به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

تمرین شماره‌ی ۵

برنامه ریزی تصادفی

احمد امامی

۹۹۲۰۷۵۲۱

فهرست مطالب

سوال ۲ صفحه ۱۲۲

فرض کنید مسئله‌ی مرحله دوم به شکل زیر باشد:

$$\begin{aligned} &\min 2y_1 + y_2 \\ &\text{s. t.}\ \ y_1 - y_2 \le 2 - \boldsymbol{\xi} x_1\ , \\ &\qquad\quad y_2 \le x_2\ , \\ &\qquad\quad 0 \le y_1, y_2\ . \end{aligned}$$

$K_2(\xi)$ و K_2 را برای توزیع‌های زیر پیدا کنید.

a) $\xi \sim U[0,1]$

b) $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)\,, \lambda > 0$

$$K_2(\xi) = \{x |\ \exists y \ge 0\ \ s.t.\ \ y_1 - y_2 \le 2 - \xi x_1\,, y_2 \le x_2\}$$

$$2 - \xi x_1 \ge 0\ \to y_1 = 0\,, y_2 = 0$$

$$2 - \xi x_1 < 0\ \to y_1 = 0\,, y_2 = \xi x_1 - 2$$

با توجه به حد پایین y_2 نتیجه می‌شود که $x_2 \ge 0$

برای حالت دوم شرط وجود جواب برای مسئله‌ی مرحله‌ی دوم برقراری دو شرط زیر است:

$$\begin{cases} y_2 \le x_2 \\ y_2 = \xi x_1 - 2 \end{cases} \to \xi x_1 - 2 \le x_2 \to x_1 \le \frac{x_2 + 2}{\xi}$$

در نتیجه می‌توانیم $K_2(\xi)$ را به شکل زیر نشان دهیم:

$$K_2(\xi) = \{x | x_2 \ge 0\,, x_1 \le \frac{x_2 + 2}{\xi}\}$$

a) $\xi \sim U[0,1]$

با کاهش مقدار ξ مقدار کسر $\frac{x_2+2}{\xi}$ افزایش می‌یابد و از آنجایی که K_2 اشتراک $K_2(\xi)$ ها به ازای مقادیر مختلف ξ است در نتیجه حاصل این اشتراک در جایی است که ξ بیشترین مقدار را اختیار کند. یعنی $\xi = 1$

$$K_2 = \{x | x_2 \ge 0\,, x_1 \le x_2 + 2\}$$

b) $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)\,, \lambda > 0$

همانند استدلالی که در قسمت a انجام دادیم، حاصل اشتراک به ازای حداکثر مقدار ξ حاصل می‌شود. از آنجایی که ξ از توزیع پواسون پیروی می‌کند، حاصل اشتراک در جایی است که ξ به بی‌نهایت برسد.

$$x_1 \leq \frac{x_2+2}{\xi} \xrightarrow{\xi\to\infty} x_1 \leq 0 \Rightarrow K_2 = \{x|x_2 \geq 0 , x_1 \leq 0\}$$

سوال ۳ صفحه ۱۲۳

مسئله‌ی مرحله دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$Q(x,\xi) = \min\{y \mid y \geq \xi, y \geq x\}$$

به منظور سادگی فرض کنید $x \geq 0$. اگر ξ از توزیع زیر پیروی کند نشان دهید که $K_2^p = K_2$. سپس آن را با قضیه‌ی ۳ مقایسه کنید.

$$f(\xi) = \frac{2}{\xi^3}, \xi \geq 1$$

تابع هدف مرحله‌ی دوم به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$Q(x,\xi) = \begin{cases} \xi & \xi \geq x \\ x & \xi < x \end{cases}$$

از آنجایی که فرض کردیم مقدار x بزرگتر یا مساوی ۰ و هم‌چنین ξ همواره بزرگتر از یک است، دو حالت زیر را میتوانیم برای x در نظر بگیریم:

حالت ۱: $0 \leq x < 1$

تابع هدف مرحله‌ی دوم در این حالت همواره برابر با ξ خواهد بود.

$$Q(x,\xi) = \xi$$

حال نیاز داریم مقدار $Q(x)$ را محاسبه کنیم:

$$Q(x) = E_\xi Q(x,\xi) = \int_1^\infty \xi * \frac{2}{\xi^3}\, d\xi = -\frac{2}{\xi}\Big|_1^\infty = 0 - (-2) = 2$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود برای مقادیر x بین ۰ و یک، مسئله‌ی مرحله‌ی دوم موجه و دارای جواب است در نتیجه K2 را برای این حالت میتوان به صورت زیر نوشت:

$$K_2 = \{x|Q(x) < \infty\} = \{x|\exists y \geq 0 \ \ s.t.\ \ y \geq x\} = \{x|0 \leq x < 1\}$$

حالت۲: $1 \le x$

در این حالت بسته به مقدار ξ، y مقدار متفاوتی اخذ می‌کند و جواب مسئله‌ی مرحله‌ی دوم متفاوت است. $Q(x)$ در این حالت به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$Q(x) = E_\xi Q(x,\xi) = \int_1^x x * \frac{2}{\xi^3}\, d\xi + \int_x^\infty \xi * \frac{2}{\xi^3}\, d\xi = 2x \frac{1}{-2\xi^2} \Big[_1^x - \frac{2}{\xi} \Big[_x^\infty = x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = x + \frac{1}{x}$$

در نتیجه داریم:

$$K_2 = \{x | Q(x) < \infty\} = \{x | \exists y \ge 0 \ \ s.t.\ \ y \ge x\} = \{x | x \ge 1\}$$

با توجه K_2 های حاصله در دو حالت پیشین خواهیم داشت:

$$K_2 = \{x | Q(x) < \infty\} = \{x | \exists y \ge 0 \ \ s.t.\ \ y \ge x\} = \{x | x \ge 1, 0 \le x < 1\} = \{x | x \ge 0\}$$

پس نتیجه می‌گیریم به ازای x های بزرگتر یا مساوی ۰، امید مقدار تابع هدف مسئله‌ی مرحله‌ی دوم مقداری متناهی دارد.

حال K_2^p را به دست می‌آوریم. طبق تعریف، x به K_2^p متعلق است اگر به ازای تمام مقادیر ξ، یک جواب شدنی در مسئله‌ی دوم وجود داشته باشد. با توجه به این تعریف و توضیحات مطرح شده در بالا به ازای x های بزرگتر یا مساوی ۰ این شرط برقرار است و میتوان نوشت:

$$K_2^p = \{x | x \ge 0\} \to \ K_2^p = K_2$$

سوال ۲ صفحه‌ی ۱۹۵

مسئله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\min\ 7x_1 + 11x_2 + \mathrm{E}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}_1\mathbf{y}_1 + \mathbf{q}_2\mathbf{y}_2) \\ &\text{s. t.} \qquad \mathbf{y}_1 + 2\mathbf{y}_2 \ge \mathbf{d}_1 - x_1\,, \\ &\qquad\qquad \mathbf{y}_1 \ge \mathbf{d}_2 - x_2\,, \\ &\qquad 0 \le x_1 \le 10\,, \quad 0 \le x_2 \le 10\,, \quad y_1, y_2 \ge 0, \end{aligned}$$

که در آن $\xi^T = (q_1, q_2, d_1, d_2)$ مقادیر $(26,16,6,12)$ و $(14,24,10,4)$ با احتمال مساوی اختیار می‌کند.

---

a. نقطه‌ی اولیه‌ی حرکت $(1,5)^T$ می‌باشد. حال با حل مسئله به کمک روش L-شکل نشان دهید در ۳ دور به جواب خواهیم رسید.

در دور اول $\theta^1 = -\infty$ در نظر می‌گیریم و به گام سوم میرویم.

دور اول-گام سوم

مسئله را به کمک ξ های داده‌شده حل می‌کنیم.

$\xi_1 = (26,16,6,12)$

$$\min 26y_1 + 16y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 6 - 1 \\ y_1 \qquad\quad \geq 12 - 5 \end{cases} \qquad \rightarrow y = (7,0)\,, \pi_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$\xi_2 = (14,24,10,4)$

$$\min 14y_1 + 24y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 10 - 1 \\ y_1 \qquad\quad \geq 4 - 5 \end{cases} \qquad \rightarrow y = \left(0, \frac{9}{2}\right)\,, \pi_2^1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

با توجه به نتایج حاصل شده مقدار E_1 و e_1 را محاسبه می‌کنیم.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \sum_{k=1}^{2} P_k (\pi_k^v)^T T = 0.5\,(0\,,26) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0.5\,(12\,,0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (6,13)$$

$$e_1 = \sum_{k=1}^{2} P_k (\pi_k^v)^T h_k = 0.5\,(0\,,26) \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} + 0.5\,(12\,,0) \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = 216$$

حال به کمک $x^1 = \binom{1}{5}$، مقدار W^1 را محاسبه می‌کنیم:

$$W^1 = e_1 - E_1 x^1 = 216 - (6,13) \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 145 > \theta^1$$

در نتیجه x^1 جواب بهینه نیست و نیاز است تا برش بهینگی را به مسئله اضافه کنیم

$$E_1 x + \theta \geq e_1 \rightarrow 6x_1 + 13x_2 + \theta \geq 216$$

دور دوم-گام اول

مسئله‌ی مرحله اول را به کمک برش بهینگی اضافه شده مجددا حل می‌کنیم و x^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$\min 7x_1 + 11x_2 + \theta$$

$$s.t.\begin{cases} 0 \le x_1 \le 10 \\ 0 \le x_2 \le 10 \\ 6x_1 + 13x_2 + \theta \ge 216 \end{cases} \rightarrow x^2 = (0,10)\,, \theta^2 = 86$$

دور دوم-گام سوم

حال به کمک x^2 و θ^2 بدست آمده در گام یک مجددا مسئله‌ی مرحله‌ی دو را حل می‌کنیم:

$\xi_1 = (26,16,6,12)$

$$\min 26y_1 + 16y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 6 - 0 \\ y_1 \qquad\quad \ge 12 - 10 \end{cases} \rightarrow y = (2,2)\,, \pi_1^2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$\xi_2 = (14,24,10,4)$

$$\min 14y_1 + 24y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 10 - 0 \\ y_1 \qquad\quad \ge 4 - 10 \end{cases} \rightarrow y = (0,5\,)\,, \pi_2^2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

با توجه به نتایج حاصل شده مقدار E_2 و e_2 را محاسبه می‌کنیم.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \sum_{k=1}^{2} P_k (\pi_k^v)^T T = 0.5\,(8\,,18) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0.5\,(12\,,0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (10,9)$$

$$e_2 = \sum_{k=1}^{2} P_k (\pi_k^v)^T h_k = 0.5\,(8\,,18) \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} + 0.5\,(12\,,0) \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = 192$$

حال به کمک $x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$، مقدار W^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$W^2 = e_2 - E_2 x^2 = 192 - (10,9) \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = 102 > \theta^2$$

در نتیجه x^2 جواب بهینه نیست و نیاز است تا برش بهینگی را به مسئله اضافه کنیم

$$E_2 x + \theta \ge e_2 \rightarrow 10x_1 + 9x_2 + \theta \ge 192$$

دور سوم-گام اول

مسئله‌ی مرحله اول را به کمک برش بهینگی اضافه شده مجددا حل می‌کنیم و x^3 را محاسبه می‌کنیم:

$$\min 7x_1 + 11x_2 + \theta$$

$$s.t.\begin{cases} 0 \le x_1 \le 10 \\ 0 \le x_2 \le 10 \\ 6x_1 + 13x_2 + \theta \ge 216 \\ 10x_1 + 9x_2 + \theta \ge 192 \end{cases} \rightarrow x^3 = (4,10)\,, \theta^3 = 62$$

دور دوم-گام سوم

حال به کمک x^3 و θ^3 بدست آمده در گام یک مجددا مسئله‌ی مرحله‌ی دو را حل می‌کنیم:

$\xi_1 = (26,16,6,12)$

$$\min 26y_1 + 16y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 6 - 4 \\ y_1 \qquad \ge 12 - 10 \end{cases} \qquad \rightarrow y = (2,0)\,, \pi_1^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$\xi_2 = (14,24,10,4)$

$$\min 14y_1 + 24y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 10 - 4 \\ y_1 \qquad \ge 4 - 10 \end{cases} \qquad \rightarrow y = (0,3\,)\,, \pi_2^3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

با توجه به نتایج حاصل شده مقدار E_2 و e_2 را محاسبه می‌کنیم.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \sum_{k=1}^{2} P_k (\pi_k^v)^T T = 0.5\,(0\,,26)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0.5\,(12\,,0)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (6,13)$$

$$e_3 = \sum_{k=1}^{2} P_k (\pi_k^v)^T h_k = 0.5\,(0\,,26)\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} + 0.5\,(12\,,0)\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = 216$$

حال به کمک $x^3 = \binom{4}{10}$، مقدار W^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$W^3 = e_3 - E_3 x^3 = 216 - (6,13)\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = 62 = \theta^3$$

در نتیجه به نقطه‌ی بهینه رسیده ایم و جواب بهینه‌ی مسئله $x^* = (4,10)$ می‌باشد.

b. نشان دهید که در بخش a اگر از هر نقطه‌ای که در ناحیه‌ی $4 \le x_2 \le 6 + x_1$ شروع کنیم، دقیقا مراحل مشابه‌ای برای بدست آوردن جواب بهینه طی خواهد شد.

برای نشان دادن این موضوع باید نشان بدهیم که برش بهینگی دور اول هر یک از این نقاط مشابه است. علت این استدلال این است که با یکی بودن برش بهینگی اول، در مراحل بعدی مسائل مشابه‌ای حل خواهد شد و از این رو قدم‌های یکسانی طی خواهد شد. هم‌چنین می‌دانیم که برش بهینگی برای هر نقطه مانند x^{v} را می‌توان با استفاده از تابع $Q(x)$ در همسایگی x^{v} بدست آورد.

در نتیجه نیاز داریم $Q(x)$ را محاسبه کنیم.

$\xi_1 = (26,16,6,12)$

$$\min 26y_1 + 16y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 6 - x_1 \\ y_1 \qquad\quad \geq 12 - x_2 \end{cases}$$

$\xi_2 = (14,24,10,4)$

$$\min 14y_1 + 24y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 10 - x_1 \\ y_1 \qquad\quad \geq 4 - x_2 \end{cases}$$

حال با توجه به ناحیه‌ی داده شده در صورت سوال $Q(x,\xi)$ را می‌نویسیم.

$$Q(x,\xi_1) = \begin{cases} 26(12 - x_2) + \dfrac{16(x_2 - x_1 - 6)}{2} & 6 + x_1 \leq x_2 \leq 10 \\ 26(12 - x2) & x_2 \leq 6 + x_1 \end{cases}$$

$$Q(x,\xi_2) = \begin{cases} 12(10 - x_1) & 4 \leq x_2 \leq 10\,, x_1 \leq 10 \\ 14(4 - x_2) & x_2 \leq 10\,, x_2 \geq x_1 - 6 \\ 14(4 - x_2) + 12(6 + x_2 - x1) & x_2 \leq 4, x_2 \geq x_1 - 6 \end{cases}$$

حال اگر بین بازه‌هایی که همپوشانی دارند اشتراک گرفته و امید ریاضی تابع مرحله‌ی دوم (Q(x)) را حساب کنیم، به شکل زیر خواهد بود:

$$Q(x) = \begin{cases} 192 - 10x_1 - 9x_2 & 6 + x_1 \leq x_2 \\ 216 - 6x_1 - 13x_2 & 4 \leq x_2 \leq 6 + x_1 \\ 216 - 6x_1 - 13x_2 & x_2 \leq x_1 - 6 \\ 220 - 6x_1 - 28x_2 & x_1 - 6 \leq x_2 \leq 4 \end{cases}$$

همان طور که مشاهده می‌شود برای هر x^{v} در بازه‌ی $4 \leq x_2 \leq 6 + x_1$ برش بهینگی دقیقا برابر با برش بهینگی اول در بخش a است. در نتیجه مراحل طی شده در الگوریتم L-شکل کاملا مشابه خواهد بود.

C. چون قبل از شروع، مقدار بی‌نهایت به تتا تخصیص میدهیم، برای حل بهینه مسئله مرحله دوم حتما یک برش بهینگی لازم است که در آن مقدار تتا به صورت محدود شود. از سوی دیگر چون جواب مسئله می‌بایست به صورت یک نقطه گوشه‌ای باشد، میتوان متصور شد که جواب بهینه مسئله یا از برخورد دو ابر صفحه حمایت‌کننده بدست می‌آید یا از برخورد یک ابر صفحه حمایت‌کننده و محدوده مرزی برای تولید نقطه گوشه‌ای جواب بهینه بدست می‌آید. لذا فرض مسئله نشان داده شد که حداقل به دو برش بهینگی الزم داریم و یا درصورت وجود جواب بهینه در برخورد روی یکی از مرزها، به حداقل یک برش الزم است. البته این مطلب زمانی صادق است که بهترین برشهای بهینگی را بزنیم در غیر این صورت نیاز به برشهای بیشتر است.

D. نمیتوان با استفاده از جواب مسئله مرحله دوم و بدون دوگان آن جواب مشخص و همیشگی برای مسئله یافت. یک رویکرد برای دستیابی به برش بهینگی بدین صورت است که با اعمال تعدادی نقطه در همسایگی اولیه، مسئله دوم را حل میکنیم. y های حاصله تنها در یک برش بهینگی حضور دارند. لذا با استفاده از تعدادی x به اندازه ابعاد صفحه و بدست اوردن y های مورد نظر و با استفاده از ترکیب خطی آن برش خطی مورد نظر را تولید می‌کنیم.

E. دقیقا مانند بخش b عمل می‌کنیم. از آنجایی که برش‌های بهینگی برای Q(x)، ابرصفحه‌های حمایت کننده‌ی آن هستند پس نیاز داریم این تابع را شناسایی کنیم و مانند قبل عمل می‌کنیم.

$\xi_1 = (26,16,6,12)$

$$\min 26y_1 + 16y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 6 - x_1 \\ y_1 \qquad\quad \geq 12 - x_2 \end{cases}$$

$\xi_2 = (14,24,10,4)$

$$\min 14y_1 + 24y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 10 - x_1 \\ \ y_1 \qquad\quad \geq 4 - x_2 \end{cases}$$

حال با توجه به ناحیه‌ی داده شده در صورت سوال $Q(x,\xi)$ را می‌نویسیم.

$$Q(x,\xi_1) = \begin{cases} 26(12-x_2) + \dfrac{16(x_2-x_1-6)}{2} & 6+x_1 \leq x_2 \leq 10 \\ \qquad 26(12-x2) & x_2 \leq 6+x_1 \end{cases}$$

$$Q(x,\xi_2) = \begin{cases} 12(10-x_1) & 4 \leq x_2 \leq 10\,, x_1 \leq 10 \\ 14(4-x_2) & x_2 \leq 10\,, x_2 \geq x_1 - 6 \\ 14(4-x_2) + 12(6+x_2-x1) & x_2 \leq 4, x_2 \geq x_1 - 6 \end{cases}$$

حال اگر بین بازه‌هایی که همپوشانی دارند اشتراک گرفته و امید ریاضی تابع مرحله‌ی دوم (Q(x)) را حساب کنیم، به شکل زیر خواهد بود:

$$Q(x)=\begin{cases}192-10x_1-9x_2 & 6+x_1\le x_2\\ 216-6x_1-13x_2 & 4\le x_2\le 6+x_1\\ 216-6x_1-13x_2 & x_2\le x_1-6\\ 220-6x_1-28x_2 & x_1-6\le x_2\le 4\end{cases}$$

همان طور که بازه‌ی مدنظر به ۴ بخش تقسیم شده که هر کدام برش بهینگی مربوط به خودشان را دارند.

سوال ۳ صفحه‌ی ۱۹۶

مسئله‌ی موجود در سوال ۲ را در نظر بگیرید. فرض کنید مسئله‌ی مرحله‌ی دوم دو محدودیت جدید $y_1\le 15$ و $y_2\le 2$ را شامل می‌شود. برش‌های شدنی را بدست آورید.

$$\min q_1y_1+q_2y_2$$

$$s.t.\begin{cases}y_1+2y_2\ge d_1-x_1\\ y_1\qquad\ \ \ge d_2-x_2\\ \qquad y_1\le 15\\ \qquad y_2\le 2\end{cases}$$

همان طور که در سوال دو مطرح شده بود، در صورت رخ دادن ξ_1، d_1 مقادیر $\{6,10\}$ و d_2 مقادیر $\{12,4\}$ را با احتمالات مساوی اخذ می‌کنند. با توجه حد بالای y_1 و y_2، مجموعه‌ی شدنی به شکل زیر است:

$$K_2(\xi)=\{x|x_1\ge d_1(\xi_1)-19\,,x_2\ge d_2(\xi_2)-15\}$$

$$K_2(\xi_1)=\{x|x_1\ge 6-19\,,x_2\ge 12-15\}$$

$$K_2(\xi_2)=\{x|x_1\ge 10-19\,,x_2\ge 4-15\}$$

$$\rightarrow K_2=K_2(\xi_1)\cap K_2(\xi_2)=\{x|x_1\ge -9\,,x_2\ge -3\}$$

از آنجایی که x_1 و x_2 هر دو بین ۰ و ۱۰ هستند در نتیجه همواره موجه‌اند و جواب شدنی هستند. در نتیجه نیازی به بررسی گام دو نیاز نیست.

دور اول- گام اول

مسئله‌ی مرحله‌ی اول را می‌نویسیم:

$$\min 7x_1+11x_2+\theta$$

$$s.t.\begin{cases}0\le x_1\le 10\\ 0\le x_2\le 10\end{cases}\qquad x^1=(0,0)\,,\ \theta^1=-\infty$$

دور اول- گام دوم

همان‌طور که پیش‌تر اشاره کردیم، نیازی به بررسی گام دوم نیست، اما برای نشان دادن و کسب اطمینان گام دو را می‌نویسیم و انتظار داریم مقدار بهینه برابر با ۰ شود.

$\xi_1 = (26,16,6,12)$

$$\min w' = v_1^+ + v_1^- + v_2^+ + v_2^- + v_3^+ + v_3^- + v_4^+ + v_4^-$$

$$s.t.\begin{cases} v_1^+ - v_1^- + y_1 + 2y_2 \geq 6 \\ v_2^+ - v_2^- + y_1 \geq 12 \\ v_3^+ + v_3^- + y_1 \leq 15 \\ v_4^+ + v_4^- + y_2 \leq 2 \\ v_i^+, v_i^-, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow w' = 0\,,$$

از آنجایی که مقدار بهینه w' برابر ۰ گردیده است، پس $x^1 = (0,0)$ جواب موجهی است و نیاز به اضافه کردن برش شدنی نداریم.

$\xi_2 = (14,24,10,4)$

$$\min w' = v_1^+ + v_1^- + v_2^+ + v_2^- + v_3^+ + v_3^- + v_4^+ + v_4^-$$

$$s.t.\begin{cases} v_1^+ - v_1^- + y_1 + 2y_2 \geq 10 \\ v_2^+ - v_2^- + y_1 \geq 4 \\ v_3^+ + v_3^- + y_1 \leq 15 \\ v_4^+ + v_4^- + y_2 \leq 2 \\ v_i^+, v_i^-, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow w' = 0\,,$$

مقدار بهینه w' برابر ۰ گردیده است، پس $x^1 = (0,0)$ جواب موجهی است و نیاز به اضافه کردن برش شدنی نداریم.

به گام سوم میرویم.

<u>دور اول-گام سوم</u>

مسئله را به کمک ξ های داده‌شده حل می‌کنیم.

$\xi_1 = (26,16,6,12)$

$$\min 26y_1 + 16y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 6 \\ y_1 \geq 12 \\ 0 \leq y_1 \leq 15 \\ 0 \leq y_2 \leq 2 \end{cases} \rightarrow y = (12,0)\,, \pi_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 26 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\xi_2 = (14,24,10,4)$

$$\min 14y_1 + 24y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 10 \\ y_1 \qquad \geq 4 \\ 0 \leq y_1 \leq 15 \\ 0 \leq y_2 \leq 2 \end{cases} \quad \rightarrow y = (6,2\ ) \,, \pi_2^1 = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

با توجه به نتایج حاصل شده مقدار E_1 و e_1 را محاسبه می‌کنیم.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \sum_{k=1}^{2} P_k (\pi_k^v)^T T = 0.5\ (0,26,0,0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0.5\ (14,0,0,4) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (7,13)$$

$$e_1 = \sum_{k=1}^{2} P_k (\pi_k^v)^T h_k = 0.5\ (0,26,0,0) \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.5\ (14,0,0,4) \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} = 230$$

حال به کمک $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$، مقدار W^1 را محاسبه می‌کنیم:

$$W^1 = e_1 - E_1 x^1 = 230 - (7,13) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 230 > \theta^1$$

در نتیجه x^1 جواب بهینه نیست و نیاز است تا برش بهینگی را به مسئله اضافه کنیم

$$E_1 x + \theta \geq e_1 \rightarrow 7x_1 + 13x_2 + \theta \geq 230$$

دور دوم-گام اول

مسئله‌ی مرحله اول را به کمک برش بهینگی اضافه شده مجددا حل می‌کنیم و x^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$\min 7x_1 + 11x_2 + \theta$$

$$s.t.\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 10 \\ 0 \leq x_2 \leq 10 \\ 7x_1 + 13x_2 + \theta \geq 230 \end{cases} \quad \rightarrow x^2 = (0,10) \,, \theta^2 = 100$$

دور دوم-گام دوم

$\xi_1 = (26,16,6,12)$

$$\min w' = v_1^+ + v_1^- + v_2^+ + v_2^- + v_3^+ + v_3^- + v_4^+ + v_4^-$$

$$s.t. \begin{cases} v_1^+ - v_1^- + y_1 + 2y_2 \geq 6 \\ v_2^+ - v_2^- + y_1 \geq 12 - 10 \\ v_3^+ + v_3^- + y_1 \leq 15 \\ v_4^+ + v_4^- + y_2 \leq 2 \\ v_i^+, v_i^-, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow w' = 0\,,$$

از آنجایی که مقدار بهینه w' برابر ۰ گردیده است، پس $x^2 = (0,10)$ جواب موجهی است و نیاز به اضافه کردن برش شدنی نداریم.

$\xi_2 = (14,24,10,4)$

$$\min w' = v_1^+ + v_1^- + v_2^+ + v_2^- + v_3^+ + v_3^- + v_4^+ + v_4^-$$

$$s.t. \begin{cases} v_1^+ - v_1^- + y_1 + 2y_2 \geq 10 \\ v_2^+ - v_2^- + y_1 \geq -6 \\ v_3^+ + v_3^- + y_1 \leq 15 \\ v_4^+ + v_4^- + y_2 \leq 2 \\ v_i^+, v_i^-, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow w' = 0\,,$$

مقدار بهینه w' برابر ۰ گردیده است، پس $x^2 = (0,10)$ جواب موجهی است و نیاز به اضافه کردن برش شدنی نداریم.

به گام سوم میرویم.

دور دوم-گام سوم

حال به کمک x^2 و θ^2 بدست آمده در گام یک مجددا مسئله‌ی مرحله‌ی دو را حل می‌کنیم:

$\xi_1 = (26,16,6,12)$

$$\min 26y_1 + 16y_2$$

$$s.t. \begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 6 - 0 \\ y_1 \geq 12 - 10 \\ 0 \leq y_1 \leq 15 \\ 0 \leq y_2 \leq 2 \end{cases} \rightarrow y = (2,2)\,, \pi_1^2 = \begin{pmatrix} 26 \\ 0 \\ 0 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$\xi_2 = (14,24,10,4)$

$$\min 14y_1 + 24y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 10 - 0 \\ y_1 \qquad \geq 4 - 10 \\ 0 \leq y_1 \leq 15 \\ 0 \leq y_2 \leq 2 \end{cases} \qquad \rightarrow y = (6,2\,)\,, \pi_2^2 = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

با توجه به نتایج حاصل شده مقدار E_2 و e_2 را محاسبه می‌کنیم.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \sum_{k=1}^{2} P_k (\pi_k^v)^T T = 0.5\,(26\,,0\,,0\,,36) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0.5\,(14\,,0\,,0\,,4) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (20{,}0)$$

$$e_2 = \sum_{k=1}^{2} P_k (\pi_k^v)^T h_k = 0.5\,(26{,}0{,}0{,}36) \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.5\,(14{,}0{,}0{,}4) \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} = 188$$

حال به کمک $x^2 = \binom{0}{10}$، مقدار W^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$W^2 = e_2 - E_2 x^2 = 188 - (20{,}0)\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = 188 > \theta^2$$

در نتیجه x^2 جواب بهینه نیست و نیاز است تا برش بهینگی را به مسئله اضافه کنیم

$$E_2 x + \theta \geq e_2 \rightarrow 20x_1 + 0x_2 + \theta \geq 188$$

دور سوم-گام اول

مسئله‌ی مرحله اول را به کمک برش بهینگی اضافه شده مجددا حل می‌کنیم و x^3 را محاسبه می‌کنیم:

$$\min 7x_1 + 11x_2 + \theta$$

$$s.t.\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 10 \\ 0 \leq x_2 \leq 10 \\ 7x_1 + 13x_2 + \theta \geq 230 \\ 20x_1 + \theta \geq 188 \end{cases} \rightarrow x^3 = (6.77{,}10)\,, \theta^3 = 52.615$$

دور سوم-گام دوم

$$\xi_1 = (26{,}16{,}6{,}12)$$

$$\min w' = v_1^+ + v_1^- + v_2^+ + v_2^- + v_3^+ + v_3^- + v_4^+ + v_4^-$$

$$s.t.\begin{cases} v_1^+ - v_1^- + y_1 + 2y_2 \geq 6 - 6.77 \\ v_2^+ - v_2^- + y_1 \geq 12 - 10 \\ v_3^+ + v_3^- + y_1 \leq 15 \\ v_4^+ + v_4^- + y_2 \leq 2 \\ v_i^+, v_i^-, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow w' = 0\,,$$

از آنجایی که مقدار بهینه w' برابر ۰ گردیده است، پس $x^3 = (6.77,10)$ جواب موجهی است و نیاز به اضافه کردن برش شدنی نداریم.

$\xi_2 = (14,24,10,4)$

$$\min w' = v_1^+ + v_1^- + v_2^+ + v_2^- + v_3^+ + v_3^- + v_4^+ + v_4^-$$

$$s.t.\begin{cases} v_1^+ - v_1^- + y_1 + 2y_2 \geq 10 - 6.77 \\ v_2^+ - v_2^- + y_1 \geq -6 \\ v_3^+ + v_3^- + y_1 \leq 15 \\ v_4^+ + v_4^- + y_2 \leq 2 \\ v_i^+, v_i^-, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow w' = 0\,,$$

مقدار بهینه w' برابر ۰ گردیده است، پس $x^3 = (6.77,10)$ جواب موجهی است و نیاز به اضافه کردن برش شدنی نداریم.

به گام سوم میرویم.

دور سوم-گام سوم

حال به کمک x^3 و θ^3 بدست آمده در گام یک مجددا مسئله‌ی مرحله‌ی دو را حل می‌کنیم:

$\xi_1 = (26,16,6,12)$

$$\min 26y_1 + 16y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 6 - 6.77 \\ y_1 \geq 12 - 10 \\ 0 \leq y_1 \leq 15 \\ 0 \leq y_2 \leq 2 \end{cases} \rightarrow y = (2,0)\,, \pi_1^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 26 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\xi_2 = (14,24,10,4)$

$$\min 14y_1 + 24y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 10-4 \\ y_1 \qquad\quad \geq 4-10 \end{cases} \qquad \rightarrow y = (0,1.615\ ) \,, \pi_2^3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

با توجه به نتایج حاصل شده مقدار E_2 و e_2 را محاسبه می‌کنیم.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \sum_{k=1}^{2} P_k (\pi_k^v)^T T = 0.5\ (0\,,26\,,0\,,0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0.5\ (12\,,0\,,0\,,0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (6,13)$$

$$e_3 = \sum_{k=1}^{2} P_k (\pi_k^v)^T h_k = 0.5\ (0,26,0,0) \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.5\ (12,0,0,0) \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} = 216$$

$$W^3 = e_3 - E_3 x^3 = 216 - (6,13) \begin{pmatrix} 6.77 \\ 10 \end{pmatrix} = 45 < \theta^3$$

در نتیجه x^3 جواب بهینه است و متوقف می‌شویم.

مثال تجزیه منظم (مثال کتاب)

$$W = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad h_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \qquad q_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هم‌چنین تابع هدف مرحله دوم برای سناریو اول و دوم به شکل زیر تعریف گردیده است:

$$Q_1(x) = \begin{cases} -x-1 & x \leq -1 \\ 0 & x \geq -1 \end{cases}$$

$$Q_2(x) = \begin{cases} -1.5x & x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{2}{7}(x-2) & 2 \leq x \leq 9 \\ x-7 & x \geq 9 \end{cases}$$

$$\min z = \frac{1}{2}y_{11} + \frac{1}{2}(\frac{3}{2}y_{12} + \frac{2}{7}y_{32} + y_{42})$$

$$\begin{cases} y_{11} - y_{21} - y_{31} - y_{41} = -1 - x \\ y_{21} + y_{51} = 2 \\ y_{31} + y_{61} = 7 \end{cases}$$ سناریوی اول

$$\begin{cases} y_{12} - y_{22} - y_{32} - y_{42} = -x \\ y_{22} + y_{52} = 2 \\ y_{32} + y_{62} = 7 \end{cases}$$ سناریوی دوم

$$-20 \le x \le 20$$

فرض کردیم $a^1 = -0.5$ یک نقطه شروع برای الگوریتم تجزیه منظم است.

دور اول-گام اول

مسئله‌ی زیر را حل میکنیم و مقدار x^1 را بدست می‌آوریم. همچنین چون هنوز برش بهینگی به مسئله اضافه نشده θ را برابر با $-\infty$ در نظر می‌گیریم.

$$\min z = \theta + \frac{1}{2}|x - a^1|^2$$

$$-20 \le x \le 20 \qquad \rightarrow x^1 = -0.5 \quad \theta^1 = -\infty$$

از آنجایی که θ^1 برابر با منفی بی‌نهایت است، واضح است که شرط توقف $C^T x^v + e^T \theta^v = C^T a^v + Q(a^v)$ برقرار نیست و به گام دوم می‌رویم.

دور اول-گام دوم

بررسی می‌کنیم که آیا x^1 متعلق به k_2 هست یا خیر.

سناریوی اول

$$\min w' = v_1^+ - v_1^- + v_2^+ - v_2^- + v_3^+ - v_3^-$$

$$\begin{cases} v_1^+ - v_1^- + y_{11} - y_{21} - y_{31} - y_{41} = -1 - (-0.5) \\ v_2^+ - v_2^- + y_{21} + y_{51} = 2 \\ v_3^+ - v_3^- + y_{31} + y_{61} = 7 \end{cases} \qquad \rightarrow w' = 0$$

```
solution for: تجزیه منظم - دوراول - گام دوم - سناریوی اول
objective: 0.000
y11 = 8.500
y21 = 2.000
y31 = 7.000
```

سناریوی دوم

$$\min w' = v_1^+ - v_1^- + v_2^+ - v_2^- + v_3^+ - v_3^-$$

$$\begin{cases} v_1^+ - v_1^- + y_{11} - y_{21} - y_{31} - y_{41} = -(-0.5) \\ v_2^+ - v_2^- + y_{21} + y_{51} = 2 \\ v_3^+ - v_3^- + y_{31} + y_{61} = 7 \end{cases} \rightarrow w' = 0$$

```
solution for: تجزیه منظم - دوراول - گام دوم - سناریوی دوم
objective: 0.000
y12 = 9.500
y22 = 2.000
y32 = 7.000
```

همان طور که مشاهده می‌شود مقدار تابع هدف w' در هر دو سناریو برابر با ۰ شده و در نتیجه x^1 موجه است و می‌توانیم به گام سوم برویم.

دور اول-گام سوم

سناریوی اول

$$\min z = y_{11}$$

$$\begin{cases} y_{11} - y_{21} - y_{31} - y_{41} = -1 - (-0.5) \\ y_{21} + y_{51} = 2 \\ y_{31} + y_{61} = 7 \end{cases}$$

```
solution for: تجزیه منظم - دوراول - گام سوم - سناریوی اول
objective: 0.000
y41 = 0.500
y51 = 2.000
y61 = 7.000
```

```
simplex multipliers for optimal solution is:  [[0], [0], [0]]
```

$$\begin{cases} E_1 = 0.5\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ e_1 = 0.5\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \rightarrow 0 - 0(-0.5) > \theta^1$$

در نتیجه برش بهینگی را باید اضافه کنیم:

$$opitmality\ cut\ \rightarrow 0x + \theta_1 \geq 0\ \rightarrow\ \theta_1 \geq 0$$

سناریوی دوم

$$\min z = \frac{3}{2} y_{12} + \frac{2}{7} y_{32} + y_{42}$$

$$\begin{cases} y_{12} - y_{22} - y_{32} - y_{42} = -(-0.5) \\ \quad y_{22} + y_{52} = 2 \\ \quad y_{32} + y_{62} = 7 \end{cases}$$

```
solution for: تجزیه منظم - دوراول - گام سوم - سناریوی دوم
objective: 0.750
y12 = 0.500
y52 = 2.000
y62 = 7.000
```

```
simplex multipliers for optimal solution is:  [[1.5], [0], [0]]
```

$$\begin{cases} E_1 = 0.5[1.5 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 0 \\ e_1 = 0.5[1.5 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}0\\2\\7\end{bmatrix} = 0 \end{cases} \rightarrow 0 - \frac{3}{4}(-0.5) > \theta^1$$

در نتیجه برش بهینگی را باید اضافه کنیم:

$$opitmality\ cut\ \rightarrow \frac{3}{4}x + \theta_2 \geq 0\ \rightarrow\ \theta_2 \geq -\frac{3}{4}x$$

دور اول-گام پنجم

$$C^T x^v + Q(x^v) \leq C^T a^v + Q(a^v) \rightarrow Q(-0.5) \leq Q(-0.5) \rightarrow \frac{3}{8} \leq \frac{3}{8}\ \rightarrow\ a^2 = x^1 = -0.5$$

دور دوم-گام اول

مسئله‌ی زیر را حل میکنیم و مقدار x^2 را بدست می‌آوریم. هم‌چنین چون هنوز برش بهینگی به مسئله اضافه نشده θ را برابر با $-\infty$ در نظر می‌گیریم.

$$\min z = \theta_1 + \theta_2 + \frac{1}{2}(x + 0.5)^2$$

$$s.t \begin{cases} \theta_1 \geq 0 \\ \theta_2 \geq -\frac{3}{4}x \\ -20 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

```
solution for: تجزیه منظم-دور دوم-گام اول
objective: 0.09375
x1 = 0.25000
teta2 = -0.18750
```

با توجه به خروجی نرم افزار، $x^2 = 0.25\ ,\ \theta_1 = 0\ ,\ \theta_2 = -0.1875$

شرط توقف $C^T x^v + e^T \theta^v = C^T a^v + Q(a^v)$ را بررسی می‌کنیم:

$$\theta_1 + \theta_2 = Q(a^2 = -0.5) \rightarrow -0.1875 \neq \frac{3}{8}$$

شرط توقف برقرار نیست و به گام دوم می‌رویم.

دور دوم-گام دوم

بررسی می‌کنیم که آیا x^2 متعلق به k_2 هست یا خیر.

سناریوی اول

$$\min w' = v_1^+ - v_1^- + v_2^+ - v_2^- + v_3^+ - v_3^-$$

$$\begin{cases} v_1^+ - v_1^- + y_{11} - y_{21} - y_{31} - y_{41} = -1 - (0.25) \\ v_2^+ - v_2^- + y_{21} + y_{51} = 2 \\ v_3^+ - v_3^- + y_{31} + y_{61} = 7 \end{cases} \qquad \rightarrow w' = 0$$

```
solution for: تجزیه منظم - دور دوم - گام دوم - سناریوی اول
objective: 0.000
y11 = 7.750
y21 = 2.000
y31 = 7.000
```

سناریوی دوم

$$\min w' = v_1^+ - v_1^- + v_2^+ - v_2^- + v_3^+ - v_3^-$$

$$\begin{cases} v_1^+ - v_1^- + y_{11} - y_{21} - y_{31} - y_{41} = -(0.25) \\ v_2^+ - v_2^- + y_{21} + y_{51} = 2 \\ v_3^+ - v_3^- + y_{31} + y_{61} = 7 \end{cases} \rightarrow w' = 0$$

```
solution for: تجزیه منظم - دور دوم - گام دوم - سناریوی دوم
objective: 0.000
y12 = 8.750
y22 = 2.000
y32 = 7.000
```

همان طور که مشاهده می‌شود مقدار تابع هدف w' در هر دو سناریو برابر با ۰ شده و در نتیجه x^2 موجه است و می‌توانیم به گام سوم برویم.

دور دوم-گام سوم

سناریوی اول

$$\min z = y_{11}$$

$$\begin{cases} y_{11} - y_{21} - y_{31} - y_{41} = -1 - (0.25) \\ y_{21} + y_{51} = 2 \\ y_{31} + y_{61} = 7 \end{cases}$$

```
solution for: تجزیه منظم - دور دوم - گام سوم - سناریوی اول
objective: 0.000
y41 = 1.250
y51 = 2.000
y61 = 7.000
```

```
simplex multipliers for optimal solution is:  [[0], [0], [0]]
```

$$\begin{cases} E_1 = 0.5\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 0 \\ e_1 = 0.5\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\\7\end{bmatrix} = 0 \end{cases} \quad \rightarrow 0 - 0(0.25) \ngtr \theta_1 = 0$$

در نتیجه برای این سناریو نیاز به اضافه کردن شرط بهینگی نیست

سناریوی دوم

$$\min z = \frac{3}{2}y_{12} + \frac{2}{7}y_{32} + y_{42}$$

$$\begin{cases} y_{12} - y_{22} - y_{32} - y_{42} = -(-0.5) \\ y_{22} + y_{52} = 2 \\ y_{32} + y_{62} = 7 \end{cases}$$

```
solution for: تجزیه منظم - دوراول - گام سوم - سناریوی دوم
objective: 0.750
y12 = 0.500
y52 = 2.000
y62 = 7.000
```

```
simplex multipliers for optimal solution is:  [[1.5], [0], [0]]
```

$$\begin{cases} E_1 = 0.5\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 0 \\ e_1 = 0.5\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\7\end{bmatrix} = 0 \end{cases} \quad \rightarrow 0 - 0(0.25) > \theta_2 = -0.1875$$

نامساوی بالا برقرار است، در نتیجه برش بهینگی را باید اضافه کنیم:

$$opitmality\ cut\ \rightarrow 0x + \theta_2 \geq 0\ \rightarrow\ \theta_2 \geq 0$$

دور دوم-گام پنجم

$$Q(0.25) = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(0) = 0$$

$$C^T x^v + Q(x^v) \leq C^T a^v + Q(a^v) \rightarrow Q(0.25) \leq Q(-0.5) \rightarrow 0 < \frac{3}{8}$$

در نتیجه $a^3 = 0.25$ و به گام اول برمیگردیم.

دور سوم-گام اول

مسئله‌ی زیر را حل میکنیم و مقدار x^3 را بدست می‌آوریم. هم‌چنین چون هنوز برش بهینگی به مسئله اضافه نشده θ را برابر با $-\infty$ در نظر می‌گیریم.

$$\min z = \ \theta_1 + \ \theta_2 + \frac{1}{2}(x - 0.25)^2$$

$$s.t \begin{cases} \theta_1 \geq 0 \\ \theta_2 \geq 0 \\ \theta_2 \geq -\frac{3}{4}x \\ -20 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

```
solution for: تجزیه منظم-دور سوم-گام اول
objective: 0.0000
x1 = 0.2500
teta2 = 0.0000
```

با توجه به خروجی نرم افزار، $x^3 = 0.25\ ,\ \theta_1 = 0\ ,\ \theta_2 = 0$

شرط توقف $C^T x^v + e^T \theta^v = C^T a^v + Q(a^v)$ را بررسی می‌کنیم:

$$\theta_1 + \ \theta_2 = Q(a^3 = 0.25) \rightarrow\ 0 = 0$$

شرط برقرار است و جواب پیدا شده است، در نتیجه متوقف می‌شویم.

کد نرم افزار به پیوست، ضمیمه گردیده است. به منظور جلوگیری از شلوغی، از آوردن کدها در قسمت گزارش خودداری شد.