فهرست مطالب

این سند چگونه خوانده شود ۸

بخش ۱ نقشهٔ مفهومی ۹

۱ نقشهٔ زنده ۱۰

۱.۱ جایگاه در نقشه ۱۰

۲.۱ ایدهٔ شهودی ۱۰

۳.۱ حداقل فرمالیسم ۱۱

۴.۱ گسترش نقشه: گرمایی، سامانهٔ باز، ترابرد ۱۲

۵.۱ چه وقت استفاده می‌شود ۱۳

بخش ۲ پایه‌های محاسباتی ۱۴

۱ الگوریتم چیست؟ ۱۵

۱.۱ جایگاه در نقشه ۱۵

۲.۱ ایدهٔ شهودی ۱۵

۳.۱ حداقل فرمالیسم ۱۵

۴.۱ چه وقت استفاده می‌شود ۱۶

۲ خانواده‌های کلاسیکِ مرتبط ۱۷
۱.۲ جایگاه در نقشه ۱۷
۲.۲ ایدهٔ شهودی ۱۷
۳.۲ حداقل فرمالیسم ۱۸
۴.۲ چه وقت استفاده می‌شود ۱۸

۳ مدل محاسباتی کوانتومی ۱۹
۱.۳ جایگاه در نقشه ۱۹
۲.۳ ایدهٔ شهودی ۱۹
۳.۳ حداقل فرمالیسم ۲۰
۴.۳ ارتباط ۲۰
۵.۳ چه وقت استفاده می‌شود ۲۰

۴ سه لایه: الگوریتم، شبیه‌سازی، ابزار ۲۱
۱.۴ جایگاه در نقشه ۲۱
۲.۴ ایدهٔ شهودی ۲۱
۳.۴ حداقل فرمالیسم ۲۲
۴.۴ ارتباط ۲۲
۵.۴ چه وقت استفاده می‌شود ۲۳

بخش ۳ از مسئلهٔ فیزیکی تا جریان کاری ۲۴

۱ از مسئلهٔ فیزیکی تا هامیلتونی ۲۵
۱.۱ جایگاه در نقشه ۲۵
۲.۱ ایدهٔ شهودی ۲۵
۳.۱ از مسئلهٔ فیزیکی تا مدل ریاضی ۲۶

۴.۱ هامیلتونی کلاسیک: از کجا می‌آید و چرا مهم است؟ ۲۷
۵.۱ هامیلتونی کوانتومی ۲۸
۶.۱ نوسانگر هماهنگ و عملگرهای خلق و فنا ۲۸
۷.۱ مثال کاری: مدار LC از کلاسیک تا کوانتوم ۳۰
۸.۱ خانواده‌های مدل در شبیه‌سازی کوانتومی ۳۲
۹.۱ مدل Ising: از فیزیک تا کیوبیت ۳۲
۱.۹.۱ ایدهٔ فیزیکی ۳۳
۲.۹.۱ هامیلتونی کلاسیک ۳۳
۳.۹.۱ مثال کامل: دو اسپین فرومغناطیس ۳۴
۴.۹.۱ Ising کوانتومی و میدان عرضی ۳۵
۵.۹.۱ چرا در الگوریتم‌های کوانتومی این‌قدر دیده می‌شود؟ ۳۵
۶.۹.۱ تمایزهای مهم ۳۶
۱۰.۱ حداقل فرمالیسم ۳۶
۱۱.۱ ارتباط ۳۷
۱۲.۱ چه وقت استفاده می‌شود ۳۷

۲ جریان کاری کامل **۳۸**
۱.۲ جایگاه در نقشه ۳۸
۲.۲ ایدهٔ شهودی ۳۸
۳.۲ حداقل فرمالیسم ۳۸
۴.۲ ارتباط ۴۰
۵.۲ چه وقت استفاده می‌شود ۴۰

بخش ۴ دو پرسش و دو رهیافت ۴۱

۱ دو پرسش از یک هامیلتونی: دینامیک و طیف ۴۲

۱.۱ جایگاه در نقشه ۴۲

۲.۱ ایدهٔ شهودی ۴۲

۳.۱ حداقل فرمالیسم ۴۳

۴.۱ ارتباط ۴۳

۵.۱ چه وقت استفاده می‌شود ۴۴

۲ دو رهیافت: تحول زمانی و محاسبهٔ آدیاباتیک ۴۵

۱.۲ جایگاه در نقشه ۴۵

۲.۲ ایدهٔ شهودی ۴۵

۳.۲ رهیافت تحول زمانی: فرمول و پارامترها ۴۷

۴.۲ ردهٔ مسائل مناسب تحول زمانی ۴۸

۵.۲ مثال کاری: یک اسپین در میدان عرضی ۴۹

۶.۲ قضیهٔ آدیاباتیک: فرمول و پارامترها ۵۰

۷.۲ ردهٔ مسائل مناسب آدیاباتیک ۵۲

۸.۲ مثال کاری: از میدان عرضی به Ising ۵۳

۹.۲ ارتباط ۷۰

۱۰.۲ چه وقت استفاده می‌شود ۷۰

بخش ۵ جعبه ابزار ۷۱

۱ جعبه ابزار دیجیتال: Trotter، LCU، QSP ۷۲

۱.۱ جایگاه در نقشه ۷۲

۲.۱ ایدهٔ شهودی ۷۲

۳.۱ Trotter: فرمول، خطا، پارامترها ۷۳
۴.۱ مثال کاری Trotter: یک کیوبیت با $H = X + Z$ ۷۵
۵.۱ LCU: فرمول و پارامترها ۷۷
۶.۱ مثال کاری LCU: نشاندن $H = X + Z$ ۷۸
۷.۱ QSVT/QSP: فرمول و پارامترها ۷۹
۸.۱ مثال کاری QSP: از بلوک H تا $f(H)$ ۸۰
۹.۱ جدول مقایسهٔ ابزارها ۸۱
۱۰.۱ ارتباط ۸۱
۱۱.۱ چه وقت استفاده می‌شود ۸۲

۲ ابزارهای طیفی و ترکیبی: QPE، VQE، QAOA ۸۳

۱.۲ جایگاه در نقشه ۸۳
۲.۲ ایدهٔ شهودی ۸۳
۳.۲ QPE: فرمول و پارامترها ۸۴
۴.۲ ردهٔ مسائل مناسب QPE ۸۵
۵.۲ مثال کاری QPE: یک کیوبیت با فاز $\varphi = 1/4$ ۸۶
۶.۲ VQE: فرمول و پارامترها ۸۷
۷.۲ ردهٔ مسائل مناسب VQE ۸۸
۸.۲ مثال کاری VQE: یک کیوبیت با آنزات R_Y ۸۹
۹.۲ QAOA: فرمول، شهود، و جای آن در نقشه ۹۰
۱.۹.۲ فرمول و پارامترها ۹۱
۲.۹.۲ پیوند با آدیاباتیک و با VQE ۹۲
۳.۹.۲ ردهٔ مسائل مناسب ۹۲
۱۰.۲ مثال کاری QAOA: دو کیوبیت و $H_C = -Z_1 Z_2$ ۹۳
۱۱.۲ ارتباط ۹۴

۱۲.۲ چه وقت استفاده می‌شود ۹۵

بخش ۶ اجرا، راستی‌آزمایی و قطب‌نما ۹۶

۱ دیجیتال، آنالوگ، ترکیبی ۹۷

۱.۱ جایگاه در نقشه ۹۷

۲.۱ ایدهٔ شهودی ۹۷

۳.۱ شبیه‌سازی آنالوگ: فرمول و تمایزها ۹۸

۱.۳.۱ تعریف کاری ۹۸

۲.۳.۱ سه چیزی که نباید قاطی شوند ۹۸

۳.۳.۱ پارامترها و گلوگاه‌ها ۹۹

۴.۳.۱ ردهٔ مسائل مناسب آنالوگ ۹۹

۴.۱ مثال کاری آنالوگ: دینامیک دو اسپینِ TFIM ۹۹

۵.۱ حداقل فرمالیسم — چک‌لیست اجرا ۱۰۱

۶.۱ ارتباط ۱۰۲

۷.۱ چه وقت استفاده می‌شود ۱۰۲

۲ بستن حلقه: اندازه‌گیری، راستی‌آزمایی، برآورد منابع ۱۰۳

۱.۲ جایگاه در نقشه ۱۰۳

۲.۲ ایدهٔ شهودی ۱۰۳

۳.۲ حداقل فرمالیسم ۱۰۴

۴.۲ ارتباط ۱۰۴

۵.۲ چه وقت استفاده می‌شود ۱۰۴

۳ قطب‌نمای پژوهش ۱۰۵

۱.۳ جایگاه در نقشه ۱۰۵

۲.۳ ایدهٔ شهودی ۱۰۵
۳.۳ حداقل فرمالیسم ۱۰۶
۴.۳ ارتباط ۱۰۶
۵.۳ چه وقت استفاده می‌شود ۱۰۶

۴ واژه‌نامهٔ مصوب **۱۰۸**

مراجع **۱۱۱**

این سند چگونه خوانده شود

مخاطب این متن خودِ پژوهشگر است. هدف آن نگه‌داشتن شمای کلی است تا در پیچ‌وخم مدار و فرمول گم نشوید. از دیگر سو برای روش ها و رهیافت های اصلی توضیحات و توصیفات مفصل اورده خواهد شد تا بخش مربوطه مرجعی باشد برای فهم ریاضیات و فیزیک مسئله. هر فصل کوتاه است، شهودی است، و همان فایل بعداً گسترش می‌یابد.

سه لایه را از هم جدا نگه دارید؛ درهم‌ریختگی معمولاً از قاطی کردن این‌هاست:

۱. **هدف / مسئله** — چه چیزی را می‌خواهیم بدانیم؟

۲. **رهیافت محاسباتی** — با چه مدل محاسباتی به آن می‌رسیم؟

۳. **ابزار پیاده‌سازی** — کدام زیرروال آن رهیافت را محقق می‌کند؟

نقشهٔ زنده در فصل ۱ است. اگر وسط کار پژوهشی سردرگم شدید، به همان فصل و به قطب‌نمای فصل ۳ برگردید.

منبع واحد واژگان جدول ۱.۴ در فصل ۴ است. در متن روان، فارسی مصوب می‌آید و شکل انگلیسی در نخستین کاربرد هر فصل داخل پرانتز است. سرواژه‌ها و نام الگوریتم‌ها (Trotter، LCU، QSP، QPE، VQE) انگلیسی می‌مانند.

نسخهٔ اول عمداً اثبات پیچیدگی، جزئیات مدار، و کد شبیه‌ساز ندارد؛ این‌ها در «جای توسعه» هر فصل فهرست شده‌اند.

بخش ۱

نقشهٔ مفهومی

فصل ۱

نقشهٔ زنده

۱.۱ جایگاه در نقشه

این فصل خودِ نقشه است. بقیهٔ فصل‌ها به اینجا ارجاع می‌دهند.

۲.۱ ایدهٔ شهودی

پژوهش شبیه‌سازی کوانتومی[۱] یک خط مستقیم از «فیزیک» به «مدار» نیست. نخست یک مسئلهٔ فیزیکی به مدل ریاضی و سپس به هامیلتونی H تبدیل می‌شود. بعد باید دو چیز را جدا کرد:

- **چه پرسشی از H دارید؟** تحول زمانی، یا طیف / حالت پایه؟
- **با کدام رهیافت به آن می‌رسید؟** پیاده‌سازی $U(t)$ یا $f(H)$، مسیر آدیاباتیک، مهندسی آنالوگ، یا حلقهٔ وردشی.

ابزارهایی مثل Trotter، LCU و QSP زیرِ رهیافت‌اند، نه هم‌سطح آن. برآورد فاز[۲] روی مرز دینامیک و طیف می‌نشیند، چون به تحول کنترل‌شده نیاز دارد.

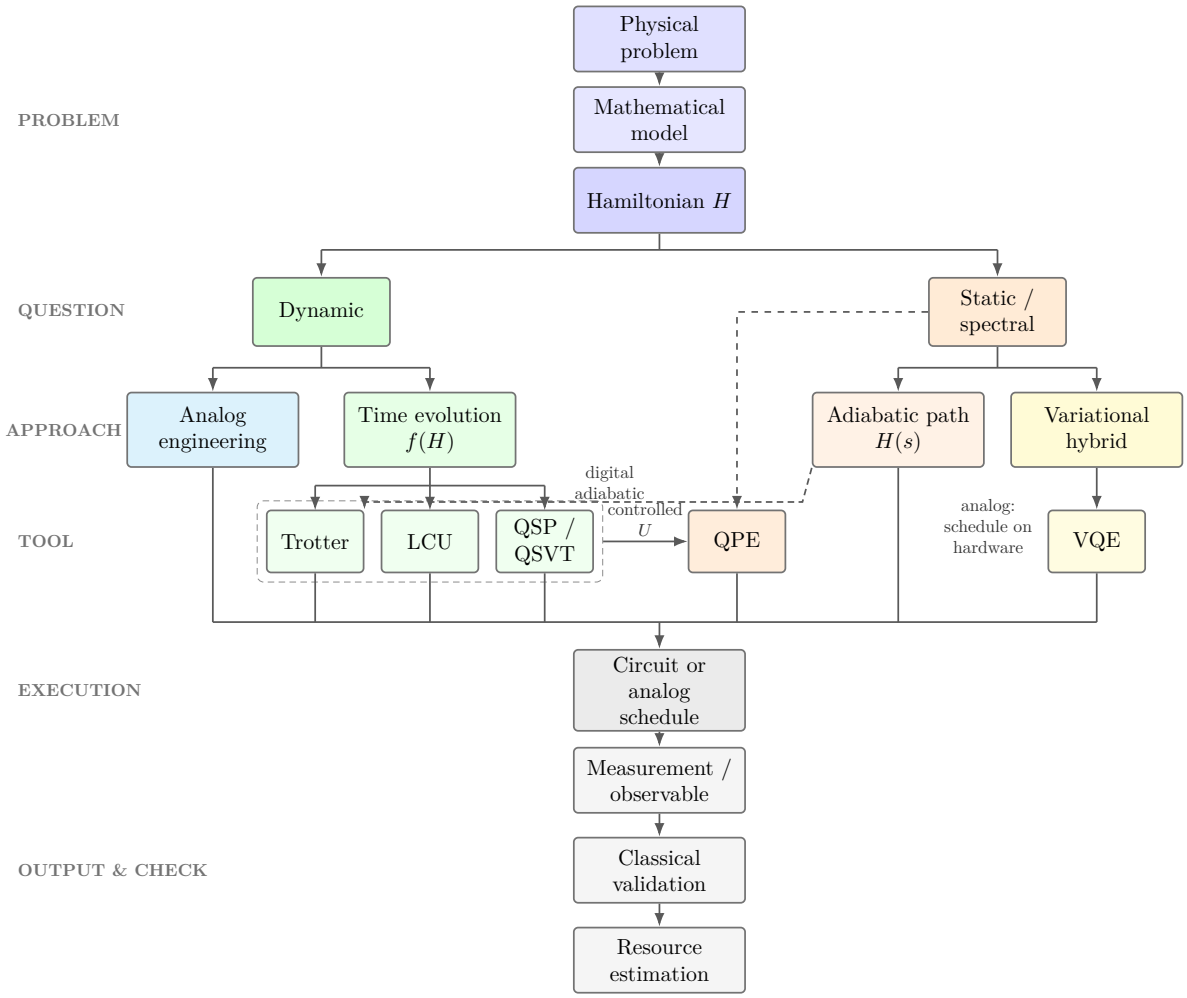
اگر وسط جزئیات گم شدید، به این فصل برگردید و بپرسید: سؤال من کدام است؟ رهیافت کدام است؟ ابزار کدام است؟

---

[۱] quantum simulation.
[۲] phase estimation (QPE).

۳.۱ حداقل فرمالیسم

جریان کاری[۳] کلی در شکل ۱.۱ آمده است.



شکل ۱.۱: نقشهٔ پژوهشی در چهار لایهٔ پس از H: پرسش، رهیافت، ابزار، اجرا. کادر خطچین دور QSP/LCU/Trotter یعنی هر سه پیاده‌سازی U هستند و QPE از همان گروه تغذیه می‌شود. پیکان خطچین از پرسش طیفی به QPE نشان می‌دهد این ابزار پرسش طیفی را جواب می‌دهد ولی از لایهٔ رهیافت تحول عبور می‌کند. مسیر آدیاباتیک دو بستر دارد: زمان‌بندی آنالوگ مستقیم، یا digital adiabatic (پیکان خطچین به تروتر). آنالوگِ مهندسی H بدون گیت دیجیتال به اجرا می‌رسد.

اتصالات شکل ۱.۱ باید با همین تفکیک خوانده شوند:

- Trotter / LCU / QSP ابزارِ رهیافت تحول $f(H)$ هستند؛ $U(t) = e^{-iHt}$ فقط یک کاربرد است. هر سه، جدا از هم، به اجرا می‌رسند.
- QPE ابزار طیفی است اما ورودی‌اش تحول کنترل‌شده است؛ بنابراین از جعبهٔ ابزارهای U تغذیه می‌شود، نه از مسیر آدیاباتیک و نه فقط از LCU.

[۳] workflow.

- مسیر آدیاباتیک $H(s)$ یک رهیافت موازی با تحول و وردشی است، نه زیرروالِ ذاتیِ Trotter و نه پیش‌نیاز QPE. اجرای آن یا آنالوگ است (زمان‌بندی روی سخت‌افزار) یا دیجیتال (digital adiabatic: تروتر روی $H(s_k)$؛ فصل ۲).
- VQE زیرِ رهیافت وردشی / ترکیبی است، نه تجزیهٔ e^{-iHt}.
- مهندسی آنالوگ از پرسش دینامیکی می‌آید و بدون عبور از گیت‌های دیجیتال به اجرا می‌رسد (فصل ۱).

جدول ۱.۱: از پرسش علمی به رهیافت و ابزار نوعی.

اگر می‌خواهید	پرسش	رهیافت	ابزار نوعی
$\|\psi(t)\rangle$ یا مشاهده‌پذیر وابسته به t	دینامیک	تحول زمانی / $f(H)$	Trotter، LCU، QSP
انرژی پایه یا گاف	ایستا / طیفی	وردشی، آدیاباتیک، یا QPE	VQE، مسیر $H(s)$، QPE
ویژه مقدارهای H با دقت بالا	طیفی	تحول کنترل‌شده + برآورد فاز	شبیه‌سازی U سپس QPE
تابع پاسخ / Green	پل دینامیک—طیف	$f(H)$ یا تحول	QSP، QPE
مهندسی مستقیم H روی سخت‌افزار	دینامیک یا ایستا	آنالوگ	نگاشت H_{target}
ماندن در حالت پایه لحظه‌ای	ایستا	آدیاباتیک	زمان‌بندی $H(s)$ (آنالوگ یا دیجیتال)
تعادل / مشاهده‌پذیر گرمایی	گرمایی	آماده‌سازی حالت گرمایی یا نمونه‌برداری	آنزات گرمایی، بازپخت، یا $f(H)$
دینامیک با اتلاف / ناهمدوسی	سامانهٔ باز	معادلهٔ مادر / مسیرهای کوانتومی	رقیق‌سازی، نقشهٔ کراوس، شبیه‌سازی کانال
جریان، ترابرد، هدایت	ترابرد	تحول یا پاسخ خطی	quench جریان، QSP/پاسخ، اندازه‌گیری جریان

۴.۱ گسترش نقشه: گرمایی، سامانهٔ باز، ترابرد

سطرهای جدول ۱.۱ فقط دو پرسشِ بسته/طیفی را پوشش نمی‌دهند. سه خانوادهٔ دیگر که در پژوهش شبیه‌سازی زیاد دیده می‌شوند تا احتمالا بعداً با گسترش یابند.

مسائل گرمایی. پرسش: میانگین یک مشاهده‌پذیر در تعادل دمایی T، یا نمونه‌برداری از $\rho \sim e^{-\beta H}/Z$. این نه دینامیکِ خالصِ یک حالت خالص است و نه لزوماً فقط انرژی پایه. رهیافت‌های رایج: آماده‌سازی تقریبی حالت گرمایی (وردشی گرمایی، بازپخت)، یا محاسبهٔ توابعی از H که به β وابسته‌اند. ابزارها با فصل‌های تحول و وردشی هم‌پوشانی دارند، اما خروجی اغلب $\langle O\rangle_\beta$ است نه $|\psi(t)\rangle$.

سامانهٔ کوانتومی باز. وقتی سامانه با محیط جفت است، تحول یکانیِ e^{-iHt} کافی نیست؛ توصیف نوعی معادلهٔ مادر[۴] (مثلاً لینبلادی) یا مسیرهای کوانتومی[۵] است. روی نقشه: پرسش هنوز «دینامیک» است، اما رهیافت از یکانیِ بسته به کانال کاملاً مثبت / اتساع با محیط کمکی جابه‌جا می‌شود. ابزار دیجیتال می‌تواند همان کانال را شبیه‌سازی کند؛ آنالوگ گاهی اتلاف را ذاتاً دارد — که هم فرصت است و هم نویز.

ترابرد. پرسش نوعی: جریان بار/اسپین، هدایت، یا پخش پس از یک گرادیان یا quench. از نظر نقشه اغلب زیرِ دینامیک یا مرز پاسخ خطی می‌نشیند (تابع گرین، هدایت در فرکانس صفر). رهیافت: تحول زمانیِ مشاهده‌پذیر جریان، یا $f(H)$ برای پاسخ. همان ابزارهای فصل ۱ و پرسش‌های فصل ۱، با مشاهده‌پذیر و پروتکل اندازه‌گیریِ متفاوت.

دو بستر آدیاباتیک در خودِ نمودار. رهیافت $H(s)$ یکی است؛ اجرا دو گونه است (شکل ۱.۱):

- **آدیاباتیک آنالوگ:** پارامترهای سخت‌افزار را مطابق $s(t)$ جارو می‌کنید؛ زمان‌بندی خودِ الگوریتم است (بخش ۳.۱).
- **آدیاباتیک دیجیتال (digital adiabatic):** در نقاط گسستهٔ s_k هامیلتونی $H(s_k)$ را با تروتر (یا ابزار U دیگر) می‌سازید؛ پیکان خطچین از مسیر آدیاباتیک به جعبهٔ Trotter در نقشه همین را می‌گوید. QAOA خویشاوند وردشیِ همین گسسته‌سازی است (بخش ۹.۲).

پس «آدیاباتیک» را با «آنالوگ» یکی نگیرید: اولی رهیافت است، دومی یکی از بسترهای اجرا.

۵.۱ چه وقت استفاده می‌شود

هر بار که یک مقاله، یک روش، یا یک ایدهٔ پژوهشی جدید دیدید و ندانستید زیر کدام شاخه است. اگر موضوع گرمایی، باز، یا ترابرد بود، اول سطر متناظر جدول ۱.۱ و بخش ۴.۱ را بخوانید؛ جزئیات الگوریتمی‌اش جای توسعهٔ فصل‌های بعدی است.

نکته ۱.۱ (جای توسعه). فصل یا زیربخش مستقل برای معادلهٔ مادر و مسیرهای کوانتومی؛ آماده‌سازی حالت گرمایی و پیچیدگی نمونه‌برداری؛ مثال عددی ترابرد روی زنجیرهٔ اسپینی کوچک؛ رسم جداگانهٔ فقط‌آدیاباتیک با دو ستون آنالوگ/دیجیتال در صورت شلوغ شدن نقشهٔ اصلی.

---

[۴] master equation.
[۵] quantum trajectories.

بخش ۲

پایه‌های محاسباتی

فصل ۱

الگوریتم چیست؟

۱.۱ جایگاه در نقشه

لایهٔ صفر: قبل از کوانتوم. بدون این تعریف، «الگوریتم کوانتومی» با سخت‌افزار یا با یک گیت خاص قاطی می‌شود. در نقشهٔ فصل ۱ هنوز به هامیلتونی نرسیده‌ایم؛ اینجا فقط می‌گوییم *دستور حل مسئله* چیست.

۲.۱ ایدهٔ شهودی

الگوریتم یک دستورالعمل محاسباتی است: ورودی مشخص می‌گیرد، با تعداد متناهی گامِ بدون ابهام پیش می‌رود، و خروجی می‌دهد. رایانه، آزمایشگاه، یا کاغذ و قلم مجری‌اند، نه خودِ الگوریتم.

سه پرسش همیشه همراه الگوریتم‌اند: **درستی** (آیا خروجی همان چیزی است که مسئله می‌خواهد؟)، **پایان‌پذیری** (آیا حتماً تمام می‌شود؟)، و **هزینه** (با اندازهٔ ورودی، زمان و حافظه چطور رشد می‌کنند؟).

شهود مفید: دستور پخت غذا الگوریتم نیست اگر «کمی نمک» مبهم بماند. الگوریتم وقتی الگوریتم است که اجراکننده‌های مختلف، با همان ورودی، به همان نتیجه برسند (تا حد خطای اعلام‌شده).

۳.۱ حداقل فرمالیسم

یک الگوریتم A را می‌توان نگاشتی از نمونهٔ مسئله x به خروجی $A(x)$ دانست، به‌همراه مدلی از هزینه (تعداد گام، عمق مدار، تعداد پرسش از یک اوراکل). در این سند دو تمایز کافی است:

- **مسئله**: چه چیزی پرسیده می‌شود؟ (مثلاً انرژی پایهٔ یک مدل)
- **الگوریتم**: با چه روالی به پاسخ می‌رسیم؟

پیچیدگی را اینجا وارد جزئیات نمی‌کنیم. «کوانتومی بودن» مدل اجرا را عوض می‌کند، نه تعریف الگوریتم را.

۴.۱ چه وقت استفاده می‌شود

وقتی وسوسه می‌شوید Trotter یا VQE را «خودِ مسئله» بنامید. آن‌ها الگوریتم یا زیرروال‌اند؛ مسئله چیز دیگری است (مثلاً تحول یک مدل هابارد).

نکته ۱.۱ (جای توسعه). مدل‌های هزینه (مدار، پرسمان، فضا)؛ تمایز الگوریتم دقیق، تقریبی، تصادفی و اکتشافی؛ اشاره به Church–Turing و نسخهٔ کوانتومی آن.

فصل ۲

خانواده‌های کلاسیکِ مرتبط

۱.۲ جایگاه در نقشه

هنوز در لایهٔ کلاسیک هستیم. هدف، کاتالوگ الگوریتم‌های عمومی نیست؛ فقط خانواده‌هایی که بعداً با شبیه‌سازی یا الگوریتم کوانتومی تلاقی مفهومی دارند.

۲.۲ ایدهٔ شهودی

هر بار که یک الگوریتم کوانتومی می‌بینید، معمولاً جانشین یا رقیب یک روال کلاسیک است. اگر آن رقیب را نشناسید، نمی‌فهمید کوانتوم دقیقاً چه چیزی را عوض کرده: مدل هزینه را، نمایش حالت را، یا خودِ سؤال را. پنج خانواده برای این سند کافی‌اند.

جستجو و بهینه‌سازی. جستجوی ناساخت‌یافته و بهینه‌سازی ترکیبیاتی. در کوانتوم: Grover، QAOA، و بازپخت کوانتومی.[۱]

تبدیل فوریه. از حوزهٔ زمان/مکان به بسامد. نسخهٔ کوانتومی آن QFT است و ستون برآورد فاز.

---

[۱] quantum annealing.

دستگاه خطی و زیرفضای Krylov. حل $Ax = b$ و استخراج اطلاعات طیفی با تکرارهای ماتریسی. در کوانتوم: HHL و به‌طور کلی‌تر توابعی از عملگر از راه بلوک‌کدگذاری.[۲] شبیه‌سازی هامیلتونی هم از همین جنس است: اعمال تابعی از H.

نمونه‌برداری و مونت‌کارلو. برآورد یک مقدار با نمونه‌های تصادفی. نسخهٔ کوانتومی اغلب برآورد دامنه است. در فیزیک بس‌ذره‌ای،[۳] مونت‌کارلو کوانتومی خودش یک رقیب کلاسیک جدی است.

شبیه‌سازی کلاسیک سامانه‌های کوانتومی. این مهم‌ترین رقیب مستقیم پژوهش شماست: قطری‌سازی دقیق و شبیه‌سازی بردار حالت[۴] (دقیق، نمایی در تعداد ذرات)؛ مونت‌کارلو کوانتومی (گاهی مقیاس بهتر، با محدودیت علامت)؛ و شبکهٔ تانسوری[۵] و حالت حاصل‌ضرب ماتریسی[۶] از جمله DMRG، که برای درهم‌تنیدگی محدود قوی‌اند [۱، ۲]. الگوریتم کوانتومی وقتی معنا دارد که یکی از این مسیرها از نظر مقیاس، دقت، یا نوع سؤال ناکافی شود.

۳.۲ حداقل فرمالیسم

هزینهٔ کلاسیک شبیه‌سازی یک سامانهٔ کوانتومی عمومی معمولاً با بُعد فضای هیلبرت (یعنی به‌طور نمایی با تعداد ذرات)رشد می‌کند. استثناها همان روش‌هایی‌اند که ساختار (محلی بودن، نبود علامت، درهم‌تنیدگی کم) را استثمار می‌کنند.

۴.۲ چه وقت استفاده می‌شود

قبل از انتخاب یک الگوریتم کوانتومی بپرسید: همین سؤال را کلاسیک تا چه اندازه و با چه روشی می‌توانم جواب بدهم؟

نکته ۱.۲ (جای توسعه). جدول مقیاس‌بندی کیفی میان قطری‌سازی، MPS، QMC و مدار کوانتومی؛ قانون مقیاس‌بندی هزینه در هر خانواده.

---

[۲] block-encoding.
[۳] many-body.
[۴] state vector simulation.
[۵] tensor network.
[۶] matrix product state.

فصل ۳

مدل محاسباتی کوانتومی

۱.۳ جایگاه در نقشه

این فصل می‌گوید رایانهٔ کوانتومی و الگوریتم کوانتومی *کجا* روی نقشه می‌نشینند: یک مدل اجرای تازه برای همان مفهوم الگوریتم، نه صرفاً رایانه‌ای سریع‌تر.

۲.۳ ایدهٔ شهودی

رایانهٔ کلاسیک بیت را در 0 یا 1 نگه می‌دارد. رایانهٔ کوانتومی با حالت‌هایی در فضای هیلبرت کار می‌کند. سه منبع محاسبات را از کلاسیک جدا می‌کنند: برهم‌نهی،[۱] تداخل،[۲] و درهم‌تنیدگی.[۳]

الگوریتم کوانتومی روالی است که از این منابع برای یک مسئله با ورودی کلاسیک یا کوانتومی استفاده می‌کند و در پایان با اندازه‌گیری به خروجی کلاسیک (یا به یک حالت کوانتومی مفید) می‌رسد [۳]. شبیه‌سازی کوانتومی یک کلاس از مسئله‌ها روی همین مدل است، نه تعریف خودِ مدل [۴، ۵، ۶].

سخت‌افزار سه شکل اصلی دارد که بعداً تکرار می‌شوند:

۱. **مدار گیتی (دیجیتال):** دنبالهٔ گیت‌ها از یک مجموعه گیت جهانی؛[۴]

۲. **آنالوگ:** مهندسی خودِ هامیلتونی روی دستگاه؛

---

[۱] superposition.
[۲] interference.
[۳] entanglement.
[۴] universal gate set.

۳. **آدیاباتیک:** محاسبه با مسیر کند $H(s)$.

این سه، سه رهیافت اجرا هستند. یک هدف پژوهشی (مثلاً انرژی پایهٔ هابارد) ممکن است با هر سه دنبال شود.

۳.۳ حداقل فرمالیسم

مدل مدار: حالت $|\psi\rangle$ روی n کیوبیت، تحول یکانی U ساخته‌شده از گیت‌های محلی، سپس اندازه‌گیری در یک پایه. خروجی الگوریتم نوعاً یک برآورد از $\langle\psi|O|\psi\rangle$ است، نه کل تابع موج مگر در مسائل کوچک.

تمایز کوتاه: گیت[۵] دستور موضعی است؛ مدار الگوریتم در مدل دیجیتال است؛ زمان‌بندی هامیلتونی الگوریتم در مدل آنالوگ یا آدیاباتیک است.

۴.۳ ارتباط

الگوریتم به‌معنای عام در فصل ۱، سه لایه در فصل ۴، دیجیتال در برابر آنالوگ در فصل ۱، و تحول در برابر آدیاباتیک در فصل ۲ آمده است.

۵.۳ چه وقت استفاده می‌شود

وقتی می‌پرسید الگوریتم‌های کوانتومی چه هستند، و شبیه‌سازی و رایانهٔ کوانتومی کجای این بحث‌اند. پاسخ کوتاه: رایانه مدل اجراست؛ الگوریتم روال است؛ شبیه‌سازی یک خانواده از مسائل روی همان مدل است.

نکته ۱.۳ (جای توسعه). مدل پرسمان و BQP در حد یک پاراگراف؛ نویز و ناهمدوسی به‌عنوان فاصلهٔ مدل آرمانی از دستگاه؛ early-FTQC در برابر NISQ.

---

[۵] gate.

فصل ۴

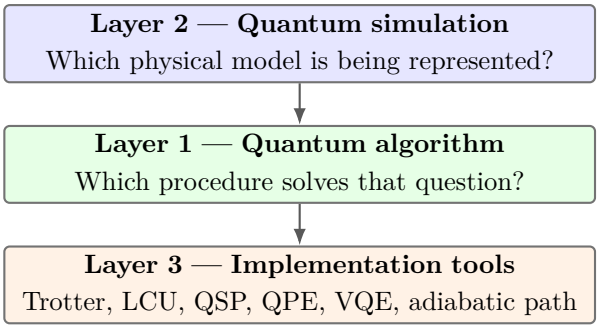
سه لایه: الگوریتم، شبیه‌سازی، ابزار

۱.۴ جایگاه در نقشه

این فصل ستون مفهومی کل سند است. درهم‌ریختگی پژوهشی معمولاً از قاطی کردن این سه لایه می‌آید. جدول عملی «اگر می‌خواهید...» در فصل ۱ است.

۲.۴ ایدهٔ شهودی

سه مفهوم نزدیک‌اند ولی یکی نیستند. شکل ۱.۴ ترتیب منطقی‌شان را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۴: سه لایهٔ نزدیک ولی جدا: شبیه‌سازی می‌گوید چه مدلی مطالعه می‌شود؛ الگوریتم می‌گوید با چه روالی؛ ابزار می‌گوید آن روال چطور ساخته می‌شود.

لایهٔ ۱ — الگوریتم کوانتومی. دستورالعمل محاسباتی برای حل یک مسئله. مثال: با این مدار، انرژی پایه را تا خطای ε برآورد کن.

لایهٔ ۲ — شبیه‌سازی کوانتومی. استفاده از یک سامانهٔ کوانتومی برای بازنمایی و مطالعهٔ یک سامانه یا مدل کوانتومی دیگر. اینجا هدف پژوهشی است: مدل هابارد، یک مولکول، یک نظریهٔ پیمانه‌ای شبکه‌ای.[۱] شبیه‌سازی می‌تواند دیجیتال، آنالوگ، یا ترکیبی باشد. شبیه‌سازی یک گیت خاص نیست [۷، ۶].

لایهٔ ۳ — روش‌های پیاده‌سازی. ابزارهایی برای تحقق یک هدف محاسباتی مشخص: Trotter، ترکیب خطی یکانی‌ها (LCU)، پردازش سیگنال کوانتومی (QSP)، برآورد فاز (QPE)، VQE، و تحول آدیاباتیک.

جملهٔ جهت‌یاب: شبیه‌سازی می‌گوید چه مدلی را مطالعه می‌کنیم؛ الگوریتم می‌گوید با چه روالی؛ ابزار می‌گوید آن روال را چطور روی دستگاه می‌سازیم.

۳.۴ حداقل فرمالیسم

جدول ۱.۴: نمونهٔ جداسازی سه لایه.

می‌خواهید	لایه	نمونه
مسئله را نام ببرید	۲	دینامیک هابارد پس از تغییر ناگهانی هامیلتونی (quench)
روال حل را بنویسید	۱	آماده‌سازی $\|\psi_0\rangle$، اعمال $U(t)$، اندازه‌گیری O
$U(t)$ را بسازید	۳	فرمول حاصل‌ضربی یا QSP
ویژه مقدار را بخوانید	۱ و ۳	QPE که زیرروالش شبیه‌سازی کنترل‌شده است
حالت پایه روی NISQ	۱ و ۳	VQE: آنزات وردشی + بهینه‌ساز کلاسیک

یک ابزار می‌تواند در چند الگوریتم ظاهر شود. Trotter هم دینامیک می‌سازد، هم مسیر آدیاباتیک دیجیتال، هم ورودی QPE.

۴.۴ ارتباط

مدل اجرا در فصل ۳، مدل‌های فیزیکی در فصل ۱، رهیافت‌ها در فصل ۲، و ابزارها در فصل‌های ۱ و ۲ آمده‌اند.

[۱] lattice gauge theory.

۵.۴ چه وقت استفاده می‌شود

قبل از خواندن هر مقاله بپرسید: این کار مسئله است، الگوریتم است، یا ابزار؟ اگر هر سه را در یک جمله قاطی کردید، به این فصل برگردید.

نکته ۱.۴ (جای توسعه). تمایز شبیه‌سازی آنالوگ فاینمن در برابر شبیه‌سازی دیجیتال لوید؛ جایگاه نمونه‌برداری بوزونی به‌عنوان مسئله‌ای مجزا از شبیه‌سازی هامیلتونی.

بخش ۳

از مسئلهٔ فیزیکی تا جریان کاری

فصل ۱

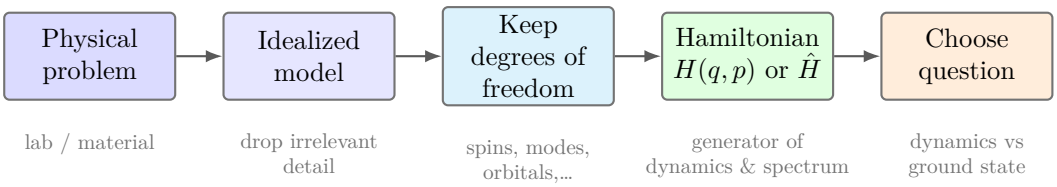
از مسئلهٔ فیزیکی تا هامیلتونی

۱.۱ جایگاه در نقشه

بالای نمودار فصل ۱: مسئلهٔ فیزیکی → مدل ریاضی → هامیلتونی H. قبل از انتخاب Trotter یا VQE باید معلوم شود H چیست، از کجا آمده، و جمله‌هایش چه ساختاری دارند. بخش‌های ۳.۱–۷.۱ همان زیربنا را می‌سازند؛ بخش ۹.۱ نمونهٔ اسپینیِ پرکاربرد سند است.

۲.۱ ایدهٔ شهودی

فیزیک خام مستقیماً الگوریتم نمی‌شود. زنجیرهٔ درست این است: مسئلهٔ آزمایشگاهی → مدل ریاضیِ ایده‌آل‌شده که درجات آزادیِ مهم را نگه می‌دارد → هامیلتونی به‌عنوان مولد دینامیک و طیف → انتخاب پرسش (دینامیک یا پایه/طیف) → رهیافت و ابزار. شکل ۱.۱ همین اسکلت را نشان می‌دهد. بقیهٔ این فصل همان زنجیره را از مکانیک کلاسیک تا کوانتشِ یک مدار LC باز می‌کند؛ سپس خانواده‌های مدل رایج در شبیه‌سازی، و سرانجام Ising به‌تفصیل می‌آید.



شکل ۱.۱: از مسئلهٔ فیزیکی تا هامیلتونی و انتخاب پرسش. الگوریتم از اینجا به بعد شروع می‌شود، نه از خودِ آزمایشگاه.

۳.۱ از مسئلهٔ فیزیکی تا مدل ریاضی

مدل، رونوشت وفادارِ جهان نیست؛ فشرده‌سازیِ آگاهانه است. آنچه نگه می‌دارید همان *درجات آزادی* است که به سؤال پژوهشی‌تان جواب می‌دهد؛ بقیه را دور می‌ریزید یا در پارامترهای مؤثر جمع می‌کنید.

قاعدهٔ عملی.

۱. سؤال را روشن کنید (چه مشاهده‌پذیری؟ در چه مقیاس زمانی/انرژی؟).

۲. درجات آزادیِ حداقلی را نام ببرید (اسپین سایت‌ها، اوربیتال‌ها، شار و بار مدار، ...).

۳. برهم‌کنش‌ها و قیدها را بنویسید.

۴. خروجی را به یک هامیلتونی (کلاسیک یا کوانتومی) برسانید.

چند مسئلهٔ واقعی و مدل نماینده. جدول ۱.۱ نشان می‌دهد که *همان ماده* بسته به پرسش، مدل متفاوتی می‌گیرد.

جدول ۱.۱: نمونهٔ مسئلهٔ فیزیکی، مدل ریاضی، درجات آزادی، و پرسش نوعی.

مسئلهٔ فیزیکی	مدل نماینده	درجات آزادی	پرسش نوعی
آهن‌ربا / اسپین شیشه	Ising / Heisenberg	اسپین روی شبکه	پیکربندی پایه؛ گاف؛ دینامیک پس از quench
الکترون در اکسید همبسته	فرمی–هابارد	الکترون روی سایت با اسپین	عایق مات در برابر فلز؛ ترابرد؛ quench
مولکول کوچک / کاتالیز	ساختار الکترونی (ab initio)	اوربیتال‌های فعال	انرژی پایه؛ طیف ارتعاشی—الکترونی
مدار ابررسانا / کاواک	نوسانگر / مدار LC (بعداً غیرخطی)	شار و بار (مد بوزونی)	بسامد؛ واپاشی؛ جفت‌شدگی به کیوبیت
یون در تله / اتم در شبکهٔ نوری	نوسانگر مکانیکی یا بوز–هابارد	مدهای حرکت یا اشغال سایت	سرمایش؛ تونل‌زنی؛ شبیه‌سازی آنالوگ

نکتهٔ کلیدی: «پاسخی که انتظار دارید» مدل را انتخاب می‌کند. اگر فقط انرژی پایهٔ یک آرایش اسپینی می‌خواهید، Ising کلاسیک کافی است. اگر دینامیک همدوس و درهم‌تنیدگی مهم است، باید مدل کوانتومی (مثلاً TFIM یا هابارد) بگیرید. اگر سخت‌افزار خود یک کاواک است، زبان طبیعی همان نوسانگر هماهنگ کوانتومی است.

۴.۱ هامیلتونی کلاسیک: از کجا می‌آید و چرا مهم است؟

در مکانیک تحلیلی، وضعیت سامانه با مختصات تعمیم‌یافته q و تکانه‌های مزدوج p توصیف می‌شود. لاگرانژی $L(q,\dot{q},t)$ را از انرژی جنبشی و پتانسیل می‌سازید؛ هامیلتونی تبدیل لژاندرِ آن است:

$$H(q,p,t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{۱.۱}$$

برای سامانه‌های پایستارِ متداول، H همان انرژی کل برحسب (q,p) است. معادلات حرکت هامیلتون:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{۲.۱}$$

پس H دو نقش هم‌زمان دارد: (۱) *انرژی* روی فضای فاز، و (۲) *مولد* تحول زمانیِ کلاسیک.

کمینه‌سازی چه معنایی دارد؟

- در تعادل استاتیک، پیکربندی‌های پایدار اغلب نقاط بحرانیِ انرژی پتانسیل‌اند (کمینهٔ موضعی).
- در بهینه‌سازی ترکیبیاتیِ نگاشته‌شده به Ising، «جواب» همان آرگ‌مینِ یک تابع انرژی روی پیکربندی‌های گسسته است — همان نقش H_{Ising} در بخش ۹.۱.
- در دینامیک، مسیر واقعی لزوماً «کمینه کردن H در هر لحظه» نیست؛ H در سامانه‌های پایستار ثابت می‌ماند و مسیر از معادلات هامیلتون می‌آید. کمینه‌سازیِ انرژی وقتی معنا دارد که دنبال حالت تعادل / پایه باشید، نه وقتی فیلم حرکت می‌خواهید.

مثال کوچک کلاسیک: نوسانگر یک‌بعدی.

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{۳.۱}$$

کمینهٔ انرژی در $(x,p)=(0,0)$ است؛ حرکت حول همان نقطه نوسان می‌کند. همین مدل بعد از کوانتش، آجرِ بسیاری از نظریه‌های میدان، اپتیک کوانتومی، و مدارهای ابررساناست.

۵.۱ هامیلتونی کوانتومی

کوانتش کانونی می‌گوید: زوج‌های (q,p) را به عملگرهای $(\hat{q},\hat{p})$ با

$$[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar \tag{۴.۱}$$

ارتقاء دهید و $H(q,p)$ را به عملگر $\hat{H} = H(\hat{q},\hat{p})$ تبدیل کنید (با ترتیب عملگرهای مناسب). دینامیک دیگر معادلهٔ هامیلتون نیست؛ معادلهٔ شرودینگر است:

$$i\hbar\,\partial_t|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle, \tag{۵.۱}$$

و طیف $\hat{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$ انرژی‌های مجاز را می‌دهد. در بقیهٔ این سند، نماد H معمولاً همین عملگر کوانتومی است.

چرا در شبیه‌سازی کوانتومی مرکز صحنه است؟ چون تقریباً همهٔ پرسش‌های این سند تابعی از یک Hاند: e^{-iHt}، ویژه‌مقدارها، $\langle O\rangle$ روی پایه، مسیر $H(s)$، یا $f(H)$. بدون تثبیت H و درجات آزادی‌اش، انتخاب Trotter یا VQE زودرس است.

۶.۱ نوسانگر هماهنگ و عملگرهای خلق و فنا

نوسانگر هماهنگ کوانتومی هم مدل فیزیکی است و هم زبان مشترک برای مدهای بوزونی (کاواک، فونون، مدار LC).

هامیلتونی و طیف. با $\hbar = 1$ برای سادگی سند،

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \omega\Big(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}\Big), \tag{۶.۱}$$

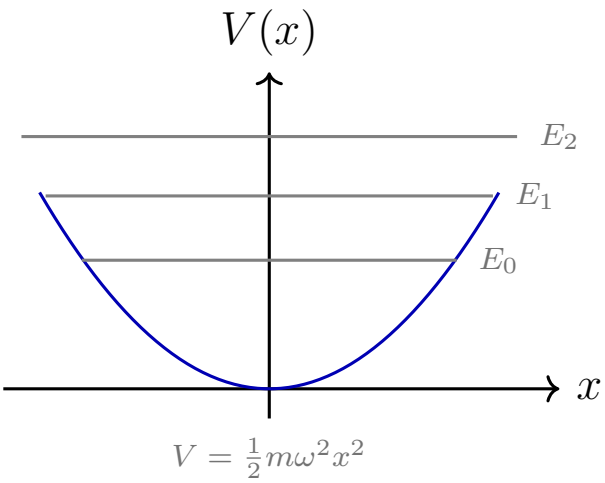
که عملگرهای بی‌بعد

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\Big(x + \frac{i}{m\omega}p\Big), \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\Big(x - \frac{i}{m\omega}p\Big) \tag{۷.۱}$$

در جبر بوزونی صدق می‌کنند:

$$[a, a^\dagger] = 1, \qquad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \tag{۸.۱}$$

ویژه‌حالت‌های عددی $|n\rangle$ با $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$ و انرژی $E_n = \omega(n + \frac{1}{2})$ همان نردبان شکل ۲.۱اند. a یک کوانتوم کم می‌کند (فنا)، $a^\dagger$ یکی اضافه می‌کند (خلق).



شکل ۲.۱: طرحوارهٔ پتانسیل هماهنگ و ترازهای هم‌فاصلهٔ E_n. غیرخطی‌سازی بعدی فاصلهٔ ترازها را به هم می‌زند و راه ساخت کیوبیت از مدار را باز می‌کند.

نوسانگر واداشته. اگر نیروی خارجی یا جفت‌شدگی به میدانِ رانش باشد،

$$H(t) = \omega\Big(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}\Big) + \big(\varepsilon(t)\, a^\dagger + \varepsilon^*(t)\, a\big), \tag{۹.۱}$$

مد را جابه‌جا یا همدوس می‌رانید. در اپتیک کوانتومی و کنترل کاواک، همین جمله‌های خطیِ رانش ابزار استانداردند.

نقش در نظریه‌های مرتبط.

- هر مدِ هارمونیکِ مستقل = یک نسخه از (۶.۱).
- میدان آزاد در کاواک یا موجبر: مجموعهٔ مدها با $a_k, a_k^\dagger$.
- جفت‌شدگی به اتم / کیوبیت: مدل‌های جینز—کامینگز و خویشاوندانش ($g(a\sigma^+ + a^\dagger\sigma^-)$).

- در مدارهای ابررسانا: ابتدا LC هماهنگ است؛ برای داشتن دو ترازِ نشانی‌پذیر باید غیرخطی (پیوند جوزفسون) اضافه شود — جای توسعه در فصل سخت‌افزار/کیوبیت.

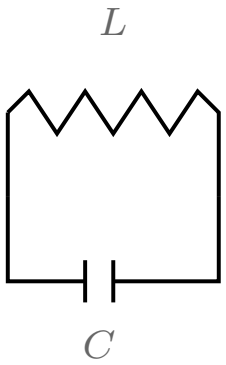
نوشتن H سیستم‌های بس‌مدی با خلق و فنا. الگوی کلی برای بوزون‌ها:

$$H = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_{k\ell} g_{k\ell}\, a_k^\dagger a_\ell + \cdots \tag{۱۰.۱}$$

و برای فرمیون‌ها با $c, c^\dagger$ و $\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij}$ (هابارد و شیمی همین زبان را دارند؛ نگاشت به کیوبیت جداگانه است).

۷.۱ مثال کاری: مدار LC از کلاسیک تا کوانتوم

یک مدار متشکل از القاگر L و خازن C ساده‌ترین سخت‌افزارِ نوسانگر الکتریکی است و پل مستقیم به مدارهای کوانتومی ابررساناست. شکل ۳.۱ متغیرهای کانونی را نشان می‌دهد.



Canonical pair:
flux Φ, charge Q

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L}$$

quantize: $[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar$

شکل ۳.۱: مدار LC: انرژی مغناطیسی در L و الکتریکی در C. زوج کانونی معمول شار گره Φ و بار گره Q است.

گام ۱ — انرژی کلاسیک. شار Φ از القاگر و بار Q روی خازن را مختصات کانونی بگیرید. انرژی کل

$$H(\Phi, Q) = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} \tag{۱۱.۱}$$

است (الکتریکی + مغناطیسی). این دقیقاً همان شکل نوسانگر است با «جرم» و «فنر» بازتعریف‌شده؛ بسامد زاویه‌ای

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{۱۲.۱}$$

گام ۲ — کوانتش. عملگرهای $\hat{\Phi}, \hat{Q}$ را با

$$[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar \tag{۱۳.۱}$$

معرفی کنید و (۱۱.۱) را عملگری بخوانید. با تعریف

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar Z}}\big(\hat{\Phi} + iZ\hat{Q}\big), \qquad Z = \sqrt{\frac{L}{C}}, \tag{۱۴.۱}$$

دوباره به

$$\hat{H} = \hbar\omega\Big(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}\Big) \tag{۱۵.۱}$$

می‌رسید — همان (۶.۱). طیف هم‌فاصله است؛ دو تراز اول به‌تنهایی یک کیوبیتِ خوب نمی‌سازند چون $E_1 - E_0 = E_2 - E_1$.

گام ۳ — پیام برای ادامهٔ سند.

- اگر هدف شبیه‌سازیِ یک مد هارمونیک یا جفت‌شدگی خطی به آن است، همین H کافی است.
- اگر هدف کیوبیت از مدار است، باید پتانسیل را غیرهارمونیک کرد (پیوند جوزفسون: جملهٔ $-E_J\cos\Big(\hat{\Phi}/\phi_0\Big)$). آن‌گاه فاصلهٔ ترازها یکنواخت نیست و می‌توان دو تراز را آدرس‌دهی کرد. جزئیات مهندسی کیوبیت ابررسانا جای توسعهٔ فصل ۱ است؛ اینجا فقط زنجیرهٔ منطقی را قفل می‌کنیم: فیزیک مدار $\to$ H کلاسیک $\to$ کوانتش با جابجاگر $\to$ (در صورت نیاز) غیرخطی‌سازی.

۸.۱ خانواده‌های مدل در شبیه‌سازی کوانتومی

پس از تثبیت زبان H، چهار خانواده برای جهت‌یابی پژوهش کافی‌اند. آنچه از مدلی به مدل دیگر عوض می‌شود کدگذاری درجات آزادی و نوع جمله‌هاست، نه اسکلت الگوریتم.

اسپین: Ising و Heisenberg. ساده‌ترین ورود. درجات آزادی اسپین روی شبکه؛ H جمع جمله‌های دو جسمی مثل Z_iZ_j یا $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$. شهود: مغناطیس، شیشهٔ اسپینی، و بسیاری مسائل بهینه‌سازی که به Ising نگاشته می‌شوند. شرح پایه در بخش ۹.۱.

هابارد (فرمی و بوز). مدل استاندارد همبستگی قوی: ذرات روی شبکه می‌پرند (t) و اگر روی یک سایت باشند انرژی U می‌پردازند. فرمی‌ـ هابارد الکترون‌های همبسته است؛ بوزـ هابارد اتم‌های سرد در شبکهٔ نوری. پرسش‌های نوعی: عایق مات، ابرشاره، ترابرد، دینامیک پس از تغییر ناگهانی هامیلتونی. زبان فرمیونی همان $c, c^\dagger$ است.

ساختار الکترونی مولکولی. الکترون‌ها در میدان هسته‌ها. پس از انتخاب پایه و اغلب یک فضای فعال،[۱] H به شکل فرمیونی یا پائولی درمی‌آید [۸، ۹]. شیمی کوانتومی از همین‌جا به VQE و به شبیه‌سازی تحمل‌پذیر در برابر خطا وصل می‌شود.

میدان روی شبکه و نظریهٔ پیمانه‌ای شبکه‌ای. میدان کوانتومی پیوسته را روی شبکه می‌نشانند تا درجات آزادی متناهی شود. نظریه‌های پیمانه‌ای قیدهای موضعی (قانون گاوس) دارند؛ همین قیدها کدگذاری را سخت‌تر از هابارد می‌کنند. مدهای پیمانه‌ای اغلب خویشاوند نوسانگر / روتورند.

۹.۱ مدل Ising: از فیزیک تا کیوبیت

این بخش برای کسی نوشته شده که هنوز با نظریهٔ Ising کار نکرده است. هدف، نه تاریخچهٔ کامل فیزیک آماری، بلکه همان زبانی است که در بقیهٔ این سند (آدیاباتیک، QAOA، بهینه‌سازی) به کار می‌رود.

---

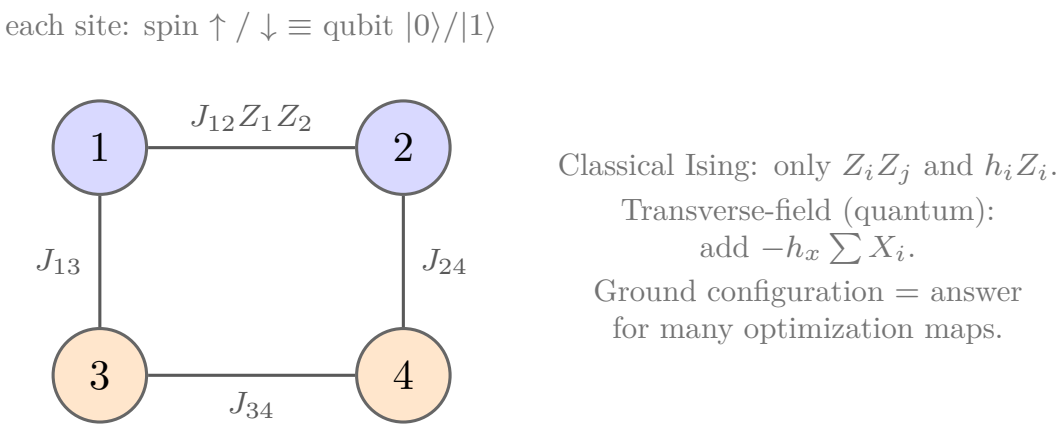
[۱] active space.

۱.۹.۱ ایدهٔ فیزیکی

روی هر سایت شبکه یک اسپین دارید که دو حالت دارد: بالا یا پایین. در مغناطیس، این‌ها جهت ممان مغناطیسی موضعی‌اند؛ در محاسبات کوانتومی همان دو حالت را با یک کیوبیت نشان می‌دهیم:

$$|\uparrow\rangle \equiv |0\rangle, \qquad |\downarrow\rangle \equiv |1\rangle. \tag{۱۶.۱}$$

اسپین‌های همسایه می‌توانند بخواهند هم‌جهت بمانند (فرومغناطیس) یا مخالف هم بایستند (پادفرومغناطیس). میدان خارجی هم می‌تواند هر اسپین را به یک سمت هل بدهد. انرژی کل سامانه جمع همین ترجیح‌های موضعی است؛ *پیکربندی پایه* همان آرایشی است که انرژی را کمینه می‌کند. شکل ۴.۱ یک تکهٔ کوچک شبکه را نشان می‌دهد.



شکل ۴.۱: شبکهٔ Ising: هر رأس یک اسپین/کیوبیت، هر یال یک جفت‌شدگی $J_{ij} Z_i Z_j$، و در صورت نیاز میدان موضعی $h_i Z_i$.

۲.۹.۱ هامیلتونی کلاسیک

شکل استاندارد روی n سایت:

$$H_{\text{Ising}} = \sum_{i<j} J_{ij}\, Z_i Z_j + \sum_i h_i\, Z_i. \tag{۱۷.۱}$$

اینجا Z_i همان ماتریس پائولی روی سایت i است؛ روی پایهٔ محاسباتی قطری است:

$$Z|0\rangle = +|0\rangle, \qquad Z|1\rangle = -|1\rangle. \tag{۱۸.۱}$$

پس روی هر رشتهٔ بیتی $z \in \{0,1\}^n$، H_{Ising} فقط یک عدد می‌دهد —— انرژی کلاسیک آن پیکربندی. به همین دلیل به آن *Ising* کلاسیک می‌گویند: ویژه‌حالت‌های انرژی همان پایه‌های محاسباتی‌اند و نیازی به برهم‌نهی نیست.

معنی علامت‌ها. برای یک جفت، جملهٔ $J\,Z_iZ_j$ را نگاه کنید:

- اگر هر دو $|0\rangle$ یا هر دو $|1\rangle$ باشند، $Z_iZ_j = +1$ و سهم انرژی J است.
- اگر مخالف باشند، $Z_iZ_j = -1$ و سهم $-J$ است.

بنابراین:

- $J < 0$ (یا در قرارداد دیگر $J > 0$ با علامت کلیِ منفی جلوی مجموع): هم‌جهتی انرژی را پایین می‌آورد —— *فرومغناطیس*.
- علامت مخالف: مخالف‌بودن مطلوب است —— *پادفرومغناطیس*.

در این سند اغلب می‌نویسیم $-JZ_iZ_j$ با $J > 0$ تا فرومغناطیس صریح باشد (مثل مثال آدیاباتیک). میدان h_i یک سمت را ترجیح می‌دهد؛ مثلاً $h_i > 0$ در قرارداد $-h_iZ_i$ حالت $|0\rangle$ را پایین می‌آورد.

پارامترها، یک‌جا.

- n: تعداد اسپین / کیوبیت.
- J_{ij}: قدرت و نوع جفت‌شدگی روی یال (i,j).
- h_i: میدان طولی موضعی.
- پیکربندی پایه: رشتهٔ بیتی با کمینهٔ انرژی؛ همان «جواب» بسیاری از نگاشت‌های بهینه‌سازی.

۳.۹.۱ مثال کامل: دو اسپین فرومغناطیس

کوچک‌ترین شبکهٔ غیربدیهی:

$$H = -J\,Z_1Z_2 - h_z\,(Z_1 + Z_2), \qquad J > 0,\ h_z > 0. \tag{۱۹.۱}$$

روی چهار پایهٔ محاسباتی انرژی‌ها صریح‌اند (همان جدول مثال آدیاباتیک):

$$\begin{aligned} E(|00\rangle) &= -J - 2h_z, \\ E(|11\rangle) &= -J + 2h_z, \\ E(|01\rangle) &= E(|10\rangle) = +J. \end{aligned} \tag{۲۰.۱}$$

پس برای $J, h_z > 0$ حالت پایهٔ یکتا $|00\rangle$ است. اگر $h_z = 0$، پایه‌های $|00\rangle$ و $|11\rangle$ تبهگن می‌شوند — هر دو «هم‌جهت»اند و فرومغناطیس هر دو را یکسان دوست دارد. میدان طولی کوچک این تبهگنی را می‌شکند.

این همان H_P در بخش ۸.۲ و نزدیک به H_C در بخش ۱۰.۲ است. تفاوت فصل‌ها در چگونه به پایه می‌رسند است، نه در تعریف خودِ مدل.

۴.۹.۱ Ising کوانتومی و میدان عرضی

اگر فقط جمله‌های Z داشته باشید، هامیلتونی با پایهٔ محاسباتی جابه‌جا می‌شود و دینامیک کوانتومیِ غیربدیهی نمی‌سازد. با افزودن میدان عرضی،

$$H_{\text{TFIM}} = -J \sum_{\langle ij \rangle} Z_i Z_j - h_x \sum_i X_i, \tag{۲۱.۱}$$

جمله‌های X پیکربندی‌های محاسباتی را مخلوط می‌کنند. این *مدل Ising در میدان عرضی*[۲] است: یک مدل کوانتومیِ واقعی با درهم‌تنیدگی، گذار فاز کوانتومی، و دینامیک غیربدیهی.

در محاسبهٔ آدیاباتیک، اغلب از حدِ فقط‌عرضی ($H_B = -h_x \sum X_i$) به‌سمت حدِ کلاسیک (H_P فقط Z) حرکت می‌کنید؛ یعنی خودِ الگوریتم یک مسیر داخل خانوادهٔ (۲۱.۱) است.

۵.۹.۱ چرا در الگوریتم‌های کوانتومی این‌قدر دیده می‌شود؟

۱. **کدگذاری طبیعی روی کیوبیت.** هر اسپین = یک کیوبیت؛ جمله‌ها پائولی‌اند؛ برای مدار دیجیتال یا سخت‌افزار آنالوگ اسپینی آماده است.

۲. **نگاشت بهینه‌سازی.** بسیاری از مسائل ترکیبیاتی (MaxCut، پوشش، تخصیص، ...) را می‌توان به

[۲] transverse-field Ising model (TFIM).

یافتن پایهٔ یک H_{Ising} ترجمه کرد؛ پس حل Ising = حل آن مسئله.

۳. **آزمونگاه روش‌ها.** کوچک است، قابل شمارش است، و در عین حال با زیاد شدن n یا پیچیدگی J_{ij} سخت می‌شود — مناسب مثال‌های این سند و بنچمارک الگوریتم‌ها.

۶.۹.۱ تمایزهای مهم

- **Ising در برابر Heisenberg.** در Heisenberg جملهٔ کامل $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = X_iX_j + Y_iY_j + Z_iZ_j$ است؛ هر سه راستا در جفت‌شدگی شرکت دارند. Ising فقط کانال Z (به‌علاوهٔ میدان‌های خارجی) را نگه می‌دارد.
- **مدل فیزیکی در برابر هزینهٔ بهینه‌سازی.** گاهی H_{Ising} توصیف یک آهن‌ربا است؛ گاهی فقط تابع هزینه‌ای است که روی کیوبیت نوشته‌اید. ریاضی یکی است؛ تفسیر فرق می‌کند.
- **پایهٔ کلاسیک در برابر دینامیک کوانتومی.** یافتن آرگ‌مینِ (۱۷.۱) یک مسئلهٔ ترکیبیاتی است؛ تحول با (۲۱.۱) یک مسئلهٔ شبیه‌سازی کوانتومی است.

۱۰.۱ حداقل فرمالیسم

جمع‌بندی نمادها:

$$H_{\text{cl}}(q,p) \quad \text{انرژی / مولد کلاسیک روی فضای فاز}, \tag{۲۲.۱}$$

$$\hat{H} \quad \text{عملگر کوانتومی پس از } [q,p] = i\hbar, \tag{۲۳.۱}$$

$$H_{\text{SHO}} = \omega\big(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}\big), \tag{۲۴.۱}$$

$$H_{\text{LC}} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} \;\longrightarrow\; \omega\big(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}\big), \tag{۲۵.۱}$$

$$H_{\text{Hubbard}} = -t\sum_{\langle ij\rangle\sigma}\big(c^\dagger_{i\sigma}c_{j\sigma} + \text{h.c.}\big) + U\sum_i n_{i\uparrow}n_{i\downarrow}, \tag{۲۶.۱}$$

$$H_{\text{mol}} = \sum_{pq} h_{pq}a^\dagger_p a_q + \tfrac{1}{2}\sum_{pqrs} h_{pqrs}a^\dagger_p a^\dagger_q a_r a_s. \tag{۲۷.۱}$$

برای اسپین، (۱۷.۱) و (۲۱.۱) مرجع‌اند. پس از داشتن H، سؤال پژوهشی به فصل ۱ می‌رود نه به «نوع ماده».

۱۱.۱ ارتباط

سه لایه در فصل ۴؛ زیربنای H در بخش‌های ۴.۱–۷.۱؛ مثال کامل آدیاباتیک روی Ising در بخش ۸.۲؛ QAOA در بخش ۱۰.۲؛ جریان کاری با مثال هابارد در فصل ۲؛ آنالوگ و مدار در فصل ۱.

۱۲.۱ چه وقت استفاده می‌شود

وقتی مسئلهٔ تازه‌ای می‌بینید، اول جدول ۱.۱ و زنجیرهٔ شکل ۱.۱ را طی کنید: درجات آزادی چیست؟ H کلاسیک است یا کوانتومی؟ پرسش دینامیک است یا پایه؟ اگر مدل Ising است بخش ۹.۱؛ اگر مد مداری/کاواکی است بخش‌های ۶.۱ و ۷.۱.

نکته ۱.۱ (جای توسعه). غیرخطی‌سازی مدار با پیوند جوزفسون و ساخت کیوبیت از نوسانگر غیرهارمونیک؛ کوانتش مرتبهٔ بالاتر و ابهام ترتیب عملگرها؛ حل دقیق Ising دوبدی؛ نگاشت MaxCut به J_{ij}؛ نگاشت فرمیون به کیوبیت (Jordan–Wigner، Bravyi–Kitaev)؛ مدل‌های ارتعاشی–الکترونی؛ جزئیات قید پیمانه‌ای.

فصل ۲

جریان کاری کامل

۱.۲ جایگاه در نقشه

این فصل همان نمودار فصل ۱ را با یک مثال پیمایش می‌کند تا مسیر از فیزیک تا برآورد منابع در ذهن یک خط شود.

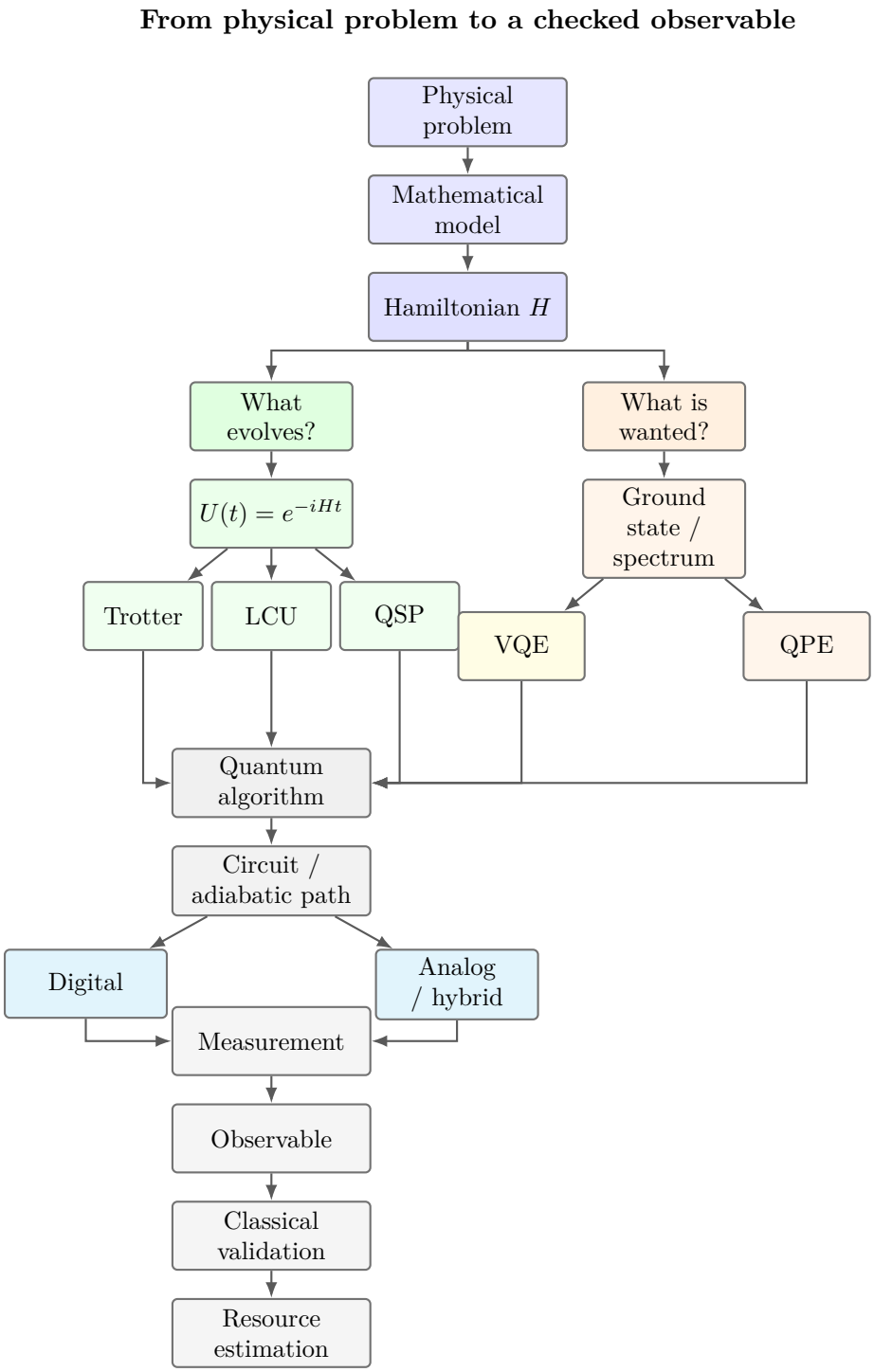
۲.۲ ایدهٔ شهودی

پس از داشتن H دو پرسش جدا می‌شوند: چه چیزی تحول می‌کند (مسئلهٔ دینامیکی: $U(t) = e^{-iHt}$) و چه چیزی خواسته می‌شود (مسئلهٔ ایستا / طیفی). هر پرسش یک یا چند رهیافت دارد؛ هر رهیافت ابزار می‌گیرد؛ ابزار به مدار یا زمان‌بندی سخت‌افزار تبدیل می‌شود؛ خوانش یک مشاهده‌پذیر می‌دهد؛ راستی‌آزمایی کلاسیک می‌گوید عدد باورپذیر است؛ برآورد منابع می‌گوید این مسیر شدنی است یا نه. شکل ۱.۲ همین زنجیره را نشان می‌دهد.

۳.۲ حداقل فرمالیسم

مثال پیمایش: مدل هابارد.

۱. **مسئلهٔ فیزیکی:** دینامیک الکترون‌های همبسته پس از یک تغییر ناگهانی هامیلتونی، یا انرژی حالت پایه.



شکل ۱.۲: جریان کاری از مسئلهٔ فیزیکی تا برآورد منابع. انشعاب میانی همان دو پرسش فصل ۱ است؛ پایین نمودار انتخاب بستر اجراست نه انتخاب مسئله.

۲. **مدل:** فرمی‌ـ‌هابارد با t و U.

۳. **هامیلتونی:** همان H فصل ۱.

۴. **انشعاب سؤال:** اگر quench است، رهیافت تحول زمانی → Trotter یا QSP → مدار دیجیتال → اندازه‌گیری چگالی یا جریان. اگر انرژی پایه است: VQE (نزدیک‌مدت)، یا مسیر آدیاباتیک، یا QPE روی $U = e^{-iHt}$ (تحمل‌پذیر در برابر خطا).

۵. **راستی‌آزمایی:** حد $U = 0$، شبکهٔ کوچک با قطری‌سازی، تقارن تعداد ذره.

۶. **برآورد منابع:** تعداد کیوبیت پس از کدگذاری فرمیونی، عمق مدار، گام‌های تروتر یا درجهٔ چندجمله‌ای QSP، دقت مشاهده‌پذیر.

همین اسکلت برای Heisenberg یا نظریهٔ پیمانه‌ای شبکه‌ای تکرار می‌شود؛ فقط بلوک «مدل» و «کدگذاری» عوض می‌شود.

۴.۲ ارتباط

نقشهٔ فشرده در فصل ۱، مدل‌ها در فصل ۱، دو پرسش در فصل ۱، دو رهیافت در فصل ۲، و بستن حلقه در فصل ۲ آمده است.

۵.۲ چه وقت استفاده می‌شود

برای دیدن شمای کلی در یک نگاه، و برای توضیح دادن مسیر یک پروژه به خودتان در چند دقیقه.

نکته ۱.۲ (جای توسعه). نمودار دوم مخصوص سامانهٔ کوانتومی باز (معادلهٔ مادر، مسیرهای کوانتومی)؛ جعبهٔ جدا برای پاسخ خطی؛ نمونهٔ عددی کوچک (2×2 هابارد).

بخش ۴

دو پرسش و دو رهیافت

فصل ۱

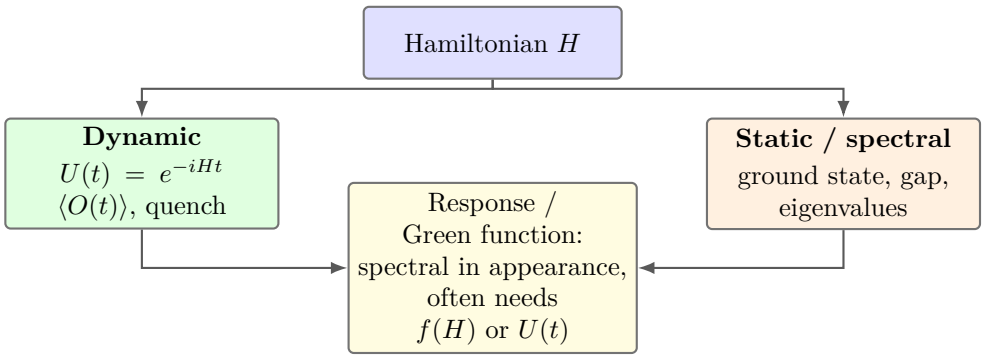
دو پرسش از یک هامیلتونی: دینامیک و طیف

۱.۱ جایگاه در نقشه

اولین انشعاب بعد از H: دینامیک در برابر ایستا / طیفی. همهٔ ابزارهای بعدی زیر یکی از این دو پرسش می‌نشینند، یا روی پل میانشان.

۲.۱ ایدهٔ شهودی

هامیلتونی هم مولد حرکت است و هم تعیین‌کنندهٔ انرژی‌های مجاز. از یک H می‌توان دو خانواده سؤال پرسید که الگوریتم‌هایشان فرق دارد. شکل ۱.۱ این انشعاب را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۱: دو پرسش از یک H. تابع پاسخ روی مرز است: ظاهراً طیفی است، اما اغلب به $f(H)$ یا تحول زمانی نیاز دارد.

پرسش دینامیکی — تحول زمانی. حالت چطور با زمان عوض می‌شود؟ شکل نوعی: سامانه در $|\psi_0\rangle$ است، H ثابت می‌ماند یا ناگهان عوض می‌شود، و می‌خواهیم $|\psi(t)\rangle$ یا $\langle O(t)\rangle$ را بدانیم. شهود: فیلم حرکت سامانه. تغییر ناگهانی هامیلتونی نمونهٔ استاندارد است.

پرسش ایستا / طیفی. چه انرژی‌هایی مجازند؟ حالت پایه چیست؟ گاف چقدر است؟ شهود: طیف خطوط یک اتم، یا کمینهٔ انرژی یک مولکول. اینجا «زمان» هدف نیست؛ ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارها هدف‌اند.

پل: پاسخ خطی. تابع گرین یا تابع طیفی ظاهراً طیفی است، اما محاسبهٔ عملی‌اش اغلب به $f(H)$ یا به تحول زمانی نیاز دارد.

۳.۱ حداقل فرمالیسم

دینامیک بسته (یکانی)، با $\hbar = 1$:

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle, \qquad U(t) = e^{-iHt}, \tag{۱.۱}$$

و مشاهده‌پذیر

$$\langle O(t)\rangle = \langle\psi_0|U^\dagger(t)\, O\, U(t)|\psi_0\rangle. \tag{۲.۱}$$

ایستا: $H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$؛ حالت پایه $|E_0\rangle$؛ گاف $\Delta = E_1 - E_0$. اگر بتوان $U(t)$ را ساخت، برآورد فاز می‌تواند از ویژه‌فاز U به E_n برسد. پس ابزار دینامیک، ورودی بعضی الگوریتم‌های طیفی است.

۴.۱ ارتباط

جریان کاری در فصل ۲، رهیافت‌ها در فصل ۲، ساخت $U(t)$ و $f(H)$ در فصل ۱، و QPE و VQE در فصل ۲ آمده است.

۵.۱ چه وقت استفاده می‌شود

اولین سؤال بعد از نوشتن H: فیلم می‌خواهم یا طیف؟ تا این را مشخص نکنید، انتخاب بین Trotter و VQE بی‌معناست.

نکته ۱.۱ (جای توسعه). دینامیک گرمایی و رسیدن به تعادل گرمایی؛ سامانهٔ کوانتومی باز و معادلهٔ مادر؛ فرمول‌بندی پاسخ خطی با یک مثال.

فصل ۲

دو رهیافت: تحول زمانی و محاسبهٔ آدیاباتیک

۱.۲ جایگاه در نقشه

دومین انشعاب بزرگ: چگونه از H برای محاسبه استفاده می‌کنیم. ابزارهایی مثل Trotter زیرِ رهیافت تحول‌اند؛ مسیر $H(s)$ خودِ رهیافت آدیاباتیک است.

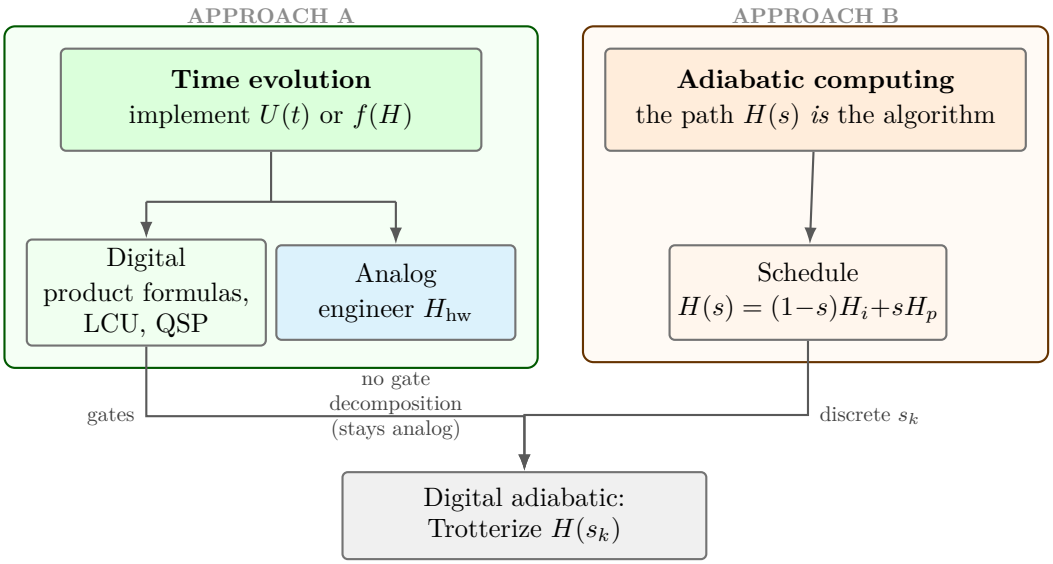
۲.۲ ایدهٔ شهودی

شکل ۱.۲ دو رهیافت و نقطهٔ اتصال‌شان را نشان می‌دهد.

الف) رهیافت تحول زمانی / شرودینگر. هدف: ساختن یا مهندسی $U(t) = e^{-iHt}$ یا به‌طور کلی‌تر یک تابع $f(H)$. دیجیتال: $U(t)$ را به گیت تجزیه می‌کنیم (فصل ۱). آنالوگ: خودِ H را روی سخت‌افزار می‌سازیم تا طبیعت انتگرال زمانی را بگیرد (فصل ۱). شهود: سامانه را حرکت می‌دهیم و در زمان t نگاه می‌کنیم. جزئیات فرمول، پارامترها، و یک مثال کامل در بخش‌های ۳.۲ و ۵.۲ آمده است.

ب) رهیافت محاسبهٔ آدیاباتیک. اینجا محاسبه برابر است با یک مسیر در فضای هامیلتونی‌ها، نه یک $U(t)$ ثابت. معمولاً

$$H(s) = (1-s)\, H_{\text{init}} + s\, H_{\text{problem}}, \qquad s \in [0,1]. \tag{۱.۲}$$



شکل ۱.۲: رهیافت تحول زمانی در برابر محاسبهٔ آدیاباتیک. آنالوگ زیرِ تحول می‌ماند و به گیت تجزیه نمی‌شود؛ مسیر آدیاباتیک را می‌توان با ابزار دیجیتالِ همان ستون چپ گسسته کرد (digital adiabatic)، پس این دو رقیبِ مطلق نیستند.

اگر $s(t)$ به‌قدر کافی آرام عوض شود و گاف لحظه‌ای صفر نشود، حالت در پایهٔ لحظه‌ای می‌ماند. شهود: به‌جای شکستن e^{-iHt} به گیت، مسئله را در خودِ هامیلتونی روشن می‌کنید. جزئیات قضیه، پارامترها، و یک مثال کامل Ising در بخش‌های ۶.۲ و ۸.۲ آمده است.

سه چیز که نباید قاطی شوند:

- **شبیه‌سازی آنالوگ:** $H_{\text{hw}} \approx H_{\text{target}}$؛ لزوماً آدیاباتیک نیست و می‌تواند تحول واقعی زمان را بدهد.
- **محاسبهٔ آدیاباتیک (AQC):** مسیر $H(s)$ خودِ الگوریتم است؛ هدف نوعاً حالت پایه است.
- **بازپخت کوانتومی:** خویشاوند نوفه‌دار و بهینه‌سازی‌محور AQC؛ با شبیه‌سازی دقیق دینامیک یکی نیست.

شکست رهیافت آدیاباتیک همان دینامیک غیرآدیاباتیک است: پرش به ترازهای بالاتر وقتی گاف کوچک یا سرعت زیاد است.

اتصال دو رهیافت. مسیر آدیاباتیک را می‌توان با فرمول حاصل‌ضربی دیجیتال کرد (digital adiabatic): همان Trotter، اما روی $H(s_k)$ در گام‌های گسسته.

۳.۲ رهیافت تحول زمانی: فرمول و پارامترها

در این رهیافت، هامیلتونی (ثابت یا با زمان معلوم) داده شده است و هدف، دنبال کردن حالت یا مشاهده‌پذیرهاست، نه لزوماً رسیدن به پایهٔ یک H_P تازه. معادلهٔ مرکزی شرودینگر است:

$$i\,\partial_t|\psi(t)\rangle = H(t)\,|\psi(t)\rangle, \qquad |\psi(0)\rangle = |\psi_0\rangle. \tag{۲.۲}$$

اگر H مستقل از زمان باشد، پاسخ یکانیِ دقیق

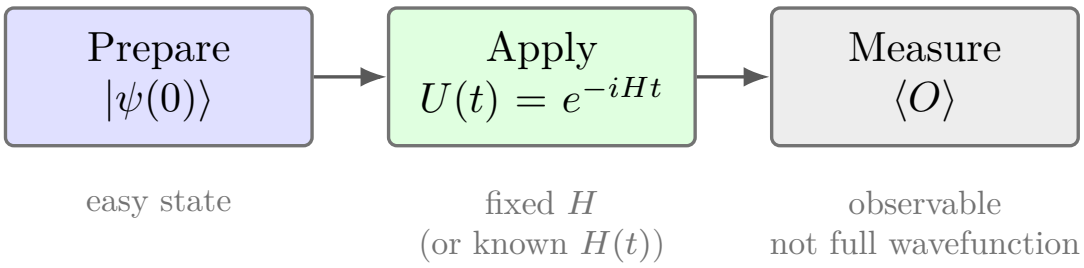
$$U(t) = e^{-iHt}, \qquad |\psi(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle \tag{۳.۲}$$

است. اگر $H = H(t)$ باشد، U با انتگرال زمانیِ مرتب‌شده (time-ordered) تعریف می‌شود؛ در نسخهٔ اول سند همان حالت H ثابت کافی است.

خروجی عملی پژوهش معمولاً خودِ تابع موج نیست، بلکه یک *مشاهده‌پذیر*[۱]:

$$\langle O\rangle(t) = \langle\psi(t)|O|\psi(t)\rangle = \langle\psi_0|U^\dagger(t)\,O\,U(t)|\psi_0\rangle. \tag{۴.۲}$$

جریان کاری شهودی در شکل ۲.۲ آمده است: آماده‌سازی آسان $\to$ اعمال $U(t)$ $\to$ اندازه‌گیری $\langle O\rangle$.



شکل ۲.۲: اسکلت رهیافت تحول زمانی. سؤال پژوهشی اغلب روی $\langle O\rangle(t)$ است، نه روی کل $|\psi(t)\rangle$.

دو مسیر تحقق $U(t)$.

- **دیجیتال:** $U(t)$ را به گیت‌ها تجزیه کنید (Trotter، LCU، QSP؛ فصل ۱).
- **آنالوگ:** $H_{\rm hw} \approx H$ را روی سخت‌افزار بسازید و زمان فیزیکی را جلو ببرید (بخش ۳.۱).

---

[۱] observable.

تعمیم مهم: بسیاری از الگوریتم‌ها به خودِ e^{-iHt} نیاز ندارند، بلکه به یک تابع $f(H)$ (فیلتر، وارون، ...). زبان مشترک همان پیاده‌سازی $f(H)$ است؛ تحول زمانی فقط انتخاب $f(x) = e^{-itx}$ است.

پارامترها، یک‌جا.

- H یا $H(t)$: هامیلتونی مدل؛ در دیجیتال معمولاً به جمع جمله‌های آسان $H = \sum_k H_k$ شکسته می‌شود.
- $|\psi_0\rangle$: حالت اولیه (اغلب حاصل یک quench یا یک آماده‌سازی ساده).
- t: زمان فیزیکی هدف.
- O: مشاهده‌پذیر اندازه‌گیری‌شده ($\langle Z\rangle$، انرژی، همبستگی، ...).
- ε: خطای مجاز در $U(t)$ یا در $\langle O\rangle$؛ هزینهٔ مدار/منابع را تعیین می‌کند.
- در دیجیتال: پارامترهای ابزار (مثلاً تعداد گام تروتر r)؛ در آنالوگ: وفاداری نگاشت $H_{\mathrm{hw}} \leftrightarrow H$.

هزینهٔ شهودی. برخلاف آدیاباتیک که گلوگاهش $\Delta_{\min}$ مسیر است، اینجا هزینه نوعاً با $\|H\|$ (یا هنجار جمله‌ها)، زمان t، و دقت ε رشد می‌کند. شکل دقیق برای فرمول حاصل‌ضربی در بخش ۳.۱ آمده است.

۴.۲ ردهٔ مسائل مناسب تحول زمانی

رهیافت تحول وقتی طبیعی است که پرسش، *دینامیک* یا یک $f(H)$ باشد [۵، ۱۰]:

۱. **تغییر ناگهانی هامیلتونی (quench).** سامانه در پایهٔ H_0 است؛ ناگهان H عوض می‌شود و می‌خواهید $\langle O\rangle(t)$ را ببینید.

۲. **پاسخ زمانی و ترابرد.** انتشار، جریان، توابع همبستگی در زمان حقیقی.

۳. **ورودی الگوریتم‌های طیفی.** برآورد فاز به توان‌های کنترل‌شدهٔ $U = e^{-iHt}$ نیاز دارد؛ پس شبیه‌سازی تحول، پیش‌نیاز QPE است.

۴. **توابع عمومی** $f(H)$. وارون، فیلتر طیفی، و مانند آن‌ها در چارچوب QSVT/QSP.

اگر هدف فقط حالت پایهٔ یک مسئلهٔ بهینه‌سازیِ نگاشته‌شده به Ising است و سخت‌افزار مسیر $H(s)$ می‌دهد، آدیاباتیک (بخش ۶.۲) اغلب مستقیم‌تر است.

۵.۲ مثال کاری: یک اسپین در میدان عرضی

هدف این مثال آن است که کمیت‌های بخش ۳.۲ روی کوچک‌ترین سامانهٔ ممکن نام‌گذاری صرف نمانند: یک اسپین–$1/2$ (یک کیوبیت)، تحول دقیق تحلیلی، و یک مشاهده‌پذیر نوسانی.

گام ۱ — هامیلتونی و حالت اولیه. همان انرژی زیمانِ عرضی که در مثال آدیاباتیک نقطهٔ شروع بود، اینجا خودِ هامیلتونیِ ثابتِ تحول است:

$$H = -h_x X, \qquad h_x > 0. \tag{۵.۲}$$

حالت اولیه را در پایهٔ محاسباتی می‌گیریم، نه در پایهٔ X:

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle. \tag{۶.۲}$$

این یک quench کوچک است: اگر قبلاً میدان در راستای z بود و پایه $|0\rangle$، ناگهان میدان به راستای x می‌چرخد و دینامیک آغاز می‌شود.

گام ۲ — عملگر تحول دقیق. چون $X^2 = I$،

$$U(t) = e^{-iHt} = e^{ih_x t\, X} = \cos(h_x t)\, I + i \sin(h_x t)\, X. \tag{۷.۲}$$

بنابراین

$$|\psi(t)\rangle = \cos(h_x t)\, |0\rangle + i \sin(h_x t)\, |1\rangle. \tag{۸.۲}$$

گام ۳ — مشاهده‌پذیر. اندازه‌گیری Z می‌دهد

$$\langle Z\rangle(t) = \cos^2(h_x t) - \sin^2(h_x t) = \cos(2h_x t). \tag{۹.۲}$$

با انتخاب عددی $h_x = 1$، در زمان $t = 1$ داریم $\langle Z\rangle = \cos 2 \approx -0.416$. دورهٔ کامل نوسان وقتی $2h_x T_{\text{osc}} = 2\pi$ است، یعنی $T_{\text{osc}} = \pi/h_x$.

گام ۴ — تفسیر در نقشهٔ سند.

- پرسش: دینامیکی است ($\langle Z\rangle(t)$)، نه یافتن پایهٔ یک H_P تازه.
- رهیافت: تحول زمانی با H ثابت.
- تحقق: اینجا $U(t)$ تحلیلی است. برای هامیلتونیِ چند جمله‌ایِ جابه‌جانشونده، همین $U(t)$ را باید با ابزار فصل ۱ ساخت؛ ساده‌ترین‌شان Trotter است (بخش ۴.۱).

گام ۵ — یک پله به‌سوی مدل واقعی‌تر. اگر به‌جای یک میدان خالص،

$$H = X + Z \tag{۱۰.۲}$$

باشد، دیگر $U(t)$ به همین سادگی با یک دوران حول یک محور پائولی نوشته نمی‌شود، چون $[X, Z] \neq 0$. جواب دقیق هنوز با قطری‌سازی 2×2 ممکن است، اما روی سخت‌افزار دیجیتال معمولاً از فرمول حاصل‌ضربی استفاده می‌شود. همان هامیلتونی، مثال کاری بخش ۴.۱ است.

۶.۲ قضیهٔ آدیاباتیک: فرمول و پارامترها

فرض کنید خانوادهٔ هامیلتونی‌های

$$H(s), \qquad s \in [0, 1], \tag{۱۱.۲}$$

در هر s قطری‌پذیر باشد و ویژه‌مقادیرش را به‌صورت صعودی $E_0(s) \leq E_1(s) \leq \cdots$ بنویسیم. ویژه‌بردار متناظر با پایه را $|\psi_0(s)\rangle$ می‌نامیم (*ویژه‌حالت لحظه‌ای*[۲]). *گاف لحظه‌ای*[۳] میان پایه و اولین تراز برانگیخته

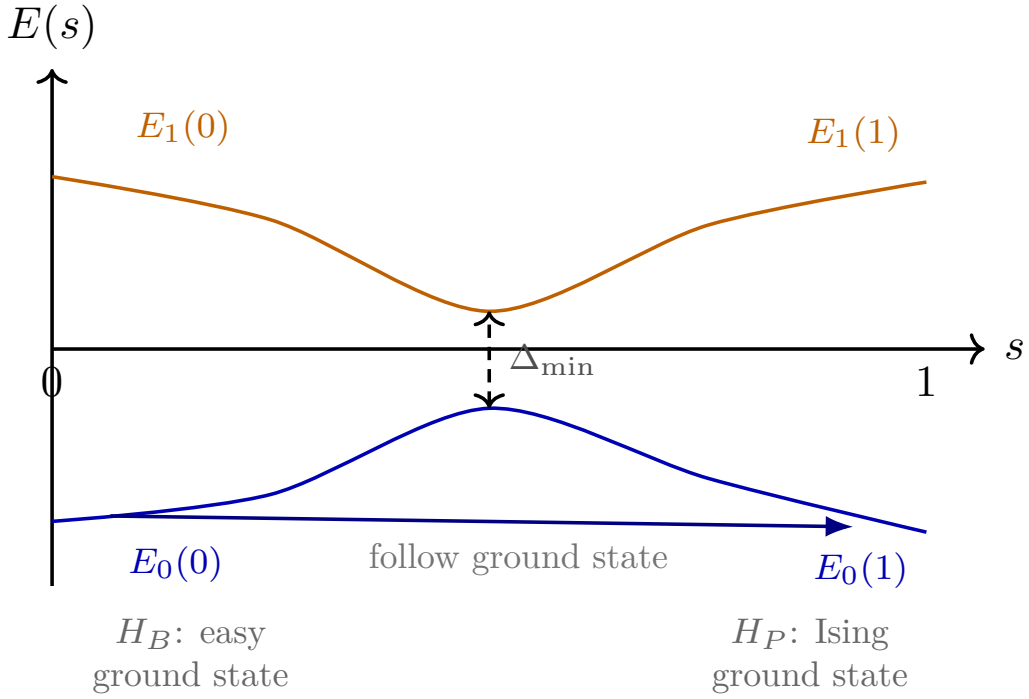
$$\Delta(s) := E_1(s) - E_0(s) \tag{۱۲.۲}$$

است و کمینهٔ آن روی مسیر،

$$\Delta_{\min} := \min_{s\in[0,1]} \Delta(s), \tag{۱۳.۲}$$

[۲] instantaneous eigenstate.
[۳] instantaneous gap.

پارامتر تعیین‌کنندهٔ سختی مسیر است (شکل ۳.۲).



شکل ۳.۲: طیف لحظه‌ای در طول مسیر s. حالت سامانه باید روی شاخهٔ پایه بماند؛ تنگ‌ترین گاف $\Delta_{\min}$ تعیین می‌کند مسیر چقدر باید آرام باشد.

زمان‌بندی[۴] نگاشت زمان فیزیکی به پارامتر بی‌بعد است: $s = s(t)$ با $s(0) = 0$ و $s(T) = 1$. ساده‌ترین انتخاب خطی است،

$$s(t) = \frac{t}{T}, \qquad t \in [0, T], \tag{۱۴.۲}$$

ولی هر $s(t)$ یکنواختِ هموار قابل‌قبول است. سامانه از معادلهٔ شرودینگرِ زمان‌وابسته پیروی می‌کند:

$$i\,\partial_t |\Psi(t)\rangle = H\big(s(t)\big)\,|\Psi(t)\rangle. \tag{۱۵.۲}$$

بیان کاری قضیه. اگر سامانه در $t = 0$ در $|\psi_0(0)\rangle$ باشد، گاف در طول مسیر مثبت بماند ($\Delta_{\min} > 0$)، و زمان کل T به‌قدر کافی بزرگ باشد، آن‌گاه در $t = T$ حالت به $|\psi_0(1)\rangle$ نزدیک می‌ماند. یک کران کافیِ رایج (نه لزوماً بهینه) این است [۱۱]:

$$T \gtrsim \frac{\max_s \big\|\partial_s H(s)\big\|}{\Delta_{\min}^2}\,\frac{1}{\varepsilon}, \tag{۱۶.۲}$$

[۴] schedule.

که ε خطای مجاز در فاصله از پایهٔ نهایی است و $\|\cdot\|$ هنجار عملگری مناسب. شهود: صورتِ کسر شدت تغییر هامیلتونی را می‌سنجد؛ مخرج می‌گوید گاف کوچک‌تر $\Rightarrow$ مسیر گران‌تر.

پارامترها، یک‌جا.

- H_{init} یا H_B: هامیلتونی آغازین با پایهٔ *آسان* (آماده یا شناخته‌شده).
- H_{problem} یا H_P: هامیلتونی مسئله؛ پایهٔ آن همان پاسخی است که می‌خواهیم.
- s یا $s(t)$: پارامتر درون‌یابی / زمان‌بندی.
- $\Delta(s)$ و $\Delta_{\min}$: گاف لحظه‌ای و کمینه‌اش؛ گلوگاه منابع.
- T: زمان کل اجرا؛ باید با (۱۶.۲) سازگار باشد.
- ε: خطای مجاز نسبت به $|\psi_0(1)\rangle$.

برای درون‌یابی خطی $H(s) = (1-s)H_B + sH_P$ داریم $\partial_s H = H_P - H_B$، پس صورتِ (۱۶.۲) مستقل از s و برابر $\|H_P - H_B\|$ است.

هزینه در رهیافت تحول (برای مقایسه). آنجا هزینه به هنجار جمله‌های H، زمان t، و دقت ε بستگی دارد؛ جزئیات در بخش ۳.۲ و برای فرمول حاصل‌ضربی در بخش ۳.۱ آمده است. اینجا گلوگاه $\Delta_{\min}$ است، نه لزوماً ژرفای مدار گیتی.

۷.۲ ردهٔ مسائل مناسب آدیاباتیک

محاسبهٔ آدیاباتیک (AQC) وقتی طبیعی است که پرسشِ اصلی *حالت پایهٔ* یک H_P سخت باشد، نه دینامیک در زمان ثابت [۱۲، ۱۱]:

۱. **بهینه‌سازی ترکیبی و اسپین کلاسیک.** بسیاری از مسائل NP ـ سخت (برش بیشینه، پوشش رأس، تخصیص، ...) به یک هامیلتونی Ising کلاسیک نگاشته می‌شوند:

$$H_P = \sum_i h_i Z_i + \sum_{i<j} J_{ij} Z_i Z_j. \tag{۱۷.۲}$$

پیکربندی پایه‌ایِ H_P همان حل مسئله است.

۲. **آماده‌سازی حالت پایهٔ مدل‌های فیزیکی.** وقتی H_P خودِ مدل فیزیکی است (مثلاً Ising کوانتومی، یا تقریبی از یک هامیلتونی مولکولی) و می‌خواهید $|E_0\rangle$ را روی سخت‌افزار بنشانید.

۳. **سخت‌افزاری که مسیر می‌دهد.** بازپخت کوانتومی و بعضی سکوهای آنالوگ ذاتاً یک $H(s)$ اجرا می‌کنند؛ حتی اگر نوفه‌دار باشند، زبان مسئله همان مسیر آدیاباتیک است.

اگر پرسش شما تحول زمانیِ دقیق e^{-iHt} یا یک $f(H)$ عمومی است، رهیافت تحول (با QSP/LCU/Trotter) مناسب‌تر است. اگر گاف مسیر به‌سمت صفر می‌رود (گذار بحرانی، تبهگنی)، آدیاباتیک ساده شکست می‌خورد یا T نجومی می‌شود.

۸.۲ مثال کاری: از میدان عرضی به Ising

هدف این بخش آن است که ایدهٔ محاسبهٔ آدیاباتیک را در یک مثال کوچک اما کامل دنبال کنیم؛ به‌گونه‌ای که کمیت‌هایی مانند هامیلتونی آغازین، هامیلتونی مسئله، مسیر در فضای هامیلتونی‌ها، گاف طیفی و زمان اجرا صرفاً نام‌گذاری باقی نمانند. برای این منظور، یک سامانهٔ متشکل از دو اسپین‌ـ$1/2$، یا معادل آن دو کیوبیت، در نظر می‌گیریم.

ایدهٔ اصلی بسیار ساده است. ابتدا سامانه را در یک حالت پایهٔ شناخته‌شده و به‌آسانی قابل آماده‌سازی قرار می‌دهیم. سپس هامیلتونی را به‌آرامی از یک هامیلتونی ساده به هامیلتونی مسئله تغییر می‌دهیم. اگر تغییر به اندازهٔ کافی آهسته باشد و گاف انرژی در طول مسیر بیش از حد کوچک نشود، سامانه در حالت پایهٔ لحظه‌ای باقی می‌ماند و در انتهای مسیر، حالت پایهٔ هامیلتونی مسئله را به دست می‌آوریم.

در این مثال، هامیلتونی آغازین از یک میدان مغناطیسی عرضی به دست می‌آید و هامیلتونی نهایی یک مدل Ising است. اگر خودِ مدل برای‌تان ناآشناست، نخست بخش ۹.۱ را بخوانید. سپس به‌صورت صریح نشان می‌دهیم که چرا گاف در میانهٔ مسیر به یک کمینه می‌رسد و چگونه مقدار $\Delta_{\min} \simeq 0.66$ در $s_* \simeq 0.62$ به دست می‌آید.

گام ۱ — هامیلتونی آغازین: یک میدان عرضی ساده. برای یک اسپین‌ـ$1/2$ در یک میدان مغناطیسی، انرژی برهم‌کنش میدان و ممان مغناطیسی از نوع انرژی زیمان است:

$$H_{\mathrm{Z}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}. \tag{۱۸.۲}$$

اگر میدان در راستای محور x قرار داشته باشد، مؤلفهٔ متناظر اسپین در هامیلتونی ظاهر می‌شود. با جذب ثابت‌های فیزیکی مانند اندازهٔ ممان مغناطیسی در پارامتر میدان، می‌توان هامیلتونی یک اسپین را به‌صورت

$$H_{\mathrm{Z}} = -h_x X \tag{۱۹.۲}$$

نوشت که در آن X همان ماتریس پائولی در راستای x و $h_x > 0$ شدت مؤثر میدان عرضی است.

برای دو اسپین مستقل، انرژی کل برابر مجموع انرژی هر دو اسپین است. بنابراین

$$H_B = -h_x(X_1 + X_2), \qquad h_x > 0, \tag{۲۰.۲}$$

که در آن

$$X_1 = X \otimes I, \qquad X_2 = I \otimes X. \tag{۲۱.۲}$$

به بیان فیزیکی، X_1 و X_2 نشان می‌دهند که میدان عرضی به‌ترتیب روی اسپین اول و دوم عمل می‌کند.

در پایهٔ محاسباتی،

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{۲۲.۲}$$

و ویژه‌حالت‌های آن عبارت‌اند از

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{۲۳.۲}$$

به‌طوری‌که

$$X|+\rangle = +|+\rangle, \qquad X|-\rangle = -|-\rangle. \tag{۲۴.۲}$$

از آنجا که X_1 و X_2 روی دو کیوبیت متفاوت عمل می‌کنند،

$$[X_1, X_2] = 0, \tag{۲۵.۲}$$

و بنابراین می‌توان ویژه‌حالت‌های H_B را به‌صورت حاصل‌ضرب تانسوری ویژه‌حالت‌های X ساخت. اگر

$a, b \in \{+, -\}$ باشند، داریم

$$H_B\big(|a\rangle \otimes |b\rangle\big) = -h_x(x_a + x_b)\big(|a\rangle \otimes |b\rangle\big), \tag{۲۶.۲}$$

که در آن $x_+ = +1$ و $x_- = -1$ هستند.

در نتیجه، چهار حالت ویژه و انرژی‌های متناظر عبارت‌اند از

حالت	انرژی
$\|++\rangle$	$-2h_x$
$\|+-\rangle$	0
$\|-+\rangle$	0
$\|--\rangle$	$+2h_x$

(۲۷.۲)

و بنابراین، برای $h_x > 0$ حالت پایه یکتا است:

$$|\psi_0(0)\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle, \qquad E_0(0) = -2h_x. \tag{۲۸.۲}$$

اگر آن را در پایهٔ محاسباتی بنویسیم،

$$|++\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\right). \tag{۲۹.۲}$$

این حالت به‌سادگی با اعمال دو گیت هادامارد روی $|00\rangle$ آماده می‌شود:

$$|++\rangle = (H \otimes H)|00\rangle. \tag{۳۰.۲}$$

بنابراین هامیلتونی H_B یک ویژگی بسیار مهم دارد: هم تعریف فیزیکی آن ساده است و هم حالت پایهٔ آن را بدون حل یک مسئلهٔ پیچیده می‌دانیم. این همان نقش «نقطهٔ شروع آسان» در محاسبهٔ آدیاباتیک است.

گام ۲ — هامیلتونی مسئله: مدل Ising. اکنون هامیلتونی‌ای را تعریف می‌کنیم که حالت پایهٔ آن پاسخ مسئلهٔ مورد نظر را در خود رمزگذاری کند (پس‌زمینهٔ فیزیکی و قرارداد علامت‌ها در بخش ۹.۱):

$$H_P = -JZ_1Z_2 - h_z(Z_1 + Z_2), \qquad J > 0, \quad h_z > 0. \tag{۳۱.۲}$$

در اینجا دو نوع برهم‌کنش داریم. جملهٔ

$$-JZ_1Z_2 \tag{۳۲.۲}$$

یک جفت‌شدگی فرومغناطیسی است؛ بنابراین پیکربندی‌هایی که دو اسپین در یک جهت قرار دارند، یعنی $|00\rangle$ و $|11\rangle$، انرژی کمتری دارند. جملهٔ

$$-h_z(Z_1 + Z_2) \tag{۳۳.۲}$$

یک میدان طولی در راستای z است که بین $|00\rangle$ و $|11\rangle$ تمایز ایجاد می‌کند.

در پایهٔ محاسباتی، چون

$$Z|0\rangle = +|0\rangle, \qquad Z|1\rangle = -|1\rangle, \tag{۳۴.۲}$$

می‌توان انرژی هر چهار پیکربندی را مستقیماً محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} E(|00\rangle) &= -J - 2h_z, \\ E(|11\rangle) &= -J + 2h_z, \\ E(|01\rangle) &= +J, \\ E(|10\rangle) &= +J. \end{aligned} \tag{۳۵.۲}$$

از آنجا که $J > 0$ و $h_z > 0$،

$$E(|00\rangle) < E(|11\rangle) < E(|01\rangle) = E(|10\rangle) \tag{۳۶.۲}$$

و بنابراین حالت پایهٔ هامیلتونی مسئله یکتا است:

$$|\psi_0(1)\rangle = |00\rangle, \qquad E_0(1) = -J - 2h_z. \tag{۳۷.۲}$$

این مثال کوچک، ایدهٔ نگاشت مسئلهٔ بهینه‌سازی به یک هامیلتونی را نیز نشان می‌دهد. در یک مسئلهٔ بزرگ‌تر، ضرایب J_{ij} و h_i می‌توانند از تابع هزینهٔ یک مسئلهٔ بهینه‌سازی به دست آیند. در این صورت، هر

رشتهٔ بیتی

$$z = (z_1, \ldots, z_n), \qquad z_i \in \{+1, -1\}, \tag{۳۸.۲}$$

یک پیکربندی ممکن است و انرژی متناظر آن نقش تابع هزینه را بازی می‌کند. یافتن حالت پایهٔ H_P در واقع به معنای یافتن پیکربندی با کمترین هزینه است.

برای دو کیوبیت، این مسئله با بررسی چهار حالت به‌سادگی حل می‌شود؛ اما برای n کیوبیت، فضای پیکربندی دارای

$$2^n \tag{۳۹.۲}$$

حالت است. هدف روش آدیاباتیک آن نیست که این 2^n حالت را یکی‌یکی جست‌وجو کند، بلکه تلاش می‌کند از تکامل کوانتومی سامانه برای رسیدن مستقیم به حالت پایه استفاده کند.

گام ۳ — ساخت مسیر آدیاباتیک. اکنون دو انتهای مسئله را داریم:

$$H_B \longrightarrow H_P. \tag{۴۰.۲}$$

برای اتصال این دو، یک درون‌یابی خطی استاندارد در نظر می‌گیریم [۱۲]:

$$H(s) = (1-s)H_B + sH_P, \qquad 0 \le s \le 1. \tag{۴۱.۲}$$

پارامتر s زمان فیزیکی نیست؛ بلکه یک پارامتر بدون‌بُعد است که مشخص می‌کند در هر لحظه چه سهمی از هامیلتونی آغازین و چه سهمی از هامیلتونی مسئله در سامانه وجود دارد. در یک زمان‌بندی خطی،

$$s(t) = \frac{t}{T}, \qquad 0 \le t \le T, \tag{۴۲.۲}$$

که در آن T کل زمان اجرای فرآیند است.

بنابراین

$$H(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) H_B + \frac{t}{T} H_P. \tag{۴۳.۲}$$

برای ادامهٔ محاسبه، پارامترهای عددی زیر را انتخاب می‌کنیم:

$$h_x = 1, \qquad J = 1, \qquad h_z = \frac{1}{4}. \tag{۴۴.۲}$$

در ابتدا،

$$H(0) = H_B, \tag{۴۵.۲}$$

و در انتها،

$$H(1) = H_P. \tag{۴۶.۲}$$

از نتایج دو گام قبل داریم:

$$\begin{aligned} E_0(0) &= -2, & |\psi_0(0)\rangle &= |{+}{+}\rangle, \\ E_0(1) &= -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}, & |\psi_0(1)\rangle &= |00\rangle. \end{aligned} \tag{۴۷.۲}$$

نکتهٔ مهم این است که در حالت کلی

$$[H_B, H_P] \neq 0. \tag{۴۸.۲}$$

بنابراین حالت پایهٔ H_B و حالت پایهٔ H_P یکسان نیستند و نمی‌توان سامانه را صرفاً با یک تغییر سادهٔ پایه از ابتدا تا انتها توصیف کرد. حالت پایه در طول مسیر نیز تغییر می‌کند.

برای هر مقدار s، ویژه‌مقدارهای لحظه‌ای را به‌صورت

$$H(s)|\psi_k(s)\rangle = E_k(s)|\psi_k(s)\rangle, \qquad E_0(s) \leq E_1(s) \leq \cdots \tag{۴۹.۲}$$

تعریف می‌کنیم. اگر سامانه از حالت پایه شروع کند و به‌اندازهٔ کافی آهسته تکامل یابد، هدف این است که در طول مسیر در $|\psi_0(s)\rangle$ باقی بماند و در انتها به $|\psi_0(1)\rangle$ برسد.

همچنین

$$\frac{\partial H}{\partial s} = H_P - H_B. \tag{۵۰.۲}$$

در اینجا باید یک تمایز مفهومی مهم را روشن کرد. رابطهٔ

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle \tag{۵۱.۲}$$

عملگر تکامل زمانی یک هامیلتونی ثابت را بیان می‌کند؛ خود این عبارت لزوماً «الگوریتم» نیست. در اجرای دیجیتال، الگوریتم‌هایی مانند Trotter–Suzuki یا روش‌های مبتنی بر LCU و QSP برای تقریب یا پیاده‌سازی این تکامل به کار می‌روند. در محاسبهٔ آدیاباتیک نیز ایدهٔ محاسباتی، تغییر آهستهٔ هامیلتونی $H(s)$ و دنبال‌کردن حالت پایهٔ لحظه‌ای است.

گام ۴ — چرا گاف مهم است؟ کل استدلال آدیاباتیک حول یک کمیت طیفی مهم می‌چرخد: گاف بین دو تراز انرژی پایین‌تر. آن را به‌صورت

$$\Delta(s) = E_1(s) - E_0(s) \tag{۵۲.۲}$$

تعریف می‌کنیم.

در طول مسیر، $\Delta(s)$ ممکن است تغییر کند. کمیتی که برای زمان اجرای آدیاباتیک اهمیت اساسی دارد، کوچک‌ترین مقدار این گاف است:

$$\Delta_{\min} = \min_{0\le s\le 1} \Delta(s). \tag{۵۳.۲}$$

علت اهمیت آن را می‌توان به‌صورت شهودی چنین بیان کرد: هرچه دو تراز کم‌انرژی به یکدیگر نزدیک‌تر شوند، جدا نگه‌داشتن دینامیک سامانه در شاخهٔ حالت پایه دشوارتر می‌شود و سامانه به زمان بیشتری برای تکامل نیاز دارد. بنابراین گاف کوچک معمولاً به یک گلوگاه آدیاباتیک تبدیل می‌شود.

برای مثال حاضر، در نقطهٔ شروع داریم

$$\mathrm{spec}(H_B) = \{-2, 0, 0, 2\}, \tag{۵۴.۲}$$

پس

$$\Delta(0) = 2. \tag{۵۵.۲}$$

در انتهای مسیر نیز

$$\mathrm{spec}(H_P) = \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right\}, \tag{۵۶.۲}$$

و در نتیجه

$$\Delta(1) = 1. \tag{۵۷.۲}$$

اما از این دو مقدار نمی‌توان نتیجه گرفت که کمینهٔ گاف در ابتدا یا انتهای مسیر قرار دارد. ممکن است گاف در میانهٔ مسیر کوچک‌تر شود. در واقع در این مثال دقیقاً همین اتفاق رخ می‌دهد.

گام ۵ — ماتریس صریح $H(s)$ و منشأ نزدیک‌شدن ترازها. برای مشاهدهٔ این موضوع، ابتدا هامیلتونی‌های ابتدا و انتها را در پایهٔ محاسباتی

$$\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\} \tag{۵۸.۲}$$

می‌نویسیم.

برای $h_x = 1$ داریم

$$H_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{۵۹.۲}$$

در حالی که

$$H_P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{۶۰.۲}$$

بنابراین

$$H(s) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}s & -(1-s) & -(1-s) & 0 \\ -(1-s) & s & 0 & -(1-s) \\ -(1-s) & 0 & s & -(1-s) \\ 0 & -(1-s) & -(1-s) & -\frac{1}{2}s \end{pmatrix}. \tag{۶۱.۲}$$

این ماتریس نکتهٔ اصلی مثال را بسیار روشن می‌کند. در $s = 0$، جمله‌های خارج از قطر ناشی از میدان عرضی X غالب‌اند و حالت پایه تقریباً همان $|{+}{+}\rangle$ است. با افزایش s، جمله‌های قطری ناشی از هامیلتونی Ising تقویت می‌شوند و ترجیح سامانه به سمت پیکربندی $|00\rangle$ تغییر می‌کند.

از آنجا که دو هامیلتونی با یکدیگر جابجایی‌پذیر نیستند، ویژه‌حالت‌ها نیز در طول مسیر تغییر می‌کنند. در نتیجه، ویژه‌مقدارها نیز توابع ساده و خطی از s نیستند.

این نکته اهمیت زیادی دارد:

$$H(s) = (1-s)H_B + sH_P \tag{۶۲.۲}$$

در s خطی است، اما به‌طور کلی

$$E_k(s) \neq (1-s)E_k(0) + sE_k(1). \tag{۶۳.۲}$$

ویژه‌مقدارها از قطری‌سازی خود ماتریس $H(s)$ به دست می‌آیند و در نتیجه می‌توانند رفتار غیرخطی داشته باشند. بنابراین محل کمینهٔ گاف نیز لزوماً $s = 1/2$ نیست.

گام ۶ — استفاده از تقارن برای ساده‌تر کردن مسئله. برای اینکه منشأ این رفتار را دقیق‌تر ببینیم، می‌توان از تقارن تبادل دو کیوبیت استفاده کرد. دو حالت

$$|S\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |A\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \tag{۶۴.۲}$$

را تعریف می‌کنیم که به‌ترتیب حالت متقارن و پادمتقارن هستند.

هامیلتونی $H(s)$ نسبت به تعویض دو کیوبیت متقارن است، بنابراین فضای حالت به زیرفضاهای

متقارن و پادمتقارن تجزیه می‌شود. به‌طور خاص،

$$H(s)|A\rangle = s|A\rangle. \tag{۶۵.۲}$$

بنابراین حالت $|A\rangle$ یک ویژه‌حالت با انرژی

$$E_A(s) = s \tag{۶۶.۲}$$

است.

سه حالت

$$\{|00\rangle, |S\rangle, |11\rangle\} \tag{۶۷.۲}$$

یک زیرفضای متقارن سه‌بعدی می‌سازند. محدودکردن $H(s)$ به این زیرفضا، مسئلهٔ 4×4 را به ماتریس 3×3 زیر کاهش می‌دهد:

$$H_{\text{sym}}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}s & -\sqrt{2}(1-s) & 0 \\ -\sqrt{2}(1-s) & s & -\sqrt{2}(1-s) \\ 0 & -\sqrt{2}(1-s) & -\frac{1}{2}s \end{pmatrix}. \tag{۶۸.۲}$$

اکنون ویژه‌مقدارهای مربوط به حالت‌های متقارن از حل

$$\det[H_{\text{sym}}(s) - EI] = 0 \tag{۶۹.۲}$$

به دست می‌آیند. این معادله یک چندجمله‌ای درجهٔ سوم در E است. برای هدف حاضر، نوشتن جواب بستهٔ آن با رادیکال‌ها کمک چندانی به فهم فیزیک نمی‌کند؛ مهم این است که برای هر s، سه ریشهٔ آن را به‌دست آوریم و سپس آنها را با انرژی حالت پادمتقارن $E_A(s) = s$ مقایسه کنیم.

بنابراین روند محاسبهٔ گاف کاملاً مشخص است:

$$H(s) \longrightarrow \{E_0(s), E_1(s), E_2(s), E_3(s)\} \longrightarrow \Delta(s) = E_1(s) - E_0(s). \tag{۷۰.۲}$$

گام ۷ — مشاهدهٔ کمینهٔ گاف. اگر $H(s)$ را برای مقادیر مختلف s قطری کنیم و $\Delta(s)$ را محاسبه کنیم، به یک منحنی غیرخطی برای گاف می‌رسیم. برای پارامترهای

$$h_x = 1, \qquad J = 1, \qquad h_z = \frac{1}{4}, \tag{۷۱.۲}$$

کمینهٔ گاف در حدود

$$s_* \simeq 0.6213 \tag{۷۲.۲}$$

رخ می‌دهد. در این نقطه،

$$E_0(s_*) \simeq -1.13550692, \qquad E_1(s_*) \simeq -0.47664619, \tag{۷۳.۲}$$

و بنابراین

$$\Delta_{\min} = E_1(s_*) - E_0(s_*) \simeq 0.65886072. \tag{۷۴.۲}$$

در نتیجه می‌توان با تقریب مناسب نوشت

$$\boxed{s_* \simeq 0.62, \qquad \Delta_{\min} \simeq 0.66.} \tag{۷۵.۲}$$

این نتیجه را می‌توان به‌صورت فیزیکی نیز تفسیر کرد. در ابتدای مسیر، میدان عرضی تعیین‌کنندهٔ ساختار حالت‌های انرژی است. در انتهای مسیر، برهم‌کنش Ising و میدان طولی تعیین‌کنندهٔ ساختار انرژی هستند. در ناحیهٔ میانی، این دو اثر با یکدیگر رقابت می‌کنند و دو تراز کم‌انرژی به یکدیگر نزدیک می‌شوند. از آنجا که $h_z \neq 0$ است، تبهگنی نهایی میان $|00\rangle$ و $|11\rangle$ شکسته شده و در این مثال با یک تقاطع واقعی در پایین‌ترین ترازها مواجه نیستیم؛ بلکه رفتار به شکل یک *تقاطع اجتنابی* یا avoided crossing ظاهر می‌شود.

در نتیجه، مقدار s_* را نمی‌توان صرفاً از روی فرم خطی $H(s)$ حدس زد. باید طیف لحظه‌ای را محاسبه کرد و سپس تابع

$$\Delta(s) = E_1(s) - E_0(s) \tag{۷۶.۲}$$

را روی بازهٔ $0 \leq s \leq 1$ کمینه کرد.

این مثال کوچک نشان می‌دهد که چرا در یک پروژهٔ آدیاباتیک، صرف نوشتن H_B و H_P کافی نیست. ساختار طیفی مسیر

$$H_B \longrightarrow H(s) \longrightarrow H_P \tag{۷۷.۲}$$

خود یک مسئلهٔ محاسباتی مهم است.

گام ۸ — ارتباط گاف با زمان اجرا. اکنون می‌توانیم نقش گاف را در زمان اجرای آدیاباتیک بررسی کنیم. یک بیان ساده‌شده از شرط آدیاباتیک را می‌توان به‌شکل

$$T \gg \frac{\max_s \left| \left\langle 1(s) \middle| \frac{dH}{ds} \middle| 0(s) \right\rangle \right|}{\Delta_{\min}^2} \tag{۷۸.۲}$$

نوشت، که در آن $|0(s)\rangle$ و $|1(s)\rangle$ به‌ترتیب حالت پایه و اولین حالت برانگیختهٔ لحظه‌ای هستند.

این رابطه تمام جزئیات قضایای دقیق آدیاباتیک را در خود نشان نمی‌دهد و شکل دقیق شرط به زمان‌بندی، مشتقات هامیلتونی و معیار خطا بستگی دارد؛ اما یک پیام بسیار مهم را آشکار می‌کند:

$$\boxed{T \propto \frac{1}{\Delta_{\min}^2}} \tag{۷۹.۲}$$

بنابراین گاف کوچک می‌تواند زمان اجرای بسیار بزرگی ایجاد کند.

برای مثال حاضر،

$$\frac{\partial H}{\partial s} = H_P - H_B \tag{۸۰.۲}$$

و هنجار طیفی آن برابر است با

$$\|H_P - H_B\|_2 \simeq 2.369613. \tag{۸۱.۲}$$

اگر برای یک برآورد مرتبه‌ای، این مقدار را به‌عنوان مقیاس صورت کسر و

$$\varepsilon \sim 10^{-2} \tag{۸۲.۲}$$

را به‌عنوان خطای هدف در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$T \gtrsim \frac{2.37}{(0.659)^2(10^{-2})} \approx 5.5 \times 10^2. \tag{۸۳.۲}$$

از این رو مقدار

$$T \sim 500 \tag{۸۴.۲}$$

را می‌توان به‌عنوان یک تخمین مرتبه‌ای برای این مثال کوچک در نظر گرفت، نه به‌عنوان یک کران دقیق و جهان‌شمول.

در اینجا معنای «گاف، گلوگاه است» کاملاً ملموس می‌شود: بیشتر مسیر ممکن است با گاف نسبتاً بزرگ طی شود، اما یک ناحیهٔ باریک در اطراف $s_* \simeq 0.62$ وجود دارد که در آن سامانه حساس‌تر است و سرعت تغییر هامیلتونی باید به‌اندازهٔ کافی کم باشد.

گام ۹ — نقش میدان طولی h_z. اکنون می‌توانیم اثر انتخاب $h_z = 1/4$ را بهتر درک کنیم. اگر

$$h_z \to 0, \tag{۸۵.۲}$$

در انتهای مسیر انرژی دو حالت $|00\rangle$ و $|11\rangle$ برابر می‌شود:

$$E(|00\rangle) = E(|11\rangle) = -J. \tag{۸۶.۲}$$

در نتیجه حالت پایهٔ نهایی دیگر یکتا نیست و تبهگنی در انتهای مسیر ظاهر می‌شود. در چنین شرایطی، گاف مرتبط با مسئله می‌تواند در نزدیکی انتهای مسیر بسیار کوچک شود یا در حد ایده‌آل به صفر برسد.

این مشاهده یک نکتهٔ مهم را نشان می‌دهد: کوچک‌شدن گاف صرفاً یک ویژگی عددی تصادفی نیست، بلکه می‌تواند مستقیماً از ساختار طیفی هامیلتونی مسئله و نحوهٔ شکسته‌شدن یا باقی‌ماندن تبهگنی‌ها ناشی شود.

در مثال حاضر، $h_z > 0$ باعث می‌شود

$$E(|00\rangle) < E(|11\rangle), \tag{۸۷.۲}$$

و در نتیجه حالت پایهٔ نهایی یکتا باقی بماند. با این حال، در میانهٔ مسیر همچنان یک کمینهٔ گاف در $s \simeq 0.62$ وجود دارد.

گام ۱۰ — اجرا و خوانش. اکنون کل فرآیند را می‌توان به‌صورت یک زنجیرهٔ مشخص خلاصه کرد:

۱. ابتدا دو کیوبیت را آماده می‌کنیم

$$|00\rangle \tag{۸۸.۲}$$

۲. دو گیت هادامارد اعمال می‌کنیم:

$$|00\rangle \xrightarrow{H\otimes H} |++\rangle = |\psi_0(0)\rangle. \tag{۸۹.۲}$$

۳. هامیلتونی را از H_B به H_P تغییر می‌دهیم:

$$H(s) = (1-s)H_B + sH_P, \qquad s = \frac{t}{T}. \tag{۹۰.۲}$$

۴. اگر T به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، سامانه در تقریب آدیاباتیک در حالت پایهٔ لحظه‌ای باقی می‌ماند:

$$|\psi(t)\rangle \approx e^{i\phi(t)}|\psi_0(s(t))\rangle. \tag{۹۱.۲}$$

عامل $e^{i\phi(t)}$ یک فاز کلی است و در اندازه‌گیری‌های معمولی مشاهده نمی‌شود.

۵. در انتهای مسیر،

$$s = 1, \qquad H(1) = H_P, \tag{۹۲.۲}$$

و حالت سامانه باید به حالت پایهٔ H_P نزدیک باشد:

$$|\psi(T)\rangle \approx |00\rangle. \tag{۹۳.۲}$$

۶. در پایان هر دو کیوبیت را در پایهٔ Z اندازه‌گیری می‌کنیم. در اجرای ایده‌آل، نتیجهٔ $|00\rangle$ با احتمال نزدیک به یک به دست می‌آید.

بنابراین، مسئلهٔ «یافتن حالت پایهٔ Ising» در این روش به یک مسئلهٔ دنبال‌کردن دینامیکی تبدیل می‌شود. ما H_P را مستقیماً برای یافتن حالت پایهٔ آن قطری نمی‌کنیم؛ بلکه سامانه را از یک حالت پایهٔ ساده و شناخته‌شده به‌صورت کنترل‌شده به سمت حالت پایهٔ هامیلتونی مسئله هدایت می‌کنیم.

گام ۱۱ — تفسیر الگوریتمی و تمایز میان مسئله، هامیلتونی و الگوریتم. این مثال برای تفکیک چند مفهوم که گاهی با یکدیگر خلط می‌شوند نیز مفید است. مدل فیزیکی ما یک مدل Ising است و هامیلتونی آن H_P است. مسیر آدیاباتیک

$$H(s) = (1-s)H_B + sH_P \tag{۹۴.۲}$$

یک روش محاسباتی برای تبدیل مسئلهٔ یافتن حالت پایه به یک تکامل کوانتومی است. خود

$$e^{-iHt} \tag{۹۵.۲}$$

عملگر تکامل زمانی است، نه نام یک الگوریتم مستقل.

در یک پیاده‌سازی دیجیتال، برای مثال، می‌توان تکامل ناشی از $H(s_k)$ را در نقاط گسستهٔ مسیر تقریب زد و از روش‌هایی مانند Trotter–Suzuki استفاده کرد. در مقابل، در یک پیاده‌سازی آنالوگ یا آدیاباتیک، کنترل مستقیم پارامترهای هامیلتونی می‌تواند مسیر $H(s)$ را در سامانهٔ فیزیکی ایجاد کند.

از این رو زنجیرهٔ مفهومی کامل این مثال را می‌توان چنین نوشت:

(۹۶.۲)

اندازه‌گیری $\to$ تکامل کوانتومی $\to T \to \Delta_{\min} \to H(s) \to H_B \to H_P \to$ مسئلهٔ فیزیکی/بهینه‌سازی

این زنجیره یکی از الگوهای اصلی در طراحی یک پروژهٔ شبیه‌سازی یا محاسبهٔ کوانتومی است.

چگونه به سیستم پیچیده‌تر تعمیم می‌یابد. برای n اسپین، ساختار کلی مثال بدون تغییر اساسی باقی می‌ماند. یک هامیلتونی آغازین ساده می‌تواند به‌صورت

$$H_B = -h_x \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{۹۷.۲}$$

و هامیلتونی مسئله به‌صورت

$$H_P = \sum_i h_i Z_i + \sum_{i<j} J_{ij} Z_i Z_j \tag{۹۸.۲}$$

تعریف شود. سپس

$$H(s) = (1-s)H_B + sH_P. \tag{۹۹.۲}$$

حالت پایهٔ هامیلتونی آغازین همچنان به‌سادگی قابل آماده‌سازی است:

$$|\psi_0(0)\rangle = |+\rangle^{\otimes n}, \tag{۱۰۰.۲}$$

که با اعمال n گیت هادامارد روی $|0\rangle^{\otimes n}$ ساخته می‌شود.

اما هامیلتونی مسئله در حالت کلی می‌تواند اطلاعات یک مسئلهٔ بهینه‌سازی بسیار دشوار را در خود رمزگذاری کند. در این حالت، تعداد پیکربندی‌های کلاسیکی برابر 2^n است و بررسی مستقیم همهٔ آنها با افزایش n به‌سرعت پرهزینه می‌شود.

نکتهٔ مهم این است که افزایش n به‌تنهایی مقدار مشخصی برای گاف تعیین نمی‌کند. گاف تابعی از کل ساختار هامیلتونی و مسیر انتخاب‌شده است. بنابراین باید زنجیرهٔ زیر را در نظر گرفت:

$$n \longrightarrow H_n(s) \longrightarrow \Delta_{\min}(n) \longrightarrow T(n) \longrightarrow \text{پیچیدگی محاسباتی}. \tag{۱۰۱.۲}$$

بسته به مسئله، ممکن است گاف به‌صورت چندجمله‌ای کوچک شود،

$$\Delta_{\min}(n) \sim n^{-\alpha}, \tag{۱۰۲.۲}$$

یا در مسائل دشوارتر به‌صورت نمایی کاهش یابد،

$$\Delta_{\min}(n) \sim e^{-cn}. \tag{۱۰۳.۲}$$

در حالت دوم، با توجه به وابستگی تقریباً

$$T \propto \frac{1}{\Delta_{\min}^2}, \tag{۱۰۴.۲}$$

زمان آدیاباتیک می‌تواند خود به‌صورت نمایی رشد کند. از این رو، صرفاً افزایش تعداد کیوبیت‌ها معیار کافی برای ارزیابی دشواری نیست؛ ساختار طیفی مسیر اهمیت تعیین‌کننده دارد.

در نتیجه، برای یک پروژهٔ واقعی شبیه‌سازی آدیاباتیک، نوشتن H_P تنها نقطهٔ آغاز است. باید مسیر $H(s)$، ساختار ویژه‌مقدارها، کمینهٔ گاف، زمان‌بندی $s(t)$، منابع مورد نیاز برای اجرا و در نهایت احتمال موفقیت در اندازه‌گیری نیز بررسی شوند.

مثال دوکیوبیتی حاضر دقیقاً به این دلیل ارزشمند است که تمام این مراحل را می‌توان به‌صورت کامل و عددی مشاهده کرد:

$$\boxed{\begin{array}{c}
\text{میدان عرضی ساده} \\
\downarrow \\
H_B, \quad |{+}{+}\rangle \\
\downarrow \\
H(s) = (1-s)H_B + sH_P \\
\downarrow \\
E_0(s), E_1(s) \\
\downarrow \\
\Delta(s) = E_1(s) - E_0(s) \\
\downarrow \\
\Delta_{\min} \simeq 0.66 \quad \text{در} \quad s_* \simeq 0.62 \\
\downarrow \\
T \sim \mathcal{O}(10^2 - 10^3) \\
\downarrow \\
\text{در خوانش نهایی} \quad |00\rangle
\end{array}} \tag{۱۰۵.۲}$$

بنابراین این مثال کوچک، یک نمونهٔ فشرده از منطق کامل محاسبهٔ آدیاباتیک است: یک حالت پایهٔ آسان آماده می‌شود، هامیلتونی در طول یک مسیر کنترل‌شده تغییر می‌کند، گاف لحظه‌ای تعیین می‌کند که کدام ناحیه از مسیر گلوگاه است، و زمان اجرا باید به‌اندازه‌ای بزرگ انتخاب شود که سامانه بتواند این ناحیهٔ حساس را به‌صورت آدیاباتیک پشت سر بگذارد.

۹.۲ ارتباط

دو پرسش در فصل ۱، ابزار دیجیتال در فصل ۱، QPE از تحول تغذیه می‌کند و VQE رهیافت سومی است (وردشی) در فصل ۲، و آنالوگ در فصل ۱ آمده است. مدل‌های اسپینی در فصل ۱ آمده‌اند.

۱۰.۲ چه وقت استفاده می‌شود

تحول: دینامیک، پاسخ زمانی، quench، و هر الگوریتمی که $f(H)$ یا $U(t)$ می‌خواهد (بخش‌های ۳.۲ و ۵.۲). آدیاباتیک: آماده‌سازی حالت پایه وقتی گاف مسیر کنترل‌پذیر به نظر می‌رسد، وقتی مسئله به Ising/بهینه‌سازی نگاشته می‌شود، یا وقتی سخت‌افزار به‌طور طبیعی یک $H(s)$ می‌دهد. اگر $\Delta_{\min}$ مسیر را نمی‌شناسید، اول همان را بسنجید؛ وگرنه T حدسِ کور است.

نکته ۱.۲ (جای توسعه). برای تحول: $H(t)$ با انتگرال زمانی مرتب‌شده؛ توابع همبستگی چندزمانی. برای آدیاباتیک: کران‌های دقیق‌تر قضیه؛ زمان‌بندی بهینهٔ غیرخطی؛ عبور از نقطهٔ بحرانی در حد ترمودینامیکی. برای گسسته‌سازی وردشیِ مسیر آدیاباتیک: بخش ۹.۲ (QAOA).

بخش ۵

جعبه ابزار

فصل ۱

جعبه ابزار دیجیتال: Trotter، LCU، QSP

۱.۱ جایگاه در نقشه

زیرِ رهیافت تحول زمانی / $f(H)$ (فصل ۲، بخش ۳.۲). این‌ها الگوریتم کامل «حل هابارد» نیستند؛ زیرروال ساختن یک تابع از هامیلتونی‌اند. خروجی‌شان مدار است.

۲.۱ ایدهٔ شهودی

روی رایانهٔ دیجیتال نمی‌توان e^{-iHt} را به‌صورت یک دکمه داشت. باید آن را از گیت‌های ساده ساخت. سه نسل شهودی: Trotter هامیلتونی را تکه‌تکه اعمال می‌کند؛ LCU اگر H جمع چند یکانی باشد آن جمع را با کنترل و پس‌گزینش می‌سازد؛ QSP وقتی یک بلوکِ کدگذاری‌شده از H دارید تقریباً هر چندجمله‌ای مناسب از آن را با دنبالهٔ دوران می‌سازد. هر سه پیاده‌کنندهٔ $f(H)$ هستند. تحول زمانی $f(x) = e^{-itx}$ فقط یک انتخاب است [۱۰، ۱۳، ۱۴].

در این فصل هر سه ابزار بسط داده می‌شوند: Trotter با مثال عددی، سپس LCU و QSP با فرمول، پارامتر، و مثال کاری.

۳.۱ Trotter: فرمول، خطا، پارامترها

فرض کنید

$$H = \sum_{k=1}^{m} H_k \tag{۱.۱}$$

و برای هر قطعه، $e^{-iH_k\Delta t}$ به‌آسانی با گیت پیاده می‌شود (مثلاً هر H_k یک جملهٔ پائولی محلی است). اگر جمله‌ها جابه‌جا شوند، $[H_j, H_k] = 0$، آن‌گاه

$$e^{-iHt} = \prod_k e^{-iH_k t} \tag{۲.۱}$$

دقیق است و تروتر لازم نیست. وقتی جابه‌جا نمی‌شوند، فرمول حاصل‌ضربیِ مرتبهٔ اول می‌گوید [۱۰]

$$e^{-iHt} \approx U_{\mathrm{tr}}(t;r) := \left(\prod_{k=1}^{m} e^{-iH_k t/r}\right)^r, \qquad \Delta t = \frac{t}{r}. \tag{۳.۱}$$

شهود: در بازهٔ کوتاه Δt، ترتیب اعمال تکه‌ها کمتر مهم است؛ با ریزتر کردن گام‌ها (r بزرگ‌تر) خطا کم می‌شود و مدار عمیق‌تر می‌گردد. اسکلت همین شکستن در شکل ۱.۱ آمده است.

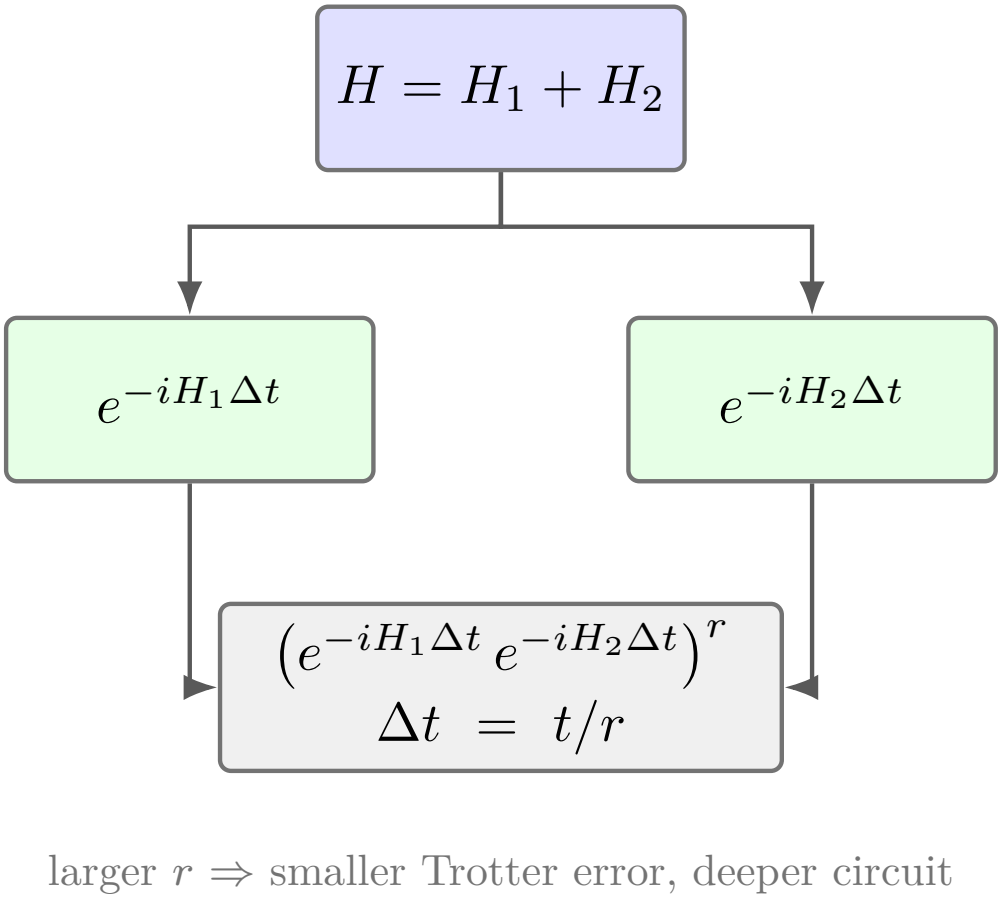
خطای تروتر (بیان کاری). برای دو جملهٔ $H = A + B$، یک کران کافیِ رایج برای مرتبهٔ اول این است که خطای عملگری مثل

$$\left\| e^{-i(A+B)t} - U_{\mathrm{tr}}(t;r) \right\| = O\!\left(\frac{t^2}{r}\, \|[A,B]\|\right) \tag{۴.۱}$$

رفتار کند (ثابت‌های دقیق به قرارداد هنجار و مرتبهٔ فرمول بستگی دارند). پس برای رسیدن به خطای ε، نوعاً

$$r \;\gtrsim\; C\,\frac{t^2\,\|[A,B]\|}{\varepsilon} \tag{۵.۱}$$

کافی است. فرمول‌های مرتبهٔ بالاتر (مثلاً استراتوگ) توان t در صورت را بهتر می‌کنند، اما هر گام مدار پیچیده‌تری دارد.



شکل ۱.۱: ایدهٔ فرمول حاصل‌ضربی برای دو جمله. تعمیم به m جمله همان الگوی تکرار r بار است.

پارامترها، یک‌جا.

- $\{H_k\}$: تجزیهٔ هامیلتونی به قطعات آسان.
- t: زمان هدفِ شبیه‌سازی.
- r: تعداد گام‌های تروتر؛ گلوگاه عمق مدار.
- $\Delta t = t/r$: طول هر ریزگام.
- ε: خطای مجاز در U یا در مشاهده‌پذیر نهایی.
- $\|[H_j, H_k]\|$: شدت ناسازگاری جمله‌ها؛ اگر صفر باشد، $r = 1$ کافی است.

۴.۱ مثال کاری Trotter: یک کیوبیت با $H = X + Z$

ادامهٔ مستقیمِ گام ۵ در بخش ۵.۲: هامیلتونی‌ای که جمله‌هایش جابه‌جا نمی‌شوند، تا تروتر معنا پیدا کند.

گام ۱ — تعریف مسئله.

$$H = X + Z, \qquad |\psi_0\rangle = |0\rangle, \qquad t = 1, \qquad O = Z. \tag{۶.۱}$$

چون $[X, Z] = 2iY \neq 0$، نمی‌توان نوشت $e^{-iHt} = e^{-iXt}e^{-iZt}$. ویژه‌مقادیر H برابر $\pm\sqrt{2}$اند، پس $\|H\|_2 = \sqrt{2}$.

گام ۲ — تحول دقیق (مرجع). با قطری‌سازی 2×2،

$$U(t) = e^{-i(X+Z)t} \tag{۷.۱}$$

را می‌سازیم. برای $t = 1$ و حالت اولیه $|0\rangle$:

$$\langle Z\rangle_{\text{exact}}(1) \approx 0.0243. \tag{۸.۱}$$

این عدد مرجع کلاسیکِ بخش راستی‌آزمایی است: هر مدار تروتر باید به آن نزدیک شود.

گام ۳ — تقریب حاصل‌ضربی مرتبهٔ اول.

$$U_{\mathrm{tr}}(t;r) = \left(e^{-iX\,t/r}\,e^{-iZ\,t/r}\right)^{r}. \tag{۹.۱}$$

هر عامل، یک دوران تک‌کیوبیتی است: $e^{-iZ\theta}$ همان $R_Z(2\theta)$ و $e^{-iX\theta}$ همان $R_X(2\theta)$ در قراردادهای رایج مدار است. پس کل مدار فقط دنباله‌ای از $2r$ دوران است.

گام ۴ — جدول خطا بر حسب r. جدول ۱.۱ خطای عملگری $\|U_{\mathrm{tr}} - U\|_2$ و خطای مشاهده‌پذیر $|\langle Z\rangle_{\mathrm{tr}} - \langle Z\rangle_{\mathrm{exact}}|$ را برای $t = 1$ نشان می‌دهد. با دو برابر شدن r، خطا تقریباً نصف می‌شود؛ هم‌خوان با مقیاس $O(t^2/r)$ در (۴.۱).

جدول ۱.۱: خطای تروتر مرتبهٔ اول برای $H = X + Z$، $t = 1$، $|\psi_0\rangle = |0\rangle$.

$\lvert\Delta\langle Z\rangle\rvert$	$\langle Z\rangle_{\mathrm{tr}}$	$\lVert U_{\mathrm{tr}} - U\rVert_2$	r
0.440	−0.416	0.799	1
0.115	−0.091	0.362	2
0.028	−0.004	0.176	4
0.007	0.017	0.088	8
0.0018	0.023	0.044	16
0.0004	0.024	0.022	32

برای رسیدن به $|\Delta\langle Z\rangle| \lesssim 10^{-2}$، در این مثال $r \simeq 8$ کافی است؛ برای $\lesssim 10^{-3}$، $r \simeq 16$. هزینه: عمق مدار تقریباً متناسب با r.

گام ۵ — پیوند با بقیهٔ سند.

- همین الگو برای $H = \sum_k H_k$ روی n کیوبیت تکرار می‌شود؛ فقط تعداد جمله‌ها و همبندی مدار زیاد می‌شود.
- مسیر آدیاباتیکِ دیجیتال همان تروتر است، اما روی $H(s_j)$ در هر لایهٔ زمانی (فصل ۲).
- اگر به‌جای e^{-iHt} یک $f(H)$ عمومی بخواهید، نسل بعدی ابزارها (LCU، QSP) مناسب‌ترند.

۵.۱ LCU: فرمول و پارامترها

فرض کنید عملگر هدف ترکیب خطی چند یکانی است:

$$L = \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i U_i, \qquad \alpha_i \geq 0, \qquad \Lambda := \sum_i \alpha_i. \tag{۱۰.۱}$$

(اگر بعضی ضرایب منفی یا مختلط باشند، فاز را داخل تعریف U_i جذب می‌کنند.) ایدهٔ LCU این است که L/Λ را به‌عنوان یک *بلوک* داخل یک مدار یکانیِ بزرگ‌تر بنشانید (*بلوک‌کدگذاری*[۱]) [۱۳].

اسکلت استاندارد سه بخش دارد (شکل ۲.۱):

۱. **PREPARE:** روی ثبات کمکی حالت

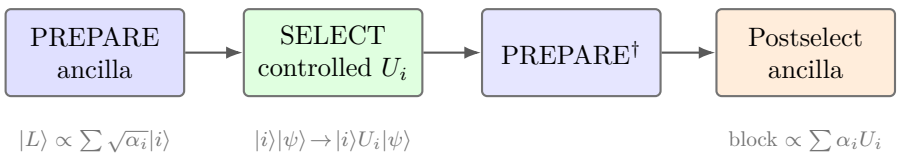
$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \sum_i \sqrt{\alpha_i}\, |i\rangle \tag{۱۱.۱}$$

را بسازید.

۲. **SELECT:** عمل کنترل‌شده

$$|i\rangle|\psi\rangle \;\longmapsto\; |i\rangle\, U_i|\psi\rangle. \tag{۱۲.۱}$$

۳. **پس‌گزینش**[۲]: PREPARE† را اعمال کنید و ثبات کمکی را روی $|0\rangle$ اندازه بگیرید. به‌شرط موفقیت، روی سامانه تقریباً $(L/\Lambda)|\psi\rangle$ اعمال شده است.



شکل ۲.۱: اسکلت LCU. احتمال موفقیت پس‌گزینش به $\|L|\psi\rangle\|^2/\Lambda^2$ وابسته است؛ برای نزدیک کردن احتمال به یک از تکنیک‌هایی مثل تقویت دامنه استفاده می‌شود.

پارامترها، یک‌جا.

---

[۱] block-encoding.
[۲] postselection.

- $\{U_i, \alpha_i\}$ و $\Lambda = \sum \alpha_i$: تجزیه و عامل نرمال‌سازی.
- کیوبیت‌های کمکی: حدود $\lceil \log_2 M \rceil$ برای اندیس i.
- احتمال پس‌گزینش: گلوگاه تکرار مدار.
- خروجی: بلوک‌کدگذاریِ L/Λ؛ ورودی طبیعی برای QSVT/QSP.

۶.۱ مثال کاری LCU: نشاندن $H = X + Z$

همان هامیلتونی مثال تروتر را این‌بار به‌عنوان ترکیب خطی دو یکانی می‌نویسیم.

گام ۱ — تجزیه. X و Z خود یکانی‌اند ($X^2 = Z^2 = I$). پس

$$H = X + Z, \qquad \alpha_0 = \alpha_1 = 1, \qquad \Lambda = 2, \qquad \frac{H}{\Lambda} = \frac{X+Z}{2}. \tag{۱۳.۱}$$

گام ۲ — مدار روی یک کمکی.

$$|L\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = |+\rangle, \tag{۱۴.۱}$$

$$\mathrm{SELECT} = |0\rangle\langle 0| \otimes X + |1\rangle\langle 1| \otimes Z. \tag{۱۵.۱}$$

یعنی اگر کمکی 0 باشد X و اگر 1 باشد Z روی سامانه اعمال می‌شود. سپس هادامارد دوباره روی کمکی ($\mathrm{PREPARE}^\dagger$) و اندازه‌گیری روی $|0\rangle$.

گام ۳ — اثر روی $|0\rangle$. اگر پس‌گزینش موفق باشد، سامانه به

$$\frac{H}{2}|0\rangle = \frac{X+Z}{2}|0\rangle = \frac{|1\rangle + |0\rangle}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{۱۶.۱}$$

می‌رود (تا به هنجار؛ بردار خام $(1/2, 1/2)$ است). احتمال موفقیت برای این ورودی

$$p_{\mathrm{succ}} = \left\| \frac{H}{2}|0\rangle \right\|^2 = \frac{1}{2}. \tag{۱۷.۱}$$

پس در میانگین دو بار اجرا، یک بار بلوکِ مطلوب را می‌گیرید — بهای کیوبیت کمکی و پس‌گزینش در برابر تروتر.

گام ۴ — جای این ابزار در نقشه. LCU خودش لزوماً e^{-iHt} نیست؛ H (یا هر L) را داخل یک یکانی بزرگ می‌نشاند. برای دینامیک، معمولاً این بلوک را به QSP یا سری تیلور می‌سپارند. برای تروتر، مستقیم $e^{-iX\Delta t}e^{-iZ\Delta t}$ می‌ساختید بدون کمکی.

۷.۱ QSVT/QSP: فرمول و پارامترها

فرض کنید یک بلوک‌کدگذاری از هامیلتونیِ نرمال‌شده دارید: یکانیِ بزرگ U چنان که در زیر فضای کمکیِ $|0\rangle$،

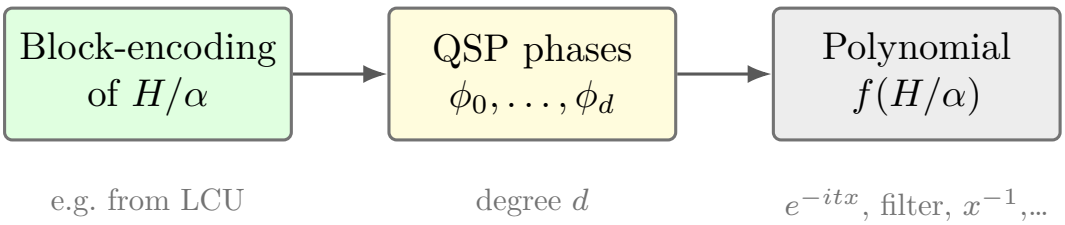
$$\left(\langle 0| \otimes I\right) U \left(|0\rangle \otimes I\right) = \frac{H}{\alpha}, \qquad \left\|\frac{H}{\alpha}\right\| \leq 1. \tag{۱۸.۱}$$

پردازش سیگنال کوانتومی (QSP) با یک دنبالهٔ فازهای $\phi_0, \ldots, \phi_d$ تقریباً هر چندجمله‌ایِ مناسب f را روی آن بلوک پیاده می‌کند [۱۴]:

$$f\left(\frac{H}{\alpha}\right) \approx \text{(بلوک خروجی پس از مدار فازها)}. \tag{۱۹.۱}$$

QSVT همین ایده را از ویژه‌مقدار به مقادیر تکین تعمیم می‌دهد. کیوبیتیزاسیون همسایهٔ طبیعی است: از روی بلوک‌کدگذاری یک اپراتور پیاده‌روی می‌سازد که ورودی استاندارد QSP است.

شکل ۳.۱ زنجیرهٔ شهودی را نشان می‌دهد: بلوک‌کدگذاری (مثلاً از LCU) $\rightarrow$ فازهای QSP $\rightarrow$ تابع $f(H)$.



شکل ۳.۱: از بلوک‌کدگذاری تا تابع $f(H)$. تحول زمانی فقط یک انتخاب است: $f(x) \approx e^{-i(\alpha t)x}$.

هزینهٔ شهودی. درجهٔ چندجمله‌ای d نوعاً مثل $O(t\alpha + \log(1/\varepsilon))$ برای تقریب e^{-iHt} رشد می‌کند —— اغلب بهتر از مقیاس تروترِ ساده در رژیم تحمل‌پذیر در برابر خطا. بهایش: نیاز به بلوک‌کدگذاریِ تمیز و طراحی/محاسبهٔ فازها.

پارامترها، یک‌جا.

- بلوک‌کدگذاری H/α و عامل α (مثلاً Λ در LCU).
- تابع هدف f (تحول، فیلتر، وارون، ...).
- درجهٔ d و فازهای $\{\phi_k\}$.
- دقت ε روی بازهٔ $[-1,1]$.

۸.۱ مثال کاری QSP: از بلوک H تا $f(H)$

این مثال عمداً عددیِ سنگین نیست؛ هدف، پر کردن نمادها روی همان $H = X + Z$ است.

گام ۱ —— بلوک آماده. از بخش ۶.۱، LCU بلوک

$$\frac{H}{\alpha} = \frac{X+Z}{2}, \qquad \alpha = 2, \tag{۲۰.۱}$$

را می‌سازد. ویژه‌مقادیر H برابر $\pm\sqrt{2}$اند، پس ویژه‌مقادیر بلوک $\pm\sqrt{2}/2 \approx \pm 0.707$ داخل $[-1,1]$اند —— شرط (۱۸.۱) برقرار است.

گام ۲ —— انتخاب تابع. برای شبیه‌سازی در زمان t،

$$f(x) \approx e^{-i(\alpha t)\,x} = e^{-i2t\,x}, \qquad x \in [-1,1]. \tag{۲۱.۱}$$

آن‌گاه روی ویژه‌فضای H داریم $f(H/\alpha) \approx e^{-iHt}$. برای فیلتر طیفی یا وارون، f عوض می‌شود؛ مدار بیرونی QSP همان الگو را نگه می‌دارد.

گام ۳ — درجه و دقت. به‌صورت کاری، برای خطای ε در تقریب یکنواخت روی $[-1,1]$، درجهٔ لازم از مرتبهٔ

$$d \sim O\big(\alpha t + \log(1/\varepsilon)\big) \tag{۲۲.۱}$$

است. مثال عددی کوچک: اگر $\alpha t \sim 1$ و $\varepsilon \sim 10^{-3}$، درجه از مرتبهٔ چند ده کافی است — در برابر تروتر که برای همان دقت ممکن است r بزرگ‌تری بخواهد (جدول ۱.۱).

گام ۴ — تفسیر.

- Trotter: مستقیم $e^{-iH_k\Delta t}$ را می‌چیند؛ ساده، بدون کمکیِ بلوک.
- LCU: H را بلوک می‌کند؛ خودش f نیست.
- QSP: روی آن بلوک تقریباً هر f مناسب را می‌سازد؛ زبان مشترک شبیه‌سازی پیشرفته و بسیاری از زیروال‌های FTQC.

۹.۱ جدول مقایسهٔ ابزارها

جدول ۲.۱: سه ابزار دیجیتال زیر رهیافت $f(H)$.

ابزار	ورودی شهودی	خروجی	هزینهٔ شهودی	نقطهٔ ضعف
فرمول حاصل‌ضربی	$H = \sum H_k$	تقریب $U(t)$	رشد با t و $r \sim t^2/\varepsilon$	خطای تروتر؛ عمق زیاد
LCU	$H = \sum \alpha_i U_i$	بلوک‌کدگذاری	وابسته به $\sum\lvert\alpha_i\rvert$	کیوبیت کمکی؛ پس‌گزینش
QSVT/QSP	بلوک‌کدگذاری H	چندجمله‌ای $f(H)$	نوعاً خطی در درجهٔ f	طراحی فازها؛ پیش‌نیاز بلوک

هر سه نخست برای دینامیک و $f(H)$اند. QPE از خروجی‌شان به‌عنوان U کنترل‌شده استفاده می‌کند.

۱۰.۱ ارتباط

رهیافت تحول در فصل ۲ (به‌ویژه بخش‌های ۳.۲ و ۵.۲)، مصرف‌کنندهٔ طیفی در فصل ۲، لایهٔ ابزار در فصل ۴، و برآورد منابع در فصل ۲ آمده است.

۱۱.۱ چه وقت استفاده می‌شود

شروع و شهود، یا H خیلی محلی و جابه‌جانشونده: Trotter (بخش‌های ۳.۱ و ۴.۱). نیاز به زبان بلوک‌کدگذاری یا نشاندن $\sum \alpha_i U_i$: LCU (بخش‌های ۵.۱ و ۶.۱). هدف یک $f(H)$ عمومی با مقیاس بهتر در رژیم تحمل‌پذیر در برابر خطا: QSVT/QSP (بخش‌های ۷.۱ و ۸.۱).

نکته ۱.۱ (جای توسعه). فرمول استراتوگ و کران‌های مرتبهٔ بالاتر؛ qDRIFT؛ تقویت دامنه برای احتمال پس‌گزینش LCU؛ الگوریتم صریح یافتن فازهای QSP؛ مدار کامل کیوبیتیزاسیون؛ مثال دوکیوبیتی با $H = ZZ + X_1 + X_2$.

فصل ۲

ابزارهای طیفی و ترکیبی: QPE، VQE، QAOA

۱.۲ جایگاه در نقشه

زیرِ پرسش ایستا / طیفی (فصل ۱). QPE روی تقاطع با رهیافت تحول می‌نشیند: به U کنترل‌شده نیاز دارد، پس از جعبه ابزار دیجیتال (فصل ۱) تغذیه می‌شود. VQE رهیافت وردشی / ترکیبی است و هم‌خانوادهٔ Trotter نیست. QAOA خویشاوند ساختاریِ آدیاباتیک و VQE برای بهینه‌سازی Ising است و در بخش ۹.۲ بسط داده شده است.

۲.۲ ایدهٔ شهودی

دو راه خیلی متفاوت برای انرژی یا طیف، در دو رژیم سخت‌افزاری متفاوت.

QPE — برآورد فاز. اگر یکانی U ویژه‌بردار $|\phi\rangle$ با ویژه‌مقدار $e^{2\pi i\varphi}$ داشته باشد، برآورد فاز رقم‌های φ را روی کیوبیت‌های کمکی می‌نویسد. با گرفتن $U = e^{-iHt}$، φ به ویژه‌مقدار H ترجمه می‌شود. پیش‌نیاز سخت: توان‌های کنترل‌شدهٔ U^{2^k} — یعنی همان شبیه‌سازی فصل ۱. به همین دلیل QPE الگوریتم طیفیِ خالص نیست. رژیم نوعی: تحمل‌پذیر در برابر خطا، دقت قابل تنظیم، هزینهٔ زیاد مدار [۳، ۸].

VQE — الگوریتم وردشی. یک مدار پارامتری $|\psi(\theta)\rangle$ آماده می‌شود، $\langle H\rangle$ با اندازه‌گیری برآورد می‌گردد، و یک بهینه‌ساز کلاسیک θ را عوض می‌کند. حلقه ترکیبی است: کوانتوم برای حالت و مشاهده‌پذیر، کلاسیک برای جستجوی پارامتر [۱۵، ۱۶]. شهود: به‌جای خواندن طیف با ساعت دقیق، یک آنزات محدود می‌گذارید و انرژی را پایین می‌کشید. مناسب سخت‌افزار نزدیک‌مدت؛ تضمین همگرایی به پایهٔ واقعی ندارد.

جدول ۱.۲ دو رژیم را کنار هم می‌گذارد. سرکوب خطا و تصحیح خطا دو لایهٔ جدا روی این جدول‌اند: اولی غالباً همراه VQE و دستگاه نوفه‌دار؛ دومی پیش‌فرض QPE مقیاس‌دار [۱۷، ۱۸].

جدول ۱.۲: دو رژیم برای پرسش طیفی.

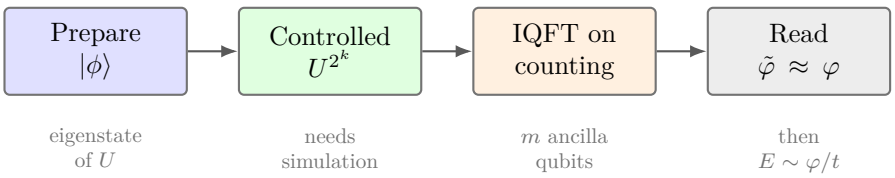
	QPE + شبیه‌سازی U	**VQE**
پرسش	ویژه‌مقدار / طیف با دقت کنترل‌شده	تقریب حالت پایه
رهیافت	تحول کنترل‌شده + برآورد فاز	وردشی ترکیبی
پیش‌نیاز کوانتومی	کنترل‌شده U^{2^k}	آنزات کم‌عمق
رژیم نوعی	تحمل‌پذیر در برابر خطا	NISQ

۳.۲ QPE: فرمول و پارامترها

فرض کنید یکانی U ویژه‌بردار $|\phi\rangle$ دارد:

$$U|\phi\rangle = e^{2\pi i\,\varphi}|\phi\rangle, \qquad \varphi \in [0,1). \tag{۱.۲}$$

برآورد فاز، با m کیوبیت کمکی (*ثبات شمارش*[۱])، تقریبی دودویی از φ می‌سازد. اسکلت مدار در شکل ۱.۲ آمده است: آماده‌سازی $|\phi\rangle$، اعمال کنترل‌شدهٔ U^{2^k}، تبدیل فوریهٔ وارون (IQFT) روی ثبات شمارش، و خوانش $\tilde{\varphi}$.



شکل ۱.۲: اسکلت QPE. هزینهٔ غالب معمولاً ساخت کنترل‌شدهٔ U^{2^k} است، نه خودِ IQFT.

[۱] counting register.

از فاز به انرژی. در شبیه‌سازی، انتخاب استاندارد $U = e^{-iHt}$ است. اگر $H|\phi\rangle = E|\phi\rangle$، آن‌گاه

$$e^{-iEt} = e^{2\pi i\varphi} \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{2\pi\,\varphi}{t} \quad .(\text{به پیمانهٔ } 2\pi/t) \tag{۲.۲}$$

پس دقت انرژی با دقت فاز و با انتخاب t گره خورده است. t را طوری می‌گیرند که φ در $[0,1)$ بدون ابهامِ پیمانه‌ایِ مزاحم خوانده شود (یا بازهٔ انرژی از پیش محدود شود).

دقت و منابع. با m بیت شمارش، دقت فاز نوعاً از مرتبهٔ 2^{-m} است. برای رسیدن به خطای انرژی ε، هم m و هم کیفیت شبیه‌سازیِ U^{2^k} باید با ε سازگار باشند. گلوگاه عملی اغلب همان شبیه‌سازی کنترل‌شده است (فصل ۱)، نه شمارش بیت‌ها.

پارامترها، یک‌جا.

- U یا جفت (H,t) با $U = e^{-iHt}$.
- $|\phi\rangle$: ویژه‌بردار هدف (یا تقریبی از آن؛ در غیر این صورت مخلوط فازها خوانده می‌شود).
- m: تعداد کیوبیت‌های شمارش؛ دقت $\sim 2^{-m}$.
- φ و $\tilde{\varphi}$: فاز واقعی و برآوردشده.
- E و ε: انرژی هدف و خطای مجاز.

۴.۲ ردهٔ مسائل مناسب QPE

۱. **انرژی حالت پایه / ویژه‌مقدار با دقت کنترل‌شده** وقتی تقریبی از ویژه‌بردار در دسترس است (یا می‌توان آن را آماده‌سازی کرد).

۲. **شیمی کوانتومی و مواد در افق FTQC**، جایی که عمق مدار زیاد قابل‌قبول است [۸].

۳. **هر مسئله‌ای که به تخمین فاز یکانی منجر شود** (نه فقط هامیلتونی فیزیکی).

اگر دستگاه کم‌عمق و نوفه‌دار است، یا فقط یک کران بالای انرژی می‌خواهید، VQE (بخش ۶.۲) عملی‌تر است. اگر هدف آماده‌سازی پایه از مسیر $H(s)$ است، آدیاباتیک (فصل ۲) را جدا ببینید — QPE از آدیاباتیک تغذیه نمی‌شود؛ از U تغذیه می‌شود.

۵.۲ مثال کاری QPE: یک کیوبیت با فاز $\varphi = 1/4$

هدف: همهٔ نمادهای بخش ۳.۲ را روی کوچک‌ترین نمونهٔ دقیق پر کنیم، طوری که خوانش دودویی بدون خطای گرد کردن باشد.

گام ۱ — یکانی و ویژه‌بردار. کیوبیت سامانه را در $|1\rangle$ می‌گذاریم و

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \tag{۳.۲}$$

را می‌گیریم. آن‌گاه

$$U|1\rangle = e^{2\pi i\cdot(1/4)}|1\rangle, \qquad \varphi = \frac{1}{4} = 0.01_{\text{bin}}. \tag{۴.۲}$$

گام ۲ — پیوند با هامیلتونی. همین U از تحول $H = Z$ با زمان $t = \pi/2$ روی ویژه‌حالت $|1\rangle$ می‌آید:

$$e^{-iZ(\pi/2)}|1\rangle = e^{i\pi/2}|1\rangle = i|1\rangle, \tag{۵.۲}$$

که با قرارداد (۱.۲) همان $\varphi = 1/4$ است. از فرمول انرژی،

$$E = -\frac{2\pi\cdot(1/4)}{\pi/2} = -1, \tag{۶.۲}$$

و واقعاً $Z|1\rangle = -|1\rangle$. پس خواندن فاز، خواندن انرژی است.

گام ۳ — ثبات شمارش با $m = 2$. دو کیوبیت کمکی با هادامارد آماده می‌شوند؛ سپس U^{2^0} و U^{2^1} کنترل‌شده اعمال می‌گردند و IQFT روی کمکی‌ها اجرا می‌شود. چون $\varphi = 1/4$ دقیقاً با دو بیت نمایش‌پذیر است، اندازه‌گیری ثبات شمارش با احتمال یک، بیت‌های 01 را می‌دهد:

$$\tilde{\varphi} = 0.01_{\text{bin}} = \frac{1}{4} = \varphi. \tag{۷.۲}$$

اگر $m = 1$ بود، دقت کافی نبود و احتمال خطا در گرد کردن ظاهر می‌شد — همان بهای کم کردن کیوبیت شمارش.

گام ۴ — تفسیر در نقشهٔ سند.

- پرسش: طیفی (ویژه‌مقدار / انرژی).
- رهیافت: تحول ($U = e^{-iHt}$) + برآورد فاز.
- ابزار سنگین: در این مثال U یک قطریِ ساده است؛ در مدل واقعی همان U^{2^k} را QSP/LCU/Trotter می‌سازند.

۶.۲ VQE: فرمول و پارامترها

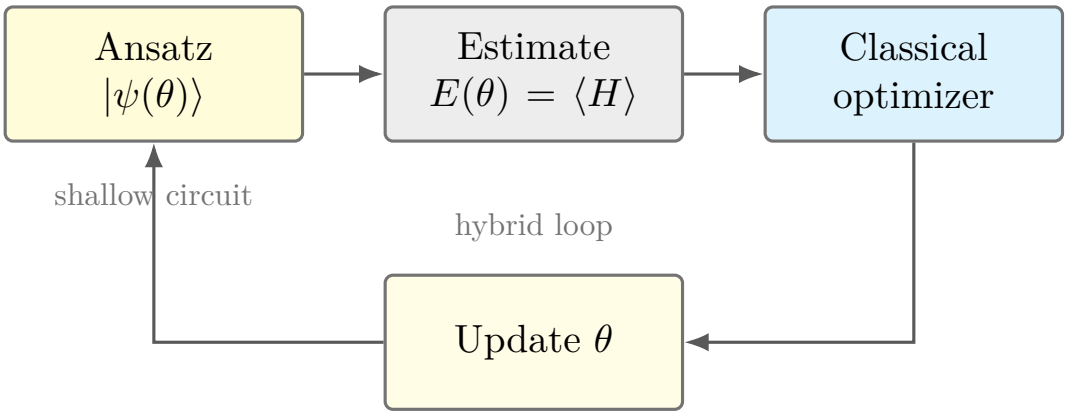
به‌جای ساختن ساعتِ فاز، یک خانوادهٔ پارامتری از حالت‌ها انتخاب می‌کنید (*آنزات*[۲]):

$$|\psi(\theta)\rangle = V(\theta)|0\rangle^{\otimes n}, \tag{۸.۲}$$

و انرژی آزمایشی را کمینه می‌کنید:

$$E(\theta) = \langle\psi(\theta)|H|\psi(\theta)\rangle, \qquad \theta^\star = \arg\min_\theta E(\theta). \tag{۹.۲}$$

بنابر اصل وردشی، $E(\theta) \geq E_0$ برای هر θ؛ برابری فقط اگر آنزات بتواند پایهٔ واقعی را بسازد. حلقه در شکل ۲.۲ است: مدار پارامتری → برآورد $\langle H\rangle$ با شات → بهینه‌ساز کلاسیک → به‌روزرسانی θ.



شکل ۲.۲: حلقهٔ ترکیبی VQE. بخش کوانتومی کم‌عمق است؛ سنگینی کار به تعداد پارامتر، شات، و جمله‌های H برمی‌گردد.

---

[۲] ansatz.

اندازه‌گیری H. معمولاً

$$H = \sum_j c_j P_j \tag{۱۰.۲}$$

با P_j حاصل‌ضرب پائولی. هر P_j جداگانه اندازه‌گیری می‌شود و

$$\widehat{E(\theta)} = \sum_j c_j \, \widehat{\langle P_j \rangle}. \tag{۱۱.۲}$$

تعداد شات، واریانس برآورد را کنترل می‌کند؛ این هزینه کنار عمق مدار می‌نشیند.

پارامترها، یک‌جا.

- $H = \sum c_j P_j$: هامیلتونی و تجزیهٔ اندازه‌گیری.
- $V(\theta)$ / آنزات: خانوادهٔ حالت‌های قابل ساخت با مدار کم‌عمق.
- θ: بردار پارامتر؛ ابعادش پیچیدگی بهینه‌سازی را می‌سازد.
- $E(\theta)$ و E_0: انرژی آزمایشی و انرژی پایهٔ واقعی.
- تعداد شات، و انتخاب بهینه‌ساز کلاسیک.

۷.۲ ردهٔ مسائل مناسب VQE

۱. **تقریب حالت پایه روی NISQ** وقتی عمق QPE در دسترس نیست [۱۵، ۱۶].

۲. **شیمی و اسپین در مقیاس کوچک تا متوسط** با آنزات مسئله‌محور (مثلاً UCC در شیمی، یا لایه‌های سخت‌افزاری‌پسند).

۳. **کاوش اولیه** قبل از سرمایه‌گذاری روی شبیه‌سازی سنگینِ U برای QPE.

محدودیت اصلی: مینیمم به‌دست‌آمده ممکن است مینیمم محلی یا سقفِ آنزات باشد، نه E_0. برخلاف QPE، افزایش صرفِ «دقت ساعت» وجود ندارد؛ باید آنزات یا بهینه‌سازی را عوض کرد.

۸.۲ مثال کاری VQE: یک کیوبیت با آنزات R_Y

ادامهٔ همان خانوادهٔ تک‌کیوبیتی فصل‌های تحول و تروتر، اما این‌بار پرسش طیفی است.

گام ۱ — هامیلتونی.

$$H = \tfrac{1}{2}Z + \tfrac{1}{4}X. \tag{۱۲.۲}$$

طیف دقیق با قطری‌سازی:

$$E_0 = -\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{4} \approx -0.5590, \qquad E_1 = +0.5590. \tag{۱۳.۲}$$

گام ۲ — آنزات.

$$|\psi(\theta)\rangle = R_Y(\theta)|0\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle. \tag{۱۴.۲}$$

آن‌گاه به‌صورت تحلیلی

$$E(\theta) = \tfrac{1}{2}\cos\theta + \tfrac{1}{4}\sin\theta. \tag{۱۵.۲}$$

کمینه وقتی مشتق صفر شود به دست می‌آید و مقدار کمینه همان $-\sqrt{5}/4$ است: این آنزات تک‌پارامتری برای یک کیوبیت *کامل* است و به پایهٔ واقعی می‌رسد.

گام ۳ — جدول انرژی آزمایشی. جدول ۲.۲ چند نمونه از روبش θ را نشان می‌دهد. حول $\theta \approx 3.61$ انرژی به E_0 می‌رسد.

جدول ۲.۲: روبش آنزات $R_Y(\theta)$ برای $H = \frac{1}{2}Z + \frac{1}{4}X$. کمینهٔ تحلیلی $E_0 \approx -0.559$.

θ	$E(\theta)$	فاصله از E_0
0	0.500	1.059
$\pi/2$	0.250	0.809
π	-0.500	0.059
3.61	-0.559	≈ 0
$3\pi/2$	-0.250	0.309

گام ۴ — اندازه‌گیری عملی. روی دستگاه، $\langle Z\rangle$ و $\langle X\rangle$ جداگانه با شات برآورد می‌شوند و

$$\widehat{E} = \tfrac{1}{2}\widehat{\langle Z\rangle} + \tfrac{1}{4}\widehat{\langle X\rangle}. \tag{۱۶.۲}$$

بهینه‌ساز کلاسیک θ را طوری جلو می‌برد که $\widehat{E}$ کم شود. در نبود نوفه و با شات کافی، همان مینیمم جدول بازتولید می‌شود.

گام ۵ — تفسیر در نقشهٔ سند.

- پرسش: طیفی (حالت پایه)، اما روش وردشی است نه برآورد فاز.
- رهیافت: ترکیبی؛ مدار کم‌عمق + کلاسیک.
- تفاوت با آدیاباتیک: اینجا مسیر $H(s)$ نیست؛ فضای پارامترِ آنزات است.
- تفاوت با QPE: به U^{2^k} نیاز نیست؛ دقت را آنزات و بهینه‌سازی محدود می‌کنند.

۹.۲ QAOA: فرمول، شهود، و جای آن در نقشه

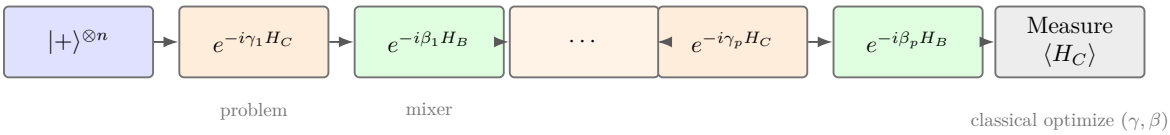
QAOA (Quantum Approximate Optimization Algorithm) یک الگوریتم بهینه‌سازی تقریبی کوانتومی است [۱۹]. هدف نوعی‌اش یافتن پیکربندی کم‌انرژی برای یک هامیلتونی کلاسیکِ قطری در پایهٔ محاسباتی است — همان زبان Ising بخش ۹.۱ — نه خواندن طیف با دقت دلخواه مثل QPE.

جایگاه در سه لایه.

- **پرسش:** بهینه‌سازی ترکیبی / حالت پایهٔ H_C (مثلاً برش بیشینه، پوشش، اسپین‌شیشه).
- **رهیافت:** پل میان محاسبهٔ آدیاباتیک و وردشیِ ترکیبی.
- **ابزار اجرا:** مدار کم‌عمقِ لایه‌لایه روی NISQ، به‌علاوهٔ بهینه‌ساز کلاسیک برای زاویه‌ها.

ایدهٔ شهودی در یک بند. از $|+\rangle^{\otimes n}$ شروع می‌کنید (پایهٔ آسانِ مخلوط‌کننده). یک لایه «هزینه» فازهایی متناسب با انرژی کلاسیک روی هر رشتهٔ بیتی می‌نویسد؛ یک لایه «مخلوط‌کننده» رشته‌ها را با میدان عرضی

جابه‌جا می‌کند. این جفت را p بار تکرار می‌کنید و زاویه‌ها را کلاسیک طوری تنظیم می‌کنید که $\langle H_C \rangle$ کم شود. شکل ۳.۲ همین تناوب را نشان می‌دهد.



شکل ۳.۲: QAOA با p لایه: از $|+\rangle^{\otimes n}$، تناوب هزینه / مخلوط‌کننده، سپس اندازه‌گیری $\langle H_C \rangle$ و بهینه‌سازی کلاسیک زاویه‌ها.

۱.۹.۲ فرمول و پارامترها

هامیلتونی *مسئله* (هزینه) معمولاً قطری است:

$$H_C = \sum_{i<j} J_{ij} Z_i Z_j + \sum_i h_i Z_i \tag{۱۷.۲}$$

(همان (۱۷.۱) با قرارداد مناسب). مخلوط‌کنندهٔ استاندارد میدان عرضی یکنواخت است:

$$H_B = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{۱۸.۲}$$

حالت p لایه:

$$|\vec{\gamma}, \vec{\beta}\rangle = \left(\prod_{j=1}^{p} e^{-i\beta_j H_B} \, e^{-i\gamma_j H_C} \right) |+\rangle^{\otimes n}. \tag{۱۹.۲}$$

تابع هزینهٔ آزمایشی

$$E(\vec{\gamma}, \vec{\beta}) = \langle \vec{\gamma}, \vec{\beta} | H_C | \vec{\gamma}, \vec{\beta} \rangle \tag{۲۰.۲}$$

را با اندازه‌گیری جمله‌های پائولیِ H_C برمی‌آورید و یک بهینه‌ساز کلاسیک $(\vec{\gamma}, \vec{\beta})$ را عوض می‌کند — دقیقاً حلقهٔ VQE، با این تفاوت که آنزات اینجا ساختار ثابتِ مسئله/مخلوط‌کننده دارد.

پارامترها، یک‌جا.

- H_C: تابع هزینه / Ising کلاسیک؛ جواب در رشتهٔ بیتی پایهٔ آن رمز است.

- H_B: مخلوط‌کننده؛ معمولاً $\sum X_i$ تا از $|+\rangle^{\otimes n}$ همهٔ پایه را ببیند.
- p: تعداد لایه‌ها؛ عمق مدار و تعداد پارامترها $2p$ است.
- γ_j: زاویهٔ لایهٔ هزینه (چقدر فازِ H_C اعمال شود).
- β_j: زاویهٔ لایهٔ مخلوط‌کننده.
- شات‌ها و بهینه‌ساز کلاسیک: همان هزینه‌های VQE.

۲.۹.۲ پیوند با آدیاباتیک و با VQE

مسیر آدیاباتیک $H(s) = (1-s)H_B + sH_C$ اگر با تروتر در چند تکهٔ درشت گسسته شود، همان تناوب $e^{-i\Delta t_B H_B}\, e^{-i\Delta t_C H_C}$ ظاهر می‌شود. QAOA این Δtها را آزاد می‌گذارد تا کلاسیک بهینه کند؛ دیگر لازم نیست $s(t)$ حتماً آهسته و مطابق کران $\Delta_{\min}$ باشد، اما دیگر تضمین آدیاباتیک هم ندارید.

جدول ۳.۲ سه خویشاوند را کنار هم می‌گذارد.

جدول ۳.۲: مقایسهٔ کوتاه آدیاباتیک، QAOA، و VQE عمومی.

	آدیاباتیک	QAOA	VQE عمومی
ایده	مسیر کند $H(s)$	گسسته‌سازی وردشی همان ایده	آنزات آزاد / مسئله‌محور
پارامتر	زمان‌بندی $s(t)$، T	(γ_j, β_j)، p	مدار پارامتری θ
تضمین نوعی	قضیهٔ آدیاباتیک اگر گاف و T خوب باشند	تقریبی؛ با p بهتر می‌شود (نه همیشه آسان)	اصل وردشی؛ وابسته به آنزات
رژیم	آنالوگ یا دیجیتالِ عمیق	NISQ / مدار کم‌عمق لایه‌ای	NISQ

۳.۹.۲ ردهٔ مسائل مناسب

۱. مسائل بهینه‌سازی نگاشته‌شده به MaxCut / Ising.

۲. وقتی سخت‌افزار عمق کم دارد و می‌خواهید از ساختار H_B—H_C استفاده کنید، نه از یک آنزات بی‌ساختار.

۳. مطالعهٔ تقریبی بودن: نسبت تقریب و رفتار با افزایش p.

اگر انرژی مولکولی با آنزات شیمی می‌خواهید، UCC/VQE طبیعی‌تر است. اگر طیف با دقت کنترل‌شده می‌خواهید، QPE. اگر گاف مسیر را می‌شناسید و سخت‌افزار مسیر می‌دهد، آدیاباتیک را جدا ببینید.

۱۰.۲ مثال کاری QAOA: دو کیوبیت و $H_C = -Z_1 Z_2$

هدف: نمادهای بخش ۹.۲ را روی همان Ising دوکیوبیتیِ آشنا پر کنیم و ببینیم یک لایه چگونه نزدیک پایه می‌شود.

گام ۱ — مسئله به‌زبان هزینه.

$$H_C = -Z_1 Z_2, \qquad H_B = X_1 + X_2, \qquad |\psi_0\rangle = |{+}{+}\rangle, \qquad p = 1. \tag{۲۱.۲}$$

روی پایهٔ محاسباتی:

$$E_C(|00\rangle) = E_C(|11\rangle) = -1, \qquad E_C(|01\rangle) = E_C(|10\rangle) = +1. \tag{۲۲.۲}$$

پس کمینهٔ کلاسیک -1 است (پیکربندی‌های هم‌جهت). میانگین روی $|{+}{+}\rangle$ صفر است — نقطهٔ شروعِ «تصادفیِ یکنواخت» روی چهار رشته.

گام ۲ — یک لایهٔ صریح.

$$|\gamma, \beta\rangle = e^{-i\beta H_B}\, e^{-i\gamma H_C}\, |{+}{+}\rangle. \tag{۲۳.۲}$$

$e^{-i\gamma H_C}$ چون H_C قطری است، فقط فاز روی هر $|zz'\rangle$ می‌نویسد. $e^{-i\beta H_B}$ همان دوران‌های X روی دو کیوبیت است و دامنه را میان رشته‌ها جابه‌جا می‌کند.

گام ۳ — روبش و مینیمم. با روبش ظریف‌تر (γ, β)، می‌توان به خودِ پایه رسید:

$$E(\gamma^\star, \beta^\star) = -1 \quad \text{با} \quad \gamma^\star = \pi/4, \quad \beta^\star \approx 1.18 \tag{۲۴.۲}$$

(و نقاط معادل دوره‌ای). در این نقطه احتمال اندازه‌گیری روی $\{|00\rangle, |11\rangle\}$ هر کدام $1/2$ است و روی رشته‌های ناهم‌جهت تقریباً صفر — یعنی هر شات یکی از جواب‌های بهینه را می‌دهد.

گام ۴ — نسبت تقریب (شهودی). اگر خطِ پایه را انرژی شروع $E_{\text{start}} = \langle ++|H_C|++\rangle = 0$ بگیریم،

$$r = \frac{E_{\text{start}} - E(\gamma^\star, \beta^\star)}{E_{\text{start}} - E_0} = \frac{0-(-1)}{0-(-1)} = 1. \tag{۲۵.۲}$$

روی این مسئلهٔ دوکیوبیتی با $p = 1$ نسبت تقریب کامل است. روی گراف‌های بزرگ‌تر و سخت‌تر، r با $p = 1$ معمولاً کوچک‌تر است و افزایش p موضوع پژوهش می‌شود.

گام ۵ — اجرا روی دستگاه.

۱. دو هادامارد برای $|++\rangle$.

۲. فازهای ZZ مطابق γ (یک گیت دوکیوبیتیِ قطری یا معادلش).

۳. دوران‌های X مطابق β.

۴. تکرار شات، برآورد $\langle Z_1 Z_2\rangle$، و به‌روزرسانی (γ, β) با بهینه‌ساز کلاسیک.

گام ۶ — تفسیر در نقشهٔ سند.

- نسبت به آدیاباتیک (بخش ۸.۲): همان H_C و همان H_B؛ آنجا مسیر پیوسته و شرط گاف، اینجا زاویه‌های گسسته و بهینه‌سازی.
- نسبت به VQE (بخش ۸.۲): حلقه یکی است؛ آنزات اینجا از فیزیکِ مسئله/مخلوط‌کننده می‌آید نه از یک R_Y آزاد.
- نسبت به QPE: هدف تقریبِ ترکیبیاتی است، نه رقم‌های فاز با دقت 2^{-m}.

۱۱.۲ ارتباط

پرسش طیفی در فصل ۱، ساخت U در فصل ۱، تحول زمانی در بخش ۳.۲، آدیاباتیک به‌عنوان راه سوم آماده‌سازی پایه در فصل ۲، و حلقهٔ ترکیبی در فصل ۱ آمده است.

۱۲.۲ چه وقت استفاده می‌شود

دقت طیفی در افق FTQC و وقتی تقریبی از ویژه‌بردار دارید: QPE (بخش‌های ۳.۲ و ۵.۲). آزمایش روی دستگاه امروز یا کاوش اولیه: VQE (بخش‌های ۶.۲ و ۸.۲). بهینه‌سازی Ising/برش بیشینه با آنزات لایه‌لایه: QAOA (بخش‌های ۹.۲ و ۱۰.۲). اگر گاف مسیر معلوم و سخت‌افزار آنالوگ/آدیاباتیک دارید: اول فصل ۲.

نکته ۱.۲ (جای توسعه). برآورد فاز تکیه‌گاه‌شده و کیوبیتیزاسیون+QPE؛ اثر هم‌پوشانی ناقص با ویژه‌بردار؛ VQD و آنزات‌های شیمی (UCC)؛ QAOA با $p > 1$ و مسائل MaxCut بزرگ‌تر؛ مخلوط‌کننده‌های غیر استاندارد؛ نقش تعداد شات؛ چشم‌انداز بایرن (barren plateau).

بخش ۶

اجرا، راستی‌آزمایی و قطب‌نما

فصل ۱

دیجیتال، آنالوگ، ترکیبی

۱.۱ جایگاه در نقشه

پایین نمودار، بعد از «الگوریتم»: مدار، مسیر آدیاباتیک، یا زمان‌بندی آنالوگ باید روی یک دستگاه بنشیند. این فصل مدل سخت‌افزاری است، نه فهرست شرکت‌ها. شبیه‌سازی آنالوگ چون اغلب با آدیاباتیک و با تحول دیجیتال قاطی می‌شود، در بخش ۳.۱ جداگانه باز شده است.

۲.۱ ایدهٔ شهودی

دیجیتال — مدار گیتی. الگوریتم به دنبالهٔ گیت از یک مجموعه گیت جهانی ترجمه می‌شود. انعطاف زیاد است؛ هزینه به عمق مدار، همبندی، و خطای گیت حساس است. Trotter، LCU، QSP، QPE و VQE همگی در نهایت اینجا مدار می‌شوند — VQE معمولاً مدار کم‌عمق‌تر [۱۷].

آنالوگ — مهندسی هامیلتونی. به‌جای شکستن $U(t)$، H_{hw} را نزدیک H_{target} می‌سازید و زمان را واقعی جلو می‌برید. مزیت: عمق گیت معنا ندارد. محدودیت: فقط مدل‌هایی که دستگاه بلداست [۶، ۷]. جزئیات و مثال در بخش ۳.۱.

ترکیبی — حلقه با کلاسیک. بخشی از کار روی پردازندهٔ کوانتومی است، بخشی روی کلاسیک. VQE نمونهٔ بارز است. سرکوب خطا هم اغلب ترکیبی است. سخت‌افزار بازپیکربندی‌پذیر مرز آنالوگ و دیجیتال را نرم می‌کند: همبندی را می‌توان با مسئله عوض کرد.

۳.۱ شبیه‌سازی آنالوگ: فرمول و تمایزها

۱.۳.۱ تعریف کاری

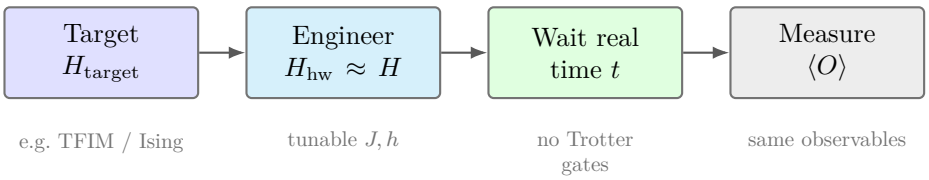
شبیه‌سازی آنالوگ یعنی سامانهٔ آزمایشگاهی را طوری تنظیم کنید که هامیلتونی‌اش تقریباً همان مدل هدف باشد:

$$H_{\mathrm{hw}}(t) \;\approx\; H_{\mathrm{target}}(t), \tag{۱.۱}$$

سپس بگذارید طبیعت انتگرال زمانی را بگیرد:

$$i\,\partial_t|\psi\rangle = H_{\mathrm{hw}}(t)\,|\psi\rangle. \tag{۲.۱}$$

هیچ تجزیه‌ای به $e^{-iH_k\Delta t}$ و گیت سراسری لازم نیست؛ «مدار» همان زمان‌بندیِ کنترل‌های فیزیکی است (شدت لیزر، شار مغناطیسی، فاصلهٔ اتم‌ها، ...). اسکلت در شکل ۱.۱ آمده است.



شکل ۱.۱: شبیه‌سازی آنالوگ: نگاشت مدل به کنترل‌های سخت‌افزار، تحول با زمان فیزیکی، سپس همان مشاهده‌پذیرهای پژوهشی.

۲.۳.۱ سه چیزی که نباید قاطی شوند

- **آنالوگ در برابر دیجیتال.** دیجیتال: H را به گیت می‌شکند (QSP/LCU/Trotter). آنالوگ: H را روی دستگاه می‌سازد. هر دو می‌توانند همان پرسش دینامیکی را جواب بدهند؛ هزینه و خطایشان فرق دارد.

- **آنالوگ در برابر محاسبهٔ آدیاباتیک.** آدیاباتیک یک *الگوریتم* با مسیر $H(s)$ برای رسیدن به پایه است. آنالوگ یک *بستر اجرا* است. می‌توانید تحولِ H ثابت را آنالوگ کنید، یا مسیر آدیاباتیک را آنالوگ پیاده کنید؛ لزوماً یکی نیستند (فصل ۲).

- **آنالوگ در برابر بازپخت کوانتومی.** بازپخت خویشاوند نوفه‌دار و بهینه‌سازی‌محور است؛ هدفش غالباً کمینهٔ تقریبی است، نه شبیه‌سازی دقیق دینامیک مدل فیزیکی.

۳.۳.۱ پارامترها و گلوگاه‌ها

- H_{target}: مدل پژوهشی (مثلاً TFIM، هابارد مهندسی‌شده).
- نگاشت: کدام کنترل دستگاه کدام جملهٔ H را می‌سازد ($J \leftrightarrow$ جفت‌شدگی، $h_x \leftrightarrow$ میدان رانش، ...).
- وفاداری نگاشت: $\|H_{\text{hw}} - H_{\text{target}}\|$ یا خطای مشاهده‌پذیر نسبت به مدل ایده‌آل.
- زمان فیزیکی t (و در صورت نیاز زمان‌بندی $H(t)$).
- ناهمدوسی و کالیبراسیون: در آنالوگ «عمق مدار» نیست؛ زمان همدوسی و پایداری کنترل‌ها گلوگاه‌اند.

۴.۳.۱ ردهٔ مسائل مناسب آنالوگ

۱. مدل‌هایی که سخت‌افزار ذاتاً بلداست (اسپین با ZZ و میدان، بعضی رژیم‌های هابارد در گازهای سرد، ...).

۲. دینامیک در زمان‌های متوسط وقتی تجزیهٔ گیتی خیلی عمیق می‌شود.

۳. کاوش فاز یا quench وقتی دقت «شیمیایی» FTQC لازم نیست.

اگر به $f(H)$ دلخواه، یا به کنترل خطای منطقی در مقیاس بزرگ نیاز دارید، مسیر دیجیتال تحمل‌پذیر در برابر خطا مناسب‌تر است.

۴.۱ مثال کاری آنالوگ: دینامیک دو اسپینِ TFIM

همان خانوادهٔ مدل که در بخش ۹.۱ و مثال آدیاباتیک دیدید، این‌بار نه برای یافتن پایه، بلکه برای *تحول زمانی* روی سخت‌افزار آنالوگ.

گام ۱ — مدل هدف.

$$H_{\text{target}} = -J\, Z_1 Z_2 - h_x\,(X_1 + X_2), \qquad J, h_x > 0. \tag{۳.۱}$$

این یک TFIM دوسایته است: جفت‌شدگی فرومغناطیسی به‌علاوهٔ میدان عرضی. پرسش پژوهشی نمونه: اگر سامانه در $|00\rangle$ شروع کند، $\langle Z_1 Z_2\rangle(t)$ چگونه نوسان می‌کند؟

گام ۲ — نگاشت به سخت‌افزار. فرض کنید دستگاه (مثلاً دو یون یا دو کیوبیت ابررسانا در رژیم کوپلینگِ قابل تنظیم) بتواند همزمان

$$H_{\text{hw}} = -J_{\text{hw}}\, Z_1 Z_2 - h_{\text{hw}}\,(X_1 + X_2) \tag{۴.۱}$$

را با کنترل‌های آزمایشگاهی بسازد. شبیه‌سازی آنالوگ یعنی کالیبره کردن

$$J_{\text{hw}} \approx J, \qquad h_{\text{hw}} \approx h_x, \tag{۵.۱}$$

نه نوشتن مدار تروتر. اگر دستگاه فقط یکی از جمله‌ها را بلداست، یا باید مدل را عوض کنید یا به دیجیتال برگردید.

گام ۳ — اجرا.

۱. حالت اولیه $|00\rangle$ را آماده کنید (در بسیاری از سکوها حالت طبیعی است).

۲. کنترل‌ها را روی $(J_{\text{hw}}, h_{\text{hw}})$ بگذارید و زمان فیزیکی t صبر کنید — سامانه خودش $e^{-iH_{\text{hw}}t}$ را اعمال می‌کند.

۳. $\langle Z_1 Z_2\rangle$ یا جمعیت پایه‌های محاسباتی را بخوانید.

گام ۴ — مرجع کلاسیک روی همین دو کیوبیت. چون $n = 2$ است، H_{target} را می‌توان دقیقاً قطری کرد و $\langle Z_1 Z_2\rangle_{\text{exact}}(t)$ را ساخت. آزمایش آنالوگ وقتی موفق است که منحنی اندازه‌گیری‌شده به این مرجع نزدیک باشد. انحراف، ترکیبی از خطای نگاشت ($J_{\text{hw}} \neq J$)، نوفه، و خطای خوانش است — نه «خطای تروتر»، چون تروتری در کار نبوده است.

با انتخاب عددی $J = 1$، $h_x = 1$ و شروع از $|00\rangle$، مرجع دقیق می‌دهد

$$\langle Z_1 Z_2\rangle(0) = 1, \qquad \langle Z_1 Z_2\rangle(1) \approx 0.50, \qquad \langle Z_1 Z_2\rangle(\pi/2) \approx 0.89. \tag{۶.۱}$$

هم‌بستگی با زمان نوسان می‌کند؛ منحنی کامل همان بنچمارک راستی‌آزمایی برای اجرای آنالوگ است.

گام ۵ — مقایسه با مسیر دیجیتال روی همان H. اگر همین H_{target} را دیجیتال شبیه‌سازی کنید، از بخش ۳.۱ باید

$$e^{-iHt} \approx \left(e^{iJZ_1Z_2\,t/r}\, e^{ih_x(X_1+X_2)\,t/r}\right)^r \tag{۷.۱}$$

را با گیت بسازید و r را برای خطای تروتر بالا ببرید. در آنالوگ، همان فیزیک بدون این حاصل‌ضرب پیاده می‌شود؛ بهایش وابستگی به توانایی سخت‌افزار در ساخت همزمان هر دو نوع جمله است.

گام ۶ — تفسیر در نقشهٔ سند.

- پرسش: دینامیکی ($\langle Z_1 Z_2\rangle(t)$)، نه لزوماً حالت پایه.
- رهیافت: تحول زمانی.
- اجرا: آنالوگ (مهندسی H)، در برابر دیجیتال (تروتر روی همان H).
- اگر به‌جای H ثابت، کنترل‌ها را آرام از فقط‌عرضی به فقطZZ جارو کنید، همان آزمایش می‌تواند به محاسبهٔ آدیاباتیک آنالوگ تبدیل شود — تغییر در زمان‌بندی کنترل، نه در تعریف آنالوگ بودن.

۵.۱ حداقل فرمالیسم — چک‌لیست اجرا

سؤال عملی برای هر پروژه:

۱. خروجی الگوریتم مدار است، زمان‌بندی $H(t)$ است، یا هر دو؟

۲. دستگاه می‌تواند جمله‌های H را مستقیم بسازد یا فقط گیت جهانی دارد؟

۳. حلقهٔ کلاسیک لازم است (وردشی، کالیبراسیون، سرکوب خطا)؟

اگر پاسخ (۲) مثبت باشد، مسیر آنالوگ (بخش‌های ۳.۱ و ۴.۱) را جدی بگیرید. اگر مسئله $f(H)$ عمومی و دقت بالا می‌خواهد، مسیر دیجیتال تحمل‌پذیر در برابر خطا را جدی بگیرید.

۶.۱ ارتباط

سه مدل محاسباتی در فصل ۳، تحول و آدیاباتیک در فصل ۲، مدل TFIM/Ising در بخش ۹.۱، ابزار دیجیتال در فصل ۱، VQE در فصل ۲، و اندازه‌گیری و برآورد منابع در فصل ۲ آمده است.

۷.۱ چه وقت استفاده می‌شود

وقتی الگوریتم روی کاغذ تمام شده و باید بگویید روی چه موجودی اجرا می‌شود. انتخاب سکو نباید قبل از مشخص شدن پرسش و رهیافت باشد. برای دینامیک روی سخت‌افزاری که H را بلداست: آنالوگ؛ برای مدار گیتی و توابع عمومی: دیجیتال؛ برای حلقه با بهینه‌ساز کلاسیک: ترکیبی.

نکته ۱.۱ (جای توسعه). جدول کیفی ابررسانا / یون به‌دام‌افتاده / اتم خنثی؛ منحنی عددی کامل $\langle Z_1 Z_2 \rangle(t)$ برای مثال ۴.۱؛ محدودیت همبندی و هزینهٔ SWAP در دیجیتال؛ analog–digital hybrid؛ مهندسی هابارد در شبکهٔ نوری به‌عنوان مثال دوم.

فصل ۲

بستن حلقه: اندازه‌گیری، راستی‌آزمایی، برآورد منابع

۱.۲ جایگاه در نقشه

انتهای جریان کاری. بدون این سه گام، مدار یا مسیر آدیاباتیک فقط یک آزمایش اجراشده است، نه نتیجهٔ پژوهشی قابل دفاع.

۲.۲ ایدهٔ شهودی

از مدار تا مشاهده‌پذیر. خروجی رایانهٔ کوانتومی تابع موج کامل نیست. خوانش در یک پایه بیت‌های کلاسیک می‌دهد. مشاهده‌پذیر O معمولاً به جمله‌های قابل اندازه‌گیری شکسته می‌شود و میانگین شات‌ها $\langle O \rangle$ را می‌سازد. وفاداری [1] با یک حالت هدف در سامانه‌های بزرگ مستقیماً در دسترس نیست.

راستی‌آزمایی کلاسیک. قبل از باور به عدد، آن را جایی که کلاسیک هنوز قوی است چک کنید: شبکه یا مولکول خیلی کوچک (قطری‌سازی یا شبیه‌سازی بردار حالت)؛ حدهای دقیقاً حل‌پذیر ($U = 0$ در هابارد، میدان صفر در اسپین)؛ تقارن‌ها (تعداد ذره، اسپین، بار پیمانه‌ای)؛ شبکهٔ تانسوری در رژیم درهم‌تنیدگی کم [۲۰، ۲]. اگر الگوریتم در این حدها غلط است، در حد سخت هم به آن اعتماد نکنید.

[1] fidelity

برآورد منابع. سؤال پژوهشی «آیا این مسیر شدنی است؟»: چند کیوبیت پس از کدگذاری؟ عمق مدار یا زمان آنالوگ چقدر است؟ برای Trotter چند گام تا خطای تروتر زیر ε؟ برای QSP درجهٔ چندجمله‌ای؟ برای VQE تعداد پارامتر، شات، و جمله‌های H؟ نویز دستگاه در برابر دقت هدف: سرکوب خطا کافی است یا تصحیح خطا لازم است؟

بنچمارک[۲] در این سند یعنی مقایسهٔ کنترل‌شده با یک مرجع، نه عدد تبلیغاتی.

۳.۲ حداقل فرمالیسم

زنجیره:

$$\text{حالت / مدار} \longrightarrow \text{خوانش} \longrightarrow \widehat{\langle O \rangle} \longrightarrow \text{مرجع کلاسیک} \longrightarrow \text{هزینه}(n, d, t, \varepsilon). \tag{۱.۲}$$

برون‌یابی به نویز صفر و لغو احتمالاتی خطا دو نمونه از سرکوب خطا هستند؛ یادگیری نویز پیش‌نیاز بعضی از آن‌هاست [۱۸]. هدف نسخهٔ اول فقط این است که این‌ها *بعد از* اندازه‌گیری می‌آیند، نه به‌جای الگوریتم.

۴.۲ ارتباط

جریان کاری در فصل ۲، رقبا و حدهای کلاسیک در فصل ۲، ابزارها در فصل‌های ۱ و ۲، و قطب‌نما در فصل ۳ آمده است.

۵.۲ چه وقت استفاده می‌شود

پایان هر طرح پروژه، و هر بار که مقاله‌ای فقط مدار را نشان می‌دهد بدون مشاهده‌پذیر، مرجع کلاسیک، یا هزینه.

نکته ۱.۲ (جای توسعه). جدول شاهدهای راستی‌آزمایی برای هابارد و نظریهٔ پیمانه‌ای؛ فرمول‌های asymptotic هزینه؛ early-FTQC میان NISQ و تصحیح خطای کامل.

[۲] benchmark. معادل فارسی هنوز در جامعه تثبیت نشده است.

فصل ۳

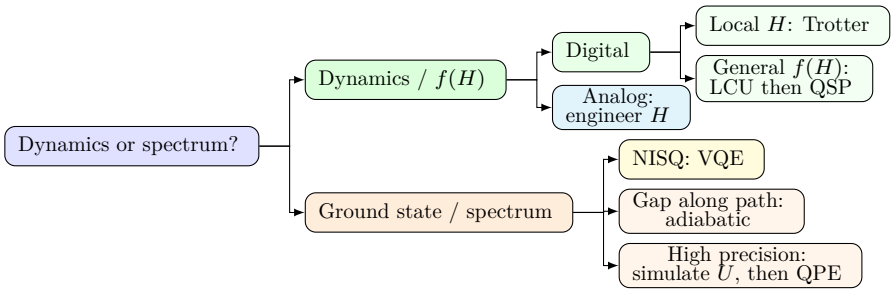
قطب‌نمای پژوهش

۱.۳ جایگاه در نقشه

این فصل برای لحظه‌ای است که مسئلهٔ تازه‌ای روی میز است. اگر فقط دو فصل را باز می‌کنید، فصل ۱ و همین فصل کافی‌اند.

۲.۳ ایدهٔ شهودی

با چند سؤال پشت‌سرهم جای خود را روی نقشه پیدا کنید. ابزار را آخر انتخاب کنید. شکل ۱.۳ همان درخت را خلاصه می‌کند.



شکل ۱.۳: درخت تصمیم پژوهش. از نوع سؤال شروع کنید؛ بستر و ابزار آخر می‌آیند.

۳.۳ حداقل فرمالیسم

چک‌لیست تصمیم؛ هر خط به یک فصل می‌رود.

۱. **سؤال من دینامیک است یا طیف؟** فیلم $\langle O(t)\rangle$ در برابر انرژی / گاف / ویژه‌بردار. → فصل ۱.

۲. **مدل کدام است و H چه ساختاری دارد؟** اسپین، هابارد، مولکول، نظریهٔ پیمانه‌ای شبکه‌ای؛ محلی بودن؛ فرمیونی یا پائولی. → فصل ۱.

۳. **رهیافت: تحول، آدیاباتیک، یا وردشی؟** آیا $U(t)$ یا $f(H)$ می‌خواهم، یا مسیر $H(s)$، یا آنزات؟ → فصل‌های ۲ و ۴.

۴. **اجرا دیجیتال است، آنالوگ، یا ترکیبی؟** مدار گیتی در برابر مهندسی H در برابر حلقه با بهینه‌ساز کلاسیک. → فصل ۱.

۵. **رژیم دستگاه: NISQ یا تحمل‌پذیر در برابر خطا؟** NISQ غالباً VQE و سرکوب خطا؛ FTQC غالباً QPE/QSP. → فصل ۲.

۶. **اگر دیجیتال و تحول: کدام ابزار؟** شروع با Trotter؛ $f(H)$ عمومی با LCU و QSP. → فصل ۱.

۷. **چطور می‌فهمم درست است و آیا منابعش معقول است؟** حد کلاسیک، تقارن، برآورد کیوبیت و عمق. → فصل ۲.

۸. **رقیب کلاسیک چیست؟** اگر شبکهٔ تانسوری یا QMC همان رژیم را خوب می‌پوشاند، مزیت کوانتومی را صریح بنویسید. → فصل ۲.

۴.۳ ارتباط

نقشه در فصل ۱ و واژگان در فصل ۴.

۵.۳ چه وقت استفاده می‌شود

شروع هر زیرپروژه، خواندن هر مقالهٔ روش‌محور، و هر بار که احساس کردید در جزئیات مدار یا فرمول گم شده‌اید.

نکته ۱.۳ (جای توسعه). شاخهٔ سامانهٔ کوانتومی باز و معادلهٔ مادر؛ شاخهٔ بهینه‌سازی خالص (QAOA / بازپخت) جدا از شبیه‌سازی فیزیکی؛ یک صفحهٔ «پروژهٔ جاری» که پاسخ این سؤال‌ها را برای کار فعلی ثابت نگه دارد.

فصل ۴

واژه‌نامهٔ مصوب

منبع واحد اصطلاحات این سند. هنگام افزودن مفهوم تازه، نخست سطر آن را اینجا اضافه کنید، سپس در فصل‌ها به کار ببرید. در متن روان، فارسی مصوب می‌آید و شکل انگلیسی در نخستین کاربرد هر فصل داخل پرانتز است.

نکته ۱.۴. در مواردی که معادل فارسی هنوز در جامعهٔ علمی داخل تثبیت نشده است (مانند benchmark یا early-FTQC)، شکل انگلیسی در نخستین کاربرد داخل متن آورده می‌شود تا ابهام ایجاد نشود.

جدول ۱.۴: معادل‌های فارسی مصوب این سند برای اصطلاحات پرکاربرد حوزهٔ شبیه‌سازی کوانتومی.

انگلیسی	فارسی مصوب این سند
gate	گیت
universal gate set	مجموعه گیت جهانی
many-body	بس‌ذره‌ای
real-time dynamics	تحول زمانی
phase estimation	برآورد فاز
master equation	معادلهٔ مادر
transport	ترابرد
noise	نویز
decoherence	ناهمدوسی
open quantum system	سامانهٔ کوانتومی باز
fidelity	وفاداری
thermalization	رسیدن به تعادل گرمایی
variational	وردشی
fault-tolerant	تحمل‌پذیر در برابر خطا
error mitigation	سرکوب خطا
error correction	تصحیح خطا
hybrid	ترکیبی
Trotter error	خطای تروتر

جدول ۱.۴: معادل‌های فارسی مصوب این سند (ادامه).

انگلیسی	فارسی مصوب این سند
product formula	فرمول حاصل‌ضربی
tensor network	شبکهٔ تانسوری
matrix product state	حالت حاصل‌ضرب ماتریسی
state vector simulation	شبیه‌سازی بردار حالت
connectivity	همبندی
readout	خوانش
vibronic	ارتعاشی—الکترونی
non-adiabatic	غیرآدیاباتیک
singlet fission	شکافت سینگلت
bosonic mode	مد بوزونی
active space	فضای فعال
trapped ion	یون به‌دام‌افتاده
neutral atom	اتم خنثی
reconfigurable	بازپیکربندی‌پذیر
scaling law	قانون مقیاس‌بندی
workflow	جریان کاری
benchmark	بنچمارک
random circuit	مدار تصادفی
dual-unitary	دوگان‌واحد
Floquet circuit	مدار فلوکه
measurement-induced transition	گذار القایی اندازه‌گیری
scrambling	پخش اطلاعات
boson sampling	نمونه‌برداری بوزونی
lattice gauge theory	نظریهٔ پیمانه‌ای شبکه‌ای
discrete time crystal	بلور زمانی گسسته
verification	راستی‌آزمایی
zero-noise extrapolation	برون‌یابی به نویز صفر
probabilistic error cancellation	لغو احتمالاتی خطا
noise learning	یادگیری نویز
linear combination of unitaries (LCU)	ترکیب خطی یکانی‌ها
qubitization	کیوبیتیزاسیون
quantum signal processing (QSP)	پردازش سیگنال کوانتومی
non-Markovian	غیرمارکوفی
resource estimation	برآورد منابع
quench	تغییر ناگهانی هامیلتونی
quantum trajectories	مسیرهای کوانتومی
Stinespring dilation	تحول اتساع‌یافته
block-encoding	بلوک‌کدگذاری
quantum singular value transformation (QSVT)	تبدیل تکین کوانتومی
QAOA	QAOA
NISQ	NISQ
early-FTQC	early-FTQC
quantum annealing	بازپخت کوانتومی
adiabatic theorem	قضیهٔ آدیاباتیک

جدول ۱.۴: معادل‌های فارسی مصوب این سند (ادامه).

انگلیسی	فارسی مصوب این سند
instantaneous eigenstate	ویژه‌حالت لحظه‌ای
instantaneous gap	گاف لحظه‌ای
schedule	زمان‌بندی
driver Hamiltonian	هامیلتونی راننده
problem Hamiltonian	هامیلتونی مسئله
observable	مشاهده‌پذیر
ansatz	آنزات
counting register	ثبات شمارش
postselection	پس‌گزینش
mixer	مخلوط‌کننده
transverse-field Ising model (TFIM)	مدل آیزینگ در میدان عرضی
ferromagnet	فرومغناطیس
antiferromagnet	پادفرومغناطیس
analog simulation	شبیه‌سازی آنالوگ
digital adiabatic	آدیاباتیک دیجیتال
creation operator	عملگر خلق
annihilation operator	عملگر فنا
harmonic oscillator	نوسانگر هماهنگ
driven oscillator	نوسانگر واداشته
canonical quantization	کوانتش کانونی

Bibliography

[1] F. Verstraete, V. Murg, and J. I. Cirac. Matrix product states, projected entangled pair states, and variational renormalization group methods for quantum spin systems. *Advances in Physics*, 57(2):143–224, 2008.

[2] J. I. Cirac, D. Pérez-García, N. Schuch, and F. Verstraete. Matrix product states and projected entangled pair states: Concepts, symmetries, theorems. *Reviews of Modern Physics*, 93(4):045003, 2021.

[3] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information.* Cambridge University Press, Cambridge, 10th anniversary edition, 2010.

[4] R. P. Feynman. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(6/7):467–488, 1982.

[5] S. Lloyd. Universal quantum simulators. *Science*, 273(5278):1073–1078, 1996.

[6] I. M. Georgescu, S. Ashhab, and F. Nori. Quantum simulation. *Reviews of Modern Physics*, 86(1):153–185, 2014.

[7] J. I. Cirac and P. Zoller. Goals and opportunities in quantum simulation. *Nature Physics*, 8(4):264–266, 2012.

[8] S. McArdle, S. Endo, A. Aspuru-Guzik, S. C. Benjamin, and X. Yuan. Quantum computational chemistry. *Reviews of Modern Physics*, 92(1):015003, 2020.

[9] B. Bauer, S. Bravyi, M. Motta, and G. K.-L. Chan. Quantum algorithms for quantum chemistry and quantum materials science. *Chemical Reviews*, 120(22):12685–12717, 2020.

[10] A. M. Childs, D. Maslov, Y. Nam, N. J. Ross, and Y. Su. Toward the first quantum simulation with quantum speedup. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(38):9456–9461, 2018.

[11] T. Albash and D. A. Lidar. Adiabatic quantum computation. *Reviews of Modern Physics*, 90(1):015002, 2018.

[12] E. Farhi, J. Goldstone, S. Gutmann, and M. Sipser. Quantum computation by adiabatic evolution. *arXiv preprint quant-ph/0001106*, 2000.

[13] D. W. Berry, A. M. Childs, R. Cleve, R. Kothari, and R. D. Somma. Simulating Hamiltonian dynamics with a truncated Taylor series. *Physical Review Letters*, 114(9):090502, 2015.

[14] G. H. Low and I. L. Chuang. Optimal Hamiltonian simulation by quantum signal processing. *Physical Review Letters*, 118(1):010501, 2017.

[15] A. Peruzzo, J. McClean, P. Shadbolt, M.-H. Yung, X.-Q. Zhou, P. J. Love, A. Aspuru-Guzik, and J. L. O'Brien. A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor. *Nature Communications*, 5:4213, 2014.

[16] J. Tilly, H. Chen, S. Cao, D. Picozzi, K. Setia, Y. Li, E. Grant, L. Wossnig, I. Rungger, G. H. Booth, and J. Tennyson. The variational quantum eigensolver: A review of methods and best practices. *Physics Reports*, 986:1–128, 2022.

[17] J. Preskill. Quantum computing in the NISQ era and beyond. *Quantum*, 2:79, 2018.

[18] S. Endo, Z. Cai, S. C. Benjamin, and X. Yuan. Hybrid quantum-classical algorithms and quantum error mitigation. *Journal of the Physical Society of Japan*, 90(3):032001, 2021.

[19] E. Farhi, J. Goldstone, and S. Gutmann. A quantum approximate optimization algorithm. *arXiv preprint arXiv:1411.4028*, 2014.

[20] A. J. Daley, I. Bloch, C. Kokail, S. Flannigan, N. Pearson, M. Troyer, and P. Zoller. Practical quantum advantage in quantum simulation. *Nature*, 607(7920):667–676, 2022.

[21] L. Clinton, T. Cubitt, B. Flynn, F. M. Gambetta, J. Klassen, A. Montanaro, S. Piddock, R. A. Santos, and E. Sheridan. Towards near-term quantum simulation of materials. *Nature Communications*, 15:211, 2024.

[22] Z. Cai, R. Babbush, S. C. Benjamin, S. Endo, W. J. Huggins, Y. Li, J. R. McClean, and T. E. O'Brien. Quantum error mitigation. *Reviews of Modern Physics*, 95(4):045005, 2023.

[23] H.-P. Breuer and F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, Oxford, 2002.

[24] Y. Zhang, X. Zhang, J. Sun, H. Lin, Y. Huang, D. Lv, and X. Yuan. Fault-tolerant quantum algorithms for quantum molecular systems: A survey. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Molecular Science*, 15:e70020, 2025.

[25] M. Cerezo, A. Arrasmith, R. Babbush, S. C. Benjamin, S. Endo, K. Fujii, J. R. McClean, K. Mitarai, X. Yuan, L. Cincio, and P. J. Coles. Variational quantum algorithms. *Nature Reviews Physics*, 3(9):625–644, 2021.

[26] B. Fauseweh. Quantum many-body simulations on digital quantum computers: State-of-the-art and future challenges. *Nature Communications*, 15:2123, 2024.

[27] A. Miessen, D. J. Egger, I. Tavernelli, and G. Mazzola. Benchmarking digital quantum simulations above hundreds of qubits using quantum critical dynamics. *arXiv preprint arXiv:2404.08053*, 2024. IBM Quantum / University of Zurich; hardware benchmarking up to 133 qubits.

[28] R. Dutta, D. G. A. Cabral, N. Lyu, N. P. Vu, Y. Wang, B. Allen, X. Dan, R. G. Cortiñas, P. Khazaei, M. Schäfer, et al. Simulating chemistry on bosonic quantum devices. *Journal of Chemical Theory and Computation*, 20(15):6426–6441, 2024.

[29] N. Maskara, S. Ostermann, J. Shee, M. Kalinowski, A. McClain Gomez, R. Araiza Bravo, D. S. Wang, A. I. Krylov, N. Y. Yao, M. Head-Gordon, M. D. Lukin, and S. F. Yelin. Programmable simulations of molecules and materials with reconfigurable quantum processors. *Nature Physics*, 21(2):289–297, 2025.

[30] T. I. Andersen, N. Astrakhantsev, A. H. Karamlou, J. Berndtsson, J. Motruk, A. Szasz, J. A. Gross, et al. Thermalization and criticality on an analogue–digital quantum simulator. *Nature*, 638:79–85, 2025.

[31] D. Motlagh, R. A. Lang, P. Jain, J. A. Campos-Gonzalez-Angulo, W. Maxwell, T. Zeng, A. Aspuru-Guzik, and J. M. Arrazola. Quantum algorithm for vibronic dynamics: Case study on singlet fission solar cell design. *Quantum Science and Technology*, 10(4):045048, 2025.

[32] S. J. Evered, M. Kalinowski, A. A. Geim, T. Manovitz, D. Bluvstein, S. H. Li, N. Maskara, H. Zhou, S. Ebadi, M. Xu, J. Campo, M. Cain, S. Ostermann, S. F. Yelin, S. Sachdev, M. Greiner, V. Vuletić, and M. D. Lukin. Probing the Kitaev honeycomb model on a neutral-atom quantum computer. *Nature*, 645:341–347, 2025.

[33] O. Katz, A. Schuckert, T. Wang, E. Crane, A. V. Gorshkov, and M. Cetina. Hybrid digital-analog protocols for simulating quantum multi-body interactions. *arXiv preprint arXiv:2512.21385*, 2025.

[34] S. Kanasugi, R. Toshio, K. Maruyama, and H. Oshima. Enabling chemically accurate quantum phase estimation in the early fault-tolerant regime. *arXiv preprint arXiv:2603.22778*, 2026.

[35] A. Miessen, P. J. Ollitrault, F. Tacchino, and I. Tavernelli. Quantum algorithms for quantum dynamics. *Nature Computational Science*, 3(1):25–37, 2023.

[36] M. P. A. Fisher, V. Khemani, A. Nahum, and S. Vijay. Random quantum circuits. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 14:335–379, 2023.

[37] F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, J. C. Bardin, R. Barends, et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, 574(7779):505–510, 2019.

[38] H.-S. Zhong, H. Wang, Y.-H. Deng, M.-C. Chen, L.-C. Peng, Y.-H. Luo, et al. Quantum computational advantage using photons. *Science*, 370(6523):1460–1463, 2020.

[39] D. Hangleiter and J. Eisert. Computational advantage of quantum random sampling. *Reviews of Modern Physics*, 95(3):035001, 2023.

[40] X. Mi, P. Roushan, C. Quintana, S. Mandrà, J. Marshall, C. Neill, et al. Information scrambling in quantum circuits. *Science*, 374(6574):1479–1483, 2021.

[41] X. Mi, M. Ippoliti, C. Quintana, A. Greene, Z. Chen, J. Gross, et al. Time-crystalline eigenstate order on a quantum processor. *Nature*, 601(7894):531–536, 2022.

[42] R. C. Farrell, M. Illa, A. N. Ciavarella, and M. J. Savage. Quantum simulations of hadron dynamics in the Schwinger model using 112 qubits. *Physical Review D*, 109(11):114510, 2024.

[43] J. Robledo-Moreno, M. Motta, H. Haas, A. Javadi-Abhari, P. Jurcevic, W. Kirby, et al. Chemistry beyond exact solutions on a quantum-centric supercomputer. *Nature*, 2025.

[44] B. Bertini, P. Kos, and T. Prosen. Exact correlation functions for dual-unitary lattice models in $1+1$ dimensions. *Physical Review Letters*, 123(21):210601, 2019.

[45] B. Skinner, J. Ruhman, and A. Nahum. Measurement-induced phase transitions in the dynamics of entanglement. *Physical Review X*, 9(3):031009, 2019.

[46] E. van den Berg, Z. K. Minev, A. Kandala, and K. Temme. Probabilistic error cancellation with sparse Pauli–Lindblad models on noisy quantum processors. *Nature Physics*, 19(8):1116–1121, 2023.

[47] S. Filippov, M. Leahy, M. A. C. Rossi, and G. García-Pérez. Scalable tensor-network error mitigation for near-term quantum computing. *arXiv preprint arXiv:2307.11740*, 2023.