MODUL PRAKTIKUM 5

PROBLEM-PROBLEM DENGAN PEMECAHAN MASALAH MENGGUNAKAN PARADIGMA DIVIDE & CONQUER

MATA KULIAH
ANALISIS ALGORITMA
D10G.4205 & D10K.0400601

PENGAJAR : (1) MIRA SURYANI, S.Pd., M.Kom
(2) INO SURYANA, Drs., M.Kom
(3) R. SUDRAJAT, Drs., M.Si
FAKULTAS : MIPA
SEMESTER : IV dan VI

PROGRAM STUDI S-1 TEKNIK INFORMATIKA
DEPARTEMEN ILMU KOMPUTER
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PADJADJARAN
APRIL 2019

Pendahuluan

PARADIGMA DIVIDE & CONQUER

Divide & Conquer merupakan teknik algoritmik dengan cara memecah input menjadi beberapa bagian, memecahkan masalah di setiap bagian secara **rekursif**, dan kemudian menggabungkan solusi untuk subproblem ini menjadi solusi keseluruhan. Menganalisis *running time* dari algoritma *divide & conquer* umumnya melibatkan penyelesaian rekurensi yang membatasi *running time* secara rekursif pada instance yang lebih kecil

PENGENALAN REKURENSI

- Rekurensi adalah persamaan atau ketidaksetaraan yang menggambarkan fungsi terkait nilainya pada input yang lebih kecil. Ini adalah fungsi yang diekspresikan secara rekursif
- Ketika suatu algoritma berisi panggilan rekursif untuk dirinya sendiri, *running time*-nya sering dapat dijelaskan dengan perulangan
- Sebagai contoh, running time worst case $T(n)$ dari algoritma merge-sort dapat dideskripsikan dengan perulangan:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n = 1, \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{if } n > 1 \end{cases}$$
$$\text{with solution } T(n) = \Theta(n \lg n).$$

BEDAH ALGORITMA MERGE-SORT

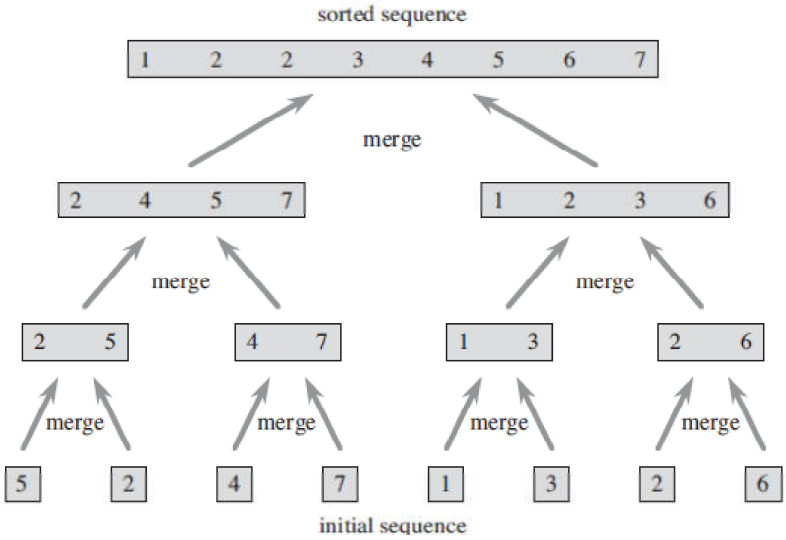
- Merupakan algoritma sorting dengan paradigma divide & conquer
- Running time worst case-nya mempunyai laju pertumbuhan yang lebih rendah dibandingkan insertion sort
- Karena kita berhadapan dengan banyak subproblem, kita notasikan setiap subproblem sebagai sorting sebuah subarray A[p..r]
- Inisialisasi, p=1 dan r=n, tetapi nilai ini berubah selama kita melakukan perulangan subproblem

Untuk mengurutkan A[p..r]:

- **Divide** dengan membagi input menjadi 2 subarray A[p..q] dan A[q+1 .. r]
- **Conquer** dengan secara rekursif mengurutkan subarray A[p..q] dan A[q+1 .. r]
- **Combine** dengan menggabungkan 2 subarray terurut A[p..q] dan A[q+1 .. r] untuk menghasilkan 1 subarray terurut A[p..r]
- Untuk menyelesaikan langkah ini, kita membuat prosedur MERGE(A, p, q, r)
- Rekursi berhenti apabila subarray hanya memiliki 1 elemen (secara trivial terurut)

PSEUDOCODE MERGE-SORT

```
MERGE-SORT(A, p, r)
//sorts the elements in the subarray A[p..r]
1   if p < r
2      then q ← ⌊(p + r)/2⌋
3           MERGE-SORT(A, p, q)
4           MERGE-SORT(A, q + 1, r)
5           MERGE(A, p, q, r)
```



Gambar 1. Ilustrasi algoritma merge-sort

PROSEDUR MERGE

- Prosedur merge berikut mengasumsikan bahwa subarray A[p..q] dan A[q+1 .. r] berada pada kondisi terurut. Prosedur merge menggabungkan kedua subarray untuk membentuk 1 subarray terurut yang menggantikan array saat ini A[p..r] (input).
- Ini membutuhkan waktu Θ(n), dimana n = r-p+1 adalah jumlah yang digabungkan
- Untuk menyederhanakan code, digunakanlah elemen sentinel (dengan nilai ∞) untuk menghindari keharusan memeriksa apakah subarray kosong di setiap langkah dasar.

PSEUDOCODE PROSEDUR MERGE

```
MERGE(A, p, q, r)
1.  n1 ← q - p + 1;    n2 ← r - q
2.  //create arrays L[1 .. n1 + 1] and R[1 .. n2 + 1]
3.  for i ← 1 to n1  do  L[i] ← A[p + i - 1]
4.  for j ← 1 to n2  do  R[j] ← A[q + j]
5.  L[n1 + 1] ← ∞; R[n2 + 1] ← ∞
6.  i ← 1; j ← 1
7.  for k ← p to r
8.      do  if L[i] ≤ R[j]
9.              then  A[k] ← L[i]
10.                   i ← i + 1
11.             else  A[k] ← R[j]
12.                   j ← j + 1
```

RUNNING TIME MERGE

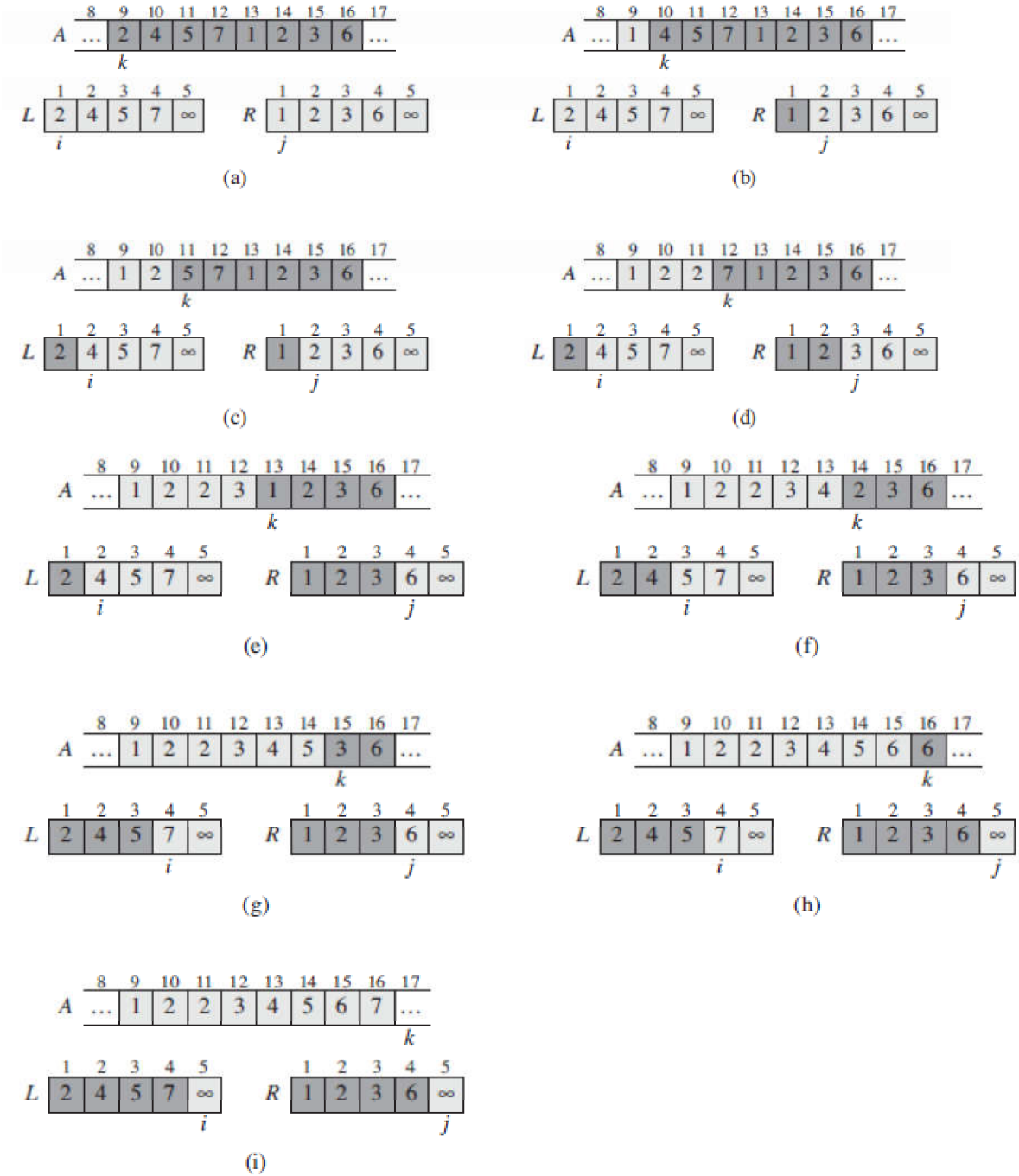
Untuk melihat running time prosedur MERGE berjalan di Θ(n), dimana n-p+1, perhatikan perulangan for pada baris ke 3 dan 4,

$$\Theta(n1 + n2) = \Theta(n)$$

dan ada sejumlah n iterasi pada baris ke 8-12 yang membutuhkan waktu konstan.

CONTOH SOAL MERGE-SORT

MERGE(A, 9, 12, 16), dimana subarray A[9 .. 16] mengandung sekuen (2,4,5,7,1,2,3,6)



Algoritma merge-sort sangat mengikuti paradigma divide & conquer:

- **Divide** problem besar ke dalam beberapa subproblem
- **Conquer** subproblem dengan menyelesaikannya secara **rekursif**. Namun, apabila subproblem berukuran kecil, diselesaikan saja secara langsung.
- **Combine** solusi untuk subproblem ke dalam solusi untuk original problem

Gunakan sebuah persamaan rekurensi (umumnya sebuah perulangan) untuk mendeskripsikan running time dari algoritma berparadigma divide & conquer.

T(n) = running time dari sebuah algoritma berukuran n

- Jika ukuran problem cukup kecil (misalkan $n \leq c$, untuk nilai c konstan), kita mempunyai *best case*. Solusi brute-force membutuhkan waktu konstan $\Theta(1)$
- Sebailknya, kita membagi input ke dalam sejumlah a subproblem, setiap $(1/b)$ dari ukuran

original problem (Pada merge sort $a = b = 2$)

- Misalkan waktu yang dibutuhkan untuk membagi ke dalam n-ukuran problem adalah $D(n)$
- Ada sebanyak a subproblem yang harus diselesaikan, setiap subproblem (n/b) → setiap subproblem membutuhkan waktu T(n/b) sehingga kita menghabiskan $aT(n/b)$
- Waktu untuk **combine** solusi kita misalkan $C(n)$
- Maka persamaan **rekurensinya untuk divide & conquer** adalah:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n \leq c \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + D(n) + C(n) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Setelah mendapatkan rekurensi dari sebuah algoritma divide & conquer, selanjutnya rekurensi harus diselesaikan untuk dapat menentukan kompleksitas waktu asimptotiknya. Penyelesaian rekurensi dapat menggunakan 3 cara yaitu, **metode subtitusi, metode recursion-tree dan metode master**. Ketiga metode ini dapat dilihat pada slide yang diberikan.

Studi Kasus (Lanjutan)

Studi Kasus 5: Mencari Pasangan Tititk Terdekat (Closest Pair of Points)
Identifikasi Problem:
Diberikan array n poin dalam bidang kartesius, dan problemnya adalah mencari tahu pasangan poin terdekat dalam bidang tersebut dengan merepresentasikannya ke dalam array. Masalah ini muncul di sejumlah aplikasi. Misalnya, dalam kontrol lalu lintas udara, kita mungkin ingin memantau pesawat yang terlalu berdekatan karena ini mungkin menunjukkan kemungkinan tabrakan. Ingat rumus berikut untuk jarak antara dua titik p dan q.

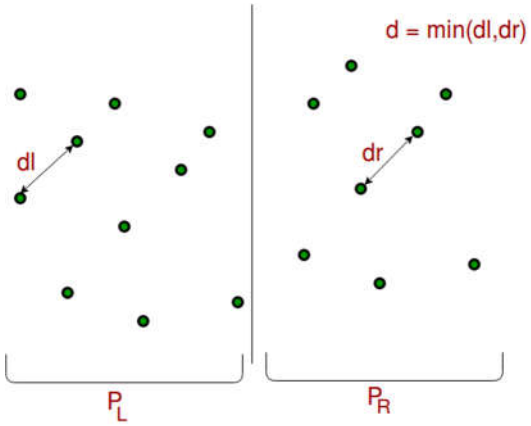
$$\|pq\| = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}$$

Solusi
Solusi umum dari permasalahan tersebut adalah menggunakan algoritma **Brute force** dengan O (n ^ 2), hitung jarak antara setiap pasangan dan kembalikan yang terkecil. Namun, kita dapat menghitung jarak terkecil dalam waktu **O (nLogn) menggunakan strategi Divide and Conquer**. Ikuti algoritma berikut:

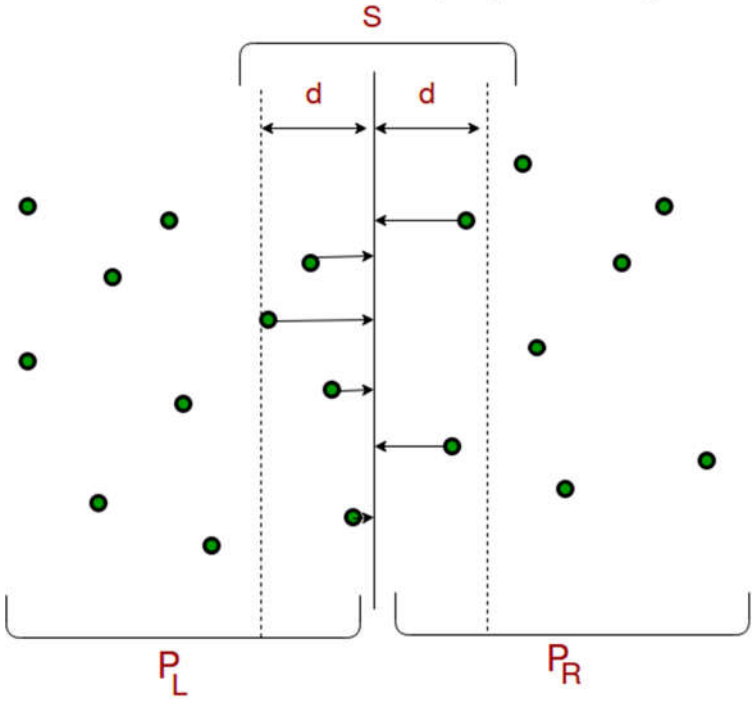
Input: An array of n points P[]
Output: The smallest distance between two points in the given array.

As a pre-processing step, input array is sorted according to x coordinates.

1) Find the middle point in the sorted array, we can take *P[n/2]* as middle point.
2) Divide the given array in two halves. The first subarray contains points from P[0] to P[n/2]. The second subarray contains points from P[n/2+1] to P[n-1].
3) Recursively find the smallest distances in both subarrays. Let the distances be dl and dr. Find the minimum of dl and dr. Let the minimum be d.



4) From above 3 steps, we have an upper bound d of minimum distance. Now we need to consider the pairs such that one point in pair is from left half and other is from right half. Consider the vertical line passing through passing through P[n/2] and find all points whose x coordinate is closer than d to the middle vertical line. Build an array strip[] of all such points.



5) Sort the array strip[] according to y coordinates. This step is O(nLogn). It can be optimized to O(n) by recursively sorting and merging.

6) Find the smallest distance in strip[]. This is tricky. From first look, it seems to be a O(n^2) step, but it is actually O(n). It can be proved geometrically that for every point in strip, we only need to check at most 7 points after it (note that strip is sorted according to Y coordinate). See this for more analysis.

7) Finally return the minimum of d and distance calculated in above step (step 6)

Tugas:

1) Buatlah program untuk menyelesaikan problem closest pair of points menggunakan algoritma divide & conquer yang diberikan. Gunakan bahasa C++
2) Tentukan rekurensi dari algoritma tersebut, dan selesaikan rekurensinya menggunakan metode recursion tree untuk membuktikan bahwa algoritma tersebut memiliki Big-O (n lg n)

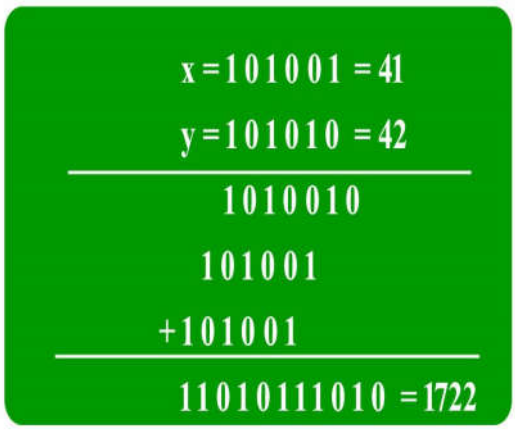
Studi Kasus 6: Algoritma Karatsuba untuk Perkalian Cepat

Identifikasi Problem:

Diberikan dua string biner yang mewakili nilai dua bilangan bulat, cari produk (hasil kali) dari dua string. Misalnya, jika string bit pertama adalah "1100" dan string bit kedua adalah "1010", output harus 120. Supaya lebih sederhana, panjang dua string sama dan menjadi n.

Solusi:

Salah satu solusinya adalah dengan naïve approach yang pernah kita pelajari di sekolah. Satu per satu ambil semua bit nomor kedua dan kalikan dengan semua bit nomor pertama. Akhirnya tambahkan semua perkalian. Algoritma ini membutuhkan waktu O (n ^ 2).



Algoritma Karatsuba

Solusi lain adalah dengan menggunakan Algoritma Karatsuba yang berparadigma Divide dan Conquer, kita dapat melipatgandakan dua bilangan bulat dalam kompleksitas waktu yang lebih sedikit. Kami membagi angka yang diberikan dalam dua bagian. Biarkan angka yang diberikan menjadi X dan Y.

- Untuk kesederhanaan, kita asumsikan bahwa n adalah genap:

```
X =  Xl*2^(n/2) + Xr    [Xl and Xr contain leftmost and rightmost n/2 bits of X]
Y =  Yl*2^(n/2) + Yr    [Yl and Yr contain leftmost and rightmost n/2 bits of Y]
```

- Produk XY dapat ditulis sebagai berikut:

```
XY = (Xl*2^(n/2) + Xr)(Yl*2^(n/2) + Yr)
   = 2^n XlYl + 2^(n/2)(XlYr + XrYl) + XrYr
```

- Jika kita melihat rumus di atas, ada empat perkalian ukuran n / 2, jadi pada dasarnya kita membagi masalah ukuran n menjadi empat sub-masalah ukuran n / 2. Tetapi itu tidak membantu karena solusi pengulangan T (n) = 4T (n / 2) + O (n) adalah O (n ^ 2). Bagian rumit dari algoritma ini adalah mengubah dua istilah tengah ke bentuk lain sehingga hanya satu perkalian tambahan yang cukup. Berikut ini adalah *tricky expression* untuk dua middle terms tersebut.

```
XlYr + XrYl = (Xl + Xr)(Yl + Yr) - XlYl- XrYr
```

- Jadi nilai akhir XY menjadi:

```
XY = 2^n XlYl + 2^(n/2) * [(Xl + Xr)(Yl + Yr) - XlYl - XrYr] + XrYr
```

- Dengan trik di atas, perulangan menjadi T (n) = 3T (n / 2) + O (n) dan solusi dari perulangan ini adalah O (n^1.59)

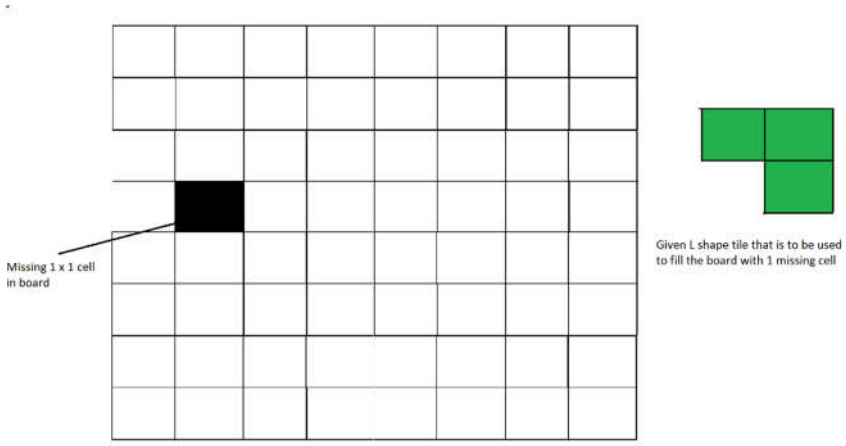
Bagaimana jika panjang string input berbeda dan tidak genap? Untuk menangani kasus panjang yang berbeda, kita menambahkan 0 di awal. Untuk menangani panjang ganjil, kita menempatkan bit floor (n / 2) di setengah kiri dan ceil (n / 2) bit di setengah kanan. Jadi ekspresi untuk XY berubah menjadi berikut.

```
XY = 2^(2ceil(n/2)) XlYl + 2^(ceil(n/2)) * [(Xl + Xr)(Yl + Yr) - XlYl - XrYr] + XrYr
```

Tugas:

1) Buatlah program untuk menyelesaikan problem *fast multiplication* menggunakan algoritma divide & conquer yang diberikan (Algoritma Karatsuba). Gunakan bahasa C++
2) Rekurensi dari algoritma tersebut adalah T (n) = 3T (n / 2) + O (n), dan selesaikan rekurensinya menggunakan metode substitusi untuk membuktikan bahwa algoritma tersebut memiliki Big-O (n lg n)

Studi Kasus 7: Permasalahan Tata Letak Keramik Lantai (Tilling Problem)
Identifikasi Problem:
Diberikan papan berukutan n x n dimana n adalah dari bentuk 2k dimana k ≥ 1 (Pada dasarnya n adalah pangkat dari 2 dengan nilai minimumnya 2). Papan memiliki satu sel yang hilang (ukuran 1 x 1). Isi papan menggunakan ubin berbentuk L. Ubin berbentuk L berukuran 2 x 2 persegi dengan satu sel berukuran 1 × 1 hilang.

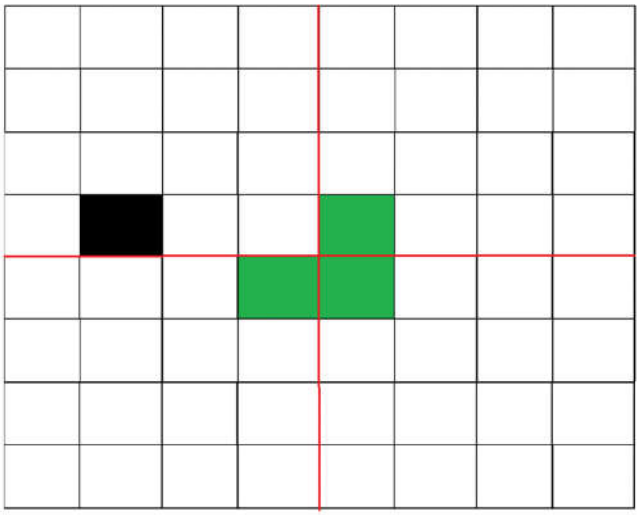


Gambar 2. Ilustrasi tilling problem

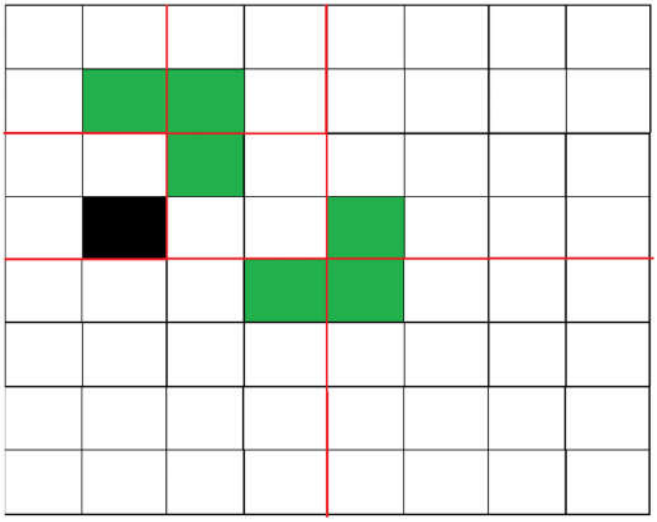
Solusi:
Masalah ini dapat diselesaikan menggunakan Divide and Conquer. Di bawah ini adalah algoritma rekursifnya

```
// n is size of given square, p is location of missing cell
Tile(int n, Point p)

1) Base case: n = 2, A 2 x 2 square with one cell missing is nothing
   but a tile and can be filled with a single tile.

2) Place a L shaped tile at the center such that it does not cover
   the n/2 * n/2 subsquare that has a missing square. Now all four
   subsquares of size n/2 x n/2 have a missing cell (a cell that doesn't
    need to be filled).  See figure 3 below.

3) Solve the problem recursively for following four. Let p1, p2, p3 and
   p4 be positions of the 4 missing cells in 4 squares.
   a) Tile(n/2, p1)
   b) Tile(n/2, p2)
   c) Tile(n/2, p3)
   d) Tile(n/2, p3)
```

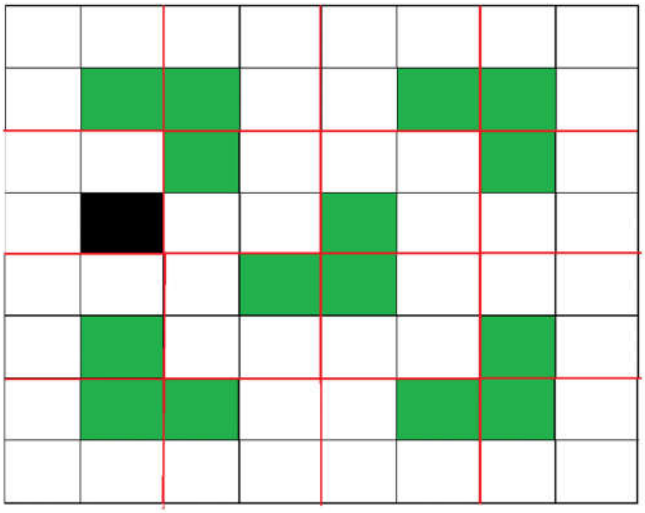
Gambar di bawah ini menunjukkan kerja algoritma di atas.



Gambar 3. Ilustrasi setelah tile pertama ditempatkan



Gambar 4 Perulangan untuk subsquare pertama.



Gambar 5. Memperlihatkan langkah pertama di keempat subsquares.

Tugas:

1) Buatlah program untuk menyelesaikan problem *tilling* menggunakan algoritma divide & conquer yang diberikan. Gunakan bahasa C++
2) Relasi rekurensi untuk algoritma rekursif di atas dapat ditulis seperti di bawah ini. C adalah konstanta. T (n) = 4T (n / 2) + C. Selesaikan rekurensi tersebut dengan Metode Master

Teknik Pengumpulan

- Lakukan push ke github/gitlab untuk semua program dan laporan hasil analisa yang berisi jawaban dari pertanyaan-pertanyaan yang diajukan. Silahkan sepakati dengan asisten praktikum.

Penutup

- Ingat, berdasarkan Peraturan Rektor No 46 Tahun 2016 tentang Penyelenggaraan Pendidikan, mahasiswa wajib mengikuti praktikum 100%
- Apabila tidak hadir pada salah satu kegiatan praktikum segeralah minta tugas pengganti ke asisten praktikum
- Kurangnya kehadiran Anda di praktikum, memungkinkan nilai praktikum Anda tidak akan dimasukkan ke nilai mata kuliah.