Théories quantiques des champs conformes

Rachid AHL LAAMARA
Master: Physiques Mathématiques

Laboratoire de la physique des Hautes Energies, Modélisation et Simulation

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Contents

Contents

Contents

Contents

Contents

Contents

Les théories quantiques des champs invariantes conformes interviennent dans plusieurs branches de la physique fondamentale :

Les théories quantiques des champs invariantes conformes interviennent dans plusieurs branches de la physique fondamentale :

- Théorie des phénomènes critiques de la mécanique statistique

Les théories quantiques des champs invariantes conformes interviennent dans plusieurs branches de la physique fondamentale :

- Théorie des phénomènes critiques de la mécanique statistique
- Théorie de Maxwell en abscence de matière (4 equations de Maxwell dans le vide)

Les théories quantiques des champs invariantes conformes interviennent dans plusieurs branches de la physique fondamentale :

- Théorie des phénomènes critiques de la mécanique statistique
- Théorie de Maxwell en abscence de matière (4 equations de Maxwell dans le vide)
- Théorie de Yang-Mills et SuperYang-Mills pures

Les théories quantiques des champs invariantes conformes interviennent dans plusieurs branches de la physique fondamentale :

- Théorie des phénomènes critiques de la mécanique statistique
- Théorie de Maxwell en abscence de matière (4 equations de Maxwell dans le vide)
- Théorie de Yang-Mills et SuperYang-Mills pures
- Gravité et supergravité conformes

Les théories quantiques des champs invariantes conformes interviennent dans plusieurs branches de la physique fondamentale :

- Théorie des phénomènes critiques de la mécanique statistique
- Théorie de Maxwell en abscence de matière (4 equations de Maxwell dans le vide)
- Théorie de Yang-Mills et SuperYang-Mills pures
- Gravité et supergravité conformes
- Théorie des cordes et supercordes

Les théories quantiques des champs invariantes conformes interviennent dans plusieurs branches de la physique fondamentale :

- Théorie des phénomènes critiques de la mécanique statistique
- Théorie de Maxwell en abscence de matière (4 equations de Maxwell dans le vide)
- Théorie de Yang-Mills et SuperYang-Mills pures
- Gravité et supergravité conformes
- Théorie des cordes et supercordes

Les théories quantiques des champs invariantes conformes interviennent dans plusieurs branches de la physique fondamentale :

- Théorie des phénomènes critiques de la mécanique statistique
- Théorie de Maxwell en abscence de matière (4 equations de Maxwell dans le vide)
- Théorie de Yang-Mills et SuperYang-Mills pures
- Gravité et supergravité conformes
- Théorie des cordes et supercordes

En physique statistique des phénomènes critiques, l'invariance conforme décrit le comportement critique des systèmes en transition de phase du second ordre.

Exemple

Exemple

Modèle d'Ising à 2D avec des spin

Exemple

Modèle d'Ising à 2D avec des spin

$$\sigma_i = \pm 1, \qquad i \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$$

Exemple

Modèle d'Ising à 2D avec des spin

$$\sigma_i = \pm 1, \qquad i \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$$

placés sur des sites d'un réseau carée $\mathbb{Z}^2$. La fonction de partition

Exemple

Modèle d'Ising à 2D avec des spin

$$\sigma_i = \pm 1, \qquad i \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$$

placés sur des sites d'un réseau carée $\mathbb{Z}^2$. La fonction de partition

$$\mathcal{Z} = \mathcal{T}\nabla\left(e^{-\beta H}\right), \qquad \beta = \frac{1}{KT},$$

Exemple

Modèle d'Ising à 2D avec des spin

$$\sigma_i = \pm 1, \qquad i \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$$

placés sur des sites d'un réseau carée $\mathbb{Z}^2$. La fonction de partition

$$\mathcal{Z} = \mathcal{T}\nabla\left(e^{-\beta H}\right), \qquad \beta = \frac{1}{KT},$$

associé à ce système quantique, s'ecrit,

Exemple

Modèle d'Ising à 2D avec des spin

$$\sigma_i = \pm 1, \qquad i \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$$

placés sur des sites d'un réseau carée $\mathbb{Z}^2$. La fonction de partition

$$\mathcal{Z} = \mathcal{T}\nabla \left(e^{-\beta H} \right), \qquad \beta = \frac{1}{KT},$$

associé à ce système quantique, s'ecrit,

$$\mathcal{Z} = \sum_{\text{configuration } \{\sigma\}} \left(\exp\left[-\frac{E}{KT} \right] \right),$$

avec

$$E = -\epsilon \sum_{<ij>} \sigma_i \sigma_j$$

et où $< ij >$ désigne les proche voisin.

avec

$$E = -\epsilon \sum_{<ij>} \sigma_i \sigma_j$$

et où $< ij >$ désigne les proche voisin.

Selon les valeurs moyennes du moment magnétique $\langle\sigma\rangle$, on distingue deux phases :

avec

$$E = -\epsilon \sum_{<ij>} \sigma_i \sigma_j$$

et où $< ij >$ désigne les proche voisin.

Selon les valeurs moyennes du moment magnétique $\langle\sigma\rangle$, on distingue deux phases :

1. **Phase paramagnétique**
   C'est une *phase désordonnée* à haute temmpérature

$$\langle\sigma\rangle = 0, \qquad T > T_c$$

avec

$$E = -\epsilon \sum_{<ij>} \sigma_i \sigma_j$$

et où $< ij >$ désigne les proche voisin.

Selon les valeurs moyennes du moment magnétique $\langle \sigma \rangle$, on distingue deux phases :

1. **Phase paramagnétique**
   C'est une *phase désordonnée* à haute temmpérature

$$\langle \sigma \rangle = 0, \qquad T > T_c$$

2. **Phase Ferromagnétique**

C'est une *phase ordonnée* aux basses températures

$$\langle \sigma \rangle \neq 0, \qquad T < T_c$$

C'est une *phase ordonnée* aux basses températures

$$\langle\sigma\rangle \neq 0, \qquad T < T_c$$

Ces deux phases sont liées par une transformation de dualité qui porte l'information sur le point critique. La transition de phase du 2nd ordre appparait au point auto-duale (self-dual). Rappelons que le point fixe d'une tranformation,

C'est une *phase ordonnée* aux basses températures

$$\langle \sigma \rangle \neq 0, \qquad T < T_c$$

Ces deux phases sont liées par une transformation de dualité qui porte l'information sur le point critique. La transition de phase du 2nd ordre appparait au point auto-duale (self-dual). Rappelons que le point fixe d'une tranformation,

$$r \qquad \leftrightarrow \qquad r' = f(r)\,, \tag{1.1}$$

C'est une *phase ordonnée* aux basses températures

$$\langle \sigma \rangle \neq 0, \qquad T < T_c$$

Ces deux phases sont liées par une transformation de dualité qui porte l'information sur le point critique. La transition de phase du 2nd ordre appparait au point auto-duale (self-dual). Rappelons que le point fixe d'une tranformation,

$$r \qquad \leftrightarrow \qquad r' = f(r)\,, \tag{1.1}$$

est un ensemble de points solution de l'equation

C'est une *phase ordonnée* aux basses températures

$$\langle\sigma\rangle \neq 0, \qquad T < T_c$$

Ces deux phases sont liées par une transformation de dualité qui porte l'information sur le point critique. La transition de phase du 2nd ordre appparait au point auto-duale (self-dual). Rappelons que le point fixe d'une tranformation,

$$r \qquad \leftrightarrow \qquad r' = f\,(r)\,, \tag{1.1}$$

est un ensemble de points solution de l'equation

$$r = r', \qquad \Leftrightarrow \qquad r = f\,(r)$$

Contents

Au point de transition, les configurations ont une longue portée ; et la théorie qui décrit le système au point critique devrait donc être invariante d'échelle. Ceci veut dire que sous les changements d'échelle

Au point de transition, les configurations ont une longue portée ; et la théorie qui décrit le système au point critique devrait donc être invariante d'échelle. Ceci veut dire que sous les changements d'échelle

$$x \qquad \rightarrow \qquad x' = \lambda x, \qquad \lambda \in R^* \tag{2.1}$$

Au point de transition, les configurations ont une longue portée ; et la théorie qui décrit le système au point critique devrait donc être invariante d'échelle. Ceci veut dire que sous les changements d'échelle

$$x \quad \rightarrow \quad x' = \lambda x, \quad \lambda \in R^* \tag{2.1}$$

les grandeurs physiques $F(x)$ restent inchangée,

Au point de transition, les configurations ont une longue portée ; et la théorie qui décrit le système au point critique devrait donc être invariante d'échelle. Ceci veut dire que sous les changements d'échelle

$$x \qquad \rightarrow \qquad x' = \lambda x, \qquad \lambda \in R^* \tag{2.1}$$

les grandeurs physiques $F(x)$ restent inchangée,

$$F(\lambda x) = F(x) .$$

Au point de transition, les configurations ont une longue portée ; et la théorie qui décrit le système au point critique devrait donc être invariante d'échelle. Ceci veut dire que sous les changements d'échelle

$$x \quad \to \quad x' = \lambda x, \qquad \lambda \in R^* \tag{2.1}$$

les grandeurs physiques $F(x)$ restent inchangée,

$$F(\lambda x) = F(x) .$$

Les transformations (2.1) (de dilatation $\lambda > 1$ ou contraction $\lambda < 1$) forment un groupe $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\lambda)$ à un parametre.
Rappelons aussi qu'un ensemble $\mathcal{G}$ de points g_i,

Au point de transition, les configurations ont une longue portée ; et la théorie qui décrit le système au point critique devrait donc être invariante d'échelle. Ceci veut dire que sous les changements d'échelle

$$x \quad \rightarrow \quad x' = \lambda x, \qquad \lambda \in R^* \tag{2.1}$$

les grandeurs physiques $F(x)$ restent inchangée,

$$F(\lambda x) = F(x) \, .$$

Les transformations (2.1) (de dilatation $\lambda > 1$ ou contraction $\lambda < 1$) forment un groupe $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\lambda)$ à un parametre.
Rappelons aussi qu'un ensemble $\mathcal{G}$ de points g_i,

$$\mathcal{G} = \{g_i, \;\; i \in \mathcal{I}\}$$

muni d'une loi associative $\circ$ multiplication ou addition

muni d'une loi associative $\circ$ multiplication ou addition

$$\begin{aligned} g_1 \circ g_2 \circ g_3 &= (g_1 \circ g_2) \circ g_3 \\ &= g_1 \circ (g_2 \circ g_3)\,, \end{aligned}$$

muni d'une loi associative $\circ$ multiplication ou addition

$$\begin{aligned} g_1 \circ g_2 \circ g_3 &= (g_1 \circ g_2) \circ g_3 \\ &= g_1 \circ (g_2 \circ g_3)\,, \end{aligned}$$

est un groupe multiplicatif (additif) si les proprités suivantes sont satisfaite :

muni d'une loi associative $\circ$ multiplication ou addition

$$\begin{aligned} g_1 \circ g_2 \circ g_3 &= (g_1 \circ g_2) \circ g_3 \\ &= g_1 \circ (g_2 \circ g_3)\,, \end{aligned}$$

est un groupe multiplicatif (additif) si les proprités suivantes sont satisfaite :
Pour des éléments g_i et g_j quelconques de $\mathcal{G}$, nous avons :

- Stabilité

$$g_i \circ g_j = g_k \in \mathcal{G},$$

muni d'une loi associative $\circ$ multiplication ou addition

$$\begin{aligned} g_1 \circ g_2 \circ g_3 &= (g_1 \circ g_2) \circ g_3 \\ &= g_1 \circ (g_2 \circ g_3)\,, \end{aligned}$$

est un groupe multiplicatif (additif) si les proprités suivantes sont satisfaite :
Pour des éléments g_i et g_j quelconques de $\mathcal{G}$, nous avons :

- Stabilité

$$g_i \circ g_j = g_k \in \mathcal{G},$$

- Element neutre

$$\exists\ g_0 = e \in \mathcal{G} \text{ tel que } g_i \circ e = e \circ g_i = g_i$$

muni d’une loi associative $\circ$ multiplication ou addition

$$\begin{aligned} g_1 \circ g_2 \circ g_3 &= (g_1 \circ g_2) \circ g_3 \\ &= g_1 \circ (g_2 \circ g_3)\,, \end{aligned}$$

est un groupe multiplicatif (additif) si les proprités suivantes sont satisfaite :
Pour des éléments g_i et g_j quelconques de $\mathcal{G}$, nous avons :

- Stabilité
$$g_i \circ g_j = g_k \in \mathcal{G},$$
- Element neutre
$$\exists\ g_0 = e \in \mathcal{G} \text{ tel que } g_i \circ e = e \circ g_i = g_i$$
- Element inverse
$$\exists\ g_i' \in \mathcal{G} \text{ tel que } g_i \circ g_i' = g_0 = e$$

Pour les transformations d'échelle (2.1), les éléments g_i sont donnés par un parametre réel λ ;

Pour les transformations d'échelle (2.1), les éléments g_i sont donnés par un parametre réel λ ;

$$\{g_i, \quad i \in \mathcal{I}\} \qquad \rightarrow \qquad \{\lambda \in R\}\,,$$

Pour les transformations d'échelle (2.1), les éléments g_i sont donnés par un parametre réel λ ;

$$\{g_i, \quad i \in \mathcal{I}\} \qquad \rightarrow \qquad \{\lambda \in R\},$$

soit alors une infinité continue de valeurs. Ce groupe agit, sur les points x d'un espace que précisons au fur et à mesure et selon les situations, comme,

Pour les transformations d'échelle (2.1), les éléments g_i sont donnés par un parametre réel λ ;

$$\{g_i, \quad i \in \mathcal{I}\} \qquad \rightarrow \qquad \{\lambda \in R\},$$

soit alors une infinité continue de valeurs. Ce groupe agit, sur les points x d'un espace que précisons au fur et à mesure et selon les situations, comme,

$$x \quad \rightarrow \quad x' = \lambda x, \qquad \lambda \in R^*$$

Une seconde transformation conduit à :

Une seconde transformation conduit à :

$$x' = \lambda x \quad \rightarrow \quad x'' = \gamma x',$$

Une seconde transformation conduit à :

$$x' = \lambda x \quad \rightarrow \quad x'' = \gamma x',$$

qui peut être écrit également comme

$$x'' = \gamma\lambda x = \beta x, \qquad \beta = \lambda\gamma$$

Nous avons :

Une seconde transformation conduit à :

$$x' = \lambda x \quad \rightarrow \quad x'' = \gamma x',$$

qui peut être écrit également comme

$$x'' = \gamma\lambda x = \beta x, \qquad \beta = \lambda\gamma$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\lambda &= 1, &&\leftrightarrow \quad \text{element neutre} \\
\gamma\lambda &= 1, &&\leftrightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\lambda} \text{ est l'element inverse de } \lambda \\
\gamma\lambda &= \beta, &&\leftrightarrow \quad \text{stabilité}
\end{aligned}$$

En fait ce groupe des transformation d'échelle est un sous groupe d'un groupe plus large : groupe conforme ou symétrie conforme.

En fait ce groupe des transformation d'échelle est un sous groupe d'un groupe plus large : groupe conforme ou symétrie conforme.

$$\mathcal{G}_C = \mathcal{G}_{conforme}$$

En fait ce groupe des transformation d'échelle est un sous groupe d'un groupe plus large : groupe conforme ou symétrie conforme.

$$\mathcal{G}_C = \mathcal{G}_{conforme}$$

Il se trouve que les théories critiques ont elles aussi des symétries plus riches que la symétrie d'échelle. L'ensemble de ces symétries forment le le groupe conforme que nous voulons étudier dans ce cours.

Contents

Pour fixer les idées, noter que les groupes conformes $\mathcal{G}_C$ existent dans toutes les espaces

$$\mathbb{R}^D, \qquad D = 2, \qquad D = 3, \ldots.$$

Pour fixer les idées, noter que les groupes conformes $\mathcal{G}_C$ existent dans toutes les espaces

$$\mathbb{R}^D, \qquad D = 2, \qquad D = 3, ...$$

de dimension D et les epaces-temps

$$\mathbb{R}^{1,D}, \qquad D = 1, \qquad D = 2, \qquad D = 3, ...$$

Pour fixer les idées, noter que les groupes conformes $\mathcal{G}_C$ existent dans toutes les espaces

$$\mathbb{R}^D, \qquad D = 2, \qquad D = 3, ...$$

de dimension D et les epaces-temps

$$\mathbb{R}^{1,D}, \qquad D = 1, \qquad D = 2, \qquad D = 3, ...$$

Ces groupes $\mathcal{G}_C = \mathcal{G}_C(D)$ généralisent les groupes des rotations

$$SO(D): \qquad \text{exemple} : SO(2), \qquad SO(3), \qquad \cdots$$

des axes de l'espace réel $\mathbb{R}^D$ et les groupes de rotations d'espace temps

$$SO(1, D) : \qquad \text{exemple} : SO(1, 1)\,, \qquad SO(1, 2)\,, \qquad \cdots$$

des axes de l'espace réel $\mathbb{R}^D$ et les groupes de rotations d'espace temps

$$SO(1, D): \qquad \text{exemple : } SO(1,1)\,, \qquad SO(1,2)\,, \qquad \cdots$$

Nous avons le résultat suivant que nous établirons dans le chapitre 2

Espace	Groupe de rotation	Groupe conforme
$\mathbb{R}^d$	$SO(d)$	$SO(d+2)$
$\mathbb{R}^{1,d}$	$SO(1,d)$	$SO(1,d+2)$

Contents

Nous avons

Nous avons

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

Nous avons

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

que nous écrivons en générale comme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\theta) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

avec $R(\theta)$ une matrice 2×2 réelle donnée

Nous avons

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

que nous écrivons en générale comme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\theta) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

avec $R(\theta)$ une matrice 2×2 réelle donnée

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Noter aussi :

Noter aussi :

- le nombre de parametre (variable) est un ; c'est l'angle θ.

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

Noter aussi :

- le nombre de parametre (variable) est un ; c'est l'angle θ.

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

- $R(\theta)$ est une matrice réelle orthogonale,

$$R(\theta)\, R^T(\theta) = I_{2\times 2}$$

Noter aussi :

- le nombre de parametre (variable) est un ; c'est l'angle θ.

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

- $R(\theta)$ est une matrice réelle orthogonale,

$$R(\theta)\, R^T(\theta) = I_{2\times 2}$$

En effet

$$\begin{aligned} R(\theta)\, R^T(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Le développement de $R(\theta)$ au voisinage de $\theta = 0$ s'écrit au premier ordre en θ,

- Le développement de $R(\theta)$ au voisinage de $\theta = 0$ s'écrit au premier ordre en θ,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + O\left(\theta^2\right)$$

- Le développement de $R(\theta)$ au voisinage de $\theta = 0$ s'écrit au premier ordre en θ,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + O\left(\theta^2\right)$$

à partir delaquelle nous tirons

- Le développement de $R(\theta)$ au voisinage de $\theta = 0$ s'écrit au premier ordre en θ,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + O\left(\theta^2\right)$$

à partir delaquelle nous tirons

$$J = \left(\frac{\partial R(\theta)}{\partial\theta}\right)_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Le développement de $R(\theta)$ au voisinage de $\theta = 0$ s'écrit au premier ordre en θ,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + O\left(\theta^2\right)$$

à partir delaquelle nous tirons

$$J = \left(\frac{\partial R(\theta)}{\partial\theta}\right)_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui défini le générateur du groupe.

- Le développement de $R(\theta)$ au voisinage de $\theta = 0$ s'écrit au premier ordre en θ,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + O\left(\theta^2\right)$$

à partir delaquelle nous tirons

$$J = \left(\frac{\partial R(\theta)}{\partial\theta}\right)_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui défini le générateur du groupe.

- θ est le parametre du groupe. En général le nombre de parametre est égal au nombre de générateur.

- Le développement de $R(\theta)$ au voisinage de $\theta = 0$ s'écrit au premier ordre en θ,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + O\left(\theta^2\right)$$

à partir delaquelle nous tirons

$$J = \left(\frac{\partial R(\theta)}{\partial\theta}\right)_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui défini le générateur du groupe.

- θ est le parametre du groupe. En général le nombre de parametre est égal au nombre de générateur.

- Ces résultats se généralisent pour les rotations

$$R = R(\theta_1, ..., \theta_n)$$

dans les espaces réels de dimensions superieures. Le groupe des rotations dans R^D est noté

dans les espaces réels de dimensions superieures. Le groupe des rotations dans R^D est noté

$$SO\,(D)$$

dans les espaces réels de dimensions superieures. Le groupe des rotations dans R^D est noté

$$SO\left(D\right)$$

Sa dimension est

$$\dim\left[SO\left(D\right)\right] = \frac{D\left(D-1\right)}{2}$$

dans les espaces réels de dimensions superieures. Le groupe des rotations dans R^D est noté

$$SO(D)$$

Sa dimension est

$$\dim[SO(D)] = \frac{D(D-1)}{2}$$

Cette dimension est égale au nombre de parametres θ_i.

$$n = \frac{D(D-1)}{2}$$

dans les espaces réels de dimensions superieures. Le groupe des rotations dans R^D est noté

$$SO(D)$$

Sa dimension est

$$\dim\left[SO(D)\right] = \frac{D(D-1)}{2}$$

Cette dimension est égale au nombre de parametres θ_i.

$$n = \frac{D(D-1)}{2}$$

C'est aussi le nombre de générateurs J_i du groupe

dans les espaces réels de dimensions superieures. Le groupe des rotations dans R^D est noté

$$SO\left(D\right)$$

Sa dimension est

$$\dim\left[SO\left(D\right)\right] = \frac{D\left(D-1\right)}{2}$$

Cette dimension est égale au nombre de parametres θ_i.

$$n = \frac{D\left(D-1\right)}{2}$$

C'est aussi le nombre de générateurs J_i du groupe

$$J_i = \left(\frac{\partial R\left(\theta_1, ..., \theta_n\right)}{\partial\theta_i}\right)_{\theta=0}$$

Exercice : Groupe SO(3)

Le groupe SO(3) est le groupe des rotations des axes des espaces réelles à 3D. Puisque $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z), admet trois plans

$$(x, y), \qquad (y, z), \qquad (z, x),$$

le groupe SO(3) est engendré par trois rotations indépendantes. En écrivant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R(\theta) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3),$$

1. détérminer la matrice $R(\theta)$
2. Montrer que R est ortogonale
3. Calculer $\det R$
4. Trouver la relation entre $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ et les angle d'Euler (ψ, θ, φ)

Groupes conformes

Groupes conformes

Le groupe conforme $\mathcal{C}_D$ des transformations conformes dans R^D est plus large que le groupe des rotations. En plus des rotations, il contient également :

Groupes conformes

Le groupe conforme $\mathcal{C}_D$ des transformations conformes dans R^D est plus large que le groupe des rotations. En plus des rotations, il contient également :

- les transformation d'échelle,

Groupes conformes

Le groupe conforme $\mathcal{C}_D$ des transformations conformes dans R^D est plus large que le groupe des rotations. En plus des rotations, il contient également :

- les transformation d'échelle,
- les inversions,

Groupes conformes

Le groupe conforme $\mathcal{C}_D$ des transformations conformes dans R^D est plus large que le groupe des rotations. En plus des rotations, il contient également :

- les transformation d'échelle,
- les inversions,
- les transformation conforme spéciales.

Groupes conformes

Le groupe conforme $\mathcal{C}_D$ des transformations conformes dans R^D est plus large que le groupe des rotations. En plus des rotations, il contient également :

- les transformation d'échelle,
- les inversions,
- les transformation conforme spéciales.

On distingue deux situations :

1. Groupes conformes $\mathcal{C}_D$ dans dimensions $D \geq 3$. La dimension de ces groupes
$$\dim \mathcal{C}_D = \frac{(D+2)(D+1)}{2}$$
est finie. De plus l'information codée dans ses transformations est essentiellement celle apportée par la symétrie d'echelle.

1. Groupes conformes $\mathcal{C}_D$ dans dimensions $D \geq 3$. La dimension de ces groupes
$$\dim \mathcal{C}_D = \frac{(D+2)\,(D+1)}{2}$$
est finie. De plus l'information codée dans ses transformations est essentiellement celle apportée par la symétrie d'echelle.
2. Groupe conforme à $D = 2$ ou $D = 1 + 1$. Dans ce cas la dimension du groupe est infinie
$$\dim \mathcal{C}_2 = \infty$$
Cette propriété constitue une forte restriction sur la théorie conforme à 2D et permet alors d'avoir beaucoup d'information sur le système critique.

Contents

Ce Chapitre est consacrée à l'étude des :

Ce Chapitre est consacrée à l'étude des :

- Des propriétés générales de l'invariance conforme D dimensions, $D \geq 2$

Ce Chapitre est consacrée à l'étude des :

- Des propriétés générales de l'invariance conforme D dimensions, $D \geq 2$
- Des réalisations de la symétrie conforme à deux dimensions à $D = 2$.

Metrique d'espace temps

Metrique d'espace temps

Espaces plats et courbes On distngue deux types d'espace :

Metrique d'espace temps

Espaces plats et courbes On distngue deux types d'espace :

- Espace plats dont la courbure est nulle ; c'est ce type d'espace qui interviennent en physique classique et théorie de la relativité restreinte.

Metrique d'espace temps

Espaces plats et courbes On distngue deux types d'espace :

- Espace plats dont la courbure est nulle ; c'est ce type d'espace qui interviennent en physique classique et théorie de la relativité restreinte.

Exemple d'espace plat :
Les exemples types sont données par les espaces

$$\text{Eucidien } \mathbb{R}^d, \qquad : \text{Peudo-Eucidien } \mathbb{R}^{(p,q)}.$$

Metrique d'espace temps

Espaces plats et courbes On distngue deux types d'espace :

- Espace plats dont la courbure est nulle ; c'est ce type d'espace qui interviennent en physique classique et théorie de la relativité restreinte.

Exemple d'espace plat :
Les exemples types sont données par les espaces

$$\text{Eucidien } \mathbb{R}^d, \qquad : \text{Peudo-Eucidien } \mathbb{R}^{(p,q)}.$$

Ce sont tous des espace plats :

L'élément de longueur s'écrit comme

L'élément de longueur s'écrit comme

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^d\left(x^1,\dots,x^d\right) \quad &: \quad dl^2 = \left(dx^1\right)^2 + \dots + \left(dx^d\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{d} dx^i dx^i \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \delta_{ij} dx^i dx^j, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \\
&= \delta_{ij} dx^i dx^j
\end{aligned}$$

δ_{ij} est la metrique

L'élément de longueur s'écrit comme

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}^d\left(x^1,\ldots,x^d\right) \quad : \quad dl^2 &= \left(dx^1\right)^2+\ldots+\left(dx^d\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{d} dx^i dx^i \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \delta_{ij} dx^i dx^j, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \\
&= \delta_{ij} dx^i dx^j
\end{aligned}
$$

δ_{ij} est la metrique

- Espace courbe ; de courbure non nulle.
  C'est ce genre d'espace qu'en rencontre en théorie classique de la relativité générale.

Exemple d'espace courbe :

Exemple d'espace courbe :
La sphère $\mathbb{S}^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

est un espace courbe de courbure

$$\varrho = \frac{1}{r}$$

Exemple d'espace courbe :
La sphère $\mathbb{S}^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

est un espace courbe de courbure

$$\varrho = \frac{1}{r}$$

Noter que dans la limite $r \to \infty$, $\varrho \to 0$; la sphère $\mathbb{S}^2$ tend vers $\mathbb{R}^2$.
Dans les espace courbes, les éléments de longueurs s'écrivent comme

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{d} g_{ij} dx^i dx^j$$

ou

$$g_{ij} = g_{ij}(x)$$

depend des positions x : c'est un champ.

Espaces temps plats et courbes

Espaces temps plats et courbes

Espace de Minkowski $\boldsymbol{M}_d$: C'est un espace-temps plat à *d-dimensions*,

Espaces temps plats et courbes

Espace de Minkowski $\boldsymbol{M}_d$: C'est un espace-temps plat à *d-dimensions*,

$$\boldsymbol{M}_d \sim \mathbb{R}^{1,d-1} = \left(x^0 = ct, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right).$$

Espaces temps plats et courbes

Espace de Minkowski $\boldsymbol{M}_d$: C'est un espace-temps plat à *d-dimensions*,

$$\boldsymbol{M}_d \sim \mathbb{R}^{1,d-1} = \left(x^0 = ct, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right).$$

Dans $\boldsymbol{M}_d$ l'élément de longueur ds^2 est donné par l'invariant suivant

$$ds^2 = c^2 \left(dt\right)^2 - d\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{x}}$$

Espaces temps plats et courbes

Espace de Minkowski $\boldsymbol{M}_d$: C'est un espace-temps plat à *d-dimensions*,

$$\boldsymbol{M}_d \sim \mathbb{R}^{1,d-1} = \left(x^0 = ct, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right).$$

Dans $\boldsymbol{M}_d$ l'élément de longueur ds^2 est donné par l'invariant suivant

$$ds^2 = c^2\,(dt)^2 - d\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{x}}$$

qu'on peut écrire aussi comme

Espaces temps plats et courbes

Espace de Minkowski $\boldsymbol{M}_d$: C'est un espace-temps plat à *d-dimensions*,

$$\boldsymbol{M}_d \sim \mathbb{R}^{1,d-1} = \left(x^0 = ct, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right).$$

Dans $\boldsymbol{M}_d$ l'élément de longueur ds^2 est donné par l'invariant suivant

$$ds^2 = c^2\,(dt)^2 - d\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{x}}$$

qu'on peut écrire aussi comme

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{\mu,\nu=0}^{d} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \eta_{00} dx^0 dx^0 + \eta_{0j} dx^{\grave{a}} dx^j + \eta_{i0} dx^i dx^0 + \eta_{ij} dx^i dx^j \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dans cet espace l'effet de la gravitation est ignoré

Exemple :

Pour $d = 4$, la métrique de l'espace plat $\boldsymbol{M}_4$ est donnée par

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple :

Pour $d = 4$, la métrique de l'espace plat $\boldsymbol{M}_4$ est donnée par

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et s'écrit aussi comme

$$\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1) \tag{5.2}$$

Exemple :
Pour $d = 4$, la métrique de l'espace plat $\boldsymbol{M}_4$ est donnée par

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et s'écrit aussi comme

$$\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1) \tag{5.2}$$

Espace-temps courbe $\mathcal{M}_d$:

Exemple :

Pour $d = 4$, la métrique de l'espace plat $\boldsymbol{M}_4$ est donnée par

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et s'écrit aussi comme

$$\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1) \tag{5.2}$$

Espace-temps courbe $\mathcal{M}_d$:

C'est un espace temps de courbure non nulle. Dans ce cas, on tient compte de l'effet de lagravitation :

Exemple :
Pour $d = 4$, la métrique de l'espace plat $\boldsymbol{M}_4$ est donnée par

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et s'écrit aussi comme

$$\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1) \tag{5.2}$$

Espace-temps courbe $\mathcal{M}_d$:
C'est un espace temps de courbure non nulle. Dans ce cas, on tient compte de l'effet de lagravitation :
Dans les espace-temps plat, l'élement de longeur s'écrit comme

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

En general, $g_{\mu\nu}$ est une fonction matricielle de x :

En general, $g_{\mu\nu}$ est une fonction matricielle de x :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00}(x) & g_{01}(x) & g_{02}(x) & g_{03}(x) \\ g_{10}(x) & g_{11}(x) & g_{12}(x) & g_{13}(x) \\ g_{20}(x) & g_{21}(x) & g_{22}(x) & g_{23}(x) \\ g_{30}(x) & g_{31}(x) & g_{32}(x) & g_{33}(x) \end{pmatrix}$$

En general, $g_{\mu\nu}$ est une fonction matricielle de x :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00}(x) & g_{01}(x) & g_{02}(x) & g_{03}(x) \\ g_{10}(x) & g_{11}(x) & g_{12}(x) & g_{13}(x) \\ g_{20}(x) & g_{21}(x) & g_{22}(x) & g_{23}(x) \\ g_{30}(x) & g_{31}(x) & g_{32}(x) & g_{33}(x) \end{pmatrix}$$

c'est un champ ! c'est le champ qui décrit la gravitation.
Son expression explicite en fonction de x

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$$

En general, $g_{\mu\nu}$ est une fonction matricielle de x :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00}(x) & g_{01}(x) & g_{02}(x) & g_{03}(x) \\ g_{10}(x) & g_{11}(x) & g_{12}(x) & g_{13}(x) \\ g_{20}(x) & g_{21}(x) & g_{22}(x) & g_{23}(x) \\ g_{30}(x) & g_{31}(x) & g_{32}(x) & g_{33}(x) \end{pmatrix}$$

c'est un champ ! c'est le champ qui décrit la gravitation.
Son expression explicite en fonction de x

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$$

peut être obtenu en résolvant l'equation de la gravitation. L'espace Plat de Minkowski apparait comme un cas limite donné par

$$g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$$

Transformations générales des coordonnées

Transformations générales des coordonnées

Les phénomènes physiques *ne dépendent pas* du choix de repères ou référentiels.

Transformations générales des coordonnées

Les phénomènes physiques *ne dépendent pas* du choix de repères ou référentiels.
Ils ne dépendent pas alors des systèmes de coordonnées

$$x = \left(x^0, x^1, \ldots, x^{d-1}\right)$$

Transformations générales des coordonnées

Les phénomènes physiques *ne dépendent pas* du choix de repères ou référentiels.
Ils ne dépendent pas alors des systèmes de coordonnées

$$x = \left(x^0, x^1, \ldots, x^{d-1}\right)$$

Ces phénomènes sont donc invariants sous les *changements de repères où referentiels* :

Transformations générales des coordonnées

Les phénomènes physiques *ne dépendent pas* du choix de repères ou référentiels.
Ils ne dépendent pas alors des systèmes de coordonnées

$$x = \left(x^0, x^1, \ldots, x^{d-1}\right)$$

Ces phénomènes sont donc invariants sous les *changements de repères où referentiels* :
Ils sont invariants sous les transformations *générales* de coordonnées (TGC),

$$x^\mu \qquad \rightarrow \qquad x^{\mu\prime} = \mathrm{f}^\mu\left(x\right).$$

Sous ces transformations, qui forment un *groupe de symétrie* à savoir le groupe des difféomorphismes $\mathrm{Diff}(\mathcal{M}_d)$, les êtres mathématiques se transforment selon des règles qui sont données par la théorie des représentations du groupe TGC.

Sous ces transformations, qui forment un *groupe de symétrie* à savoir le groupe des difféomorphismes $\mathrm{Diff}(\mathcal{M}_d)$, les êtres mathématiques se transforment selon des règles qui sont données par la théorie des représentations du groupe TGC.
Par exemple, le champ (métrique) $g_{\mu\nu}(x)$ change

$$g_{\mu\nu}(x) \quad \rightarrow \quad g'_{\mu\nu}\left(x'\right),$$

Sous ces transformations, qui forment un *groupe de symétrie* à savoir le groupe des difféomorphismes $\mathrm{Diff}(\mathcal{M}_d)$, les êtres mathématiques se transforment selon des règles qui sont données par la théorie des représentations du groupe TGC.
Par exemple, le champ (métrique) $g_{\mu\nu}(x)$ change

$$g_{\mu\nu}(x) \qquad \rightarrow \qquad g'_{\mu\nu}\left(x'\right),$$

mais l'élement de longueur

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu$$

reste :

reste :

1. soit invariant

$$ds'^2 = ds^2, \tag{5.3}$$

comme c'est le cas en théorie de *relativité générale* d'Einstein.

reste :

1. soit invariant

$$ds'^2 = ds^2, \tag{5.3}$$

comme c'est le cas en théorie de *relativité générale* d'Einstein.

2. soit invariant à un facteur d'échelle près

$$ds'^2 = \Omega ds^2. \tag{5.4}$$

C'est le cas de la théorie de la gravitation conforme.

reste :

1. soit invariant

$$ds'^2 = ds^2, \tag{5.3}$$

comme c'est le cas en théorie de *relativité générale* d'Einstein.

2. soit invariant à un facteur d'échelle près

$$ds'^2 = \Omega ds^2. \tag{5.4}$$

C'est le cas de la théorie de la gravitation conforme.

Cas $ds'^2 = ds^2$

Dans le premier cas, nous avons en remplacant ds'^2 et ds^2 par leurs valeurs

$$
\begin{aligned}
ds'^2 &= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g'_{\mu\nu}\left(x'\right) dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g'_{\mu\nu}\left(x'\right) dx'^{\mu} dx'^{\nu} \\
ds^2 &= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\left(x\right) dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu\nu}\left(x\right) dx^{\mu} dx^{\nu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ds'^2 &= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g'_{\mu\nu}\left(x'\right) dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g'_{\mu\nu}\left(x'\right) dx'^{\mu} dx'^{\nu} \\
ds^2 &= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\left(x\right) dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu\nu}\left(x\right) dx^{\mu} dx^{\nu}
\end{aligned}
$$

et en égalisant

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu}\left(x\right) dx^{\mu} dx^{\nu} &= g'_{\mu\nu}\left(x'\right) dx'^{\mu} dx'^{\nu} \\
&= g'_{\alpha\beta}\left(x'\right) dx'^{\alpha} dx'^{\beta} \\
&= g'_{\alpha\beta}\left(x'\right) \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\right) dx^{\mu} dx^{\nu}.
\end{aligned}
$$

La métrique $g_{\mu\nu}$se transforme comme un tenseur d'ordre deux

$$g_{\mu\nu}(x) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g'_{\alpha\beta}\left(x'\right) \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}$$

La métrique $g_{\mu\nu}$se transforme comme un tenseur d'ordre deux

$$g_{\mu\nu}\left(x\right) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g'_{\alpha\beta}\left(x'\right) \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}$$

ou encore

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}$$

La métrique $g_{\mu\nu}$se transforme comme un tenseur d'ordre deux

$$g_{\mu\nu}\left(x\right)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}g'_{\alpha\beta}\left(x^{'}\right)\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}$$

ou encore

$$g_{\mu\nu}(x)\rightarrow g'_{\mu\nu}(x')=\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}g_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}$$

L'ensemble des transformations générales de coordonnées forme un groupe de dimensions infinie : C'est le groupes des difféomorphismes de $\boldsymbol{M}_d$.

Cas $ds'^2 = \Omega ds^2$

Cas $ds'^2 = \Omega ds^2$

Selon la dimension de l'espace $\mathbb{R}^{(p,q)}$, on distingue deux cas :

Cas $ds'^2 = \Omega ds^2$

Selon la dimension de l'espace $\mathbb{R}^{(p,q)}$, on distingue deux cas :

- Cas $d = p + q > 2$
  Le dimension du groupe conforme est finie. Cette dimension qui est aussi égale au nombre de parametres libres du groupe est
  $$\frac{(p+q+2)\,(p+q+1)}{2}$$

Cas $ds'^2 = \Omega ds^2$

Selon la dimension de l'espace $\mathbb{R}^{(p,q)}$, on distingue deux cas :

- Cas $d = p + q > 2$
  Le dimension du groupe conforme est finie. Cette dimension qui est aussi égale au nombre de parametres libres du groupe est
  $$\frac{(p+q+2)(p+q+1)}{2}$$
- Cas $d = 2$
  La dimension du groupe conforme est infinie !
  Nous reprendrons cette étude en détails une fois gonner des généralités sur le groupe de Poincaré des transformations spatio-temporelles lineaires.

Sous groupes de Diff($\mathcal{M}_d$)

Sous groupes de Diff($\mathcal{M}_d$)

Le groupe des transformations générales de coordonnées TCG est très riche en symétries.

Il contient plusieurs *sous groupes* dont :

Sous groupes de Diff($\mathcal{M}_d$)

Le groupe des transformations générales de coordonnées TCG est très riche en symétries.
Il contient plusieurs *sous groupes* dont :

(a) Le sous groupe des translations spatio-temprelles :
le *groupe Euclidien :* T_d

Sous groupes de Diff($\mathcal{M}_d$)

Le groupe des transformations générales de coordonnées TCG est très riche en symétries.
Il contient plusieurs *sous groupes* dont :

(a) Le sous groupe des translations spatio-temprelles :
le *groupe Euclidien :* T_d

(b) Le sous groupe des rotations spatio-temprelles :
le *groupe de Lorentz :* $SO(1,3)$; mais plus généralement $SO(p,q)$

Sous groupes de Diff($\mathcal{M}_d$)

Le groupe des transformations générales de coordonnées TCG est très riche en symétries.
Il contient plusieurs *sous groupes* dont :

(a) Le sous groupe des translations spatio-temprelles :
le *groupe Euclidien :* T_d

(b) Le sous groupe des rotations spatio-temprelles :
le *groupe de Lorentz :* $SO(1,3)$; mais plus généralement $SO(p,q)$

(c) Le sous groupe de la *relativité restreinte* : le groupe de Poincaré :
$\mathcal{P}_4 = SO(1,3) \ltimes T_d$

Voici quelques détails :

Voici quelques détails :

Groupe de Poincaré : $\mathcal{P}_d$

Le groupe $\mathcal{P}_4$ concerne les transformations dans l'espace de Minkowski avec la metrique

$$\eta_{\mu\nu} = diag\,(1, -1, -1, -1)$$

C'est un produit *semi-direct* des translations et rotations spatiotemprelles

$$\mathcal{P}_d \simeq SO\,(1, d-1) \ltimes \mathcal{T}_d$$

Ce groupe admet des extensions $\mathcal{P}_d$ dans toutes les dimensions d d'espace temps.

Transformations finies :

Transformations finies :

La symétrie de Poincaré est un *groupe fini* constitué des transformations *linéaires* de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & & \Lambda_3^0 \\ & & \\ \Lambda_0^3 & & \Lambda_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} .$$

Transformations finies :
La symétrie de Poincaré est un *groupe fini* constitué des transformations *linéaires* de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & & & \Lambda^0_3 \\ & & & \\ & & & \\ \Lambda^3_0 & & & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} .$$

Sous forme tensorielle,

$$\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu , \\ x' &= \Lambda x + a \end{aligned}$$

et où les $6 + 4$ paramétres du groupe sont constants

$$\frac{\partial \Lambda^{\mu}_{\nu}}{\partial x^{\beta}} = 0, \qquad \frac{\partial a^{\mu}}{\partial x^{\beta}} = 0$$

et où les $6+4$ paramétres du groupe sont constants

$$\frac{\partial \Lambda_{\nu}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} = 0, \qquad \frac{\partial a^{\mu}}{\partial x^{\beta}} = 0$$

- Groupe de Lorentz : C'est un sous groupe du groupe de Poincaré $\mathcal{P}_d$;

  $$SO(1, d-1) \subset \mathcal{P}_d$$

  il correspond aux rotations dans l'espace de Minkowski ; càd à

  $$\Lambda_{\nu}^{\mu} \neq 0, \qquad a^{\mu} = 0$$

et où les $6+4$ paramétres du groupe sont constants

$$\frac{\partial \Lambda^{\mu}_{\nu}}{\partial x^{\beta}} = 0, \qquad \frac{\partial a^{\mu}}{\partial x^{\beta}} = 0$$

- Groupe de Lorentz : C'est un sous groupe du groupe de Poincaré $\mathcal{P}_d$;

  $$SO\,(1, d-1) \subset \mathcal{P}_d$$

  il correspond aux rotations dans l'espace de Minkowski ; càd à

  $$\Lambda^{\mu}_{\nu} \neq 0, \qquad a^{\mu} = 0$$

  Comme

  $$ds^2 = ds^{2\prime}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\mu} &= \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \\ &= \left(\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} \right) dx^{\mu} dx^{\nu} \end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\mu} &= \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \\ &= \left(\eta_{\alpha\beta} \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta}\right) dx^{\mu} dx^{\nu} \end{aligned}$$

ce qui mène a une conditions sur les matrices Λ_{μ}^{α} du groupe $SO(1, d-1)$

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \eta_{\alpha\beta} \Lambda_{\nu}^{\beta}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\mu} &= \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \\ &= \left(\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu}\right) dx^{\mu} dx^{\nu} \end{aligned}$$

ce qui mène a une conditions sur les matrices Λ^{α}_{μ} du groupe $SO(1, d-1)$

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}_{\nu}$$

Cette relation est l'équivalent de la relation d'orthogonalité

$$RR^T = I$$

des groupes de rotations dans les espaces euclidien

- Groupe des translations linéaires $\mathcal{T}_d$:

- Groupe des translations linéaires $\mathcal{T}_d$:
  Il correspond au cas
  $$\Lambda^{\mu}_{\nu} = 0, \qquad a^{\mu} \neq 0.$$
  Contrairement à $SO(1, d-1)$, $\mathcal{T}_d$ est un sous groupe abelien

- Groupe des translations linéaires $\mathcal{T}_d$:
  Il correspond au cas

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = 0, \qquad a^{\mu} \neq 0.$$

Contrairement à $SO(1, d-1)$, $\mathcal{T}_d$ est un sous groupe abelien

Le groupe de Pioncaré a 10 générateurs :

$$\begin{array}{cc} P_{\mu} & \text{(4 translations)} \\ M_{[\mu\nu]} & \text{(6 rotations de Lorentz)} \end{array}$$

- Groupe des translations linéaires $\mathcal{T}_d$:
  Il correspond au cas

$$\Lambda^\mu_\nu = 0, \qquad a^\mu \neq 0.$$

Contrairement à $SO(1, d-1)$, $\mathcal{T}_d$ est un sous groupe abelien

Le groupe de Pioncaré a 10 générateurs :

$$\begin{array}{cc} P_\mu & \text{(4 translations)} \\ M_{[\mu\nu]} & \text{(6 rotations de Lorentz)} \end{array}$$

Une réalisation possible ; mais très utile, de ces générateurs est

$$\begin{cases} P_\mu = i\partial_\mu \\ M_{\mu\nu} = (x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu) \end{cases}$$

Transformations infinitésimales

Transformations infinitésimales Ces transformations correspondent à prendre

$$\Lambda = I + \omega, \text{ et } a \quad \text{petits,}$$

Transformations infinitésimales Ces transformations correspondent à prendre

$$\Lambda = I + \omega, \text{ et } a \quad \text{petits,}$$

soit encore

$$\begin{aligned}\Lambda^{\mu}_{\nu} &= \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu} + \mathcal{O}\left(\omega^2\right) \\ &= \delta^{\mu}_{\nu} + \eta^{\mu\gamma}\omega_{\nu\gamma} + \mathcal{O}\left(\omega^2\right)\end{aligned}$$

Transformations infinitésimales Ces transformations correspondent à prendre

$$\Lambda = I + \omega, \text{ et } a \quad \text{petits,}$$

soit encore

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu}_{\nu} &= \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu} + \mathcal{O}\left(\omega^2\right) \\ &= \delta^{\mu}_{\nu} + \eta^{\mu\gamma}\omega_{\nu\gamma} + \mathcal{O}\left(\omega^2\right) \end{aligned}$$

Puisque

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu}\eta_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}_{\nu} \qquad \Leftrightarrow \qquad \eta = \Lambda\eta\Lambda$$

Transformations infinitésimales Ces transformations correspondent à prendre

$$\Lambda = I + \omega, \text{ et } a \quad \text{petits,}$$

soit encore

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu_\nu &= \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu + \mathcal{O}\left(\omega^2\right) \\ &= \delta^\mu_\nu + \eta^{\mu\gamma}\omega_{\nu\gamma} + \mathcal{O}\left(\omega^2\right) \end{aligned}$$

Puisque

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha_\mu \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu \qquad \Leftrightarrow \qquad \eta = \Lambda\eta\Lambda$$

nous avons

$$\begin{aligned} \eta &= (I + \omega)\,\eta\,(I + \omega) \\ &= \eta + \omega\eta + \eta\omega + \mathcal{O}\left(\omega^2\right) \end{aligned}$$

Plus explicitement

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu} &= \left(\delta_\mu^\alpha + \omega_\mu^\alpha\right)\eta_{\alpha\beta}\left(\delta_\nu^\beta + \omega_\nu^\beta\right)\\ &= \delta_\mu^\alpha\eta_{\alpha\beta}\delta_\nu^\beta + \delta_\mu^\alpha\eta_{\alpha\beta}\omega_\nu^\beta + \eta_{\alpha\beta}\omega_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta + \mathcal{O}\,(2)\end{aligned}$$

Plus explicitement

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu} &= \left(\delta_\mu^\alpha + \omega_\mu^\alpha\right)\eta_{\alpha\beta}\left(\delta_\nu^\beta + \omega_\nu^\beta\right) \\ &= \delta_\mu^\alpha\eta_{\alpha\beta}\delta_\nu^\beta + \delta_\mu^\alpha\eta_{\alpha\beta}\omega_\nu^\beta + \eta_{\alpha\beta}\omega_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta + \mathcal{O}\left(2\right)\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \left(\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu}\right) + \mathcal{O}\left(2\right) \\ &= \eta_{\mu\nu} + 0 + \mathcal{O}\left(2\right).\end{aligned}$$

Plus explicitement

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu} &= \left(\delta_\mu^\alpha + \omega_\mu^\alpha\right)\eta_{\alpha\beta}\left(\delta_\nu^\beta + \omega_\nu^\beta\right) \\ &= \delta_\mu^\alpha\eta_{\alpha\beta}\delta_\nu^\beta + \delta_\mu^\alpha\eta_{\alpha\beta}\omega_\nu^\beta + \eta_{\alpha\beta}\omega_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta + \mathcal{O}\left(2\right)\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \left(\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu}\right) + \mathcal{O}\left(2\right) \\ &= \eta_{\mu\nu} + 0 + \mathcal{O}\left(2\right).\end{aligned}$$

ce qui veut dire que

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \qquad \text{antisymétrique}$$

Nous avons également

$$\mathcal{T} : f(x) \rightarrow \begin{cases} f(x+a) \\ U^{+} f(x)\, U \\ e^{-iaP} f(x)\, e^{iaP}, \qquad aP = a^{\mu} P_{\mu} \end{cases}$$

Nous avons également

$$\mathcal{T} : f(x) \rightarrow \begin{cases} f(x+a) \\ U^{+} f(x) U \\ e^{-iaP} f(x) e^{iaP}, \qquad aP = a^{\mu} P_{\mu} \end{cases}$$

ou encore

$$\mathcal{T} : f(x) \rightarrow \begin{cases} f(x) + a^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} f(x) + \mathcal{O}\left(a^2\right) \\ = f(x) + a^{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, f(x)\right] + \mathcal{O}\left(a^2\right) \\ f(x) - ia^{\mu} \left[P_{\mu}, f(x)\right] + \mathcal{O}\left(a^2\right) \end{cases}$$

ce qui donne

$$P_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

ce qui donne

$$P_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

De même, nous avons, posons

$$\varepsilon^\mu = \omega^{[\mu\nu]} x_\nu$$

ce qui donne

$$P_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

De même, nous avons, posons

$$\varepsilon^\mu = \omega^{[\mu\nu]} x_\nu$$

nous avons pour les rotations :

$$SO\left(1, d-1\right) : f\left(x\right) \to \left\{ \begin{array}{c} f\left(x^\mu + \varepsilon^\mu\right) \\ e^{-i\omega M} f\left(x\right) e^{-i\omega M}, \qquad \omega M = \omega^{[\mu\nu]} M_{[\mu\nu]} \end{array} \right.$$

soit encore en explicitons :

$$f\left(x^{\mu}+\varepsilon^{\mu}\right)=\left\{\begin{array}{c} f\left(x\right)+\varepsilon^{\mu}\partial_{\mu}f\left(x\right)+\mathcal{O}\left(\omega^{2}\right) \\ f\left(x\right)-i\omega^{[\mu\nu]}\left[M_{[\mu\nu]},f\left(x\right)\right]+\mathcal{O}\left(\omega^{2}\right) \end{array}\right.$$

soit encore en explicitons :

$$f\left(x^{\mu}+\varepsilon^{\mu}\right)=\begin{cases} f\left(x\right)+\varepsilon^{\mu}\partial_{\mu}f\left(x\right)+\mathcal{O}\left(\omega^{2}\right) \\ f\left(x\right)-i\omega^{[\mu\nu]}\left[M_{[\mu\nu]},f\left(x\right)\right]+\mathcal{O}\left(\omega^{2}\right) \end{cases}$$

ce qui mène à la réalisation

$$M^{\mu\nu}=i\left(x^{\nu}\partial^{\mu}-x^{\mu}\partial^{\nu}\right)$$

soit encore en explicitons :

$$f\left(x^\mu + \varepsilon^\mu\right) = \left\{ \begin{array}{c} f\left(x\right) + \varepsilon^\mu \partial_\mu f\left(x\right) + \mathcal{O}\left(\omega^2\right) \\ f\left(x\right) - i\omega^{[\mu\nu]}\left[M_{[\mu\nu]}, f\left(x\right)\right] + \mathcal{O}\left(\omega^2\right) \end{array} \right.$$

ce qui mène à la réalisation

$$M^{\mu\nu} = i\left(x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu\right)$$

Exercice

Calculer les commutateurs

$$\begin{aligned} [P, P] &= 0! \\ [M, P] &= P! \\ [M, M] &= M! \end{aligned}$$

Théories quantiques des champs conformes (Suite)

Rachid AHL LAAMARA
Master: Physiques Mathématiques

Laboratoire de la physique des Hautes Energies, Modélisation et Simulation

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Contents

Contents

Contents

Contents

Contents

On distingue :

On distingue :

(i) Les symétries *conforme globales* opérant dans des *espaces plats*.

On distingue :

(i) Les symétries *conforme globales* opérant dans des *espaces plats*.

(ii) Les symétries *conforme locales* agissant dans des *espaces courbes*

On distingue :

(i) Les symétries *conforme globales* opérant dans des *espaces plats*.

(ii) Les symétries *conforme locales* agissant dans des *espaces courbes*

Ces symétries forment respectivement

- un groupe de dimension finis pour le cas globale et d>2
- un groupe de dimension infini pour le cas locale.

On distingue :

(i) Les symétries *conforme globales* opérant dans des *espaces plats*.

(ii) Les symétries *conforme locales* agissant dans des *espaces courbes*

Ces symétries forment respectivement

- un groupe de dimension finis pour le cas globale et d>2
- un groupe de dimension infini pour le cas locale.

Groupe conforme global

On distingue :

(i) Les symétries *conforme globales* opérant dans des *espaces plats*.

(ii) Les symétries *conforme locales* agissant dans des *espaces courbes*

Ces symétries forment respectivement

- un groupe de dimension finis pour le cas globale et d>2
- un groupe de dimension infini pour le cas locale.

Groupe conforme global

◇Définition

C'est le groupe des transformations des coordonnées de l'espace temps,

$$x \to x' = \mathrm{f}(x)$$

On distingue :

(i) Les symétries *conforme globales* opérant dans des *espaces plats*.

(ii) Les symétries *conforme locales* agissant dans des *espaces courbes*

Ces symétries forment respectivement

- un groupe de dimension finis pour le cas globale et d>2
- un groupe de dimension infini pour le cas locale.

Groupe conforme global

◇Définition

C'est le groupe des transformations des coordonnées de l'espace temps,

$$x \to x' = \mathrm{f}\,(x)$$

qui transforme les éléments de longueur par un facteur d'échelle $\cdot$ comme le montre la relation suivante

$$ds^2 \to ds^{2\prime} = \cdot ds^2.$$

En remplacant les éléments de longueur par leurs expresions,

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ ds^{2\prime} &= g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta \end{aligned}$$

En remplacant les éléments de longueur par leurs expresions,

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ ds^{2\prime} &= g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta \end{aligned}$$

il s'ensuit la condition suivante

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^\beta}$$

Nous allons anlyser cette contraintes pour le cas de transformations infinitésimales

En remplacant les éléments de longueur par leurs expresions,

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ ds^{2\prime} &= g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta \end{aligned}$$

il s'ensuit la condition suivante

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^\beta}$$

Nous allons anlyser cette contraintes pour le cas de transformations infinitésimales

Transformations infinitesimales

On distinguera deux cas : (**i**) cas $d > 2$ et (**ii**) cas $d = 2$

$\diamondsuit$ **Cas** $d > 2$

Sous des transformations infinitésimales des coordonnées

$$x^{\mu\prime} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu} + \mathcal{O}(2),$$

où $\varepsilon^{\mu} = \varepsilon^{\mu}(x)$,

$\diamondsuit$ **Cas** $d > 2$

Sous des transformations infinitésimales des coordonnées

$$x^{\mu\prime} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu} + \mathcal{O}(2),$$

où $\varepsilon^{\mu} = \varepsilon^{\mu}(x)$, nous avons :

$$g_{\alpha\beta} \sim \eta_{\alpha\beta}, \qquad g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu}.$$

◊ **Cas** $d > 2$

Sous des transformations infinitésimales des coordonnées

$$x^{\mu\prime} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu} + \mathcal{O}(2),$$

où $\varepsilon^{\mu} = \varepsilon^{\mu}(x)$, nous avons :

$$g_{\alpha\beta} \sim \eta_{\alpha\beta}, \qquad g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu}.$$

La condition générale,

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^{\beta}},$$

◊ **Cas** $d > 2$

Sous des transformations infinitésimales des coordonnées

$$x^{\mu\prime} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu} + \mathcal{O}(2),$$

où $\varepsilon^{\mu} = \varepsilon^{\mu}(x)$, nous avons :

$$g_{\alpha\beta} \sim \eta_{\alpha\beta}, \qquad g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu}.$$

La condition générale,

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^{\beta}},$$

devient alors

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial(x^{\mu} + \varepsilon^{\mu})}{\partial x^{\alpha}} \eta_{\mu\nu} \frac{\partial(x^{\nu} + \varepsilon^{\nu})}{\partial x^{\beta}} + \mathcal{O}(2)$$

Formellement, en ignorant les indices pour un moment, nous avons

$$\eta = \frac{\partial\left(x+\varepsilon\right)}{\partial x}\eta\frac{\partial\left(x+\varepsilon\right)}{\partial x},$$

Formellement, en ignorant les indices pour un moment, nous avons

$$\eta = \frac{\partial (x+\varepsilon)}{\partial x} \eta \frac{\partial (x+\varepsilon)}{\partial x},$$

soit aussi

$$\eta = [1 + \partial\varepsilon]\,\eta\,[1 + \partial\varepsilon]\,,$$

Formellement, en ignorant les indices pour un moment, nous avons

$$\eta = \frac{\partial\left(x+\varepsilon\right)}{\partial x}\eta\frac{\partial\left(x+\varepsilon\right)}{\partial x},$$

soit aussi

$$\eta = \left[1+\partial\varepsilon\right]\eta\left[1+\partial\varepsilon\right],$$

ce qui donne

$$\eta = \eta + \partial\varepsilon\eta + \eta\partial\varepsilon + O\left(2\right)$$

Formellement, en ignorant les indices pour un moment, nous avons

$$\eta = \frac{\partial\left(x+\varepsilon\right)}{\partial x}\eta\frac{\partial\left(x+\varepsilon\right)}{\partial x},$$

soit aussi

$$\eta = \left[1+\partial\varepsilon\right]\eta\left[1+\partial\varepsilon\right],$$

ce qui donne

$$\eta = \eta + \partial\varepsilon\eta + \eta\partial\varepsilon + O\left(2\right)$$

Avec les indices

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu\varepsilon^\beta\eta_{\beta\nu} + \eta_{\mu\alpha}\partial_\nu\varepsilon^\alpha + O\left(2\right)\\ &= \eta_{\mu\nu} + \left(\partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu\right) + O\left(2\right)\end{aligned}$$

Le résultat est

$$ds'^2 = ds^2 + (\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu)\, dx^\mu dx^\nu + O(2)$$

Le résultat est

$$ds'^2 = ds^2 + (\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu)\, dx^\mu dx^\nu + O(2)$$

Voici quelques détails :

$$\begin{aligned} ds'^2 &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= \eta_{\mu\nu} \left(\delta^\mu_\alpha + \frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x^\alpha} \right) \left(\delta^\nu_\beta + \frac{\partial \varepsilon^\nu}{\partial x^\beta} \right) dx^\alpha dx^\beta \\ &= ds^2 + \eta_{\mu\nu} \left(\delta^\mu_\alpha \frac{\partial \varepsilon^\nu}{\partial x^\beta} + \delta^\nu_\beta \frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x^\alpha} \right) dx^\alpha dx^\beta \\ &= ds^2 + \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \varepsilon^\nu}{\partial x^\mu} \right) dx^\mu dx^\nu \\ &= ds^2 + (\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu)\, dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

Pour que

$$ds'^2 = \Omega ds^2,$$

$$ds'^2 = ds^2 + \left[(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu)\right] dx^\mu dx^\nu$$

Pour que

$$ds'^2 = \Omega ds^2,$$

$$ds'^2 = ds^2 + \left[(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu)\right] dx^\mu dx^\nu$$

il faut que le second term ait la forme

$$(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \varpi \eta_{\mu\nu}$$

Pour que

$$ds'^2 = \Omega ds^2,$$

$$ds'^2 = ds^2 + \left[\left(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu \right) \right] dx^\mu dx^\nu$$

il faut que le second term ait la forme

$$\left(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu \right) = \varpi \eta_{\mu\nu}$$

Dans ce cas

$$ds'^2 = (1 + \varpi)\, ds^2, \qquad \Omega = (1 + \varpi)$$

Détermination du facteur ϖ :
Le facteur ϖ est obtenu en prenant la trace de

$$(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \varpi \eta_{\mu\nu}$$

Détermination du facteur ϖ :
Le facteur ϖ est obtenu en prenant la trace de

$$(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \varpi \eta_{\mu\nu}$$

c'est à dire

$$\eta^{\nu\mu} (\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \varpi \eta^{\nu\mu} \eta_{\mu\nu}$$

Détermination du facteur ϖ :
Le facteur ϖ est obtenu en prenant la trace de

$$(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \varpi \eta_{\mu\nu}$$

c'est à dire

$$\eta^{\nu\mu} (\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \varpi \eta^{\nu\mu} \eta_{\mu\nu}$$

ce qui donne

$$2\partial_\mu \varepsilon^\mu = 2\partial_\alpha \varepsilon^\alpha = \varpi d, \qquad \partial_\alpha \varepsilon^\alpha \equiv \partial\varepsilon$$

Détermination du facteur ϖ :
Le facteur ϖ est obtenu en prenant la trace de

$$(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \varpi \eta_{\mu\nu}$$

c'est à dire

$$\eta^{\nu\mu} (\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \varpi \eta^{\nu\mu} \eta_{\mu\nu}$$

ce qui donne

$$2\partial_\mu \varepsilon^\mu = 2\partial_\alpha \varepsilon^\alpha = \varpi d, \qquad \partial_\alpha \varepsilon^\alpha \equiv \partial \varepsilon$$

Par suite, nous avons

$$(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \frac{2}{d} \eta_{\mu\nu} (\partial \varepsilon)$$

Agissant par ∂^{ν}, nous obtenons

$$\partial^{\nu}\left[\left(\partial_{\nu}\varepsilon_{\mu}+\partial_{\mu}\varepsilon_{\nu}\right)-\frac{2}{d}\eta_{\mu\nu}\left(\partial\varepsilon\right)\right]=0$$

Agissant par ∂^ν, nous obtenons

$$\partial^\nu \left[(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) - \frac{2}{d} \eta_{\mu\nu} (\partial\varepsilon) \right] = 0$$

c'est à dire

$$\left[\Box \varepsilon_\mu + \partial_\mu (\partial\varepsilon) - \frac{2}{d} \partial_\mu (\partial\varepsilon) \right] = 0, \qquad \Box = \partial^\nu \partial_\nu \text{ : Laplacien !,}$$

Agissant par ∂^ν, nous obtenons

$$\partial^\nu \left[(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) - \frac{2}{d} \eta_{\mu\nu} (\partial\varepsilon) \right] = 0$$

c'est à dire

$$\left[\Box \varepsilon_\mu + \partial_\mu (\partial\varepsilon) - \frac{2}{d} \partial_\mu (\partial\varepsilon) \right] = 0, \qquad \Box = \partial^\nu \partial_\nu \text{ : Laplacien !,}$$

Puis agisson par ∂^μ, nous pouvons la ramener à la relation suivante,

$$[\eta_{\alpha\beta} \Box + (d-2)\, \partial_\alpha \partial_\beta] (\partial\varepsilon) = 0$$

Solutions pour $d > 2$

Solutions pour $d > 2$
Cette equation différentielle du *3ème ordre*, par conséquent la solution doit être au maximum quadratique en x. ;

$$\varepsilon(x) \sim x^2 + x + cte$$

Solutions pour $d > 2$
Cette equation différentielle du *3ème ordre*, par conséquent la solution doit être au maximum quadratique en x.;

$$\varepsilon(x) \sim x^2 + x + cte$$

Plus précisément, nous avons les solutions suivantes :

$\varepsilon^\mu = a^\mu$, une *constante* : ceci correspond aux *translations* globales

$$x^{\mu\prime} = x^\mu + \varepsilon^\mu : \qquad d \text{ parametres}$$

Nous avons un total de d parametres

$$\varepsilon^0,\ \varepsilon^1,\ \ldots,\ \varepsilon^{d-1}$$

$\diamondsuit$ ε *est lineaire en x :*

$\diamondsuit$ ε *est lineaire en x* :

on distingue deux cas

$\diamondsuit$ ε *est lineaire en x* :

on distingue deux cas

- Rotations spatio-temporelles

$$\varepsilon^{\mu} = \omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu};$$

ce sont les rotations de Lorrentz

$$x^{\mu\prime} = x^{\mu} + \omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = x^{\mu} + \eta^{\mu\sigma} \omega_{\sigma\nu} x^{\nu}$$

comme $\omega_{\mu\nu}$ est antisymétrique, nous avons un totale de

$$\frac{d\,(d-1)}{2} \text{ parametres}$$

◇ ε *est lineaire en x* :
on distingue deux cas

- Rotations spatio-temporelles

$$\varepsilon^{\mu} = \omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu};$$

ce sont les rotations de Lorrentz

$$x^{\mu\prime} = x^{\mu} + \omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = x^{\mu} + \eta^{\mu\sigma}\omega_{\sigma\nu} x^{\nu}$$

comme $\omega_{\mu\nu}$ est antisymétrique, nous avons un totale de

$$\frac{d\,(d-1)}{2} \text{ parametres}$$

- $\varepsilon^{\mu} = \lambda x^{\mu}$, ce sont les dilatations

$$x^{\mu\prime} = x^{\mu} + \lambda x^{\mu} : \qquad 1 \text{ parametres}$$

$\diamondsuit$ ε^μ *quadratique en x* :

$\diamondsuit$ ε^μ *quadratique en x* :
ce sont les *transformations conformes speciales*

$$\varepsilon^\mu = b^\mu x^2 - 2x^\mu b.x : \qquad d \text{ parametres}$$

et

$$x^{\mu\prime} \simeq x^\mu + b^\mu x^2 - 2x^\mu b.x$$

$\diamondsuit$ ε^{μ} *quadratique en x* :
ce sont les *transformations conformes speciales*

$$\varepsilon^{\mu} = b^{\mu} x^{2} - 2x^{\mu} b.x : \qquad d \text{ parametres}$$

et

$$x^{\mu\prime} \simeq x^{\mu} + b^{\mu} x^{2} - 2x^{\mu} b.x$$

Les parametres b^{μ} sont ceux qui interviennent dans les *inversions*

$$\frac{x^{\mu\prime}}{x^{2\prime}} = \frac{x^{\mu}}{x^{2}} + b^{\mu}$$

$\diamondsuit$ ε^μ *quadratique en x* :
ce sont les *transformations conformes speciales*

$$\varepsilon^\mu = b^\mu x^2 - 2x^\mu b.x : \qquad d \text{ parametres}$$

et

$$x^{\mu\prime} \simeq x^\mu + b^\mu x^2 - 2x^\mu b.x$$

Les parametres b^μ sont ceux qui interviennent dans les *inversions*

$$\frac{x^{\mu\prime}}{x^{2\prime}} = \frac{x^\mu}{x^2} + b^\mu$$

- nombre total de parametres

$$\frac{2d + d\,(d-1) + 2 + 2d}{2} = \frac{(d+2)\,(d+1)}{2}$$

qui est aussi la dimension SO$(d+2)$

$\diamondsuit$ Exemple $d = 4$

$\diamondsuit$ Exemple $d = 4$

L'algèbre de Lie du groupe conforme à 4d, engendré par les 15 générateurs. C'est une algèbre de dimension finie.

$\diamondsuit$ Exemple $d = 4$

L'algèbre de Lie du groupe conforme à 4d, engendré par les 15 générateurs. C'est une algèbre de dimension finie.
Les relations de commutation suivantes :

$\diamondsuit$ Exemple $d = 4$

L'algèbre de Lie du groupe conforme à 4d, engendré par les 15 générateurs. C'est une algèbre de dimension finie.
Les relations de commutation suivantes :

$$
\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0 \\
i\left[M^{\alpha\beta}, P^\gamma\right] &= g^{\alpha\gamma}P^\beta - g^{\beta\gamma}P^\alpha \\
i\left[M^{\alpha\beta}, M^{\mu\nu}\right] &= g^{\alpha\mu}M^{\beta\nu} - g^{\beta\mu}M^{\alpha\nu} + g^{\alpha\nu}M^{\beta\mu} - g^{\beta\nu}M^{\alpha\mu} \\
i\,[D, P^\alpha] &= P^\alpha \\
i\,[D, K^\alpha] &= -K^\alpha \\
i\left[M^{\alpha\beta}, K^\gamma\right] &= g^{\alpha\gamma}K^\beta - g^{\beta\gamma}K^\alpha \\
i\left[P^\alpha, K^\beta\right] &= -2g^{\alpha\beta}D + 2M^{\alpha\beta} \\
i\,[D, D] &= i\left[M^{\alpha\beta}, D\right] = i\left[K^\alpha, K^\beta\right] = 0
\end{aligned}
$$

- Alors que les trois premières relations de commutation

$$
\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0 \\
i\left[M^{\alpha\beta}, P^\gamma\right] &= g^{\alpha\gamma}P^\beta - g^{\beta\gamma}P^\alpha \\
i\left[M^{\alpha\beta}, M^{\mu\nu}\right] &= g^{\alpha\mu}M^{\beta\nu} - g^{\beta\mu}M^{\alpha\nu} + g^{\alpha\nu}M^{\beta\mu} - g^{\beta\nu}M^{\alpha\mu}
\end{aligned}
$$

définissent l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré.

Contents

Dans cette sections nous considérons le cas particulier $d = 2$: Nous montrons :

Dans cette sections nous considérons le cas particulier $d = 2$: Nous montrons :

1. La condition d'invariance conforme qui s'écrit dans ce cas comme

Dans cette sections nous considérons le cas particulier $d = 2$: Nous montrons :

1. La condition d'invariance conforme qui s'écrit dans ce cas comme

$$\left(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu\right) = \frac{2}{d}\delta_{\mu\nu}\left(\partial\varepsilon\right), \qquad g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad d = 2 \tag{2.1}$$

Dans cette sections nous considérons le cas particulier $d = 2$: Nous montrons :

1. La condition d'invariance conforme qui s'écrit dans ce cas comme

$$(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \frac{2}{d} \delta_{\mu\nu} (\partial \varepsilon) , \qquad g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad d = 2 \tag{2.1}$$

   est équivalente aux conditions de Cauchy-Riemann des fonctions holomorphes. c'est à dire

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = 0!, \qquad \epsilon = \varepsilon^1 + i\varepsilon^2$$

Dans cette sections nous considérons le cas particulier $d = 2$: Nous montrons :

1. La condition d'invariance conforme qui s'écrit dans ce cas comme

$$(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \frac{2}{d}\delta_{\mu\nu}(\partial\varepsilon), \qquad g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad d = 2 \tag{2.1}$$

   est équivalente aux conditions de Cauchy-Riemann des fonctions holomorphes. c'est à dire

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial z} = 0!, \qquad \epsilon = \varepsilon^1 + i\varepsilon^2$$

2. Le groupe conforme à $d = 2$ a une infinité de paramatres.

Plan Euclidien $\mathbb{R}^2$

Plan Euclidien $\mathbb{R}^2$

Pour commencer rappelons que le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ peut être paramétriser par :

Plan Euclidien $\mathbb{R}^2$

Pour commencer rappelons que le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ peut être paramétriser par :

(i) des coordonnées réelles (x^1, x^2) que nous noterons dans la suite par (x, y) ;

$$x^1 = x, \qquad x^2 = y$$

Plan Euclidien $\mathbb{R}^2$

Pour commencer rappelons que le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ peut être paramétriser par :

(i) des coordonnées réelles (x^1, x^2) que nous noterons dans la suite par (x, y) ;

$$x^1 = x, \qquad x^2 = y$$

(ii) des coordonnées complexes

$$z = x + iy, \qquad \bar{z} = x - iy$$

Plan Euclidien $\mathbb{R}^2$

Pour commencer rappelons que le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ peut être paramétriser par :

(i) des coordonnées réelles (x^1, x^2) que nous noterons dans la suite par (x, y) ;

$$x^1 = x, \qquad x^2 = y$$

(ii) des coordonnées complexes

$$z = x + iy, \qquad \bar{z} = x - iy$$

De même la métrique $g_{\mu\nu}$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, espace plat de courbure nulle, se réduit à

Plan Euclidien $\mathbb{R}^2$

Pour commencer rappelons que le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ peut être paramétriser par :

(i) des coordonnées réelles (x^1, x^2) que nous noterons dans la suite par (x, y) ;

$$x^1 = x, \qquad x^2 = y$$

(ii) des coordonnées complexes

$$z = x + iy, \qquad \bar{z} = x - iy$$

De même la métrique $g_{\mu\nu}$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, espace plat de courbure nulle, se réduit à

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

et l'élément de longueur ds^2 dans $\mathbb{R}^2$ devient alors :

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx, dy) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= (dx)^2 + (dy)^2 = dx^2 + dy^2 \end{aligned}$$

et l'élément de longueur ds^2 dans $\mathbb{R}^2$ devient alors :

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx, dy)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= (dx)^2 + (dy)^2 = dx^2 + dy^2 \end{aligned}$$

En coordonnées complexe, l'élement ds^2 prend une forme simple puisque,

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 \\ &= (dx + idy)(dx - idy) \end{aligned}$$

et l'élément de longueur ds^2 dans $\mathbb{R}^2$ devient alors :

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx, dy) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= (dx)^2 + (dy)^2 = dx^2 + dy^2 \end{aligned}$$

En coordonnées complexe, l'élement ds^2 prend une forme simple puisque,

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 \\ &= (dx + idy)\,(dx - idy) \end{aligned}$$

donc

$$ds^2 = dzd\bar{z}$$

qui peut aussi écrit comme

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dz, d\bar{z}) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dz \\ d\bar{z} \end{pmatrix} \\ &= (dz, d\bar{z}) \begin{pmatrix} a_1 dz + a_2 d\bar{z} \\ a_3 dz + a_4 d\bar{z} \end{pmatrix} \\ &= a_1 (dz)^2 + a_2 dz d\bar{z} + a_3 dz d\bar{z} + a_4 (d\bar{z})^2 \end{aligned}$$

qui peut aussi écrit comme

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= (dz, d\bar{z}) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dz \\ d\bar{z} \end{pmatrix} \\
&= (dz, d\bar{z}) \begin{pmatrix} a_1 dz + a_2 d\bar{z} \\ a_3 dz + a_4 d\bar{z} \end{pmatrix} \\
&= a_1 (dz)^2 + a_2 dz d\bar{z} + a_3 dz d\bar{z} + a_4 (d\bar{z})^2
\end{aligned}
$$

en comparant avec

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dz^\mu d\bar{z}^\nu ?$$

qui peut aussi écrit comme

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= (dz, d\bar{z}) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dz \\ d\bar{z} \end{pmatrix} \\
&= (dz, d\bar{z}) \begin{pmatrix} a_1 dz + a_2 d\bar{z} \\ a_3 dz + a_4 d\bar{z} \end{pmatrix} \\
&= a_1 (dz)^2 + a_2 dz d\bar{z} + a_3 dz d\bar{z} + a_4 (d\bar{z})^2
\end{aligned}
$$

en comparant avec

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dz^{\mu} d\bar{z}^{\nu} ?$$

on obtient la métrique en coordonnée de $\mathbb{R}^2$ complexe

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{zz} & g_{z\bar{z}} \\ g_{\bar{z}z} & g_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformations conformes infinitésimales

Transformations conformes infinitésimales

D'abord nous rappelons la condition d'invariance conforme pour le cas générale.
Puis nous étudions sa solution pour le cas particulier $d = 2$.

Transformations conformes infinitésimales

D'abord nous rappelons la condition d'invariance conforme pour le cas générale.
Puis nous étudions sa solution pour le cas particulier $d = 2$. $\diamondsuit$ ***Cas d*** $=$ ***p+q***
Pour une transformation générale des coordonnées dans l'espace $\mathbb{R}^{(p,q)}$ s'écrit

$$x^{\mu} \qquad \rightarrow \qquad x'^{\mu} = \mathrm{f}^{\mu}\left(x\right)$$

où $\mathrm{f}^{\mu}\left(x\right)$ est une fonction locale *arbitraire*.

Transformations conformes infinitésimales

D'abord nous rappelons la condition d'invariance conforme pour le cas générale.
Puis nous étudions sa solution pour le cas particulier $d = 2$. $\diamondsuit$ ***Cas d*** $=$ ***p+q***
Pour une transformation générale des coordonnées dans l'espace $\mathbb{R}^{(p,q)}$ s'écrit

$$x^{\mu} \qquad \rightarrow \qquad x'^{\mu} = \mathrm{f}^{\mu}(x)$$

où $\mathrm{f}^{\mu}(x)$ est une fonction locale *arbitraire*.
Pour une transformation infinitésimale des coordonnées d'espace $\mathbb{R}^{(p,q)}$,

$$x'^{\mu} \simeq x^{\mu} + \epsilon^{\mu}, \qquad \epsilon^{\mu} = \epsilon^{\mu}(x),$$

où ϵ^{μ} est une fonction locale infinitésimale.

La condition pour que

$$ds'^2 = \Omega ds^2$$

La condition pour que

$$ds'^2 = \Omega ds^2$$

est donnée par

$$(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \frac{2}{d} g_{\mu\nu} (\partial \varepsilon)$$

La condition pour que

$$ds'^2 = \Omega ds^2$$

est donnée par

$$(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \frac{2}{d} g_{\mu\nu} (\partial \varepsilon)$$

Nous avons déjà étudier la solutions de cette equations pour D>2. Dans ce qui suit nous considérons le cas d=2.

La condition pour que

$$ds'^2 = \Omega ds^2$$

est donnée par

$$(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \frac{2}{d} g_{\mu\nu} (\partial \varepsilon)$$

Nous avons déjà étudier la solutions de cette equations pour D>2. Dans ce qui suit nous considérons le cas d=2.

♢ ***Cas d = 2***

A deux dimensions, la condition pour que les éléments de longueurs

$$ds^2 = \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx^2 + dy^2$$

et

$$ds^{2\prime} = \delta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = dx'^2 + dy'^2$$

verifie propriété d'échelle

$$ds^2 \to ds^{2\prime} = {}^{\cdot} ds^2 , \qquad {}^{\cdot} = {}^{\cdot}(x, y) \, .$$

verifie propriété d'échelle

$$ds^2 \to ds^{2\prime} = \cdot\, ds^2, \qquad \cdot = \cdot\,(x, y)\,.$$

est donnée par

$$(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \frac{2}{d} \delta_{\mu\nu} \, (\partial \varepsilon)$$

verifie propriété d'échelle

$$ds^2 \to ds^{2\prime} = {}^{\cdot} ds^2, \qquad {}^{\cdot} = {}^{\cdot}(x, y)\,.$$

est donnée par

$$(\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = \frac{2}{d} \delta_{\mu\nu} (\partial \varepsilon)$$

soit

$$\begin{cases} \partial_1 \varepsilon_1 + \partial_1 \varepsilon_1 = (\partial \varepsilon) \\ \partial_2 \varepsilon_2 + \partial_2 \varepsilon_2 = (\partial \varepsilon) \\ \partial_1 \varepsilon_2 + \partial_2 \varepsilon_1 = 0 \\ \partial_2 \varepsilon_1 + \partial_1 \varepsilon_2 = 0 \end{cases}$$

ou encore en remplacant

$$\begin{aligned} \partial\varepsilon &\equiv \partial_\alpha \varepsilon^\alpha = \partial_1 \varepsilon_1 + \partial_2 \varepsilon_2 \\ &= \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} \end{aligned}$$

ou encore en remplacant

$$\begin{aligned}\partial\varepsilon &\equiv \partial_\alpha \varepsilon^\alpha = \partial_1\varepsilon_1 + \partial_2\varepsilon_2 \\ &= \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x^1} + \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x} + \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial y}\end{aligned}$$

les relations suivantes

$$\left\{\begin{array}{c}\partial_1\varepsilon_1 + \partial_1\varepsilon_1 = \partial_1\varepsilon_1 + \partial_2\varepsilon_2 \\ \partial_2\varepsilon_2 + \partial_2\varepsilon_2 = \partial_1\varepsilon_1 + \partial_2\varepsilon_2 \\ \partial_1\varepsilon_2 + \partial_2\varepsilon_1 = 0 \\ \partial_2\varepsilon_1 + \partial_1\varepsilon_2 = 0\end{array}\right.$$

qui mènent à

$$\begin{cases} \partial_1 \varepsilon_1 = \partial_2 \varepsilon_2 \\ \partial_1 \varepsilon_2 = -\partial_2 \varepsilon_1 \end{cases} \quad \text{Equations de Cauchy Riemann} \tag{2.3}$$

qui mènent à

$$\begin{cases} \partial_1 \varepsilon_1 = \partial_2 \varepsilon_2 \\ \partial_1 \varepsilon_2 = -\partial_2 \varepsilon_1 \end{cases} \qquad \text{Equations de Cauchy Riemann} \tag{2.3}$$

avec bien entendu

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1 (x, y) , \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_2 (x, y) ,$$

qui mènent à

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_1\varepsilon_1 = \partial_2\varepsilon_2 \\ \partial_1\varepsilon_2 = -\partial_2\varepsilon_1 \end{array}\right. \qquad \text{Equations de Cauchy Riemann} \tag{2.3}$$

avec bien entendu

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1\,(x, y)\,, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_2\,(x, y)\,,$$

En posant

$$\epsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, \qquad \bar{\epsilon} = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2,$$

les eqs(2.3) peuvent étre aussi ecrites sous la forme

$$: \begin{cases} \partial_1 \varepsilon_1 = \partial_2 \varepsilon_2 \\ i\partial_1 \varepsilon_2 = -i\partial_2 \varepsilon_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$: \begin{cases} \partial_1 (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) = \partial_2 (\varepsilon_2 - i\varepsilon_1) = -i\partial_2 (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) \\ \partial_1 (\varepsilon_1 - i\varepsilon_2) = \partial_2 (\varepsilon_2 + i\varepsilon_1) = i\partial_2 (\varepsilon_1 - i\varepsilon_2) \end{cases}$$

les eqs(2.3) peuvent étre aussi ecrites sous la forme

$$: \begin{cases} \partial_1 \varepsilon_1 = \partial_2 \varepsilon_2 \\ i\partial_1 \varepsilon_2 = -i\partial_2 \varepsilon_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$: \begin{cases} \partial_1 (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) = \partial_2 (\varepsilon_2 - i\varepsilon_1) = -i\partial_2 (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) \\ \partial_1 (\varepsilon_1 - i\varepsilon_2) = \partial_2 (\varepsilon_2 + i\varepsilon_1) = i\partial_2 (\varepsilon_1 - i\varepsilon_2) \end{cases}$$

soit aussi

$$: \quad \begin{cases} \partial_1 \epsilon = -i\partial_2 \epsilon \\ \partial_1 \overline{\epsilon} = +i\partial_2 \overline{\epsilon} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\partial_1 + i\partial_2)\,\epsilon = 0 \\ (\partial_1 - i\partial_2)\,\overline{\epsilon} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\epsilon = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\overline{\epsilon} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \overline{\epsilon}}{\partial \overline{z}} = 0 \end{cases}$$

ou nous avons utilisé les coordonnées complexes ;

$$\begin{aligned}
z &= x + iy, \qquad \overline{z} = x - iy \\
\partial_z &\equiv \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial z}{\partial z} = 1, \qquad \frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0, \\
\overline{\partial_z} &\equiv \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0, \qquad \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1,
\end{aligned}$$

Résultats

♢ *Résultat 1 :* Transformations infinitésimales
Les transformations conformes infinitésimales de parametres

$$\epsilon = \epsilon\left(z, \overline{z}\right) \qquad \text{et} \qquad \overline{\epsilon} = \overline{\epsilon}\left(z, \overline{z}\right)$$

Résultats

$\diamondsuit$ *Résultat 1 :* Transformations infinitésimales
Les transformations conformes infinitésimales de parametres

$$\epsilon = \epsilon\left(z, \bar{z}\right) \qquad \text{et} \qquad \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}\left(z, \bar{z}\right)$$

sont données par la solution des equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} &= 0 \qquad \Leftrightarrow \epsilon &&= \epsilon\left(z\right) \\ \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{z}} &= 0 \qquad \Leftrightarrow \bar{\epsilon} &&= \bar{\epsilon}\left(\bar{z}\right) \end{aligned}$$

C'est à dire $\epsilon(z)$ une fonction holomorphe en z et $\overline{\epsilon}(\overline{z})$ une fonction antiholomorphe ; le complexe conjugé.

$$\epsilon(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$$

C'est à dire $\epsilon(z)$ une fonction holomorphe en z et $\bar{\epsilon}(\bar{z})$ une fonction antiholomorphe ; le complexe conjugé.

$$\epsilon(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$$

$\diamondsuit$ *Résultat 2 :* Transformations conformes finies
En coordonnées complexes $(z,\bar{z})$, les transformations conformes finies s'écrivent

$$\begin{aligned} z &\to z' = \mathrm{f}(z), \qquad \bar{z} \to \bar{z}' = \overline{\mathrm{f}(z)} \\ dz &\to dz' = \left(\frac{\partial \mathrm{f}(z)}{\partial z}\right) dz, \qquad d\bar{z} \to d\bar{z}' = \overline{\left(\frac{\partial \mathrm{f}(z)}{\partial z}\right)} d\bar{z} \end{aligned}$$

◊ *Résultat 3 :* Transformations conformes de ds^2 En coordonnées complexes, l'élément de longueur prend une forme très simple :

$$\mathrm{ds}^2 = dzd\bar{z}$$

♢ *Résultat 3 :* Transformations conformes de ds^2 En coordonnées complexes, l'élément de longueur prend une forme très simple :

$$\mathrm{ds}^2 = dz d\bar{z}$$

Sous une transformation conforme finies $z \to z' = \mathrm{f}(z)$, l'élément ds^2 devient

$$\mathrm{ds}^{2\prime} = dz' d\bar{z}'$$

$\diamondsuit$ *Résultat 3 :* Transformations conformes de ds^2 En coordonnées complexes, l'élément de longueur prend une forme très simple :

$$\mathrm{ds}^2 = dzd\bar{z}$$

Sous une transformation conforme finies $z \to z' = \mathrm{f}(z)$, l'élément ds^2 devient

$$\mathrm{ds}^{2\prime} = dz'd\bar{z}'$$

soit aussi

$$\mathrm{ds}^{2\prime} = \left|\frac{\partial \mathrm{f}(z)}{\partial z}\right|^2 dzd\bar{z}, \qquad \mathrm{ds}^{2\prime} = \left|\frac{\partial \mathrm{f}(z)}{\partial z}\right|^2 \mathrm{ds}^2$$

♢ *Résultat 3 :* Transformations conformes de ds^2 En coordonnées complexes, l'élément de longueur prend une forme très simple :

$$\mathrm{ds}^2 = dzd\bar{z}$$

Sous une transformation conforme finies $z \to z' = \mathrm{f}(z)$, l'élément ds^2 devient

$$\mathrm{ds}^{2\prime} = dz' d\bar{z}'$$

soit aussi

$$\mathrm{ds}^{2\prime} = \left| \frac{\partial \mathrm{f}(z)}{\partial z} \right|^2 dzd\bar{z}, \qquad \mathrm{ds}^{2\prime} = \left| \frac{\partial \mathrm{f}(z)}{\partial z} \right|^2 \mathrm{ds}^2$$

et donc

$$\Omega(z, \bar{z}) = \left| \frac{\partial \mathrm{f}(z)}{\partial z} \right|^2, \qquad \text{Jacobian !}$$

Contents

Etant donnée un espace de points ; pour fixer, les idées disons la ligne réelle $\mathbb{R}$ ou le plan réelle $\mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$ de coordonnées locales x et $z = x + iy$ respectivement, on distingue plusieurs objets mathématiques qui vivent sur ces espaces. Parmi ces objets nous citons :

Etant donnée un espace de points ; pour fixer, les idées disons la ligne réelle $\mathbb{R}$ ou le plan réelle $\mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$ de coordonnées locales x et $z = x + iy$ respectivement, on distingue plusieurs objets mathématiques qui vivent sur ces espaces. Parmi ces objets nous citons :

1. Les scalaires et Champs scalaires

Etant donnée un espace de points ; pour fixer, les idées disons la ligne réelle $\mathbb{R}$ ou le plan réelle $\mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$ de coordonnées locales x et $z = x + iy$ respectivement, on distingue plusieurs objets mathématiques qui vivent sur ces espaces. Parmi ces objets nous citons :

1. Les scalaires et Champs scalaires
2. Les vecteurs et Champs vectoriels

Etant donnée un espace de points ; pour fixer, les idées disons la ligne réelle $\mathbb{R}$ ou le plan réelle $\mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$ de coordonnées locales x et $z = x + iy$ respectivement, on distingue plusieurs objets mathématiques qui vivent sur ces espaces. Parmi ces objets nous citons :

1. Les scalaires et Champs scalaires
2. Les vecteurs et Champs vectoriels
3. Les tenseurs et Champs tensoriels

Scalaires, Vecteurs & Tenseurs

Scalaires, Vecteurs & Tenseurs

$\diamondsuit$ Les scalaires :

L'exemple simple de nombres scalaires est donnée par les nombres réelles et les nombres complexes.

Il existe plusieurs autres types de scalaires ; les plus courantrs sont données par :

Scalaires, Vecteurs & Tenseurs

♢ Les scalaires :

L'exemple simple de nombres scalaires est donnée par les nombres réelles et les nombres complexes.

Il existe plusieurs autres types de scalaires ; les plus courantrs sont données par :

- les fonctions (champ scalaires réels) a une variable réelle

$$x \in \mathbb{R} \qquad \to \qquad f(x) \in \mathbb{R}$$

tel que

$$f(x) = \log x, \qquad f(x) = \exp x$$

- les fonctions a une variable complexe,

$$z \in \mathbb{C} \qquad \to \qquad \phi(z) \in \mathbb{C}$$

- les fonctions a une variable complexe,

$$z \in \mathbb{C} \qquad \rightarrow \qquad \phi(z) \in \mathbb{C}$$

avec son développement de Laurrent usuel

$$\phi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^n$$

- les fonctions a une variable complexe,

$$z \in \mathbb{C} \qquad \to \qquad \phi(z) \in \mathbb{C}$$

avec son développement de Laurrent usuel

$$\phi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^n$$

$\diamondsuit$ Les vecteurs :

- les fonctions a une variable complexe,

$$z \in \mathbb{C} \qquad \to \qquad \phi(z) \in \mathbb{C}$$

avec son développement de Laurrent usuel

$$\phi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^n$$

$\diamondsuit$ Les vecteurs :
Ils peuvent être réelles ou complexes et souvent notés comme

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

ou comme

$$\overrightarrow{W} = (V_1, ..., V_n)$$

ou comme

$$\overrightarrow{W} = (V_1, ..., V_n)$$

Ces deux types de tableaux sont des matrices $n \times 1$ où $1 \times n$ et correspondent à deux objets mathématique differents

$$\overrightarrow{W} = {}^t\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}^T.$$

ou comme

$$\overrightarrow{W} = (V_1, ..., V_n)$$

Ces deux types de tableaux sont des matrices $n \times 1$ où $1 \times n$ et correspondent à deux objets mathématique differents

$$\overrightarrow{W} = {}^t\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}^T.$$

Une notation plus fine des vecteurs est donné par les écritures suivantes

$$V_i =, \qquad V^i$$

ou comme

$$\overrightarrow{W} = (V_1, ..., V_n)$$

Ces deux types de tableaux sont des matrices $n \times 1$ où $1 \times n$ et correspondent à deux objets mathématique differents

$$\overrightarrow{W} = {}^t\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}^T.$$

Une notation plus fine des vecteurs est donné par les écritures suivantes

$$V_i =, \qquad V^i$$

qui sont liés par comme suit

$$\begin{aligned} V_i &= g_{ij} V^j, \\ V^i &= g^{ij} V_j, \\ g_{ij} g^{jk} &= \delta_i^k \end{aligned}$$

où g^{ij} est le tenseur metrique ; qu il faudrait l'imaginer comme celui que nous avons rencotré auparavant.

où g^{ij} est le tenseur metrique ; qu il faudrait l'imaginer comme celui que nous avons rencotré auparavant.
Les vecteurs (avec les spineurs) jouent un role fondamental en mathématique. Sa connaissance permet de construire plusieurs autres objets. En effet à partir d'un vecteur V_i, on peut construire des scalaires

$$s = \begin{cases} g^{ij} V_i V_j = V_i V^i \\ g_{ij} V^i V^j = V^i V_i \end{cases}$$

qui n'est autre que Sa norme. Pour deux vecteurs U_i et V_j, nous avons aussi

$$s = g^{ij} U_i V_j = U^i V_i$$

où g^{ij} est le tenseur metrique ; qu il faudrait l'imaginer comme celui que nous avons rencotré auparavant.
Les vecteurs (avec les spineurs) jouent un role fondamental en mathématique. Sa connaissance permet de construire plusieurs autres objets. En effet à partir d'un vecteur V_i, on peut construire des scalaires

$$s = \begin{cases} g^{ij} V_i V_j = V_i V^i \\ g_{ij} V^i V^j = V^i V_i \end{cases}$$

qui n'est autre que Sa norme. Pour deux vecteurs U_i et V_j, nous avons aussi

$$s = g^{ij} U_i V_j = U^i V_i$$

souvent desiné par

$$U \cdot V \qquad \text{ou} \qquad <U|V>$$

Les vecteurs V_i sont de plusieurs types ; ils peuvent être des champs

$$V_i = V_i\,(x) \qquad \text{ou} \qquad V_i = V_i\,(z, \overline{z})\,.$$

Les vecteurs V_i sont de plusieurs types ; ils peuvent être des champs

$$V_i = V_i\,(x) \qquad \text{ou} \qquad V_i = V_i\,(z, \overline{z})\,.$$

dont un cas particulier est donné par le gradient

$$V_i = \partial_i \mathrm{f}, \qquad \partial_i \mathrm{f} \equiv \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x^i}$$

Les vecteurs V_i sont de plusieurs types ; ils peuvent être des champs

$$V_i = V_i\,(x) \qquad \text{ou} \qquad V_i = V_i\,(z, \overline{z})\,.$$

dont un cas particulier est donné par le gradient

$$V_i = \partial_i \mathrm{f}, \qquad \partial_i \mathrm{f} \equiv \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x^i}$$

ou encore une 1- forme

$$V^i = dx^i.$$

Les vecteurs V_i sont de plusieurs types ; ils peuvent être des champs

$$V_i = V_i\,(x) \qquad \text{ou} \qquad V_i = V_i\,(z,\bar{z})\,.$$

dont un cas particulier est donné par le gradient

$$V_i = \partial_i \mathrm{f}, \qquad \partial_i \mathrm{f} \equiv \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x^i}$$

ou encore une 1- forme

$$V^i = dx^i.$$

A partir des vecteurs $\partial_i \mathrm{f}$ et dx^i, on peut construire un scalaire

$$d\mathrm{f} = \sum dx^i \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x^i} = \sum dx^i \partial_i \mathrm{f}$$

qui n'est qute de la differentielle de f. Pour le cas particulier de fonctions $\Phi = \Phi\left(z, \overline{z}\right)$ sur C, nous avons

qui n'est qute de la differentielle de f. Pour le cas particulier de fonctions $\Phi = \Phi\left(z, \overline{z}\right)$ sur C, nous avons

$$d\Phi = dz\frac{\partial\Phi}{\partial z} + d\overline{z}\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{z}}.$$

qui n'est qute de la differentielle de f. Pour le cas particulier de fonctions $\Phi = \Phi\left(z, \overline{z}\right)$ sur C, nous avons

$$d\Phi = dz\frac{\partial\Phi}{\partial z} + d\overline{z}\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{z}}.$$

$\diamondsuit$ Tenseurs d'ordre 2 :

qui n'est qute de la differentielle de f. Pour le cas particulier de fonctions $\Phi = \Phi(z, \overline{z})$ sur C, nous avons

$$d\Phi = dz\frac{\partial \Phi}{\partial z} + d\overline{z}\frac{\partial \Phi}{\partial \overline{z}}.$$

$\diamondsuit$ Tenseurs d'ordre 2 :
La aussi on distingue plusieurs types de tenseurs de rang 2. L'exemple le plus simple est donné par les matrices ; souvent noté comme

$$T_{ij}, \qquad T^{ij}, \qquad T_i^j,$$

Comme nous l'anons noté auparavant, à partir d'un vecteur,on peut construire d'autres objets dont les tenseurs. Nous avons :

$$T_{ij} = V_i \otimes V_j, \qquad T^{ij} = V^i \otimes V^j, \qquad T^i_j = V^i \otimes V_j$$

Comme nous l'anons noté auparavant, à partir d'un vecteur,on peut construire d'autres objets dont les tenseurs. Nous avons :

$$T_{ij} = V_i \otimes V_j, \qquad T^{ij} = V^i \otimes V^j, \qquad T^i_j = V^i \otimes V_j$$

Ces matrices (tenseurs) peuvent être décomposés comme suit

$$T_{ij} = T_{(ij)} + T_{[ij]}$$

avec

$$\begin{aligned} T_{[ij]} &= \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) \\ T_{(ij)} &= \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) \end{aligned}$$

Cette décompositions correspond à un résultat plus général concernant le produit tensoriel. A partir d'un tenseur, on construire des scalaires dont la trace

$$s = \mathrm{Tr}\,(T) = \sum g^{ij} T_{ij} = \sum T_i^i$$

et le détérminant

$$s = \det T$$

Cette décompositions correspond à un résultat plus général concernant le produit tensoriel. A partir d'un tenseur, on construire des scalaires dont la trace

$$s = \mathrm{Tr}\,(T) = \sum g^{ij} T_{ij} = \sum T_i^i$$

et le détérminant

$$s = \det T$$

Nous avons également des champs tensoriels réelles ou complexes

$$T_{ij} = T_{ij}\,(x)\,, \qquad \text{ou} \qquad T_{ij} = T_{ij}\,(z, \overline{z})\,,$$

Cette décompositions correspond à un résultat plus général concernant le produit tensoriel. A partir d'un tenseur, on construire des scalaires dont la trace

$$s = \mathrm{Tr}\,(T) = \sum g^{ij} T_{ij} = \sum T_i^i$$

et le détérminant

$$s = \det T$$

Nous avons également des champs tensoriels réelles ou complexes

$$T_{ij} = T_{ij}\,(x)\,, \qquad \text{ou} \qquad T_{ij} = T_{ij}\,(z, \bar{z})\,,$$

des champs tensoriels holomorphes

$$T_{ij} = T_{ij}\,(z)\,, \qquad \text{ou} \qquad \overline{T}_{ij} = T_{ij}\,(\bar{z})\,,$$

Deux tenseurs seront particulièrement utiles en théories conformes à $d = 2$. Il s'agit de :

$$\begin{aligned} T_{ij}(z) &= T_{zz}(z) \equiv T(z) \\ \overline{T}_{ij}(z) &= \overline{T}_{\overline{zz}}(z) \equiv \overline{T}(\overline{z}) \end{aligned}$$

Deux tenseurs seront particulièrement utiles en théories conformes à $d = 2$. Il s'agit de :

$$\begin{aligned} T_{ij}(z) &= T_{zz}(z) \equiv T(z) \\ \overline{T}_{ij}(z) &= \overline{T}_{\overline{z}\overline{z}}(z) \equiv \overline{T}(\overline{z}) \end{aligned}$$

dont les développements de Laurent sont :

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-2} L_n, \qquad \overline{T}(\overline{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{z}^{-n-2} \overline{L}_n$$

Deux tenseurs seront particulièrement utiles en théories conformes à $d = 2$. Il s'agit de :

$$\begin{aligned} T_{ij}(z) &= T_{zz}(z) \equiv T(z) \\ \overline{T}_{ij}(z) &= \overline{T}_{\overline{z}\overline{z}}(z) \equiv \overline{T}(\overline{z}) \end{aligned}$$

dont les développements de Laurent sont :

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-2} L_n, \qquad \overline{T}(\overline{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{z}^{-n-2} \overline{L}_n$$

Il existe d'autres type de tenseurs qui vivent sur les espaces réelles et complexes. Nous avons la 2- forme differentielle,

$$dx^i \otimes dx^j$$

C'est un tenseur d'ordre 2 qui est donc reductible en partie symétrique et partie antisymétrique

$$dx^i \otimes dx^j = dx^{(i} \otimes dx^{j)} + dx^{[i} \otimes dx^{j]}$$

C'est un tenseur d'ordre 2 qui est donc reductible en partie symétrique et partie antisymétrique

$$dx^i \otimes dx^j = dx^{(i} \otimes dx^{j)} + dx^{[i} \otimes dx^{j]}$$

avec

$$\begin{aligned} dx^{(i} \otimes dx^{j)} &= \frac{1}{2}\left[dx^i \otimes dy^j + dx^j \otimes dy^i\right] \\ dx^{[i} \otimes dx^{j]} &= \frac{1}{2}\left[dx^i \otimes dy^j - dx^j \otimes dy^i\right] \end{aligned}$$

C'est un tenseur d'ordre 2 qui est donc reductible en partie symétrique et partie antisymétrique

$$dx^i \otimes dx^j = dx^{(i} \otimes dx^{j)} + dx^{[i} \otimes dx^{j]}$$

avec

$$\begin{aligned} dx^{(i} \otimes dx^{j)} &= \frac{1}{2}\left[dx^i \otimes dy^j + dx^j \otimes dy^i\right] \\ dx^{[i} \otimes dx^{j]} &= \frac{1}{2}\left[dx^i \otimes dy^j - dx^j \otimes dy^i\right] \end{aligned}$$

et les notations

$$\begin{aligned} dx^{(i} \otimes dy^{j)} &= dx^i \vee dy^j \\ dx^{[i} \otimes dy^{j]} &= dx^i \wedge dy^j \end{aligned}$$

A partir de ces objets on peu construire des scalaire ; en particulier les 2- formes differentielles

$$\omega_2 = \sum_{i,j} dx^i \wedge dx^j T_{ij}(x)$$

A partir de ces objets on peu construire des scalaire ; en particulier les 2- formes differentielles

$$\omega_2 = \sum_{i,j} dx^i \wedge dx^j T_{ij}(x)$$

$\diamondsuit$ Tenseur d'ordre (p, q).

A partir de ces objets on peu construire des scalaire ; en particulier les 2- formes differentielles

$$\omega_2 = \sum_{i,j} dx^i \wedge dx^j T_{ij}(x)$$

$\diamondsuit$ Tenseur d'ordre (p, q).

Plus généralement, un tenseur (où champ tensoriel) d'ordre (p, q) a : p indices covariants et q indices contravariants

$$T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_p}$$

A partir de ces objets on peu construire des scalaire ; en particulier les 2- formes differentielles

$$\omega_2 = \sum_{i,j} dx^i \wedge dx^j T_{ij}(x)$$

◊ Tenseur d'ordre (p, q).
Plus généralement, un tenseur (où champ tensoriel) d'ordre (p, q) a : p indices covariants et q indices contravariants

$$T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_m}$$

qui, par le biais de la metrique peut être ramener à :

$$T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_m} = g^{j_1 k_1} \cdots g^{j_m k_m} T_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_m}$$

Ces tensurs correspondent à des representations des groupes de rotations dans les espaces sous jacents.

Ces tensurs correspondent à des representations des groupes de rotations dans les espaces sous jacents.
Ces tenseurs sont réductibles en plusieurs composantes irreductibles.

Ces tensurs correspondent à des representations des groupes de rotations dans les espaces sous jacents.
Ces tenseurs sont réductibles en plusieurs composantes irreductibles. Outre des choses, nous avons en particulier une partie completement symétrique

$$T_{(i_1 \dots i_n)}$$

Ces tensurs correspondent à des representations des groupes de rotations dans les espaces sous jacents.
Ces tenseurs sont réductibles en plusieurs composantes irreductibles. Outre des choses, nous avons en particulier une partie completement symétrique

$$T_{(i_1 \dots i_n)}$$

et une partie completement antisymetrique

$$T_{[i_1 \dots i_n]}$$

Ces tensurs correspondent à des representations des groupes de rotations dans les espaces sous jacents.
Ces tenseurs sont réductibles en plusieurs composantes irreductibles. Outre des choses, nous avons en particulier une partie completement symétrique

$$T_{(i_1 \dots i_n)}$$

et une partie completement antisymetrique

$$T_{[i_1 \dots i_n]}$$

Ces derniers interviennent dans les differentialle d'ordre n

$$\omega_n = dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_n} \omega_{[i_1 \cdots i_n]}(x)$$

Propriétés utiles des tenseurs

Propriétés utiles des tenseurs

Les tenseurs adméttent plusieurs propriétés remarquables et ont des interprtations en théorie des représentations des groupes. Nous donnons ci-après quelques unes des propropriétés utiles pour ce cours.

Propriétés utiles des tenseurs

Les tenseurs adméttent plusieurs propriétés remarquables et ont des interprtations en théorie des représentations des groupes. Nous donnons ci-après quelques unes des proppropriétés utiles pour ce cours.

Sous une transformation générale de coordonnées

$$x \qquad \to \qquad x' = \mathrm{f}(x), \tag{3.1}$$

Propriétés utiles des tenseurs
Les tenseurs adméttent plusieurs propriétés remarquables et ont des interprtations en théorie des représentations des groupes. Nous donnons ci-après quelques unes des propropriétés utiles pour ce cours.
Sous une transformation générale de coordonnées

$$x \qquad \to \qquad x' = \mathrm{f}(x), \tag{3.1}$$

les tenseurs se transforment également et leurs transformations est donnée par une loi très particulière. Nous illustrons ces lois de transformations à travers des exemples :

$\diamondsuit$ Exemple 1 :

La loi de transformation d'un vecteur, nous prenons comme expemple le champ de Maxwell

$$A_\mu = A_\mu\,(x)$$

$\diamondsuit$ Exemple 1 :
La loi de transformation d'un vecteur, nous prenons comme expemple le champ de Maxwell

$$A_\mu = A_\mu(x)$$

A ce champ est associé un 1- forme differentielle

$$A = A_\mu dx^\mu = dx^\mu A_\mu$$

$\diamondsuit$ Exemple 1 :
La loi de transformation d'un vecteur, nous prenons comme expemple le champ de Maxwell

$$A_\mu = A_\mu(x)$$

A ce champ est associé un 1- forme differentielle

$$A = A_\mu dx^\mu = dx^\mu A_\mu$$

Sous une transformation générale des coordonnées de l'espace temps, nous avons

$$dx^\mu \qquad \rightarrow \qquad dx'^\mu = d\mathrm{f}^\mu(x)$$

$\diamondsuit$ Exemple 1 :
La loi de transformation d'un vecteur, nous prenons comme expemple le champ de Maxwell

$$A_\mu = A_\mu(x)$$

A ce champ est associé un 1- forme differentielle

$$A = A_\mu dx^\mu = dx^\mu A_\mu$$

Sous une transformation générale des coordonnées de l'espace temps, nous avons

$$dx^\mu \qquad \rightarrow \qquad dx'^\mu = d\mathrm{f}^\mu(x)$$

avec

$$d\mathrm{f}^\mu = \left(\frac{\partial \mathrm{f}^\mu}{\partial x^\nu}\right) dx^\nu = dx^\nu \partial_\nu \mathrm{f}^\mu,$$

Nous avons également

$$A\left(x'\right) = A\left(x\right), \qquad dx'^{\mu} A_{\mu}\left(x'\right) = dx^{\mu} A_{\mu}\left(x\right)$$

Nous avons également

$$A\left(x'\right) = A\left(x\right), \qquad dx'^{\mu} A_{\mu}\left(x'\right) = dx^{\mu} A_{\mu}\left(x\right)$$

et donc

$$dx^{\mu} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} A_{\nu}\left(x'\right) = dx^{\mu} \left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} A_{\nu}\left(x'\right) \right)$$

ce qui donne

$$A_{\mu}\left(x\right) = \left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) A_{\nu}\left(x'\right) \tag{3.2}$$

Nous avons également

$$A\left(x'\right) = A\left(x\right), \qquad dx'^{\mu} A_{\mu}\left(x'\right) = dx^{\mu} A_{\mu}\left(x\right)$$

et donc

$$dx^{\mu} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} A_{\nu}\left(x'\right) = dx^{\mu} \left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} A_{\nu}\left(x'\right) \right)$$

ce qui donne

$$A_{\mu}\left(x\right) = \left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) A_{\nu}\left(x'\right) \tag{3.2}$$

$\diamondsuit$ Exemple 2 :
La relation (3.2) admet une généralisation pour les tenseurs d'ordre superieur. Plus generalement un tenseur d'ordre n

$$F\left(x\right) = dx^{i_n} \cdots dx^{i_1} F_{i_1 \cdots i_n}\left(x\right)$$

se transforme de la facon suivante

$$F\left(x'\right) = dx'^{i_n} \cdots dx'^{i_1} F_{i_1 \cdots i_n}\left(x'\right)$$

se transforme de la facon suivante

$$F\left(x'\right) = dx'^{i_n} \cdots dx'^{i_1} F_{i_1 \cdots i_n}\left(x'\right)$$

De la relation

$$F\left(x'\right) = F\left(x\right)$$

se transforme de la facon suivante

$$F\left(x'\right) = dx'^{i_n} \cdots dx'^{i_1} F_{i_1 \cdots i_n}\left(x'\right)$$

De la relation

$$F\left(x'\right) = F\left(x\right)$$

nous avons

$$dx'^{j_n} \cdots dx'^{j_1} F_{j_1 \cdots j_n}\left(x'\right) = \begin{cases} dx^{j_n} \cdots dx^{j_1} F_{j_1 \cdots j_n}\left(x\right) \\ dx^{j_n} \cdots dx^{j_1} \left(\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial x'^{i_n}}{\partial x^{j_n}}\right) F_{i_1 \cdots i_n}\left(x'\right) \end{cases}$$

se transforme de la facon suivante

$$F\left(x'\right) = dx'^{i_n} \cdots dx'^{i_1} F_{i_1 \cdots i_n}\left(x'\right)$$

De la relation

$$F\left(x'\right) = F\left(x\right)$$

nous avons

$$dx'^{j_n} \cdots dx'^{j_1} F_{j_1 \cdots j_n}\left(x'\right) = \left\{ \begin{array}{c} dx^{j_n} \cdots dx^{j_1} F_{j_1 \cdots j_n}\left(x\right) \\ dx^{j_n} \cdots dx^{j_1} \left(\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial x'^{i_n}}{\partial x^{j_n}}\right) F_{i_1 \cdots i_n}\left(x'\right) \end{array} \right.$$

soit encore

$$F_{j_1 \cdots j_n}\left(x\right) = \left\{ \begin{array}{c} \left[\left(\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial x'^{i_n}}{\partial x^{j_n}}\right)\right] F_{i_1 \cdots i_n}\left(x'\right) \\ \left(\partial_{j_1} x'^{i_1} \cdots \partial_{j_n} x'^{i_n}\right) F_{i_1 \cdots i_n}\left(x'\right) \end{array} \right.$$

Ces lois de transformations sont également valables pour les cas particuliers où l'espace est une ligne réelle ou complexe.

Ces lois de transformations sont également valables pour les cas particuliers où l'espace est une ligne réelle ou complexe.
♢ Exemple 3 : *Espaces à une dimension réelle ou complexe*,
Ceci concerne les cas les systèmes de coordonnées :

$$\left(x^1, ..., x^n\right),$$
$$\left(z^1, ..., z^n\right),$$

Ces lois de transformations sont également valables pour les cas particuliers où l'espace est une ligne réelle ou complexe.
♢ Exemple 3 : *Espaces à une dimension réelle ou complexe*,
Ceci concerne les cas les systèmes de coordonnées :

$$\left(x^1, ..., x^n\right),$$
$$\left(z^1, ..., z^n\right),$$

se réduisent à :

$$x^1 \equiv x, \qquad z^1 \equiv z.$$

Dans ce cas, les tenseurs ont tous une seule composantes,

$$F_{j_1 \cdots j_n} \equiv F_{\underbrace{1 \ldots 1}_{n}} = \left\{ \begin{array}{l} F_{x \cdots x} \\ F_{z \cdots z} \end{array} \right. .$$

Dans ce cas, les tenseurs ont tous une seule composantes,

$$F_{j_1\cdots j_n} \equiv F_{\underbrace{1\ldots 1}_{n}} = \left\{ \begin{array}{l} F_{x\cdots x} \\ F_{z\cdots z} \end{array} \right. .$$

et donc une loi de transformations plus simple. Pour le cas réel, nous avons :

$$F_{x\cdots x} = \left[\underbrace{\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\cdots\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)}_{n} \right] F'_{x\cdots x},$$

Dans ce cas, les tenseurs ont tous une seule composantes,

$$F_{j_1\cdots j_n} \equiv F_{\underbrace{1\,\ldots\,1}_{n}} = \left\{ \begin{array}{l} F_{x\cdots x} \\ F_{z\cdots z} \end{array} \right. .$$

et donc une loi de transformations plus simple. Pour le cas réel, nous avons :

$$F_{x\cdots x} = \left[\underbrace{\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\cdots\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)}_{n} \right] F'_{x\cdots x},$$

soit :

$$F_{x\cdots x} = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^{n} F'_{x\cdots x}$$

Ce résultat est également valable pour les fonctions complexes analytiques a une variable complexe z. Nous avons :

Ce résultat est également valable pour les fonctions complexes analytiques a une variable complexe z. Nous avons :

$$F_{z\cdots z}(z) = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^n F'_{z\cdots z}$$

Ce résultat est également valable pour les fonctions complexes analytiques a une variable complexe z. Nous avons :

$$F_{z\cdots z}(z) = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^n F'_{z\cdots z}$$

que nous noterons comme

$$F_{\underbrace{z\ldots z}_{n}} = F_{(n,0)} \equiv F_n, \qquad F_{\bar{z},\ldots,\bar{z}} = F_{(0,n)} \equiv F_{\overline{m}}$$

Nous avons également

$$G_{z\cdots z,\overline{z},\ldots,\overline{z}} = G_{(n,\overline{n})}\left(z,\overline{z}\right)$$

Nous avons également

$$G_{z\cdots z,\bar{z},\ldots,\bar{z}} = G_{(n,\bar{n})}\left(z,\bar{z}\right)$$

dont la loi de changement sous des transformations conformes

$$G_{(n,\bar{n})} = \left|\frac{\partial z'}{\partial z}\right|^{2n} G'_{(n,\bar{n})}$$

Nous avons également

$$G_{z\cdots z,\bar{z},\ldots,\bar{z}} = G_{(n,\bar{n})}\left(z,\bar{z}\right)$$

dont la loi de changement sous des transformations conformes

$$G_{(n,\bar{n})} = \left|\frac{\partial z'}{\partial z}\right|^{2n} G'_{(n,\bar{n})}$$

On peut également avoir des objets

$$G_{(n,m)}$$

avec $n \neq m$.

Contents

Pour commencer notons que un champ conforme

$$\Phi_{h,\overline{h}}(z,\bar{z}),$$

Pour commencer notons que un champ conforme

$$\Phi_{h,\overline{h}}(z,\bar{z}),$$

de poids conforme $(h,\overline{h})$, vivant dans l'espace $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ est un objet qui se transforme sous une transformation conforme

$$z \to \mathrm{f} = \mathrm{f}(z), \qquad \overline{z} \to \bar{\mathrm{f}} = \bar{\mathrm{f}}(\bar{z})$$

Pour commencer notons que un champ conforme

$$\Phi_{h,\overline{h}}(z,\bar{z}),$$

de poids conforme $(h,\overline{h})$, vivant dans l'espace $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ est un objet qui se transforme sous une transformation conforme

$$z \to \mathrm{f} = \mathrm{f}(z), \qquad \bar{z} \to \bar{\mathrm{f}} = \bar{\mathrm{f}}(\bar{z})$$

comme

Pour commencer notons que un champ conforme

$$\Phi_{h,\bar{h}}(z,\bar{z}),$$

de poids conforme $(h,\bar{h})$, vivant dans l'espace $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ est un objet qui se transforme sous une transformation conforme

$$z \to \mathrm{f} = \mathrm{f}(z), \qquad \bar{z} \to \bar{\mathrm{f}} = \bar{\mathrm{f}}(\bar{z})$$

comme

$$\Phi(z,\bar{z}) \to \Phi(\mathrm{f},\bar{\mathrm{f}}) \left(\frac{d\mathrm{f}}{dz}\right)^{h} \left(\frac{d\bar{\mathrm{f}}}{d\bar{z}}\right)^{\bar{h}} \tag{4.1}$$

On distingue differents types de champs conformes. En particulier

On distingue differents types de champs conformes. En particulier

1. Les champ scalaires

On distingue differents types de champs conformes. En particulier

1. Les champ scalaires
2. Les champs fermioniques

On distingue differents types de champs conformes. En particulier

1. Les champ scalaires
2. Les champs fermioniques
3. Les champs tensoriels

On distingue differents types de champs conformes. En particulier

1. Les champ scalaires
2. Les champs fermioniques
3. Les champs tensoriels
4. Les operateurs vertex

Merci et bon courage !