

فصل ۱

Observation of constructive interference at the edge of quantum ergodicity

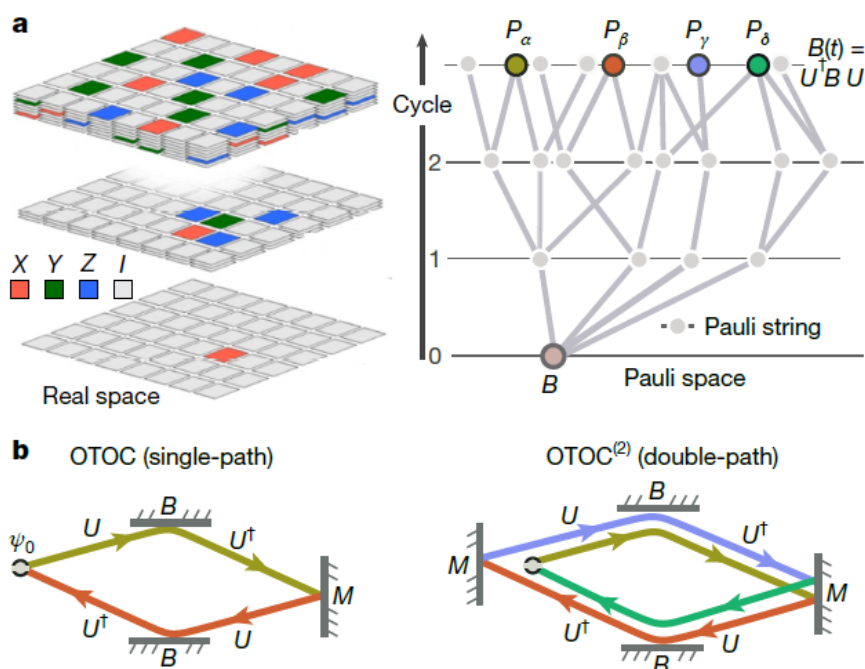
در این جا، ترجمه‌ای تحلیلی از مقاله جدید گروه Google Quantum AI^۲ که در مجله Nature در اکتبر ۲۰۲۵ منتشر شده است ارائه می‌شود [۱]. این مقاله به بررسی دینامیک سیستم‌های چندجسمی کوانتومی با استفاده از توابع همبستگی خارج از ترتیب زمانی OTOC^۳ پرداخته و نشان می‌دهد که اندازه‌گیری‌های مرتبه دوم این تابع، اطلاعاتی را در اختیار قرار می‌دهد که در روش‌های کلاسیکی قابل دسترسی نیستند.

۱-۱ مشاهده‌ی تداخل سازنده در مرز ارگودیسیتی کوانتومی

دینامیک سامانه‌های چندذره‌ای کوانتومی با مشاهده‌گرهایی مشخص می‌شود که از توابع همبستگی میان نقاط متفاوت فضا و زمان بازسازی می‌شوند. در سیستم‌هایی که در آن‌ها درهم‌تنیدگی به سرعت رشد می‌کند، مشاهده‌گرهای کوانتومی معمولاً در زمان‌های طولانی نسبت به جزئیات دینامیک زیرین بی‌حس

^۲ Observation of constructive interference at the edge of quantum ergodicity

^۳ Out-of-Time-Order Correlators



شکل ۱-۱: ساختار کلی و شماتیک پروتکل های OTOC (شکل توضیحی).

می‌شوند؛ این پدیده ناشی از «آشفته‌گی» یا همان scrambling اطلاعات کوانتومی است.

برای دور زدن این محدودیت و دسترسی به دینامیک مؤثر، در سال‌های اخیر از **پروتکل‌های معکوس زمانی** (time-reversal protocols) استفاده شده است. در این پژوهش، ما با استفاده از پردازنده‌ی کوانتومی ابررسانا، **همبستگی‌های مرتبه‌دوم خارج از ترتیب زمانی** یا OTOC(2) را به‌صورت تجربی اندازه‌گیری کردیم. نتایج نشان می‌دهند که این کمیت در مقیاس‌های زمانی طولانی همچنان به دینامیک زیرین حساس باقی می‌ماند.

همچنین، OTOC(2) ساختارهای همبستگی کوانتومی را در سامانه‌ای بسیار درهم‌تنیده آشکار می‌کند که بدون بهره‌گیری از تکنیک‌های معکوس زمان قابل دسترسی نیستند. ما این پدیده را از طریق پروتکلی آزمایشی نشان می‌دهیم که در آن، فاز رشته‌های پائولی در تصویر هاینبرگ با درج اپراتورهای پائولی در حین تکامل کوانتومی تصادفی‌سازی می‌شود. مقادیر اندازه‌گیری‌شده‌ی OTOC(2) تغییر قابل توجهی نسبت به حالت عادی نشان می‌دهند، که این امر حاکی از **تداخل سازنده میان رشته‌های پائولی** است؛ رشته‌هایی که مسیرهای حلقوی بزرگی را در فضای پیکربندی تشکیل می‌دهند.

این مکانیزم تداخل مشاهده‌شده نه تنها منشأ حساسیت بیشتر OTOC(2) به دینامیک کوانتومی است، بلکه **پیچیدگی شبه‌سازی کلاسیکی بالایی** نیز به آن می‌بخشد. ترکیب این دو ویژگی — یعنی

حساسیت زیاد و دشواری شبیه‌سازی کلاسیکی— نشان می‌دهد که اندازه‌گیری (2) OTOC می‌تواند راهی عملی به‌سوی **مزیت کوانتومی کاربردی** باشد.

در چارچوب کلی‌تر، هدف ما شناسایی و تحلیل همبستگی‌های پیچیده میان درجات آزادی بسیار زیاد در یک سامانه‌ی کوانتومی است— که موضوعی بنیادین در شبیه‌سازی دینامیک کوانتومی محسوب می‌شود. حتی مسائل طیف‌سنجی نیز را می‌توان بر پایه‌ی چندنقطه‌ای از همین توابع همبستگی زمان— مکان بازنویسی کرد. اما با رشد درهم‌تنیدگی، سامانه به‌طور مؤثر به حالت ارگودیک میل می‌کند و حساسیت مشاهده‌گرهای معمولی نسبت به جزئیات دینامیک به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد. این ویژگی، تحلیل و آشکارسازی همبستگی‌های چندبدنه‌ای را در عمل بسیار دشوار می‌کند.

روش‌های کلاسیکی تحلیل آشفتگی— مانند مطالعه‌ی حساسیت به شرایط اولیه یا «اثر پروانه‌ای»— در اینجا بی‌فایده‌اند، زیرا خطی بودن معادله‌ی شرودینگر اجازه‌ی چنین رویکردهایی را نمی‌دهد. در عوض، پروتکل‌هایی که از **بازتاب یا بازآوایی زمان** (echoing) برای حذف بخش عمده‌ای از تکامل سامانه استفاده می‌کنند، ابزار حیاتی در کاوش دینامیک‌های درهم‌تنیده شده‌اند. این روش‌ها نه تنها در مترولوجی و سنجش کوانتومی بلکه در مطالعات مربوط به **آشوب، سیاه‌چاله‌ها و گرمایش کوانتومی** نیز نقشی کلیدی ایفا کرده‌اند.

در چارچوب تصویر هاینبرگ، دنباله‌های دینامیکی شامل معکوس زمان را می‌توان به‌صورت **پدیده‌ی تداخل میان مسیرهای چندبدنه‌ای** در نظر گرفت. هر مرحله‌ی معکوس زمان، در واقع به افزایش بازوهای تداخلی و ترکیب‌های متقاطع جدید میان مسیرها منجر می‌شود که در نهایت در قالب کمیت‌هایی به نام OTOC ظاهر می‌شوند.

بنابراین، اندازه‌گیری‌های $OTOC(k)$ را می‌توان به‌منزله‌ی آزمایش‌های تداخل زمانی کوانتومی دانست که در آن، تعداد بازوهای تداخل (مرتبه‌ی k) تعیین‌کننده‌ی میزان دقت و عمق آشکارسازی همبستگی‌های پنهان است. در این تحقیق نشان داده می‌شود که هرچه مرتبه‌ی $OTOC(k)$ بالاتر باشد، حساسیت آن به دینامیک میکروسکوپی نیز افزایش می‌یابد، و به‌ویژه $OTOC(2)$ تداخل سازنده‌ای میان رشته‌های پائولی ایجاد می‌کند که در مشاهده‌گرهای مرتبه پایین‌تر قابل تشخیص نیست.

۲-۱ حساسیت OTOCs نسبت به دینامیک کوانتومی

برای درک بهتر نحوه‌ی بازیابی حساسیت به جزئیات دینامیک کوانتومی از طریق پروتکل‌های معکوس زمان، اندازه‌گیری عملگر پائولی $M \in \{X, Y, Z\}$ روی کیوبیت q_m را در نظر می‌گیریم؛ سامانه‌ای که روی یک شبکه‌ی مربعی از کیوبیت‌ها قرار دارد و در آغاز در یکی از حالت‌های ویژه‌ی M آماده‌سازی شده است.

اندازه‌گیری این عملگر در زمان t معادل محاسبه‌ی ****همبستگی زمان‌مرتب**** (Time-Ordered Correlator یا TOC) است:

$$\langle M(t)M \rangle, \quad M(t) = U^\dagger(t)MU(t),$$

که در آن $U(t)$ تکامل زمانی چندبدنه‌ی سامانه و $\langle \cdot \rangle$ امیدریاضی بر حالت اولیه است. مطابق با آزمایش‌های پیشین [؟، ؟]، مقدار $\langle M(t)M \rangle$ با گذشت زمان به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد؛ چراکه اطلاعات کوانتومی اولیه‌ی کیوبیت q_m در فضای هیلبرت نمایی بزرگ سامانه پخش می‌شود (پدیده‌ی اسکرملینگ). اما این کاهش را می‌توان به‌صورت جزئی بازآوایی کرد. برای این منظور، تکامل $U(t)$ با دنباله‌ای موسوم به ****دنباله‌ی آونگ تودرتو**** (nested echo sequence) جایگزین می‌شود:

$$U_k(t) = B(t)[MB(t)]^{k-1}, \quad B(t) = U^\dagger(t)BU(t),$$

که در آن B یک اپراتور پائولی دیگر است که روی کیوبیت q_b (در فاصله‌ای از q_m) عمل می‌کند و $k \geq 1$ مرتبه‌ی تکرار بازآوایی است. تأثیر این دنباله را می‌توان چنین توصیف کرد: اطلاعاتی که توسط M تزریق می‌شود، با B اصلاح می‌گردد، سپس به حالت اولیه بازگردانده می‌شود، و این فرایند $k - 1$ بار تکرار می‌گردد.

در این حالت، امیدریاضی مربوط به مشاهده‌گر نهایی (که در این کار با نماد $C_k^{(2)}$ نمایش داده می‌شود) به‌شکل زیر نوشته می‌شود:

$$C_k^{(2)} = \langle U_k^\dagger(t) M U_k(t) M \rangle. \quad (1)$$

این کمیت همان $C_k^{(2)}$ همبستگی خارج از ترتیب زمانی مرتبه‌ی دوم $OTOC(2)$ است. در نتیجه، $C_k^{(2)}$ را می‌توان به‌طور کلی‌تر $OTOC(k)$ یا همبستگی مرتبه‌ی k نامید.

۱-۲-۱ تفسیر فیزیکی معادله (۱)

رابطه‌ی (۱) دو بینش مهم ارائه می‌دهد:

۱. $C_k^{(2)}$ موج‌پیشانی اطلاعات: اگر اطلاعاتی که از q_m منشأ می‌گیرد هنوز به q_b نرسیده باشد، اپراتورهای M و $B(t)$ با هم جابجایی‌پذیرند، و مقدار $C_k^{(2)}$ برابر با مقدار اولیه‌اش باقی می‌ماند. در نتیجه، مرزی زمانی-فضایی به‌صورت یک «جبهه‌ی اطلاعات» (information front) شکل می‌گیرد که سرعت گسترش درهم‌تنیدگی را نشان می‌دهد.

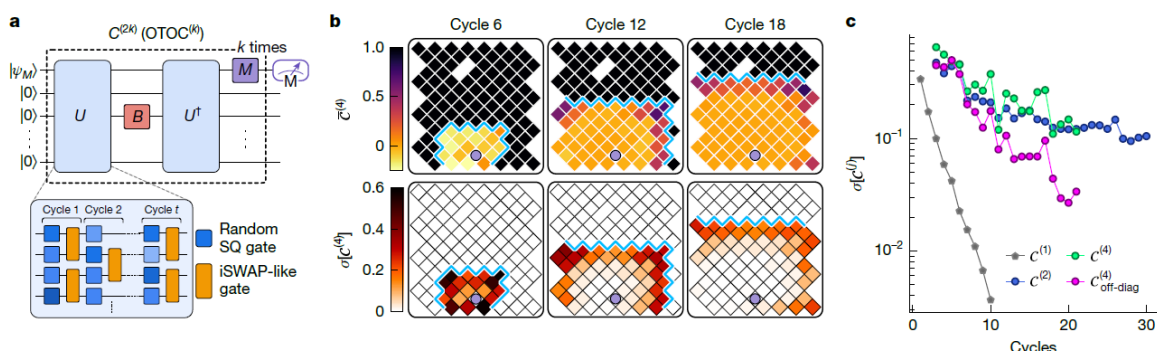
۲. $C_k^{(2)}$ تداخل چندمسیر در فضای پائولی: اگر U از نوع کلیفورد نباشد، اطلاعات منتقل شده از M می‌تواند از مسیرهای مختلفی در فضای پیکربندی بازگردد. همبستگی میان رشته‌های پائولی در $B(t)$ می‌تواند موجب $C_k^{(2)}$ تداخل سازنده میان مسیرهای مختلف $C_k^{(2)}$ شود؛ اثری که تنها برای $k \geq 2$ در $OTOC(k)$ ظاهر می‌شود.

۲-۲-۱ آزمایش‌های تجربی

در این پژوهش برای بررسی حساسیت $OTOC(2)$ به جزئیات میکروسکوپی دینامیک، از مدارهای کوانتومی تصادفی متشکل از دروازه‌های تک‌کیوبیتی تصادفی و دوکیوبیتی ثابت استفاده شده است (شکل ۲-۱).

در هر آزمایش، کیوبیت‌های q_m و q_b ثابت‌اند، اما پارامترهای تصادفی دروازه‌های تک‌کیوبیتی تغییر داده می‌شوند تا مجموعه‌ای از نمونه‌های آماری به‌دست آید.

برای هر طول مدار زمانی t ، مقدار $C_k^{(2)}(q_m, q_b, t)$ بارها اندازه‌گیری شد تا نویز آماری کمتر از ۱۰٪ میانگین باشد. این فرآیند برای ترکیب‌های مختلفی از q_m و q_b و برای ۵۰ تا ۲۵۰ نمونه‌ی تصادفی تکرار گردید. در نهایت، تمام مقادیر آزمایشگاهی $C^{(2)}$ و $C^{(4)}$ با ضریب بازنرمال‌سازی یکسان (به‌دست‌آمده از استراتژی‌های کاهش خطا) مقیاس‌دهی شدند.



شکل ۱-۲: حساسیت OTOC به جزئیات میکروسکوپی دینامیک — شکل شماتیک/نمونه.

نتایج (در شکل 1-2 b) نشان می‌دهد که جبهه‌ی اطلاعاتی یادشده به‌وضوح قابل مشاهده است. برای هر چرخه‌ی زمانی، مرزی مشخص برای کیوبیت q_b وجود دارد که ورای آن $C^{(4)} \approx 1$ است. این مرز همان «مخروط نوری» سامانه است که نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی کیوبیت‌هایی است که با q_m درهم‌تنیده شده‌اند.

همچنین مشاهده شد که نوسانات مداربه‌مدار مقدار $C^{(4)}$ ، یعنی انحراف معیار σ بین نمونه‌های تصادفی، در همان مرتبه‌ی بزرگی مقدار میانگین آن در نزدیکی جبهه‌ی اطلاعات است. این نتیجه تأییدی است بر اینکه $C^{(4)}$ به‌شدت به جزئیات دینامیک زیرین U حساس است — خاصیتی که در ادامه برای یادگیری همیلتونی به‌کار گرفته می‌شود.

۳-۲-۱ رفتار زمانی نوسانات

برای بررسی دقیق‌تر کاهش حساسیت در طول زمان، انحراف معیار کمیت‌های مختلفی از جمله TOC، $\text{OTOC}(2)$ ، $\text{OTOC}(4)$ و مؤلفه‌ی خارج‌قطری $\text{OTOC}(2)_{\text{off-diag}}$ اندازه‌گیری شد (در شکل 1-2 c). نتایج نشان دادند که در حالی که انحراف معیار TOC به‌صورت نمایی افت می‌کند و در حدود $t = 9$ به کمتر از ۰/۰۱ می‌رسد، نوسانات OTOCs به‌صورت **قانون توانی** کاهش می‌یابند و حتی تا $t = 20$ بزرگ‌تر از ۰/۰۱ باقی می‌مانند.

این تضاد چشمگیر میان رفتار TOC و OTOC نشان می‌دهد که ساختار تداخلی‌ها OTOCs نقش اصلی را در حفظ حساسیت آن‌ها نسبت به جزئیات دینامیک کوانتومی ایفا می‌کند.

بنابراین، $\text{OTOC}(2)$ و $\text{OTOC}(4)$ را می‌توان ابزارهایی دانست که نه تنها قادر به تشخیص ناحیه‌های فعال اطلاعاتی در شبکه‌ی کوانتومی هستند، بلکه حتی در حضور آشفتگی و نویز، نسبت به ساختار میکروسکوپی دینامیک نیز حساس باقی می‌مانند. این ویژگی پایه‌ی نظری نتایج بعدی مقاله است، جایی که نشان داده می‌شود تداخل‌های چندمسیره‌ی بزرگ در $\text{OTOC}(2)$ منشأ پیچیدگی شبیه‌سازی کلاسیکی و مزیت بالقوه‌ی کوانتومی‌اند.

۳-۱ حساسیت OTOCs نسبت به دینامیک کوانتومی

برای درک بهتر نحوه‌ی بازیابی حساسیت به جزئیات دینامیک کوانتومی از طریق پروتکل‌های معکوس زمان، اندازه‌گیری عملگر پائولی $M \in \{X, Y, Z\}$ روی کیوبیت q_m را در نظر می‌گیریم؛ سامانه‌ای که روی یک شبکه‌ی مربعی از کیوبیت‌ها قرار دارد و در آغاز در یکی از حالت‌های ویژه‌ی M آماده‌سازی شده است.

اندازه‌گیری این عملگر در زمان t معادل محاسبه‌ی ****همبستگی زمان مرتب**** (TOC) ^۱ است:

$$\langle M(t)M \rangle, \quad M(t) = U^\dagger(t)MU(t),$$

که در آن $U(t)$ تکامل زمانی چندبدنه‌ی سامانه و $\langle \cdot \rangle$ امیدریاضی بر حالت اولیه است. مطابق با آزمایش‌های پیشین [۱۰، ۱۱]، مقدار $\langle M(t)M \rangle$ با گذشت زمان به صورت نمایی کاهش می‌یابد؛ چراکه اطلاعات کوانتومی اولیه‌ی کیوبیت q_m در فضای هیلبرت نمایی بزرگ سامانه پخش می‌شود (پدیده‌ی اسکرملینگ). اما این کاهش را می‌توان به صورت جزئی بازآوایی کرد. برای این منظور، تکامل $U(t)$ با دنباله‌ای موسوم به ****دنباله‌ی اِکو تودرتو**** (nested echo sequence) جایگزین می‌شود:

$$U_k(t) = B(t)[MB(t)]^{k-1}, \quad B(t) = U^\dagger(t)BU(t),$$

که در آن B یک اپراتور پائولی دیگر است که روی کیوبیت q_b (در فاصله‌ای از q_m) عمل می‌کند و $k \geq 1$ مرتبه‌ی تکرار بازآوایی است. تأثیر این دنباله را می‌توان چنین توصیف کرد: اطلاعاتی که توسط M

¹ Time-Ordered Correlator

تزریق می‌شود، با B اصلاح می‌گردد، سپس به حالت اولیه بازگردانده می‌شود، و این فرایند $k - 1$ بار تکرار می‌گردد.

در این حالت، امیدریاضی مربوط به مشاهده‌گر نهایی (که در این کار با نماد $C_k^{(2)}$ نمایش داده می‌شود) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$C_k^{(2)} = \langle U_k^\dagger(t) M U_k(t) M \rangle. \quad (1)$$

این کمیت همان ****همبستگی خارج از ترتیب زمانی مرتبه‌ی دوم**** ($\text{OTOC}(2)$) است. در نتیجه، $C_k^{(2)}$ را می‌توان به طور کلی تر $\text{OTOC}(k)$ یا همبستگی مرتبه‌ی k نامید.

۱-۳-۱ تفسیر فیزیکی معادله (۱)

رابطه‌ی (۱) دو بینش مهم ارائه می‌دهد:

۱. ****موج پیشانی اطلاعات****: اگر اطلاعاتی که از q_m منشأ می‌گیرد هنوز به q_b نرسیده باشد، اپراتورهای M و $B(t)$ با هم جابجایی‌پذیرند، و مقدار $C_k^{(2)}$ برابر با مقدار اولیه‌اش باقی می‌ماند. در نتیجه، مرزی زمانی-فضایی به صورت یک «جبهه‌ی اطلاعات» (information front) شکل می‌گیرد که سرعت گسترش درهم‌تنیدگی را نشان می‌دهد.

۲. ****تداخل چندمسیر در فضای پائولی****: اگر U از نوع کلیفورده نباشد، اطلاعات منتقل شده از M می‌تواند از مسیرهای مختلفی در فضای پیکربندی بازگردد. همبستگی میان رشته‌های پائولی در $B(t)$ می‌تواند موجب ****تداخل سازنده میان مسیرهای مختلف**** شود؛ اثری که تنها برای $k \geq 2$ در $\text{OTOC}(k)$ ظاهر می‌شود.

۴-۱ تداخل حلقه‌های بزرگ در $\text{OTOC}(2)$

در بخش قبل، دیدیم که کمیت‌های $\text{OTOC}(k)$ نسبت به جزئیات دینامیکی سامانه بسیار حساس‌اند. در این بخش نشان داده می‌شود که ریشه‌ی این حساسیت در ****پدیده‌ی تداخل چندمسیره در فضای اپراتورهای پائولی**** است. به طور خاص، در $\text{OTOC}(2)$ مسیرهایی وجود دارند که در فضای پیکربندی

تشکیل «حلقه‌های بزرگ» می‌دهند و به همین دلیل اثر تداخلی آن‌ها به صورت سازنده آشکار می‌شود. این تداخل‌های بزرگ مستقیماً منجر به **افزایش پیچیدگی شبیه‌سازی کلاسیکی** می‌گردند.

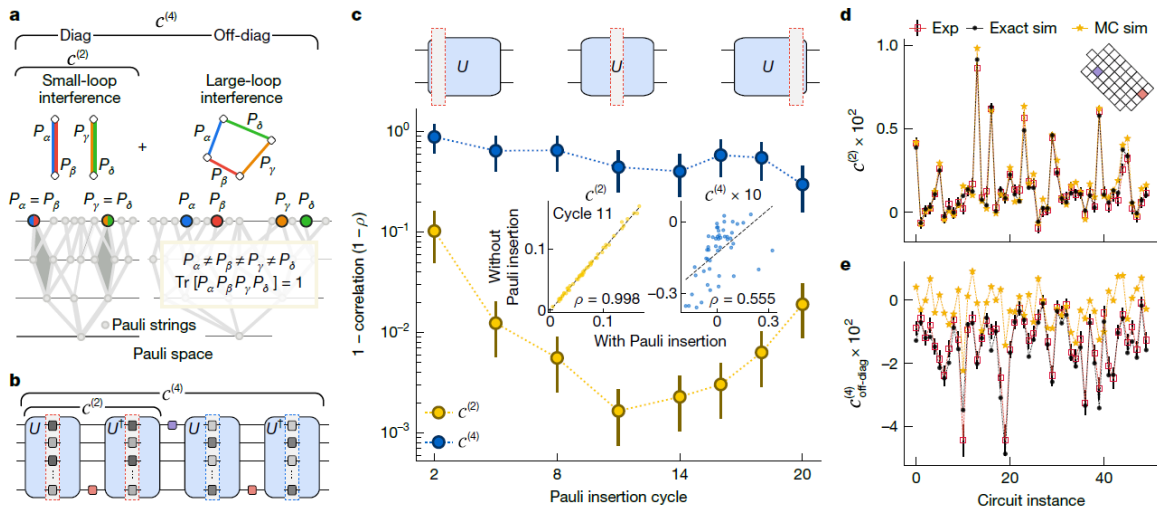
۱-۴-۱ بسط اپراتورهای زمانی در فضای پائولی

در چارچوب تصویر هاینبرگ، اپراتور $B(t) = U^\dagger(t)BU(t)$ را می‌توان بر حسب پایه‌ی کامل رشته‌های پائولی $\{P_n\}$ نوشت:

$$B(t) = \sum_{n=1}^{4^N} b_n(t) P_n,$$

که در آن، ضرایب $b_n(t)$ حقیقی و زمان وابسته‌اند و N تعداد کیوبیت‌های سامانه است.

این بسط نشان می‌دهد که با گذشت زمان، اپراتور اولیه B در فضای پائولی گسترش می‌یابد و به ترکیبی از رشته‌های چندکیوبیتی تبدیل می‌شود — پدیده‌ای که به آن **درهم‌تنیدگی اپراتوری** (operator entanglement) گفته می‌شود. در مدارهایی که شامل دروازه‌های غیرکلیفورد هستند، این گسترش به صورت تصاعدی رخ می‌دهد و مسیرهای پائولی در فضای اپراتور شروع به شاخه‌شدن و سپس بازترکیب می‌کنند (در شکل a 1-3).



شکل ۱-۳: نمونه‌ای از «تداخل حلقه بزرگ» که منجر به تقویت سیگنال OTOC می‌شود.

۱-۴-۲ تداخل حلقه‌های کوچک و بزرگ

دو نوع عمده‌ی تداخل در این فضا قابل تشخیص است:

۱. ****تداخل حلقه‌های کوچک:**^۱ این نوع تداخل هنگامی رخ می‌دهد که مسیرهای پائولی مختلف در بازه‌های کوتاه زمانی با هم بازترکیب شوند. این حالت معادل تداخل موضعی میان مسیرهای نزدیک است و در هر دو کمیت $C^{(2)}$ و $C^{(4)}$ وجود دارد.

۲. ****تداخل حلقه‌های بزرگ:**^۲ این پدیده زمانی رخ می‌دهد که ترکیب چندین مسیر پائولی در پایان تکامل زمانی تشکیل یک حلقه‌ی کامل در فضای پیکربندی دهد. در این حالت، شرط غیرصفر بودن ردیابی در رابطه‌ی زیر برقرار می‌شود:

$$C^{(4)} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} c_{\alpha\beta\gamma\delta} \text{Tr}[P_\alpha P_\beta P_\gamma P_\delta], \quad (2)$$

که در آن $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ضرایب حقیقی هستند. برای آن‌که جمله‌ای در مجموع بالا سهم غیرصفر داشته باشد، حاصل ضرب چهار رشته‌ی پائولی باید برابر با همانی باشد؛ یعنی مسیرهای $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ باید یک حلقه‌ی بسته تشکیل دهند.

دو نوع سهم در این رابطه ظاهر می‌شود: ****مولفه‌ی قطری:**^{**} زمانی که $\alpha = \beta$ و $\gamma = \delta$ ، که حلقه مساحت صفر دارد. - ****مولفه‌ی خارج قطری:**^{**} زمانی که هیچ‌کدام از شاخص‌ها برابر نیستند؛ این مولفه شامل حلقه‌هایی با مساحت بزرگ در فضای اپراتور است و منبع اصلی تداخل کوانتومی محسوب می‌شود.

توضیح فیزیکی: در زبان تداخلی، هر مسیر پائولی را می‌توان بازوی یک تداخل سنج دانست. حلقه‌های بزرگ متناظر با مسیرهایی هستند که از چند بازوی مستقل تشکیل شده‌اند و در انتها فازهای آن‌ها به‌صورت سازنده با هم جمع می‌شوند — مشابه با پدیده‌ی تداخل چندمسیره در نورشناسی کوانتومی.

¹ Small-loop interference

² (Large-loop interference

۱-۴-۳ آزمایش درج تصادفی اپراتور پائولی

برای بررسی تجربی نقش این تداخل‌ها، پژوهشگران در میانه‌ی تکامل زمانی U و U^\dagger ، اپراتورهای تصادفی پائولی را در برخی از چرخه‌ها درج کردند (در شکل 1-3 b). درج این اپراتورها باعث تصادفی شدن فاز ضرایب $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ می‌شود بدون آنکه دامنه‌ی آن‌ها تغییر کند. از دیدگاه تداخلی، این عمل معادل با تغییر فاز در یک بازوی تداخل سنج است.

با مقایسه‌ی داده‌های به دست آمده از مدارهای دارای درج پائولی و بدون آن، می‌توان میزان مشارکت تداخل کوانتومی را از تغییر همبستگی‌ها استخراج کرد. در (در شکل 1-3 c)، کمیت $1 - \rho$ (که ρ ضریب همبستگی پیرسون میان دو مجموعه داده است) به عنوان تابعی از چرخه‌ی درج پائولی نمایش داده شده است. نتیجه آن است که درج پائولی تغییر چشمگیری در $C^{(4)}$ ایجاد می‌کند، در حالی که تأثیر آن بر $C^{(2)}$ بسیار کمتر است؛ این موضوع تأیید می‌کند که سهم غالب در $C^{(4)}$ ناشی از $C^{(4)}$ تداخل حلقه‌های بزرگ** است.

همچنین مشاهده شد که تأثیر درج پائولی در چرخه‌های پایانی اندکی کاهش می‌یابد که می‌تواند ناشی از $C^{(4)}$ ناهمدوسی خارجی** و کاهش دیدپذیری تداخل باشد.

۱-۴-۴ ارتباط با پیچیدگی شبیه‌سازی کلاسیکی

درک نقش تداخل‌های بزرگ برای تعیین مرز میان شبیه‌سازی کوانتومی و کلاسیکی بسیار حیاتی است. در این پژوهش، مقادیر تجربی $C^{(2)}$ با نتایج به دست آمده از الگوریتم‌های شبیه‌سازی کلاسیکی مقایسه شد، از جمله $C^{(2)}$ روش مونت کارلو کش شده**^۱ و $C^{(2)}$ شبکه‌های تانسوری مونت کارلو**.

در آزمایش‌های شامل ۴۰ کیوبیت (در شکل 1-3 d)، هرچند شبیه‌سازی‌های CMC تا حدی با داده‌های تجربی $C^{(2)}$ منطبق بودند (با نسبت سیگنال به نویز $\text{SNR} \approx 5$ مشابه آزمایش)، اما همین الگوریتم‌ها در بازتولید مؤلفه‌ی خارج قطری $C_{\text{off-diag}}^{(4)}$ شکست خوردند ($\text{SNR} \approx 1.1$ در برابر ۹.۳ آزمایش). این نتیجه نشان می‌دهد که بخش عمده‌ی اطلاعات دینامیکی در تداخل‌های بزرگ نهفته است — بخشی که برای الگوریتم‌های کلاسیکی عملاً غیرقابل دسترس است.

توضیح تکمیلی: شکست شبیه‌سازی کلاسیکی در بازتولید $C_{\text{off-diag}}^{(4)}$ ناشی از وجود «مسئله‌ی

¹ Cached Monte Carlo, CMC

علامت» (sign problem) است؛ زیرا ضرایب تداخل دارای فازهای تصادفی و نوسانی هستند که در روش‌های آماری کلاسیکی میانگین‌گیری آن‌ها به صورت کارآمد ممکن نیست. این پدیده همان ویژگی است که مرز واقعی بین «رفتار کلاسیکی قابل شبیه‌سازی» و «مزیت کوانتومی» را مشخص می‌کند.

بخش حاضر نشان داد که حساسیت بالای $OTOC(2)$ و $OTOC(4)$ نسبت به جزئیات میکروسکوپی، ناشی از وجود تداخل‌های چندمسیره در فضای اپراتورهای پائولی است. به‌ویژه، تداخل‌های حلقه‌ای بزرگ—که از ترکیب مسیرهای مستقل با فازهای تصادفی شکل می‌گیرند—منشأ* پیچیدگی شبیه‌سازی کلاسیکی و مزیت ذاتی محاسبات کوانتومی** هستند.

این درک بنیادی، در بخش‌های بعدی (شکل‌های ۴ و ۵) مبنای تحلیل رژیم‌های فراتر از شبیه‌سازی کلاسیکی و کاربرد $OTOC(2)$ در یادگیری همیلتونی قرار می‌گیرد.

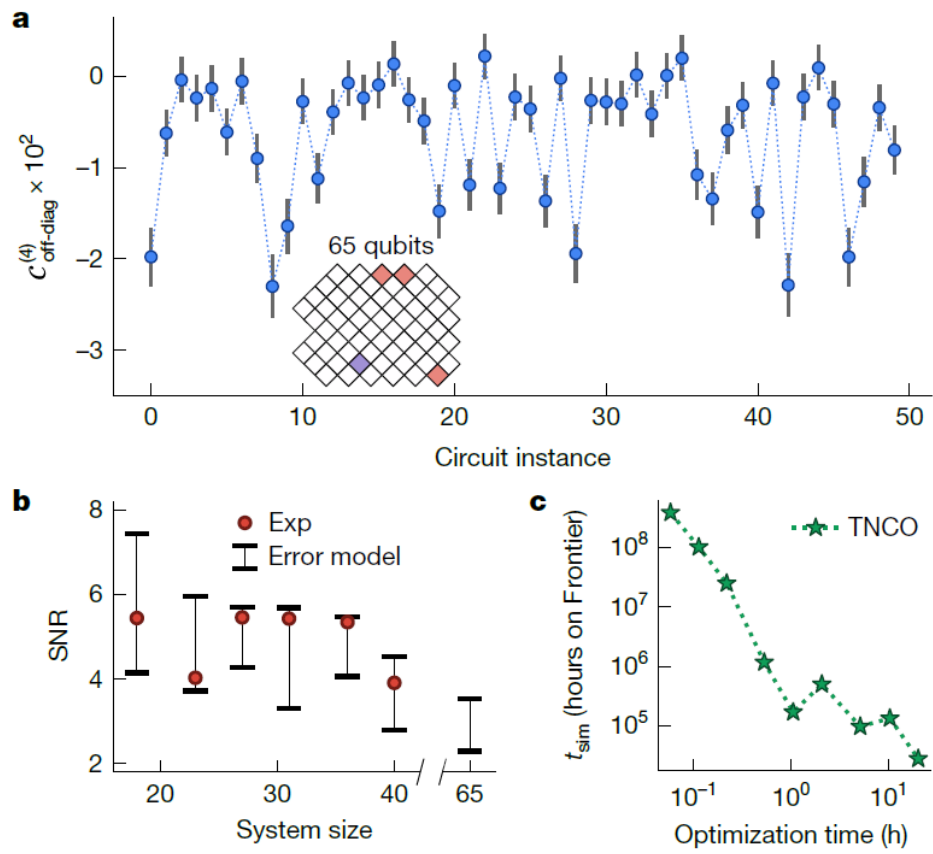
۵-۱ گامی به سوی مزیت کوانتومی کاربردی

ترکیب دو ویژگی مهم—یعنی حساسیت بالا و پیچیدگی زیاد برای شبیه‌سازی کلاسیکی—باعث می‌شود که همبستگی‌های مرتبه‌ی دوم مانند $OTOC(2)$ نامزد بسیار مناسبی برای دستیابی به مزیت کوانتومی کاربردی باشند. در این بخش، دو آزمایش تجربی مستقل ارائه می‌شود که اهمیت عملی این نتیجه را نشان می‌دهند:

۱. اثبات اینکه $OTOC(2)$ را می‌توان با دقت بالا در ناحیه‌ای اندازه‌گیری کرد که برای ابررایانه‌های کلاسیکی شبیه‌سازی‌ناپذیر است؛ ۲. نمایش یک مثال کاربردی از استفاده‌ی $OTOC(2)$ در حل یک مسئله‌ی واقعی یادگیری همیلتونی.

۱-۵-۱ آزمایش در رژیم فراتر از توان شبیه‌سازی کلاسیکی

در آزمایش نخست، مقادیر $OTOC(2)_{\text{off-diag}}$ در مدارهایی با 65 کیوبیت اندازه‌گیری شد (شکل 1-a-4). در این پیکربندی، اپراتور B به‌طور هم‌زمان روی سه کیوبیت مختلف اعمال شد تا «حجم کوانتومی مؤثر» افزایش یابد—یعنی تعداد گیت‌های دوکیوبیتی‌ای که درون مخروط‌های نوری اپراتورهای B و M قرار می‌گیرند [؟]. نتایج نشان دادند که نسبت سیگنال به نویز (SNR) در محدوده‌ی 3 تا 2 باقی



شکل ۴-۱: نمونه‌ای از روند به‌کارگیری OTOC در یادگیری همیلتونی؛ منحنی اختلاف یا loss بر حسب پارامتر فاز ϕ .

می‌ماند، حتی با افزایش تعداد کیوبیت‌ها. این رفتار توسط مدل تجربی خطا نیز بازتولید شد و نشان داد که با وجود افزایش اندازه‌ی سامانه، افت سیگنال بسیار کند است (شکل 1-4b).

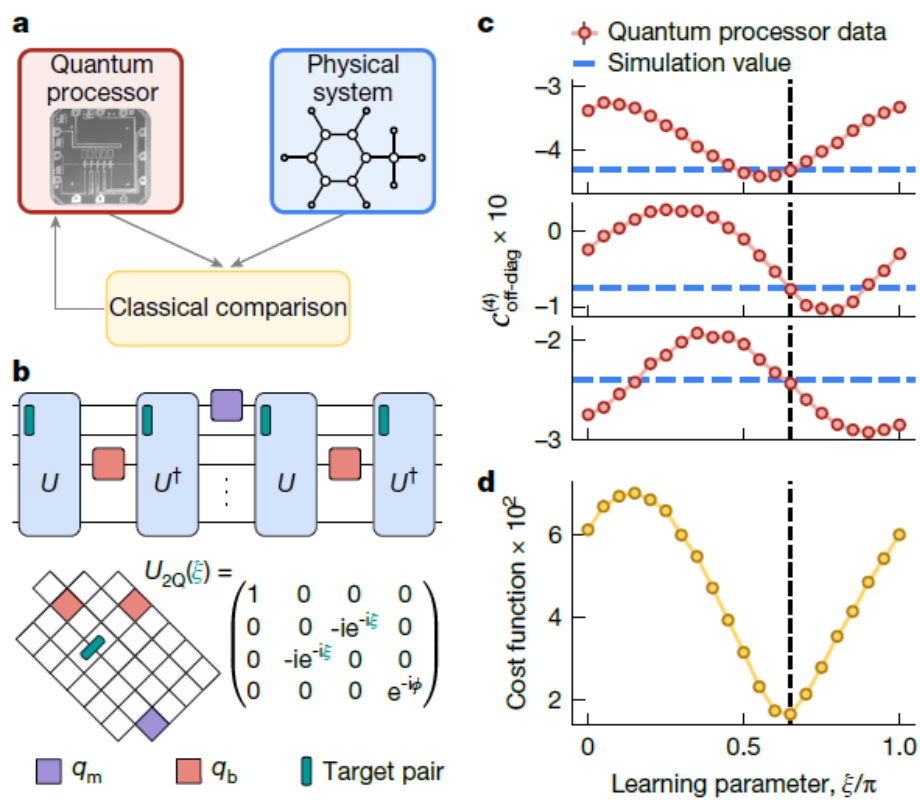
از سوی دیگر، هیچ‌یک از الگوریتم‌های کلاسیکی شناخته‌شده—از جمله شبکه‌های تانسوری با فشرده‌سازی بهینه—نتوانستند نتایج را با دقت مشابه بازسازی کنند. برآورد هزینه‌ی محاسباتی برای شبیه‌سازی همان مدارها با استفاده از ابررایانه‌ی Frontier نشان داد که محاسبه‌ی کامل $\text{OTOC}(2)_{\text{off-diag}}$ برای یک مدار ۶۵ کیوبیتی حدود ۳/۲ سال زمان محاسباتی نیاز دارد (شکل 1-4c). این در حالی است که داده‌های تجربی متناظر در تنها ۲/۱ ساعت به‌دست آمدند. به بیان دیگر، این آزمایش اکنون در ناحیه‌ی فراتر از کلاسیک (beyond-classical regime) قرار دارد—مرزی که در آن شبیه‌سازی عددی کلاسیکی دیگر عملی نیست.

توضیح فیزیکی: SNR بزرگ‌تر از یک بیانگر آن است که سیگنال اندازه‌گیری‌شده با دقت کافی از نویز تفکیک می‌شود، و هنگامی که این شرط در سامانه‌هایی با بیش از چند ده کیوبیت برقرار باشد، سیستم عملاً به قلمرو محاسبه‌ی کوانتومی غیرقابل‌کاهش وارد شده است.

۱-۵-۲ کاربرد: یادگیری همیلتونی با استفاده از $\text{OTOC}(2)$

در آزمایش دوم (شکل 1-5 a)، پژوهشگران نشان دادند که می‌توان از $\text{OTOC}(2)$ برای یادگیری همیلتونی استفاده کرد. در این روش، سامانه‌ی فیزیکی مورد نظر (با همیلتونی ناشناخته) مجموعه‌ای از داده‌های تجربی $\text{OTOC}(2)$ را تولید می‌کند. سپس، یک شبیه‌سازی کوانتومی از همان سامانه، ولی با پارامترهای قابل تنظیم، اجرا می‌شود. پارامترهای همیلتونی به‌گونه‌ای تنظیم می‌شوند که داده‌های شبیه‌سازی‌شده با داده‌های واقعی بیشترین تطابق را داشته باشند.

یکی از کاربردهای مهم $\text{OTOC}(2)$ که در مقاله مورد بررسی قرار گرفته «یادگیری همیلتونی» است. فرض کنید سیستم فیزیکی واقعی دارای همیلتونی مجهولی با چند پارامتر ناشناخته باشد. می‌توان با اندازه‌گیری $\text{OTOC}(2)$ در این سیستم و مقایسه آن با شبیه‌سازی کوانتومی همان سیستم (که در آن پارامترها متغیر هستند)، مقدار پارامترهای ناشناخته را پیدا کرد. پژوهشگران برای نشان دادن این مفهوم، یک مثال تک‌پارامتری را در نظر گرفتند که در آن فاز ϕ یک گیت دوکیوبیتی ناشناخته است. آنها مجموعه‌ای از داده‌های $C_{\text{off-diag}}^{(4)}$ را از ۲۰ مدار تصادفی شبیه‌سازی‌شده به عنوان «داده‌های سیستم فیزیکی»



شکل ۱-۵: نیاز به تکمیل کپشن

در نظر گرفتند و سپس همان مدارها را روی پردازنده کوانتومی اجرا کردند. با تغییر ξ و محاسبه اختلاف بین داده‌های تجربی و داده‌های شبیه‌سازی شده، نموداری به دست آمد که حداقل آن دقیقاً برابر مقدار واقعی ξ بود. این آزمایش نشان می‌دهد که $\text{OTOC}(2)$ می‌تواند به عنوان ابزاری قدرتمند برای تخمین پارامترهای همیلتونی پیچیده استفاده شود.

مقاله گوگل نشان می‌دهد که $\text{OTOC}(2)$ نه تنها به پدیده‌های بنیادین مانند آشوب کوانتومی و تداخل سازنده حساس است، بلکه از نظر پیچیدگی محاسباتی در محدوده‌ای قرار دارد که شبیه‌سازی کلاسیکی آن فعلاً امکان‌پذیر نیست. در یک آزمایش، اندازه‌گیری $C_{\text{off-diag}}^{(4)}$ برای مدارهای ۶۵ کیوبیتی انجام شد و دقت سیگنال در حد SNR بین ۲ تا ۳ باقی ماند.

. تخمین زده شد که شبیه‌سازی همین داده‌ها با استفاده از الگوریتم‌های شبکه تانسوری روی ابررایانه Frontier حدود ۲.۳ سال زمان می‌برد، در حالی که اندازه‌گیری آزمایشی تنها ۱.۲ ساعت طول کشید. این اختلاف عظیم، همراه با قابلیت استخراج اطلاعات مفید (مانند یادگیری همیلتونی)، نشان می‌دهد که $\text{OTOC}(2)$ گزینه مناسبی برای دستیابی به مزیت کوانتومی عملیاتی است.

۶-۱ مزیت کوانتومی عملیاتی

به عنوان نمونه‌ی ساده، فاز $\xi/\pi = 0.6$ مربوط به یک گیت دو کیوبیتی بین جفت خاصی از کیوبیت‌ها به عنوان پارامتر ناشناخته در نظر گرفته شد (شکل 1-5 b). با اندازه‌گیری $\text{OTOC}(2)_{\text{off-diag}}$ برای مجموعه‌ای از ۲۰ مدار تصادفی، مشخص شد که مقادیر تجربی به صورت نوسانی با پارامتر ξ تغییر می‌کنند و تمام منحنی‌ها در نزدیکی مقدار واقعی هدف با شبیه‌سازی‌های کلاسیکی تلاقی دارند (شکل 1-5 c). در نهایت، با تعریف تابع هزینه بر اساس ریشه‌ی میانگین مربعات اختلاف داده‌های شبیه‌سازی و آزمایش، کمینه‌ی این تابع دقیقاً در مقدار $\xi = 0.6$ قرار گرفت (شکل 1-5 d).

این نتیجه نشان می‌دهد که $\text{OTOC}(2)$ نه تنها شاخصی برای آشوب و درهم‌تنیدگی است، بلکه ابزاری عملی برای استخراج پارامترهای دینامیکی سامانه‌های کوانتومی واقعی نیز به شمار می‌رود.

۷-۱ نتیجه‌گیری و چشم‌اندازها

در این پژوهش، ما با بهره‌گیری از پروتکل‌های معکوس زمانی و اندازه‌گیری‌های (2)OTOC، پدیده‌ای نو را در سامانه‌های کوانتومی چندبدنه آشکار کردیم: **تداخل سازنده در مرز ارگودیسیتی کوانتومی**.

این پدیده نشان می‌دهد که حتی در حالتی که سامانه به شدت درهم‌تنیده و آشوبناک است، ساختارهای منسجم و فازهای هم‌فاز مسیرهای اپراتوری می‌توانند در مقیاس‌های زمانی بلند خود را بازآشکار کنند. به عبارت دیگر، برخلاف انتظار متداول از ارگودیسیتی — که در آن تمام اطلاعات موضعی از بین می‌رود — بخشی از اطلاعات کوانتومی در ساختارهای تداخلی مرتبه‌بالا به صورت نهفته باقی می‌ماند.

اندازه‌گیری (2)OTOC و (4)OTOC بر روی مدارهای تصادفی ۶۵ کیوبیتی نشان داد که: - این کمیت‌ها نسبت به جزئیات میکروسکوپی دینامیک حساس‌اند؛ - شامل مؤلفه‌هایی هستند که ناشی از تداخل حلقه‌های بزرگ در فضای پائولی‌اند؛ - و مقدار آن‌ها در آزمایش با دقتی قابل مقایسه با نویز سیستم اندازه‌گیری شد، در حالی که هیچ الگوریتم کلاسیکی قادر به بازتولید نتایج نبود.

به این ترتیب، نتایج ما نه تنها وجود ساختارهای تداخلی منسجم در رژیم‌های آشوبناک کوانتومی را اثبات می‌کند، بلکه راهی تجربی به سوی تحقق **مزیت کوانتومی کاربردی** می‌گشاید — مزیتی که مبتنی بر کمیت‌های فیزیکی قابل مشاهده است و از صرف اندازه‌گیری سرعت یا حجم داده‌ها فراتر می‌رود.

نتایج بخش حاضر نشان می‌دهند که: - (2)OTOC را می‌توان با دقت بالا در ناحیه‌ای فراتر از قابلیت شبیه‌سازی کلاسیکی اندازه‌گیری کرد؛ - این اندازه‌گیری‌ها اطلاعات فیزیکی معنادار درباره‌ی سامانه، مانند پارامترهای همیلتونی، فراهم می‌کنند؛ - و در نهایت، الگوریتم‌های کلاسیکی فعلی حتی در تقریب‌های مونت‌کارلو یا شبکه‌های تانسوری نیز از بازتولید این کمیت‌ها عاجزند.

به این ترتیب، اندازه‌گیری (2)OTOC گامی عملی به سوی تحقق مزیت کوانتومی کاربردی است، یعنی حالتی که یک پردازنده‌ی کوانتومی نه تنها سریع‌تر بلکه قادر به محاسبه‌ی کمیت‌هایی است که از نظر فیزیکی معنادار و از نظر کلاسیکی غیرقابل دسترسی‌اند.

ادامه‌ی این مسیر پژوهشی می‌تواند شامل موارد زیر باشد: - توسعه‌ی پروتکل‌های تجربی برای اندازه‌گیری (k)OTOC با مرتبه‌های بالاتر و تحلیل رفتار آن‌ها در نزدیکی گذارهای کوانتومی؛ - استفاده از روش‌های مشابه برای شناسایی و یادگیری پارامترهای مؤثر در سامانه‌های ماده‌ی چگال یا سامانه‌های بیولوژیکی کوانتومی؛ - و در نهایت، به کارگیری چارچوب OTOC — محور در طراحی الگوریتم‌های

کوانتومی جدید برای یادگیری دینامیک‌های پیچیده.

۱-۷-۱ ارتباط مفهومی با پردازش زبان طبیعی کوانتومی (QNLP)

از دیدگاه نظری، ساختار یادگیری همیلتونی در این مقاله شباهت زیادی به فرایند آموزش مدل‌های زبانی کوانتومی دارد. در هر دو مورد، سامانه‌ای فیزیکی یا مفهومی داده‌هایی تولید می‌کند که ساختار تداخلی پیچیده دارند، و مدل کوانتومی دیگری تلاش می‌کند با تنظیم پارامترها (فازها، وزن‌ها یا زاویه‌ها) آن ساختار را بازسازی کند. به‌طور خاص، فازهای تصادفی در OTOC ها را می‌توان با فازهای وابسته به برچسب‌های نحوی در جملات فارسی در مدل‌های DisCoCat مقایسه کرد. بنابراین، روش یادگیری همیلتونی با OTOC(2) می‌تواند الهام‌بخش الگوریتم‌های یادگیری معنایی کوانتومی در چارچوب QNLP باشد، جایی که فازهای تانسوری جمله‌ها نقش مشابهی در بازسازی معنا ایفا می‌کنند. به عبارت دیگر، می‌توان یک OTOC زبانی تعریف کرد که حساسیت معنای جمله به تغییرات نحوی را اندازه‌گیری کند:

$$C_{\text{lang}}^{(2)} = \langle \psi | U^\dagger M U M | \psi \rangle,$$

که در آن U تکامل معنایی، M عملگر نحوی، و $|\psi\rangle$ نمایش برداری جمله است. تحلیل رفتار این کمیت برای جملات با ساختارهای مشابه می‌تواند به تعریف کمیت‌های جدیدی برای تداخل معنایی مثبت و منفی در زبان طبیعی کوانتومی منجر شود. در مدل‌های QNLP مبتنی بر DisCoCat، ساختار نحوی یک جمله با شبکه‌ای از تانسورها مدل می‌شود که در فضای ترکیب معنایی با هم تداخل می‌کنند. به صورت استعاری، هر مسیر معنایی در ترکیب جمله را می‌توان معادل یک مسیر پائولی در فضای اپراتور دانست. در این نگاه، پدیده‌ی «تداخل سازنده» در OTOC(2) می‌تواند به عنوان الگوی فیزیکی برای تداخل معنایی مثبت در پردازش زبان طبیعی کوانتومی تفسیر شود—یعنی حالتی که چند مسیر نحوی مختلف منجر به تقویت معنایی مشترک می‌شوند.

از سوی دیگر، همان‌گونه که حلقه‌های بزرگ در فضای پائولی نشان‌دهنده‌ی همبستگی‌های چندمسیره در سامانه‌ی کوانتومی‌اند، در QNLP نیز ترکیب‌های چندمسیره‌ی نحوی می‌توانند منشأ رفتارهای فراتر از کلاسیک در تفسیر جمله‌ها باشند. بنابراین، پژوهش حاضر می‌تواند چارچوبی فیزیکی و مفهومی برای طراحی مدل‌های زبانی کوانتومی فراهم کند که تداخل‌های معنایی را به صورت طبیعی و با ثبات مدیریت

کنند.

۱-۷-۲ جمع‌بندی

پژوهش حاضر یک نمونه‌ی تجربی روشن از چگونگی ظهور مزیت کوانتومی از دل دینامیک‌های درهم‌تنیده است. اندازه‌گیری دقیق (2) OTOC نشان داد که مسیرهای فازمند در فضای اپراتور، ساختارهایی فیزیکی و قابل مشاهده‌اند که نه تنها از دیدگاه بنیادی بلکه برای کاربردهای آینده در یادگیری، شبیه‌سازی، و پردازش اطلاعات کوانتومی نیز اهمیت دارند. به‌طور خلاصه،

مزیت کوانتومی واقعی → پیچیدگی شبیه‌سازی کلاسیکی → حساسیت دینامیکی بالا → تداخل سازنده
این زنجیره، چارچوب مفهومی تازه‌ای را برای درک مرز میان دینامیک‌های آشوبناک و محاسبات کوانتومی کارآمد معرفی می‌کند.

۱-۸ پتانسیل‌های پژوهشی برای پردازش زبان طبیعی کوانتومی (QNLP)

۱-۸-۱ توسعه‌ی الگوریتم‌های یادگیری فازی در lambeq با الهام از یادگیری همیلتونی

پژوهش گوگل نشان داد که می‌توان از (2) OTOC برای یادگیری پارامترهای همیلتونی از داده‌های تجربی استفاده کرد. این روش را می‌توان در چارچوب lambeq به‌صورت یک الگوریتم یادگیری فازی-کوانتومی بازنویسی کرد. در این رویکرد:

- دیاگرام‌های زبانی lambeq به مدارهای کوانتومی تبدیل می‌شوند که پارامترهای قابل آموزش (زاویه‌ها یا فازها) دارند؛ - مجموعه‌ای از جملات آموزشی با معانی هدف (بردارهای مفهومی) تهیه

می‌شوند؛ - سپس، با استفاده از تابع هزینه‌ای مشابه با تابع یادگیری همیلتونی،

$$L = \sum_i \left| C_{\text{pred},i}^{(2)} - C_{\text{target},i}^{(2)} \right|^2,$$

پارامترهای مدل به‌گونه‌ای تنظیم می‌شوند که تداخل معنایی در مدار زبانی بیشترین تطابق را با هدف داشته باشد.

به این ترتیب، روش‌های OTOC - محور می‌توانند چارچوبی عمومی برای آموزش تداخل محور مدل‌های زبانی کوانتومی فراهم کنند - رویکردی که نه تنها از نظر فیزیکی بنیادین است، بلکه در سطح نظری می‌تواند رفتارهای غیرخطی و غیرارگودیک معنا را در زبان‌های طبیعی مدل کند.

ترکیب مفاهیم OTOC با QNLP می‌تواند موضوع یک مقاله‌ی نظری مستقل با محوریت زیر باشد:

- **تعریف OTOC زبانی:** معرفی کمیته برای سنجش حساسیت معنایی جمله به تغییرات نحوی، با استفاده از مدارهای lambeq.
- **شبیه‌سازی تداخل معنایی:** مدل‌سازی interference در فضای تانسوری با الهام از تداخل حلقه‌های بزرگ در OTOC(۲).
- **یادگیری فازهای معنایی:** توسعه‌ی الگوریتمی مشابه یادگیری همیلتونی برای استخراج پارامترهای معنایی در مدل‌های زبانی کوانتومی.
- **تحلیل مزیت کوانتومی در QNLP:** ارزیابی این‌که کدام ساختارهای نحوی یا معنایی بیشترین پیچیدگی تداخلی را دارند و از نظر محاسباتی فراتر از مدل‌های کلاسیکی‌اند.

به‌طور خلاصه، پیوند میان OTOC(2) و DisCoCat می‌تواند منجر به شاخه‌ی تازه‌ای از پژوهش شود که می‌توان آن را «دینامیک تداخلی در زبان‌شناسی کوانتومی» (Interferential QNLP Dynamics) نامید.

۱-۸-۲ شبیه‌سازی پروتکل‌های معکوس زمانی با Qiskit

از دیدگاه عملی، پروتکل‌های معکوس زمانی مورد استفاده در این پژوهش را می‌توان با استفاده از محیط Qiskit شبیه‌سازی کرد. در این چارچوب، تکامل زمانی $U(t) = e^{-iHt}$ و وارون آن $U^\dagger(t)$ به صورت دو بلوک مجزا در مدار کوانتومی پیاده‌سازی می‌شوند. هر بلوک شامل دروازه‌هایی است که از تجزیه همیلتونی H به اجزای دو کیوبیتی و تک کیوبیتی به دست می‌آیند.

علاوه بر این، بسته‌ی qiskit-dynamics امکان شبیه‌سازی مستقیم اپراتورهای همیلتونی و تکامل‌های پیوسته را فراهم می‌کند، در حالی که qiskit.quantum_info ابزارهای لازم برای محاسبه‌ی همبستگی‌های زمانی، شامل $\text{OTOC}(2)$ ، را در اختیار می‌گذارد.

به این ترتیب، می‌توان مدارهای مربوط به معکوس زمانی مقاله را برای سامانه‌های کوچک‌تر (تا حدود ۸ یا ۱۰ کیوبیت) روی شبیه‌سازهای محلی یا بک‌اندهای کوانتومی IBM اجرا کرد و تکامل OTOC را برحسب زمان مشاهده نمود. این رویکرد راهی عملی برای بررسی عددی ایده‌های مقاله‌ی گوگل در محیط‌های پژوهشی مانند lambeq و QNLP فراهم می‌کند، جایی که می‌توان از همان ساختارهای مدار برای تحلیل تداخل‌های معنایی و زمانی بهره گرفت.

Bibliography

- [1] Observation of constructive interference at the edge of quantum ergodicity. *Nature*, 646(8086):825–830, 2025.

ضمیمه A: شبیه‌سازی پروتکل‌های معکوس زمانی با Qiskit

در این بخش نشان داده می‌شود که پروتکل‌های معکوس زمانی مورد استفاده در پژوهش حاضر را می‌توان به صورت عددی در محیط Qiskit شبیه‌سازی کرد. این شبیه‌سازی به پژوهشگران اجازه می‌دهد تا پویایی همبستگی‌های خارج از ترتیب زمانی را در سامانه‌های کوچک بررسی و تحلیل کنند. در این رویکرد، دو بلوک زمانی متناظر با تکامل روبه‌جلو و معکوس زمان به صورت زیر تعریف می‌شوند:

```
from qiskit import QuantumCircuit
from qiskit.quantum_info import random_unitary

U = random_unitary(4)      # operator on 2 qubits
qc = QuantumCircuit(2)
qc.unitary(U, [0, 1])      # forward evolution
qc.barrier()
qc.unitary(U.adjoint(), [0, 1]) # time inverted evolution
qc.draw('mpl')
```

ماژول qiskit-dynamics امکان تعریف همیلتونی و محاسبه‌ی مستقیم اپراتور $U(t) = e^{-iHt}$ را فراهم می‌کند. در ادامه می‌توان مقادیر انتظاری OTOC را به صورت عددی محاسبه کرد:

```
from qiskit.quantum_info import Statevector, Pauli

psi0 = Statevector.from_label('00')
M = Pauli('Z')
U_t = U
U_t_dag = U_t.adjoint()
# calculate M(t) M as simple OTOC:
psi_t = psi0.evolve(U_t)
otoc = psi_t.expectation_value(M)
```

به کمک این ابزارها می‌توان:

- تأثیر اپراتورهای پائولی تصادفی درج‌شده در میانه‌ی تکامل را بررسی کرد؛
- وابستگی OTOC به زمان یا پارامترهای همیلتونی را مطالعه نمود؛

- و حتی رفتار تداخل‌های چندمسیره‌ی مشابه با نتایج مقاله را در مقیاس‌های کوچک بازسازی کرد.

این روش شبیه‌سازی می‌تواند در حوزه‌ی QNLP نیز مورد استفاده قرار گیرد؛ به گونه‌ای که مدارهای زبانی lambeq با افزودن بلوک‌های معکوس زمانی، برای تحلیل تداخل‌های زمانی-معنایی در جمله‌ها به کار روند. این کار راهی نو برای بررسی پویایی معنای کوانتومی در گذر از ساختارهای نحوی مختلف فراهم می‌سازد.