Chapitre 2 : Algèbre de Lie résolubles, nilpotentes et semi-simples.

Dans ce chapitre, nous étudions les algèbres de Lie via ses idéaux. En particulier, nous allons introduire deux suites d'idéaux de $\mathcal{G}$:

i) La série dérivée de $\mathcal{G}$; $\{\mathcal{G}^{(n)}\}$

ii) La suite centrale descendante de $\mathcal{G}$; $\{\mathcal{G}^{n}, n \in \mathbb{N}\}$

I _ Algèbre de Lie Résolubles.

Rappel : une dérivation d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est une application linéaire $d : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$

Satisfaisant la relation suivante :

$$d([x,y]) = [dx, y] + [x, dy]$$

En effet :

$$d([x,y]) = d(xy - yx) = (dx \cdot y + x \cdot dy - dy \cdot x - y\,dx)$$

$$= [dx, y] + [x, dy]$$

Définition : Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension finie, on appelle dérivée $n^{\text{ième}}$ $(\mathcal{G}^{(n)})$, la sous algèbre de $\mathcal{G}$ définie par :

$$\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G}$$

$$\mathcal{G}^{(n)} = [\mathcal{G}^{(n-1)}, \mathcal{G}^{(n-1)}]$$

Propriétés de $\mathcal{G}^{(n)}$

$\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G}$

$\mathcal{G}^{(1)} = [\mathcal{G}^{(0)}, \mathcal{G}^{(0)}] = [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} \Longrightarrow \mathcal{G}^{(1)} \subset \mathcal{G}^{(0)}$

$\mathcal{G}^{(2)} = [\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)}] \subset [\mathcal{G}^{(0)}, \mathcal{G}^{(0)}] = \mathcal{G}^{(1)} \Longrightarrow \mathcal{G}^{(2)} \subset \mathcal{G}^{(1)}$

$\vdots$

$$\boxed{\mathcal{G}^{(n)} \subset \mathcal{G}^{(n-1)} \subset \mathcal{G}^{(n-2)} \subset \dots \subset \mathcal{G}^{(2)} \subset \mathcal{G}^{(1)} \subset \mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G}}$$

La suite $\{\mathcal{G}^{(i)}, 0 < i < n\}$ est appelée série dérivée de $\mathcal{G}$

Définition :

une algèbre de Lie est résoluble ssi, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{G}^{(k)} = 0$

Exemples:

Ex 1: algèbres des matrices diagonales $\Delta(n)$

$$\left\{ \Delta(n) = \{ X \in \mathcal{G}l(n, \mathbb{C}) ; X_{ij} = a_i \delta_{ij} \} \right.$$

où $X_{ij} = 0$ si $i \neq j$

- la dimension de $\Delta(n)$ est n
- $\Delta(n)$ est une sous algèbre abélienne.

$[E_{ii}, E_{ii}] = 0$

$\forall\ x, y \in \Delta(n) \quad [X, Y] = 0$

$\Delta(n) = \mathcal{G}^{(0)}$; $\mathcal{G}^{(1)} = [\mathcal{G}^{(0)}, \mathcal{G}^{(0)}] = [\Delta(n), \Delta(n)] = 0$

toute algèbre de Lie abélienne est résoluble.

EX 2 : Algèbre de lie des matrices supérieures $N(n)$

c'est l'algèbre des matrices supérieures dont tous les éléments en dessous de la diagonale et de la diagonale sont nuls

$$N(n) = \{ X \in Gl(n, \mathbb{C}) \,/\, X_{ij} = 0 \quad \forall\, i \geq j \}$$

$\to$ $N(2) = \left\{ X \in Gl(2, \mathbb{C}) \,/\, X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

La dim de $N(2)$ est 1

$$X = a E_{12} = a |1\rangle\langle 2|$$

$$N^{(1)}(2) = [N(2), N(2)] = [E_{12}, E_{12}] = 0$$

donc $N(2)$ est résoluble est d'ordre 1

$\to$ $N(3) = \left\{ X \in Gl(3, \mathbb{C}) \,/\, X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

La dim ~~de~~ $N(3)$ est 3

les générateurs de $N(3)$ sont :

$E_{12} = |1\rangle\langle 2|$

$E_{13} = |1\rangle\langle 3|$

$E_{23} = |2\rangle\langle 3|$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} = N(3) = N^{(0)}(3)$$

$$N(3)^{(1)} = [N^{(0)}(3), N^{(0)}(3)] = [N(3), N(3)] \stackrel{?}{=}$$

II.3

il faut calculer $[N(3), N(3)]$

avec $N(3)$ ~~est~~ a pour générateurs E_{12}, E_{13} et E_{23}

	E_{12}	E_{13}	E_{23}
E_{12}	0	0	E_{13}
E_{13}	0	0	0
E_{23}	$-E_{13}$	0	0

avec :

$$[E_{ij}, E_{k\ell}] = E_{i\ell}\,\delta_{jk} - E_{kj}\,\delta_{\ell i}$$

$$[N(3), N(3)] \sim \mathbb{C} E_{13}$$

La dimension de $N^{(1)} = 1 \implies$ abélienne.

$$N^{(2)}(3) = [N^{(1)}(3), N^{(1)}(3)] = \mathbb{C}[E_{13}, E_{13}] = 0$$

$N(3)$ est une algèbre de Lie résoluble d'ordre 2.

<u>EX3</u> : Algèbre des matrices triangulaires.

$$T(n) = \{X = X_1 + X_2 \,/\, X_1 \in \Delta(n),\ X_2 \in N(n)\}$$

$$X_{ij} = 0 \text{ si } i > j$$

$$T(2) = \left\{X \in gl(2, \mathbb{C}) \,/\, X = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\right\}$$

La dim de $T(2)$ est 3

Les générateurs de $T(2)$ sont : E_{11}, E_{12} et E_{22}

$$T^{(0)}(2) = T(2)$$

$$T^{(1)}(2) = [T^{(0)}(2), T^{(0)}(2)] = [T(2), T(2)] = \mathbb{C} E_{12}$$

$$T^{(2)}(2) = [T^{(1)}(2), T^{(1)}(2)] = 0 \implies T(2) \text{ est résoluble d'ordre 2.}$$

Devoir :

i) Déterminer la dim de $T(n)$

ii) Calculer l'ordre de résolubilité de $T(n)$

II.4

Propriété:

$\mathcal{G}$ Algèbre de lie résoluble d'ordre $k \Longrightarrow \mathcal{G}^{(k-1)}$ est abelienne de dim 1

Théorème:

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de lie.

1 - Si $\mathcal{G}$ est résoluble alors:

(i) toutes les sous algèbres de $\mathcal{G}$ sont résolubles

(ii) ses images par un homomorphisme d'algèbre sont résolubles.

2 - Si I un idéal résoluble tel que $\mathcal{G}/I$ est résoluble alors $\mathcal{G}$ résoluble.

3 - si I et J sont deux idéaux résolubles, alors $I+J$ est aussi résoluble.

Preuves:

1 - (i) Soit $\mathcal{G}_0$ un sous algèbre de lie de $\mathcal{G}$

$\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$, $[\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_0] \subset \mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ déf d'1 ss algèbre de lie

$$\mathcal{G}_0^{(1)} = [\underbrace{\mathcal{G}_0^{(0)}}_{=\mathcal{G}_0}, \underbrace{\mathcal{G}_0^{(0)}}_{=\mathcal{G}_0}] \subset [\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}^{(1)}$$

$$\mathcal{G}_0^{(2)} = [\mathcal{G}_0^{(1)}, \mathcal{G}_0^{(1)}] \subset [\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)}] = \mathcal{G}^{(2)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\mathcal{G}_0^{(n)} \subset \mathcal{G}^{(n)}$$

$\mathcal{G}$ résoluble $\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{G}_0^{(k)} \subset \mathcal{G}^{(k)} = 0$

$\Longrightarrow \mathcal{G}_0^{(k)} = 0 \Longrightarrow \mathcal{G}_0$ est résoluble.

(ii) soit $\phi : G \longrightarrow G'$

ϕ un homomorphisme de $G \longrightarrow G'$

$$\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)] \quad \forall x, y \in G$$

$$\phi(\underbrace{[G,G]}_{= G^{(1)}}) = \underbrace{[\phi(G), \phi(G)]}_{= \phi^{(1)}(G)}$$

$$\Rightarrow \phi(G^{(1)}) = \phi^{(1)}(G)$$

$$\phi(G^{(2)}) = \phi([G^{(1)}, G^{(1)}]) = [\phi(G^{(1)}), \phi(G^{(1)})]$$
$$= [\phi^{(1)}(G), \phi^{(1)}(G)] = \phi^{(2)}(G)$$

$$\Rightarrow \phi(G^{(2)}) = \phi^{(2)}(G)$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \phi(G^{(n)}) = \phi^{(n)}(G)$$

G est résoluble $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tel que $G^{(k)} = 0$

$$\phi(G^{(k)}) = \phi^{(k)}(G) = \phi(0) = 0$$

$$\Rightarrow \phi^{(k)}(G) = 0 \Longrightarrow \phi(G) \text{ est résoluble.}$$

La démonstration de 2 et 3 est de voir.

II.6

II. Algèbres de lie nilpotentes:

Définition: on appelle suite centrale déscendante d'une algèbre de lie G, la suite $\{G^i, 1 \leq i \leq n\}$ définie par $G^0 = G$

$$G^n = [G, G^{n-1}]$$

propriétés:

1 - $G^0 = G$

$$G^1 = [G, G^0] = [G, G] \subset G = G^0$$

$$G^2 = [\underline{G, G^1}] = [G, [G, G]] \subset [G, G] = G^1$$

$$G^2 \subset G^1 \subset G^0 \qquad [G, G^1] \subset G^1$$

$$\Leftarrow$$

G^1 est idéal de G

2 - $G^2 \subset G^1 \subset G^0$

$\vdots \qquad \vdots$

$$G^n \subset G^{n-1} \subset \ldots \subset G^1 \subset G^0 = G$$

3 - G^n sont des idéaux de G

4 - Ne pas confondre $G^{(n)} \neq G^n$

Définition:

une Algèbre de lie est dite nilpotente ssi sa suite centrale descendante est finie. Autrement dit, $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tel que $G^k = 0$

Exemples:

Ex 1: Toute algèbre de Lie abélienne est nilpotente car $\mathcal{G}' = [\mathcal{G}, \mathcal{G}] = 0$

Ex 2: $N(2) = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C} \right\}$

La dim de $N(2) = 1 \Rightarrow$ abélienne $\Rightarrow$ nilpotente d'ordre 1

Ex 3: $N(3) = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$

dim de $N(3)$ est 3

Les générateurs de $N(3)$ sont: E_{12}, E_{23} et E_{13}

$$N(3) = \mathbb{C} E_{12} + \mathbb{C} E_{13} + \mathbb{C} E_{23}$$

$N'(3) = [N(3), N(3)] = ?$ il faut calculer les relations de commutation entre les générateurs

$[E_{ij}, E_{kl}]$	E_{12}	E_{13}	E_{23}
E_{12}	0	0	E_{13}
E_{13}	0	0	0
E_{23}	$-E_{13}$	0	0

avec $[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{li} E_{kj}$

$N'(3) = \mathbb{C} E_{13} \Rightarrow N'(3)$ est abélienne $\Rightarrow$ nilpotente d'ordre 2

puisque $N^2(3) = [N(3), N'(3)] = 0$

Remarque:

i) $\mathcal{G}^{(1)} = [\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}'$

$\mathcal{G}^{(2)} = [\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)}] = [[\mathcal{G}, \mathcal{G}], [\mathcal{G}, \mathcal{G}]] = [[\mathcal{G}, \mathcal{G}], \mathcal{G}'] \subset [\mathcal{G}, \mathcal{G}'] = \mathcal{G}^2$

$\vdots$

$\mathcal{G}^{(n)} \subset \mathcal{G}^n \Rightarrow$ toute algèbre nilpotente est résoluble

Puisque $\mathcal{G}$ nilpotente $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ t.q $\mathcal{G}^k = 0$

$\mathcal{G}^{(k)} \subset \mathcal{G}^k = 0 \Rightarrow \mathcal{G}^{(k)} = 0 \Rightarrow \mathcal{G}$ est résoluble.

Propositions: (Devoir)

$\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de centre $Z(\mathcal{G}) \neq 0$ (non simple)

1 - Si $\mathcal{G}$ est nilpotente, ses sous algèbres, ses images par un homomorphisme d'algèbre sont aussi nilpotentes.

2 - Si $\mathcal{G}/Z(\mathcal{G})$ est nilpotente alors $\mathcal{G}$ est nilpotente.

3 - Si $\mathcal{G}$ est nilpotente alors $Z(\mathcal{G}) \neq 0$

Autres propriétés des algèbres de Lie nilpotentes.

$\mathcal{G}^0 = \mathcal{G}$

$\mathcal{G}^1 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}^0] = \mathcal{G}^{(1)}$

$\mathcal{G}^1 = ad_g(\mathcal{G})$

puissance

$\mathcal{G}^2 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}^1] = ad_g(\mathcal{G}^1) = ad_g(ad_g(\mathcal{G})) = ad_g^2(\mathcal{G})$

$\mathcal{G}^3 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}^2] = ad_g(\mathcal{G}^2) = ad_g(ad_g^2(\mathcal{G})) = ad_g^3(\mathcal{G})$

$\vdots$

$\mathcal{G}^{n+1}(\mathcal{G}) = [\mathcal{G}, \mathcal{G}^n] = ad_g(\mathcal{G}^n) = ad_g^{n+1}(\mathcal{G})$

$X \in \mathcal{G}^{n+1}$

$X = ad_{x_1} ad_{x_2} \cdots ad_{x_{n+1}}(y) \quad \forall y \in \mathcal{G}$

Si $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1} \Rightarrow X = ad_{x_1}^{n+1}(y)$

Déf : ad-nilpotente.

Soient :

i) G est une algèbre de Lie

ii) x un élément de G

on dit que $x \in G$ est ad-nilpotente ssi ad_x est un endomorphisme (matrice) est nilpotente.

$$ad \quad G \longrightarrow G$$
$$\cdot \longrightarrow [\cdot, y] \qquad \forall y \in G$$

Lemmes :

Lemme 1 : Si G une algèbre de Lie nilpotente alors tous les éléments $x \in G$ sont ad-nilpotentes.

Preuve : G est nilpotente $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ t.q $G^k = 0$

$$G^k = ad_G^k(G) = 0$$

$$\forall x \in G \Rightarrow ad_x^k(G) = 0 \Rightarrow ad_x \text{ est nilpotente.}$$

Lemme 2 : Théorème d'Engel.

Si tous les éléments de G sont ad-nilpotente, alors G est nilpotente.

Preuve :

$$\forall x \in G \quad ad_x^k(y) = 0 \quad \forall y \in G$$

$$ad_G^k(G) = 0 \Rightarrow G^k = 0 \Rightarrow G^k \text{ est nilpotente}$$

$\{ad_x$ nilpotente $\equiv x$ est ad-nilpotente$\}$

Remarque:

Si X (matrice) nilpotente $\Longrightarrow$ ad_X - nilpotente

$\cancel{\Longleftarrow}$ l'inverse n'est pas vrai

Exemple: l'identité $I_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$

I est ad-nilpotente $[I_n, Y] = 0 \quad \forall Y$: matrice $n\times n$

mais I_n n'est pas nilpotente car $I_n^k \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$

Lemme 3:

$\mathcal{G}$ une algèbre de lie

V un e.v de dim finie n, $V \neq \{0\}$

$$\phi : \mathcal{G} \longrightarrow gl(V) = gl(n, \mathbb{C})$$
$$x \longrightarrow \phi(x) = X_{n\times n} \leftarrow \text{matrice } n\times n$$

si tous les $\phi(x)$, $x \in \mathcal{G}$, sont nilpotentes, alors $\exists\, v_0 \in V$

$v_0 \neq \vec{0}$ tel que $\phi(x) \cdot v_0 = 0$

Exemples:

Ex 1: $\phi(x) = X$ avec $X^k = 0$

$$X^k |v\rangle = 0 \Longrightarrow X \underbrace{X^{k-1} |v\rangle}_{v_0} = 0$$

Ex 2: $X \in N(3)$ $\quad \phi(x) = X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

soit $B = \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$

II.11

$\phi(x)\,|1\rangle = \phi(x) \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ donc $v_0 = |1\rangle = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

III. Algèbres de lie Semi-Simples.

Déf: Soit G une algèbre de lie, on dit que G est semi-simple ssi elle ne contient aucun idéal résoluble autres que les idéaux triviaux.

Théorème de lie:

Soient:

i) G une algèbre de lie

ii) V un e.V de dim finie

iii) ϕ une représentation $G \longrightarrow Gl(V)$

$$x \longrightarrow \phi(x) = X$$

Si G est résoluble alors, il existe un vecteur commun à tous les endomorphismes de X de $Gl(V)$.

Exemple:

$\dim V = m$ $\quad G = T(m)$; $T(m)$ est résoluble

tout algèbre résoluble $\subset T(m)$

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1m} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & X_{m-1\,m} \\ & & & X_{mm} \end{pmatrix}$$

B une base de $V = \{ |i\rangle \quad i = 1, \ldots, m \}$

$X|1\rangle = X_{11}|1\rangle$

le vecteur $|1\rangle$ est un vecteur commun à tous $X \in G$

Déf : Drapeau d'un espace Vectoriel.

Soit V un e.V de dim finie.

on appelle drapeau (flag) dans V une suite de sous espaces vectoriels de V $\{V_i, i=0,1,\dots,n\}$

tel que

i) $0=V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots \subset V_n = V$

ii) $\dim V_j = j$

Exemple

Considérons V un espace vectoriel de dim n

$B = \{|i\rangle \,;\; i=1,\dots,n\}$ une base de V

$V_1 \equiv \mathbb{C}|1\rangle \Rightarrow v \in V_1 \Rightarrow v = \alpha|1\rangle \qquad \alpha \in \mathbb{C}$

$V_2 \equiv \underbrace{\mathbb{C}|1\rangle}_{V_1} \oplus \mathbb{C}|2\rangle = \cancel{\mathbb{C}} V_1 + \mathbb{C}|2\rangle$

$V_1 \subset V_2$

$V_3 \equiv \underbrace{\mathbb{C}|1\rangle + \mathbb{C}|2\rangle}_{V_2} + \mathbb{C}|3\rangle = \cancel{\mathbb{C}} V_2 + \mathbb{C}|3\rangle$

$\vdots$

$V_{n-1} = V_{n-2} + \mathbb{C}|n-1\rangle$

$V_n = \mathbb{C}|n\rangle + V_{n-1}$

$\Rightarrow \quad V_1 \subset V_2 \subset V_3 \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$

Corollaires du Théorème de Lie

① Si $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie de $\mathcal{G}l(V)$ résoluble, alors $\mathcal{G}$ stabilise un drapeau dans V c-à-d. $\boxed{\mathcal{G}\cdot V_j \subset V_j}$

Exemple : $T(3)$

La dim de $T(3)$ est 6 $\qquad \dim T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \quad ; \; a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$$

V : espace vectoriel de dim 3

$B = \{ |i\rangle, \; i = 1, 2, 3 \}$

$T(3)$ est résoluble

l'action de X sur B est comme suit :

$$X|1\rangle = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a|1\rangle$$

$V_1 = \mathbb{C}|1\rangle$

$X|1\rangle = a|1\rangle \in V_1 \implies \mathcal{G}V_1 \subset V_1$

$$X|2\rangle = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b|1\rangle + d|2\rangle$$

$V_2 = \mathbb{C}|1\rangle + \mathbb{C}|2\rangle$

$X(\mathbb{C}|1\rangle + \mathbb{C}|2\rangle) \in V_2 \implies \mathcal{G}V_2 \subset V_2$

$X|3\rangle = c|1\rangle + e|2\rangle + f|3\rangle$

$V_3 = \mathbb{C}|1\rangle + \mathbb{C}|2\rangle + \mathbb{C}|3\rangle$

$X(\mathbb{C}|1\rangle + \mathbb{C}|2\rangle + \mathbb{C}|3\rangle) \in V_3 \implies \mathcal{G}V_3 \subset V_3$

... forment un drapeau et $\mathcal{G}V_i \subset V_i$

Déf: à l'intérieur du corollaires

$\mathcal{G}$ une algèbre de lie, on définit un drapeau dans $\mathcal{G}$ stable sous l'action adjointe de $\mathcal{G}$ comme suit:

i) $0 \subset \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \dots \subset \mathcal{G}_m = \mathcal{G}$ (puisque $\mathcal{G}$ est aussi un espace vectoriel)

ii) les sous espaces vectoriels de $\mathcal{G}$ sont des idéaux $\mathcal{G}_i$ de $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G}.\mathcal{G}_i = [\mathcal{G}, \mathcal{G}_i] = ad_{\mathcal{G}}\, \mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_i \qquad (V_i \equiv \mathcal{G}_i)$$

(2) Si $\mathcal{G}$ une algèbre de lie résoluble de dim m, alors il existe une chaîne d'idéaux $\mathcal{G}_i$ de $\mathcal{G}$ tel que

i) $\mathcal{G}_0 = 0 \subset \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \dots \subset \mathcal{G}_m = \mathcal{G}$

ii) $\dim \mathcal{G}_i = i \qquad i = 0, 1, \dots, m$

(3) si $\mathcal{G}$ est une algèbre de lie résoluble, alors

i) ad_x est nilpotente pour $x \in [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$

ii) $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ est nilpotente.

Déf d'un centraliseur

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de lie et A un sous ensemble de $\mathcal{G}$ on définit le centraliseur de A comme suit:

$$C_{\mathcal{G}}(A) = \{x \in \mathcal{G} / [x, A] = 0\}$$

$C_{\mathcal{G}}(A)$ est une <u>sous algèbre de $\mathcal{G}$</u>

En effet: pour montrer que $C_{\mathcal{G}}(A)$ est une <u>S.A.L</u> il faut montrer que $[C_{\mathcal{G}}(A), C_{\mathcal{G}}(A)] \subset C_{\mathcal{G}}(A)$

II.15

$\forall x \in C_g(A)$, $\forall y \in C_g(A)$

$[x, y] \in C_g(A)$

$x \in C_g(A) \Rightarrow [x, A] = 0$

$y \in C_g(A) \Rightarrow [y, A] = 0$

$[[x,y], A] \overset{?}{=} 0$

on a $[[x,y],A] = \underbrace{[x,[y,A]]}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \underbrace{[[A,x],y]}_{\overset{\shortparallel}{0}}$

$= 0$

d'où $C_g(A)$ est une sous algèbre de lie de g

Remarques:

* Chaque étudiant doit connaître:

- comment diagonaliser une matrice
- calculer le polynôme minimale
- une matrice symétrique est diagonalisable
- Si on a une matrice non diagonalisable alors il faut faire la méthode de Jordan qui rende la forme de la matrice comme suit

$$X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & a & 1 & & & 0 \\ & & a & 1 & & \\ 0 & & & a & 1 & 0 \\ & & & & a & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & a \end{pmatrix} \qquad X = \underbrace{a\,\delta_{ij}}_{\text{diagonale}} + \underbrace{\delta_{i\,j-1}}_{\text{nilpotente}}$$

Décomposition de Jordan-Chevally.

Forme canonique de Jordan:

Soit : - V est dim finie n

- $X : V \longrightarrow V$ un endomorphisme de V

Alors on peut trouver une base de V telle que la forme matricielle de X est de la forme suivante:

$$\boxed{X = X_{diag} + X_{nilpotente}}$$

Endomorphisme semi-simple:

Déf 1 : un End $X : V \longrightarrow V$ d'un e.v. V de dim n est dit semi-simple si son polynôme minimal $m_X(t)$ n'a que des racines distincts:

$$m_X(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\dots(t-\lambda_n)$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{si } i \neq j$$

Déf 2 : Un End X est dit semi-simple s'il est diagonalisable dans une base de V

Exemples:

i) Une matrice symétrique est semi-simple car elle est diagonalisable

ii) Les matrices hermitiques $n \times n$ de $gl(n, \mathbb{C})$ sont semi-simples

$$X^+ = X \quad , \quad X^+_{ij} = (X^*_{ij})^t = X^*_{ji}$$

toutes matrices hermitique est diagnalisable

Radical de $\mathcal{G}$

Toute algèbre de Lie $\mathcal{G}$ possède un idéal résoluble maximal noté R. R est la somme de tous les idéaux résolubles, R est appelé Radical de $\mathcal{G}$ (le radical de $\mathcal{G}$ = $Rad_{\mathcal{G}}$)

$$R = \underset{\uparrow}{+}(\overset{\text{idéal}}{\mathcal{J}})$$

somme sur tous les idéaux

Déf 1 :

Si $Rad_{\mathcal{G}} = 0$ $(\mathcal{G} \neq 0)$ alors $\mathcal{G}$ est dit semi-simple.

puisque $Rad_{\mathcal{G}} = 0 \Rightarrow$ pas d'idéaux résolubles.

Déf 2 :

$\mathcal{G}$ est sem-simple $\Longleftrightarrow \nexists\, J \subset \mathcal{G}$, $[J, \mathcal{G}] \subset J$, $[J, J] = 0$

Autrement dit : $\mathcal{G}$ ne possède aucun idéal abélien.

Théorème :

$\mathcal{G}$ est semi-simple $\Longleftrightarrow K(x, y) = Tr\, ad_x\, ad_y$ est non dégénérée

Corollaire :

Si $\mathcal{G}$ est semi simple alors :

i) Tous les idéaux de $\mathcal{G}$, les images par ϕ sont semi-simple

$\mathcal{G} = \bigoplus_i \mathcal{G}_i$ $\quad\quad\quad$ $\mathcal{G}_i$ algèbre de Lie simple.

Chapitre 3 : Les $\mathfrak{g}$-modules d'une algèbre de Lie.

I - Les $\mathfrak{g}$-modules :

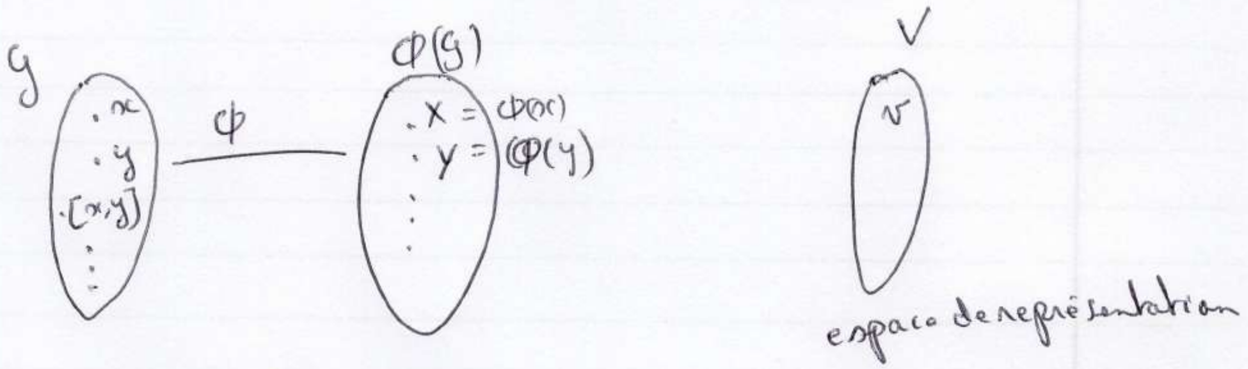
Rappel : Si $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie $\equiv$ e.v + crochet de Lie

ϕ une représentation t.q : $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow Gl(V)$

alors l'espace vectoriel V peut être vu comme un $\mathfrak{g}$-module.

l'action des éléments $x \in \mathfrak{g}$ sur V est :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} : V &\longrightarrow V \\ v &\longrightarrow (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{loi abstrait}}}{x \cdot v}) \equiv \underbrace{\phi(x)}_{\text{matrice}} \cdot v \end{aligned}$$



$$\phi(\mathfrak{g}) \subset Gl(V) : \quad \begin{aligned} V &\longrightarrow V \\ v &\longrightarrow (\phi(x) = X) \cdot v \end{aligned}$$

$x \in \mathfrak{g}$

L'espace vectoriel V est dit $\mathfrak{g}$-module ou espace de représentation

1 - Définition et propriétés :

a - Déf d'un $\mathfrak{g}$-module.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. un espace vectoriel V muni d'une opération $(\cdot)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \cdot V &\longrightarrow V \\ (x, v) &\longrightarrow x \cdot v \end{aligned}$$

III.1

V est dit un $\mathcal{G}$-module (ou module de $\mathcal{G}$) si les conditions suivantes sont satisfaites :

i) $(ax+by)\cdot v = a(x\cdot v) + b(y\cdot v)$

ii) $[x,y]\cdot v = xy\cdot v - yx\cdot v$

iii) $x\cdot(av+bw) = a(x\cdot v) + b(v\cdot w)$

avec $x, y \in \mathcal{G}$; $v, w \in V$; $a, b \in \mathbb{C}$

Remarque

Le vecteur $(x\cdot v)$ doit être vu comme $\phi(x)\cdot v$, où ϕ une représentation de $\mathcal{G}$ dans $gl(V)$

b- propriétés :

* Homomorphisme d'une $\mathcal{G}$-module.

L'application $f : V \longrightarrow W$
$v \longrightarrow f(v) = w$

f est un homomorphisme de $\mathcal{G}$-module si elle satisfait la propriétés suivante : $f(x\cdot v) = x\cdot f(v)$

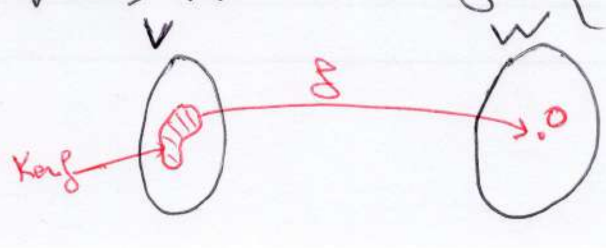
$\forall x \in \mathcal{G}$ et $v \in V$

Cette condition assure la vérification des axiomes de $\mathcal{G}$-modules (i), ii) et iii)).

Si f est un isomorphisme de $\mathcal{G}$-module, alors V et W sont des $\mathcal{G}$-modules équivalents. $(V \equiv W)$

* Noyau de l'homomorphisme f.

$f : V \longrightarrow W$; $\mathrm{Ker} f = \{ v \in V / f(v) = 0 \} \subset V$



Ker f est un sous espace vectoriel de V

$v_1, v_2 \in \mathrm{Ker} f \qquad a_1, a_2 \in \mathbb{C}$

$$f(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 \underbrace{f(v_1)}_{0} + a_2 \underbrace{f(v_2)}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow a_1 v_1 + a_2 v_2 \in \mathrm{Ker} f$$

Remarque :

si $\mathrm{Ker} f = \{0\}$: $f : V \longrightarrow W$ alors f est un isomorphisme

(c-à-d si $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$)

* G module irréductible :

V un G-module est dit irréductible ssi les sous G-modules de V sont $\{\{0\}, V\}$. tel que.

$$G.V \subset V \qquad \forall x \in G,\ x.v \in V ; v \in V$$

Dans le cas contraire, V est dit réductible, c-à-d

$$\exists V_i ;\ G V_i \subset V_i \quad ; \quad V = \bigoplus_i V_i$$

Remarques :

. Les espaces vectoriels $W \subset V$, $\dim W = 1$ sur lequels l'algèbre de lie agit trivialement $G.W = 0$ sont appelés espaces scalaires.

.. un G-module est complètement réductible, s'il est la somme directe de G-modules irréductibles

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n \quad \text{où } G V_i \subset V_i$$

III . 3

II - Construction de $\mathcal{G}$-modules:

1 - Somme directe:

Etant donné deux $\mathcal{G}$-modules V_1 et V_2 c-à-d

$$\mathcal{G}.V_1 \longrightarrow V_1 \qquad \mathcal{G}.V_2 \longrightarrow V_2 \qquad x \in \mathcal{G}$$
$$(x, v_1) \longrightarrow x.v_1 \qquad (x, v_2) \longrightarrow x.v_2$$

alors $V = V_1 \oplus V_2$, somme directe de V_1 et V_2 définie par

$$\mathcal{G}.\, V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2 \qquad x \in \mathcal{G}$$
$$(v_1, v_2) \longrightarrow (x.v_1, x.v_2)$$

V est dit $\mathcal{G}$-module somme directe.

2 - $\mathcal{G}$-module adjoint:

Dans le cas où $V = \mathcal{G}$ elle m̂ c-à-d

$$\mathcal{G}.(V = \mathcal{G}) \longrightarrow (V = \mathcal{G})$$
$$x . y \longrightarrow x.y = [x, y] \in \mathcal{G}$$

ds ce cas $V = \mathcal{G}$ est dit $\mathcal{G}$-module associé à la représentation adjointe.

3 - $\mathcal{G}$-module dual

Etant donné un $\mathcal{G}$-module V:

$$\mathcal{G}.\, V \longrightarrow V$$
$$(x, v) \longrightarrow x.v$$

on peut construire un autre $\mathcal{G}$-module V^* dual de V t.q:

$$\mathcal{G}.V^* \longrightarrow V^*$$
$$x, f \longrightarrow (x.f)(v) = -f(x.v)$$

$x \in \mathcal{G}$, $f \in V^*$ et $v \in V$

Rappel:

V est e.v ; V^* e.v dual de V

$V^* = \{ f \,/\, f : V \longrightarrow \mathbb{C} \}$ est l'ensemble des formes f sur $\mathbb{C}$;

$\dim V = \dim V^*$

si $\{|v_i\rangle \quad i = 1, \dots, n\}$ est une base de V

le système $\{\langle f_j| \; ; \; j = 1, \dots, n\}$ est un base de V^*

t.q : $\langle f_j | v_i \rangle = \delta_{ij}$

4 - $\mathcal{G}$-module produit tensoriel.

Soient:

V un e.v dont la base $\{|v_i\rangle \,,\, i = 1, \dots, \dim V = n\}$

W , , , , , , $\{|w_j\rangle \; ; \; j = 1, \dots, \dim W = m\}$

$\{ \underset{\equiv\, |i\rangle}{|v_i\rangle} \otimes \underset{\equiv\, |j\rangle}{|w_j\rangle} \}$ est une base de l'espace vectoriel

produit tensoriel $V \otimes W$. La dimension de $V \otimes W = n.m$

$V \otimes W$ muni de l'opération

$$\mathcal{G} : V \otimes W \longrightarrow V \otimes W$$
$$(x, |i\rangle \otimes |j\rangle) \longrightarrow x.(|i\rangle \otimes |j\rangle)$$

$$x.(|i\rangle \otimes |j\rangle) = (x.|i\rangle) \otimes |j\rangle + |i\rangle \otimes (x.|j\rangle)$$

est un $\mathcal{G}$-modul produit tensoriel.

Exercice: vérifier les 3 propriétés de $\mathcal{G}$-modules.

Exemple: (cas particulier)

si $W = V^*$ dual de V

$(\dim V = \dim W = n) \Rightarrow \dim(V \otimes W) = n^2$

La base de $V \otimes V^* = \{ |i\rangle \otimes \langle j| \}$ base canonique

$|i\rangle \otimes \langle j| = |i\rangle\langle j| = E_{ij}$

E_{ij} : sont les générateurs de l'espace $V \otimes V^*$

l'opération $G : V \otimes V^* \longrightarrow V \otimes V^*$

$$(x, |i\rangle \otimes \langle j|) \longrightarrow x(|i\rangle \otimes \langle j|)$$
$$= (x.|i\rangle) \otimes \langle j|$$
$$+ |i\rangle \otimes (x.\langle j|)$$

est un G-module

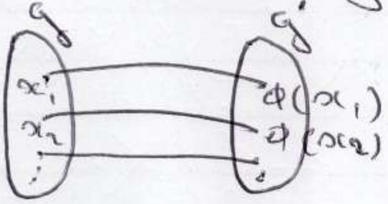
Exercice: vérifier les 3 propriétés de G-modules.

III - Casimir d'une représentation d'une algèbre de lie.

1 - Casimir d'une représentation fidèle.

Déf: une représentation $\phi : G \longrightarrow G'$ d'1 algèbre semi-simple est dite fidèle (faithful) si à tt élément $\phi(x)$ de G' correspond à un seul élément de G

$\phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$



propriétés:

i) $\phi : G \longrightarrow G'$ est une injection $\quad \operatorname{Ker} \phi = 0$

ii) si $G' = Gl(V)$, la $\dim V = n$, on peut associer à toute représentation fidèle $\phi : G \to Gl(V)$ une forme bilinéaire, symétrique et associative

$$\beta(x,y) = Tr(\Phi(x)\Phi(y))$$

$x, y \in G$

si $\Phi = ad$

alors β est la forme de Killing de G.

2 - Base duale d'1 algèbre de Lie :

Déf : Soient :

- Φ une algèbre de Lie de dim finie.
- β une forme bil, sym et ass sur G

$$\beta : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$$

si $(T_1, \dots, T_m)$ est un base de G alors il existe une base unique $(E_1, \dots, E_m)$ duale de G relativement à β tel. que :

$$\beta(T_i, E_j) = \delta_{ij} \equiv (T_i, E_j) \equiv \langle T_i, E_j \rangle$$

$$x \in G \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{\dim G} \alpha_i T_i$$

Déf : Soient :

- $\Phi : G \rightarrow Gl(V)$ une représentation fidèle dans $gl(V)$
- β une forme bil, sym et ass. $(\dim G = m)$

on appelle casimir de la représentation Φ relativement à β la quantité $C_\beta(\Phi)$ définie par

$$C_\beta(\Phi) = \sum_{i=1}^{m} \Phi(x_i)\,\Phi(y_i)$$

$\{x_i\}$ et $\{y_i\}$ sont des bases duales de G relativement à β

$$\beta(x_i, x_j) = \delta_{ij}$$

III-7

Propriétés :

$\dim \mathcal{G} = n$ $\quad \Phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Gl}(V)$ une rep fidèle

i) $C_\beta(\Phi) \in \mathrm{End}\, V$

ii) $C_\beta(\Phi)$ commute avec les éléments $\Phi(x)$ de $\Phi(\mathcal{G})$

$$[C_\beta(\Phi), \Phi(x)] = 0 \quad \forall x \in \mathcal{G} \quad \text{(Exercice)}$$

iii) si Φ une représentation fidèle t.q $\beta(x,y) = \mathrm{Tr}\, \Phi(x)\Phi(y)$

alors $\quad \mathrm{Tr}\, C_\beta(\Phi) = \dim \mathcal{G}$

Exercice

Soit $\mathcal{G} = sl(2) \equiv A_1$ une algèbre de Lie

les générateurs de A_1 sont e, f et h

t.q $\quad e = E_{12}$, $f = E_{21}$ et $h = E_{11} - E_{22}$

l'opérateur casimir est donné par:

$$C := ef + fe + \frac{1}{2}h^2$$

Montrer que C commute avec les générateurs de A_1.

Chapitre 4 : L'algèbre de Lie A_1 et ses représentations

Dans ce chapitre on va étudier les représentation de l'algèbre A_1 $(sl(2,\mathbb{C}))$.

L'indice 1 dans A_1 est le rang, c'est le nombre des générateurs diagonaux.

La classification des algèbres de Lie finies :

$A_n \equiv sl(n+1,\mathbb{C}) \qquad n \geqslant 1$

$B_n \equiv so(2n+1,\mathbb{C}) \qquad n \geqslant 2$

$C_n = sp(2n,\mathbb{C}) \qquad n \geqslant 3$

$D_n = so(2n,\mathbb{C}) \qquad n \geqslant 4$

$$\left.\begin{array}{l} E_6 \\ E_7 \\ E_8 \\ F_4 \\ G_2 \end{array}\right\} \text{Algèbres de Lies exeptionnels}$$

ADE : des algèbres de Lies simplement lacée

BCFG : des algèbres de Lies non simplement lacée

I - Les sous algèbres de Lie $Gl(2,\mathbb{C})$

a - Espace vectoriel $Mat(2,\mathbb{C})$

L'espace des matrices 2×2 complexes agissant sur les 2-vecteurs est un espace des opérateurs de dim 4.

$$x \in Mat(2,\mathbb{C}) \Longrightarrow x = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$$

$$E_{ij} = |i\rangle\langle j| \qquad x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

on peut écrire x dans une autre base, par exemple la base de Cartan $\{\tau^\mu,\ \mu = 0, +, -, 3\}$

avec $\tau^0 = E_{11} + E_{22} = I_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\tau^+ = E_{12} \quad , \quad \tau^- = E_{21} \text{ et } \tau^3 = E_{11} - E_{22}$$

dans ce cas

$$x = a_0\tau^0 + a_+\tau^+ + a_-\tau^- + a_3\tau^3$$

$\Rightarrow a = a_0 + a_3\ ,\ b = a_+\ ,\ c = a_-$ et $d = a_0 - a_3$

Les relations de commutations dans la base de Cartan sont :

$$[\tau^0, \tau^\mu] = 0 \quad , \quad [\tau^3, \tau^\pm] = \pm 2\tau^\pm \quad , \quad [\tau^+, \tau^-] = \tau^3$$

D'autres écritures sont possibles si faisant des transformations

$$x \longrightarrow x' = U^{-1} x U$$

IV - 2

Remarque :
La base de Cartan est intéressante en physique surtout dans l'étude des représentations.

Rappel:

Soit V_2 un espace vectoriel engendré par $\{|1\rangle, |2\rangle\}$

" V_2^* " " " " dual " " $\{\langle 1|, \langle 2|\}$

ω est un forme t.q:

$$\omega : V_2 \otimes V_2^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$|u\rangle , \langle v| \longrightarrow \omega(|u\rangle\langle v|) = \langle v|u\rangle$$

avec

$$\omega(|i\rangle\langle j|) = \langle j|i\rangle = \delta_{ji} = \delta_{ij}$$

L'opérateur matriciel est: $|i\rangle \otimes \langle j| = |i\rangle\langle j| = E_{ij}$

$|i\rangle \otimes \langle j|$ un état de l'espace produit tensoriel $V_2 \otimes V_2^*$

$$u \in V_2 \Longrightarrow u = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i |i\rangle$$

$$v^* \in V_2^* \Longrightarrow v^* = \sum_{j=1}^{2} \beta_j \langle j|$$

$$x \in V_2 \otimes V_2^* \Longrightarrow x = \sum_{i,j} a_{ij} |i\rangle\langle j|$$

$$a_{ij} \equiv \alpha_i \beta_j$$

De plus de la structure d'espace vectoriel, l'ensemble des matrices $x \in Mat(2, \mathbb{C})$ avec le produit usuel des matrices permet de donner une structure d'algèbre.

Autrement dit, $Mat(2, \mathbb{C})$ muni du crochet de Lie

$$[\,,\,] \quad Mat(2,\mathbb{C}) \times Mat(2,\mathbb{C}) \longrightarrow Mat(2,\mathbb{C})$$

$$x \quad y \longrightarrow [x,y] = xy - yx$$

IV-3

a une structure d'algèbre de Lie.

Remarque : dans les relations de commutations entre les générateurs τ^{r} de la base de Cartan, on remarque que l'opérateur τ^3 est un opérateur qui compte les charges portées par les différents τ^{r}.

b - les sous algèbres de $gl(2, \mathbb{C})$

i) $\underline{gl(2, \mathbb{C})} = \{x \in Mat(2, \mathbb{C}) / \operatorname{tr} x = qlq\}$

la dim de $gl(2, \mathbb{C})$ est 4 complexes

ii) $\underline{sl(2, \mathbb{C})} = \{x \in Mat(2, \mathbb{C}) / \operatorname{tr} x = 0\}$

La dim de $sl(2, \mathbb{C})$ est 3 complexes (6 réelles).

$$sl(2, \mathbb{C}) \subset gl(2, \mathbb{C})$$

Les générateurs de $sl(2, \mathbb{C})$ dans la base de Cartan sont : $\tau^{\pm}, \tau^3$

$$x \in sl(2, \mathbb{C}) \Rightarrow x = a_- \tau^- + a_+ \tau^+ + a_3 \tau^3$$

$$gl(2, \mathbb{C}) = \mathbb{C}\tau^0 \oplus sl(2, \mathbb{C}).$$

iii) L'algèbre $\underline{u(2)}$: c'est une sous algèbre de lie de $gl(2, \mathbb{C})$ dont les éléments sont donnés par des matrices hermitiques. $u(2) = \{x \in Mat(2, \mathbb{C}) / x^{+} = x\}$

$$u(2) \subset gl(2, \mathbb{C})$$

la dim de $u(2)$ est 4 réelles.

En effet:

$$x \in U(2) \Rightarrow x^{+} = x \quad \text{avec } x \in gl(2, \mathbb{C})$$

$$x = a_- \tau^- + a_+ \tau^+ + a_3 \tau^3 + a_0 \tau^0$$

$$x^{+} = (a_- \tau^-)^{+} + (a_+ \tau^+)^{+} + (a_3 \tau^3)^{+} + (a_0 \tau^0)^{+}$$

$$\tau^{+} = E_{12} \Rightarrow (\tau^{+})^{+} = E_{21} = \tau^-$$

$$\tau^- = E_{21} \Rightarrow (\tau^-)^{+} = E_{12} = \tau^{+}$$

$$(\tau^0)^{+} = (E_{11} + E_{22})^{+} = \tau^0 \quad \text{et} \quad (\tau^3)^{+} = (E_{11} - E_{22})^{+} = \tau^3$$

$$x = x^{+} \Rightarrow \begin{cases} a_+ = (a_-^{+}) : a_+ \text{ est le conjugué de } a_- \\ a_3^{+} = a_3 : a_3 \text{ est réel} \\ a_0^{+} = a_0 : a_0 \text{ est réel} \end{cases}$$

donc on a 2 réelles $(a_3 + a_4)$ et un complexe a_+

$\Rightarrow$ au totale on 4 réelles.

Remarque: l'hermicité peut être vu comme une condition de réalité réduisant la dimension de la moitié.

iv) <u>L'algèbre de Lie $su(2, \mathbb{C})$</u>

$$su(2, \mathbb{C}) = \{x \in gl(2, \mathbb{C}) \,/\, x = x^{+},\ \mathrm{tr}\, x = 0\}$$

$$su(2, \mathbb{C}) \subset U(2, \mathbb{C}) \subset Gl(2, \mathbb{C})$$

$$x \in su(2, \mathbb{C}) \Rightarrow x = a_+ \tau^+ + a_- \tau^- + a_3 \tau^3$$

$$\mathrm{tr}\, x = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

IV - 5

donc la dimension de $su(2, \mathbb{C})$ est 3 réelles donc dans la base de Cartan, les générateurs de l'algèbre $A_1 \left(\underset{\text{dim}=3\text{ réelles}}{su(2)} \; ; \; \underset{\text{dim}=3\text{ complexes}}{sl(2,\mathbb{C})} \right)$ sont $\{ \underset{\tau^1}{e}, \underset{\tau^2}{f}, \underset{\tau^3}{h} \}$

$x = x^+$ tel que $x \in A_1$

$$\Rightarrow x = \alpha e + \beta f + \gamma h$$

avec γ réel et $\alpha = \bar{\beta}$

$$x = \alpha e + \bar{\alpha} f + \gamma h = \alpha e + \bar{\alpha} e^+ + \gamma h$$

L'algèbre A_1 admet différentes représentations.

- différentielles
- Matricielles.

Représentation différentielle.

Dans cette réalisation, les générateurs e, f, h sont représentés par des opérateurs différentiels agissant sur un e.v des fonctions.

Exemple: dans le plan paramétrisé par z et $\bar{z}$

$$e = z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$f = \bar{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$h = z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

IV - 6

Représentations Matricielles.

La représentation par des matrices 2×2 dans un e.V de dim 2 (A_1-module) = est une représentation fondamentale.

Déf: une représentation de l'algèbre A_1 dans un e.V V_n de dim finie (A_1-module) est un homomorphisme de l'algèbre A_1 dans l'algèbre $Gl(V_n)$ des matrices $n\times n$

$$\begin{aligned} \phi : A_1 &\longrightarrow Gl(V_n) \\ x &\longrightarrow \phi(x) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}_{n\times n} \end{aligned}$$

Exemple: $n=2$: Représentation fondamentale.

$$\phi(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \phi(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

II - Modules de A_1.

Les éléments de l'algèbre A_1 sont des opérateurs abstraits. Mais via un homomorphisme ϕ, les opérateurs de l'algèbre (éléments) sont représentés par des matrices $n\times n$ opérant sur un e.V de dim n appelé espace de représentations, ou A_1 modules. Ces espaces vectoriels vérifient les trois propriétés du chapitre précédent

i.e: $x v \equiv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice } n\times n}}{\phi(x)} . v \quad \forall v \in V_n$

a) Modules H W

H : Highest ; W : weight

ce sont les modules de plus haut poids (highest weight representation) la méthode de leurs construction est quasi-similaire à celle permettant de construire l'espace de Hilbert dans la mécanique quantique.

b) Espaces poids (Weight space)

Rappelons que h est semi-simple de A_1 (h est diagonal) alors son image par un homomorphisme d'algèbre est diagonalisable agissant sur un e. V de dim n.

Autrement dit, les modules de A_1 peuvent être décomposés en somme directe de sous espaces propres (unidimensionnels) V_λ comme $V = \bigoplus_i V_{\lambda i}$ où les sous espaces $V_{\lambda i}$ de poids λ_i sont définies par :

$$V_{\lambda_i} = \{ v_i \in V \,/\, \Phi_V(h) v_i = \lambda_i v_i \}$$

les λi sont le poids de h et les V_{λ_i} sont appelés espace poids associés aux valeurs λ_i

IV - 8

c) Action de A_1 sur des espaces poids :

Lemme : Si $v \in V_\lambda$ alors :

i) $e.v \in V_{\lambda+2}$

ii) $f.v \in V_{\lambda-2}$

En effet :

$$V_{\lambda+2} = \{ v' \in V / h.v' = (\lambda+2) v' \}$$

i) $v \in V_\lambda \overset{?}{\Rightarrow} v' = e.v \in V_{\lambda+2}$

$$h.(e v) = [h, e] v + (e.h) v$$

$$= 2 e v + e.\lambda v = (2e + \lambda e) v = (2+\lambda) e.v$$

$$\Rightarrow e.v \in V_{\lambda+2}$$

ii) $v \in V_\lambda \Rightarrow v'' = f.v \in V_{\lambda-2}$

$$h(f.v) = [h, v].v + f h.v = -2 f.v + \lambda f v$$

$$= (\lambda - 2) f.v \Rightarrow f.v \in V_{\lambda-2}$$

d) Poids maximal et vecteur maximal.

Si V un module de A_1 de dim finie et $V = \bigoplus_i V_{\lambda_i}$

sa décomposition en sous espaces poids, alors il existe

un poids λ_{max}, $V_{\lambda_{max}} \neq \{0\}$

tel que $V_{\lambda_{max}+2} = 0$ avec λ_{max} : poids maximal

$v_{\lambda_{max}}$: vecteur maximal du module de A_1

Autrement dit : un vecteur est dit maximal ssi

$$h\, v_{\lambda_{max}} = \lambda_{max}\, v_{max}$$

$$e \cdot v_{max} = 0$$

e) Classification des modules de A_1 irréductibles.

Soient

- V un A_1-module
- $V = \bigoplus_i V_{\lambda_i}$
- v_0 un vecteur maximal de V_{λ_0} t.q $e \cdot v_0 = 0$

Posons $\begin{cases} v_m = \dfrac{1}{m!} f^m \cdot v_0 \\ v_{-1} = 0 \end{cases}$

Lemme :

i) $h \cdot v_m = (\lambda_0 - 2m)\, v_m$

ii) $f \cdot v_m = (m+1)\, v_{m+1}$

iii) $e \cdot v_m = (\lambda_0 - m + 1)\, v_{m-1}$ (devoir)

En effet

i) $[h, f^m] = [h, f \cdot f^{m-1}] = [h, f]\, f^{m-1} + f\,[h, f^{m-1}]$

$$= -2f \cdot f^{m-1} + f\,[h, f^{m-1}] = -2f^m + f\,[h, f^{m-1}]$$

$$= -2f^m - 2f^m + f\,[h, f^{m-2}] = \dots$$

$$= -2m\, f^m$$

$$\Rightarrow h v_n = \frac{1}{n!} h f^n v_0 = \frac{1}{n!}\left([h, f^n] + f^n h\right) \cdot v_0$$

$$= \frac{1}{n!}\left(-2n f^n + f^n h\right) v_0$$

$$= \frac{1}{n!}\left(-2n f^n v_0 + \lambda_0 f^n v_0\right)$$

$$= \frac{1}{n!}(\lambda_0 - 2n) f^n v_0$$

$$h v_n = (\lambda_0 - 2n) v_n$$

ii) $$f v_n = \frac{1}{n!} f \cdot f^n v_0 = \frac{1}{n!} f^{n+1} v_0$$

$$= \frac{n+1}{(n+1)!} f^{n+1} v_0 = (n+1) v_{n+1}$$

$$\Rightarrow f v_n = (n+1) v_{n+1}$$

iii) devoir

conséquence du lemme.

Pour chaque A_1-module irréductible de dim finie, nous avons les propriétés suivantes:

* Le paramètre λ_0 (poids maximal) est un entier naturel $\lambda_0 = m \in \mathbb{N}$. Autrement dit, les modules de A_1 sont classés par un entier m.

$m = 0$ module scalaire

$m = 1$ " fondamental

$m = 2$ " adjoint

IV_11

* une base de V_{λ_0} est définie par $\{v_n \; 0 \leq n \leq m\}$

* La dim de V_{λ_0} est $m+1$

Représentation matricielles.

$m = \lambda$, $n = i$

La dim de A_1 - module est $n+1$

La décomposition de A_1 - module s'écrit comme suit:

$$V = \mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}v_m$$

$$\{v_0, \ldots, v_i, \ldots, v_m\} \quad v_{-1} = 0$$

$$= \mathbb{C}|0\rangle \oplus \mathbb{C}|1\rangle \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}|m\rangle \quad v_{m+1} = 0$$

avec $|-1\rangle = 0$ et $|m+1\rangle = 0$

$$h|i\rangle = (m-2i)\,|i\rangle$$

$$f|i\rangle = (i+1)\,|i+1\rangle$$

$$e|i\rangle = (m-i+1)\,|i-1\rangle$$

Exemples:

i) $m = 0$

c'est une représentation triviale puisque la dim de V est 1

on a une seule état $\neq 0$ c'est $|0\rangle$, donc $|-1\rangle = 0$

et $|1\rangle = 0$

$$h|0\rangle = 0|0\rangle$$

$$f|0\rangle = |1\rangle = 0$$

$$e|0\rangle = 2|-1\rangle = 0$$

$$\Rightarrow e = f = h = 0$$

ii) $m=1$ (Rep fondamentale)

La dim de V est 2, donc $|0\rangle$ et $|1\rangle \neq 0$

$|-1\rangle = 0$ et $|2\rangle = 0$

V est engendré par $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$0 \leq i \leq m = 1$

$\rightarrow$ $i = 0$

$$h|0\rangle = 1|0\rangle = 1|0\rangle + 0|1\rangle$$

$$f|0\rangle = 1|1\rangle = 0|0\rangle + 1|1\rangle$$

$$e|0\rangle = 2\underbrace{|-1\rangle}_{=0} = 0|0\rangle + 0|1\rangle$$

$\rightarrow$ $i = 1$

$$h|1\rangle = -1|1\rangle = 0|0\rangle - 1|1\rangle$$

$$f|1\rangle = 2\underbrace{|2\rangle}_{=0} = 0|0\rangle + 0|1\rangle$$

$$e|1\rangle = 1|0\rangle = 1|0\rangle + 0|1\rangle$$

$$\Rightarrow \quad h = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} |0\rangle & |1\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$f = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} |0\rangle & |1\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$e = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} |0\rangle & |1\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

IV - 13

iii) $m=2$ (Rep. adjoint)

V est engendré par $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$

$|-1\rangle = 0$ et $|3\rangle = 0$ $\quad 0 \leq i \leq 2 = m$

→ $i=0$

$h|0\rangle = (2)|0\rangle = 2|0\rangle + 0|1\rangle + 0|2\rangle$

$f|0\rangle = 1|1\rangle = 0|0\rangle + 1|1\rangle + 0|2\rangle$

$e|0\rangle = 3\underbrace{|-1\rangle}_{=0} = 0|0\rangle + 0|1\rangle + 0|2\rangle$

→ $i=1$

$h|1\rangle = 0|1\rangle = 0|0\rangle + 0|1\rangle + 0|2\rangle$

$f|1\rangle = 2|2\rangle = 0|0\rangle + 0|1\rangle + 2|2\rangle$

$e|1\rangle = 2|0\rangle = 2|0\rangle + 0|1\rangle + 0|2\rangle$

→ $i=2$

$h|2\rangle = -2|2\rangle = 0|0\rangle + 0|1\rangle - 2|2\rangle$

$f|2\rangle = 3\underbrace{|3\rangle}_{=0} = 0|0\rangle + 0|1\rangle + 0|2\rangle$

$e|2\rangle = 1|1\rangle = 0|0\rangle + 1|1\rangle + 0|2\rangle$

$\Longrightarrow$

$$h = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} |0\rangle & |1\rangle & |2\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} ; \quad f = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} |0\rangle & |1\rangle & |2\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} ; \quad e = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} |0\rangle & |1\rangle & |2\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

IV - 14

iV) cas général.

On peut réécrire les équations $h|i\rangle$; $f|i\rangle$ et $e|i\rangle$

Sous la forme:

$$h = \sum_{i=0}^{m} (m-2i)\,|i\rangle\langle i|$$

$$f = \sum_{i=0}^{m} (i+1)\,|i+1\rangle\langle i|$$

$$e = \sum_{i=0}^{m} (m-i+1)\,|i-1\rangle\langle i|$$

Remarque

$$h|j\rangle = \sum_{i=0}^{m} (m-2i)\,|i\rangle \underbrace{\langle i|j\rangle}_{\delta_{ij} \Rightarrow i=j}$$

$$\Rightarrow h|j\rangle = (m-2j)\,|j\rangle$$

c'est la m̂ équation de l'autre sous section

On teste cette formule pour $m=2$

$$h = \sum_{i=0}^{2} (2-2i)\,|i\rangle\langle i| = 2|0\rangle\langle 0| + 0|1\rangle\langle 1| - 2|2\rangle\langle 2|$$

$$f = \sum_{i=0}^{2} (i+1)\,|i+1\rangle\langle i| = 1|1\rangle\langle 0| + 2|2\rangle\langle 1| + 3\underset{\overset{!!}{0}}{|3\rangle}\langle 2|$$

$$e = \sum_{i=0}^{2} (2-i+1)\,|i-1\rangle\langle i| = 3\underset{\overset{!!}{0}}{|-1\rangle}\langle 0| + 2|0\rangle\langle 1| + 1|1\rangle\langle 2|$$

en général:

$$h = \begin{pmatrix} m & & & 0 \\ & m-2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -m \end{pmatrix};\quad f = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & 0 & & \\ & & 3 & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & m & 0 \end{pmatrix};\quad e = \begin{pmatrix} 0 & m & & & 0 \\ & 0 & m-1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 2 \\ & & & & 0 \quad 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

IV-17

N° de table

Feuille supplémentaire N°

NOM :
Prénom :
Né(e) le :
Filière : Semestre :
Epreuve de :

Université Mohammed V
FACULTE DES SCIENCES
RABAT

Code :
Section : Groupe :
FACULTE DES SCIENCES
Salle / Amphi :
Date :

Devoir:

1) calculer $e^{+} = \delta(\delta)$, $\delta^{+} = \delta(e)$

2) Montrer que $e + \delta^{+}$ est hermitique

$e^{+} + \delta$

IV - 16

Chapitre 5 : Sous algèbre de Cartan H et système des racines.

I _ Sous algèbre toriques

Déf : soient :
- G une algèbre de Lie semi-simple.
- $x = x_s + x_N$

le sous espace T de G engendré par les éléments x_s (semi-simple) est une sous algèbre de Lie de G appelée sous algèbre torique de G

$$T = \{x_s \,/\, x_s \text{ éléments semi-simple de } G\}$$

Exemples :

1) $G = sl(2, \mathbb{C})$

$$T = \left\{x_s = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C}\right\}$$

c'est une algèbre abélienne de dim 1

2) $G = sl(3, \mathbb{C}) = \{x \in gl(3, \mathbb{C}) \,/\, \operatorname{tr} x = 0\}$

$T = \{x \in \Delta(3) \,/\, \operatorname{tr} x = 0\}$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3) $sl(n,\mathbb{C})$

$$T = \{x \in \Delta(n) \,/\, \mathrm{tr}\, x = 0\}$$

$$T \subset \Delta(n)$$

$$h_i = E_{ii} - E_{i+1\ i+1}$$

Lemme : Toute sous-algèbre torique de $\mathcal{G}$ est abélienne.

II - Sous algèbre de Cartan H

Défs :

1) Centralisateur et normalisateur d'une algèbre de Lie.

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie et soit $\mathcal{G}_0$ une sous algèbre de $\mathcal{G}$. on appelle :

-) centralisateur de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{G}$

$$C_{\mathcal{G}_0} = \{x \in \mathcal{G} \,/\, [x, \mathcal{G}_0] = 0\}$$

-) normalisateur de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{G}$

$$N(\mathcal{G}_0) = \{x \in \mathcal{G} \,/\, [x, \mathcal{G}_0] \subseteq \mathcal{G}_0\}$$

2) sous algèbre de Cartan $\equiv$ sous algèbre torique <u>maximal</u> (noté H)

Exemples :

1) $sl(2,\mathbb{C})$

$H = \mathbb{C}h_1 \qquad (h_1 = E_{11} - E_{22}) \qquad \dim H = 1$

2) $sl(3,\mathbb{C})$

$H = \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2 \ ; \ h_1 = E_{11} - E_{22} \ ; \ h_2 = E_{22} - E_{33}$

$\dim H = 2$

3) $sl(n, \mathbb{C})$

$H = \bigoplus_{i=1}^{n-1} h_i$; $h_i = E_{ii} - E_{i+1, i+1}$; $\dim H = n-1$

propriétés:

i - H est une sous algèbre abélienne maximale.
ii - H est égale à son centralisateur $H = C_g(H)$
iii - les éléments $ad_h \in ad_H$ commutent. Ils sont simultanément diagonalisables dans une base de G.
iv - Dimension de H = rang de G

III - Décomposition de Cartan.

Soit G une algèbre de Lie semi-simple.

Rappelons que $\forall h \in H$, ad_h est diagonalisable.

~~...~~ $ad_{h_i}(x_a) = [h_i, x_a] = \lambda_a(h_i)\, x_a$

$$x = \sum_{a=1}^{\text{rang } g} \alpha_a x_a$$

$\forall x \in G, \forall h \in H$; $ad_h(x) = \alpha(h)\, x = [h, x]$

$\alpha(h)$: la valeur propre de ad_h
x : vecteur propre.

Proposition:
La sous algèbre de Cartan permet de décomposer l'algèbre en somme directe de sous espaces propres.

Lemme
G est décomposable en somme directe de ss espaces propres G_α ; $G = \bigoplus_{\alpha \geq 0} g_\alpha$

où : $G_\alpha = \{ x \in G \,/\, [h, x] = \alpha(h)\, x, \ \forall h \in H \}$

$G_0 = H$

V - 3

Remarques:

a) Dans ces équations, α est une forme, application linéaire définie sur H à valeur dans $\mathbb{C}$.

$$\alpha : H \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$h \longrightarrow \alpha(h)$$

$\alpha \in \{H \to \mathbb{C}\} \equiv$ dual de $H = H^*$

b) La relation $G = \bigoplus_{\alpha \geq 0} G_\alpha$ est appelée la décomposition de Cartan

Exemple:

$$G = sl(2, \mathbb{C}) = \mathbb{C}e^+ \oplus \mathbb{C}e^- \oplus \mathbb{C}h$$

$$[h, e^\pm] = \pm 2e^\pm \quad , \quad [h, h] = 0$$

$$G = G_0 \oplus G_{-2} \oplus G_2$$

Propriété:

$$G_0 = \{x \in G \,/\, [x, h] = 0 \quad \forall h \in H\}$$

c'est le centralisateur de H ds G

$$H = C_g(H) = G_0$$

$$G = H \bigoplus_{\alpha \neq 0} G_\alpha$$

IV. Systèmes des racines Δ de G

Soit G une algèbre de Lie semi-simple et $H \subset G$ sa sous algèbre de Cartan, L'ensemble Δ des formes α non nulles telle que $g_\alpha \neq 0$ est appelé système des racines de G relativement à H

$$\Delta = \{(\alpha \neq 0) \in H^* \,/\, g_\alpha \neq 0\}$$

Remarques:

a) $\mathrm{Car}\,\Delta = |\Delta| =$ nbre de α (fini) $= \dim \mathcal{G} - \mathrm{rang}\,\mathcal{G}$

b) avec la notation de Δ, la décomposition de Cartan s'écrit.

$$\mathcal{G} = \left[H \oplus \left[\bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathcal{G}_\alpha\right]\right]$$

propositions:

si $\mathcal{G} = H \oplus \left[\bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathcal{G}_\alpha\right]$ est la décomposition de Cartan de $\mathcal{G}$ relativement à H, alors on a:

i) $[g_\alpha, g_\beta] \subset g_{\alpha+\beta} \quad \forall \alpha, \beta \in H^*$

ii) si $x \in g_\alpha$ $(\alpha \neq 0)$ alors ad_x est nilpotent

iii) si $\alpha, \beta \in H^*$, $\alpha+\beta \neq 0$ alors $\mathcal{G}_\alpha$ est orthogonal à $\mathcal{G}_\beta$ relativement à la forme de Killing de $\mathcal{G}$

c-à-d que $K(g_\alpha, g_\beta) = 0$

En effet:

i) $[g_\alpha, g_\beta] \subset g_{\alpha*\beta}$

Soient $x \in \mathcal{G}_\alpha$ c-à-d $[h, x] = \alpha(h)x$

$y \in \mathcal{G}_\beta$ " " $[h, y] = \beta(h)y$

on doit m.q $[x, y] \subset g_{\alpha+\beta}$

on a $ad_h([x,y]) = [ad_h(x), y] + [x, ad_h(y)]$

$= [\alpha(h)x, y] + [x, \beta(h)y]$

$= (\alpha(h) + \beta(h))[x,y]$

$= (\alpha+\beta)(h)[x,y]$

donc $[x,y] \subset g_{\alpha+\beta}$

ii) $x \in G_\alpha$ $(\alpha \neq 0)$

$ad_h(x) = [h, x] = \alpha(h)\, x = -[x, h]$

donc $[x, h] = -\alpha(h)\, x$

$ad_x^2(h) = ad_x \cdot ad_x(h)$
$= ad_x(-\alpha(h)\, x)$
$= -\alpha(h)\; ad_x(x) = 0$

iii) $x \in G_\alpha$, $y \in G_\beta$ on doit m.q $K(x, y) = 0$

on a : $\underset{\in \mathbb{C}}{\alpha(h)} . K(x, y) = K(\alpha(h)\, x, y) = K([h, x], y)$

$= K(h, [x, y])$

$= K([x, y], h) = K(x, [y, h])$

$= K(x, -\beta(h) . y) = -\beta(h)\, K(x, y)$

$\Rightarrow (\alpha + \beta)(h)\; K(x, y) = 0$

si $\alpha + \beta \neq 0 \Longrightarrow K(x, y) = 0$

V) propriétés de l'ensemble Δ.

Nous donnons ici 3 types de propriétés remarquables de Δ.

1 - orthogonalité
2 - Intégrabilité
3 - Rationalité

V - 6

1) propriétés d'orthogonalités

- Soit G une algèbre de Lie semi-simple
- $K(x,y)$ forme de Killing de G
  $K(x,y)=0 \quad \forall y \in G \Rightarrow x=0$
- Décomposition de Cartan : $G = H \oplus \left\{ \bigoplus_{\alpha \in \Delta} G_\alpha \right\}$

P_1 : Δ engendre H^* (dual de H)

P_2 : si $\alpha \in \Delta$, alors $-\alpha \in \Delta$

P_3 : si $\alpha \in \Delta$, $x \in G_\alpha$, $y \in G_{-\alpha}$; alors on a

$[x, y] = K(x,y)\, t_\alpha$ où t_α un élément de H

défini par $K(t_\alpha, h) = \alpha(h) \quad \forall h \in H$

P_4 : si $\alpha \in \Delta$, on a alors : $[G_\alpha, G_{-\alpha}]$ est un sous espace vectoriel de G de dim 1 engendré par t_α
c-à-d $[G_\alpha, G_{-\alpha}] = \mathbb{C}\, t_\alpha$

P_5 : $\alpha(t_\alpha) = K(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0 \quad \forall \alpha \in \Delta$

P_6 : si $\alpha \in \Delta$, $x \in G_\alpha$ $(x_\alpha \neq 0)$, alors $\exists$ un élément $y_\alpha \in G_{-\alpha}$ telle que $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]\}$ engendre une sous algèbre de G isomorphe à $sl(2, \mathbb{C})$

V-7

$x_\alpha \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $y_\alpha \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $h_\alpha \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

P_7 : $h_\alpha = \dfrac{2t_\alpha}{\alpha(t_\alpha)} = \dfrac{2t_\alpha}{K(t_\alpha, t_\alpha)}$

En effet:

P_1 : Δ engendre H^*.

Rappelons que $\Delta = \{(\alpha \neq 0) \in H^* / g_\alpha \neq 0\}$

$g_\alpha = \{ x \in G / [h, x] = \alpha(h) \ \forall h \in H\}$

Δ engendre $H^* \Rightarrow \forall \phi \in H^* \ (\phi \neq 0)$

$$\phi = \sum_\alpha c_\alpha \alpha \quad ; \ \phi(h) = \sum_\alpha c_\alpha \alpha(h)$$

Supposons que Δ n'engendre pas H^* c-à-d

$\exists h \in (H^*)^* = H$ tel que $\phi(h) \neq 0$ et $\alpha(h) = 0 \ \forall \alpha \in H^*$

$\forall x \in G_\alpha \quad [h, x] = \underbrace{\alpha(h)}_{=0} . x \quad \forall h \in H$

Autrement dit: $[h, g_\alpha] = 0 \quad \forall \alpha \in H^*$

$[h, \bigoplus_\alpha g_\alpha] = 0 \Rightarrow [h, G] = 0 \Rightarrow h \in Z(G)$

contradiction

car g est semi-simple.

$\Rightarrow$ donc Δ engendre H^*

P_2 : Si $\alpha \in \Delta \Rightarrow -\alpha \in \Delta$

supp que $-\alpha \notin \Delta \Rightarrow \mathcal{G}_{-\alpha} = 0$

$K(\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta) = 0 \qquad$ si $\alpha + \beta \neq 0$

$K(\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}) = 0 \qquad$ pour $\alpha \in \Delta$

$K(\mathcal{G}_\alpha, H) = 0$

donc K est dégénéré mais $\mathcal{G}$ est semi-simple

$\Rightarrow -\alpha \in \Delta$

$\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_- \qquad \Delta_+ \cap \Delta_- = \phi$

La décomposition de Cartan devient :

$$\mathcal{G} = \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta_-} \mathcal{G}_\alpha\right) \oplus H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathcal{G}_\alpha\right)$$

P_3 : $\alpha \in \Delta$, $x \in \mathcal{G}_\alpha$, $y \in \mathcal{G}_{-\alpha}$

$[x, y] = K(x, y) t_\alpha \;/\; K(t_\alpha, h) = \alpha(h) \quad \forall h \in H$

L'associativité de K

$K(h, [x, y]) = K([h, x], y) = \alpha(h) K(x, y)$

$= K(t_\alpha, h) K(x, y) = K(K(x,y) t_\alpha, h)$

$= K(h, K(x, y) t_\alpha)$

$\Rightarrow K(h, [x, y] - K(x, y) t_\alpha) = 0$

puisque K est non dégénérée alors :

$[x, y] = K(x, y) t_\alpha$

V-9

P_4 : si $\alpha \in \Delta$, alors $[G_\alpha, G_{-\alpha}]$ est 1 sous e.v de dim 1

d'après P 3 : $\forall x \in G_\alpha$, $y \in G_{-\alpha}$

$$[x, y] = K(x, y)\, t_\alpha$$

donc $[G_\alpha, G_{-\alpha}]$ est engendré par t_α

P_5, P_6 et P_7 devoir.

Exemple : $G = sl(3, \mathbb{C}) = \{x \in gl(3, \mathbb{C}) / tr\, x = 0\}$

$$\dim G = 3^2 - 1 = 8$$

$\dim H = 2$

$H = C_1 h_1 \oplus C_2 h_2$

$h_1 = E_{11} - E_{22}$; $h_2 = E_{22} - E_{33}$ sont les générateurs semi-simples.

$e_1 = E_{12}$, $e_2 = E_{23}$, $e_3 = E_{13}$ $\Big\}$ $G_{\pm\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$ les générateurs nilpotents.

$f_1 = e_1^+$, $f_2 = e_2^+$, $f_3 = e_3^+$

$H = \mathbb{C} h_1 \oplus \mathbb{C} h_2$

$\forall h \in H \rightarrow h = C_1 h_1 + C_2 h_2$

* dual de H

H^* est l'ensemble des formes α

$H^* = \{\alpha \neq 0 / G_\alpha \neq 0\}$ $\Delta \subset H^*$

Il est est engendré par deux formes

car $\dim H = \dim H^* = 2$

ω_1 et ω_2

$\omega_i : H \longrightarrow \mathbb{C}$

$\omega_i(h_j) \longrightarrow \langle \omega_i, h_j \rangle = \delta_{ij}$

Les éléments α de H^* : $\alpha = a\omega_1 + b\omega_2$

$a, b \in \mathbb{C}$

* Systèmes des racines Δ

$$\Delta(A_2) \quad (\Delta(sl(3,\mathbb{C})))$$

$$|\Delta| = \dim A_2 - \text{rang} A_2 = 8 - 2 = 6$$

$$\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$$

$$\Delta_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \ ; \ \Delta_- = -\Delta_+$$

* Décomposition de Cartan.

$$\mathcal{G} = \Big\{\bigoplus_{\alpha\in\Delta_-} \mathcal{G}_\alpha\Big\} \oplus H \oplus \Big\{\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathcal{G}_\alpha\Big\}$$

pour α fixe $\Longrightarrow \dim \mathcal{G}_\alpha = 1$

Déterminons $\mathcal{G}_{\pm\alpha}$

Admettons que

$$\alpha_1 = 2\omega_1 - \omega_2 \ , \ \alpha_2 = -\omega_1 + 2\omega_2 \ , \ \alpha_3 = \omega_1 + \omega_2$$

$$\mathcal{G}_{\alpha_1} = \{x \in \mathcal{G} \,/\, [h, x] = \alpha_1(h)\, x\}$$

$\forall h \in H \qquad h = c_1 h_1 + c_2 h_2$

$$\alpha_1(h) = \alpha_1(c_1 h_1 + c_2 h_2) = c_1 \alpha_1(h_1) + c_2 \alpha_1(h_2)$$
$$= c_1\{2\omega_1(h_1) - \omega_2(h_1)\} + c_2\{2\omega_1(h_2) - \omega_2(h_2)\}$$

d'autre part

$$\mathcal{G}_{\alpha_1} = \mathbb{C} e_1$$

$$[h, e_1] = [(c_1 h_1 + c_2 h_2), e_1] = c_1 [h_1, e_1] + c_2 [h_2, e_1]$$

$$= 2 c_1 e_1 - c_2 e_1$$

$$\Rightarrow \alpha_1(h) = 2c_1 - c_2$$

$$\mathcal{G}_{\alpha_2} = \mathbb{C} e_2 \ , \ \mathcal{G}_{-\alpha_1} = \mathbb{C} f_1 \ , \ \mathcal{G}_{-\alpha_2} = \mathbb{C} f_2$$

$$\mathcal{G}_{\alpha_3} = \mathcal{G}_{\alpha_1+\alpha_2} = \mathbb{C} e_3 \ , \ \mathcal{G}_{-\alpha_3} = \mathbb{C} f_3$$

$$\Delta = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1+\alpha_2)\}$$

V - 11

2) Propriétés d'intégrabilité :

on va donner 6 propriétés (à retenir)

P_1 – si $\alpha \in \Delta$, $\dim \mathcal{G}_\alpha = 1$

P_2 – si $\alpha \in \Delta$, les seuls multiplets de α appartenant à Δ sont $\pm\alpha$ $\quad (k\alpha \ , \ k = \pm 1)$

P_3 – si $\alpha, \beta \in \Delta$ alors

i) $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ (les entiers de Cartan)
$\beta(h_\alpha) = K(t_\beta, t_\alpha)$

ii) $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Delta$

P_4 – si $\alpha, \beta \in \Delta$ et $\alpha + \beta \in \Delta$

$$[\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta] = \mathcal{G}_{\alpha+\beta}$$

P_5 – si $\alpha, \beta \in \Delta$ $\quad \beta \neq \pm\alpha$
et soient r et q les plus grands entiers tel que $\beta - r\alpha$ et $\beta + q\alpha \in \Delta$
alors :

i) $\beta + m\alpha \in \Delta \quad -r < m < q$

ii) $\beta(h_\alpha) = r - q$

P_6 – $\mathcal{G}$ est engendrée par les $\mathcal{G}_\alpha$

3) propriétés de rationalité.

Soient

- $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie semi-simple
- $H \ (\subset \mathcal{G})$ sa sous algèbre de Cartan
- H^* le dual de H par rapport à une forme $\langle \ , \ \rangle$
- $\Delta \subset H^*$ système des racines de $\mathcal{G}$ relativement à H

$\mathcal{G} = H \oplus \{\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_\alpha\}$ la décomposition de Cartan.

Transfert de la forme de Killing restreinte.

La restriction de la forme de Killing K à la sous algèbre de Cartan est une forme non dégénérée. on peut transféré cette forme de H à H^* (dual de H) comme suit :

$$K : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(t_\gamma , t_\delta) \longrightarrow K(t_\gamma, t_\delta) = \underset{\in \mathbb{C}}{\underbrace{\operatorname{tr} \operatorname{ad}_{t_\gamma} \operatorname{ad}_{t_\delta}}}$$

$$\langle \ \rangle \; H^* \times H^* \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(\gamma, \delta) \longrightarrow \langle \gamma, \delta \rangle \equiv K(t_\gamma, t_\delta) = \underbrace{\underset{\in H^*}{\gamma}\,(\underset{\in H}{t_\delta})}_{\in \mathbb{C}}$$

$$H \times H \longrightarrow \mathbb{C} \longleftarrow H^* \times H^*$$
$$t_\alpha , t_\beta \longrightarrow K(t_\alpha, t_\beta) \equiv \langle \alpha, \beta \rangle \longleftarrow (\alpha, \beta)$$

Lemme :

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ une base de H^* formée de racines
$\alpha_j \in \Delta \qquad 1 \leqslant j \leqslant \ell$
alors.

i) $\beta = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \alpha_j \qquad \forall \beta \in \Delta$

ii) Les $c_j \in \mathbb{Q}$

Théorème

Soient

. $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie semi-simple

. H sa sous algèbre de Cartan

$E = \mathbb{R} \otimes E_{\mathbb{Q}}$ espace vectoriel réel $\equiv$ c'est l'extension de l'espace vectoriel $E_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$

alors on a.

i) Δ engendre E et $0 \notin \Delta$

ii) si $\alpha \in \Delta$, $-\alpha \in \Delta$ mais $k\alpha \notin \Delta \ \forall k \neq \pm 1$

iii) si $\alpha, \beta \in \Delta$ alors $\beta - \dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \alpha \in \Delta$

iv) si $\alpha, \beta \in \Delta$ alors $\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$

Remarque.

-) Le théorème montre que Δ est un système des racines de l'espace euclidien E

-) Le théorème donne une correspondance entre

$$(\mathcal{G}, H) \longleftrightarrow (\Delta, E)$$

Chapitre 6 : Systèmes de racines d'une Algèbre de Lie Semi-simple.

I - Reflexions dans un espace euclidéen

1 - Espace euclidien.

a - Déf : un espace euclidien E est un e.V sur $\mathbb{R}$ de dimension finie muni d'un produit scalaire $(\ ,\ )$ défini positif.

b - propriétés de $(\ ,\ )$

$$\begin{aligned}(\ ,\ )\ E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}\\ \alpha, \beta &\longrightarrow (\alpha, \beta)\end{aligned}$$

le produit $(\ ,\ )$ est :

. bilinéaire : $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$

.. symétrique : $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$

... Défini positif : $(\alpha, \alpha) > 0$ et $(\alpha, \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

2 - Réflexion dans E

a - Déf :

une réflexion σ dans E est une application linéaire de E vers E défini par :

$$v \in E \longrightarrow \sigma_v \in \mathrm{End}\, E$$

$$\begin{aligned}\sigma_v : E &\longrightarrow E\\ w &\longrightarrow \sigma_v(w) = w - \frac{2(w, v)}{(v, v)} v\end{aligned}$$

b_ propriétés des réflexions :

i) A tout vecteur v de E est associé une réflexion σ_v

$$\sigma_v : E \longrightarrow E$$
$$w \longrightarrow \sigma_v(w)$$

$\{\sigma_v / v \in E\} \subset \mathrm{End}\, E$

ii) si $(w, v) = 0 \Rightarrow (w \perp v)$ les éléments w sont invariants par σ_v :

$$\sigma_v(w) = w \qquad \text{puisque } w \perp v$$

L'ensemble $P_v = \{w \in E / (w, v) = 0\}$

est appelé hyperplan de la réflexion σ_v

P_v est invariant point par point sous l'action

de σ_v c-à-d $\sigma_v(w) = w \quad \forall w \in P_v$

iii) $\sigma_v(v) = -v \qquad \forall v \in E$

iv) $\sigma_v(\lambda v) = -\lambda v \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

v) La reflexion $\sigma : E \longrightarrow E$ preserve le produit scalaire.

$$(\sigma_v(\alpha), \sigma_v(\beta)) = (\alpha, \beta) \qquad \forall v \in E$$

En effet (iii, iv, v)

iii) $\sigma_v(v) = v - \frac{2(v, v)}{(v, v)} v = -v$

iv) $\sigma_v(\lambda v) = \lambda v - \frac{2(\lambda v, v)}{(v, v)} v = -\lambda v$

VI_2

v) $$\left(\sigma_v(\alpha), \sigma_v(\beta)\right) = \left(\alpha - \frac{2(\alpha,v)}{(v,v)}v, \beta - \frac{2(\beta,v)}{(v,v)}v\right)$$

$$= (\alpha,\beta) + \left(\alpha, -\frac{2(\beta,v)}{(v,v)}v\right)$$

$$+ \left(-\frac{2(\alpha,v)}{(v,v)}v, \beta\right) + \left(-\frac{2(\alpha,v)}{(v,v)}v, -\frac{2(\beta,v)}{(v,v)}v\right)$$

$$= (\alpha,\beta) - \frac{2(\beta,v)}{(v,v)}(\alpha,v) - \frac{2(\alpha,v)}{(v,v)}(v,\beta)$$

$$+ \frac{4(\alpha,v)(\beta,v)}{(v,v)\cancel{(v,v)}}\cancel{(v,v)}$$

$$= (\alpha,\beta) - \frac{4(\beta,v)(\alpha,v)}{(v,v)} + \frac{4(\alpha,v)(\beta,v)}{(v,v)}$$

$$= (\alpha,\beta) = (\beta,\alpha)$$

II Système des racines de E.

Déf : soit E un espace euclidien de dim l et soit Δ un sous ensemble de E.
On dit que Δ est un système de racine ds E si les conditions suivantes sont satisfaites :

i) Δ est fini, engendre E et $0 \notin \Delta$

ii) pour tout $\alpha \in \Delta$, $-\alpha \in \Delta$ et $c\alpha \in \Delta$ si $c = \pm 1$

iii) pour tout $\alpha \in \Delta$, σ_α stabilise Δ

$$\sigma_\alpha(\Delta) \subset \Delta \qquad \forall \alpha \in \Delta$$

iv) si $\alpha, \beta \in \Delta$ alors

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle \neq \langle \beta, \alpha \rangle$$

Remarques:

i) La dim de E = rang de Δ

rang Δ = dim E = dim H = ℓ

ii) Les éléments de $\Delta \equiv$ les racines de E relativement à Δ

iii) Δ est souvent appelé système réduit des racines c-à-d pour tout $\alpha \in \Delta$, $\pm\alpha \in \Delta$

Exemple 1:

•) $\mathfrak{g} = A_1$

Soit l'espace euclidien de dim 1

puisque dim E = dim H = rang $\mathfrak{g}$ = rang Δ
$= 1$

$E = \mathbb{C}\alpha$, $\Delta = \{\alpha, -\alpha\}$

car $\Delta = 2$, rang $\Delta = 1$

$\Delta(A_1)$ = dim(A_1) _ rang A_1
$= 3 - 1 = \{\alpha, -\alpha\} = \Delta^+ \cup \Delta^-$

verifions les 4 axiomes:

i) $|\Delta| = 2 < \infty$ fini

ii) $\pm\alpha \in \Delta$ $\qquad 0 \notin \Delta$

dim $E = 1$ $\qquad E = \mathbb{C}\alpha$

iii) $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha \in \Delta$; $\sigma_\alpha(-\alpha) = \alpha \in \Delta$

$\sigma_{\pm\alpha}(\pm\alpha) \in \Delta$ $\qquad \sigma_{-\alpha}(\alpha) = -\alpha$

$\sigma_{-\alpha}(-\alpha) = \alpha$

iv) $\langle \pm\alpha, \alpha \rangle = \pm 2 \in \mathbb{Z}$

$\cancel{\langle \pm\alpha, \alpha \rangle = 2}$

$$\langle \alpha, \pm\alpha \rangle = \frac{2(\alpha, \pm\alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \pm 2 \in \mathbb{Z}$$

VI-4

III - Groupe de Weyl.

Déf:
soit Δ un système de racines de E. L'ensemble W des réflexions dans Δ

$$W = \{\sigma_\alpha : \Delta \longrightarrow \Delta \,/\, \forall \alpha \in \Delta\}$$

a une structure de groupe
c'est le gpe de Weyl associé à Δ
c'est le sous groupe de GL(E) engendré par les applications σ_α t.q $\alpha \in \Delta$

propriétés de W

i) puisque Δ est fini $\Rightarrow$ W est fini $|W| = |\Delta|$

ii) utilisant l'axiome (3) de Δ. $\sigma_\alpha(\Delta) \subset \Delta \;\forall \alpha \in \Delta$ on peut dire que W est un gpe de permutation

Lemme
Soit
- Δ un système de racines dans E
- W le groupe de Weyl associé à Δ

Si $\tau \in GL(E)$: $\tau : E \longrightarrow E$ un automorphisme de E, laissant invariant Δ

$\tau(\Delta) \subset \Delta$ alors

i) $\tau \sigma_\alpha \tau^{-1} = \sigma_{\tau(\alpha)} \quad \forall \alpha \in \Delta$
ii) $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \tau(\beta), \tau(\alpha) \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \Delta$

En effet: $\tau \in GL(E)$, on peut parler de τ^{-1}
$\tau(\Delta) \subset \Delta$
$\forall \beta \in E$ nous avons.

$$\tau \sigma_\alpha \tau^{-1}(\tau(\beta)) = \tau \sigma_\alpha(\beta) = \tau(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha)$$

$$\Rightarrow \tau \sigma_\alpha \tau^{-1} \tau(\beta) = \tau(\beta) - \langle \beta, \alpha \rangle \tau(\alpha) \quad (*)$$

posons $\alpha = \beta$

$$\tau \sigma_\alpha \tau^{-1} \tau(\alpha) = -\tau(\alpha) = \sigma_{\tau(\alpha)} \tau(\alpha)$$

$\forall \beta \in \Delta$

$$\sigma_{\tau(\alpha)}(\tau(\beta)) = \tau(\beta) - \langle \tau(\beta), \tau(\alpha) \rangle \tau(\alpha) \quad (**)$$

comparant $(*)$ et $(**)$

$$\Rightarrow \langle \tau(\beta), \tau(\alpha) \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$$

Conséquence du lemme

Soient $\Delta \in E$, un système des racines dans E et $\Delta' \in E'$ un autre système des racines dans E' ; $\dim E = \dim E'$

dire que (Δ, E) est isomorphe à (Δ', E')

$\Leftrightarrow \exists$ un isomorphisme d'e.v ϕ

$\phi : E \longrightarrow E'$ tel que :

- $\phi(\Delta) = \Delta'$

- $\langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in E$

- $\sigma_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) = \phi(\beta) - \langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle \phi(\alpha)$

$$= \phi(\beta) - \langle \beta, \alpha \rangle \phi(\alpha)$$

$$= \phi(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha)$$

$$= \phi(\sigma_\alpha(\beta))$$

IV - Inverse de Δ ($\Delta^\vee$)

Définition :

$$\Delta^\vee = \left\{ \alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)} \;/\; \forall \alpha \in \Delta \right\}$$

$\Delta^\vee$ est appelé dual de Δ ou inverse de Δ

- $\alpha \longrightarrow \alpha^\vee = \dfrac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$ • $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$

posons $K = \dfrac{2}{(\alpha,\alpha)}$ $\Rightarrow \alpha^\vee = K\alpha$

$$\alpha^{\vee\vee} = \frac{2K\alpha}{(K\alpha, K\alpha)} = \frac{2\cdot\left(\frac{2}{(\alpha,\alpha)}\right)\cdot\alpha}{4\,\frac{\cancel{(\alpha,\alpha)}}{(\alpha,\alpha)^{\cancel{2}}}} = \frac{\frac{\alpha}{(\alpha,\alpha)}}{\frac{1}{(\alpha,\alpha)}} = \alpha$$

Exemples :

i) $\mathfrak{g} = A_1 = sl(2,\mathbb{C})$

$\dim A_1 = 3$, $\text{rang}\, A_1 = 1$

$|\Delta(A_1)| = \dim A_1 - \text{rang}\, A_1$

$= 3 - 1 = 2$

$\Delta(A_1) = \Delta_+(A_1) \cup \Delta_-(A_1)$

$\Rightarrow \Delta(A_1) = \{+\alpha, -\alpha\}$

Vérification des 4 propriétés de Δ

- $|\Delta| = 2 < \infty \Rightarrow \Delta$ fini

$\Delta = \{+\alpha, -\alpha\}$

- $0 \notin \Delta$
- $E = \mathbb{C}\alpha$ Δ engendre E

$\dim E = \text{rang}\, A_1 = 1$

- $\sigma(\Delta) \subset \Delta$

VI - 7

$\sigma_\alpha(\pm\alpha) = \mp\alpha$

$\sigma_\alpha(\pm\alpha) = \mp\alpha$

$\Rightarrow \sigma_{\pm\alpha}(\Delta) \subset \Delta$

$\sigma_\alpha^2 = \sigma_\alpha \sigma_\alpha = \mathbb{1}$

$W \simeq S_2$ = gpe de permutation à deux éléments

- $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$

$\langle \alpha, \pm\alpha \rangle = \pm 2 \in \mathbb{Z}$

ii) $\mathfrak{g} = A_1 \oplus A_1$

$\dim \mathfrak{g} = 3 + 3 = 6$

$\text{rang}\, \mathfrak{g} = 1 + 1 = 2$

$|\Delta| = \dim \mathfrak{g} - \text{rang}\, \mathfrak{g} = 4$

$\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$

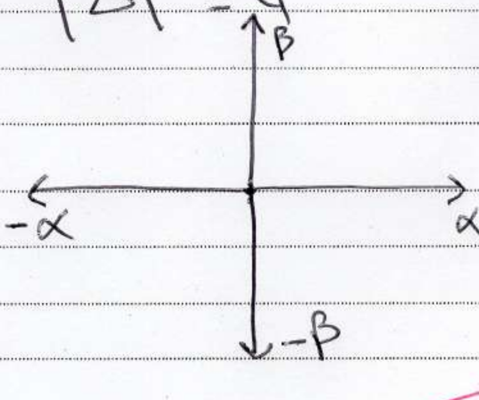
$\Delta = \{\pm\alpha, \pm\beta\}$ $\qquad (\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{\pi}{2}$

$\dim E = \text{rang}\, \mathfrak{g} = 2$

$E = \mathbb{C}\alpha \oplus \mathbb{C}\beta$

- Δ engendre E
- Δ fini car $|\Delta| = 4$

$0 \notin \Delta$



VI - 8

- $\pm\alpha \,,\, \pm\beta \in \Delta$

- $\sigma_\alpha(\pm\alpha) = \mp\alpha$

$$\sigma_\beta(\pm\alpha) = \pm\alpha - \underbrace{\langle \pm\alpha , \beta\rangle}_{\overset{\shortparallel}{0}}\beta = \pm\alpha \in \Delta$$

car $(\alpha,\beta) = 0$
pas de passage d'information de A_1 vers A_1

- $\langle \alpha , \pm\alpha\rangle = \pm 2 \in \mathbb{Z}$

$\langle \beta , \pm\beta\rangle = \pm 2 \in \mathbb{Z}$

$\langle \alpha , \pm\beta\rangle = 0 \in \mathbb{Z}$

en général $(\beta,\alpha) = |\beta|\,|\alpha| \cos(\underbrace{\beta,\alpha}_{\theta})$

$$\theta = \left(\frac{|\Delta^+| - 1}{|\Delta^+|}\right)\pi$$

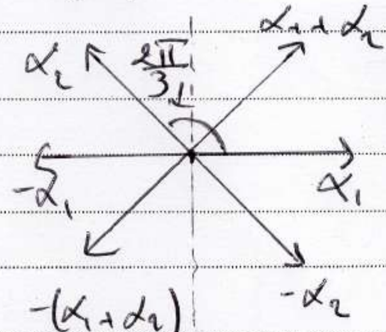
iii) $\mathfrak{g} = A_2 = sl(3,\mathbb{C})$

$|\Delta(A_2)| = 8 - 2 = 6$

$\Delta(A_2) = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1+\alpha_2)\}$

$(\widehat{\alpha_1,\alpha_2}) = \frac{2\pi}{3}$ car $|\Delta^+| = 3$

$E = \mathbb{C}\alpha_1 \oplus \mathbb{C}\alpha_2$
Δ engendre E



- $\sigma_{\alpha_1}(\alpha_2) = \alpha_2 - \dfrac{2(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1$

$\quad = \alpha_2 - \dfrac{2|\alpha_2|\,|\alpha_1|}{|\alpha_1|^2}\cos\dfrac{2\pi}{3}\,\alpha_1 \qquad |\alpha_1| = |\alpha_2|$

$\quad = \alpha_2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_1 \in \Delta$

de m̄ pour $\sigma_{\alpha_2}(\alpha_1) \in \Delta$

$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -1 \in \mathbb{Z}$

V Position relative des racines:

Si α, β deux racines $\in \Delta$ nous avons

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$$

Soit $|\alpha|$ la longueur de α $\quad |\alpha|^2 = (\alpha,\alpha)$
soit θ l'angle entre α et β

$$\theta = (\widehat{\alpha, \beta})$$

$\forall\, \alpha, \beta \in \Delta$

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2|\beta|\,|\alpha|}{|\alpha|^2} \cos\theta = \frac{2|\beta|}{|\alpha|}\cos\theta$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 2\frac{|\alpha|}{|\beta|}\cos\theta$$

i) $$\frac{\langle \alpha,\beta \rangle}{\langle \beta,\alpha\rangle} = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} > 0$$

puisque $k\alpha \notin \Delta$ si $k \neq \pm 1$, $\alpha \in \Delta$

$\Rightarrow \langle \alpha,\beta\rangle$ et $\langle \beta,\alpha\rangle$ ont même signe

ii) $\langle \alpha,\beta\rangle \langle \beta,\alpha\rangle = 4\cos^2\theta$

$$\Rightarrow \quad 0 \leqslant \langle \alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle \leqslant 4 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \langle \alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle = \{0,1,2,3,4\}$
$\forall\, \alpha,\beta \in \Delta$

Nous donnons quelques solutions de la condition (α)

	$\langle\alpha,\beta\rangle$	$\langle\beta,\alpha\rangle$	θ	algèbre
1	0	0	$\frac{\pi}{2}$	$A_1 \oplus A_1$
2	1	1	$\frac{\pi}{3}$	A_2 : $\|\beta\| = \|\alpha\|$ algèbre simplement lacées
3	-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	
4	1	2	$\frac{\pi}{4}$	$B_2 \sim C_2$ $B_2 = SO(5)$ $\|\beta\| = \sqrt{2}\|\alpha\|$
5	-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	
6	1	3	$\frac{\pi}{6}$	G_2 $\|\beta\| = \sqrt{3}\alpha$
	-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	

Lemme

Soit α et β deux racines (non proportionnelles)

Si $(\alpha,\beta) > 0$, $\alpha - \beta$ est une racine.

En effet

$$(\alpha,\beta) > 0 \overset{?}{\Longrightarrow} (\alpha-\beta) \in \Delta$$

$$\beta \neq \pm\alpha$$

$$(\alpha,\beta) > 0 \Rightarrow \langle\alpha,\beta\rangle = \frac{2(\alpha,\beta)}{|\beta|^2} > 0$$

$$0 \leqslant \langle\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle \leqslant 4$$

$\forall\, \alpha,\beta \in \Delta$

$$\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \langle\beta,\alpha\rangle\beta$$

posons $\langle\beta,\alpha\rangle = 1 \Rightarrow \sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \beta \in \Delta$

sinon $\langle\alpha,\beta\rangle = 1 \Rightarrow \sigma_\alpha(\beta) = \beta - \alpha \in \Delta$

Donc $(\alpha,\beta) > 0 \Rightarrow (\alpha-\beta) \in \Delta$

$(\alpha,\beta) < 0 \Rightarrow (\alpha+\beta) \in \Delta$

inversement:

$$(\alpha-\beta)\notin\Delta \Rightarrow (\alpha,\beta)<0$$

$$(\alpha+\beta)\notin\Delta \Rightarrow (\alpha,\beta)>0$$

VI _ Racines simples:

Soit Δ un système des racines d'1 espace ~~vectoriel~~ Euclidien E de gpe de Weyl W, soit aussi
$\text{Rang}\,\Delta = \dim E = \ell$

1 _ Base de racines Π

Déf: Un sous ensemble $\Pi = \{\alpha_i \;, i=1,\dots,\ell\}\subset\Delta$ du syst des racines Δ est dite une base de Δ, si les deux ptés suivantes sont vérifiées.

i _ Π est une base de E

ii _ $\forall\beta\in\Delta$, $\beta=\sum_i k_i\alpha_i$
où les k_i sont des entiers de m̂ signe
$(k_i>0)\Rightarrow\beta$ racine positive $(\beta>0)$
$(k_i<0)\Rightarrow\beta$ " négative $(\beta<0)$

Remarques.

i_ Si $\beta\in\Delta$, une racine positive $(\beta>0)\Rightarrow\exists$ au moins un coeff. $k_j\neq0$, $k_j>0$

ii _ Les éléments de Π sont appelés racines simples.
Au lieu de dire une base de Δ, on dit un système siple.

propriétés:

i) $\text{card}\,\Pi=\ell=\text{rang}\,\mathcal{G}=\dim H=\dim H^*=\dim E=\text{rang}\,\Delta$

ii) La décomposition $\beta=\sum_\Pi k_i\alpha_i$ est unique car Π base de E

iii) Si $\beta=\sum_\Pi k_i\alpha_i$ alors $\sum_{i=1} k_i$ est dite hauteur de β relativement à Π

Théorème

tout système de racines admet une base Π

2 - Quelques propriétés de Π

P_1 : si Π est un système simple de Δ alors :

i) $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0 \quad \forall \alpha_i, \alpha_j \in \Pi \quad \alpha_i \neq \alpha_j$

ii) $\alpha_i - \alpha_j \notin \Delta$

En effet :

i) posons $\alpha_i = \alpha$, $\alpha_j = \beta$

sup $(\alpha, \beta) > 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \Pi$; $\alpha \neq \beta$

$\Rightarrow \beta \neq \pm\alpha \Rightarrow \alpha - \beta \in \Delta \Rightarrow$ ce qui viole

l'axiome (ii) de la déf de Π

$\Rightarrow (\alpha, \beta) \leq 0$

ii) evidente.

P_2 : devoir

si $\alpha \in \Delta_+ (\notin \Pi)$ alors il existe $\beta \in \Pi$ telle que $\alpha - \beta \in \Delta_+$

P_3 : $\forall \alpha \in \Pi$, alors $\sigma_\alpha : \Delta^+ - \{\alpha\} \longrightarrow \Delta^+ - \{\alpha\}$

σ_α permute les racines positives autre que α

En effet :

posons $\alpha_\ell = \alpha \in \Pi$

$\forall \beta \in \Delta^+ - \{\alpha\}$; $\beta = \sum_{i=1}^{\ell-1} k_i \alpha_i$; $k_i \geq 0$

$$\sigma_{\alpha_\ell}(\beta) = \sum_{i=1}^{\ell-1} k_i \sigma_{\alpha_\ell}(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{\ell-1} k_i (\alpha_i - \underbrace{\langle \alpha_i, \alpha_\ell \rangle}_{\leq 0} \alpha_\ell)$$

$\Rightarrow \sigma_{\alpha_\ell}(\beta) \in \Delta_+ - \{\alpha\}$

P4: devoir

posons $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Delta^+} \beta$ alors $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$

$\forall \alpha \in \Delta$

P5: soient, Π et Π' deux bases de Δ
W groupe de Weyl associé à Δ
alors, il existe $\sigma \in W$ telle que
$\sigma(\Pi) = \Pi'$

P6: Soient : - Δ un système de racines de E
- Π une de Δ
alors $\forall \alpha \in \Delta$, $\exists \sigma \in W$ telle que $\sigma(\alpha) \in \Pi$

P7: le groupe de Weyl W est engendré par les réflexions σ_i $i = 1, \dots, l$ associé aux racines simples.

P8: Δ un système de racines
on dit que Δ est irréductible si Δ n'est pas une réunion disjointe de deux sous ensembles orthogonaux c-à-d Δ ne peut pas s'écrire sous la forme suivante $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \phi$
où $(\alpha, \beta) = 0$ $\forall \alpha \in \Delta_1$, $\beta \in \Delta_2$

$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$

$\forall \alpha_i \in \Pi_1$, $\alpha_j \in \Pi_2$ $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$

VI - 17

Chapitre 7 : Classification des algèbres de Lies

Dans ce chapitre :

* Δ est le syst de racines d'une alg de Lie $\mathfrak{g}$
* Π une base de Δ, donc de l'esp euclidien E
* W est le gpe de Weyl.

I - Matrice de Cartan associée à Δ

1 - Définition de K :

Soit $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell\}$ une base de racines simples.
On appelle matrice de Cartan de Δ relativement à la base Π, la matrice dont les entrées définies par :

$$K_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$$ (une matrice $\ell \times \ell$)

Exemples:

i) $\mathfrak{g} = A_1 \oplus A_1$

$$K(\mathfrak{g}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ii) $\mathfrak{g} = A_2$

$$K(\mathfrak{g}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

iii) $\mathcal{G} = B_2$

$$K(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

iv) $\mathcal{G} = G_2$ $\quad K(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

2 _ Propriétés de K

i) les entrées K_{ij} sont des entiers : entiers de Cartan

ii) K dépend de l'ordre des racines α_i de Π

iii) K ne dépend pas de la base choisi de Δ puis qu'elle est fabriquée à partir des produits scalaires des racines simples.

iv) K est non singulière c-a-d $\det K \neq 0$

proposition:

soient (Δ, E) et (Δ', E') deux systèmes des racines ayant pour base : $\Pi = \{\alpha_i \,/\, 1 \leq i \leq \ell\}$ et $\Pi' = \{\beta_i \,/\, 1 \leq i \leq \ell\}$ respectivement.

Si les matrices de Cartan K et K' coincident $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \beta_i, \beta_j \rangle$ alors.

i) la bijection $\phi : \alpha_i \longrightarrow \beta_i$ se prolonge de façon unique en un isomorphisme ϕ

$\phi : E \longrightarrow E'$ telle que $\phi(\Delta) = \Delta'$

et $\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \Delta$

ii) La matrice de Cartan determine le système des racines de façon unique à un isomorphisme près.

II - Graphes des Coxeter et diagramme de Dynkin

1. Graphes de Coxeter:

On appelle graphe de Coxeter de Δ relativement à Π le graphe dont les vertex sont les éléments de Π, deux vertex α_i et α_j $(i \neq j)$ sont jointes par

$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ lignes.

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = \{0, 1, 2, 3\}$$

Exemples.

A_1 

$A_1 \oplus A_1$ 

A_2 

B_2 

C_2 

G_2 

2 - propriétés de diagramme de Coxeter

i) si les racines simples ont m̂ longueurs

$$|\alpha_i| = |\alpha_j| \qquad \forall\ i,j = 1,\dots,\ell$$

alors a) $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = 2\cos\theta < 0$

$\Rightarrow K_{ij} = K_{ji}$ est symétrique

les algèbres t.q K_{ij} est symétrique sont appelés algèbres de Lie simplement lacées (ADE)

b) $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle^2 = 1$

$\Rightarrow \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -1 \quad \forall i \neq j$

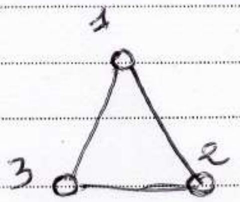
ii) racines simples ayant plus d'une longueur

alors a) $K_{ij} \neq K_{ji}$ K n'est pas sym

b) le graphe de Coxeter ne donne pas d'information sur laquelle des deux racines est plus longue

les algèbre t.q K_{ij} est ~~non~~ symétrique sont appelés algèbres non simplement lacées (BCFG).

Exemple.



$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3 _ Diagrammes de Dynkin

En réalité, le graphe de Coxeter ne suffit pas à déterminer la matrice de Cartan, il ne fournit en effet que les angles entre les racines simples sans indiquer laquelle est la plus longue.

B_2  C_2 

Il faut remplacer les diagrames de Dynkin sont des diagrammes de Coxeter orientés

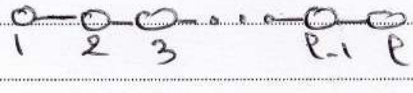
Définition:
C'est un graphe de Coxeter, qui dans le cas où deux vertex i et j en plus d'un lien, on ajoute une flèche partant de la racine longue et pointant la racine courte α_i 

$|\alpha_i| > |\alpha_j|$.

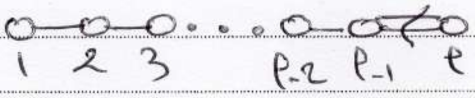
le Diagramme de Dynkin permet de specifier les entiers de Cartan donc la matrice de Cartan

Théorème de classification des algèbres de Lie

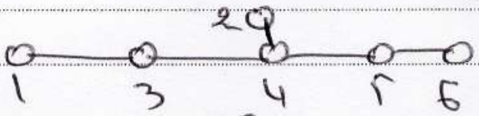
Si Δ un système de racines irréductible de rang $\ell \geqslant 1$, alors a la classification suivantes:

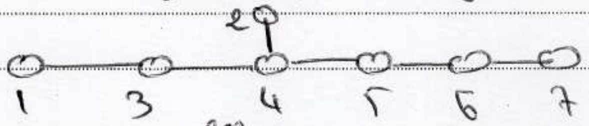
$A_\ell = sl(\ell+1)$  $K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ell \geqslant 1$

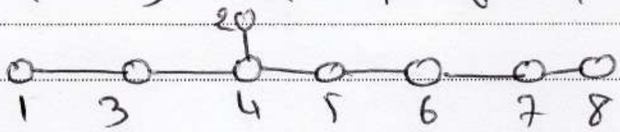
$B_\ell = so(2n+1)$  $\langle \alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell \rangle = -2$, $\langle \alpha_\ell, \alpha_{\ell-1} \rangle = -1$, $\ell \geqslant 2$

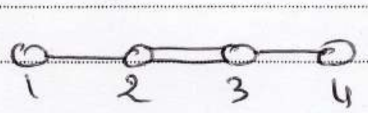
$C_\ell = sp(2n)$  $\langle \alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell \rangle = -1$, $\langle \alpha_\ell, \alpha_{\ell-1} \rangle = -2$

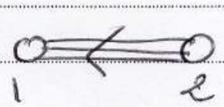
$D_\ell = so(2n)$ 

E_6  rang $E_6 = 6$, $\dim E_6 = 78$

E_7  $\dim E_7 = 133$

E_8  $\dim E_8 = 248$

F_4  $\dim F_4 = 52$

G_2  $\dim G_2 = 14$

III - Construction des systèmes des racines

On va étudier la construction des systèmes des racines des algèbres ADE et BCFG.

1) Généralités

Soient - $\mathbb{R}^n$ e.v réel de dim n

- $(,) \; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un produit scalaire ds $\mathbb{R}^n$
- $\{e_i, 1 \leq i \leq n\}$ base orthonormé ds $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R}\vec{e}_i$$

Déf : l'ensemble $\Gamma = \bigoplus \mathbb{Z} e_i$ est appelé un réseau de $\mathbb{R}^n$ de dim n

$$\Gamma = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^n \,/\, \lambda = \sum_{i=1}^{n} k_i \vec{e}_i \; , \; k_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exemples : dans $\mathbb{R}^2$

i) $\Gamma = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^2 \,/\, \lambda = k_1 \vec{e}_1 + k_2 \vec{e}_2 , \; k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \right\}$

card $\Gamma = \infty$ (non compacte)

ii) $\Gamma_1 = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^2 \,/\, \lambda = k_1 \vec{e}_1 + k_2 \vec{e}_2 \text{ et } \|\lambda\|^2 = 1 \right\}$

$\|\lambda\|^2 = 1 = k_1^2 + k_2^2 \Longrightarrow (k_1, k_2) = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$

card $\Gamma_1 = 4$

iii) $\Gamma_2 = \{\lambda \in \mathbb{R}^2 \,/\, \lambda = k_1\vec{e_1} + k_2\vec{e_2} \text{ et } \|\lambda\|^2 = 2\}$

$\Rightarrow (k_1, k_2) = \{(\pm 1, \pm 1)\}$

$\text{Card } \Gamma_2 = 4$

proposition

Le systeme de racines Δ est un sous ens. fini du réseau Γ dont les éléments ont des longueurs bien définies.

En effet sachant que :

- Γ est un réseau discret de $\mathbb{R}^n$
- l'ensemble de vect. de $\mathbb{R}^n$ ayant une où deux longueurs est compacte

$\Rightarrow \Delta$ est finie.

Propriétés :

i) $\Delta = \{\alpha \in \Gamma \,/\, (\alpha, \alpha) = 2 \text{ ou } (\alpha, \alpha) = 1\}$

$|\Delta| < \infty$ et $0 \notin \Delta$ car $(\alpha, \alpha) \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$

Δ engendre E c-a-d

$\forall \beta \in E : \quad \beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha = \sum_{\alpha_i \in \Pi} k_i \alpha_i$

$k_i \in \mathbb{Z}^+$ ou $\mathbb{Z}^-$

ii) choix des longueurs

si on décompose un élément $\alpha \in \Delta$ sur la base $\vec{e_i}$ de E

$\alpha = \sum k_i \vec{e_i} \quad ; \alpha = (k_1, k_2, \dots, k_n)$

$(\alpha, \alpha) = \|\alpha\|^2 = \sum (k_i)^2 \in \mathbb{N}$ car $k_i \in \mathbb{Z}$

~~avec~~ $(\alpha, \alpha) = 1$ ou $(\alpha, \alpha) = 2$

2) système de racines

Construction de l'algèbre A_ℓ

$n = \ell + 1$

le sous e.v E de dim ℓ de $\mathbb{R}^{\ell+1}$ défini par:

$$E = \{\alpha \in \mathbb{R}^{\ell+1}, \alpha . \sum_{i=1}^{\ell+1} e_i = 0\}$$

c'est l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ perpendiculaire à $\sum_{i=1}^{n} e_i$

Introduisons le réseau:

$$\Gamma = \{\alpha \in \mathbb{R}^{\ell+1} / \alpha = \sum_{i=1}^{\ell+1} k_i \vec{e}_i\}$$ de dim $\ell+1$ est infini (le réseau)

Le système de racine Δ ds E associé à l'algèbre de lie A_ℓ est donné par: $\Gamma' = \Gamma \cap E$ t.q

$$\Delta = \{\alpha \in \Gamma' / (\alpha, \alpha) = 2\}$$

N.B: $|\Delta| = (n^2 - 1) - \ell = (\ell+1)^2 - 1 - \ell = \ell^2 + \ell$

$|\Delta^+| = \frac{\ell(\ell+1)}{2}$ et $|\Delta^-| = \frac{\ell(\ell+1)}{2}$

la solution de $(\alpha, \alpha) = 2$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\ell+1} k_i e_i$$

$\alpha . \sum_i e_i = 0 = \sum k_i = 0$

avec $(\alpha, \alpha) = 2 \Rightarrow \sum_i k_i^2 = 2$

les éléments Δ solution sont donnée par:

$$\alpha_{ij} = e_i - e_j \qquad (i \neq j) \quad (i, j = 1, \dots, \ell)$$

propriétés:

i) la base de Δ est donnée par
$$\alpha_i = e_i - e_{i+1} \qquad 1 \leq i \leq \ell$$

ii) $$K_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{\underbrace{(\alpha_j, \alpha_j)}_{= 2}} = (\alpha_i, \alpha_j)$$

$$= (e_i - e_{i+1}, e_j - e_{j+1})$$

$$K_{ij} = \delta_{ij} - \delta_{i\, j+1} - \delta_{i+1\, j} + \delta_{i+1\, j+1}$$

$$= 2\delta_{ij} - \delta_{i\, j+1} - \delta_{i+1\, j}$$

iii) $$\sigma_{\alpha_i}(\alpha_i) = -\alpha_i = e_{i+1} - e_i$$

$$\sigma_{\alpha_i}(e_i - e_{i+1}) = e_{i+1} - e_i$$

σ_{α_i} permute i avec $i+1$

construction de B_n

$$E = \mathbb{R}^n \qquad \Delta = \{ \alpha \in \mathbb{R}^n \,/\, (\alpha, \alpha) = 1 \text{ ou } (\alpha, \alpha) = 2 \}$$

. les solutions sont: $\pm e_i \quad ((\alpha, \alpha) = 1)$
$\pm (e_i - e_{i+1}) \quad ((\alpha, \alpha) = 2)$

. la base: $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n$

Construction de C_n :

Les solution sont (l'inverse de B_n)
$e_1-e_2, e_2-e_3, \ldots, e_{n-1}-e_n, 2e_n$

Construction de D_n

$\alpha_{ij} = \pm e_i - \pm e_j \quad (i \neq j)$
la bas = $e_1-e_2, e_2-e_3, \ldots, e_{n-1}-e_n, e_{n-1}+e_n$

Construction de E_8

Soit $E = \mathbb{R}^8$
- $\Gamma' = \Gamma \oplus \mathbb{Z}\left(\frac{1}{2}\left(\vec{e_1}+\vec{e_2}+\ldots+\vec{e_8}\right)\right)$
- $\Gamma^2 = \left\{\sum c_i e_i + \frac{c}{2}(e_1+e_2 \ldots + e_8)\right\}$

ou $\sum c_i$ un entier pair

$$\Pi = \left\{\alpha \in \Gamma^2 / (\alpha,\alpha) = 2\right\}$$

la somme des ~~coo~~ coordonnées est un entier pair

- Les α sont : $\pm(e_i \pm e_j) \quad i \neq j$
$\pm \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} (-1)^{m(i)} e_i$, avec $\sum m_i$ pair

- La base
$\frac{1}{2}\left(e_1+e_8-(e_2+\ldots+e_7)\right), e_1+e_2, e_2-e_1, e_3-e_2,$

$e_4-e_3, e_5-e_4, e_6-e_5, e_7-e_6$

pour E_6 et E_7 c'est la m chose que E_8

VII-11

Construction de F_4

$E = \mathbb{R}^4$ $\Gamma' = \Gamma \oplus \mathbb{Z}(e_1+e_2+e_3+e_4)/2$

$\Pi = \{\alpha \in \Gamma', (\alpha,\alpha) = 1 \text{ ou } (\alpha,\alpha) = 2\}$

- Les α sont : $\pm e_i$, $\pm e_i - e_j$ $(i \neq j)$

$\frac{1}{2}(e_1 \mp e_2 \mp e_3 \mp e_4)$

- La base $e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4, \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$

Construction de G_2

E : sous espace de $\mathbb{R}^3$ $\perp$ $e_1+e_2+e_3$

$\Gamma' = \Gamma \cap E$

$\Pi = \{\alpha \in \Gamma' / (\alpha,\alpha) = 2\}$

$\Delta = \pm\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_1 - e_3, 2e_1 - e_2 - e_3, 2e_2 - e_1 - e_3, 2e_3 - e_1 - e_2\}$

- base $= \{e_1 - e_2, -2e_1 + e_2 + e_3\}$