

ALJABAR LINIER

Sistem Persamaan Linear (SPL)

Pertemuan 1



AGENDA PERTEMUAN 1

Perkenalan Dosen

Tujuan Alin dan Buku
Referensi

Pertemuan Alin

Tujuan Instruksi
Khusus

SPL

Contoh SPL
dengan Cara SMA

AGENDA PERTEMUAN 1

Gauss

Gauss-Jordan

Contoh Quiz

Matlab

Contoh PR

Nilai ALIN

AGENDA PERTEMUAN 1

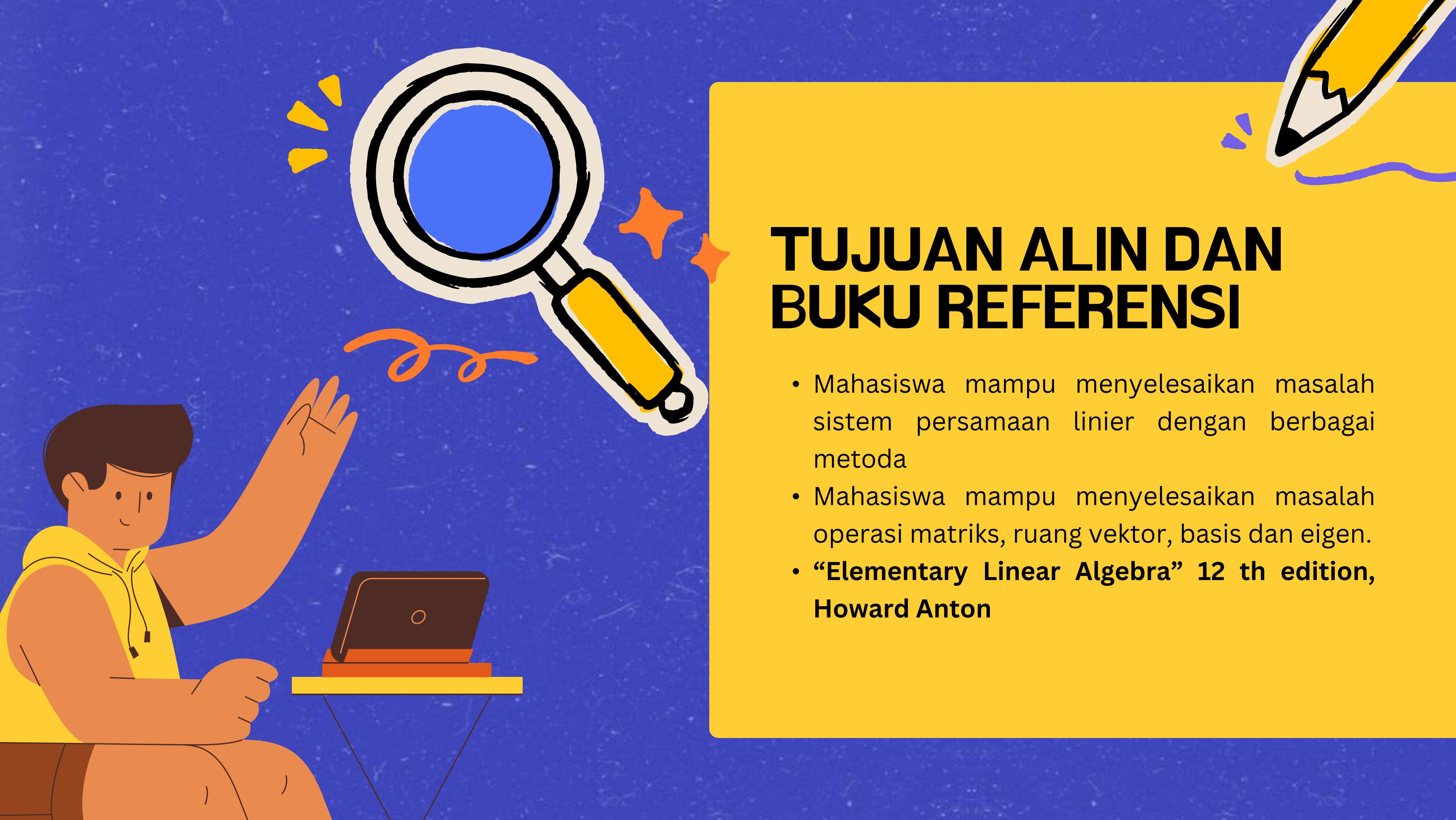
Kalkulator

PR



PERKENALAN





TUJUAN ALIN DAN BUKU REFERENSI

- Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah sistem persamaan linier dengan berbagai metoda
- Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah operasi matriks, ruang vektor, basis dan eigen.
- **“Elementary Linear Algebra” 12 th edition, Howard Anton**

PERTEMUAN ALIN

- Pertemuan 1 (26 Agustus 2024)
 - Pengantar SPL
- Pertemuan 2 (2 September 2024)
 - Operasi Matriks
- Pertemuan 3 (9 September 2024)
 - Determinan Matriks
- **Pertemuan 4**
 - QUIZ 1
- Pertemuan 5 (23 September 2024)
 - Vektor
- Pertemuan 6 (30 September 2024)
 - Perkalian Titik
- Pertemuan 7 (7 Oktober 2024)
 - Perkalian Silang
- **Pertemuan 8**
 - QUIZ 2



PERTEMUAN ALIN

- Pertemuan 9 (21 Oktober 2024)
 - Transportasi Linear
- Pertemuan 10 (28 Oktober 2024)
 - Basis
- Pertemuan 11 (4 November 2024)
 - Solusi General
- **Pertemuan 12**
 - QUIZ 3
- Pertemuan 13 (18 November 2024)
 - Inner Product
- Pertemuan 14 (25 November 2024)
 - Nilai Eigen
- Pertemuan 15 (2 Desember 2024)
 - Vektor Eigen
- **Pertemuan 16**
 - QUIZ 4



TUJUAN INSTRUKSI KHUSUS

Setelah menyelesaikan pertemuan ini mahasiswa diharapkan :

- Mengetahui Definisi Sistem Persamaan Linear (SPL)
- Dapat membentuk matriks yang merepresentasikan SPL
- Dapat menyelesaikan SPL dengan menggunakan metode Gauss dan Gauss-Jordan



SISTEM PERSAMAAN LINIER (SPL)

BAB 1.1

PERSAMAAN LINIER



Persamaan yang semua variabelnya berpangkat 1 atau 0 dan tidak terjadi perkalian antar variabelnya.

Contoh:

- (1) $x + y + 2z = 9$ (**Persamaan Linier**)
- (2) $2x + y = 9$ (**Persamaan Linier**)
- (3) $2xy - z = 9$ (**Bukan Persamaan Linier**)



SISTEM PERSAMAAN LINIER (SPL)

Suatu sistem dengan beberapa (2 atau lebih) persamaan linier.

Contoh:

$$1) x + y = 3$$

$$2) 3x - 5y = 1$$

CONTOH SPL DENGAN CARA SMA

BERAPAKA NILAI X, Y, Z



$$\begin{aligned}3x + 3y - 6z &= -18 \\12x - 3y + 6z &= 48 \\2x + 2y + 4z &= 36\end{aligned}$$

Jawab : X = 2, Y = 4 dan Z = 6

Bagaimana mencari nilai X, Y, dan Z ?

- 1. Subtitusi –
eliminasi**
- 2. Matrix**



- 1. Gauss**
- 2. Gauss –
jordan**
- 3. Matlab**

SMA

KULIAH



PENYIMPANGAN PADA PENYELESAIAN SUATU SPL

Pada beberapa SPL tertentu terdapat penyimpangan – penyimpangan dalam penyelesaiannya, misal :

Diberikan SPL sebagai berikut :

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 0$$

"**ANGKA < 5,** **BULATKAN KEBAWAH**
ANGKA >= 5, **BULATKAN KE ATAS**

Didapat penyelesaian $x_1 = 9$, $x_2 = -36$, dan $x_3 = 30$

Jika SPL tersebut dituliskan dalam bentuk dua desimal :

$$x_1 + 0,5x_2 + 0,33x_3 = 1$$

$$0,5x_1 + 0,33x_2 + 0,25x_3 = 0$$

$$0,33x_1 + 0,25x_2 + 0,2x_3 = 0$$

Didapat penyelesaian $x_1 \approx 55,55$; $x_2 \approx -277,778$; dan $x_3 \approx 255,556$



INTERPRETASI GEOMETRIK

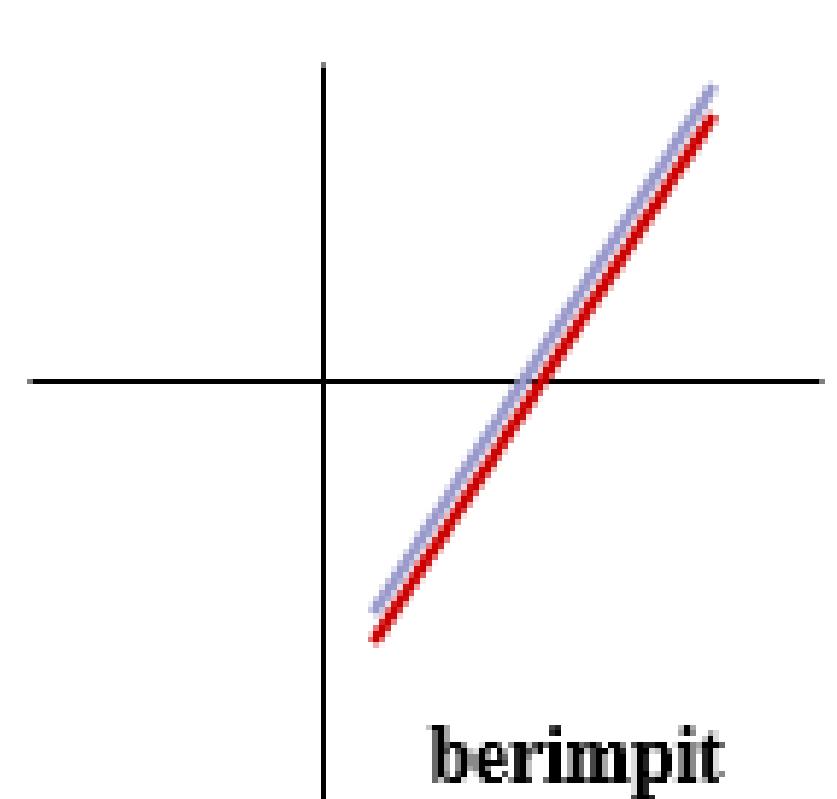
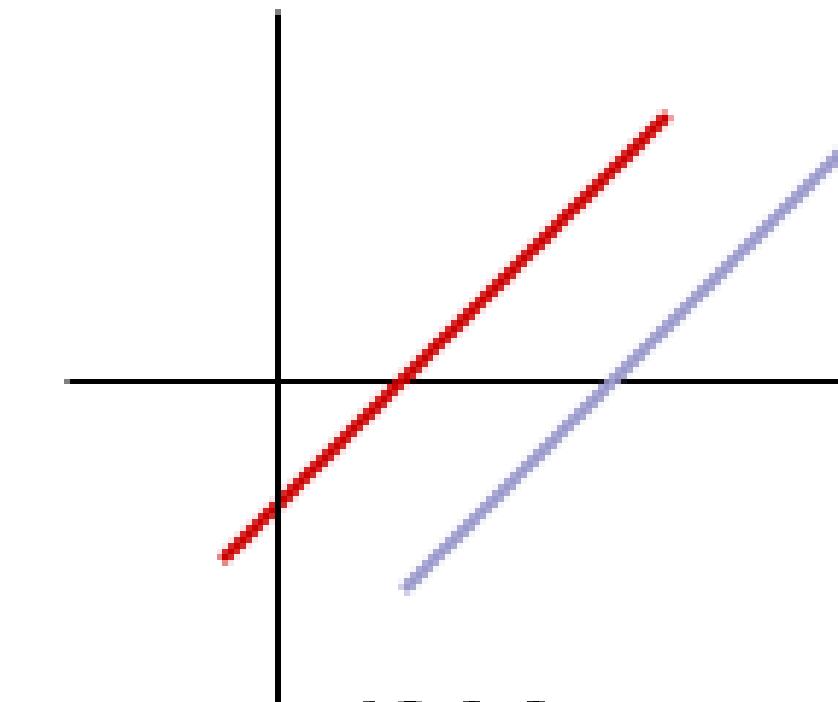
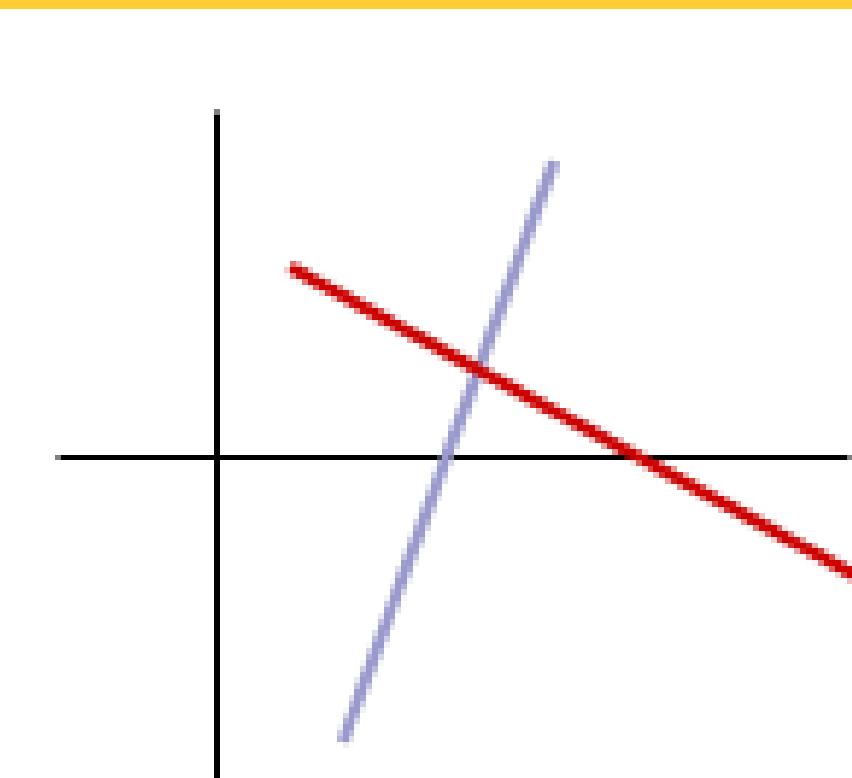
Sistem menggambarkan 2 garis lurus pada sebuah bidang datar.

$$g_1: x + y = 3$$

$$g_2: 3x - 5y = 1$$

Solusi: g_1 dan g_2 berpotongan di $(2, 1)$

Kemungkinan:



Sistem Persamaan Linier



METODE GAUSS DAN GAUSS-JORDAN

BAB 1.2



Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)



Wilhelm Jordan
(1842–1899)

Although versions of Gaussian elimination were known much earlier, its importance in scientific computation became clear when the great German mathematician Carl Friedrich Gauss used it to help compute the orbit of the asteroid Ceres from limited data. What happened was this: On January 1, 1801 the Sicilian astronomer and Catholic priest Giuseppe Piazzi (1746–1826) noticed a dim celestial object that he believed might be a “missing planet.” He named the object Ceres and made a limited number of positional observations but then lost the object as it neared the Sun. Gauss, then only 24 years old, undertook the problem of computing the orbit of Ceres from the limited data using a technique called “least squares,” the equations of which he solved by the method that we now call “Gaussian elimination.” The work of Gauss created a sensation when Ceres reappeared a year later in the constellation Virgo at almost the precise position that he predicted! The basic idea of the method was further popularized by the German engineer Wilhelm Jordan in his book on geodesy (the science of measuring Earth shapes) entitled *Handbuch der Vermessungskunde* and published in 1888.

[Images: Photo Inc/Photo Researchers/Getty Images (Gauss);
https://en.wikipedia.org/wiki/Andrey_Markov#/media/File:Andrei_Markov.jpg. Public domain. (Jordan)]

SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINIER

1

Eliminasi biasa
(seperti cara di SMA)

2

Eliminasi Gauss

3

Eliminasi Gauss-
Jordan



A. ELIMINASI CARA BIASA (REVIEW CARA DI SMA):

$$\text{I. } x + y = 3 \rightarrow 3x + 3y = 9$$

$$3x - 5y = 1 \rightarrow \begin{array}{r} 3x - 5y = 1 \\ \hline 8y = 8 \end{array} \rightarrow y = 1$$

$$3x - 5 = 1 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

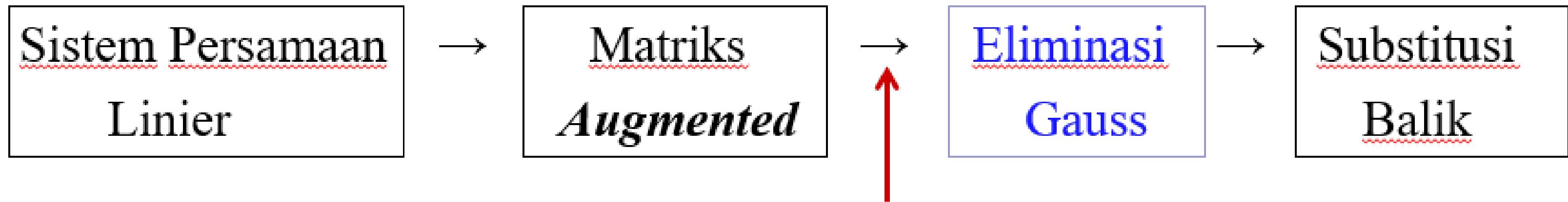
$$\text{II. } y = 3 - x$$

$$3x - 5(3 - x) = 1 \text{ atau } 3x - 15 + 5x = 1 \rightarrow 8x = 16 \rightarrow x = 2$$

$$y = 3 - x \rightarrow y = 1$$

GAUSS

B. ELIMINASI GAUSS (RINGKASAN)



OBE

OBE = operasi baris elementer

Matriks Augmented (Matriks Yang Diperbesar)

Matriks yang entri-entrinya dibentuk dari koefisien-koefisien Sistem Persamaan Linier

Contoh soal : $3x - 3y + 2z = -17$

Soal no.
1

$$4x + 7y - 4z = 21$$

$$-4x + 6y - 5z = 25$$

Matriks Augmented :

3	-3	2	-17
4	7	-4	21
-4	6	-5	25



Operasi Baris Elementer (O.B.E)

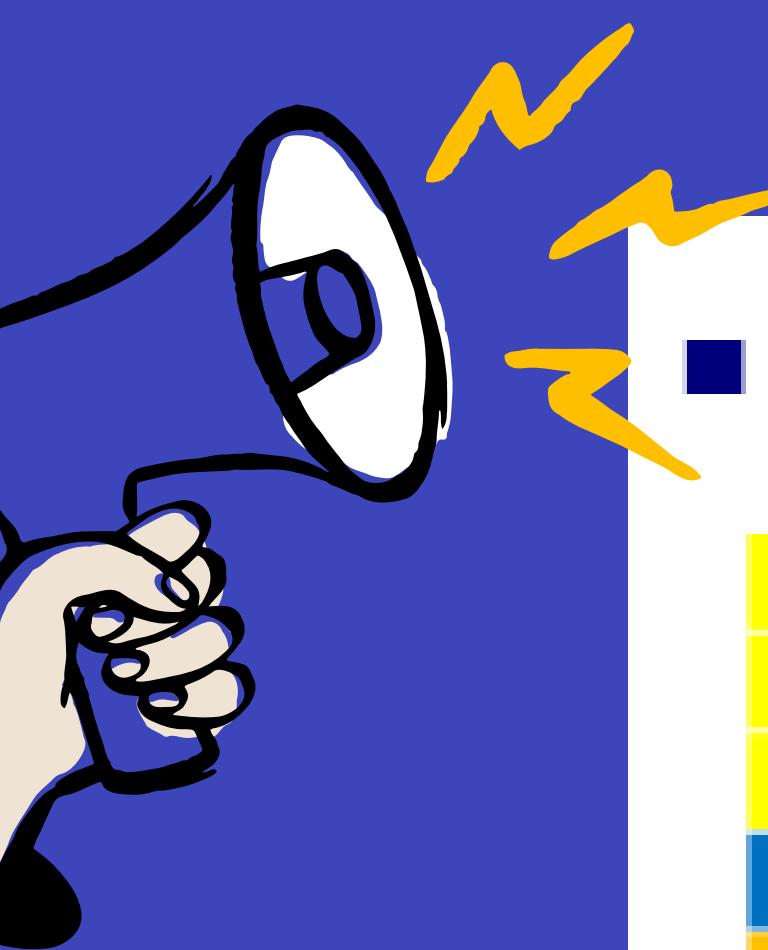
1. Dikali sebuah baris dengan konstanta $\neq 0$
2. Dikali sebuah baris dengan konstanta $\neq 0$ kemudian dijumlah pada baris lain
3. Menukar 2 buah baris



Ciri-ciri Eliminasi Gauss (Bentuk Eselon Baris)



1. Jika suatu baris tidak semua nol, maka bilangan pertama yang tidak nol adalah 1 (1 utama)
2. Utama baris berikutnya berada di kanan 1 utama baris di atasnya.
3. Dibawah 1 utama harus 0
4. Baris nol terletak paling bawah

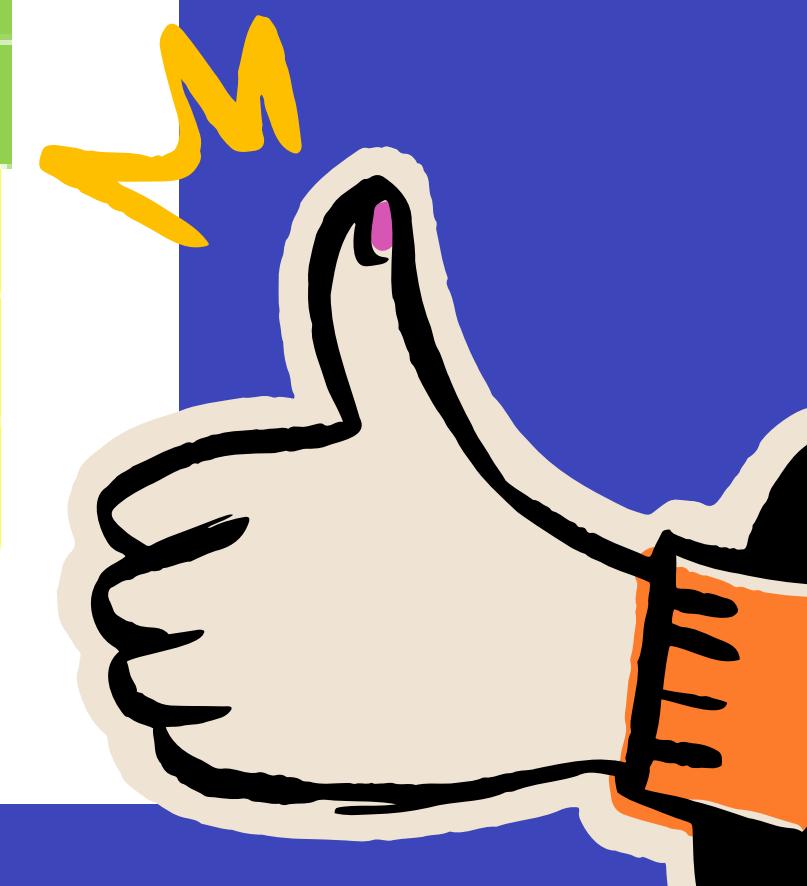


■ Bukan Gauss

1	0	1	4
0	1	3	7
0	1	4	5
1	0	1	4
0	5	6	7
0	0	3	6
1	7	4	3
0	0	0	0
0	0	0	1
5	7	3	4
0	1	2	6
0	0	1	8

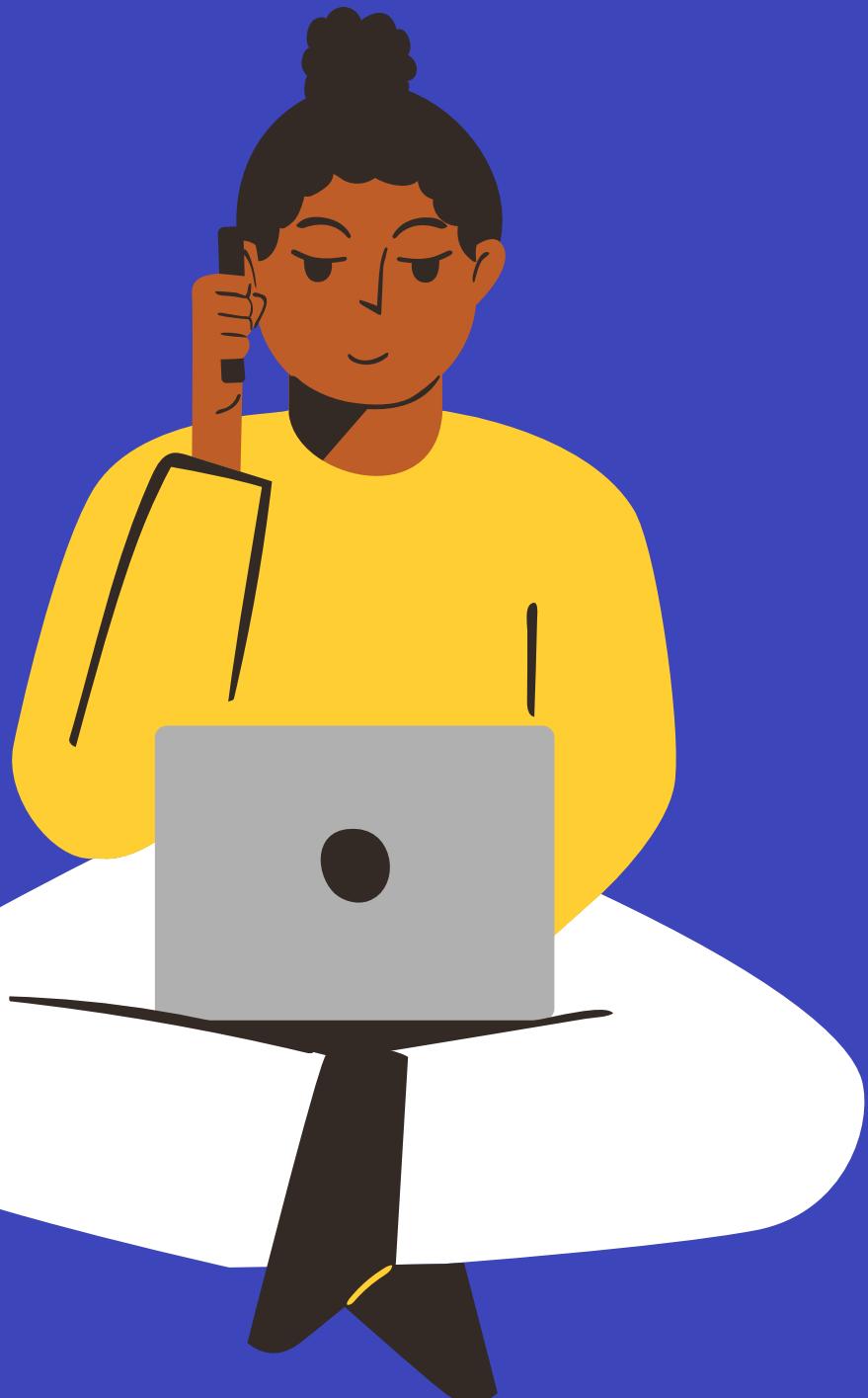
■ Gauss

1	7	4	3
0	0	1	6
0	0	0	0
1	7	4	3
0	0	1	1
0	0	0	0
1	7	4	3
0	1	1	6
0	0	1	8



PENYELESAIAN CONTOH SOAL SISTEM PERSAMAAN LINIER

b. Eliminasi Gauss

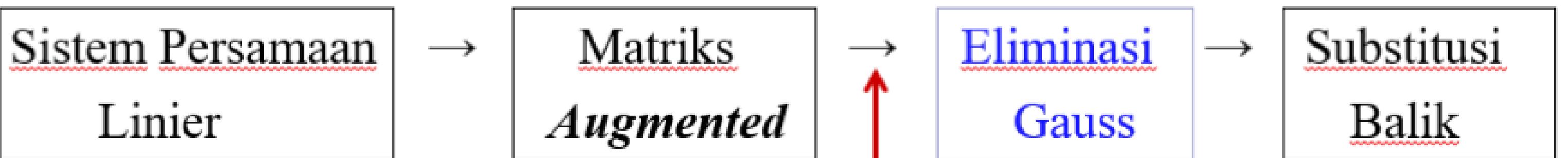


$$\left. \begin{array}{l} 3x - 3y + 2z = -17 \\ 4x + 7y - 4z = 21 \\ -4x + 6y - 5z = 25 \end{array} \right\} \text{ditulis dalam bentuk matriks augmented} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & -17 \\ 4 & 7 & -4 & 21 \\ -4 & 6 & -5 & 25 \end{array} \right)$$

lalu diusahakan berbentuk

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \end{array} \right)$$

dengan proses **Operasi Baris Elementer (OBE)**
(Elementary Row Operation - ERO)



Matriks *Augmented* :

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 2 & -17 \\ 4 & 7 & -4 & 21 \\ -4 & 6 & -5 & 25 \end{array}$$



Eliminasi Gauss

$$\begin{array}{cccc} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \end{array}$$

OBE :

1. * K
2. * K + baris lain
3. tukar baris

Matriks awal			
3	-3	2	-17
4	7	-4	21
-4	6	-5	25

iterasi 1 $b_1 = b_1 * 1/3$			
1	-1	0,67	-5,67
4	7	-4	21
-4	6	-5	25

iterasi 2 $b_2 = b_1 * -4 + b_2$			
1	-1	0,67	-5,67
0	11	-6,68	43,68
-4	6	-5	25

iterasi 3 $b_3 = b_1 * 4 + b_3$			
1	-1	0,67	-5,67
0	11	-6,68	43,68
0	2	-2,32	2,32

iterasi 4 $b_2 = b_2 * 1/11$			
1	-1	0,67	-5,67
0	1	-0,61	3,97
0	2	-2,32	2,32

iterasi ke 5 $b_3 = b_2 * -2 + b_3$			
1	-1	0,67	-5,67
0	1	-0,61	3,97
0	0	-1,1	-5,62

iterasi ke 6 $b_3 = b_3 * -1/1,1$			
1	-1	0,67	-5,67
0	1	-0,61	3,97
0	0	1	5,11

DITULIS KEMBALI KE
BENTUK SPL

$$x - y + 0,67z = -5,67 \quad (1)$$

$$y - 0,61z = 3,97 \quad (2)$$

$$z = 5,11 \quad (3)$$

Didapat pula $y = 7,09$ dan $x = -2$

CONTOH

Carilah nilai X, Y dan Z dengan menggunakan
Gauss-Jordan

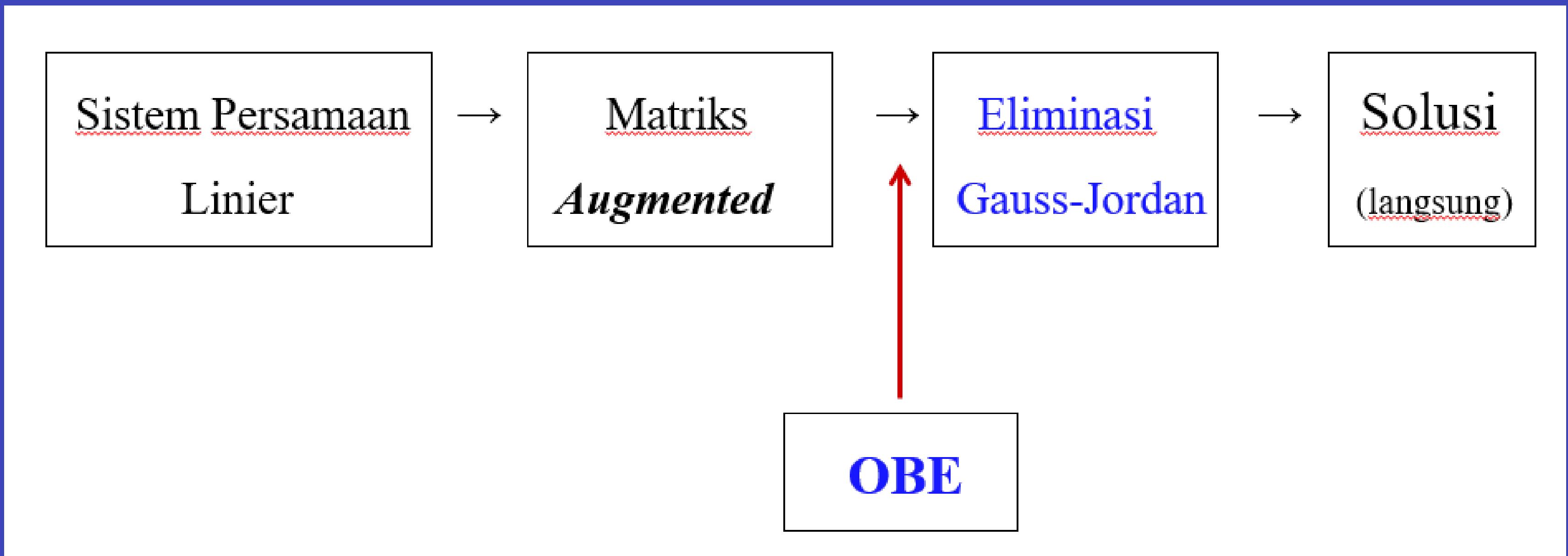
$$\begin{array}{rclclclclcl} 3 & x & + & -3 & y & + & 2 & z & = & -17 \\ 4 & x & + & 7 & y & + & -4 & z & = & 21 \\ -4 & x & + & 6 & y & + & -5 & z & = & 25 \end{array}$$

1. Pada iterasi ke-1 berapa isi sel A(1,4) ? -5,67
2. Pada iterasi ke-2 berapa isi sel A(2,3) ? -6,68
3. Pada iterasi ke-3 berapa isi sel A(3,3) ? -2,32
4. Pada iterasi ke-4 berapa isi sel A(2,4) ? 3,97
5. Pada iterasi ke-5 berapa isi sel A(3,3) ? -1,1
6. Pada iterasi ke-6 berapa isi sel A(3,4) ? 5,11
7. Pada iterasi ke-7 berapa isi sel A(2,4) ? 7,09
8. Pada iterasi ke-8 berapa isi sel A(1,4) ? -9,09
9. Pada iterasi ke-9 berapa isi sel A(1,4) ? -2
10. Berapakan nilai x, y, dan z? x=-2; y= 7,09 ; z= 5,11



GAUSS-JORDAN

C. ELIMINASI GAUSS-JORDAN (RINGKASAN)



PENYELESAIAN CONTOH SOAL SISTEM PERSAMAAN LINIER

b. Eliminasi

Gauss-Jordan

(contoh yang sama)



$$3x - 3y + 2z = -17$$

$$4x + 7y - 4z = 21$$

$$-4x + 6y - 5z = 25$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & -17 \\ 4 & 7 & -4 & 21 \\ -4 & 6 & -5 & 25 \end{array} \right)$$

dan diusahakan berbentuk

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 1 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \end{array} \right)$$

dengan proses **Operasi Baris Elementer (OBE)**

(Elementary Row Operation - ERO)

CIRI-CIRI ELIMINASI GAUSS JORDAN (BENTUK ESELON BARIS TEREDUKSI)

- Jika suatu baris tidak semua nol, maka bilangan pertama yang tidak nol adalah 1 (1 utama)
- utama baris berikutnya berada di kanan 1 utama baris di atasnya.
- Dibawah 1 utama harus 0
- Diatas 1 utama harus 0
- Baris nol terletak paling bawah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Melanjutkan Contoh Gauss

iterasi ke 6 $b3 = b3 * -1/1,1$			
1	-1	0,67	-5,67
0	1	-0,61	3,97
0	0	1	5,11

(akhir dari gauss)

iterasi ke 7 $b2 = b3 * 0.61 + b2$			
1	-1	0.67	-5.67
0	1	0	7.09
0	0	1	5.11
iterasi ke 8 $b1 = b3 * -0.67 + b1$			
1	-1	0	-9.09
0	1	0	7.09
0	0	1	5.11
iterasi ke 9 $b1 = b2 * -1 + b1$			
1	0	0	-2
0	1	0	7.09
0	0	1	5.11

$$\begin{aligned} X &= -2 \\ Y &= 7,09 \\ Z &= 5,11 \end{aligned}$$



MATLAB

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

Buat matrixnya pada Matlab

```
>> a=[1, 1, 2, 9; 2, 4, -3 1; 3, 6, -5, 0]
```

```
a =
```

1	1	2	9
2	4	-3	1
3	6	-5	0

```
>>
```

Mengeliminasi baris ke-2, kolom 1

--> Baris 2 = Baris 1 * -2 + baris 2

```
a =
```

1	1	2	9
2	4	-3	1
3	6	-5	0

```
>> a(2,:)=a(1,:)*-2+a(2,:)
```

```
a =
```

1	1	2	9
0	2	-7	-17
3	6	-5	0

```
>>
```

2

Mengenol-kan baris ke-3, kolom 1

--> Baris 3 = Baris 1 * -3 + baris 3

```
a =
```

1	1	2	9
0	2	-7	-17
3	6	-5	0

```
>> a(3,:)=a(1,:)*-3+a(3,:)
```

```
a =
```

1	1	2	9
0	2	-7	-17
0	3	-11	-27

3

Membuat nilai 1 pada kolom 2 dan baris 2

--> Baris 2 = Baris 2 * 1/2

```
a =
```

1	1	2	9
0	2	-7	-17
0	3	-11	-27

```
>> a(2,:)=a(2,:)*1/2
```

```
a =
```

1.0000	1.0000	2.0000	9.0000
0	1.0000	-3.5000	-8.5000
0	3.0000	-11.0000	-27.0000

4

```
>> a(3,:)=a(2,:)*3+a(3,:)
```

```
a =
```

1.0000	1.0000	2.0000	9.0000
0	1.0000	-3.5000	-8.5000
0	0	-0.5000	-1.5000

```
>> a(3,:)=a(3,:)*-2
```

```
a =
```

1.0000	1.0000	2.0000	9.0000
0	1.0000	-3.5000	-8.5000
0	0	1.0000	3.0000

5

```
>> a(2,:)=a(3,:)*3.5+a(2,:)
```

```
a =
```

1	1	2	9
0	1	0	2
0	0	1	3

```
>> a(1,:)=a(3,:)*-2+a(1,:)
```

```
a =
```

1	1	0	3
0	1	0	2
0	0	1	3

```
>> a(1,:)=a(2,:)*-1+a(1,:)
```

```
a =
```

1	0	0	1
0	1	0	2
0	0	1	3

6



CONTOH PR

Soal no.

2

dijawab dengan detail, PR dikerjakan seperti ini
persamaan pertama, nilai variable y adalah 0 dan
persamaan kedua, nilai variable x adalah 0

**Carilah nilai x, y, dan z yang memenuhi
persamaan-persamaan berikut dengan
menggunakan metode Gauss-Jordan.**

$$3x - 2z = 7$$

$$-y + 4z = -5$$

$$2x + 3y + z = 6$$

PENYELESAIAN

$$\begin{aligned}3x - 2z &= 7 \\-y + 4z &= -5 \\2x + 3y + z &= 6\end{aligned}$$

3	0	-2	7
0	-1	4	-5
2	3	1	6

Iterasi 1 :

$$B_1 = B_1 * (\gamma_3)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} * (\gamma_3)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.67 \\ 2.33 \end{bmatrix}$$

1	0	-0.67	2.33
0	-1	4	-5
2	3	1	6

Iterasi 2

$$B3 = B1 * (-2) + B3$$

$$B3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -0,67 \\ 2,33 \end{bmatrix} * (-2) + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$B3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1,34 \\ -4,66 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2,34 \\ 1,34 \end{bmatrix}$$

iterasi ke 2

$$b3 = b1 * -2 + b3$$

1	0	-0.67	2.33
0	-1	4	-5
0	3	2.34	1.34

Iterasi 3 :

$$B2 = B2 * -1$$

$$B2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} * (-1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

iterasi ke 3

$$b2 = b2 * -1$$

1	0	-0.67	2.33
0	1	-4	5
0	3	2.34	1.34

Iterasi 4

$$B3 = B2 * (-3) + B3$$

$$B3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} * (-3) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2,34 \\ 1,34 \end{bmatrix}$$

$$B3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 12 \\ -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2,34 \\ 1,34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 14,34 \\ -13,66 \end{bmatrix}$$

iterasi ke 4

$$b2 = b2 * -3 + b3$$

1	0	-0.67	2.33
0	1	-4	5
0	0	14.34	-13.66

Iterasi 5

$$B3 = B3 * (1/14,34)$$

$$B3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 14,34 \\ -13,66 \end{bmatrix} * (1/14,34)$$

$$B3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,95 \end{bmatrix}$$

iterasi ke 5

$$b3 = b3 / 14.34$$

1	0	-0.67	2.33
0	1	-4	5
0	0	1	-0.95

Iterasi 6

$$B2 = B3 * (4) + B2$$

$$B2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,95 \end{bmatrix} * (4) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$B2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -3,8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1,2 \end{bmatrix}$$

iterasi ke 6

$$b2 = b3 * 4 + b2$$

1	0	-0.67	2.33
0	1	0	1.2
0	0	1	-0.95

Iterasi 7

$$B1 = B3 * (0,67) + B1$$

$$B1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,95 \end{bmatrix} * (0,67) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -0,67 \\ 2,33 \end{bmatrix}$$

$$B1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,67 \\ -0,64 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -0,67 \\ 2,33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1,69 \end{bmatrix}$$

iterasi ke 7

$$b1 = b3 * 0.67 + b1$$

1	0	0	1.69
0	1	0	1.2
0	0	1	-0.95

NILAI ALIN

1. Komposisi nilai :

- Quiz 1 : 15%
- Quiz 2 : 20%
- Quiz 3 : 20%
- Quiz 4 : 20%
- PR : 15%
- Tugas Program (setelah quiz 4) : 5%
- Kehadiran : 5%

2. Quiz susulan hanya untuk siswa dengan ijin :

- Sakit (surat dokter atau surat dibuat sendiri) atau
- Tugas dari jurusan

3. Quiz perbaikan akan diadakan di akhir semester, hanya untuk siswa yang mendapat nilai D dan E, di beri kesempatan untuk mendapat nilai C

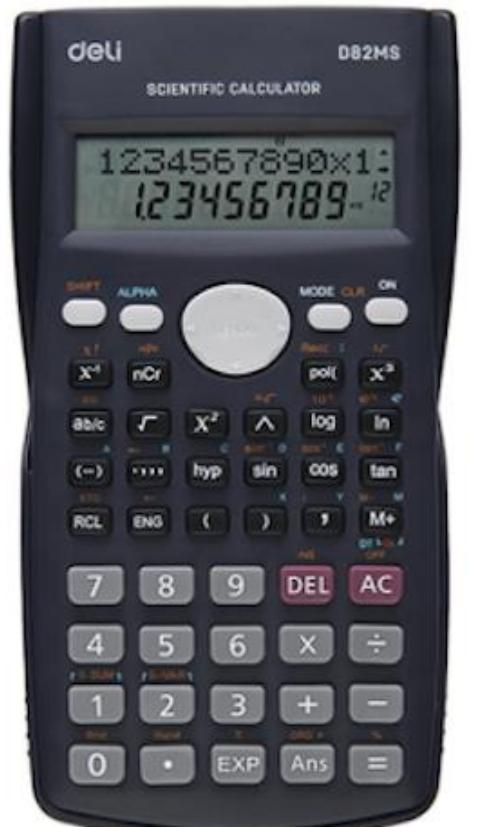
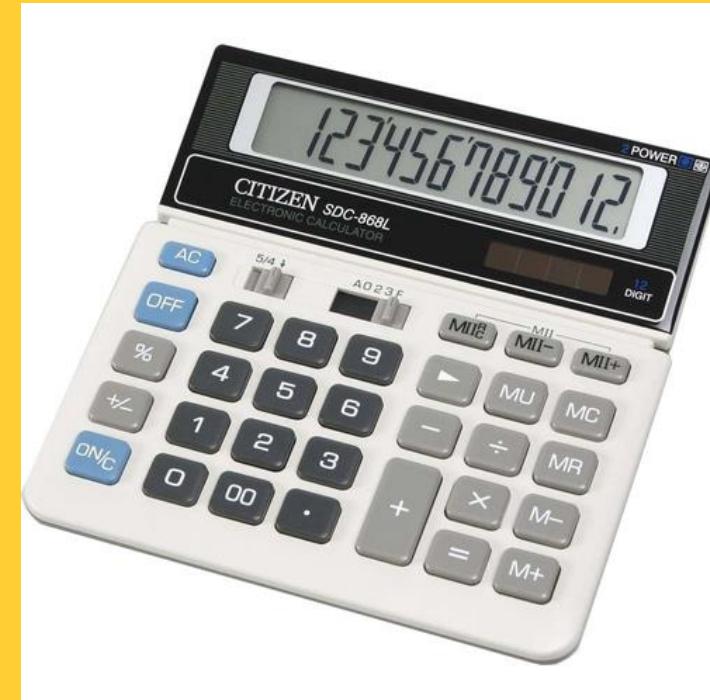


KALKULATOR



Kalkulator yang boleh digunakan saat quiz :

1. Sederhana hanya maksimal 2 baris



- Sebelum quiz, laporkan ke asisten jenis kalkulatornya
- Jika saat quiz terdapat peserta menggunakan kalkulator diluar ketentuan, maka kalkulator akan diambil dan pengerojaan quiz akan dilanjutkan tanpa menggunakan kalkulator (hitung manual)



PR

- Tiap kelompok membuat 1 soal dan menjawab dengan detail, seperti PPT
- Asisten akan menilai PR
- Jika ada siswa yang tidak aktif saat mengerjakan PR, langsung secara pribadi memberi info ke asisten, sehingga nilai akan dikurangi

GRUP ALJABAR LINIER 2024



<https://its.id/m/AljabarLinier2024>

THANK YOU

