به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

تمرین شماره۴

برنامه ریزی تصادفی

احمد امامی

۹۹۲۰۷۵۲۱

سوال ۲ صفحه ۱۷۶

(a) : x ها عدد صحیح باشند

$$Q(x,\xi) = \min\{\, 2y_1 + y_2 \mid y_1 \ge x - \xi \,,\; y_2 \ge \xi - x \,, y \ge 0 \,, integer \,\}$$

تابع هدف برابر است با:

$$z = cx + Q(x,\xi)$$

Expected Value (EV)

برای حل مسئله‌ی امید ریاضی مقدار امید ریاضی ξ را حساب می‌کنیم و با جایگذاری در مسئله، جواب بهینه را حساب می‌کنیم.

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 2 = \frac{3}{2}$$

$$Q\left(x, \frac{3}{2}\right) = \min\{\, 2y_1 + y_2 \mid y_1 \ge x - \frac{3}{2},\; y_2 \ge \frac{3}{2} - x \,, y \ge 0 \,, integer \,\}$$

$$\begin{cases} if\ x \le 1 \ \rightarrow\ y_1 = 0 \,, y_2 = \left\lceil \frac{3}{2} - x \right\rceil \\ if\ x > 1 \ \rightarrow\ y_1 = \left\lceil x - \frac{3}{2} \right\rceil \,, y_2 = 0 \end{cases} \rightarrow Q\left(x, \frac{3}{2}\right) = \begin{cases} \left\lceil \frac{3}{2} - x \right\rceil & x \le 1 \\ 2\left\lceil x - \frac{3}{2} \right\rceil & x > 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow z = \begin{cases} cx + \left\lceil \frac{3}{2} - x \right\rceil & x \le 1 \\ cx + 2\left\lceil x - \frac{3}{2} \right\rceil & x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^* = 0 \,, z^* = 2 & c \ge 1 \\ x^* = 1 \,, z^* = c + 1 & c < 1 \end{cases}$$

Wait and see (ws)

حالت اول: x ها عدد صحیح باشند

$$\xi = 1 \ \rightarrow \begin{cases} if\ \ x \le 1 \ \Rightarrow\ \ y_1 = 0 \,, y_2 = 1 - x \\ if\ \ x > 1 \ \Rightarrow\ \ y_1 = x - 1 \,, y_2 = 0 \end{cases} \rightarrow Q(x,1) = \begin{cases} 1 - x & x \le 1 \\ 2(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow\ z = \begin{cases} (c-1)x + 1 & x \le 1 \\ (c+2)x - 2 & x > 1 \end{cases}$$

از آنجایی که c بزرگتر یا مساوی ۰ است، برای جواب بهینه دو حالت زیر را داریم:

$$0 \le c < 1 \ \rightarrow\ x^* = 1 \,, z^* = c$$

$$1 \le c \ \rightarrow\ x^* = 0 \,, z^* = 1$$

حال محاسبات بالا را برای حالت $\xi = 2$ انجام می‌دهیم:

$$\xi = 2 \ \rightarrow \begin{cases} if \ \ x \le 2 \ \Rightarrow \ \ y_1 = 0\,, y_2 = 2 - x \\ if \ \ x > 2 \ \Rightarrow \ \ y_1 = x - 2\,, y_2 = 0 \end{cases} \rightarrow Q(x,2) = \begin{cases} 2 - x & x \le 2 \\ 2(x-2) & x > 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \ z = \begin{cases} (c-1)x + 2 & x \le 2 \\ (c+2)x - 4 & x > 2 \end{cases}$$

$$0 \le c < 1 \ \rightarrow \ x^* = 2\,, z^* = 2c$$

$$1 \le c \ \rightarrow \ x^* = 0\,, z^* = 2$$

جواب بهینه را به ازای هر دو مقدار ξ محاسبه کردیم .حال میتوانیم جواب مسئله‌ی ws را به کمک احتمالات داده شده محاسبه کنیم.

$$ws \ optimal \ solution = \begin{cases} \frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 2 = \frac{3}{2} & c \ge 1 \\ \frac{1}{2} * c + \frac{1}{2} * 2c = \frac{3}{2}c & 0 \le c < 1 \end{cases}$$

حال جواب‌های دو مسئله را مقایسه می‌کنیم. برای $c \ge 1$ مقدار جواب بهینه‌ی مسئله‌ی EV برابر با ۲ و جواب مسئله‌ی ws برابر با $\frac{3}{2}$ است. برای $0 \le c < 1$ مقدار جواب بهینه‌ی مسئله‌ی EV برابر با c+1 و جواب مسئله‌ی ws برابر با $\frac{3}{2}c$ می‌باشد. در هر دو حالت جواب مسئله‌ی EV بزرگتر از مسئله‌ی WS است.

(b) : x ها عدد پیوسته باشند

Expected Value (EV)

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 2 = \frac{3}{2}$$

$$Q\left(x, \frac{3}{2}\right) = \min\{\, 2y_1 + y_2 \mid \, y_1 \ge x - \frac{3}{2},\ y_2 \ge \frac{3}{2} - x\,, y \ge 0\,, continuous\,\}$$

$$\begin{cases} if \ x \le \frac{3}{2} \ \rightarrow \ y_1 = 0\,, y_2 = \left\lceil \frac{3}{2} - x \right\rceil \\ if \ x > \frac{3}{2} \ \rightarrow \ y_1 = \left\lceil x - \frac{3}{2} \right\rceil\,, y_2 = 0 \end{cases} \rightarrow z = \begin{cases} cx + \left\lceil \frac{3}{2} - x \right\rceil & x \le \frac{3}{2} \\ cx + 2\left\lceil x - \frac{3}{2} \right\rceil & x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

پاسخ بهینه به ازای بازه‌های مختلف c عبارت است از :

$$c > 2 \ \rightarrow \ x^* = 0, z^* = 2$$

$$1 < c \le 2 \ \rightarrow \ x^* = \frac{1}{2}, z^* = \frac{1}{2}c + 1$$

$$0 < c \le 1 \ \rightarrow \ x^* = \frac{3}{2}, z^* = \frac{3}{2}c$$

Wait and see (WS)

برای حالت ws نتایج مانند حالت عدد صحیح است، بنابر این از نوشتن مجدد آن پرهیز می‌کنیم.

حال به مقایسه‌ی مقادیر توابع هدف دو مسئله می‌پردازیم:

$$\begin{cases} ws = \frac{3}{2}, ev = 2 & c > 2 & \Rightarrow ws < ev \\ ws = \frac{3}{2}, ev = \frac{1}{2}c + 1 & 1 < c \leq 2 & \Rightarrow ws < ev \\ ws = \frac{3}{2}c, ev = \frac{3}{2}c & 0 \leq c \leq 1 & \Rightarrow ws = ev \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود برای مقادیر $0 \leq c \leq 1$ مقدار EV با WS برابر است، اما برای مقادیر که $1 < c$ مقدار EV همواره بزرگ تر از WS می‌باشد.

سوال ۳ صفحه ۱۷۷

$$\min_{x\geq 0} 2x + E_\xi\{\xi . y | y \geq 1 - x, y \geq 0\}$$

ξ مقادیر ۱ و ۳ را به ترتیب با احتمالات ۰.۷۵ و ۰.۲۵ می‌گیرد. با این فرض مسئله‌ی WS و EV را حل می‌کنیم:

Wait and see (WS)

$\boldsymbol{\xi = 1}$

$\min\{2x + y \mid y \geq 1 - x, y \geq 0\} \rightarrow x^* = 0, y^* = 1 \rightarrow z^* = 1$

$\boldsymbol{\xi = 3}$

$\min\{2x + 3y \mid y \geq 1 - x, y \geq 0\} \rightarrow x^* = 1, y^* = 0 \rightarrow z^* = 2$

$\rightarrow WS = \frac{3}{4} * 1 + \frac{1}{4} * 2 = \frac{5}{4}$

Expected Value (EV)

$$\bar{\xi} = \frac{3}{4} * 1 + \frac{1}{4} * 3 = \frac{3}{2}$$

$\min\{2x + \frac{3}{2}y \mid y \geq 1 - x, y \geq 0\} \rightarrow x^* = 0, y^* = 1 \rightarrow z^* = \frac{3}{2}$

همان طور که مشاهده می‌کنیم مقدار تابع هدف بهینه در مسئله‌ی EV بزرگ‌تر از مسئله‌ی WS است.