

به نام خدا



دانشگاه صنعتی شریف

تمرین شماره ۱

برنامه ریزی تصادفی

احمد امامی

۹۹۲۰۷۵۲۱

پاییز ۱۴۰۰

1. Suppose you consider just a five-year planning horizon. Choose an appropriate target and solve over this horizon with a single first-period decision.

پاسخ:

با توجه به آنکه دوره سرمایه گذاری به ۵ تقلیل یافته است ، با توجه به مفروضات مسئله این بدین معنی است که تنها یک تصمیم سرمایه گذاری خواهیم گرفت (تنها یک پریود خواهیم داشت).

تخمین G

می دانیم که برای مسئله ی ۳ دوره ای مطرح شده در متن کتاب مقدار هدف ۸۰ هزار دلار و سرمایه اولیه ۵۵ هزار عنوان شده بود. فرض میکنیم که سود حاصله در مسئله ی یک دوره ای به یک سوم کاهش یابد. در نتیجه میزان سود برابر است با:

$$\frac{80-55}{3} \approx 8.5 \rightarrow G = 55 + 8.5 = 63.5$$

حال با این فرض مسئله را بازنویسی میکنیم:

$$\begin{aligned} \max z = & \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} (y(i) - 4w(i)) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x(1,1) + x(2,2) = 55 \\ 1.25x(1,1) + 1.14x(2,1) - y(1) - w(1) = 63.5 \\ 1.06x(1,1) + 1.12x(2,1) - y(2) - w(2) = 63.5 \\ x(i,t) \geq 0, y(s) \geq 0, w(s) \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

مسئله ی فوق را به کمک پایتون کد کردیم و جواب بهینه به شکل زیر است.

```
solution for: investment policy for a 5 year span
objective: -4.673
x(1,1) = 7.273
x(2,1) = 47.727
w(2) = 2.336
```

شکل ۱ خروجی کد پایتون

همان طور که در جواب بهینه مشاهده می کنیم سرمایه گذاری بر روی اوراق قرضه تمرکز بیشتری دارد. با توجه به آنکه $y(1)$ و $w(1)$ برابر با ۰ هستند نتیجه می گیریم که در سناریوی اول دقیقاً به هدفمان که ۶۳۵۰۰ دلار است رسیده ایم. در سناریوی دوم $y(2)=0$ و $w(2)$ برابر با ۲.۳۳۶ شده است. این بدین معنی است که در سناریوی دوم ۲۳۳۶ دلار کمبود داریم و نتوانستیم به مقدار سرمایه دلخواه دست پیدا کنیم.

3. Suppose that goal G is also a random parameter and could be \$75,000 or \$85,000 with equal probabilities. Formulate and solve this problem. Compare this solution to the solution for the problem with a known target.

در این حالت علاوه بر سناریوهای مطرح شده در مثال کتاب متغیر دیگری به مسئله اضافه می‌شود که نشان‌دهنده مقدار هدف ما است. اگر مقدار این متغیر ۱ باشد سرمایه‌ی هدف ما ۷۵۰۰۰ دلار و اگر ۲ باشد ۸۵۰۰۰ دلار خواهد بود. با توجه به این موضوع محدودیت‌های مسئله را می‌نویسیم.

$$\max z = \sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \sum_{s_3=1}^2 \sum_{s_4=1}^2 \frac{1}{2} * \frac{1}{8} * (y(s_1, s_2, s_3, s_4) - 4w(s_1, s_2, s_3, s_4))$$

$$s. t. \left\{ \begin{array}{l} x(1,1) + x(2,2) = 55 \\ -1.25x(1,1) - 1.14x(2,1) + x(1,2,1) + x(2,2,1) = 0 \\ -1.06x(1,1) - 1.12x(2,1) + x(1,2,2) + x(2,2,2) = 0 \\ -1.25x(1,2,1) - 1.14x(2,2,1) + x(1,3,1,1) + x(2,3,1,1) = 0 \\ -1.06x(1,2,1) - 1.12x(2,2,1) + x(1,3,1,2) + x(2,3,1,2) = 0 \\ -1.25x(1,2,2) - 1.14x(2,2,2) + x(1,3,2,1) + x(2,3,2,1) = 0 \\ -1.06x(1,2,2) - 1.12x(2,2,2) + x(1,3,2,2) + x(2,3,2,2) = 0 \\ 1.25x(1,3,1,1) + 1.14x(2,3,1,1) - y(1,1,1,1) + w(1,1,1,1) = 75 \\ 1.06x(1,3,1,1) + 1.12x(2,3,1,1) - y(1,1,2,1) + w(1,1,2,1) = 75 \\ 1.25x(1,3,1,2) + 1.14x(2,3,1,2) - y(1,2,1,1) + w(1,2,1,1) = 75 \\ 1.06x(1,3,1,2) + 1.12x(2,3,1,2) - y(1,2,2,1) + w(1,2,2,1) = 75 \\ 1.25x(1,3,2,1) + 1.14x(2,3,2,1) - y(2,1,1,1) + w(2,1,1,1) = 75 \\ 1.06x(1,3,2,1) + 1.12x(2,3,2,1) - y(2,1,2,1) + w(2,1,2,1) = 75 \\ 1.25x(1,3,2,2) + 1.14x(2,3,2,2) - y(2,2,1,1) + w(2,2,1,1) = 75 \\ 1.06x(1,3,2,2) + 1.12x(2,3,2,2) - y(2,2,2,1) + w(2,2,2,1) = 75 \\ 1.25x(1,3,1,1) + 1.14x(2,3,1,1) - y(1,1,1,2) + w(1,1,1,2) = 85 \\ 1.06x(1,3,1,1) + 1.12x(2,3,1,1) - y(1,1,2,2) + w(1,1,2,2) = 85 \\ 1.25x(1,3,1,2) + 1.14x(2,3,1,2) - y(1,2,1,2) + w(1,2,1,2) = 85 \\ 1.06x(1,3,1,2) + 1.12x(2,3,1,2) - y(1,2,2,2) + w(1,2,2,2) = 85 \\ 1.25x(1,3,2,1) + 1.14x(2,3,2,1) - y(2,1,1,2) + w(2,1,1,2) = 85 \\ 1.06x(1,3,2,1) + 1.12x(2,3,2,1) - y(2,1,2,2) + w(2,1,2,2) = 85 \\ 1.25x(1,3,2,2) + 1.14x(2,3,2,2) - y(2,2,1,2) + w(2,2,1,2) = 85 \\ 1.06x(1,3,2,2) + 1.12x(2,3,2,2) - y(2,2,2,2) + w(2,2,2,2) = 85 \\ x(i, t, s_1, \dots, s_{t-1}) \geq 0, y(s_1, s_2, s_3, s_4) \geq 0, w(s_1, s_2, s_3, s_4) \geq 0 \end{array} \right.$$

مانند قبل مساله به کمک پایتون کد کردیم و خروجی نرم‌افزار به شکل زیر می‌باشد:

```

solution for: investment policy for a 2 goals
objective: -4.473
x_1_1 = 55.000
x_1_2_1 = 40.643
x_2_2_1 = 28.107
x_1_2_2 = 58.300
x_1_3_1_1 = 82.846
x_1_3_2_1 = 17.477
x_1_3_2_2 = 61.798
x_2_3_1_2 = 74.561
x_2_3_2_1 = 55.398
y_1_1_1_1 = 28.557
y_1_1_1_2 = 18.557
y_1_1_2_1 = 12.817
y_1_1_2_2 = 2.817
y_1_2_1_1 = 10.000
y_1_2_2_1 = 8.509
y_2_1_1_1 = 10.000
y_2_1_2_1 = 5.571
y_2_2_1_1 = 2.248
w_1_2_2_2 = 1.491
w_2_1_2_2 = 4.429
w_2_2_1_2 = 7.752
w_2_2_2_1 = 9.494
w_2_2_2_2 = 19.494

```

خروجی مساله را در تصویر بالا مشاهده می‌کنیم. برای درک بهتر از جواب مساله جدولی مانند جدول ۶ کتاب رسم می‌کنیم:

Period,Scenario	Stock	Bonds
1,1-8	55	0
2,1-4	40.64	28.1
2,5-8	58.3	0
3,1-2	82.85	0
3,3-4	0	74.56
3,5-6	17.47	55.4
3,7-8	61.8	0

در این حالت مشاهده می‌کنیم که در پریود اول تمام سرمایه گذاری بر روی سهام انجام شده. در حالی که در مساله‌ی پیشین هم بر روی سهام و هم بر روی اوراق قرضه سرمایه‌گذاری انجام شده بود. در پریود بعدی دو حالت داریم. اگر پریود اول در وضعیت رونق بوده باشد ریسک کمتری می‌کنیم و هم بر روی سهام و هم بر روی اوراق قرضه سرمایه‌گذاری می‌کنیم. البته میزان سرمایه‌گذاری بر روی سهام بیشتر است. اگر پریود اول در وضعیت رکود بوده باشد ریسک می‌کنیم و تمام پول را بر روی سهام سرمایه‌گذاری می‌کنیم. برا پریود سوم نیز مانند قبل ۴ حالت داریم. در سناریوهای ۱ و ۲ تمام سرمایه‌گذاری بر روی سهام است. علت آن این است که در این سناریوها امکان ندارد که به هدف مدنظرمان نرسیم در نتیجه ریسک می‌کنیم و تمام پول را بر روی سهام سرمایه‌گذاری می‌کنیم. در سناریوهای ۳ و ۴ نیز سرمایه‌گذاری بر روی سهام ممکن است باعث شود تا به هدف نرسیم در نتیجه تمام سرمایه‌گذاری بر روی اوراق قرضه متمرکز است. در سناریوهای بعدی نیز میتوان به طریق مشابه تحلیل‌هایی را انجام داد.

اما برای متغیرهای مازاد (y) و کمبود (w) در این مساله به جای ۸ سناریو، ۱۶ سناریو داریم. علت آن نیز این است که هر سناریوی مساله‌ی پیشین دارای دو حالت می‌شود. حالت اول زمانی که هدف سرمایه‌گذاری ۷۵ هزار دلار و حالت دوم زمانی که ۸۵ هزار دلار باشد. این سناریوها و متغیرهای مازاد و کمبود متناظر را در جدول زیر مشاهده می‌کنید:

Scenario	Above G	Below G
G=75		
1	28.55	0
2	12.82	0
3	10	0

4	8.51	0
5	10	0
6	5.57	0
7	2.25	0
8	0	9.49
G=85		
1	18.55	0
2	2.82	0
3	0	0
4	0	1.49
5	0	0
6	0	4.43
7	0	7.75
8	0	19.49

همان طور که مشاهده می‌شود در سناریوهایی که مقدار هدف ۸۵ هزار دلار تعیین شده است ، در تعداد بیشتری از سناریوها با کمبود مواجه می‌شویم. به همین علت شانس رسیدن به هدف در این مدل نسبت به مدل پیشین کمتر است. در مدل پیشین در ۷ سناریو از ۸ سناریوی مطرح شده به هدف می‌رسیم. در حالی که در این مساله تنها در ۱۱ تا از ۱۶ سناریوی موجود به هدف دست پیدا می‌کنیم. در نتیجه شانس رسیدن به سرمایه هدف با توجه به این مدل کمتر می‌باشد.

****** کد پایتون این تمرین در فایل زیپ ضمیمه شده موجود است.