UNIVERSITÉ MOHAMMED V – AGDAL
FACULTÉ DES SCIENCES
Rabat

Laboratoire Physique des Hautes Energies
Modélisation et Simulation

Introduction aux algèbres de Lie et leurs présentations

AHL LAAMARA RACHID

Plan

Plan

Notions sur les algèbres de lie

Les algébres de lie et leurs représenations jouent un rôle fondamental en physique.

- **Mécanique quantique :** Algébre de Heisenberg $[P, X] = -i\hbar$
- **Théorie des champs :** $\left[X^i, X^j\right] = iC^{ij}$ *Algebre Canonique.*
- **...**

Notions sur les algèbres de lie

Définition

Une algébre de lie **g** est une espace vectoriel sur un corps ($\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$), muni de l'opérateur $[,]$

$$g \times g \to g$$

$$(x, y) \to [x, y] = xy - yx$$

Satisfait les trois propriétés suivantes:

a. Bilinéairité

$$[\lambda x, \beta y, z] = \lambda[x, y] + \beta[y, z] \; \forall x, y, z \in g \; et \; \lambda, \beta \in \mathbb{C}$$

b. Antisymétrie

$$[x, y] = -[y, x] \; \forall x, y \in g$$

c. Identite de Jacobi

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

Notions sur les algèbres de lie

Relation entre les générateurs d'une algébre de lie g :

Soit **g** une algébre (*espace vectoriel*) ayant une base $t^a, a = 1...dim\ g$.

Les structures de l'algébre de lie est donnée par les relations des commutations entre les générateurs t^a

$$[t^a, t^b] = C_c{}^{ab} t^c$$

Où $C_c{}^{ab}$ sont des tenseurs antisymetrique contants, tels que:

- $C_c{}^{ab} = C_c{}^{ba}$
- $C_c{}^{ab} C_e{}^{df} + C_d{}^{fa} C_e{}^{db} + C_d{}^{bf} C_d{}^{da}$

Notions sur les algèbres de lie

Exemple: L'algébre $so(3)$

C'est l'algébre des rotations dans l'espace réel de $\mathbb{R}^3$ c'est l'algébre decrivanr le momenr angulaire. La struscture de l'algébre $so(3)$ est donnée par:

$$[t^i, t^j] = i\epsilon^{ijk} t^k$$

où ϵ^{ijk} est le tenseur de levi Civita complétement antisymétrique:

$$\epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik} = \epsilon^{jki}$$

$$\epsilon^{iik} = 0 \ , \epsilon^{123} = 1 \ , \epsilon^{112} = 0$$

Sous algébre de Lie

Définition 1 :

Soit $g_0 \subset g$ un sous espace véctoriel d'une algébre de lie g , g_0 est dite une sous algébre de lie seulement si $[g_0, g_0] \subset g_0$.
$\forall x, y \in g_0 \Longrightarrow [x, y] \in g_0$

Définition 2 :

Soit $J \subset g$, J est dit ideal de g seulement si $[J, g] \subset J$.
$\forall x, J \ \ \forall y \in g \Longrightarrow [x, y] \in J \Longrightarrow J$ sous algebre de g.

Définition 3 :

Une algébre de lie simple est une algébre ne possédant aucun idéal propre.
$J \neq \{\{0\}, g\}$.

Sous algébre de Lie

Exemple 1:

1− $\{0\}$, $\{g\}$ sont deux éléments triviaux g.

2− Centre d'une algébre de g. $Z(g)$

$$Z(g) = \{x/[x, y] = 0, \forall y \in g\}$$

C'est une idéal abélien de g

$$x \in Z(g) \Longrightarrow [x, y] \subset Z(g)$$
$$x \in Z(g) \Longrightarrow [x, y] = 0 \Longrightarrow [x, x] \subset Z(g)$$

Exemple 2 :

Soit $g' = [g, g]$, g' est idéal de g.

$$[[g, g], g] \subset [g, g]$$

Sous algébre de Lie

Algébre quotidients:

Soit g une algébre de lie non simple. Alors il est toujours possible de factoriser par un idéal propre J de g. L'espace quotidient de g par un idéal propre:

$$g/J = \{\dot{x}/\dot{x} = x + \mu,\ x \in g,\ \mu \in J\}$$

Dans ce cas, nous avons le crochet suivant:

$$[\dot{x}, \dot{y}] = [x + J, y + J] = [x, y] + [x, J] + [J, y] + [J, J] = [x, y] + J$$

Homorphismes d'une algébre de lie

La loi d'une algébre est une loi abstraite. En pratique, on a besoin des réalisations (représentations) de cette loi (strusture d'une algébre de lie) pour l'exploiter dans des applications physiques. En général, on peut parler des représenations matricielles où des representations par des opérateurs differentiels, le passage est assuré par les homorphismes de l'algébre.

Définition 1:

Soit g et g' deux algébres de lie. Un homomorphisme Φ (represenation) d'une algébre de lie défini:

$$\Phi : g \to g'$$

$$x \in g \to \Phi(x)$$

satisfaisant

1− $\Phi(\lambda x + \beta y) = \lambda\Phi(x) + \beta\Phi(y)$

2− $\Phi([x, y]) = \Phi([\Phi(x), \Phi(y)])$

Homorphismes d'une algébre de lie

Définition 2:

Une repàsentation d'une lgébre de lie g est un homomorphisme d'une algébre $\Phi : g \to gl(V)$ avec $x \in g \to matrice$. V est un espace vectoriél sur $\mathbb{C}$

Exemple: (Représentation différentielle)

L'algébre de Heisenberg est donnée par:

- $[a^+, a^-] = I$ dans la base $\{a^+, a^-, I\}$
- $\Phi(a^+) = z$
- $\Phi(a^-) = -\frac{\partial}{\partial z}$
- $\Phi(I) = 1$

Où z paraméetrise le plan $\mathbb{C}$.

Homorphismes d'une algébre de lie

Représentation adjointe:

Une représentation particulière d'interêt fondamental de l'étude des propriétés de l'algéebre de lie lui même cette représentation agit sur l'algébre g de la façon suivante:

$$ad_x g \to g$$
$$y \to ad_x(y) = [x, y]$$

L'ensembke des éléments $\{ads_x\}$ est l'espace:

$$ad_y = \{ad_x, x \in g\}$$

Homorphismes d'une algébre de lie

Propriétés:

Une dérivation d'une algébre de lie g est une application $d : g \to g$ tel que:

$$ad([x, y]) = [dx, y] + [x, dy]$$

L'homomorphisme ad une derivation de g.

$$[ad_x[y, z] = [ad_x(y), z] + [y, ad_x(z)]]$$

Ceci n'est autre que l'identité de Jacobi.

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$

Le noyau d'ad n'est autre que le centre d'une algébre g.

$$Kein\ ad = \{x/ad_x(y) = 0, \forall y \in g\}ad_x(y) = 0 \Rightarrow [x, y] = 0, \forall y \in g \Rightarrow x \in g\}$$

Algébre de lie linéaires

Dans ce paragraphe, nous étudions les différents d'algébres de lie des matrices. Ce sont les sous algébres de l'algébre de lie des endomorphisme d'espace vectoriel V.
$End_V = gl(V) = gl(n, \mathbb{C})$

$$End_V = \begin{cases} f : V \to V \\ \qquad v \to f(v) \end{cases}$$

Algébre de lie linéaires

Algébre de lie gl(n,$\mathbb{C}$):

Soit V un espace vectoriel de dimension (n) dont la base:

$$B = \{|i\rangle, i = 1, ..., n\}$$

Soit $V*$ l'espace vectoriel de dimention (n) dont la base

$$B^* = \{\langle i|, i = 1, ..., n\}$$

Les éléments de l'algébre $gl(V)$ sont présentés par des matrices carée $n \times n \sim gl(n, \mathbb{C})$.

La dimension de $gl(n, \mathbb{C})$ est n^2. On a donc n^2 générateurs donnés par:

$$E_{ij} = v_i^*.v_j = |i\rangle\langle j|$$

$$x \in gl(n, \mathbb{C}) \Rightarrow x = \sum_{ij=1}^{n} x_{ij} E_{ij}$$

Algébre de lie linéaires

Algébre de lie classiques:

Ce sont des sous algébres de lie $gl(n, \mathbb{C})$. Elles sont 4 classées comme suit:

- $sl(n, \mathbb{C}) = A_{n-1}$, $n > 2$
- $so(2n+1, \mathbb{C}) = B_n$, $n > 2$
- $sp(2n, \mathbb{C}) = C_n$, $n > 2$
- $so(2n, \mathbb{C}) = D_n$, $n > 3$

la forme de Killing d'une algèbre de lie

Définition :

La forme de Killing d'une algèbre de lie g est définie par K.

$$K : g \times g \to \mathbb{C}$$

$$x.y \to K(x, y) = (Trad_x ad_y) \in \mathbb{C}$$

Propriétés :

K une forme bilinéaire symétrique et associative.

- bilinéaire :

$$K(\lambda x + \beta y, z) = \lambda K(x, z) + \beta K(x, z)$$

- $K(x, y) = K(y, x)$ avec k symétrique

$$Tr(ad_x.ad_y) = Tr(ad_y.ad_x)$$

- K est associative dans le sens que:

$$K([x, y], z) = K(x, [y, z])$$

la forme de Killing d'une algèbre de lie

Radical S d'une forme de Killing:

Définition 1:

Soit g une algèbre de lie :
β une forme $\beta : g \times g \to \mathbb{C}$

- bilinéaire $\beta(\lambda x + \gamma y, z) = \lambda \beta(x, y) + \gamma \beta(y, z)$
- symétrique $\beta(x, y) = \beta(y, x)$

Définition 2:

Une forme bilinéaire symétrique est dite non-dégénérée ssi son radical est nul

Plan

Algèbre de Lie résolubles

Rappel:

Une dérivation d'une algèbre de Lie G est une application linéaire $d : g \longrightarrow g$ satisfaisant la relation suivante:

$$d([x,y]) = [dx,y] + [x,dy]$$

Définition 1:

Soit g une algèbre de Lie de dimension finie, on appelle dérivée $n^{ieme}(g^{(n)})$, le sous algèbre de g définie par:

$$g^0 = g$$

$$g^{(n)} = [g^{(n-1)}, g^{(n-1)}]$$

Définition 2:

Une algèbre de Lie est résoluble si et seulement si, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $g^k = 0$.

Algèbre de Lie résolubles

Exemple: Algèbre des matrices diagonales $\triangle(n)$

$\triangle(n) = \{X \in gl(n, \mathbb{C}; X_{ij} = a_i \delta_{ij}\}$

Où $X_{ij} = 0$ si $i \neq j$

- La dimension de $\triangle(n)$ est n
- $\triangle(n)$ est une sous algèbre abélienne.

$[E_{ii}, E_{ii}] = 0$

$\forall x, y \in \triangle(n)$, $[X, Y] = 0$

$\triangle(n) = g^{(0)}$; $g^{(1)} = [g^{(0)}, g^{(0)}] = [\triangle(n), \triangle(n)] = 0$

Toute algèbre de Lie abélienne est résoluble.

Algèbre de Lie résolubles

Théorème:

Soit g une algèbre de Lie.

1– Si g est résoluble alors:

i)-Toutes les sous algèbres de g sont résolubles.

ii)-Ses images par un homomorphisme d'algèbre sont résolubles.

2– Si I un idéal résoluble tel que g/I est résoluble alors g est résoluble.

3– Si I et J sont deux idéaux résolubles, alors $I + J$ est aussi résolubles.

Algébres de Lie nilpotentes

Définition 1:

On appelle suite centrale déscendante d'une algèbre de Lie g, la suite $\{g^i, 1 \leq i \leq n\}$ définie par:

$$g^0 = g$$

$$g^n = [g, g^{n-1}]$$

Définition 2:

Une algébre de lie est dite **nilpotente** seulement si sa suite centrale descendante est finie. Autrement dit $\exists$ un entrer $K \in \mathbb{N}$ tel que $g^k = 0$.

Exemples:

Exemple 1: Toute algébre de lie abéelienne est nilpotente car: $g^2 = [g, g] = 0$

Exemple 2: $N(2) = \{X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$, $a \in \mathbb{C}$

la dimension $N(2) = 1 \Rightarrow$ *abélienne* $\Rightarrow$ *nilpotante*

Algébres de Lie nilpotentes

Remarques:

i) $g^{(n)} = g^n$
$g^{(1)} = [g, g] = g^1$
$g^{(2)} = [g^{(1)}, g^{(1)}] = [[g, g], [g, g]] = [[g, g], g^1] \subset [g, g^1] = g^2$

ii) Toute algébre de lie **nilpotente** est résoluble.
g est nilpotente $\Rightarrow \exists K \in N,\ g^k = 0.$
$g^{(k)} \subset g^k = 0 \Rightarrow g^{(k)} = 0 \Rightarrow g$ est résoluble.

Proposition:

g une algébre de lie de centre $Z(G) \neq \{0\}$ (non simple)

1− Si g est nilpotente, ses sous algébres, ses images par un homomorphisme d'algébre sont aussi nilpotentes.

2− Si $g/Z(g)$ est niplotente alors g est nilpotente.

3− Si g est nilpotente alors $Z(g) \neq 0$

Algébres de Lie nilpotentes

Défintion: ad-nilpotente

Soient:

i) g est une elgébre de lie

ii) x un élément de g
On dit que $x(\in g)$ est **ad-nipotente** seulement si ad_x est un **endomorphisme** (matrice) est niplotente.

$$\begin{aligned} ad: \quad & g \Rightarrow g \\ & \cdot \Rightarrow [\cdot, y] \quad , \forall y \in g \end{aligned}$$

Lemmes:

Lemme 1:
Si g une algébre de lie **nilpotente** alors tous les états $x \in g$ sont **ad-nilpotente**

Lemme 2: Théorème d'Engel
Si tous les éléments de g sont **ad-nilpotante**, alors g est **nilpotante**

Algébre de lie: semi-simple

Définition:

Soit g une algébre de lie. On dit que g est semi-simple seulement si elle ne contient aucun idéal résoluble autres que les idéaux triviaux.

Théorème de lie:

i) g une algébre de lie

ii) V un espace vectoriel de dimension finie

iii) ϕ est une représentation

$$g \to gl(V)$$
$$x \to \phi(x) = X$$

Si g est résoluble alors, il existe un vecteur commun à tous les endomorphismes X de $gl(V)$.

Algébre de lie: semi-simple

Définition: Drapeau d'un espace vectoriel:

Soit V un espace vectoriel de sim finie. On appelle drapeau (flag) dans V une suite de sous espaces vectoriels de V $\{V_i, i = 0, ..., n\}$, tell que:

i) $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 ... \subset V_n = V$

ii) $dim\ V - j = j$

Corollaires du théoréme de Lie(3):

Si g est une algébre de lie de $gl(V)$ ésoluble, alors g stabilise un drapeau dans V.
c'est à dire: $g\ V_j \subset V_j$
Si g_0 résoluble, ϕ une représentation de g_0: $\phi : g_0 \to g = \phi(g_0) \subset gl(V)$
$\phi(g_0) = g$ est résoluble et stabilise un drapeau de V.

Algébre de lie: semi-simple

Décomposition de Jordan-Chevalley:

Forme canonique de Jordan:

Jordanisation d'une matrice $n \times n$

$Soit \quad *V \quad espace\ vectoriel\ de\ dimension\ finie\ n$

$\qquad *X \qquad V \to V\ un\ endomorphisme\ de\ V$

$X \in End_V$

Alors on peur trouver une base de V telle que la forme matricielle de X est dela forme suivante: $X = X_{dia} + X_{nilpo}$

$$X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ & a & 1 & & & & \\ & & a & 1 & & & \\ & & & a & 1 & & \\ & & & & a & 1 & \\ & & & & & a & 1 \\ 0 & & & & & & a \end{pmatrix} \quad X = a\delta_{ij} + \delta_{i,j-1}$$

Algébre de lie: semi-simple

Endomorphisme semi-simple:

Défintion 1: Un endomorphisme $X : V \to V$ d'un espace vectoriel de dimension finie n est dit semi-simple si son polinome minimal $n_x(t)$ n'a pas des racines distincts: $n_x(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)...(t - \lambda_r)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

Défintion 2: Un endomorphisme X est dit semi-simple s'il est diagonalisable dans une base de V

Exemple 1: $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -0 & 5 \end{pmatrix}$ semi simple car diagonalisable et symétrique

Exemple 2: Les matrices hérmitiques $n \times n$ de $gl(n, \mathbb{C})$
$X^+ = X$
$X^+_{ij} = (X^*_{ij})^t = X^*_{ji}$ sont semi-simples

Plan

Les g-modules

Définition d'un g-module

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie. Un espace vectoriel V muni d'une opération (.)

$$\mathcal{G}.V \longrightarrow V$$

$$(x, v) \longrightarrow x.v$$

V est dit un g-module (ou module de g) si les conditions suivantes sont satisfaites:
i) $(ax + by).v = a(x.v) + b(y.v)$
ii) $[x, y].v = xy.v - yx.v$
iii) $x.(av + bw) = a(x, v) + b(v.w)$ avec $x, y \in \mathcal{G}; \quad v, w \in V; \quad a, b \in \mathbb{C}$.

Remarque:
Le vecteur (x, v) doit être vu comme $\phi(x).v)$, où ϕ une représentation de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}l(V)$.

Les g-modules

Propriétés

⋆ **Homomorphisme d'une g-module**

L'application

$$f : V \longrightarrow W$$

$$v \longrightarrow f(v) = w$$

f est un homomorphisme de g-module si elle satisfait la propriétés suivante:

$$f(x.v) = x.f(v), \quad \forall x \in \mathcal{G} \text{ et } v \in V.$$

Si f est un isomorphisme de g-module, alors V et W sont des g-modules équivalents $(V \equiv W)$.

⋆ **Noyau de l'homomorphisme**

$$f : V \longrightarrow W; \quad ker f = \{v \in V / f(v) = 0\} \subset V$$

$ker f$ est un sous espace vectoriel de V

$$v_1, v_2 \in ker f, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C}$$

$$f(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) = 0$$

Construction de g-modules

⋆ **g-module irréductible**
V un g-module est dit irréductible si et seulement si les sous g-modules de V sont $\{\{0\}, V\}$. Tel que

$$\mathcal{G}.V \subset V \quad \forall x, y \in \mathcal{G}; \quad x.v \in V; \quad v \in V.$$

Dans le cas contraire, V est dit réductible, c-à-d

$$\exists v_i; \quad g.v_i \subset v_i; \quad V = \bigoplus_i v_i.$$

Remarque

• Les espaces vectoriels $W \subset V$, $dimW = 1$ sur lequels l'algèbre de Lie agit trivialement $\mathcal{G}.W = 0$ sont appelés espaces scalaitres.

• Un g-module est complètement réductible, S'il est la sommme directe de g-modules irréductibles

$$V = V_1 \oplus V_2 ... \oplus V_n, \quad \mathcal{G}.V_i \subset V_i.$$

Construction de g-modules

Somme directe

Étant donné deux g-modules V_1 et V_2 c-à-d

$$\mathcal{G}.V_1 \longrightarrow V_1 \quad \mathcal{G}.V_2 \longrightarrow V_2 \quad x \in \mathcal{G}$$

$$(x, v_1) \longrightarrow x.v_1 \quad (x, v_2) \longrightarrow x.v_2$$

Alors $V = V_1 \oplus V_2$, somme direct de V_1 et V_2 déninie par

$$V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2 \quad x \in \mathcal{G}$$

$$(v_1, v_2) \longrightarrow (x.v_1, x.v_2)$$

V est dit g-module somme directe.

Construction de g-modules

g-module adjoint

Dans le cas où $V = \mathcal{G}$

$$\mathcal{G}.(V = \mathcal{G}) \longrightarrow (V = \mathcal{G})$$

$$x.y \longrightarrow x.y = [x, y] \in \mathcal{G}$$

Dans ce cas $V = \mathcal{G}$ est dit g-module associé à la représentation adjointe.

g-module dual

Étant donné un g-module V:

$$\mathcal{G}.V \longrightarrow V$$

$$(x, v) \longrightarrow x.v$$

On peut construire un autre g-module V^* dual de V telle que:

$$\mathcal{G}.V^* \longrightarrow V^*$$

$$x, f \longrightarrow (x.f)(v) = -f(x.v) \quad x \in \mathcal{G}, \quad f \in V^* \text{ et } v \in V$$

g-module produit tensoriel

Soient:
V un espace vectoriel dont la base $\{|v_i >, \quad i = 1, ..., dimV = n\}$
W un espace vectoriel dont la base $\{|w_j >, \quad j = 1, ..., dimW = m\}$
$\{|v_i > \otimes |w_j >\}$ est une base de l'espace vectoriel $(|i >= |v_i >, |j >= |w_j >)$ produit tensoriel $V \bigotimes W$. La dimension de $V \bigotimes W = n.m$.
$V \bigotimes W$ muni de l'opération

$$\mathcal{G} : \quad V \bigotimes W \longrightarrow V \bigotimes W$$

$$(x, |i > \otimes x.(|i > \otimes |j >)$$

$$x.(|i > \otimes |j >) = (x.|i >) \otimes |j > + |i > \otimes (x.|j >)$$

est un g-module produit tensoriel.

Casimir d'une représentation d'une algèbre de Lie

Casimir d'une représentation

Définition : Une représentation $\phi : \quad \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^{'}$ d'un algèbre semi-simple est dite fidèle si à tout élément $\phi(x)$ de $\mathcal{G}^{'}$ correspond a un seul élément de $\mathcal{G}$ $(\phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

Casimir d'une représentation d'une algèbre de Lie

Base duale d'un algèbre de Lie

Définition 1:

Soient :

- ϕ une algèbre de Lie de dim finie
- β une forme bilinéaire, symétrique et associative sur $\mathcal{G}$

$$\beta : \quad \mathcal{G}\text{x}\mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Si $(T_1, ..., T_n)$ est une base de $\mathcal{G}$ alors il existe une base unique $(E_1, ..., E_n)$ duale de $\mathcal{G}$ relativement à β tel que:

$$\beta(T_i, E_j) = \delta_{ij} \equiv (T_i, E_j) \equiv < T_i, E_j >$$

$$x \in \mathcal{G} \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{dim\mathcal{G}} \alpha_i T_i$$

Casimir d'une représentation d'une algèbre de Lie

Base duale d'un algèbre de Lie

Définition 2:
Soient:
- $\phi : \quad \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}l(V)$ une représentation fidèle dans $\mathcal{G}l(V)$
- β une forme bilinéaire, symétrique et associative. $(dim\mathcal{G} = n)$

On appelle casimir de la représentation ϕ relativement à β.
La quantité $C_\beta(\phi)$ définie par

$$C_\beta(\phi) = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\phi(y_j)$$

$\{x_i\}$ et $\{y_j\}$ sont des bases duales de duales de $\mathcal{G}$ relativement à β

$$\beta(x_i, y_j) = \delta_{ij}$$

Plan

Les sous algèbres de Lie $\mathcal{G}l(2,\mathbb{C})$

Espace vectoriel $Mat(2,\mathbb{C})$

L'espace des matrices 2x2 compexes agissant sur les 2−vecteurs est un espace des opérateurs de $dim = 4$.

$x \in Mat(2,\mathbb{C}) \Rightarrow x = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$

$E_{ii} = |i><j| \quad x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On peut écrire x dans une autre base, par exemple la base de Carton

$\{\tau^{\mu}, \quad \mu = 0, +, -, 3\}$

avec $\tau^0 = E_{11} + E_{22} = I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau^+ = E_{12}, \quad \tau^- = E_{21}$ et $\tau^3 = E_{11} - E_{22}$

dans ce cas $x = a_0\tau^0 + a_+\tau^+ + a_-\tau^- + a_3\tau^3$

$\Rightarrow a = a_0 + a_3, \quad b = a_+, \quad c = a_-$ et $d = a_0 - a_3$.

Les relations de commutations dans la base de Carton sont:

$[\tau^0, \tau^{\mu}] = 0, \quad [\tau^3, \tau^{\pm}] = \pm 2\tau^{\pm}, \quad [\tau^{\pm}, \tau^-] = \tau^3$.

D'autres écritures sont possibles si faisant des transformations $x \Longrightarrow x^{'} = U^{-1}xU$

Les sous algèbres de Lie $\mathcal{G}l(2,\mathbb{C})$

Les sous algèbres de $\mathcal{G}l(2,\mathbb{C})$

i) $\mathcal{G}l(2,\mathbb{C}) = \{x \in Mat(2,\mathbb{C})/trx = qlq\}$ sa dimension est 4 complexes
ii) $sl(2,\mathbb{C}) = \{x \in Mat(2,\mathbb{C})/trx = 0\}$ sa dimension est 3 complexes (6 réelles).
$sl(2,\mathbb{C}) \subset \mathcal{G}l(2,\mathbb{C})$. Les générateurs de $sl(2,\mathbb{C})$ dans la base de Cartan sont: $\tau^{\pm}, \tau^{3}$

$$x \in sl(2,\mathbb{C}) \Rightarrow x = a_{-}\tau^{-} + a_{+}\tau^{+} + a_{3}\tau^{3}$$

$$\mathcal{G}l(2,\mathbb{C}) = \mathbb{C}\tau^{0} \oplus sl(2,\mathbb{C})$$

iii) L'algèbre $u(2)$: C'est une sous algèbre de Lie de $\mathcal{G}l(2,\mathbb{C})$ dont les éléments sont données par des matrices hermitiques.

$$u(2) = \{x \in Mat(2,\mathbb{C})/x^{+} = x\}$$

$$u(2) \subset \mathcal{G}l(2,\mathcal{C})$$

La dimension de $u(2)$ est 4 réelles.

Les sous algèbres de Lie $\mathcal{G}l(2, \mathbb{C})$

Définition:

Une représentation de l'algèbre de A_1 dans un espace vectoriel V_n de dimension finie (A_1-module) est un homomorphisme de l'algèbre A_1 dans l'algèbre $\mathcal{G}l(V_n)$ des matrices nxn

$$\phi: \quad A_1 \longrightarrow \mathcal{G}l(V_n)$$

$$x \longrightarrow \phi(x) \equiv (\quad)_{n\times n}$$

Exemple:

$n = 2$: Représentation fondamentale

$$\phi(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Modules de A_1

Modules HW

H: Highest ; W: Weight
ce sont les modules de plus haut poids (highest weight representation) la méthode de leur construction est quasi-similaire à celle permettant de construire l'espace de Hilbert dans la mécanique quantique.

Espaces poids (Weight space)

Rappelons que h est semi-simple de A_1 (h est diagonal) alors son image sur un homomorphisme d'algèbre est diagonalisable agissant sur un espace vectoriel de dimensionn.
Autrement dit, les modules de A_1 peuvent être décomposés en somme directe de sous espace propres (unidimensionnels) V_λ comme $V = \oplus_i V_{\lambda_i}$ où les sous espace V_{λ_i} de poids λ_i sont définies par:

$$V_{\lambda_i} = \{v_i \in V / \phi_v(h)v_i = \lambda_i v_i$$

Les λ_i sont le pods de h et les V_{λ_i} sont appelés espace poids associés aux valeurs λ_i.

Modules de A_1

Action de A_1 sur des espaces poids

Lemme: Si $v \in V_\lambda$ alors
i) $e.v \in V_{\lambda+2}$
i) $f.v \in V_{\lambda-2}$

Poids maximal et vecteur maximal

Si V un module de A_1 de dimension finie et $V = \oplus_i V_{\lambda i}$ sa décomposition en sous espace poids, alors il existe un poids $\lambda_{max}, V_{\lambda_{max}} \neq \{0\}$ tel que $V_{\lambda_{max}+2} = 0$ avec λ_{max}: poids maximal et $V_{\lambda_{max}}$: vecteur maximal du module de A_1.
Autrement dit: un vecteur est dit maximal si et seulement si

$$hV_{\lambda_{max}} = \lambda_{max} V_{max}$$

$$e.V_{max} = 0$$

Modules de A_1

Classification de modules de A_1 irréductible

Soient
- V un A_1-module
- $V = \oplus_i V_{\lambda_i}$
- v_0 un vecteur maximal de V_{λ_0} t.q $e.v_0 = 0$

Posons $(v_n = \frac{1}{n!} f^n.v_0,\ v_{-1} = 0)$

Lemme:
i) $h.v_n = (\lambda_0 - 2n)v_n$
ii) $f.v_n = (n+1)v_{n+1}$
iii) $e.v_n = (\lambda_0 - n + 1)v_{n-1}$

Plan

Sous Algèbre torique

Définition

Soient $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie semi-simple et x un élément de $\mathcal{G}$ tel que $x = x_s + x_N$
le sous espace T de $\mathcal{G}$ engendré par les éléments x_s (semi-simple) est une sous algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ appelée sous algèbre torique de $\mathcal{G}$.

$$T = \{x_s \,/\, x_s \quad \textit{élément semi} - \textit{simple de}\, \mathcal{G}\}$$

Exemples

1) $\mathcal{G} = sl(2, \mathbb{C})$

$$T = \{x_s = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \, a \in \mathbb{C}\}$$

c'est une algèbre abèlienne de dimension 1

2) $\mathcal{G} = sl(3, \mathbb{C}) = \{x_s \in gl(3, \mathbb{C}) \,/\, tr(\chi) = 0\}$

$$T = \{x_s \in \Delta(3) \,/\, tr(\chi) = 0\}$$

Donc on peut déduire que $T \subset \Delta(n)$
toute sous-algèbre torique de $\mathcal{G}$ est abélienne.

Sous Algèbre de Carton H

Définition 1 : Centralisateur et Normalisateur d'une algèbre de Lie

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie et soit $\mathcal{G}_0$ une sous-algèbre de $\mathcal{G}$. On appelle :
Centralisateur de $\mathcal{G}_0$ dans G

$$C(\mathcal{G}_0) = x \in \mathcal{G} \;/\; [x, \mathcal{G}_0] = 0$$

Normalisateur de $\mathcal{G}_0$ dans G

$$N(\mathcal{G}_0) = x \in \mathcal{G} \;/\; [x, \mathcal{G}_0] \subseteq \mathcal{G}_0$$

Définition 2 : sous algèbre torique maximal

Le sous algèbre de Carton est appelé sous algèbre torique maximal (noté H)

Sous Algèbre de Carton H

Exemples

1. 1) $sl(2, \mathbb{C})$
   $H = \mathbb{C}h_1$ avec $h_1 = E_{1,1} - E_{2;2}$ et $dim(H) = 1$

   2) $sl(3, \mathbb{C})$
   $H = \mathbb{C}h_1 \bigoplus \mathbb{C}h_2$ avec $h_1 = E_{1,1} - E_{2,2}, h_2 = E_{2,2} - E_{3,3}$ donc $dim(H) = 2$

   3) $sl(n, \mathbb{C})$
   $H = \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathbb{C}h_i$ avec $h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$, $dim(H) = n - 1$

Décomposition de Carton

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de *Lie* semi-simple .
Rappelons que $\forall h \in H$, ad_h est diagonalisable.

$$ad_{h_i}(\chi_a) = [h_i, \chi_a] = \lambda_a(h_i)\chi_a$$

$$\chi = \sum_{a=1}^{rang(g)} \alpha_a \chi_a$$

$$\forall \chi \in g, \forall h \in H\,;\, ad_h(\chi) = \alpha(h)\chi = [h, \chi]$$

avec
$\alpha(h)$ est la valeur propre de ad_h .
χ est le vecteur propre de ad_h .

Proposition

La sous-algèbre de Carton permet de décomposer l'algèbre en somme directe de sous espaces propres . **Lemme** $\mathcal{G}$ est décomposable en somme directe de sous espaces propres de g_α

$$g_\alpha = \{\chi \in g, \forall h \in H \,/\, ad_h(\chi) = \alpha(h)\chi = [h, \chi]\}$$

$g_0 = H$

Sytème des racines Δ de $\mathcal{G}$

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie semi-simple et $H \subset \mathcal{G}$ sa sous algèbre de Carton, L'ensemble Δ des formes α non nulles telle que $g_\alpha \neq 0$ est appelé système des racines de $\mathcal{G}$ relativement à H.

$$\Delta = \{(\alpha \neq 0) \in H^* \qquad / \qquad g_\alpha \neq 0\}$$

Remarque

1) $card(\Delta) = |\Delta| = dim(g) - rang(g)$
2) avec la notation de Δ , la décomposition de Carton s'écrit sous la forme

$$g = H \bigoplus \left[\bigoplus_{\alpha \in \Delta} g_\alpha \right]$$

Propriétés de l'ensemble Δ

Propriétés d'intégrabilité

On a 6 propriétés (à retenir)
P_1 : si $\alpha \in \Delta$ alors $\dim(g_\alpha) = 1$
P_2 : si $\alpha \in \Delta$, les seuls multiples de α appartenant à Δ sont $\alpha_\pm$ $(k\alpha; k = \pm 1)$
P_3 : si $\alpha, \beta \in \Delta$ alors
$\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ (les entiers de Carton) $\beta(h_\alpha) = K(t_\beta, t_\alpha)$ et $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Delta$
P_4 : si $\alpha, \beta \in \Delta$ avec $\alpha \neq \pm\beta$ et soient r et q les plus grands entiers tel que $\beta - r\alpha \in \Delta$ et $\beta + q\alpha \in \Delta$ alors:
1- $\beta + q\alpha \in \Delta$ avec $-r < m < q$
2- $\beta(h_\alpha) = r - q$

Plan

Matrice de Carton associée à $\triangle$

Définition de k :

Soit $\pi = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l\}$ une base de racines simples, on appelle matrice de Carton de $\triangle$ relativement à la base π, la matrice dont les entrées définies par :

$K_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_j)}$ (une matrice $l \times l$)

Exemple :

$i)$ $G = A_1 \oplus A_1 \Rightarrow K(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$ii)$ $G = A_2 \Rightarrow K(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$iii)$ $G = B_2 \Rightarrow K(G) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$iv)$ $G = G_2 \Rightarrow K(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Graphe des Coxeter et diagramme de Dynkin

Graphe de Coxeter :

On appellle graphe de Coxeter de $\triangle$ relativement à π le graphe dont les vertex sont les éléments de π, deux vertex α_i et α_j $(i \pm j)$ sont jointes par :

- $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ lignes.
- $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \{0, 1, 2, 3\}$.

Exemple :

A_1 $\bigcirc$

$A_1 \oplus A_1$ $\bigcirc \qquad \bigcirc$

A_2 $\bigcirc \longleftrightarrow \bigcirc$

B_2 $\bigcirc \Longleftrightarrow \bigcirc$

C_2 $\bigcirc \Longleftrightarrow \bigcirc$

G_2 $\bigcirc \Lleftarrow\!\Rrightarrow \bigcirc$

Graphe des Coxeter et diagramme de Dynkin

Diagramme de Dynkin

En géalité, le graphe de Coxeter ne suffit pas à déterminer la matrice de Carton, il ne fournit en effet que les angles entre les racines simples sans indiquer laquelle est la plus longue.

$B_2 \quad \bigcirc \Longleftarrow \Longrightarrow \bigcirc \qquad C_2 \quad \bigcirc \Longleftarrow \Longrightarrow \bigcirc$

Il faut remplacer les diagrammes de Dynkin sont des diagrammes de Coxeter orientés.

Définition : Diagramme de Dynkin

C'est un graphe de Coxeter, qui dans le cas où deux vertex i et j en plus d'un lien, on ajoute une flèche partant de la racine longue et pointant la racine courte

$\alpha_i \bigcirc \Longrightarrow \Rightarrow \bigcirc \quad |\alpha_i|\rangle\, |\alpha_j|\,.$

Le diagramme de Dynkin permet de specifier les entiers de Carton dont la matrice de Carton.