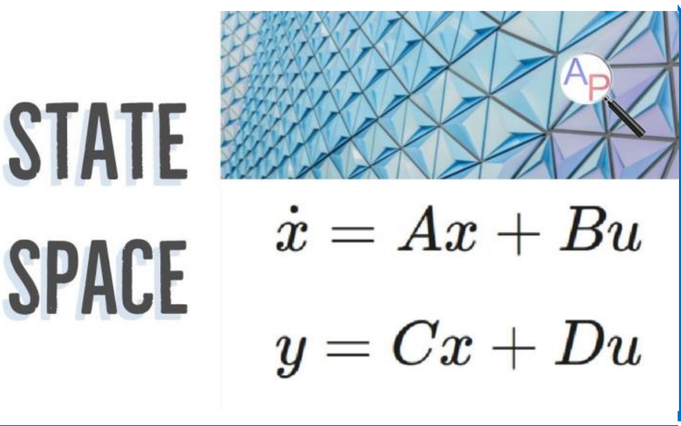
Fakultas
TEKNIK
UNIVERSITAS DIPONEGORO

BUKU AJAR

SISTEM KONTROL MULTIVARIABEL



Disusun oleh:
Sumardi

Diterbitkan oleh:
UNDIP PRESS
UNIVERSITAS DIPONEGORO SEMARANG

ISBN: XXX-XXX-XXXX-XX-X

BUKU AJAR

SISTEM KONTROL MULTIVARIABEL

Mata Kuliah	: Sistem Kontrol Multivariabel
Program Studi	: Teknik Elektro
Fakultas	: Teknik

Disusun oleh:

Sumardi

LEMBAGA PENGEMBANGAN DAN PENJAMINAN MUTU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS DIPONEGORO
SEMARANG
2019

BUKU AJAR

SISTEM KONTROL MULTIVARIABEL

Disusun oleh:

Sumardi

Mata Kuliah	: Sistem Kontrol Multivariabel
SKS	: 3 SKS
Semester	: 5
Program Studi	: Teknik Elektro
Fakultas	: Teknik

Diterbitkan oleh:

UNDIP PRESS
UNIVERSITAS DIPONEGORO SEMARANG
Jl. Prof. Sudarto, SH – Kampus Tembalang, Semarang

xxx hal + xiv

ISBN: XXX-XXX-XXXX-XX-X

Revisi 0, Tahun 2019

Dicetak oleh:

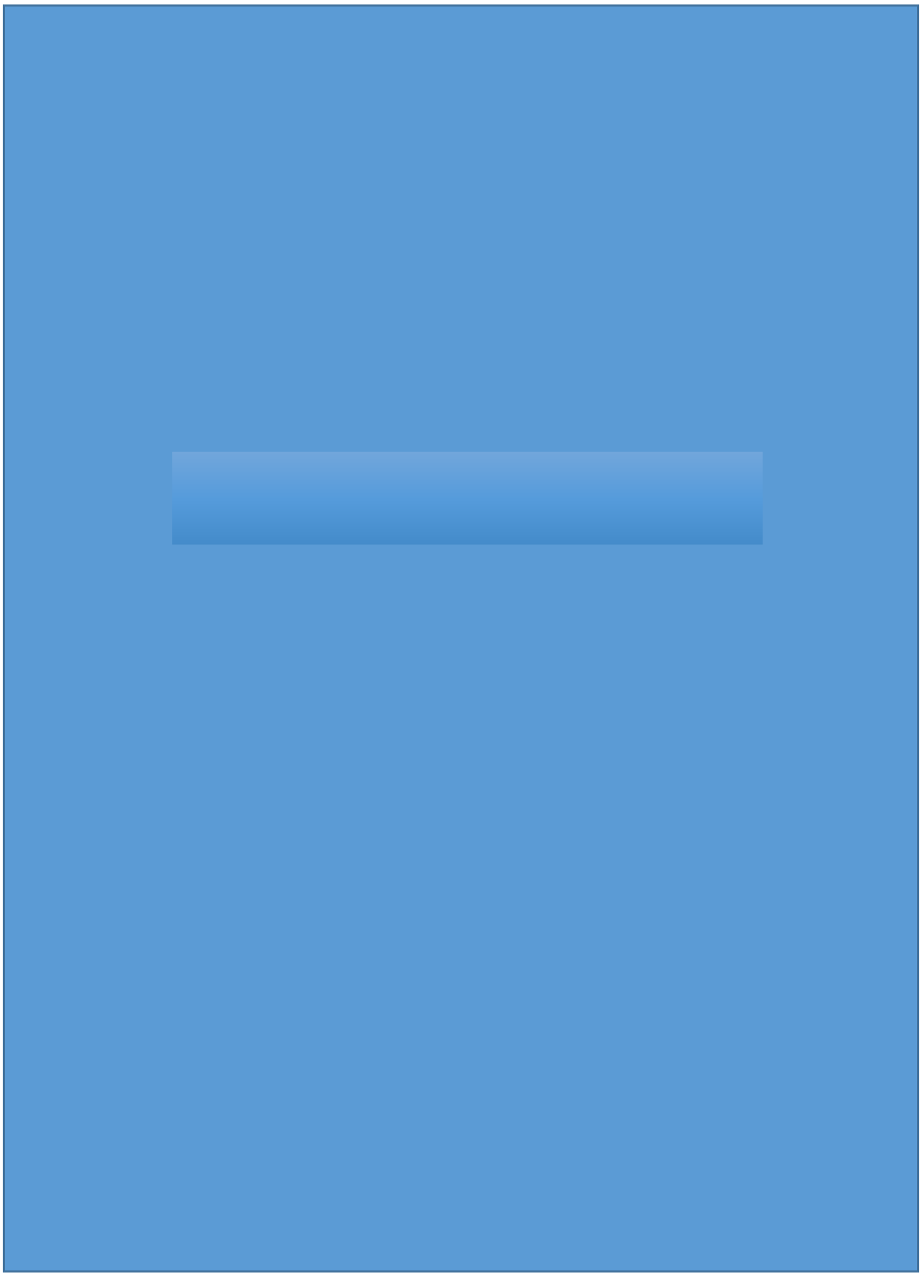
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

PERSEMBAHAN

Buku ini kami dedikasikan untuk mahasiswa
Program Studi Teknik Elektro,
Fakultas Teknik,
Universitas Diponegoro

ANALISIS PEMBELAJARAN

Commented [U1]: FLOWCHART.....DIDISKUSIKAN



KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Kuasa, yang telah memberikan rahmat dan karuniaNya, sehingga buku ajar sistem kontrol multivariabel ini dapat diselesaikan dengan baik. Pembahasan materi pada buku ajar ini dilakukan dengan cara memaparkan landasan matematika untuk teknik kontrol modern dan dasar-dasar kontrol modern khususnya tentang sistem kontrol multivariabel.

Isi buku ajar ini mencakup materi pokok sistem kontrol multivariabel yakni : matriks, pendekatan ruang keadaan, hubungan antara fungsi alih, penurunan state space melalui diagram simulasi, transformasi persamaan keadaan, serta umpan balik variable keadaan.

Pada kesempatan ini penyusun menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penyusun dalam menyelesaikan bahan ajar ini. Mudah - mudahan bahan ajar ini dapat memberikan sedikit manfaat bagi para mahasiswa pada umumnya yang mengambil mata kuliah mikroprosesor.

Penulis

Email: xxxx@xxxx.xxx

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

TINJAUAN MATA KULIAH

I. Deskripsi Singkat

Mata kuliah ini berisi mengenai matriks, pendekatan ruang keadaan, hubungan antara fungsi alih dan penyajian ruang keadaan, penurunan state space melalui diagram simulasi, transformasi persamaan keadaan, serta umpan balik variable keadaan.

II. Relevansi

Pokok bahasan ini merupakan dasar yang harus dikuasai untuk mempelajari pokok bahasan selanjutnya.

III. Capaian Pembelajaran

1. Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK)

Mahasiswa memahami matematika untuk teknik kontrol modern dan dasar-dasar control modern. Mahasiswa memahami metode analisis dan perancangan sistem multivariabel.

2. Sub-Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

Mahasiswa mampu memahami materi-materi yang akan dipelajari dalam kuliah Sistem Kontrol Multivariabel dan tatacara perkuliahan dan penilaian. :

3. Indikator

Mahasiswa mampu menjelaskan Sistem Kontrol Multivariable secara umum:

a. Ketepatan dalam menjelaskan dan meyelesaikan aljabar matrik, funsi alih dan diagram blok
b. Ketepatan menjelaskan pendekatan ruang keadaan
c. Ketepatan menjelaskan penyajian ruang keadaan suatu sistem
d. Ketepatan Menurunkan persamaan ruang keadaan dari fungsi alih dan controller canonical form

e. Ketepatan Menurunkan persamaan ruang keadaan dari fungsi alih dan observer canonical form
f. Ketepatan Menurunkan persamaan ruang keadaan ke bentuk diagonal dan jordan canonical form
g. Ketepatan Menjelaskan keterkontrolaln dan menentukan sistem terkontrol atau tidak
h. Ketepatan Menjelaskan keterkontrolan dan menentukan sistem teramati atau tidak
i. Ketepatan dalam merancang sistem kontrol umpan balik keadaan dengan metode Bass Gura
j. Ketepatan dalam merancang sistem kontrol umpan balik keadaan dengan metode peletakan pole

BAB 1
PENDAHULUAN

I. Sub-Pokok Bahasan I Ke-1

1. Pendahuluan

1.1. Deskripsi Singkat

Sistem Kontrol Multivariable merupakan cabang dari ilmu kontrol yang mempelajari bagaimana suatu sistem yang mempunyai variable jamak dapat di kendalikan dengan menggunakan metode kontrol yang sesuai sehingga diperoleh keluaran sistem dengan tanggapan atau kinerja yang di kehanedaki. Untuk memepelajari sistem kontrol multivariable ini mahasiswa harus sudah menguasai: 1. Teori Matriks dan Vektor , 2. Operasi Matriks dan Vektor, 3. Terminologi dari analisa Matriks dan 4. Dasar Sistem Kontrol.

1.2. Relevansi

Pokok bahasan ini merupakan dasar yang harus dikuasai untuk mempelajari pokok bahasan selanjutnya.

1.3. Capaian Pembelajaran

1.3.1 Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK)

Mahasiswa mampu memahami (C2) materi-materi yang akan dipelajari dalam kuliah Dasar Sistem Kontrol dan tatacara perkuliahan dan penilaian.

1.3.2. Sub-Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

Mahasiswa mampu dalam menjelaskan Sistem Kontrol Multivariable secara umum dan tepat.

2. Penyajian

MATRIKS

Dalam menurunkan model matematik sistem kontrol modern, kita temui bahwa persamaan differensial yang terlibat mungkin cukup rumit karena keanekaragaman masukan dan keluaran. Pada kenyataannya, banyaknya masukan dan keluaran suatu sistem yang kompleks dapat mencapai ratusan. Untuk menyederhanakan ekspresi matematik dari persamaan sistem, sebaiknya digunakan notasi matriks-vektor. Sebenarnya untuk kerja teoritis, penyederhanaan notasi yang diperoleh dengan menggunakan operasi ini adalah sangat mudah, terutama untuk analisis dan sintesis sistem kontrol modern dalam hal ini sistem kontrol multivariabel.

- **Definisi Matriks**

Matriks

Matriks didefinisikan sebagai suatu susunan segiempat dari elemen-elemen yang dapat berupa bilangan nyata, bilangan kompleks, fungsi, atau operasi. Pada umumnya, banyak kolom tidak perlu sama dengan banyak baris. Bentuk umum dari matriks adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2m} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Dimana a_{ij} menyatakan elemen ke (i,j) matriks A. Matriks ini mempunyai n baris dan m kolom dan disebut matriks n x m, indeks pertama menyatakan banyak baris dan indeks kedua menyatakan banyak kolom.

Kesamaan Dua Buah Matriks

Dua buah matriks dikatakan sama jika dan hanya jika elemen-elemen yang saling berkaitan mempunyai harga yang sama. Tentunya jumlah baris dan kolom kedua matriks tersebut adalah sama.

Vektor

Suatu matriks yang hanya mempunyai satu baris, seperti :

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & . & . & x_n \end{bmatrix}$$

disebut vektor baris.

Suatu matriks yang hanya mempunyai satu kolom, seperti :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

disebut vektor kolom.

Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang mempunyai baris dan kolom yang sama jumlahnya. Matriks ini sering disebut *matriks orde n*.

Matriks Diagonal

Jika elemen-elemen selain diagonal utama matriks persegi A adalah nol, maka A disebut matriks diagonal dan ditulis sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & 0 \\ . & a_{22} & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & . & . & a_{nm} \end{bmatrix} = \left(a_{ij}, \delta_{ij}\right)$$

Dimana δ_{ij} adalah delta Kronecker yang didefinisikan sebagai :

$\delta_{ij} = 1$ jika i = j

$\delta_{ij} = 0$ jika i $\neq$ j

Matriks Identitas atau Matriks Satuan

Matriks identitas atau matriks satuan I adalah matriks yang elemen diagonal utamanya sama dengan satu sedangkan elemen lainnya adalah nol.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya adalah nol.

Determinan Matriks

Setiap matriks persegi mempunyai suatu harga determinan. Determinan ini mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

1. Jika dua baris atau dua kolom yang berurutan ditukar, maka harga determinannya berubah tanda.
2. Jika terdapat baris atau kolom yang hanya terdiri dari elemen nol, maka harga determinan adalah nol.

3. Jika elemen-elemen suatu baris / kolom tepat sama dengan k kali elemen-elemen baris / kolom yang lain, maka harga determinan adalah nol.
4. Jika pada suatu baris / kolom ditambahkan suatu konstanta yang dikalikan dengan baris atau kolom yang lain, maka harga determinan tidak berubah.
5. Jika suatu determinan dikalikan dengan konstanta, maka hanya satu baris atau kolom yang dikalikan dengan konstanta tersebut. Oleh karena itu determinan dari k kali matriks persegi A n x n sama dengan k^n kali determinan A, atau

$$|kA| = k^n |A|$$

6. Determinan dari hasil kali dua buah matriks A dan B sama dengan hasil kali determinan-determinannya, atau

$$|AB| = |A||B|$$

Matriks Singular

Suatu matriks persegi disebut *singuler* jika determinannya sama dengan nol. Pada matriks singuler tidak semua baris/kolom saling tidak bergantungan.

Matriks Nonsinguler

Suatu matriks persegi disebut *nonsinguler* jika determinannya tidak nol

Transpose

Jika baris dan kolom matriks A *n x m* ditukar, matriks m x n yang diperoleh disebut *transpose* matriks A. Transpose matriks A dinyatakan dengan A'. Misal, jika A diberikan sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2m} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Maka A' diberikan oleh

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & . & . & . & a_{n2} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{1m} & a_{2m} & . & . & . & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- **Aljabar Matriks**

Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua buah matriks A dan B dapat dijumlahkan apabila jumlah baris dan kolom kedua matriks sama. Jika $A = (a_{ij})B = (b_{ij})$, maka A + B terdefinisi sebagai

A + B = $(a_{ij} + b_{ij})$

Jadi tiap elemen A ditambahkan dengan elemen B pasangannya. Dengan cara yang sama, pengurangan matriks didefinisikan sebagai

A – B = $(a_{ij} - b_{ij})$

Perkalian Matriks dengan Skalar

Hasil perkalian suatu matriks dengan suatu skalar adalah suatu matriks yang tiap elemennya dikalikan dengan skalar tersebut.

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{21} & . & . & . & ka_{n1} \\ a_{12} & ka_{22} & . & . & . & ka_{n2} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ ka_{1m} & ka_{2m} & . & . & . & ka_{nm} \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks dengan Matriks

Perkalian matriks hanya dapat dilakukan apabila matriks-matriks yang akan dikalikan adalah “comformable”, yang artinya bahwa banyaknya kolom matriks pertama harus sama dengan banyaknya baris matriks yang kedua. Jika tidak, maka perkalian matriks menjadi tidak terdefinisi.

Misal matriks A *n x m* dikalikan matriks B *m x p*. Selanjutnya,hasil perkalian AB, yang kita baca “A dikalikan di belakang (postmultiplied) dengan B” atau “B dikalikan di depan (premultiplied) dengan A”, didefinisikan sebagai berikut :

$$AB = C = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right) \qquad (i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,p)$$

Matriks hasil kali C adalah matriks *n x p*. Harus diperhatikan bahwa sekalipun A dan B dapat dioperasikan untuk perkalian AB, bukan berarti dapat dioperasikan untuk perkalian BA, dalam hal ini BA tidak terdefinisi. Hukum asosiatif dan distributif berlaku untuk perkalian matriks

$$(AB)C = A(BC)$$
$$(A + B)C = AC + BC$$
$$C(A + B) = CA + CB$$

Matriks Berpangkat

Matriks persegi A pangkat k didefinisikan sebagai

$$A^k = \underbrace{AA\ldots A}_{k}$$

- **Pembalikan matriks (Matriks inversion)**

Minor M_{ij}

Jika baris ke i dan kolom ke j dari matriks A *n x n* dihilangkan, maka matriks yang dihasilkan adalah matriks $(n-1)x(n-1)$. Determinan dari matriks $(n-1)x(n-1)$ ini disebut minor M_{ij} dari matriks A.

Kofaktor A_{ij}

Kofaktor A_{ij} dari elemen a_{ij} matriks A didefinisikan oleh persamaan

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Jadi kofaktor A_{ij} dari elemen a_{ij} adalah $(-1)^{i+j}$ kali determinan matriks yang dibentuk dengan menghilangkan baris ke I dan kolom ke j dari A. Perhatikan bahwa kofaktor A_{ij} dari elemen a_{ij} adalah koefisien dari suku a_{ij} pada penguraian determinan $|A|$ karena dapat ditunjukkan bahwa

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots a_{in}A_{in} = |A|$$

Jika $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ diganti dengan $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}$ maka

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \ldots a_{jn}A_{in} = 0 \quad (i \neq j)$$

Matriks Adjoint

Matriks B dengan elemen pada baris ke i dan kolom ke j sama dengan A_{ij} disebut matriks adjoint dari A dan dinyatakan dengan adj A atau

$B = (b_{ij}) = (A_{ij}) =$ **adj A**

Jadi, matriks adjoint dari A adalah transpose dari matriks yang elemennya adalah kofaktor dari A atau

$$\text{adj A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & . & . & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & . & . & . & A_{n2} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ A_{1m} & A_{2m} & . & . & . & A_{nm} \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa elemen baris ke j dan kolom ke i dari hasil kali A(adj A) adalah

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{ik} = \delta_{ji} |A|$$

Jadi A (adj A) adalah suatu matriks diagonal dengan elemen diagonal yang sama dengan $|A|$.

Jadi

A (adj A) = $|A|$ I

Dengan cara yang sama, elemen baris ke j dan kolom ke i dari hasil kali (adj A) A adalah

$$\sum_{k=1}^{n} b_{jk} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} a_{ik} = \delta_{ji} |A|$$

Sehingga kita peroleh hubungan

A (adj A) = (adj A) = $|A|$ I..(1)

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \quad = (3-4+0)-(-18) = 17$$

- - + +

$$\text{adj A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 7 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

dengan demikian

$$A\ (\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 7 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix} = 17 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\, I$$

Matriks Balik (matriks invers)

Jika, untuk suatu matriks persegi A terdapat suatu matriks B sedemikian sehingga BA=AB=I, maka B dinyatakan sebagai A^{-1} dan disebut matriks balik dari A. Matriks balik dari A ada jika determinan A tidak berharga nol atau A adalah matriks nonsingular.

Dari definisi, matriks balik A^{-1} mempunyai sifat bahwa

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

Dimana I adalah matriks identitas. Jika A matriks nonsingular dan AB = C, maka B= A^{-1} C. Ini dapat dilihat pada persamaan

$$A^{-1} AB = IB = A^{-1} C$$

Selanjutnya

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Dari persamaan (1) dan definisi matriks balik, maka diperoleh

$$\boxed{A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}}$$

Jadi kebalikan dari suatu matriks (invers matriks) adalah transpose dari matriks kofaktornya, dibagi dengan determinan matriks asal. Jika A diberikan oleh

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & . & . & . & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & . & . & . & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & . & . & . & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

Dimana A_{ij} adalah kofaktor a_{ij} dari matriks A. Jadi elemen-elemen pada kolom ke i dari A^{-1} adalah $1/|A|$ kali dari kofaktor-kofaktor baris ke i dari matriks asal A.

Berikut ini diberikan rumus untuk mencari mariks balik untuk matriks 2 x 2 dan matriks 3 x 3:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, ad - bc \neq 0$$

Matriks balik diberikan oleh

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, |B| \neq 0$$

Matriks balik diberikan oleh

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Eigenvalue Matriks

Eigenvalue dari suatu matriks A n x n adalah akar persamaan karakteristik.

$$|\lambda I - A| = 0$$

FUNGSI ALIH

Dalam teori kontrol, fungsi yang disebut “fungsi alih” sering digunakan untuk mencirikan hubungan masukan dan keluaran dari sistem linier parameter konstan. Konsep fungsi alih hanya digunakan pada sistem linier parameter konstan, walaupun dapat diperluas untuk suatu sistem kontrol nonlinier.

Fungsi alih sistem linier parameter konstan didefinisikan sebagai perbandingan dari transformasi Laplace keluaran (fungsi respon) dan transformasi Laplace masukan (fungsi penggerak), dengan anggapan bahwa semua syarat awal adalah nol.

Tinjau sistem linier parameter konstan yang didefinisikan persamaan diferensial berikut :

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_{1y} \overset{(n-1)}{} + \ldots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 \overset{m}{x} + \overset{(m-1)}{b_1} x + \ldots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x \qquad (n \geq m)$$

Dimana y adalah keluaran sistem dan x adalah masukan. Fungsi alih dari sistem ini diperoleh dengan mencari transformasi Laplace dari kedua ruas persamaan diatas, dengan anggapan bahwa semua syarat awal adalah nol atau

Fungsi alih = $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$

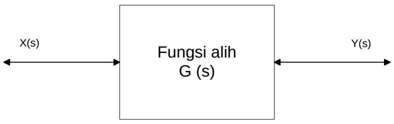
DIAGRAM BLOK

Suatu sistem kontrol dapat terdiri dari beberapa komponen. Untuk menunjukkan fungsi yang dilakukan oleh tiap komponen, dalam teknik kontrol, biasanya kita menggunakan suatu diagram yang disebut “diagram blok”.

Diagram blok

Diagram blok suatu sistem adalah suatu penyajian bergambar dari fungsi yang dilakukan oleh tiap komponen dan aliran sinyalnya. Diagram ini melukiskan hubungan timbal balik yang ada antara beberapa komponen. Berbeda dengan penyajian matematik yang abstrak belaka, diagram blok mempunyai keunggulan dalam menunjukkan aliran sinyal yang lebih nyata pada sistem yang sebenarnya.

Dalam suatu diagram blok, semua variabel sistem saling dihubungkan dengan menggunakan blok fungsional. “Blok fungsional” atau biasa disebut “blok” adalah suatu simbol operasi matematik pada sinyal masukan blok yang menghasilkan keluaran. Fungsi alih dari komponen biasanya ditulis dalam blok, yang dihubungkan dengan anak panah untuk menunjukkan arah aliran sinyal. Perhatikan bahwa sinyal hanya dapat mengalir pada arah yang ditunjukkan oleh anak panah. Jadi, diagram blok suatu sistem secara eksplisit menunjukkan suatu sifat searah.

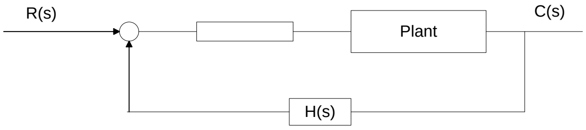


Gambar 1.1 Diagram Blok Fungsi Alih

Perhatikan bahwa dimensi sinyal keluaran dari blok sama dengan dimensi sinyal masukan dikalikan dengan dimensi fungsi alih dalam blok. Keunggulan penyajian diagram blok terletak pada kenyataan bahwa mudah untuk membentuk diagram blok keseluruhan sistem hanya dengan menghubungkan blok-blok komponen sesuai dengan aliran sinyal dan memungkinkan perhitungan kontribusi tiap komponen pada performansi keseluruhan sistem.

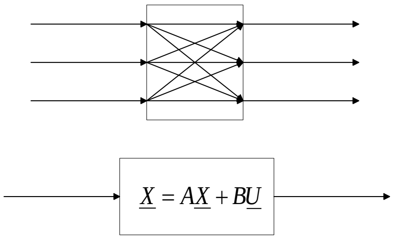
Dalam sistem kontrol menurut input outputnya sistem terbagi atas :

- SISO (Single Input Single Output)



Gambar 1.2 Diagram Blok SISO (Single Input Single Output)

- MIMO (Multi Input Multi Output)



Gambar 1.3 Diagram Blok MIMO (Multi Input Multi Output)

BAB II

PENDEKATAN RUANG KEADAAN (*STATE SPACE*)

1. Keterbatasan Teori Kontrol Konvensional

1. Pendahuluan

1.1. Deskripsi Singkat

Pokok bahasan ini berisikan pengetahuan tentang keterbatasan teori kontrol konvensional, pendekatan baru dalam analisis dan desain sistem kontrol pada teori kontrol modern serta perbandingan teori kontrol modern dengan teori kontrol konvensional.

1.2. Relevansi

Pokok bahasan ini merupakan dasar yang harus dikuasai untuk mempelajari pokok bahasan selanjutnya.

1.3. Capaian Pembelajaran

1.3.1. Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK)

Setelah mempelajari materi ini mahasiswa mampu menjelaskan keterbatasan teori kontrol konvensional serta mampu membandingkan perbandingan teori kontrol modern dengan teori kontrol konvensional.

1.3.2. Sub-Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

Setelah mempelajari materi ini mahasiswa mampu menjelaskan tentang teori kontrol konvensional, teori kontrol modern serta perbandingan teori kontrol modern dengan teori kontrol kovensional.

2. Penyajian

2.1. Sub Pokok Bahasan

A. Keterbatasan Teori Kontrol Konvensional

Teknik-teknik dari teori kontrol konvensional secara konseptual adalah sederhana dan hanya memerlukan sedikit perhitungan yang tdak terlalu banyak. Pada teori konvensional yang dianggap penting hanyalah sinyal-sinyal masukan, keluaran, dan sinyal kesalahan; analisis dan desain sistem kontrol dilakukan dengan menggunakan fungsi alih, bersama-sama dengan teknik grafis seperti diagram tempat kedudukan akar dan diagram *Nyquist*. Karakteristik unik dari teori konvensional adalah bahwa karakteristik tersebut ditentukan oleh hubungan antara masukan dan keluaran sistem atau fungasi alih.

Kelemahan pokok dari teori kontrol konvensional adalah bahwa, pada umumnya, teori ini hanya dapat diterapkan pada sistem linier parameter konstan (*time-invariant*) yang mempunyai satu masukan dan satu keluaran. Teori ini tidak dapat diterapkan unutk sistem parameter berubah (*line-varying*), sistem *non-linier* (kecuali yang sederhana), dan sistem multi masukan - multi keluaran. Jadi teknik-teknik konvensional (metode tempat kedudukan akar dan metode respon frekuensi) tidak dapat diterapkan untuk mendesain sistem kontrol optimal dan sitem kontrol adaptif, yang sebagian besar merupakan sistem parameter berubah dan atau *non-linier*.

B. Pendekatan baru dalam analisis dan desain sistem kontrol – Teori Kontrol Modern

Kecenderungan modern dalam sistem rekayasa adalah menuju sistem yang semakin kompleks, terutama karena disebabkan oleh kebutuhan tugas yang semakin kompleks dan ketelitian yang bagus. Sistem-sistem yang kompleks mungkin mempunyai multi masukan dan multi keluaran dan mungkin parameternya berubah terhadap waktu. Karena perlu penyesuaian antara persyaratan performansi sistem kontrol yang semakin berat, semakin kompleksnya sistem, dan kemudahan perhitungan pada komputer besar, maka teori kontrol modern yang merupakan pendekatan baru dalam analisis dan desain sistem kontrol yang semakin kompleks telah dikembangkan sejak 1960. Pendekatan ini didasarkan pada konsep keadaan. Konsep keadaan sendiri bukan merupakan hal baru karena telah lama digunakan dalam bidang dinamika klasik dan bidang-bidang lainnya.

C. Perbandingan Teori Kontrol Modern dan Teori Konvensional

Teori kontrol modern dapat diterapkan pada sistem multi masukan - multi keluaran, baik linier atau non linier, parameter konstan atau parameter berubah. Sedang teori konvensional hanya dapat diterapkan pada sistem satu masukan dan satu keluaran, linier, dan parameter konstan. Di samping itu, pada dasarnya teori kontrol modern merupakan pendekatan berwawasan frekuensi.

Desain sistem dalam teori kontrol klasik didasarkan pada prosedur coba-coba, yang pada umumnya tidak akan menghasilkan sitem kontrol optimal. Sebaliknya, desain sistem dalam teori kontrol modern adalah insinyur kontrol untuk mendesain sistem kontrol yang optimal terhadap indeks performansi yang diberikan. Di samping itu, desain dalam sistem kontrol modern dapat dilakukan untuk satu kelompok masukan, bukan lagi merupakan satu fungsi masukan tertentu, seperti fungsi impuls, fungsi tangga atau fungsi sinusoida. Teori kontrol modern juga memungkinkan insinyur kontrol untuk memasukkan syarat awal dalam desain.

2.2. Latihan

1. Sebutkan kelemahan teori kontrol konvensional.

   Beberapa kelemahan dari teori kontrol konvensional adalah sebagai berikut:

   - tidak dapat mengontrol pergerakan menggunakan delay waktu
   - tidak cukup akurat
   - kualitasnya mungkin tidak dapat mencukupi beberapa sistem
   - hanya menerima input berupa biner

2. Sebutkan kelemahan dari teori kontrol modern.

   Kelemahan dari teori kontrol modern yaitu tekniknya yang kompleks serta komputasi yang dibutuhkan dalam jumlah besar.

3. Penutup

3.1. Rangkuman

1. Teori kontrol konvensional tidak dapat diterapkan unutk sistem parameter berubah (*line-varying*), sistem *non-linier* (kecuali yang sederhana), dan sistem multi masukan-multi keluaran.
2. Teknik kontrol konvensional (metode tempat kedudukan akar dan metode respon frekuensi) tidak dapat diterapkan untuk mendesain sistem kontrol optimal dan sitem kontrol adaptif.
3. Teori kontrol modern merupakan pendekatan berwawasan frekuensi.
4. Teori kontrol modern dapat diterapkan pada sistem multi masukan - multi keluaran, baik linier atau non linier, parameter konstan atau parameter berubah.

3.2. Tes Formatif

1. Sebutkan kelebihan dari teori kontrol konvensional dan modern.
2. Jelaskan perbedaan teori kontrol konvensional dan modern, serta metode kontrol dari kedua teori kontrol tersebut.

3.3. Umpan Balik

Tabel 2.1 Umpan Balik

No.	Nilai	Komentar
1	Di atas 80	Excellent
2	80-60	Good
3	Kurang dari 60	Not good

3.4. Tindak Lanjut

(Apa yang harus dilakukan untuk menindaklanjuti hasil test formatif)

Tabel 2.2 Tindak Lanjut

No.	Nilai	Tindak Lanjut
1	Di atas 80	Silahkan lanjutkan ke materi berikutnya
2	80-60	Maaf Anda belum bisa melanjutkan ke materi berikutnya, pelajari lagi materi ini terutama pada bagian yang belum Anda jawab dengan benar
3	Kurang dari 60	Maaf Anda belum bisa melanjutkan ke materi berikutnya, pelajari lagi materi ini seluruhnya

3.5. Kunci Jawaban Test Formatif

1. Kelebihan dari teori kontrol klasik adalah konfigurasi sistem yang relatif lebih mudah serta tidak membutuhkan teknik yang kompleks maupun komputasi dalam jumlah besar. Sedangkan kelebihan dari teori kontrol modern adalah mempunyai sistem yang cukup akurat serta tingkat presisi yang tinggi.

2. Pada dasarnya teori kontrol modern merupakan pendekatan berwawasan frekuensi. Teori kontrol modern dapat diterapkan pada sistem multi masukan - multi keluaran, baik linier atau non linier, parameter konstan atau parameter berubah. Sedangkan teori konvensional hanya dapat diterapkan pada sistem satu masukan dan satu keluaran, linier, dan parameter konstan.

Salah satu contoh metode kontrol dari teori kontrol klasik adalah kontrol on/off, menggunakan kontroler PID, sedangkan pada teori kontrol modern menggunakan teknik kontrol adaptive, salah satunya menggunakan kontroler fuzzy.

Daftar Pustaka

[1] Derusso.P.M.et.al. : "State Variables for Engineers", John Wiley & Sons Inc.,1965.
[2] Chen, C.T. : "Linear System Theory and Design", Hold-Saunders International,1984.
[3] Kailath,T. : "Linear Systems", Prentice-Hall, New Jersey 1981.
[4] Apte,Y.S. : "Linier Multivariabel Control Theory", Tata McGraw-Hill, New Delhi,1981.
[5] Chen, C.T. : "Linear System Theory and Design", Hold-Saunders International,1984.
[6] Maciejowski,J.M : "Multivariable Feedback Design", Addison Wesley Pubs,Cornwall, 1994
[7] lpsa.swarthmore.edu/Representations/SysRepSS.html

II. Pendekatan Ruang Keadaan (*State Space*)

1. Pendahuluan

1.1. Deskripsi Singkat

Pokok bahasan ini berisikan pengetahuan tentang keadaan (*state*) serta penyajian/metode untuk merepresentasikan ruang keadaan (*state space*) dari sistem.

1.2. Relevansi

Pokok bahasan ini merupakan dasar yang harus dikuasai untuk mempelajari pokok bahasan selanjutnya

1.3. Capaian Pembelajaran

1.3.1. Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK)

Setelah menyelesaikan pokok bahasan ini, mahasiswa mampu menjelaskan mengenai pendekatan ruang keadaan suatu sistem.

1.3.2. Sub-Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

Setelah mempelajari materi ini mahasiswa mampu menjelaskan tentang persamaan *state space*.

2. Penyajian

2.1. Sub Pokok Bahasan

A. Keadaan (state)

Keadaan suatu sistem dinamik adalah himpunan terkecil dari variabel-variabel (yang disebut variabel keadaan) sedemikian rupa hingga dengan mengetahui variabel-variabel ini pada $t = t_0$, bersama-sama dengan masukan untuk $t \geq t_0$, kita dapat menentukan secara lengkap perilaku sistem untuk setiap waktu $t \geq t_0$.

Jadi, keadaan suatu sistem dinamik pada saat t secara unik ditentukan oleh keadaan tersebut pada $t = t_0$ dan masukan untuk $t \geq t_0$, dan tidak bergantung pada keadaan dan masukan sebelum t_0. Perhatikan bahwa dalam membahas sistem linier parameter konstan, biasanya kita pilih waktu acuan t_0 sama dengan nol.

B. Variabel Keadaan (*State Variables*)

Variabel keadaan dari suatu sistem dinamik adalah himpunan terkecil dari variabel variabel yang menentukan keadaan sistem dinamik. Jika paling tidak diperlukan *n* variabel $x_1(t), x_2(t),.., x_n(t)$ untuk melukiskan secara lengkap perilaku suatu sistem dinamik, maka *n* variabel $x_1(t), x_2(t),.., x_n(t)$ tersebut merupakan suatu himpunan variabel keadaan. Perhatikan bahwa variabel keadaan tidak perlu merupakan besaran yang secara fisis dapat diukur atau diamati. Meskipun demikian secara praktis sebaiknya dipilih variabel keadaan yang merupakan besaran yang dapat diukur secara mudah karena hukum kontrol optimal akan memerlukan umpan balik semua variabel keadaan dengan pembobotan yang sesuai.

C. Vektor Keadaan (*State Vector*)

Jika diperlukan *n* variabel keadaan untuk menggambarkan secara lengkap perilaku suatu sistem yang diberikan, *n* variabel keadaan ini dapat dianggap sebagai *n* komponen suatu vektor x(t). Vektor semacam ini disebut vektor keadaan. Jadi vektor keadaan adalah suatu vektor yang menentukan secara unik keadaan sistem x(t) untuk setiap $t \geq t_0$, setelah diterapkan masukan u(t) untuk $t \geq t_0$.

D. Ruang Keadaan (*State Space*)

Ruang n dimensi yang sumbu koordinatnya terdiri dari sumbu x_1, sumbu x_2 sampai dengan sumbu x_n disebut ruang keadaan. Setiap keadaan dapat dinyatakan dengan suatu titik pada ruang keadaan.

Sistem dinamik yang terdiri dari sejumlah elemen terkumpul dapat digambarkan dengan persamaan diferensial ordiner dengan waktu sebagai variabel bebas. Dengan menggunakan notasi matriks-vektor, persamaan diferensial orde ke-n dapat dinyatakan dengan suatu persamaan diferensial matriks-vektor orde pertama. Jika n elemen vektor tersebut merupakan himpunan variabel keadaan, maka persaman diferensial matriks-vektor tersebut disebut persamaan keadaan.

Secara umum persamaan ruang keadaan sistem dinyatakan dalam bentuk berikut :

$$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = f(x, u, t) \qquad (1)$$

dengan *x* adalah variabel keadaan, *u* menandai input sistem, dan *t* menyatakan variabel waktu. Sebagai catatan, $\dot{x}$ (dibaca x *dot*) adalah simbol yang lazim digunakan untuk menandai turunan pertama dari variabel keadaan. Sementara itu, apabila dilibatkan pernyataan output sistem berikut:

$$y(t) = g(x, u, t) \tag{2}$$

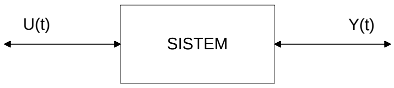
maka persamaan (1)-(2) membentuk dinamika sistem. Untuk sistem linier tak bergantung waktu (*linear time invariant*), persamaan (1) biasanya berbentuk :

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3}$$

dengan *A* dan *B* berbentuk matriks berdimensi sesuai dengan variable keadaan dan inputnya, serta persamaan (2) berbentuk :

$$y = Cx + Du \tag{4}$$

Dalam beberapa literatur, *A* sering disebut sebagai matriks keadaan (*state matrix*) atau matriks sistem, *B* disebut matriks input, *C* dinamai matriks output, *D* adalah matriks transmisi langsung (*direct transmission matrix*). Kadang-kadang sistem ruang keadaan dinyatakan dengan (*A*, *B*, *C*, *D*).



Gambar 2.1 Diagram Blok Sistem

Misal sistem MIMO yang melibatkan n integrator, terdapat:

r masukan $U_1(t), U_2(t), \dots, U_r(t)$

m masukan $Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_m(t)$

n keluaran integrator sehingga variabel keadaan $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$

sehingga persamaan sistem :

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$
$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

keluaran:

$$y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$
$$y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$
$$\vdots$$
$$y_m(t) = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

Jika didefinisikan :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad f(x,u,t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \qquad g(x,u,t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat:

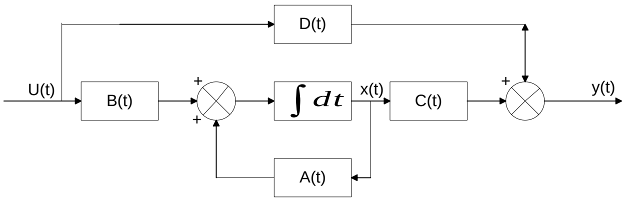
$\dot{x}(t) = f(x,u,t)$ → persamaan keadaan

$y(t) = g(x,u,t)$ → persamaan keadaan

Jika dilinierkan diperoleh

$$\dot{x}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t)$$

$$y(t) = C(t)X(t) + D(t)U(t)$$



Gambar 2.2 Diagram Blok Ruang Keadaan

Bila vektor f dan g tidak eksplisit terhadap t maka

$$\dot{x}(t) = f(x,u)$$

$$\dot{y}(t) = g(x,u)$$

Sehingga dalam bentuk linier

$$\dot{x}(t) = AX(t) + BU(t)$$

$$y(t) = CX(t) + DU(t)$$

2.2. Latihan

1. Tinjau sistem yang didefinisikan :

$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$ y: keluaran sistem

u: masukan sistem

variabel keadaannya sebagai berikut:

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y}$$

selanjutnya diperoleh

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_1 = -6x_2 - 11x_2 - 6x_3 + 6u$$

Persamaan terakhir didapat dengan menyelesaikan persamaan diferensial asal untuk suku turunan tertinggi $\dddot{y}$ dan mensubstitusikan variabel keadaan ke dalam persamaan yang diperoleh.

Berikut notasi matriks-vektor dari persamaan keadaan diatas:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

Persamaan keluaran:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Kedua persamaan diatas ditulis dalam bentuk standar sebagai berikut :

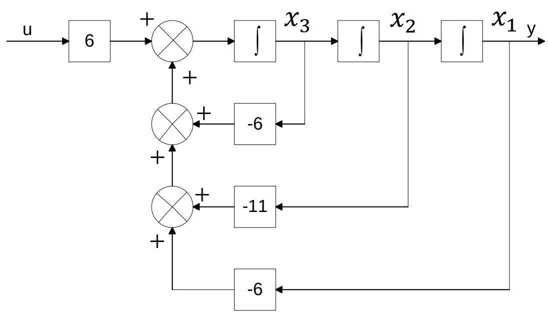
$$x = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Dengan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

Gambar di bawah ini menunjukkan penyajian diagram blok dari persamaan keadaan dan persamaan keluaran di atas. Perhatikan bahwa fungsi alih dari blok-blok umpan balik merupakan negatif dari persamaan diferensial asal.



Gambar 2.3 Diagram Blok Latihan

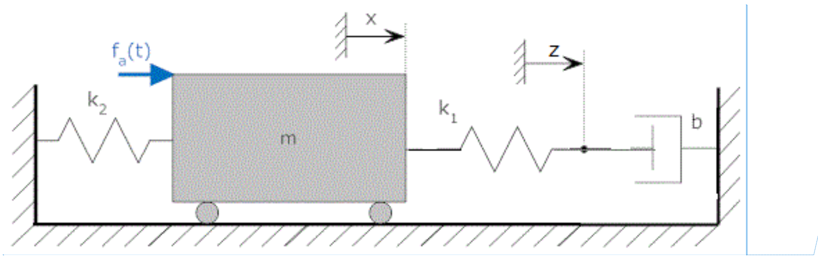
3. Penutup

3.1. Rangkuman

1. Keadaan (*state*) suatu sistem dinamik pada saat t secara unik ditentukan oleh keadaan tersebut pada $t = t_0$ dan masukan untuk $t \geq t_0$, dan tidak bergantung pada keadaan dan masukan sebelum t_0.
2. Variabel keadaan dari suatu sistem dinamik adalah himpunan terkecil dari variabel variabel yang menentukan keadaan sistem dinamik.
3. Vektor keadaan adalah suatu vektor yang menentukan secara unik keadaan sistem x(t) untuk setiap $t \geq t_0$, setelah diterapkan masukan u(t) untuk $t \geq t_0$.
4. Ruang keadaan (*state space*) adalah suatu metode analisis sistem kendali dengan input banyak dan output banyak (*Multiple Input and Multiple Output* / MIMO).

3.2. Test Formatif

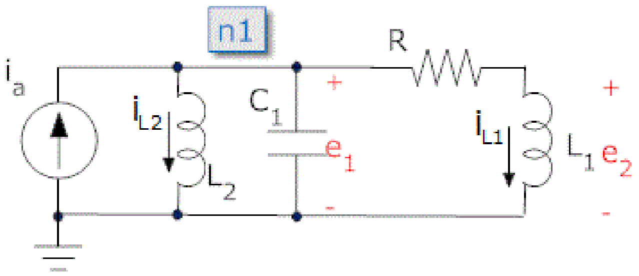
1. Dapatkan persamaan *state space* sistem berikut. Inputnya adalah f_a dan outputnya adalah z.



Commented [U2]: KETERANGA GAMBAR

Gambar 2.4 Sistem Pegas

2. Dapatkan persamaan *state space* sistem berikut. Inputnya adalah i_a dan outputnya adalah e_2.



Gambar 2.5 Rangkaian Listrik

3.3. Umpan Balik

Tabel 2.3 Umpan Balik

No.	Nilai	Komentar
1	Di atas 80	Excellent
2	80-60	Good
3	Kurang dari 60	Not good

3.4. Tindak Lanjut

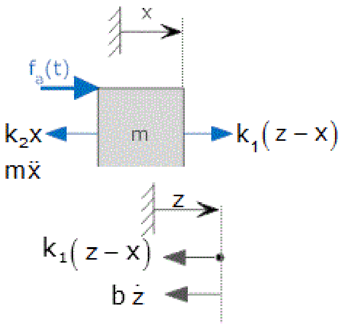
(Apa yang harus dilakukan untuk menindaklanjuti hasil test formatif)

Tabel 2.4 Tindak Lanjut

No.	Nilai	Tindak Lanjut
1	Di atas 80	Silahkan lanjutkan ke materi berikutnya
2	80-60	Maaf Anda belum bisa melanjutkan ke materi berikutnya, pelajari lagi materi ini terutama pada bagian yang belum Anda jawab dengan benar
3	Kurang dari 60	Maaf Anda belum bisa melanjutkan ke materi berikutnya, pelajari lagi materi ini seluruhnya

3.5. Kunci Jawaban Test Formatif

1. Uraian dari sistem di atas adalah sebagai berikut

Freebody Diagram	**Persamaan**
	$m \cdot \ddot{x} + k_1 \cdot x + k_2 \cdot x - k_1 \cdot z = f_a$ $\boldsymbol{b \cdot \dot{z} + k_1 \cdot z - k_1 \cdot x = 0}$

Gambar 2.6 Freebody Diagram

Terdapat 3 sumber energi, jadi dapat dikatakan bahwa terdapat 3 persamaan *state*. Gaya (F) timbul pada spring/pegas (k_2), massa (m), dan spring/pegas (k_1). Maka dari itu x dipilih sebagai *state variables* (energi pada spring/pegas k2 adalah ½ k 2 x²), kecepatan pada x (energi yang timbul karena massa m adalah ½ m v², di mana v adalah turunan pertama dari x), dan y (energi pada spring/pegas k1 adalah ½ k1 (z-x)² , jadi dapat ditentukan z-x sebagai *state variable*, tetapi kita hanya menggunakan z (dikarenakan x sudah berupa *state variable*; mengingat that the choice of state variables is not unique). *State variable*-nya menjadi:

$$q_1 = x$$

$$q_2 = \dot{x}$$

$$q_3 = z$$

Selanjutnya buat persamaan differensial dari ketiga *state variable*

$$\dot{q}_1 = \dot{x} = q_2$$

$$\dot{q}_2 = \ddot{x} = \frac{1}{m}(f_a - k_1x - k_2x + k_1z)$$

$$= \frac{1}{m}(f_a - k_1q_1 - k_2q_1 + k_1q_3)$$

$$\dot{q}_3 = \dot{z} = \frac{k_1}{b}(x - z) = \frac{k_1}{b}(q_1 - q_3)$$

$$\dot{q} = Aq + Bu \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m} & 0 & \frac{k_1}{m} \\ \frac{k_1}{b} & 0 & -\frac{k_1}{b} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = Cq + Du \qquad C = [0 \quad 0 \quad 1] \quad D = 0$$

dengan input u = f_a, dan output y=z

2. Terdapat 3 elemen penyimpanan energi, maka dari itu ada tiga persamaan state. Variabel i1, i2 dan e1 sebagai state variabel. Selanjutnya adalah mencari persamaan derivatifnya. Tegangan yang melewati inductor L2 adalah e1 (di mana e1 adalah salah satu dari state variabelnya.

$$L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = e_1$$

Jadi persamaan state variabel yang pertama adalah

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2} e_1$$

Selanjutnya adalah persamaan Kirchoff CL pada n1 adalah

$$i_a - i_{L2} - i_{C1} - i_{L1} = 0$$

Persamaan mempunyai input (ia), dua state variabel (i_{L2} dan i_{L1}) dan arus yang melalui kapasitor. Maka dari itu didapatkan persamaan state kedua sebagai berikut

$$i_{C1} = C_1 \frac{de_1}{dt} = i_a - i_{L2} - i_{L1}$$

$$\frac{de_1}{dt} = \frac{1}{C_1}(i_a - i_{L2} - i_{L1})$$

Untuk persamaan state terakhir didapatkan melalui persamaan tegangan yang melalui L1 (yang merupakan e2) yang merupakan salah satu dari variabel state.

$$e_2 = L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = e_1 - Ri_{L1}$$

$$\frac{di_{L1}}{dt} = \frac{1}{L_1}(e_1 - Ri_{L1})$$

berikut juga persamaan input dari e2

$$e_2 = e_1 - Ri_{L1}$$

Maka dari itu persamaan *state space*-nya adalah sebagai berikut

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{L2} \\ e_1 \\ i_{L1} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & \frac{1}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = Cx + Du$$

$$C = [0 \quad 1 \quad -R] \qquad D = 0$$

Daftar Pustaka

[8] Derusso.P.M.et.al. : "State Variables for Engineers", John Wiley & Sons Inc.,1965.
[9] Chen, C.T. : "Linear System Theory and Design", Hold-Saunders International,1984.
[10] Kailath,T. : "Linear Systems", Prentice-Hall, New Jersey 1981.
[11] Apte,Y.S. : "Linier Multivariabel Control Theory", Tata McGraw-Hill, New Delhi,1981.
[12] Chen, C.T. : "Linear System Theory and Design", Hold-Saunders International,1984.
[13] Maciejowski,J.M : "Multivariable Feedback Design", Addison Wesley Pubs,Cornwall, 1994

BAB III
HUBUNGAN ANTARA FUNGSI ALIH DAN PENYAJIAN RUANG KEADAAN

I. Hubungan Antara Fungsi Alih dan Penyajian Ruang Keadaan

1. Pendahuluan

1.1. Deskripsi Singkat

Pokok bahasan ini berisikan konsep matrik alih yang merupakan perluasan dari konsep fungsi alih.

1.2. Relevansi

Pokok bahasan ini merupakan dasar yang harus dikuasai untuk mempelajari pokok bahasan selanjutnya.

1.3. Capaian Pembelajaran

1.3.1. Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK)

Mahasiswa mampu menjelaskan (C2) mengenai hubungan antara fungsi dan penyajian ruang keadaan. Dapat membuat persamaan ruang keadaan bentuk controller canonical form

1.3.2. Sub-Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

Setelah mempelajari materi ini mahasiswa mampu menurunkan persamaan ruang keadaan dari fungsi alih dan controller canonical form.

2. Penyajian

2.1. Matriks Alih

Konsep Matrik Alih merupakan perluasan dari konsep alih. Terlebih dahulu mari kita perhatikan persamaan ruang keadaan dan persamaan keluaran sebagai berikut

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

Penyajian ruang keadaan dari sistem :

$$x = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Dimana x adalah vektor keadaan, u adalah masukan dan y adalah keluaran. Transformasi *Laplace* dari keluaran dan masukan dengan syarat awal nol, maka kita anggap bahwa $x(0)$ adalah nol

Transformasi persamaan 1 adalah

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Dengan mengambil kondisi awal $x(0) = 0$ dan mensubtitusikan kedalam kedua persamaan tersebut, diperoleh

$$Y(s) = [C + (sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

Dengan demikian diperoleh matrik alih sebagai berikut `

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Matrik Alih $G(s)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$G(s) = \frac{Q(s)}{|sI - A|}$$

Apabila suatu sistem diketahui fungsi alihnya sebagai:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

Dimana $U(s)$adalah transformasi laplace masukan dan $Y(s)$adalah transformasi Laplace dari keluaran. Ada banyak cara untuk menyatakan perwakilan ruang keadaan untuk sistem. Antara lain dengan *controllable canonical form, observable canonical form, diagonal canonical form,* dan *Jordan canonical form.*

2.1.1 Penurunan Bentuk Ruang Keadaann dari Fungsi Alih

Apabila suatu sistem diketahui funsi alihnya sebagai :

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+...+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+...+a_{n-1}s+a_n}$$

Dimana U(s) adalah transformasi Laplace masukan dan Y(s) adalah transformasi Laplace dari keluaran. Ada banyak cara untuk menyatakan perwakilan ruang keadaan untuk sistem. Yaitu antara lain dengan *controllable canonical form, observable canonical form, dan diagonal canonical form dan Jordan canonical form.*

Controllable Canonical Form

Bentuk *controllable canonical form* persamaan fungsi alih G(s) diatas adalah :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ .\\ .\\ \dot{x}_{n-1}(t)\\ \dot{x}_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&.&.&.&0\\0&0&1&0&.&.&0\\.&.&.&.&&&.\\.&.&.&.&&&.\\0&0&0&0&.&.&1\\-a_n&-a_{n-1}&-a_{n-2}&.&.&.&-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\.\\.\\x_{n-1}(t)\\x_n(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\.\\.\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}b_n-a_nb_0 & b_{n-1}-a_{n-1}b_0 & . & . & . & b_1-a_1b_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\.\\.\\x_{n-1}(t)\\x_n(t)\end{bmatrix}+b_0u(t)$$

Contoh

1. (a) Kasus (tidak ada zero) tanpa masukan dan turunan

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k}{s^3+4s^2+s-6}$$

Buat dalam ruang keadaan!

$$Y(s) = \frac{kU(s)}{s^3 + 4s^2 + s - 6}$$

$$Y(s)\left(s^3 + 4s^2 + s - 6\right) = kU(s)$$

$$\Downarrow$$

$$\dddot{y} + 4\ddot{y} + \dot{y} - 6y = kU$$

$$\dddot{y} = kU - 4\ddot{y} - \dot{y} + 6y$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ x_3 &= \ddot{y} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= kU - 4\ddot{y} - \dot{y} + 6y \end{aligned}$$

Dalam bentuk persamaan keadaan :

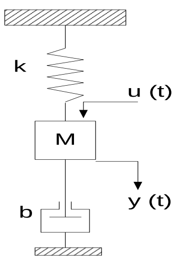
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(b) Representasikan sistem berikut dalam persamaan ruang keadaan



Gambar 3.1 Sistem Pegas

Penyelesaian:

Fungsi alih sistem:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Persamaan deferensial sistem:

$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$

dengan menentukan:

$x_1(t) = y\ (t)$

$x_2\ (t) = \dot{y}\ (t)$

maka diperoleh,

$\dot{X}_1 = x_2$

$$\dot{X}_2 = \frac{1}{m}\left(-ky - k\dot{y}\right) + \frac{1}{m}u$$

Dengan demikian di dapatkan persamaan keadaan:

$\dot{X}_1 = x_2$

$$\dot{X}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

dan persamaan keluaran :

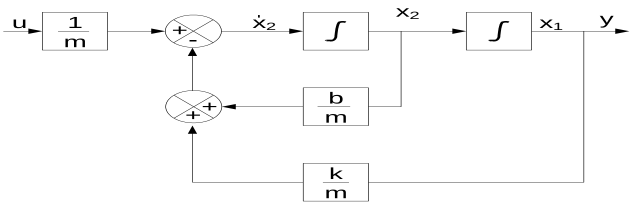
$y = x_1$

dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 \\ -k/m & -b/m\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0 \\ -1/m\end{bmatrix}}_{B}u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} \qquad D = [0]$$

Realisasi persamaan keadaan tersebut adalah sebagai berikut:



2. Kasus proper transfer function

Bila orde zero polynomial lebih kecil daripada orde karakteristik polinomial

$$H(s) = \frac{k(s^2 + 2s - 15)}{s^3 + 4s^2 + s - 6}$$

Untuk menyelesaikan kasus di atas maka :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{V(s)} \cdot \frac{V(s)}{U(s)}$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{k}{s^3 + 4s^2 + s - 6}$$

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{(s^2 + 2s - 15)}{1}$$

Sehingga dengan mudah dibawa ke bentuk persamaan keadaan :

$$V(s) = \frac{kU(s)}{s^3 + 4s^2 + s - 6}$$

$$V(s)(s^3 + 4s^2 + s - 6) = kU(s)$$

$$\Downarrow$$

$$\dddot{v} + 4\ddot{v} + \dot{v} + 6v = kU$$

Gunakan $x_1 = y$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= v \\ x_2 &= \dot{v} \\ x_3 &= \ddot{v} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= kU - 4x_3 - \dot{x}_2 + 6x_1 \end{aligned}$$

Sehingga didapat dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} u \quad \text{...(*)}$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

V bukan output yang sebenarnya.

Untuk

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{(s^2 + 2s - 15)}{1}$$

$$Y(s) = (s^2 + 2s - 15)V(s)$$

$$\Downarrow$$

$$Y = \ddot{v} + 2\dot{v} - 15v$$

$$v = x_1; \dot{v} = x_2; \dot{v} = x_3$$

Sehingga didapat :

$$\boxed{y = x_3 + 2x_2 - 15x_1}$$

$$Y = \begin{bmatrix} -15 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{...}(**)$$

Persamaan state space atau persamaan keadaannya adalah (*) dan (**)

Observable Canonical Form

Bentuk *observable canonical form* untuk persamaan fungsi alih G(s) di atas adalah :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ . \\ . \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 & -a_{n-1} \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ . \\ . \\ . \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + b_0 u(t)$$

Diagonal Canonical Form

Untuk mengubah ke bentuk diagonal, persamaan fungsi alih di atas harus difaktorkan menjadi:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1} s + b_n}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)}$$

Jika seluruh pole dari G(s) adalah berbeda, lalu G(s) dapat dibentuk dalam fraksi parsial:

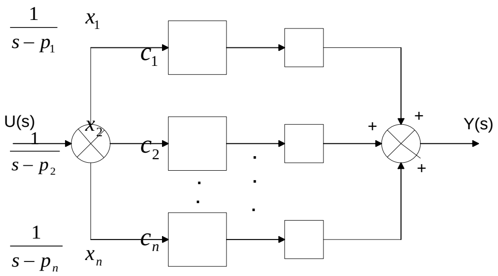
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{c_n}{s-p_n}$$

Dan bentuk *diagonal canonical form*-nya adalah

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ . \\ . \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & & & 0 \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & . & . & . & . & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + b_0 u(t)$$

Bentuk umum diagram simulasinya adalah:



Contoh kasus :

1. Proper transfer function, real pole

Fungsi alih diberikan oleh :

$$H(s)=\frac{k(s^2+2s-15)}{s^3+4s^2+s-6}$$

Cari bentuk diagonal dan diagram simulasi diagonalnya

Jawab

Fungsi alih diatas harus difaktorkan terlebih dahulu

$$H(s)=\frac{k(s^2+2s-15)}{(s-1)(s+2)(s+3)}$$

Dalam bentuk fraksi parsial

$$H(s)=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+3}$$

$$A=(s-1)\frac{k(s^2+2s-15)}{(s-1)(s+2)(s+3)}\Bigg|_{(s=1)}=-k$$

$$B=(s+2)\frac{k(s^2+2s-15)}{(s-1)(s+2)(s+3)}\Bigg|_{(s=-2)}=5k$$

$$C=(s+3)\frac{k(s^2+2s-15)}{(s-1)(s+2)(s+3)}\Bigg|_{(s=-3)}=-3k$$

Sehingga didapat fungsi alih dalam bentuk fraksial :

$$H(s)=\frac{-k}{s-1}+\frac{5k}{s+2}+\frac{-3k}{s+3}$$

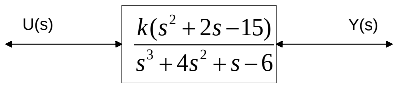
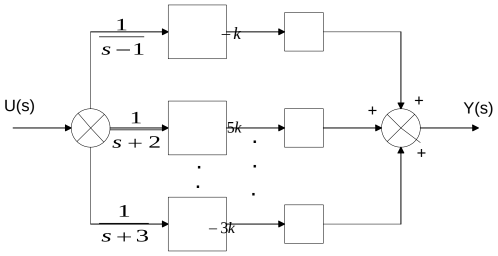


Diagram simulasinya sebagai berikut :



$$\dot{x}_1 = x_1 + u$$
$$v_1 = x_1$$
$$\dot{x}_2 = -2x_2 + 4$$
$$v_2 = x_2$$
$$\dot{x}_3 = -3x_3 + 4$$
$$v_3 = x_3$$

Didapat

$$y = -kv_1 + 5kv_2 - 3kv_3$$
$$y = -kx_1 + 5kx_2 - 3kx_3$$

Sehingga dalam bentuk persamaan keadaan

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$v = \begin{bmatrix} -k & 5k & -3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2. Proper transfer function, complex pole

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 9s - 13}$$

Cari bentuk diagonalnya dan gambar diagram simulasinya

$$H(s)=\frac{1}{s^3+3s^2+9s-13}$$

$$=\frac{1}{(s-1)(s^2+4s+13)}$$

$$=\frac{1}{(s-1)(s+2-3j)(s+2+3j)}$$

Ekspansi fraksi parsial :

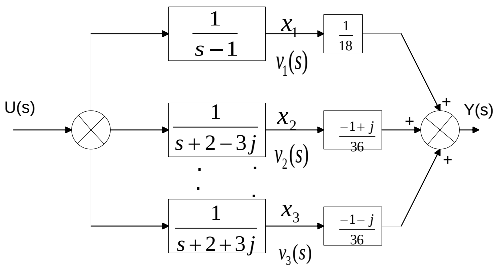
$$H(s)=\frac{A}{(s-1)}+\frac{B}{(s+2-3j)}+\frac{C}{(s+2+3j)}$$

$$A=(s-1)\frac{1}{(s-1)(s+2-3j)(s+2+3j)}\Bigg|_{(s=1)}=\frac{1}{18}$$

$$B=(s+2-3j)\frac{1}{(s-1)(s+2-3j)(s+2+3j)}\Bigg|_{(s=-2+3j)}=\frac{-1+j}{36}$$

$$C=(s+2+3j)\frac{1}{(s-1)(s+2-3j)(s+2+3j)}\Bigg|_{(s=-2-3j)}=\frac{-1-j}{36}$$

Diagram simulasinya sebagai berikut :



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2+3j & 0\\ 0 & 0 & -2-3j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$v=\begin{bmatrix}\frac{1}{18} & \frac{-1+j}{36} & \frac{-1-j}{36}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

3. Pole riil yang jamak/ganda

$$H(s) = \frac{1}{(s-a)^2(s-b)^3}$$

$$= \frac{A}{(s-a)} + \frac{B}{(s-a)^2} - \frac{C}{(s-3)} + \frac{D}{(s-b)^2} + \frac{E}{(s-b)^3}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U \qquad y = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

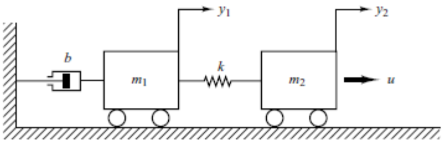
3. Penutup

3.1 Rangkuman

1. Matriks alih merupakan matrik yang mempunyai fungsi sebagai transformator variable keadaan saat t dari t sebelumnya.
2. Matriks alih mempunyai fungsi yang sama sebagai fungsi alih/fungsi transfer.

3.2 Test Formatif

1. Dalam sistem ketinggian air pada tangki, asumsikan bahwa laju aliran $Q\ \frac{m^3}{detik}$ melalui *outflow valvae* terkait dengan kepala $H\ m$ oleh $Q = K\sqrt{H} = 0.01\sqrt{H}$ Asumsikan juga bahwa ketika laju inflow Q_i adalah $0.015\ \frac{m^3}{detik}$, head tetap konstan. Untuk $t < 0$ sistem dalam kondisi *steady state*($Q_i = 0.015\ \frac{m^3}{detik}$). Pada t = 0 *inflow valve* ditutup dan tidak ada aliran yang masuk untuk t lebih kecil sama dengan 0. Temukan waktu yang diperlukan untuk mengosongkan tangki hingga setengah dari kepala aslinya. Kapasitansi C tangki adalah $2\ m^2$.



Gambar 3.2 Sistem Pegas

2. Cari repesentasi dari sistem dari gambar diatas

3.3 Umpan Balik

Tabel 3.1 Umpan Balik

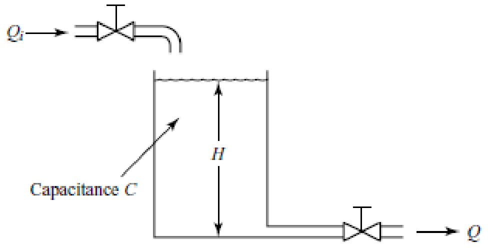
No	Nilai	Komentar
1	Diatas 80	Excellent
2	80-60	Good
3	Kurang dari 60	Not Good

3.4 Tindak Lanjut

Tabel 3.2 Tindak Lanjut

No	Nilai	Tindak Lanjut
1	Diatas 80	Silahkan lanjutkan ke materi berikutnya
2	80-60	Maaf anda belum bisa melanjutkan ke materi berikutnya, pelajari lagi materi ini terutama pada bagian yang anda belum jawab dengan benar
3	Kurang dari 60	Maaf anda belum bisa melanjutkan ke materi berikutnya, pelajari lagi materi seluruhnya.

3.5 Kunci Jawaban Test Formatif

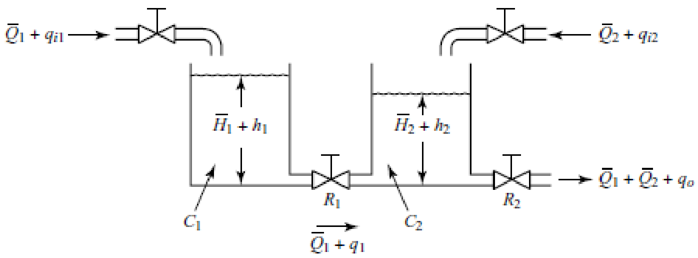


Gambar 3.3 Sistem Fluida

$$0.015 = 0.01\sqrt{H_0}$$
$$H_0 = 2.25\ cm$$

$$-C\ dH = Q\ dt$$
$$\frac{dH}{dt} = -\frac{Q}{C} = \frac{-0.01\sqrt{H}}{2}$$
$$\frac{dH}{\sqrt{H}} = -0.05\ dt$$
$$\int_{2.25}^{1.125} \frac{dH}{\sqrt{H}} = \int_{0}^{t_1} (-0.005)dt = -0.005t_1$$
$$t_1 = 175.7$$

Jadi, saat ketinggian setengah dari nilai sebenarnya $(2.25\ \ m)$ $saat$ 175.7 $detik$



Gambar 3.4 Sistem Fluida

Untuk, persamaan sistem adalah

$$C_1 dh_1 = (q_{i1} - q_1)dt$$

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1$$

$$C_2 dh_2 = (q_1 + q_{i2} - q_0)dt$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_0$$

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{C_1}\left(q_{i1} - \frac{h_1 - h_2}{R_1}\right)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{C_2}\left(\frac{h1 - h_2}{R_1} + q_{i2} - \frac{h_2}{R_2}\right)$$

$$x_1 dot = -\frac{1}{R_1C_1}x_1 + \frac{1}{R_1C_1}x_2 + \frac{1}{C_1}u_1$$

$$x_2 dot = \frac{1}{R_1C_2}x_1 - \left(\frac{1}{R_1C_2} + \frac{1}{R_2C_2}\right)x_2 + \frac{1}{C_2}u_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 dot \\ x_2 dot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & \frac{1}{R_1C_1} \\ \frac{1}{R_1C_2} & -\left(\frac{1}{R_1C_2} + \frac{1}{R_2C_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

1) $m_1 ydotdot_1 + bydot_1 + k(y_1 - y_2) = 0$

$m_2 y_2 + k(y_2 - y_1) = u$

$$xdot_1 = x_2$$

$$xdot_2 = \frac{1}{m_1}[-bydot_1 - k(y_1 - y_2)] = -\frac{k}{m_1}x_1 - \frac{b}{m_1}x_2 + \frac{k}{m_1}x_3$$

$$xdot_3 = x_4$$

$$xdot_4 = \frac{1}{m_2}[-k(y_2 - y_1) + u] = \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_3 + \frac{1}{m_2}u$$

$$\begin{bmatrix} xdot_1 \\ xdot_2 \\ xdot_3 \\ xdot_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & 0 & -\frac{k}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Daftar Pustaka

[1] Derusso.P.M.et.al. : "State Variables for Engineers", John Wiley & Sons Inc.,1965.
[2] Chen, C.T. : "Linear System Theory and Design", Hold-Saunders International,1984.
[3] Kailath,T. : "Linear Systems", Prentice-Hall, New Jersey 1981.
[4] Apte,Y.S. : "Linier Multivariabel Control Theory", Tata McGraw-Hill, New Delhi,1981.
[5] Chen, C.T. : "Linear System Theory and Design", Hold-Saunders International,1984.
[6] Maciejowski,J.M : "Multivariable Feedback Design", Addison Wesley Pubs,Cornwall, 1994
[7] Ogata, Katsuhiko. Modern Control Engineering Fifth Edition.

BAB IV
PENURUNAN STATE SPACE MELALUI DIAGRAM SIMULASI

1. Penurunan State Space melalui Diagram Simulasi

1. Pendahuluan

1.1 Deskripsi Singkat

Pokok bahasan ini berisikan pengetahuan mengenai penyelesaian persoalan penurunan state space suatu sistem melalui simulasi dan bagaimana cara membuat suatu persamaan state space dalam observer canonical form.

1.2 Relevansi

Pokok bahasan ini merupakan dasar yang harus dikuasai untuk mempelajari pokok bahasan selanjutnya.

1.3 Capaian Pembelajaran

1.3.1 Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK)

Mampu menyelesaikan pokok bahasan ini, mahasiswa Departemen Teknik Elektro akan mampu menyelesaikan (C3) (A4) penurunan state space suatu sistem melalui simulasi. Mahasiswa dapat membuat persamaan state space bentuk observer canonical form.

1.3.2 Sub-Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

Setelah mempelajari materi ini mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan penurunan state space suatu sistem melalui simulasi dan mampu membuat suatu persamaan state space dalam observer canonical form.

2. Penyajian

2.1 Pada Kasus Umum (Proper Transfer Function)

Pada kasus umum persamaan state space direpresentasikan dalam bentuk Canonical Controller atau Kanonik Terkontrol. Kanonik Terkontrol adalah suatu metode tertentu yang mengimplementasikan suatu sistem ke dalam bentuk state space.

Bentuk Kanonik Terkontrol:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \cdots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Source: Buku Sistem Kendali Multivariabel Telkom University

Kanonik Terkontrol memiliki 3 kasus, yakni:

1. Transfer functionnya hanya terdiri dari banyak pole.
2. Transfer functionnya terdiri dari banyak zero dan banyak pole tetapi cocok untuk diimplementasikan pada kanonik terkontrol.
3. Transfer functionnya tidak cocok untuk diimplementasikan pada kanonik terkontrol.

Coba lihat contoh dibawah ini.

$$H(s) = \frac{k(s^2 + 2s - 15)}{s^3 + 4s^2 + s - 6}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k(s^2 + 2s - 15)}{s^3 + 4s^2 + s - 6}$$

$$Y(s)(s^3 + 4s^2 + s - 6) = U(s)(s^2 + 2s - 15)$$

Dalam persamaan diferensial :

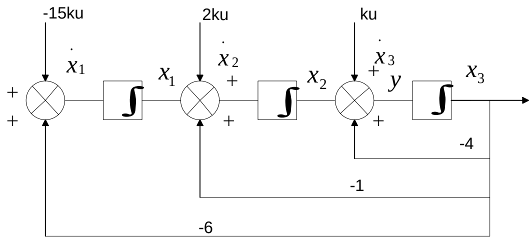
$$\dddot{y} + 4\ddot{y} + \dot{y} - 6y = k\ddot{u} + 2k\dot{u} - 15ku$$

$$\dddot{y} = -4\ddot{y} - \dot{y} + 6y + k\ddot{u} + 2k\dot{u} - 15ku$$

Untuk mendapatkan persamaan keadaan maka persamaan di atas diintegralkan sampai tidak terdapat lagi turunannya, didapat :

$$y = -4\int y - \iint y + 6\iiint y + k\int u + 2k\iint u - 15k\iiint u$$

Sehingga dapat disusun diagram simulasi yang mewakili persamaan di atas.



Dari gambar diatas, didapat :

$$\dot{x}_3 = -4x_3 + x_2 + ku$$

$$\dot{x}_2 = -x_3 + x_1 + 2ku$$

$$\dot{x}_1 = 6x_3 - 15ku$$

Dari persamaan-persamaan di atas dapat disusun :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15k \\ 2k \\ k \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Dilihat dari matriks A, state space di atas bukanlah kanonik terkontrol, melainkan kanonik teramati atau Canonical Observer.

2.2 Pada Kasus Khusus (Improper Transfer Function)

Pada kasus khusus persamaan state space direpresentasikan dalam bentuk Canonical Observer atau Kanonik Teramati. Kanonik Teramati adalah suatu metode tertentu yang mengimplementasikan suatu sistem ke dalam bentuk state space. Perbedaan dari kanonik terkontrol dan kanonik teramati terletak pada posisi atau tempat nilai dalam suatu matriks A. Jika posisi nilai kanonik terkontrol berada pada baris paling bawah matriks A, maka kanonik teramati berada pada kolom paling kanan matriks A.

Bentuk Kanonik Teramati:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

$$H(s) = \frac{k(s^3 + 2s - 15)}{s^3 + 4s^2 + s - 6}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k(s^3 + 2s - 15)}{s^3 + 4s^2 + s - 6}$$

Dalam persamaan diferensial :

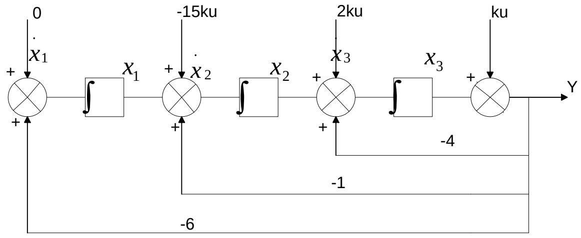
$$\dddot{y} + 4\ddot{y} + \dot{y} - 6y = k\dddot{u} + 2k\ddot{u} - 15k\dot{u}$$

$$\dddot{y} = -4\ddot{y} - \dot{y} + 6y + k\dddot{u} + 2k\ddot{u} - 15k\dot{u}$$

Untuk mendapatkan persamaan keadaan maka persamaan di atas diintegralkan sampai tidak terdapat lagi turunannya, didapat :

$$y = -4\int y - \iint y + 6\iiint y + ku + 2k\int u - 15k\iint u$$

Sehingga dapat disusun diagram simulasi yang mewakili persamaan di atas



$$\dot{x}_3 = -4(x_3 + ku) + x_2 + 2ku$$
$$= -4x_3 2ku + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -1(x_3 + ku) + x_1 - 15ku$$
$$= -x_3 + x_1 - 16ku$$
$$\dot{x}_1 = 6x_3 - 6ku$$

$$\Rightarrow G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+2)(s+4)} & \frac{-1}{(s+2)(s+4)} \\ \frac{3}{(s+2)(s+4)} & \frac{s+5}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{12s + 59}{(s+2)(s+4)}$$

Dalam bentuk persamaan keadaan :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6k \\ -16k \\ -2k \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [k]u$$

Dilihat dari matriks A, state space di atas merupakan kanonik teramati atau Canonical Observer.

Untuk mempermudah penyelesaian persamaan improper transfer function dapat dilakukan dengan metode penurunan dengan **“*Long Division*”**. Adapun caranya adalah sebagai berikut :

Diketahui fungsi alih:

$$H(s) = \frac{K(s^3 + 2s^2 - 15s)}{s^3 + 4s + s - 6}$$

Diubah kedalam bentuk **“Long Division”** :

$$\begin{array}{r|l} & K \\ \hline s^3 + 4s^2 + s - 6 & Ks^3 + Ks^2 - 15Ks + 0 \\ & \underline{Ks^3 + 4Ks^2 + Ks - 6K} \\ & -2Ks^2 - 16Ks + 6K \end{array}$$

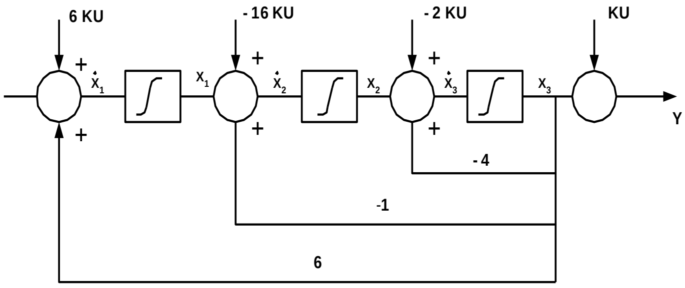
Sehingga diperoleh persamaan berikut :

$$H(s) = \frac{-2Ks^2 - 16Ks + 6k}{s^3 + 4s^2 + s - 6} + K \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Dengan cara mengintegralkan persamaan (*) sebanyak tiga kali sehingga didapatkan persamaan (**):

$$y = -4\int y - \iint y + 6\iiint y - 2K\int U - 16K\iint U + 16K\iiint U + KU \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

Dari persamaan dapat dibuat diagram simulasinya seperti berikut :



2.2 Latihan

1. Apa yang dimaksud dengan Kanonik Terkontrol?
2. Apa saja kasus pada Kanonik Terkontrol?
3. Bagaimana bentuk Kanonik Terkontrol?
4. Jelaskan perbedaan Kanonik Terkontrol dengan Kanonik Teramati!

3. Penutup

3.1 Rangkuman

Bentuk Kanonik Terkontrol:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \cdots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Bentuk Kanonik Teramati:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Perbedaan dari kanonik terkontrol dan kanonik teramati terletak pada posisi atau tempat nilai dalam suatu matriks A. Jika posisi nilai kanonik terkontrol berada pada baris paling bawah matriks A, maka kanonik teramati berada pada kolom paling kanan matriks A.

3.2 Test Formatif

1. Tentukan representasi persamaan ruang keadaan dalam bentuk Kanonik Terkontrol!

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{160(s+4)}{s^3 + 18s^2 + 192s + 640}$$

2. Tentukan representasi persamaan ruang keadaan dalam bentuk Kanonik Teramati!

$$H(s) = \frac{k(s^3 + 2s - 15)}{s^3 + 4s^2 + s - 6}$$

3.3 Umpan Balik

Tabel 4.1 Umpan Balik

No.	Nilai	Komentar
1	Di atas 80	Excellent
2	80-60	Good
3	Kurang dari 60	Not good

3.4 Tindak Lanjut

(Apa yang harus dilakukan untuk menindaklanjuti hasil test formatif)

Tabel 4.2 Tindak Lanjut

No.	Nilai	Tindak Lanjut
1	Di atas 80	Silahkan lanjutkan ke materi berikutnya
2	80-60	Maaf Anda belum bisa melanjutkan ke materi berikutnya, pelajari lagi materi ini terutama pada bagian yang belum Anda jawab dengan benar
3	Kurang dari 60	Maaf Anda belum bisa melanjutkan ke materi berikutnya, pelajari lagi materi ini seluruhnya

3.5 Kunci Jawaban Test Formatif

1. **Diketahui** :

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{160(s+4)}{s^3+18s^2+192s+640}$$

Ditanyakan :

Representasi persamaan ruang keadaan

Penyelesaian :

Dari fungsi alih didapatkan persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\dddot{y}+18\ddot{y}+192\dot{y}+640y=160\dot{u}+640u$$

Ditentukan,

$x_1 = y - \beta_0 u$

$x_2 = \dot{y}-\beta_0\dot{u}-\beta_1 u=\dot{x}_1-\beta_1 u$

$x_3 = \ddot{y}-\beta_0\ddot{u}-\beta_1\dot{u}-\beta_2 u=\dot{x}_2-\beta_2 u$

Dengan,

$\beta_0 = b_0 = 0$

$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = 0$

$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = b_2 = 160$

$\beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0$

$= 640 - 18 \times 160$

$= -2240$

Maka, diperoleh :

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = x_3$

$\dot{x}_3 = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 \ldots\ldots\ldots - a_1 x_n + \beta_n u$

$= -640\, x_1 - 192\, x_2 - 18\, x_3 - 2240\, u$

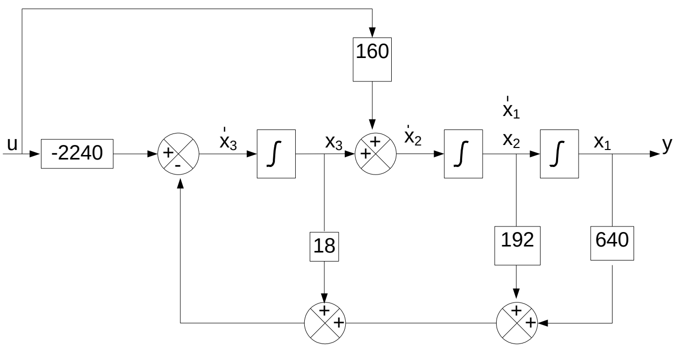
Dan $\quad y = x_1.$

Dalam bentuk matriks ditulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -2240 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]u$$

Realisasi persamaan diatas adalah sebagai berikut:



2. **Penyelesaian**

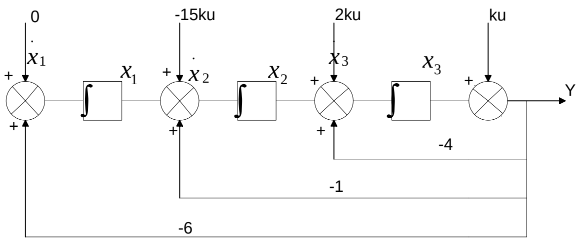
$$\dddot{y} + 4\ddot{y} + \dot{y} - 6y = k\dddot{u} + 2k\ddot{u} - 15k\dot{u}$$

$$\dddot{y} = -4\ddot{y} - \dot{y} + 6y + k\dddot{u} + 2k\ddot{u} - 15k\dot{u}$$

Untuk mendapatkan persamaan keadaan maka persamaan di atas diintegralkan sampai tidak terdapat lagi turunannya, didapat :

$$y = -4\int y - \iint y + 6\iiint y + ku + 2k\int u - 15k\iint u$$

Sehingga dapat disusun diagram simulasi yang mewakili persamaan di atas



$$\dot{x}_3 = -4(x_3 + ku) + x_2 + 2ku$$
$$= -4x_3 2ku + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -1(x_3 + ku) + x_1 - 15ku$$
$$= -x_3 + x_1 - 16ku$$

$$\dot{x}_1 = 6x_3 - 6ku$$

$$\Rightarrow G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+2)(s+4)} & \frac{-1}{(s+2)(s+4)} \\ \frac{3}{(s+2)(s+4)} & \frac{s+5}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{12s + 59}{(s+2)(s+4)}$$

Dalam bentuk persamaan keadaan :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6k \\ -16k \\ -2k \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [k]u$$

Daftar Pustaka

[1] Derusso.P.M.et.al. : "State Variables for Engineers", John Wiley & Sons Inc.,1965.
[2] Chen, C.T. : "Linear System Theory and Design", Hold-Saunders International,1984.
[3] Kailath,T. : "Linear Systems", Prentice-Hall, New Jersey 1981.
[4] Apte,Y.S. : "Linier Multivariabel Control Theory", Tata McGraw-Hill, New Delhi,1981.
[5] Chen, C.T. : "Linear System Theory and Design", Hold-Saunders International,1984.
[6] Maciejowski,J.M : "Multivariable Feedback Design", Addison Wesley Pubs,Cornwall, 1994
[7] Erwin Susanto : “Sistem Kendali Multivariabel:, Telkom University, 2017
[8] Dr. Gregory L. Plett : Lecture Multivariable Control Systems

BAB V
TRANSFORMASI PERSAMAAN KEADAAN

1. Transformasi Persamaan Keadaan

1. Pendahuluan

1.1 Deskripsi Singkat

Pokok bahasan ini berisikan pengetahuan mengenai transformasi persamaan keadaan ke dalam bentuk diagonal dan bentuk Jordan. Persamaan keadaan dalam bentuk diagonal dan jordan dapat diperoleh dari persamaan keadaan bentuk lain melalui transformasi. Pada bagian ini akan kita bahas bagaimana mencari matriks transformsi yang dapat membawa ke dalam persamaan keadaaan dalam bentuk diagonal atau Jordan.

1.2 Relevansi

Pokok bahasan ini merupakan dasar yang harus dikuasai untuk mempelajari pokok bahasan selanjutnya.

1.3 Capaian Pembelajaran

1.3.1 Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK)

Mampu menyelesaikan pokok bahasan ini, mahasiswa Departemen Teknik Elektro akan mampu menyelesaikan (C3) (A4) transformasi persamaan keadaan ke dalam bentuk diagonal dan bentuk Jordan.

1.3.2 Sub-Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

Setelah mempelajari materi ini mahasiswa mampu menyelesaikan transformasi persamaan keadaan ke dalam bentuk diagonal dan bentuk Jordan.

2. Penyajian

2.1 Transformasi Persamaan Keadaan ke Bentuk Diagonal

Langkah-langkah untuk mentransformasikan suatu persamaan homogen kedalam bentuk diagonal akan diuraikan berikut ini.

Misal persamaan homogen

x(t) = Ax(t), x(0) = x_0

Langkah-langkah untuk mendapatkan transformasi x = VX* adalah sebagai berikut :

Dengan matriks transformasi T=V, maka sistem yang ditransformasikan menjadi

$$x^*(t) = \Lambda x^*(t)$$

Dimana $\Lambda = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ . & . & . \\ 0 & . & s_n \end{bmatrix}$ Jadi A sama dengan Λ dan mempunyai s_1 yang sama

Disini berlaku $\Lambda = V^{-1}AV$

Untuk menentukan V maka :

$$V = V\Lambda$$

Kolom dari V dibentuk menjadi satu kolom V_1, sehingga :

$$A = [V_1 \quad V_2 \quad . \quad . \quad V_{n-1}] \begin{bmatrix} s_1 & . & . & 0 \\ . & 0 & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & . & . & s_n \end{bmatrix}$$

Untuk masing-masing vektor kolom, terdapat n persamaan yang tidak bergantungan.

Avi = Si Vi

[Si I – A]Vi = 0; i=1, 2, 3, …..n

vektor Vi disebut juga dengan vektor eigen dari matriks.

Jika harga-harga eigen A sama berbeda dengan n vektor eigen Vi yang tidak bergantung linier, maka V = non singular.

Contoh :

Diberikan suatu sistem dengan nilai A sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cari matriks transformasi yang dapat mentransformasikan ke dalam bentuk diagonal.

Penyelesaian :

Langkah pertama adalah mencari harga eigen dari matriks A yaitu:

Harga eigen : $\det[SI - A] = \begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s+2 \end{vmatrix} = (s+1)(s+2) = 0$

didapat $s_1 = -1$ dan $s_2 = -2$

Setelah harga eigen didapatkan langkah selanjutnya adalah mencari harga vektor eigen V_1 dan V_2, di mana V_1 dan V_2 merupakan kolom dari matriks transformasi yang akan kita cari V = [V1 V2] → $V = \begin{bmatrix} V11 & V12 \\ V21 & V22 \end{bmatrix}$

- vektor eigen V_1 untuk $s_1 = -1$

  $$[S_1 I - A]V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  $$V_{11} + V_{21} = 0$$
  $$-V_{11} + V_{21} = 0$$

  jadi: $V_{11} = V_{12}$ misal $V_{11} = 1$ maka $V_{12} = 1$

- vektor eigen V_2 untuk $s_2 = -2$

  $$[S_2 I - A]V_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  $V_{12} = 0$; V_{22} sembarang, misal $V_{22} = 1$

Maka $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Sehingga $\Lambda = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Dari hasil diatas terbukti bahwa $A = \Lambda$

Untuk sistem dengan persamaan $\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bx \\ y &= Cx \end{aligned}$

Maka setelah matriks transformasi didapatkan kemudian semua parameter ditransformasikan menjadi :

$$A' = \Lambda = V^{-1}AV$$
$$B' = V^{-1}B$$
$$C' = CV$$

Sehingga dalam bentuk diagonal : $\begin{aligned} \dot{x} &= A'x + B'x \\ y &= C'x \end{aligned}$.

2.2 Transformasi Persamaan Keadaan ke Bentuk Jordan

Apabila persamaan homogen mempunyai harga eigen ganda, maka persamaan tersebut tidak dapat ditransformasikan ke bentuk diagonal. Transformasi ke bentuk Jordan adalah solusi untuk persamaan homogen yang mempunyai harga eigen ganda. Matriks Jordan dapat dipresentasikan dalam matriks diagonal blok dimensi (n*n).

Anggap A dengan I harga eigen jumlah n.

$$\Lambda = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & \\ 0 & s_1 & 1 \\ 0 & & s_1 \end{bmatrix}$$

$$A[V_1V_2.......V_n] = [V_1V_2.....V_n]\begin{bmatrix} s_1 & 1 & \\ 0 & s_1 & 1 \\ 0 & & s_1 \end{bmatrix}$$

maka vector kolom pertama

$$AV_1 = s_1V_{-1} atau (s_1I - A)V_1 = 0$$

untuk kolom selebihnya :

$$AV_2 = V_1 + s_1V_2$$
$$AV_n = V_{n-1} + s_1V_n$$

untuk n-1 persamaan dapat ditentukan vektor-vektor $V_2V_3....V_n$

$$(A - s_1I)V_2 = V_1$$
$$(A - s_1I)V_n = V_{n-1}$$

contoh :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0,5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$ Harga eigen $s_{1,2}$=-2

$$[SI - A]V_1 = 0$$

s=-2

$$\left[-2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 0,5\\ -2 & -3\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}V_{11}\\ V_{21}\end{bmatrix}=0$$

$$\left[\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 0,5\\ -2 & -3\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}V_{11}\\ V_{21}\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}-1 & -0,5\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{11}\\ V_{21}\end{bmatrix}=0$$

$$-V_{11}-0,5V_{21}=0 \longrightarrow V_{21}=-2V_{11}$$

$$2V_{11}+V_{21}=0 \longrightarrow V_{21}=-2V_{11}$$

$$V_{21}=-2V_{11}$$

Misal $V_{11}=1 \longrightarrow V_1=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$

$V_{21}=-2$

- $(A-S_1I)V_2=V_1$

$$\left[\begin{bmatrix}-1 & 0,5\\ -2 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}V_{11}\\ V_{22}\end{bmatrix}=V$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0,5\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{11}\\ V_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$$

$$V_{21}+0,5V_{22}=1$$

$$-2V_{12}-V_{22}=-2$$

$$V_{12}=1-0,5V_{22}$$

Ambil : $V_{22}=0 \longrightarrow V_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

Sehingga : $V=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix};V^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$$\Omega=V^{-1}AV=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow matriksJordan$$

Matriks yang diperoleh dinamakan matriks Jordan.

3. Penutup

3.1 Rangkuman

Bentuk Diagonal:

Fungsi alih juga dapat dituliskan berdasarkan akar-akar karakteristiknya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \\ &= b_0 + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}\end{aligned}$$

Bentuk diagonal dari persamaan di atas adalah:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1\end{bmatrix}u \\ y &= \begin{bmatrix}c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix} + b_0 u\end{aligned}$$

Bentuk Jordan:

Suatu fungsi alih dengan beberapa akar karakteristik identic, misalnya $p_1=p_2=p_3$:

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{(s+p_1)^3(s+p_4)(s+p_5)\cdots(s+p_n)} \\ &= b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{s+p_1} + \frac{c_4}{s+p_4} + \cdots + \\ &\quad \frac{c_n}{s+p_n} \qquad (3.\end{aligned}$$

Bentuk diagonal dari persamaan di atas adalah:

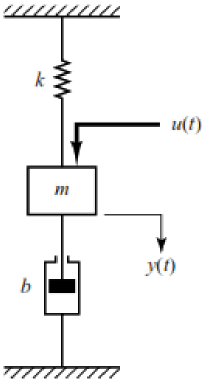
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc}-p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -p_4 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & -p_n\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix} + b_0 u \qquad (3.28)$$

(Sumber: Surya, Erwi SA. Sistem Kendali Multivariabel. Telkom University)

3.2 Test Formatif

1. Tentukan transformasi persamaan ruang keadaan dalam bentuk Diagonal!



Gambar 5.1 Plant

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

3.3 Umpan Balik

Tabel 5.1 Umpan Balik

No.	Nilai	Komentar
1	Di atas 80	Excellent
2	80-60	Good
3	Kurang dari 60	Not good

3.4 Tindak Lanjut

(Apa yang harus dilakukan untuk menindaklanjuti hasil test formatif)

Tabel 5.2 Tindak Lanjut

No.	Nilai	Tindak Lanjut
1	Di atas 80	Silahkan lanjutkan ke materi berikutnya
2	80-60	Maaf Anda belum bisa melanjutkan ke materi berikutnya, pelajari lagi materi ini terutama pada bagian yang belum Anda jawab dengan benar
3	Kurang dari 60	Maaf Anda belum bisa melanjutkan ke materi berikutnya, pelajari lagi materi ini seluruhnya

3.5 Kunci Jawaban Test Formatif

1. **Diketahui** :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{160(s+4)}{s^3 + 18s^2 + 192s + 640}$$

Ditanyakan :

Representasi persamaan ruang keadaan

Penyelesaian :

Dari fungsi alih didapatkan persamaan ruang keadaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

1. *Mencari nilai eigennya :*

$$\det[SI - A] = \det\left\{\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\det[SI - A] = \begin{bmatrix} S & -1 \\ 2 & S+3 \end{bmatrix}$$

$$\det = s^2 + 3s + 2$$

$$s_1 = -1 \; s_2 = -2$$

Vektor eigen V_1 untuk S_1 = -1

$$[S_1 I - A]V_1 = \left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\right\} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[S_1 I - A]V_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-v_{11} - v_{21} = 0 \qquad -2v_{11} - 2v_{21} = 0$$

$$2v_{11} + 2v_{21} = 0 \qquad \underline{2v_{11} + 2v_{21} = 0}$$

Misal :

V_{11} = 1

V_{21} = 1

Vektor eigen V_2 untuk S_2 = -2

$$[S_1 I - A]V_1 = \left\{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\right\} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[S_1 I - A]V_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2v_{12} - v_{22} = 0$$

$$\underline{2v_{12} + v_{22} = 0}$$

v_{12} = (-0,5) v_{22}

Misal :

$V_{12} = 1$

$V_{22} = -0{,}5$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = -\frac{1}{1{,}5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1{,}5} & -\frac{1}{1{,}5} \\ -\frac{1}{1{,}5} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\omega = V^{-1}AV$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{1{,}5} & -\frac{1}{1{,}5} \\ -\frac{1}{1{,}5} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{-5}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$B^1 = v^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{1{,}5} & -\frac{1}{1{,}5} \\ -\frac{1}{1{,}5} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{1{,}5} \\ 0 & -\frac{1}{1{,}5} \end{bmatrix}$$

$$C^1 = C\ v$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}^* = A^1 x^* + B^* U \qquad \dot{x}^* = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{1,5} \\ 0 & -\frac{1}{1,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{y}^* = C^1 x^* \qquad \dot{y}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Daftar Pustaka

[1] Derusso.P.M.et.al. : "State Variables for Engineers", John Wiley & Sons Inc.,1965.
[2] Chen, C.T. : "Linear System Theory and Design", Hold-Saunders International,1984.
[3] Kailath,T. : "Linear Systems", Prentice-Hall, New Jersey 1981.
[4] Apte,Y.S. : "Linier Multivariabel Control Theory", Tata McGraw-Hill, New Delhi,1981.
[5] Chen, C.T. : "Linear System Theory and Design", Hold-Saunders International,1984.
[6] Maciejowski,J.M : "Multivariable Feedback Design", Addison Wesley Pubs,Cornwall, 1994
[7] Erwin Susanto : “Sistem Kendali Multivariabel:, Telkom University, 2017
[8] Ogata, Katsuhiko. Modern Control Engineering Fifth Edition

BAB VI

KETERKONTROLAN DAN KETERAMATAN

1. Keterkontrolan dan Keteramatan

1. Pendahuluan

1.1 Deskripsi Singkat

Pokok bahasan ini berisikan pengetahuan mengenai bagaimanakah kondisi suatu sistem. Suatu sistem dapat dikatakan terkontrol dan teramati apabila memenuhi suatu syarat.

1.2 Relevansi

Pokok bahasan ini merupakan dasar yang harus dikuasai untuk mempelajari pokok bahasan selanjutnya.

1.3 Capaian Pembelajaran

1.3.1 Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK)

Setelah mempelajari materi ini mahasiswa Departemen Teknik Elektro mampu menjelaskan (C2) dan menentukan (C4) keterkontrolan dan keteramatan suatu sistem.

1.3.2 Sub-Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

1. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa Departemen Teknik Elektro mampu menjelaskan (C2) dan menentukan (C4) keterkontrolan suatu sistem.
2. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa Departemen Teknik Elektro mampu menjelaskan (C2) dan menentukan (C4) keteramatan suatu sistem.

2. Penyajian

2.1 Keterkontrolan

Sistem tersebut dikatakan terkontrol sempurna (completely controller), jika untuk setiap kondisi awal (x(t)) terdapat vektor kontrol V(t) yang memindahkan sistem pada keadaan akhir x(t) dalam suatu selang waktu terhingga $t_0 < t < t_1$.

Ini dapat terlihat jika kondisi matriks [B AB A^2 B …. A^{n-1} B] mempunyai rank penuh.

Lihat contoh dibawah ini.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Cari keterkontrolan sistem!

$$Mc = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$Mc = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\det\ Mc = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 - (-6) = 0$$

karena rank matriks Mc tidak penuh dan sistem tergantung linier (determinan Mc=0), maka sistem tidak terkontrol.

2.2 Keteramatan

Sedangkan sistem dikatakan teramati sempurna, jika pengaruh dari luar Bu(t) dan matriks A dan B diketahui keadaan awal x(t) dapat ditentukan dari vektor keluaran y(t) dalam selang waktu $t_0 < t < t_1$.

Syarat umum keteramatan

Sistem dikatakan teramati, jika:

rank Mc = $\begin{bmatrix} C^T & (CA)^T & (CA^2)^T & ..... & (CA^{n-1})^T \end{bmatrix}$ penuh.

Lihat contoh dibawah ini.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & -2\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] x(t)$$

Cari keterkontrolan sistem!

$$Mo = \begin{bmatrix}C^T & (CA)^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&C = [1 \quad 0]\\&CA = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & -2\end{bmatrix} = [1 \quad -1]\end{aligned}}$$

det Mo = $\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix} = -1$

Karena rank Mo penuh dan sistem tidak tergantung linier (det Mo tidak sama dengan nol) maka sistem teramati.

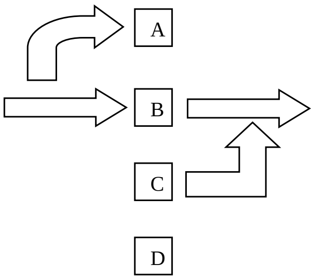
Pada kedua contoh diatas terlihat bahwa tidak semua sistem dapat dikontrol ataupun dapat diamati atau dapat kedua-duanya. Dalam sistem kendali kontrol terdapat 4 kategori penggunaan istilah keterkontrolan dan keteramatan, yaitu :

a) Terkontrol sempurna, tetapi tidak teramati.
b) Terkontrol sempurna, dan teramati.
c) Teramati sempurna, tetapi tidak terkontrol.
d) Tidak terkontrol dan tidak teramati.

Ada suatu kondisi dimana sistem ketidakterkontrolan atau ketidakteramatan adalah suatu sistem yang jelas. Sebagai contoh, pada suatu sistem fisik tertentu kita ingin mengestimasikan suatu aliran tertentu dari pengukuran temperatur tertentu. Tetapi bila kita amati lebih dekat sistemnya, kita dapatkan bahwa aliran yang dipersoalkan tidak mempengaruhi temperatur secara cukup. Karena itu, jika kita modelkan secara akurat sistem tersebut, determinan dari matriks keteramatannya akan mendekati nol.

Sebuah sistem fisik mempunyai karakteristik - karakteristik, dan sebuah model dari sistem mempunyai pole - pole dan zero - zero yang menggambarkan karakteristik - karakteristik tersebut dalam suatu pengertian pendekatan. Karena itu, dalam sistem fisik, suatu karakteristik dari satu bagian sebuah sistem fisik secara aproksimasi dapat meniadakan suatu karakteristik lain dari bagian lain sistem tersebut. Jika karakteristik-karakteristik tesebut hampir tidak ada, maka sangat sulit untuk mengendalikan dan mengestimasi karakeristik-karakteristik ini. Jadi kita dapat melihat aspek fisik dari masalah tersebut walaupun definisi - definisinya adalah betul - betul secara matematis.

Untuk menggambarkan keterkontrolan dan keteramatan dapat dilihat pada gambar berikut ini:



Gambar 6.1 Keterkontrolan dan Keteramatan

AB : Terkontrol

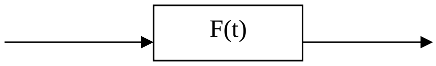
BC : Teramati

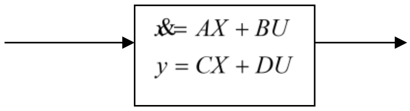
CD : Tidak Terkontrol

AD : Tidak Teramati

D : Tidak kedua-duanya

Jika sistem kendali terkontrol dan teramati sempurna, maka bentuk fungsi transfer sama dengan representasi persamaan keadaan.

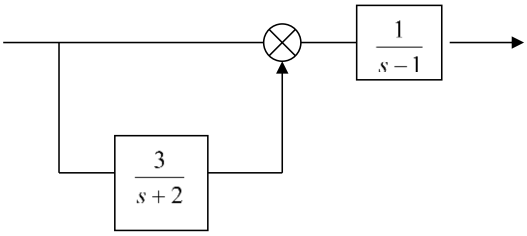




Untuk SISO :

Misalkan suatu sistem mempunyai bagian yang tidak terkontrol atau tidak teramati maka orde dari fungsi alih lebih kecil dari dimensi matriks A, karena tidak semua harga eigen dari A muncul sebagai pole dari G(s).

Contoh :



$$x_1(s) = \frac{1}{s-1}[-x_2 + U(s)]$$

$$x_2(s) = \frac{3}{s+2}U(s)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} U(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

fungsi alih :

$$G(s) = \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{3}{s+2}\right) = \frac{1}{s-1}\frac{s-1}{s+2} = \frac{1}{s+2}$$

karena pole berada di sebelah kiri, maka sistem stabil.

2.3 Latihan

1. Apa yang dimaksud dengan rank?
2. Bagaimana suatu sistem dapat dikatakan terkontrol ataupun teramati?
3. Apa yang dimaksud dengan rank penuh?

3. Penutup

3.1 Rangkuman

1. Suatu sistem dikatakan terkontrol apabila kondisi matriks [B AB A^2B …. A^{n-1}B] mempunyai rank penuh.
2. Suatu sistem dikatakan teramati apabila rank penuh pada kondisi matrik

$$\text{Mc} = \left[C^T \quad (CA)^T \quad (CA^2)^T \quad ..... \quad (CA^{n-1})^T\right]$$

3.2 Test Formatif

1. Apakah sistem di bawah ini dapat dikatakan terkontrolan?

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2. Tentukan keterkontrolan dan keteramatan sistem di bawah ini!

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} k \\ 5k \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

3.3 Umpan Balik

Tabel 6.1 Umpan Balik

No.	Nilai	Komentar
1	Di atas 80	Excellent
2	80-60	Good
3	Kurang dari 60	Not good

3.4 Tindak Lanjut

(Apa yang harus dilakukan untuk menindaklanjuti hasil test formatif)

Tabel 6.2 Tindak Lanjut

No.	Nilai	Tindak Lanjut
1	Di atas 80	Silahkan lanjutkan ke materi berikutnya
2	80-60	Maaf Anda belum bisa melanjutkan ke materi berikutnya, pelajari lagi materi ini terutama pada bagian yang belum Anda jawab dengan benar
3	Kurang dari 60	Maaf Anda belum bisa melanjutkan ke materi berikutnya, pelajari lagi materi ini seluruhnya

3.5 Kunci Jawaban Test Formatif

1. **Diketahui**:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ditanyakan:

Sistem terkontrol atau tidak

Penyelesaian:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$\begin{bmatrix} AB & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 1 \\ 0{,}8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det Mc \begin{bmatrix} 0{,}8 & 1 \\ 0{,}8 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Karena rank matriks Mc tidak penuh (determinan Mc=0) jadi sistem *uncotrollable*.

2. **Diketahui**:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} k \\ 5k \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Ditanyakan:

Menentukan sistem yang terkontrol dan teramati

Penyelesaian

Pertama kita periksa keterkontrolannya :

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 5k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4k \\ 0 \\ 5k \end{bmatrix}$$

$$A^2B = A.AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4k \\ 0 \\ 5k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4k \\ 0 \\ -5k \end{bmatrix}$$

Jadi $\quad Mc = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 4k & -4k \\ 5k & 0 & 0 \\ 0 & 5k & -5k \end{bmatrix}$

Karena det $Mc = -100k^3 - (-100k^3) = 0$, sehingga sistem tersebut tidak dapat dikontrol.

Sekarang kita selidiki keteramatan terhadap keluaran sensor, yaitu :

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = CA.A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

Jadi
$$Mo = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \\ -30 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

$$|Mo| = 25 - 0 = 25$$

Karena det Mo sama dengan 25, maka sistem ini dapat diamati.

Daftar Pustaka

[1] Derusso.P.M.et.al. : "State Variables for Engineers", John Wiley & Sons Inc.,1965.
[2] Chen, C.T. : "Linear System Theory and Design", Hold-Saunders International,1984.
[3] Kailath,T. : "Linear Systems", Prentice-Hall, New Jersey 1981.
[4] Apte,Y.S. : "Linier Multivariabel Control Theory", Tata McGraw-Hill, New Delhi,1981.
[5] Chen, C.T. : "Linear System Theory and Design", Hold-Saunders International,1984.
[6] Maciejowski,J.M : "Multivariable Feedback Design", Addison Wesley Pubs,Cornwall, 1994
[7] Erwin Susanto : “Sistem Kendali Multivariabel:, Telkom University, 2017
[8] Dr. Gregory L. Plett : Lecture Multivariable Control Systems

BAB VII
UMPAN BALIK VARIABEL KEADAAN

1. Umpan Balik Variabel Keadaan

1. Pendahuluan

1.1 Deskripsi Singkat

Pokok bahasan ini berisikan pengetahuan mengenai bagaimanakah merancang suatu sistem kontrol umpan balik keadaan dengan metode Bass Gura.

1.2 Relevansi

Pokok bahasan ini merupakan dasar yang harus dikuasai untuk mempelajari pokok bahasan selanjutnya.

1.3 Capaian Pembelajaran

1.3.1 Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK)

Setelah menyelesaikan sub-pokok bahasan ini mahasiswa Departemen Teknik Elektro akan mampu menjelaskan (C2) mengenai metode Bass Gura dan metode Peletakan akar - akar dengan bentuk Canonical Controller untuk umpan balik variabel keadaan.

1.3.2 Sub-Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

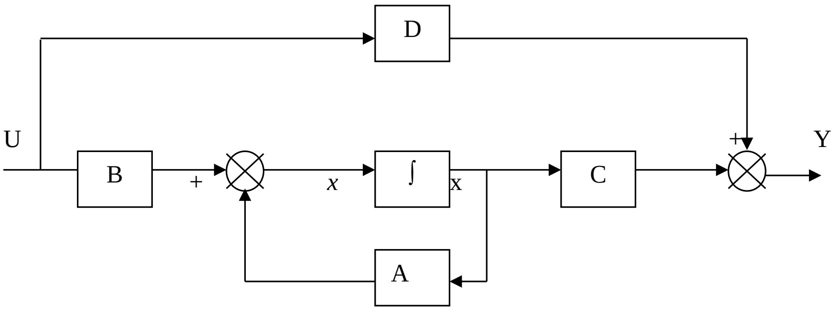
1. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa Departemen Teknik Elektro akan mampu menjelaskan (C2) mengenai metode Bass Gura untuk umpan balik variabel keadaan.
2. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa Departemen Teknik Elektro mampu menjelaskan (C2) mengenai metode Peletakan akar - akar dengan bentuk Canonical Controller untuk umpan balik variabel keadaan.

2. Penyajian

2.1 Metode Bass dan Gura untuk Umpan Balik Variabel Keadaan

Persamaan Keadaan open loop:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$



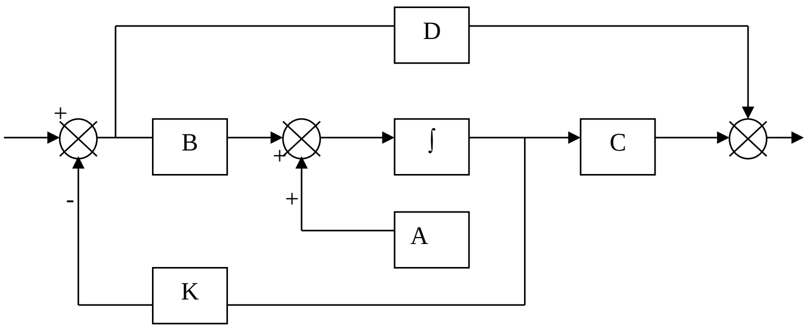
Kemudian dibuat persamaan karakteristik dari sistem. yaitu :

$$A(s) = \det[SI - A] = S^n + A_0 S^{n-1} + \ldots + a_n$$

Sedangkan fungsi alihnya :

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n}{S^n + a_1 S^{n-1} + \ldots + a_n}$$

Kemudian persamaan keadaan di atas diubah ke bentuk sistem state feedback :



$$\dot{x}(t) = (A - BK^{T)})x(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = C^{*}x(t) + Du(t)$$
$$U(t) = V(t) - K^{T}x(t)$$

Persamaan Karakteristik

$$\alpha_k(s) = \det(SI - A + BK^T)$$

Pada sistem tanpa feed back

$$\alpha(s) = \det(SI - A)$$

Pada sistem dengan feed back

$$\alpha_k(s) = \det(SI - A + BK^T)$$

Agar $\alpha_k(s) = \alpha(s)$ maka perlu dicari persamaan linier dari sistem, salah satunya yaitu dengan metode Bass & Gura.

Langkah pertama yang harus dilakukan yakni ubah $\alpha_k(s)$ dalam bentuk :

$$\begin{aligned}\alpha_k(s) &= \det(SI - A + BK) \\ &= \det\{(SI - A)\left[I + (SI - A)^{-1} BK\right]\} \\ &= \det(SI - A)\det\left[I + (SI - A)^{-1} B\right] \\ &= a(s)\left[1 + KT(SI - A)^{-1} B\right]\end{aligned}$$

Sehingga :

$$\alpha k(s) - a(s) = a(s) K^T (SI - A)^{-1} B$$

Dengan menggunakan rumus :

$$(SI - K) - 1 = \frac{1}{a(s)}\left[S^{n-1} I + S^{n-2}(A + a_1 I)\right]$$

Didapat :

$$\alpha_1 - a_1 = K^T B$$

$$\alpha_2 - a_2 = K^T AB + a_1 K^T B$$

Atau

$$\boxed{\alpha_k - a = K^T S_1 T^T}$$

Di mana:

$$\alpha k = \left[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n\right]$$

$$a = \left[a_1 a_2 \ldots\ldots a_n\right]$$

$$S_1 = \left[bAB \ldots A^{n-1} b\right]$$

Misal:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_1 & 1 & 0 \\ a_1 & a_1 & a_1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow T^T = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1 & a_1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari : $\alpha_k - a = K^T S_1 T^T$

Didapat :

$$\boxed{K^T = (\alpha_k - a)T^{-T} SI^{-1}}$$

Di mana : $T^{-T} = (T^{-1})^T$

2.2 Metode Peletakan Akar-Akar dengan Bentuk Canonical Controller untuk Umpan Balik Variabel Keadaan

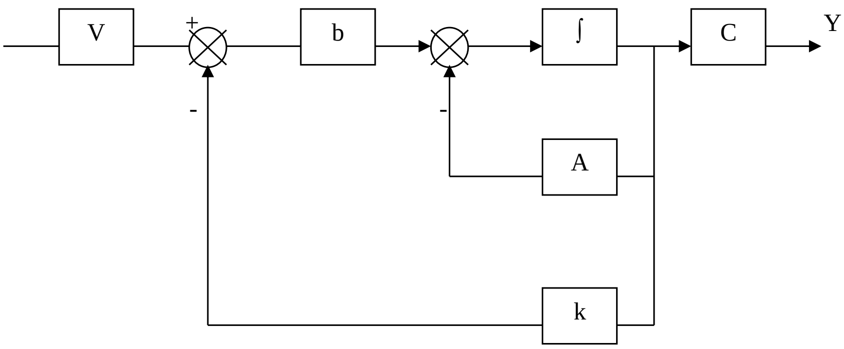
Coba kita ingat lagi tentang bentuk canonical controler:

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu$$
$$y(t) = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ -a_0 & -a_1 & . & . & . & -a_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$$

Dalam bentuk close loop (umpan balik keadaan)



V(konstanta) : Prefilter yang berfungsi agar variable keluaran y mengikuti variabel masukan w pada keadaan stationer.

Selanjutnya:

U=VW-KX

- Persamaan keadaan loop tertutup:

$$\dot{x} = (A - Bk)x + Bw$$

- Persamaan Karakteristik

P(s)=det(SI-(A-Bk))

- Vektor Pengontrol

$$K = [K_1 K_2 ... K_n]$$

$$(A - BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ -a_0 - a_1 & . & . & . & . & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad . \quad . \quad k_n]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 \\ -a_0 - k_1 & . & . & . & . & -a_{n-1} - k_n \end{bmatrix}$$

2.3 Latihan

1. Apa kegunaan Metode Bass dan Gura?
2. Apa langkah pertama yang harus dilakukan pada Metode Bass dan Gura?
3. Apa itu V konstanta pada Metode Peletakan Akar – Akar?

3. Penutup

3.1 Rangkuman

1. Langkah – langkah yang dilakukan dengan metode Bass dan Gura

   $$\alpha_k(s) = \det(SI - A + BK)$$

   $$\begin{aligned} &= \det\{(SI - A)[I + (SI - A)^{-1}BK]\} \\ &= \det(SI - A)\det[I + (SI - A)^{-1}B] \\ &= a(s)[1 + KT(SI - A)^{-1}B] \end{aligned}$$

   Sehingga :

   $$\alpha k(s) - a(s) = a(s)K^T(SI - A)^{-1}B$$

   Dengan menggunakan rumus :

   $$(SI - K) - 1 = \frac{1}{a(s)}\left[S^{n-1}I + S^{n-2}(A + a_1 I)\right]$$

   Didapat :

   $$\alpha_1 - a_1 = K^T B$$
   $$\alpha_2 - a_2 = K^T AB + a_1 K^T B$$

   Atau

   $$\boxed{\alpha_k - a = K^T S_1 T^T}$$

   Di mana:

   $$\alpha k = [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n]$$
   $$a = [a_1 a_2 \ldots\ldots a_n]$$
   $$S_1 = [bAB \ldots A^{n-1}b]$$

2. Langkah – langkah yang dilakukan dengan metode peletakan akar – akar:

   U=VW-KX

   Persamaan keadaan loop tertutup:

$$\dot{x} = (A - Bk)x + Bw$$

- Persamaan Karakteristik

P(s)=det(SI-(A-Bk))

- Vektor Pengontrol

$$K = [K_1 K_2 \ldots K_n]$$

$$(A - BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ -a_0 & -a_1 & . & . & . & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad . \quad . \quad k_n]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 \\ -a_0 - k_1 & . & . & . & . & -a_{n-1} - k_n \end{bmatrix}$$

3.2 Test Formatif

1. Tentukan nilai K?

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\alpha_k = s^3 + 5s^2 - bs + 6$$

2. Cari pengontrol dengan variable keadaan sehingga pole dari loop terletak pada :

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

3.3 Umpan Balik

Tabel 7.1 Umpan Balik

No.	Nilai	Komentar
1	Di atas 80	Excellent
2	80-60	Good
3	Kurang dari 60	Not good

3.4 Tindak Lanjut

(Apa yang harus dilakukan untuk menindaklanjuti hasil test formatif)

Tabel 7.2 Tindak Lanjut

No.	Nilai	Tindak Lanjut
1	Di atas 80	Silahkan lanjutkan ke materi berikutnya
2	80-60	Maaf Anda belum bisa melanjutkan ke materi berikutnya, pelajari lagi materi ini terutama pada bagian yang belum Anda jawab dengan benar
3	Kurang dari 60	Maaf Anda belum bisa melanjutkan ke materi berikutnya, pelajari lagi materi ini seluruhnya

3.5 Kunci Jawaban Test Formatif

1. **Diketahui**:

Persamaan Karakteristik tanpa umpan balik :

$$a(s) = Det(SI - A)$$

$$= Det\begin{bmatrix} s & 1 & 0 \\ 0 & s & 1 \\ 0 & -2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$= (s)(s)(s+3) + 2s$$

$$= s^3 + 3s^2 2s$$

$$\alpha_k = s^3 + 5s^2 + 8s + 6$$

Ditanyakan:

Nilai K

Penyelesaian:

Dengan menggunakan rumus :

$$k = (a_k - a)T^{-T}S^{-1}$$

Dengan :

$\alpha_k = [5 \quad 8 \quad 6]$

$a = [3 \quad 2 \quad 0]$

$s_1 = [B \quad AB \quad A^2B]$

$$T^t = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{atau } T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. **Diketahui**:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Ditanyakan:

Nilai K

Penyelesaian:

$s(s+1)(s+2) = s^3 = 3s^2 + 2s$

$\dfrac{y(s)}{u(s)} = \dfrac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s}$

$y(s)(s^3 + 3s^2 + 2s = 1u(s)$

$\dddot{y} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} = u(s)$

$\dddot{y} = -3\ddot{y} - 2\dot{y} + u(s)$

$$\begin{aligned} x_1 &= y & \qquad \dot{x}_1 &= x_2 \\ x_2 &= \dot{y} & \longrightarrow \qquad \dot{x}_2 &= x_3 \\ x_3 &= \ddot{y} & \longrightarrow \qquad \dot{x}_3 &= -3\ddot{y} - 2\dot{y} + u(s) \end{aligned}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]x$$

Misal pengontrol kita adalah :

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

Persamaan karakteristik loop tertutup :

$$P(s) = \det(SI - (A - BK))$$

$$(A - BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ (-k_1) & (-2 - k_2) & (-3 - k_3 \end{bmatrix}$$

$$(SI - (A - BK) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ k_1 & 2 + k_2 & s + 3 + k_3 \end{bmatrix}$$

$$\det(SI - (A - BK) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ k_1 & 2 + k_2 & s + 3 + k_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} s & -1 \\ 0 & s \\ k_1 & 2 + k_2 \end{matrix}$$

$$= (s)(s)(s + 3 + k_3) + k_1 + (s)(2 + k_2) = 0$$

$$= s^3 + 3s^2 + k_3 s^2 + k_1 + (2 + k_2)s = 0$$

$$= s^3 + (3 + k_3)s^2 + (2 + k_2)s + k_1 = 0$$

Persamaan dengan pole-pole diberikan y :

$s_1 = -3$ dan $s_{23} = -1 \pm j$

Didapatkan persamaan karakteristik yang diinginkan :

$$(s + 3)(s + 1 - j)(s + 1 + j) = 0$$

$$s^3 + 5s^2 + 8s + 6 = 0$$

Dari sistim loop dengan pengontrol : $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$

Didapat :

$$P(s) = s^3 + (3 + k_3)s_2 + (2 + k_2)s + k_1 = 0$$

Sistem yang dikehendaki :

$$P(s) = s^3 + 5s^2 + 8s + 6 = 0$$

Dengan menyamakan didapat :

- $(3 + k_3) = 5 \rightarrow k_3 = 5\text{-}3 = 2$
- $(2 + k_2) = 8 \rightarrow k_2 = 6$
- $k_1 = 6$

Sehingga didapat matriks vektor K^T :

$$K = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Daftar Pustaka

[1] Derusso.P.M.et.al. : "State Variables for Engineers", John Wiley & Sons Inc.,1965.
[2] Chen, C.T. : "Linear System Theory and Design", Hold-Saunders International,1984.
[3] Kailath,T. : "Linear Systems", Prentice-Hall, New Jersey 1981.
[4] Apte,Y.S. : "Linier Multivariabel Control Theory", Tata McGraw-Hill, New Delhi,1981.
[5] Chen, C.T. : "Linear System Theory and Design", Hold-Saunders International,1984.
[6] Maciejowski,J.M : "Multivariable Feedback Design", Addison Wesley Pubs,Cornwall, 1994
[7] Erwin Susanto : “Sistem Kendali Multivariabel:, Telkom University, 2017
[8] Dr. Gregory L. Plett : Lecture Multivariable Control Systems

BAB VIII
METODE ACKERMANN

1. Metode Ackermann

1. Pendahuluan

1.1 Deskripsi Singkat

Pokok bahasan ini berisikan pengetahuan mengenai bagaimanakah merancang suatu sistem kontrol umpan balik keadaan dengan metode Ackermann

1.2 Relevansi

-

1.3 Capaian Pembelajaran

1.3.1 Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK)

Setelah menyelesaikan sub-pokok bahasan ini mahasiswa Departemen Teknik Elektro akan mampu menjelaskan (C2) mengenai metode Ackermann dengan bentuk Canonical Controller untuk umpan balik variabel keadaan.

1.3.2 Sub-Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (Sub-CPMK)

1. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa Departemen Teknik Elektro akan mampu menjelaskan (C2) mengenai metode Ackermann untuk umpan balik variabel keadaan.

2. Penyajian

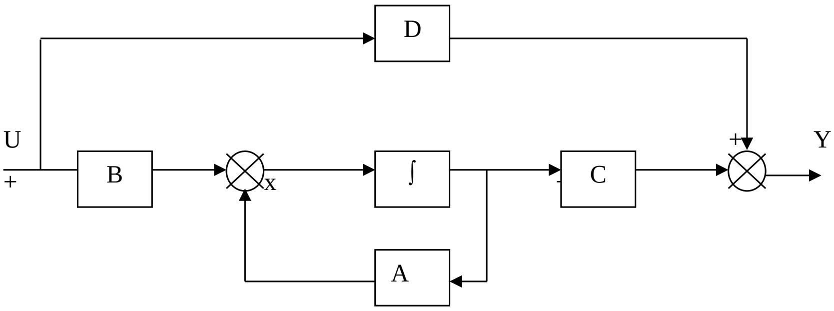
2.1 Metode Ackermann untuk Umpan Balik State Space

Metode Ackermann adalah metode untuk mendesain suatu sistem kontrol untuk menyelesaikan permasalahan pole placement. Salah satu masalah utama dalam desain sistem kontrol adalah pada saat menciptakan pengontrol yang dapat mengubah dinamika sistem dan mengubah pole pada keadaan sesuai, dan sehingga sistem jadi lebih stabil.

Masalah tersebut dapat diselesaikan dengan berbagai metode yakni salah satu solusi tersebut adalah dengan penambahan loop umpan balik sedemikian rupa sehingga keuntungan ditambahkan ke input yang dengannya seseorang dapat mengubah pole dari sistem asli. Jika sistem dapat dikontrol, metode yang efisien untuk pole placement adalah rumus Ackermann, dimana bebas memilih pole sesuai keinginan.

Persamaan Keadaan open loop:

$$x(t) = A\dot{x}(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$



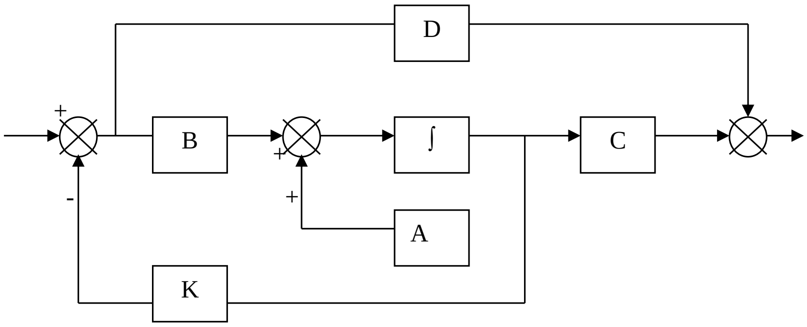
Kemudian dibuat persamaan karakteristik dari sistem. yaitu :

$$A(s) = \det[SI - A] = S^n + A_0 S^{n-1} + \ldots + a_n$$

Sedangkan fungsi alihnya :

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n}{S^n + a_1 S^{n-1} + \ldots + a_n}$$

Kemudian persamaan keadaan di atas diubah ke bentuk sistem state feed back :



$\dot{x}(t) = (A - BK^{T)})x(t) + Bu(t)$

$y(t) = C^{*}x(t) + Du(t)$

$U(t) = V(t) - K^{T}x(t)$

Persamaan Karakteristik

$\alpha_k(s) = \det(SI - A + BK^{T})$

Pada sistem tanpa feed back

$\alpha(s) = \det(SI - A)$

Pada sistem dengan feed back

$\alpha_k(s) = \det(SI - A + BK^{T})$

Setelah $a_k(s)$ didapatkan, kemudian bandingkan dengan persamaan yang diinginkan. K merupakan constanta dihasilkan dari perbandingan antara $a_k(s)$ dengan persamaan yang diinginkan.

Berikut merupakan cara untuk menentukan pengontrol dengan metode Ackermann:

$$K = [0 \quad \ldots \quad 1]M_c.\,a_k(A)$$

Dimana :

- M_C = [B AB A^2B …. A^{n-1}B]
- $a_k(A)$ adalah persamaan $a_k(s)$ dimana s = A
- Sistem harus dapat dikontrol karena kita harus membalikkan matriks terkontrol

2.2 Latihan

1.

3. Penutup

3.1 Rangkuman

Cara untuk menentukan pengontrol dengan metode Ackermann

$$K = [0 \quad \dots \quad 1] M_c . a_k(A)$$

Dimana :

- M_C = [B AB A^2B …. A^{n-1}B]
- $a_k(A)$ adalah persamaan $a_k(s)$ dimana s = A
- Sistem harus dapat dikontrol karena kita harus membalikkan matriks terkontrol

3.2 Tes Formatif

1.

2.

3.3 Umpan Balik

Tabel 8.1 Umpan Balik

No.	Nilai	Komentar
1	Di atas 80	Excellent
2	80-60	Good
3	Kurang dari 60	Not good

3.4 Tindak Lanjut

(Apa yang harus dilakukan untuk menindaklanjuti hasil test formatif)

Tabel 8.2 Tindak Lanjut

No.	Nilai	Tindak Lanjut
1	Di atas 80	Silahkan lanjutkan ke materi berikutnya
2	80-60	Maaf Anda belum bisa melanjutkan ke materi berikutnya, pelajari lagi materi ini terutama pada bagian yang belum Anda jawab dengan benar
3	Kurang dari 60	Maaf Anda belum bisa melanjutkan ke materi berikutnya, pelajari lagi materi ini seluruhnya

3.5 Kunci Jawaban Tes Formatif

Daftar Pustaka

BIOGRAFI PENULIS

Sumardi dilahirkan pada tanggal, 11 Nopember 1968 di Sukoharjo, Jawa Tengah. Pendidikan S1 di Universitas Diponegoro, Semarang mengambil Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknik lulus pada Tahun 1994 dan meneruskan Pendidikan jenjang S2 di Program Instrumentasi dan Kontrol Teknik Fisika Institut Teknologi Bandung lulus pada Tahun 1998. Selain itu, pernah mengikuti beberapa pelatihan diantaranya, pelatihan PLC yang diselenggarakan oleh OMRON selaku produsen PLC dan pelatihan Digital Signal Processing yang diselenggarakan oleh Institute Teknologi Bandung. Dalam bidang penelitian telah melakukan beberapa penelitian diantaranya, “Perancangan Sistem Kontrol Suspensi Semi-Aktif menggunakan Fuzzy Logic Control pada Model Kendaraan Seperempat”, “Pengembangan Sistem Peringatan Dini Banjir berbasis SMS dan Web Studi Kasus Sungai Garang Semarang”, dan juga telah melakukan kerjasama dalam pemasangan alat peringatan dini banjir dengan PT. Jasa Tirta, BBWS, Sulawesi Tenggara, dan lain – lain. Kesibukan saat ini menjadi dosen dan peniliti di Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknik, Universitas Diponegoro.