en théorie quantique des champs des particules élémentaires, on se limite en général au cas des états quantiques à *une* particule $|p, s>$ d'energie impulsion p_μ et de spin s. Pour cela considérons le cas particulier d'un état à une particule *massive* $|p, s>$ et placons nous dans son repère de repos où $p_\mu = (-M, 0, 0, 0)$; $P_\mu|p, s> = p_\mu|p, s>$

2.a) Montrer que l'algèbre supersymétrique (4.6) se réduit à l'agèbre de Clifford suivante

$$\left\{A_a, A_b^+\right\} = \delta_{ab}; \qquad \{A_a, A_b\} = 0, \qquad a, b = 1, 2 \tag{4.7}$$

où A_a est un opérateur à détérminer en fonction de Q_a et la masse M.

2.b) Donner l'analogue de l'eq(4.7) pour un état à une particule *non massive ($M = 0$)* d'énergie-impulsion p_μ.

On se limitera dans cette partie au cas d'une particule massive ; i.e $M \neq 0$ et on fixera notre attentions sur les représentations supersymétriques scalaire $\mathcal{R}_0$ et vectorielle $\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$ de superspin $s = 0$ et $s = \frac{1}{2}$ respectivement.

3) **Représentation scalaire** $\mathcal{R}_0 \equiv \Phi$

La représentation supersymétrique scalaire Φ de superspin s = 0 de l'eq(4.7) contient quatre états $\{|\Psi_i>; 1 \leq i \leq 4\}$; l'état fondamental de spin zero est donné par le vide de Clifford $\Omega_0 \equiv |\Psi_1>$ satisfaisant les deux conditions suivantes : (i) $A_a|\Psi_1>= 0$ et (ii) $\left(P_\mu P^\mu - M^2\right)|\Psi_1>= 0$.

3.a) Donner les trois autres $|\Psi_i>$; $i = 2, 3, 4$ en fonction de A_a, A_b^+ et $|\Psi_1>$. Preciser leurs spins.

3.b) Calculer les états $\Pi|\Psi_i>$ et en déduire la valeur de la trace $\sum_{i=1}^4 < \Psi_i|\Pi|\Psi_i>$.

3.c) Donner les masses M_i des états $|\Psi_i>$, Conclure.

4) **Représentation vectorielle** $\mathcal{R}_{\frac{1}{2}} \equiv$ V

4.a) Donner les états $\{|\Psi_i>\}$ de la représentation $\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$ pour un vide de Clifford $\Omega_{\frac{1}{2}}$ avec un spin $s = \frac{1}{2}$.

4.b) En déduire la trace $\sum_i < \Psi_i|\Pi|\Psi_i>$ et $P^2|\Psi_i>$.

Partie II : **Super-Espace** & **SQFT**$_4$

On veut étudier la dynamique des états des représentations supersymétriques Φ et V dans le super-éspace $(X, \theta, \overline{\theta})$. Soient $D_a = \frac{\partial}{\partial\theta^a} + i\varepsilon\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\theta}^{\dot{a}}\partial_{\mu}$, $\overline{D}_{\dot{a}} = \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{a}}} + i\varsigma\theta^a\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\partial_{\mu}$ deux super opérateurs différentiels et ε et ς deux paramètres.

1.a) Calculer l'anticommutateur de D_a et $\overline{D}_{\dot{a}}$.

1.b) Donner les conditions sur ε et ς pour que $D_a\overline{D}_{\dot{a}} + \overline{D}_{\dot{a}}D_a = 2i\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\partial_{\mu}$.

1.c) En déduire les different types de super-éspaces possibles.

1.d) Calculer $\overline{D}_{\dot{a}}\left(x^{\mu} + i\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)$ pour le cas ou $\varsigma = 1$.

On posera dans ce qui suit $y^{\mu} = x^{\mu} + i\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}$.

2) On veut détérminer la densité lagrangienne d'énergie cinétique $\mathcal{L}_{cin}(\Phi)$ des états de la représentation supersymétrique scalaire Φ. En langage de superchamp, celle ci est donnée par une superfonction $\Phi = \Phi(y^{\mu}, \theta^a)$ définie sur le super-espace chiral.

2.a) Calculer $\overline{D}_{\dot{a}}\Phi$ pour le cas où $\varsigma = 1$.

2.b) Soit $\Phi = \phi(y) + \sqrt{2}\theta^a\psi_a(y) + \theta^a\theta_a F(y)$ le dévelppement en série de θ de Φ et on se propose de calculer le développement du superchamp Φ, son conjugé Φ^* et le produit $\Phi\Phi^*$ en série de θ et $\overline{\theta}$.

α) Donner le developpement de $\phi(y)$ en fonction de $\phi(x)$ et ses dérivées.

β) Même quetion pour $\psi_a(y)$.

γ) Même quetion pour $F(y)$.

2.c) En déduire le développement en série de θ et $\overline{\theta}$ du superchamp Φ.

2.d) Même question pour Φ^*.

3) Ayant les développements de Φ et de Φ^*, on veut déteminer la densité lagrangienne des champs libres ϕ, ψ_a et F composants Φ. Pour cela on a besoin du développement du produit $\Phi\Phi^*$;

$$\begin{aligned}\Phi\Phi^* &= C_0 + \theta C_1 + \overline{\theta C}_1 + \theta^2 C_2 + \overline{\theta}^2\overline{C}_2 + \theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}C_{\mu} \\ &\quad + \theta^2\overline{\theta C}_3 + \overline{\theta}^2\theta C_3 + \theta^2\overline{\theta}^2 C_4\end{aligned}$$

3.a) Déterminer les différents coeifficients C_i de ce développement en série de θ et $\overline{\theta}$.

3.b) Rappeler le ou les coeifficients C_i qui obeissent à la propriété $\int d^4x\delta_{\sup er}C_i = 0$ où $\delta_{\sup er}$ est la variation suersymétrique.

3.c) Montrer qu'en général le coeifficient du terme de $\theta^2\overline{\theta}^2$ de développement s'ecrit comme

$$L(x) = a\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi^* + b\psi\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\psi} + cFF^* + \partial_{\mu}J^{\mu},$$

où a, b et c sont des constantes à déterminer et où J^{μ} est une fonction des champs à préciser elle aussi.

3.d) Dire pourquoi le champ le terme en F ne contient pas de dérivée d'espace-temps.

3.e) En déduire la densité lagrangienne $\mathcal{L}_{cin}(\Phi)$ du superchamp scalaire libre dans le super-espace $(x^{\mu}, \theta, \overline{\theta})$.

Partie III : Facultatif

On se propose d'explorer quelques propriétés du superchamp vectoriel de Maxwell V.

a) Donner le developement en θ et $\overline{\theta}$ du superchamps vectoriels V.

b) Calculer les puissances V^2, V^3 et V^4.

c) Calculer $\mathrm{D}_a\mathrm{V}$.

d) En déduire $W_a = \frac{1}{4}\overline{D}^2 D_a\mathrm{V}$

e) Doner la densité lagrangienne supersymétrique pour le superchamp V.

Chapitre 5

Théories quantiques des champs conformes

Les théories quantiques des champs invariantes conformes interviennent dans plusieurs branches de la physique fondamentale :

- Théorie des phénomènes critiques de la mécanique statistique
- Théorie de Maxwell en abscence de matière (4 equations de Maxwell dans le vide)
- Théorie de Yang-Mills et SuperYang-Mills pures
- Gravité et supergravité conformes
- Théorie des cordes et supercordes

En physique statistique des phénomènes critiques, l'invariance conforme décrit le comportement critique des systèmes en transition de phase du second ordre.
Exemple :
Modèle d'Ising à 2D avec des spin

$$\sigma_i = \pm 1, \qquad i \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$$

placés sur des sites d'un réseau carée $\mathbb{Z}^2$. La fonction de partition

$$\mathcal{Z} = \mathcal{T}\nabla\left(e^{-\beta H}\right), \qquad \beta = \frac{1}{KT},$$

associé à ce système quantique, s'ecrit,

$$\mathcal{Z} = \sum_{\text{configuration } \{\sigma\}} \left(\exp\left[-\frac{E}{KT}\right]\right),$$

avec

$$E = -\epsilon \sum_{<ij>} \sigma_i \sigma_j$$

et où $< ij >$ désigne les proche voisin.
Selon les valeurs moyennes du moment magnétique $\langle\sigma\rangle$, on distingue deux phases :
(1) Phase paramagnétique
C'est une *phase désordonnée* à haute temmpérature

$$\langle\sigma\rangle = 0, \qquad T > T_c$$

(2) Phase Ferromagnétique
C'est une *phase ordonnée* aux basses températures

$$\langle\sigma\rangle \neq 0, \qquad T < T_c$$

Ces deux phases sont liées par une transformation de dualité qui porte l'information sur le point critique. La transition de phase du 2nd ordre appparait au point auto-duale (self-dual). Rappelons que le point fixe d'une tranformation,

$$r \qquad \leftrightarrow \qquad r' = f(r), \tag{5.1}$$

est un ensemble de points solution de l'equation

$$r = r', \qquad \Leftrightarrow \qquad r = f(r)$$

5.1 Invariance d'échelle

Au point de transition, les configurations ont une longue portée ; et la théorie qui décrit le système au point critique devrait donc être invariante d'échelle. Ceci veut dire que sous les changements d'échelle

$$x \qquad \rightarrow \qquad x' = \lambda x, \qquad \lambda \in R^* \tag{5.2}$$

les grandeurs physiques $F(x)$ restent inchangée,

$$F(\lambda x) = F(x).$$

Les transformations (5.2) (de dilatation $\lambda > 1$ ou contraction $\lambda < 1$) forment un groupe $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\lambda)$ à un parametre.
Rappelons aussi qu'un ensemble $\mathcal{G}$ de points g_i,

$$\mathcal{G} = \{g_i, \quad i \in \mathcal{I}\}$$

muni d'une loi associative $\circ$ multiplication ou addition)

$$\begin{aligned} g_1 \circ g_2 \circ g_3 &= (g_1 \circ g_2) \circ g_3 \\ &= g_1 \circ (g_2 \circ g_3), \end{aligned}$$

est un groupe multiplicatif (additif) si les propriétés suivantes sont satisfaite :
Pour des éléments g_i et g_j quelconques de $\mathcal{G}$, nous avons :
(i) Stabilité

$$g_i \circ g_j = g_k \in \mathcal{G},$$

(ii) Element neutre

$$\exists\ g_0 = e \in \mathcal{G} \text{ tel que } g_i \circ e = e \circ g_i = g_i$$

(iii) Element inverse

$$\exists\ g_i' \in \ \text{ tel que } g_i \circ g_i' = g_0 = e$$

Pour les transformations d'échelle (5.2), les éléments g_i sont donnés par un parametre réel λ ;

$$\{g_i, \quad i \in \mathcal{I}\} \qquad \rightarrow \qquad \{\lambda \in R\},$$

soit alors une infinité continue de valeurs.

Ce groupe agit, sur les points x d'un espace que précisons au fur et à mesure et selon les situations, comme,

$$x \quad \rightarrow \quad x' = \lambda x, \qquad \lambda \in R^*$$

Une seconde transformation conduit à :

$$x' = \lambda x \quad \rightarrow \quad x'' = \gamma x',$$

qui peut être écrit également comme

$$x'' = \gamma \lambda x = \beta x, \qquad \beta = \lambda \gamma$$

Nous avons :

$$
\begin{aligned}
\lambda &= 1, \quad \leftrightarrow \quad \text{element neutre} \\
\gamma\lambda &= 1, \quad \leftrightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\lambda} \text{ est l'element inverse de } \lambda \\
\gamma\lambda &= \beta, \quad \leftrightarrow \quad \text{stabilité}
\end{aligned}
$$

En fait ce groupe des transformation d'échelle est un sous groupe d'un groupe plus large : groupe conforme ou symétrie conforme.

$$\mathcal{G}_C = \mathcal{G}_{conforme}$$

Il se trouve que les théories critiques ont elles aussi des symétries plus riches que la symétrie d'échelle. L'ensemble de ces symétries forment le le groupe conforme que nous voulons étudier dans ce cours.

5.2 Symetries Conformes

Pour fixer les idées, noter que les groupes conformes $\mathcal{G}_C$ existent dans toutes les espaces

$$\mathbb{R}^D, \qquad D = 2, \qquad D = 3, ...$$

de dimension D et les epaces-temps

$$\mathbb{R}^{1,D}, \qquad D = 1, \qquad D = 2, \qquad D = 3, ...$$

Ces groupes $\mathcal{G}_C = \mathcal{G}_C(D)$ généralisent les groupes des rotations

$$SO(D): \qquad \text{exemple : } SO(2), \qquad SO(3), \qquad \cdots$$

des axes de l'espace réel $\mathbb{R}^D$ et les groupes de rotations d'espace temps

$$SO(1,D): \qquad \text{exemple : } SO(1,1), \qquad SO(1,2), \qquad \cdots$$

Nous avons le résultat suivant que nous établirons dans le chapitre 2

Espace	Groupe de rotation	Groupe conforme
$\mathbb{R}^d$	$SO(d)$	$SO(d+2)$
$\mathbb{R}^{1,d}$	$SO(1,d)$	$SO(1,d+2)$

5.3 Exemple : Groupe SO(2)

Rappelons que le groupe des roations à 2D est engendré par les rotations (autour de l'axe OZ) suivante,

Nous avons

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\
y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta
\end{aligned}
$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

que nous écrivons en générale comme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\theta) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

avec $R(\theta)$ une matrice 2×2 réelle donnée

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Noter aussi :
(i) le nombre de parametre (variable) est un ; c'est l'angle θ.

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

(ii) $R(\theta)$ est une matrice réelle orthogonale,

$$R(\theta) R^T(\theta) = I_{2\times 2}$$

En effet

$$\begin{aligned} R(\theta) R^T(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(**iii**) Le développement de $R(\theta)$ au voisinage de $\theta = 0$ s'écrit au premier ordre en θ,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + O\left(\theta^2\right)$$

à partir delaquelle nous tirons

$$J = \left(\frac{\partial R(\theta)}{\partial\theta}\right)_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui défini le générateur du groupe.
(**iv**) θ est le parametre du groupe. En général le nombre de parametre est égal au nombre de générateur.
(**v**) Ces résultats se généralisent pour les rotations

$$R = R(\theta_1, ..., \theta_n)$$

dans les espaces réels de dimensions superieures. Le groupe des rotations dans R^D est noté

$$SO(D)$$

Sa dimension est

$$\dim[SO(D)] = \frac{D(D-1)}{2}$$

Cette dimension est égale au nombre de parametres θ_i.

$$n = \frac{D(D-1)}{2}$$

C'est aussi le nombre de générateurs J_i du groupe

$$J_i = \left(\frac{\partial R(\theta_1, ..., \theta_n)}{\partial\theta_i}\right)_{\boldsymbol{\theta}=0}$$

5.3.1 Exercice : Groupe SO(3)

Le groupe SO(3) est le groupe des rotations des axes des espaces réelles à 3D. Puisque $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z), admet trois plans

$$(x, y), \qquad (y, z), \qquad (z, x),$$

le groupe SO(3) est engendré par trois rotations indépendentes.
En écrivant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R(\boldsymbol{\theta}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3),$$

(i) détérminer la matrice $R(\boldsymbol{\theta})$
(ii) Montrer que R est ortogonale
(iii) Calculer $\det R$
(iv) Trouver la relation entre $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ et les angle d'Euler (ψ, θ, φ)

5.3.2 Groupes conformes

Le groupe conforme $\mathcal{C}_D$ des transformations conformes dans R^D est plus large que le groupe des rotations. En plus des rotations, il contient également :
* les transformation d'échelle,
* les inversions et
* les transformation conforme spéciales :
On distingue deux situations :

- Groupes conformes $\mathcal{C}_D$ dans dimensions $D \geq 3$. La dimension de ces groupes

$$\dim \mathcal{C}_D = \frac{(D+2)(D+1)}{2}$$

est finie. De plus l'information codée dans ses transformations est essentiellement celle apportée par la symétrie d'echelle.

- Groupe conforme à $D = 2$ ou $D = 1 + 1$. Dans ce cas la dimension du groupe est infinie

$$\dim \mathcal{C}_2 = \infty$$

Cette propriété constitue une forte restriction sur la théorie conforme à 2D et permet alors d'avoir beaucoup d'information sur le système critique.

5.4 Groupe conforme $\mathcal{C}_D$

Ce Chapitre est consacrée à l'étude des :

- Des propriétés générales de l'invariance conforme D dimensions, $D \geq 2$
- Des réalisations de la symétrie conforme à deux dimensions à $D = 2$.

5.4.1 Metrique d'espace temps

Espaces plats et courbes
On distngue deux types d'espace :
(**i**) Espace plats dont la courbure est nulle ; c'est ce type d'espace qui interviennent en physique classique et théorie de la relativité restreinte.
Exemple d'espace plat :
Les exemples types sont données par les espaces

$$\text{Eucidien } \mathbb{R}^d, \qquad : \text{Peudo-Eucidien } \mathbb{R}^{(p,q)}.$$

Ce sont tous des espace plats :
L'élément de longueur s'écrit comme

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^d\left(x^1,\ldots,x^d\right) \quad : \quad dl^2 &= \left(dx^1\right)^2+\ldots+\left(dx^d\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{d} dx^i dx^i \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \delta_{ij} dx^i dx^j, \qquad \delta_{ij}=\left\{\begin{array}{ll} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{array}\right. \\
&= \delta_{ij} dx^i dx^j
\end{aligned}$$

δ_{ij} est la metrique
(**ii**) Espace courbe ; de courbure non nulle.
C'est ce genre d'espace qu'en rencontre en théorie classique de la relativité générale.
Exemple d'espace courbe :
La sphère $\mathbb{S}^2$

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

est un espace courbe de courbure

$$\varrho=\frac{1}{r}$$

Noter que dans la limite $r\to\infty$, $\varrho\to 0$; la sphère $\mathbb{S}^2$ tend vers $\mathbb{R}^2$.
Dans les espace courbes, les éléments de longueurs s'écrivent comme

$$ds^2=\sum_{i=1}^{d} g_{ij} dx^i dx^j$$

ou

$$g_{ij}=g_{ij}(x)$$

depend des positions x : c'est un champ.

5.4.2 Espaces temps plats et courbes

Espace de Minkowski $\boldsymbol{M}_d$: C'est un espace-temps plat à *d-dimensions*,

$$\boldsymbol{M}_d\sim\mathbb{R}^{1,d-1}=\left(x^0=ct,\vec{\mathbf{x}}\right).$$

Dans $\boldsymbol{M}_d$ l'élément de longueur ds^2 est donné par l'invariant suivant

$$ds^2=c^2\left(dt\right)^2-d\vec{\mathbf{x}}\cdot d\vec{\mathbf{x}}$$

qu'on peut écrire aussi comme

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \sum_{\mu,\nu=0}^{d}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\
&= \eta_{00}dx^0dx^0+\eta_{0j}dx^{\grave{a}}dx^j+\eta_{i0}dx^idx^0+\eta_{ij}dx^idx^j
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Dans cet espace l'effet de la gravitation est ignoré
Exemple :
Pour $d=4$, la métrique de l'espace plat $\boldsymbol{M}_4$ est donnée par

$$\eta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et s'écrit aussi comme

$$\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1) \tag{5.4}$$

Espace-temps courbe $\mathcal{M}_d$:
C'est un espace temps de courbure non nulle. Dans ce cas, on tient compte de l'effet de lagravitation :
Dans les espace-temps plat, l'élement de longeur s'écrit comme

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

En general, $g_{\mu\nu}$ est une fonction matricielle de x :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00}(x) & g_{01}(x) & g_{02}(x) & g_{03}(x) \\ g_{10}(x) & g_{11}(x) & g_{12}(x) & g_{13}(x) \\ g_{20}(x) & g_{21}(x) & g_{22}(x) & g_{23}(x) \\ g_{30}(x) & g_{31}(x) & g_{32}(x) & g_{33}(x) \end{pmatrix}$$

c'est un champ ! c'est le champ qui décrit la gravitation.
Son expression explicite en fonction de x

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$$

peut être obtenu en résolvant l'equation de la gravitation. L'espace Plat de Minkowski apparait comme un cas limite donné par

$$g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$$

5.4.3 Transformations générales des coordonnées

Les phénomènes physiques *ne dépendent pas* du choix de repères ou référentiels.
Ils ne dépendent pas alors des systèmes de coordonnées

$$x = \left(x^0, x^1, \ldots, x^{d-1}\right)$$

Ces phénomènes sont donc invariants sous les *changements de repères où referentiels* :
Ils sont invariants sous les transformations *générales* de coordonnées (TGC),

$$x^\mu \qquad \to \qquad x^{\mu\prime} = \mathrm{f}^\mu(x).$$

Sous ces transformations, qui forment un *groupe de symétrie* à savoir le groupe des difféomorphismes Diff($\mathcal{M}_d$), les êtres mathématiques se transforment selon des règles qui sont données par la théorie des représentations du groupe TGC.
Par exemple, le champ (métrique) $g_{\mu\nu}(x)$ change

$$g_{\mu\nu}(x) \qquad \to \qquad g'_{\mu\nu}\left(x'\right),$$

mais l'élement de longueur

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

reste :
(**a**) soit invariant,

$$ds'^2 = ds^2, \tag{5.5}$$

comme c'est le cas en théorie de *relativité générale* d'Einstein ;
(**b**) soit invariant à un facteur d'échelle près

$$ds'^2 = \Omega ds^2.$$

C'est le cas de la théorie de la gravitation conforme.

Cas $ds'^2 = ds^2$

Dans le premier cas, nous avons en remplacant ds'^2 et ds^2 par leurs valeurs

$$
\begin{aligned}
ds'^2 &= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g'_{\mu\nu}\left(x^{'}\right) dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g'_{\mu\nu}\left(x^{'}\right) dx'^{\mu} dx'^{\nu} \\
ds^2 &= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\left(x\right) dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu\nu}\left(x\right) dx^{\mu} dx^{\nu}
\end{aligned}
$$

et en égalisant

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu}\left(x\right) dx^{\mu} dx^{\nu} &= g'_{\mu\nu}\left(x^{'}\right) dx'^{\mu} dx'^{\nu} \\
&= g'_{\alpha\beta}\left(x^{'}\right) dx'^{\alpha} dx'^{\beta} \\
&= g'_{\alpha\beta}\left(x^{'}\right)\left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\right) dx^{\mu} dx^{\nu}.
\end{aligned}
$$

La métrique $g_{\mu\nu}$se transforme comme un tenseur d'ordre deux

$$
g_{\mu\nu}\left(x\right) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g'_{\alpha\beta}\left(x^{'}\right)\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}
$$

ou encore

$$
g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}
$$

L'ensemble des transformations générales de coordonnées forme un groupe de dimensions infinie : C'est le groupes des difféomorphismes de $\boldsymbol{M}_d$.

Cas $ds'^2 = \Omega ds^2$

Selon la dimension de l'espace $\mathbb{R}^{(p,q)}$, on distingue deux cas :
(i) Cas $d = p + q > 2$
Le dimension du groupe conforme est finie. Cette dimension qui est aussi égale au nombre de parametres libres du groupe est

$$
\frac{\left(p+q+2\right)\left(p+q+1\right)}{2}
$$

(ii) Cas $d = 2$
La dimension du groupe conforme est infinie !
Nous reprendrons cette étude en détails une fois gonner des généralités sur le groupe de Poincaré des transformations spatio-temporelles lineaires.

5.4.4 Sous groupes de Diff($\mathcal{M}_d$)

Le groupe des transformations générales de coordonnées TCG est très riche en symétries.
Il contient plusieurs *sous groupes* dont :
(a) Le sous groupe des translations spatio-temprelles :
le *groupe Euclidien :* T_d
(b) Le sous groupe des rotations spatio-temprelles :
le *groupe de Lorentz :* $SO(1,3)$; mais plus généralement $SO(p,q)$
(c) Le sous groupe de la *relativité restreinte* :
le groupe de Poincaré : $\mathcal{P}_4 = SO(1,3) \ltimes T_d$
Voici quelques détails

Groupe de Poincaré : $\mathcal{P}_d$

Le groupe $\mathcal{P}_4$ concerne les transformations dans l'espace de Minkowski avec la metrique

$$\eta_{\mu\nu} = diag\,(1,-1,-1,-1)$$

C'est un produit *semi-direct* des translations et rotations spatiotemprelles

$$\mathcal{P}_d \simeq SO\,(1,d-1) \ltimes \mathcal{T}_d$$

Ce groupe admet des extensions $\mathcal{P}_d$ dans toutes les dimensions d d'espace temps.

Transformations finies :
La symétrie de Poincaré est un *groupe fini* constitué des transformations *linéaires* de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & & \Lambda_3^0 \\ & & \\ & & \\ \Lambda_0^3 & & \Lambda_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}.$$

Sous forme tensorielle,

$$\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu, \\ x' &= \Lambda x + a \end{aligned}$$

et où les $6+4$ paramétres du groupe sont constants

$$\frac{\partial \Lambda_\nu^\mu}{\partial x^\beta} = 0, \qquad \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\beta} = 0$$

– Groupe de Lorentz : C'est un sous groupe du groupe de Poincaré $\mathcal{P}_d$;

$$SO\,(1,d-1) \subset \mathcal{P}_d$$

il correspond aux rotations dans l'espace de Minkowski ; càd à

$$\Lambda_\nu^\mu \neq 0, \qquad a^\mu = 0$$

Comme

$$ds^2 = ds^{2\prime}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} dx^{'\mu} dx'^{\mu} &= \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= \left(\eta_{\alpha\beta} \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta\right) dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

ce qui mène a une conditions sur les matrices Λ_μ^α du groupe $SO\,(1,d-1)$

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \eta_{\alpha\beta} \Lambda_\nu^\beta$$

Cette relation est l'équivalent de la relation d'orthogonalité

$$RR^T = I$$

des groupes de rotations dans les espaces euclidien

– Groupe des translations linéaires $\mathcal{T}_d$:
  Il correspond au cas

$$\Lambda^\mu_\nu = 0, \qquad a^\mu \neq 0.$$

  Contrairement à $SO\left(1, d-1\right)$, $\mathcal{T}_d$ est un sous groupe abelien
  Le groupe de Pioncaré a 10 générateurs :

$$\begin{array}{cc} P_\mu & \text{(4 translations)} \\ M_{[\mu\nu]} & \text{(6 rotations de Lorentz)} \end{array}$$

  Une réalisation possible ; mais très utile, de ces générateurs est

$$\left\{ \begin{array}{c} P_\mu = i\partial_\mu \\ M_{\mu\nu} = \left(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu\right) \end{array} \right.$$

Transformations infinitésimales

Ces transformations correspondent à prendre

$$\Lambda = I + \omega, \text{ et } a \quad \text{petits,}$$

soit encore

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu_\nu &= \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu + \mathcal{O}\left(\omega^2\right) \\ &= \delta^\mu_\nu + \eta^{\mu\gamma}\omega_{\nu\gamma} + \mathcal{O}\left(\omega^2\right) \end{aligned}$$

Puisque

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha_\mu \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu \qquad \Leftrightarrow \qquad \eta = \Lambda\eta\Lambda$$

nous avons

$$\begin{aligned} \eta &= \left(I + \omega\right)\eta\left(I + \omega\right) \\ &= \eta + \omega\eta + \eta\omega + \mathcal{O}\left(\omega^2\right) \end{aligned}$$

Plus explicitement

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &= \left(\delta^\alpha_\mu + \omega^\alpha_\mu\right)\eta_{\alpha\beta}\left(\delta^\beta_\nu + \omega^\beta_\nu\right) \\ &= \delta^\alpha_\mu \eta_{\alpha\beta} \delta^\beta_\nu + \delta^\alpha_\mu \eta_{\alpha\beta} \omega^\beta_\nu + \eta_{\alpha\beta} \omega^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu + \mathcal{O}\left(2\right) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \left(\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu}\right) + \mathcal{O}\left(2\right) \\ &= \eta_{\mu\nu} + 0 + \mathcal{O}\left(2\right). \end{aligned}$$

ce qui veut dire que

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \qquad \text{antisymétrique}$$

Nous avons également

$$\mathcal{T} : f\left(x\right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} f\left(x + a\right) \\ U^+ f\left(x\right) U \\ e^{-iaP} f\left(x\right) e^{iaP}, \qquad aP = a^\mu P_\mu \end{array} \right.$$

ou encore

$$\mathcal{T} : f\left(x\right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} f\left(x\right) + a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f\left(x\right) + \mathcal{O}\left(a^2\right) \\ = f\left(x\right) + a^\mu \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}, f\left(x\right)\right] + \mathcal{O}\left(a^2\right) \\ f\left(x\right) - ia^\mu \left[P_\mu, f\left(x\right)\right] + \mathcal{O}\left(a^2\right) \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$P_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

De même, nous avons, posons

$$\varepsilon^{\mu} = \omega^{[\mu\nu]} x_{\nu}$$

nous avons pour les rotations :

$$SO\left(1, d-1\right) : f\left(x\right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} f\left(x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}\right) \\ e^{-i\omega M} f\left(x\right) e^{-i\omega M}, \qquad \omega M = \omega^{[\mu\nu]} M_{[\mu\nu]} \end{array} \right.$$

soit encore en explicitons :

$$f\left(x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}\right) = \left\{ \begin{array}{c} f\left(x\right) + \varepsilon^{\mu} \partial_{\mu} f\left(x\right) + \mathcal{O}\left(\omega^{2}\right) \\ f\left(x\right) - i\omega^{[\mu\nu]} \left[M_{[\mu\nu]}, f\left(x\right)\right] + \mathcal{O}\left(\omega^{2}\right) \end{array} \right.$$

ce qui mène à la réalisation

$$M^{\mu\nu} = i\left(x^{\nu} \partial^{\mu} - x^{\mu} \partial^{\nu}\right)$$

Exercice
Calculer les commutateurs

$$\begin{aligned} [P, P] &= 0! \\ [M, P] &= P! \\ [M, M] &= M! \end{aligned}$$

5.5 Groupe conforme à d dimensions

On distingue :
(i) Les symétries *conforme globales* opérant dans des *espaces plats.*
(ii) Les symétries *conforme locales* agissant dans des *espaces courbes*
Ces symétries forment respectivement
– *un groupe* de dimension finis pour le cas globale et d>2
– un groupe de dimension infini pour le cas locale.

Groupe conforme global

– Définition
C'est le groupe des transformations des coordonnées de l'espace temps,

$$x \rightarrow x' = \mathrm{f}\left(x\right)$$

qui transforme les éléments de longueur par un facteur d'échelle Ω comme le montre la relation suivante

$$ds^{2} \rightarrow ds^{2\prime} = \Omega ds^{2}.$$

En remplacant les éléments de longueur par leurs expresions,

$$\begin{aligned} ds^{2} &= g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \\ ds^{2\prime} &= g_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^{\beta}} dx^{\alpha} dx^{\beta} \end{aligned}$$

il s'ensuit la condition suivante

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^{\beta}}$$

Nous allons anlyser cette contraintes pour le cas de transformations infinitésimales
Transformations infinitesimales
On distinguera deux cas : (**i**) cas $d > 2$ et (**ii**) cas $d = 2$

Cas $d > 2$

Sous des transformations infinitésimales des coordonnées

$$x^{\mu\prime} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu} + \mathcal{O}(2),$$

où $\varepsilon^{\mu} = \varepsilon^{\mu}(x)$, nous avons :

$$g_{\alpha\beta} \sim \eta_{\alpha\beta}, \qquad g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu}.$$

La condition générale,

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^{\beta}},$$

devient alors

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial (x^{\mu} + \varepsilon^{\mu})}{\partial x^{\alpha}} \eta_{\mu\nu} \frac{\partial (x^{\nu} + \varepsilon^{\nu})}{\partial x^{\beta}} + \mathcal{O}(2)$$

Formellement, en ignorant les indices pour un moment, nous avons

$$\eta = \frac{\partial (x + \varepsilon)}{\partial x} \eta \frac{\partial (x + \varepsilon)}{\partial x},$$

soit aussi

$$\eta = [1 + \partial\varepsilon]\, \eta\, [1 + \partial\varepsilon],$$

ce qui donne

$$\eta = \eta + \partial\varepsilon\eta + \eta\partial\varepsilon + O(2)$$

Avec les indices

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\varepsilon^{\beta}\eta_{\beta\nu} + \eta_{\mu\alpha}\partial_{\nu}\varepsilon^{\alpha} + O(2) \\ &= \eta_{\mu\nu} + (\partial_{\mu}\varepsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\varepsilon_{\mu}) + O(2) \end{aligned}$$

Le résultat est

$$ds'^2 = ds^2 + (\partial_{\nu}\varepsilon_{\mu} + \partial_{\mu}\varepsilon_{\nu})\, dx^{\mu} dx^{\nu} + O(2)$$

Voici quelques détails :

$$\begin{aligned} ds'^2 &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} dx^{\alpha} dx^{\beta} \\ &= \eta_{\mu\nu} \left(\delta^{\mu}_{\alpha} + \frac{\partial \varepsilon^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \right) \left(\delta^{\nu}_{\beta} + \frac{\partial \varepsilon^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \right) dx^{\alpha} dx^{\beta} \\ &= ds^2 + \eta_{\mu\nu} \left(\delta^{\mu}_{\alpha} \frac{\partial \varepsilon^{\nu}}{\partial x^{\beta}} + \delta^{\nu}_{\beta} \frac{\partial \varepsilon^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \right) dx^{\alpha} dx^{\beta} \\ &= ds^2 + \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \varepsilon^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \varepsilon^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) dx^{\mu} dx^{\nu} \\ &= ds^2 + (\partial_{\nu}\varepsilon_{\mu} + \partial_{\mu}\varepsilon_{\nu})\, dx^{\mu} dx^{\nu} \end{aligned}$$

Pour que

$$ds'^2 = \Omega ds^2,$$

$$ds'^2 = ds^2 + [(\partial_{\nu}\varepsilon_{\mu} + \partial_{\mu}\varepsilon_{\nu})]\, dx^{\mu} dx^{\nu}$$

il faut que le second term ait la forme

$$(\partial_{\nu}\varepsilon_{\mu} + \partial_{\mu}\varepsilon_{\nu}) = \varpi \eta_{\mu\nu}$$

Dans ce cas

$$ds'^2 = (1 + \varpi)\, ds^2, \qquad \Omega = (1 + \varpi)$$

Détermination du facteur ϖ :
Le facteur ϖ est obtenu en prenant la trace de

$$(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \varpi \eta_{\mu\nu}$$

c'est à dire

$$\eta^{\nu\mu} (\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \varpi \eta^{\nu\mu} \eta_{\mu\nu}$$

ce qui donne

$$2\partial_\mu \varepsilon^\mu = 2\partial_\alpha \varepsilon^\alpha = \varpi d, \qquad \partial_\alpha \varepsilon^\alpha \equiv \partial \varepsilon$$

Par suite, nous avons

$$\boxed{(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \tfrac{2}{d} \eta_{\mu\nu} (\partial \varepsilon)}$$

Agissant par ∂^ν, nous obtenons

$$\partial^\nu \left[(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) - \frac{2}{d} \eta_{\mu\nu} (\partial \varepsilon) \right] = 0$$

c'est à dire

$$\left[\Box \varepsilon_\mu + \partial_\mu (\partial \varepsilon) - \frac{2}{d} \partial_\mu (\partial \varepsilon) \right] = 0, \qquad \Box = \partial^\nu \partial_\nu \text{ : Laplacien !,}$$

Puis agisson par ∂^μ, nous pouvons la ramener à la relation suivante,

$$\left[\eta_{\alpha\beta} \Box + (d-2) \partial_\alpha \partial_\beta \right] (\partial \varepsilon) = 0$$

Solutions pour $d > 2$
Cette equation différentielle du *3ème ordre*, par conséquent la solution doit être au maximum quadratique en x. ;

$$\varepsilon (x) \sim x^2 + x + cte$$

Plus précisément, nous avons les solutions suivantes :

- $\varepsilon^\mu = a^\mu$, une *constante* : ceci correspond aux *translations* globales

$$x^{\mu\prime} = x^\mu + \varepsilon^\mu : \qquad d \text{ parametres}$$

Nous avons un total de d parametres

$$\varepsilon^0, \ \varepsilon^1, \ \ldots, \ \varepsilon^{d-1}$$

- *ε est lineaire en x* :
on distingue deux cas
  - Rotations spatio-temporelles

$$\varepsilon^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu;$$

ce sont les rotations de Lorrentz

$$x^{\mu\prime} = x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu = x^\mu + \eta^{\mu\sigma} \omega_{\sigma\nu} x^\nu$$

comme $\omega_{\mu\nu}$ est antisymétrique, nous avons un totale de

$$\frac{d(d-1)}{2} \text{ parametres}$$

  - $\varepsilon^\mu = \lambda x^\mu$, ce sont les dilatations

$$x^{\mu\prime} = x^\mu + \lambda x^\mu : \qquad 1 \text{ parametres}$$

– ε^{μ} *quadratique en* x :
ce sont les *transformations conformes speciales*

$$\varepsilon^{\mu} = b^{\mu}x^2 - 2x^{\mu}b.x : \qquad d \text{ parametres}$$

et

$$x^{\mu\prime} \simeq x^{\mu} + b^{\mu}x^2 - 2x^{\mu}b.x$$

Les parametres b^{μ} sont ceux qui interviennent dans les *inversions*

$$\frac{x^{\mu\prime}}{x^{2\prime}} = \frac{x^{\mu}}{x^2} + b^{\mu}$$

– nombre total de parametres

$$\frac{2d + d\,(d-1) + 2 + 2d}{2} = \frac{(d+2)\,(d+1)}{2}$$

qui est aussi la dimension SO$(d+2)$
– Exemple $d = 4$

L'algèbre de Lie du groupe conforme à 4d, engendré par les 15 générateurs. C'est une algèbre de dimension finie.
Les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned}
[P_{\mu}, P_{\nu}] &= 0 \\
i\left[M^{\alpha\beta}, P^{\gamma}\right] &= g^{\alpha\gamma}P^{\beta} - g^{\beta\gamma}P^{\alpha} \\
i\left[M^{\alpha\beta}, M^{\mu\nu}\right] &= g^{\alpha\mu}M^{\beta\nu} - g^{\beta\mu}M^{\alpha\nu} + g^{\alpha\nu}M^{\beta\mu} - g^{\beta\nu}M^{\alpha\mu} \\
i\,[D, P^{\alpha}] &= P^{\alpha} \\
i\,[D, K^{\alpha}] &= -K^{\alpha} \\
i\left[M^{\alpha\beta}, K^{\gamma}\right] &= g^{\alpha\gamma}K^{\beta} - g^{\beta\gamma}K^{\alpha} \\
i\left[P^{\alpha}, K^{\beta}\right] &= -2g^{\alpha\beta}D + 2M^{\alpha\beta} \\
i\,[D, D] &= i\left[M^{\alpha\beta}, D\right] = i\left[K^{\alpha}, K^{\beta}\right] = 0
\end{aligned}$$

– Alors que les trois premières relations de commutation

$$\begin{aligned}
[P_{\mu}, P_{\nu}] &= 0 \\
i\left[M^{\alpha\beta}, P^{\gamma}\right] &= g^{\alpha\gamma}P^{\beta} - g^{\beta\gamma}P^{\alpha} \\
i\left[M^{\alpha\beta}, M^{\mu\nu}\right] &= g^{\alpha\mu}M^{\beta\nu} - g^{\beta\mu}M^{\alpha\nu} + g^{\alpha\nu}M^{\beta\mu} - g^{\beta\nu}M^{\alpha\mu}
\end{aligned}$$

définissent l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré.

5.6 Symétrie conforme à d=2

Dans cette subsections nous considérons le cas particulier $d = 2$: Nous montrons :
(**1**) La condition d'invariance conforme qui s'écrit dans ce cas comme

$$\boxed{(\partial_{\nu}\varepsilon_{\mu} + \partial_{\mu}\varepsilon_{\nu}) = \tfrac{2}{d}\delta_{\mu\nu}\,(\partial\varepsilon)\,, \qquad g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad d = 2} \tag{5.6}$$

est équivalente aux conditions de Cauchy-Riemann des fonctions holomorphes. c'est à dire

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial z} = 0!, \qquad \epsilon = \varepsilon^1 + i\varepsilon^2$$

(2) Le groupe conforme à $d = 2$ a une infinité de paramatres.

5.6.1 Plan Eulidien $\mathbb{R}^2$

Pour commencer rappelons que le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ peut être paramétriser par :
(i) des coordonnées réelles $\left(x^1, x^2\right)$ que nous noterons dans la suite par (x, y) ;

$$x^1 = x, \qquad x^2 = y$$

(ii) des coordonnées complexes

$$z = x + iy, \qquad \overline{z} = x - iy$$

De même la métrique $g_{\mu\nu}$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, espace plat de courbure nulle, se réduit à

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

et l'élément de longueur ds^2 dans $\mathbb{R}^2$ devient alors :

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx, dy) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= (dx)^2 + (dy)^2 = dx^2 + dy^2 \end{aligned}$$

En coordonnées complexe, l'élement ds^2 prend une forme simple puisque,

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 \\ &= (dx + idy)(dx - idy) \end{aligned}$$

donc

$$ds^2 = dz d\overline{z}$$

qui peut aussi écrit comme

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dz, d\overline{z}) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dz \\ d\overline{z} \end{pmatrix} \\ &= (dz, d\overline{z}) \begin{pmatrix} a_1 dz + a_2 d\overline{z} \\ a_3 dz + a_4 d\overline{z} \end{pmatrix} \\ &= a_1 (dz)^2 + a_2 dz d\overline{z} + a_3 dz d\overline{z} + a_4 (d\overline{z})^2 \end{aligned}$$

en comparant avec

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dz^\mu d\overline{z}^\nu ?$$

on obtient la métrique en coordonnée de $\mathbb{R}^2$ complexe

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{zz} & g_{z\overline{z}} \\ g_{\overline{z}z} & g_{\overline{z}\overline{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.6.2 Transformations conformes infinitésimales

D'abord nous rappelons la condition d'invariance conforme pour le cas générale.
Puis nous étudions sa solution pour le cas particulier $d = 2$.

Cas d = p+q

Pour une transformation générale des coordonnées dans l'espace $\mathbb{R}^{(p,q)}$ s'écrit

$$x^\mu \qquad \to \qquad x'^\mu = f^\mu(x)$$

où $f^{\mu}(x)$ est une fonction locale *arbitraire*.
Pour une transformation infinitésimale des coordonnées d'espace $\mathbb{R}^{(p,q)}$,

$$x'^{\mu} \simeq x^{\mu} + \epsilon^{\mu}, \qquad \epsilon^{\mu} = \epsilon^{\mu}(x),$$

où ϵ^{μ} est une fonction locale infinitésimale.

La condition pour que

$$ds'^2 = \Omega ds^2$$

est donnée par

$$\boxed{(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \tfrac{2}{d} g_{\mu\nu} (\partial \varepsilon)}$$

Nous avons déjà étudier la solutions de cette equations pour D>2. Dans ce qui suit nous considérons le cas d=2.

Cas d = 2

A deux dimensions, la condition pour que les éléments de longueurs

$$ds^2 = \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx^2 + dy^2$$

et

$$ds^{2\prime} = \delta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = dx^{'2} + dy'^2$$

verifie propriété d'échelle

$$ds^2 \to ds^{2\prime} = \Omega ds^2, \qquad \Omega = \Omega(x,y).$$

est donnée par

$$\boxed{(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \tfrac{2}{d} \delta_{\mu\nu} (\partial \varepsilon)}$$

soit e

$$\begin{cases} \partial_1 \varepsilon_1 + \partial_1 \varepsilon_1 = (\partial \varepsilon) \\ \partial_2 \varepsilon_2 + \partial_2 \varepsilon_2 = (\partial \varepsilon) \\ \partial_1 \varepsilon_2 + \partial_2 \varepsilon_1 = 0 \\ \partial_2 \varepsilon_1 + \partial_1 \varepsilon_2 = 0 \end{cases}$$

ou encore en remplacant

$$\begin{aligned} \partial \varepsilon &\equiv \partial_\alpha \varepsilon^\alpha = \partial_1 \varepsilon_1 + \partial_2 \varepsilon_2 \\ &= \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} \end{aligned}$$

les relations suivantes

$$\begin{cases} \partial_1 \varepsilon_1 + \partial_1 \varepsilon_1 = \partial_1 \varepsilon_1 + \partial_2 \varepsilon_2 \\ \partial_2 \varepsilon_2 + \partial_2 \varepsilon_2 = \partial_1 \varepsilon_1 + \partial_2 \varepsilon_2 \\ \partial_1 \varepsilon_2 + \partial_2 \varepsilon_1 = 0 \\ \partial_2 \varepsilon_1 + \partial_1 \varepsilon_2 = 0 \end{cases}$$

qui mènent à

$$\boxed{\begin{cases} \partial_1 \varepsilon_1 = \partial_2 \varepsilon_2 \\ \partial_1 \varepsilon_2 = -\partial_2 \varepsilon_1 \end{cases} \quad \text{Equations de Cauchy Riemann}} \tag{5.8}$$

avec bien entendu

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x,y), \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_2(x,y),$$

En posant

$$\epsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, \qquad \overline{\epsilon} = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2,$$

les eqs(5.8) peuvent étre aussi ecrites sous la forme

$$: \left\{ \begin{array}{c} \partial_1 \varepsilon_1 = \partial_2 \varepsilon_2 \\ i\partial_1 \varepsilon_2 = -i\partial_2 \varepsilon_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$: \left\{ \begin{array}{c} \partial_1 \left(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2\right) = \partial_2 \left(\varepsilon_2 - i\varepsilon_1\right) = -i\partial_2 \left(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2\right) \\ \partial_1 \left(\varepsilon_1 - i\varepsilon_2\right) = \partial_2 \left(\varepsilon_2 + i\varepsilon_1\right) = i\partial_2 \left(\varepsilon_1 - i\varepsilon_2\right) \end{array} \right.$$

soit aussi

$$: \left\{ \begin{array}{c} \partial_1 \epsilon = -i\partial_2 \epsilon \\ \partial_1 \overline{\epsilon} = +i\partial_2 \overline{\epsilon} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left(\partial_1 + i\partial_2\right) \epsilon = 0 \\ \left(\partial_1 - i\partial_2\right) \overline{\epsilon} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \epsilon = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \overline{\epsilon} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \overline{\epsilon}}{\partial \overline{z}} = 0 \end{array} \right.$$

ou nous avons utilisé les coordonnées complexes ;

$$\begin{array}{rcl} z &=& x + iy, \qquad \overline{z} = x - iy \\ \partial_z &\equiv& \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial z}{\partial z} = 1, \qquad \frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0, \\ \overline{\partial_z} &\equiv& \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0, \qquad \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1, \end{array}$$

5.6.3 Résultats

Résultat 1 : Transformations infinitésimales
Les transformations conformes infinitésimales de parametres

$$\epsilon = \epsilon\left(z, \overline{z}\right) \qquad \text{et} \qquad \overline{\epsilon} = \overline{\epsilon}\left(z, \overline{z}\right)$$

sont données par la solution des equations

$$\begin{array}{rclll} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} &=& 0 & \Leftrightarrow \epsilon & = \epsilon\left(z\right) \\ \frac{\partial \overline{\epsilon}}{\partial \overline{z}} &=& 0 & \Leftrightarrow \overline{\epsilon} & = \overline{\epsilon}\left(\overline{z}\right) \end{array}$$

C'est à dire $\epsilon\left(z\right)$ une fonction holomorphe en z et $\overline{\epsilon}\left(\overline{z}\right)$ une fonction antiholomorphe ; le complexe conjugé.

$$\epsilon\left(z\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$$

Résultat 2 : Transformations conformes finies
En coordonnées complexes $(z, \overline{z})$, les transformations conformes finies s'écrivent

$$\begin{array}{rcl} z &\rightarrow& z' = \mathrm{f}\left(z\right), \qquad \overline{z} \rightarrow \overline{z}' = \overline{\mathrm{f}\left(z\right)} \\ dz &\rightarrow& dz' = \left(\frac{\partial \mathrm{f}\left(z\right)}{\partial z}\right) dz, \qquad d\overline{z} \rightarrow d\overline{z}' = \overline{\left(\frac{\partial \mathrm{f}\left(z\right)}{\partial z}\right)} d\overline{z} \end{array}$$

Résultat 3 : Transformations conformes de ds^2
En coordonnées complexes, l'élément de longueur prend une forme très simple :

$$\mathrm{ds}^2 = dz d\overline{z}$$

Sous une transformation conforme finies $z \rightarrow z' = \mathrm{f}\left(z\right)$, l'élément ds^2 devient

$$\mathrm{ds}^{2\prime} = dz' d\overline{z}'$$

soit aussi

$$\mathrm{ds}^{2\prime} = \left|\frac{\partial \mathrm{f}\left(z\right)}{\partial z}\right|^2 dzd\overline{z}, \qquad \mathrm{ds}^{2\prime} = \left|\frac{\partial \mathrm{f}\left(z\right)}{\partial z}\right|^2 \mathrm{ds}^2$$

et donc

$$\Omega\left(z,\overline{z}\right) = \left|\frac{\partial \mathrm{f}\left(z\right)}{\partial z}\right|^2, \qquad \text{Jacobian!}$$

5.7 Théorie de champs conformes à 2D

Etant donnée un espace de points ; pour fixer, les idées disons la ligne réelle $\mathbb{R}$ ou le plan réelle $\mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$ de coordonnées locales x et $z = x + iy$ respectivement, on distingue plusieurs objets mathématiques qui vivent sur ces espaces. Parmi ces objets nous citons :

(1) *Les scalaires et Champs scalaires*
(2) *Les vecteurs et Champs vectoriels*
(3) *Les tenseurs et Champs tensoriels*

Scalaires, Vecteurs & Tenseurs

Les scalaires
L'exemple simple de nombres scalaires est donnée par les nombres réelles et les nombres complexes.
Il existe plusieurs autres types de scalaires ; les plus courantrs sont données par :
(i) les fonctions (champ scalaires réels) a une variable réelle

$$x \in \mathbb{R} \qquad \to \qquad f\left(x\right) \in \mathbb{R}$$

tel que

$$f\left(x\right) = \log x, \qquad f\left(x\right) = \exp x$$

(ii) les fonctions a une variable complexe,

$$z \in \mathbb{C} \qquad \to \qquad \phi\left(z\right) \in \mathbb{C} \tag{5.9}$$

avec son développement de Laurrent usuel

$$\phi\left(z\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n z^n$$

Les vecteurs :
Ils peuvent être réelles ou complexes et souvent notés comme

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

ou comme

$$\overrightarrow{W} = \left(V_1, ..., V_n\right)$$

Ces deux types de tableaux sont des matrices $n \times 1$ où $1 \times n$ et correspondent à deux objets mathématique differents

$$\overrightarrow{W} = {}^t\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}^T.$$

Une notation plus fine des vecteurs est donné par les écritures suivantes

$$V_i =, \qquad V^i$$

qui sont liés par comme suit

$$\begin{aligned} V_i &= g_{ij} V^j, \\ V^i &= g^{ij} V_j, \\ g_{ij} g^{jk} &= \delta_i^k \end{aligned}$$

où g^{ij} est le tenseur metrique ; qu il faudrait l'imaginer comme celui que nous avons rencotré auparavant. Les vecteurs (avec les spineurs) jouent un role fondamental en mathématique. Sa connaissance permet de construire plusieurs autres objets. En effet à partir d'un vecteur V_i, on peut construire des scalaires

$$s = \begin{cases} g^{ij} V_i V_j = V_i V^i \\ g_{ij} V^i V^j = V^i V_i \end{cases}$$

qui n'est autre que Sa norme. Pour deux vecteurs U_i et V_j, nous avons aussi

$$s = g^{ij} U_i V_j = U^i V_i$$

souvent desiné par

$$U \cdot V \qquad \text{ou} \qquad <U|V>$$

Les vecteurs V_i sont de plusieurs types ; ils peuvent être des champs

$$V_i = V_i(x) \qquad \text{ou} \qquad V_i = V_i(z, \overline{z}).$$

dont un cas particulier est donné par le gradient

$$V_i = \partial_i \mathrm{f}, \qquad \partial_i \mathrm{f} \equiv \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x^i}$$

ou encore une 1- forme

$$V^i = dx^i.$$

A partir des vecteurs $\partial_i \mathrm{f}$ et dx^i, on peut construire un scalaire

$$d\mathrm{f} = \sum dx^i \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x^i} = \sum dx^i \partial_i \mathrm{f}$$

qui n'est qute de la differentielle de f. Pour le cas particulier de fonctions $\Phi = \Phi(z, \overline{z})$ sur C, nous avons

$$d\Phi = dz \frac{\partial \Phi}{\partial z} + d\overline{z} \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{z}}.$$

Tenseurs d'ordre 2 :
La aussi on distingue plusieurs types de tenseurs de rang 2.
L'exemple le plus simple est donné par les matrices ; souvent noté comme

$$T_{ij}, \qquad T^{ij}, \qquad T_i^j,$$

Comme nous l'anons noté auparavant, à partir d'un vecteur,on peut construire d'autres objets dont les tenseurs. Nous avons :

$$T_{ij} = V_i \otimes V_j, \qquad T^{ij} = V^i \otimes V^j, \qquad T_j^i = V^i \otimes V_j$$

Ces matrices (tenseurs) peuvent être décomposés comme suit

$$T_{ij} = T_{(ij)} + T_{[ij]}$$

avec

$$\begin{aligned} T_{[ij]} &= \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \\ T_{(ij)} &= \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \end{aligned}$$

Cette décompositions correspond à un résultat plus général concernant le produit tensoriel. A partir d'un tenseur, on construire des scalaires dont la trace

$$s = \mathrm{Tr}\,(T) = \sum g^{ij} T_{ij} = \sum T_i^i$$

et le détérminant

$$s = \det T$$

Nous avons également des champs tensoriels réelles ou complexes

$$T_{ij} = T_{ij}\,(x)\,, \qquad \text{ou} \qquad T_{ij} = T_{ij}\,(z, \overline{z})\,,$$

des champs tensoriels holomorphes

$$T_{ij} = T_{ij}\,(z)\,, \qquad \text{ou} \qquad \overline{T}_{ij} = T_{ij}\,(\overline{z})\,,$$

Deux tenseurs seront particulièrement utiles en théories conformes à $d = 2$. Il s'agit de :

$$\begin{array}{rcl} T_{ij}\,(z) & = & T_{zz}\,(z) \equiv T\,(z) \\ \overline{T}_{ij}\,(z) & = & \overline{T}_{\overline{z}\overline{z}}\,(z) \equiv \overline{T}\,(\overline{z}) \end{array}$$

dont les développements de Laurent sont :

$$T\,(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-2} L_n, \qquad \overline{T}\,(\overline{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{z}^{-n-2} \overline{L}_n$$

Il existe d'autres type de tenseurs qui vivent sur les espaces réelles et complexes. Nous avons la 2- forme differentielle,

$$dx^i \otimes dx^j$$

C'est un tenseur d'ordre 2 qui est donc reductible en partie symétrique et partie antisymétrique

$$dx^i \otimes dx^j = dx^{(i} \otimes dx^{j)} + dx^{[i} \otimes dx^{j]}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} dx^{(i} \otimes dx^{j)} & = & \dfrac{1}{2}\left[dx^i \otimes dy^j + dx^j \otimes dy^i\right] \\ dx^{[i} \otimes dx^{j]} & = & \dfrac{1}{2}\left[dx^i \otimes dy^j - dx^j \otimes dy^i\right] \end{array}$$

et les notations

$$\begin{array}{rcl} dx^{(i} \otimes dy^{j)} & = & dx^i \vee dy^j \\ dx^{[i} \otimes dy^{j]} & = & dx^i \wedge dy^j \end{array}$$

A partir de ces objets on peu construire des scalaire ; en particulier les 2- formes differentielles

$$\omega_2 = \sum_{i,j} dx^i \wedge dx^j T_{ij}\,(x)$$

Tenseur d'ordre (p, q).
Plus généralement, un tenseur (où champ tensoriel) d'ordre (p, q) a : p indices covariants et q indices contravariants

$$T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_m}$$

qui, par le biais de la metrique peut être ramener à :

$$T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_m} = g^{j_1 k_1} \cdots g^{j_m k_m} T_{i_1 \ldots i_p k_1 \ldots k_m}$$

Ces tensurs correspondent à des representations des groupes de rotations dans les espaces sous jacents.

Ces tenseurs sont réductibles en plusieurs composantes irreductibles. Outre des choses, nous avons en particulier une partie completement symétrique

$$T_{(i_1 \ldots i_n)}$$

et une partie completement antisymetrique

$$T_{[i_1 \ldots i_n]}$$

Ces derniers interviennent dans les differentialle d'ordre n

$$\omega_n = dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_n} \omega_{[i_1 \cdots i_n]} (x)$$

Propriétés utiles des tenseurs

Les tenseurs adméttent plusieurs propriétés remarquables et ont des interprtations en théorie des représentations des groupes. Nous donnons ci-après quelques unes des propropriétés utiles pour ce cours.
Sous une transformation générale de coordonnées

$$x \qquad \to \qquad x' = \mathrm{f}(x), \tag{5.10}$$

les tenseurs se transforment également et leurs transformations est donnée par une loi très particulière. Nous illustrons ces lois de transformations à travers des exemples :
Exemple 1 :
La loi de transformation d'un vecteur, nous prenons comme expemple le champ de Maxwell

$$A_\mu = A_\mu (x)$$

A ce champ est associé un 1- forme differentielle

$$A = A_\mu dx^\mu = dx^\mu A_\mu$$

Sous une transformation générale des coordonnées de l'espace temps, nous avons

$$dx^\mu \qquad \to \qquad dx'^\mu = d\mathrm{f}^\mu (x)$$

avec

$$d\mathrm{f}^\mu = \left(\frac{\partial \mathrm{f}^\mu}{\partial x^\nu} \right) dx^\nu = dx^\nu \partial_\nu \mathrm{f}^\mu,$$

Nous avons également

$$A (x') = A (x) , \qquad dx'^\mu A_\mu (x') = dx^\mu A_\mu (x)$$

et donc

$$dx^\mu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A_\nu (x') = dx^\mu \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A_\nu (x') \right)$$

ce qui donne

$$A_\mu (x) = \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \right) A_\nu (x') \tag{5.11}$$

Exemple 2 :
La relation (5.11) admet une généralisation pour les tenseurs d'ordre superieur. Plus generalement un tenseur d'ordre n

$$F (x) = dx^{i_n} \cdots dx^{i_1} F_{i_1 \cdots i_n} (x)$$

se transforme de la facon suivante

$$F (x') = dx'^{i_n} \cdots dx'^{i_1} F_{i_1 \cdots i_n} (x')$$

De la relation

$$F\left(x'\right) = F\left(x\right)$$

nous avons

$$dx'^{j_n}\cdots dx'^{j_1}F_{j_1\cdots j_n}\left(x'\right) = \left\{ \begin{array}{c} dx^{j_n}\cdots dx^{j_1}F_{j_1\cdots j_n}\left(x\right) \\ dx^{j_n}\cdots dx^{j_1}\left(\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial x'^{i_n}}{\partial x^{j_n}}\right)F_{i_1\cdots i_n}\left(x'\right) \end{array} \right.$$

soit encore

$$F_{j_1\cdots j_n}\left(x\right) = \left\{ \begin{array}{c} \left[\left(\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial x'^{i_n}}{\partial x^{j_n}}\right)\right]F_{i_1\cdots i_n}\left(x'\right) \\ \left(\partial_{j_1}x'^{i_1}\cdots\partial_{j_n}x'^{i_n}\right)F_{i_1\cdots i_n}\left(x'\right) \end{array} \right.$$

Ces lois de transformations sont également valables pour les cas particuliers où l'espace est une ligne réelle ou complexe.

Exemple 3 : *Espaces à une dimension réelle ou complexe*,
Ceci concerne les cas les systèmes de coordonnées :

$$\left(x^1, ..., x^n\right),$$
$$\left(z^1, ..., z^n\right),$$

se réduisent à :

$$x^1 \equiv x, \qquad z^1 \equiv z.$$

Dans ce cas, les tenseurs ont tous une seule composantes,

$$F_{j_1\cdots j_n} \equiv F_{\underbrace{1\ldots 1}_{n}} = \left\{ \begin{array}{c} F_{x\cdots x} \\ F_{z\cdots z} \end{array} \right. .$$

et donc une loi de transformations plus simple. Pour le cas réel, nous avons :

$$F_{x\cdots x} = \left[\underbrace{\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\cdots\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)}_{n}\right]F'_{x\cdots x},$$

soit :

$$F_{x\cdots x} = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^n F'_{x\cdots x}$$

Ce résultat est également valable pour les fonctions complexes analytiques a une variable complexe z. Nous avons :

$$\boxed{F_{z\cdots z}\left(z\right) = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^n F'_{z\cdots z}}$$

que nous noterons comme

$$F_{\underbrace{z\cdots z}_{n}} = F_{(n,0)} \equiv F_n, \qquad F_{\overline{z},\ldots,\overline{z}} = F_{(0,n)} \equiv F_{\overline{m}}$$

Nous avons également

$$G_{z\cdots z,\overline{z},\ldots,\overline{z}} = G_{(n,\overline{n})}\left(z,\overline{z}\right)$$

dont la loi de changement sous des transformations conformes

$$G_{(n,\overline{n})} = \left|\frac{\partial z'}{\partial z}\right|^{2n} G'_{(n,\overline{n})}$$

On peut également avoir des objets

$$G_{(n,m)}$$

avec $n \neq m$.

5.8 Champs conformes & Applications

Pour commencer notons que un champ conforme

$$\Phi_{h,\overline{h}}(z,\bar{z}),$$

de poids conforme $(h,\overline{h})$, vivant dans l'espace $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ est un objet qui se transforme sous une transformation conforme

$$z \to \mathrm{f} = \mathrm{f}(z), \qquad \overline{z} \to \overline{\mathrm{f}} = \overline{\mathrm{f}}(\bar{z})$$

comme

$$\Phi(z,\bar{z}) \to \Phi(\mathrm{f},\bar{\mathrm{f}}) \left(\frac{d\mathrm{f}}{dz}\right)^{h} \left(\frac{d\overline{\mathrm{f}}}{d\overline{z}}\right)^{\bar{h}} \tag{5.12}$$

On distingue differents types de champs conformes. En particulier

(1) Les champ scalaires
(2) Les champs fermioniques
(3) Les champs tensoriels
(4) Les operateurs vertex