

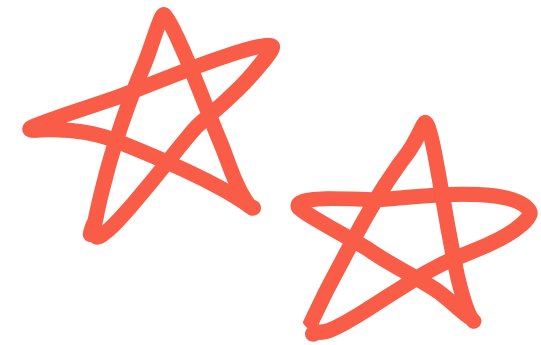


Pertemuan II

**Basis untuk persamaan homogen.
Koordinat titik pada basis standar dan basis baru.
General Solusi.**

Bab Pembahasan

- ✿ 1. Basis untuk persamaan homogen
- ✿ 2. Koordinat titik pada basis standar dan basis baru
- ✿ 3. General Solusi



Soal 1

Basis untuk persamaan homogen

Contoh 37 :

Tent : $\left\{ \begin{array}{l} \text{basis} \\ \text{dimensi} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ruang pemecahan dr} \\ \text{sist. homogen :} \end{array} \right.$

$$\begin{array}{rclclclcl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & + & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}$$

Jwb:

Tujuan : mencari vector-vector basis

Jwb:

→ kita rubah pers homogen menj. pers
bebas linier

$$\begin{array}{c} \vec{0} \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} x_1 \\ \uparrow \\ k_1 \end{array} \begin{array}{c} \vec{v}_1 \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} x_2 \\ \uparrow \\ k_2 \end{array} \begin{array}{c} \vec{v}_2 \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} x_3 \\ \uparrow \\ k_3 \end{array} \begin{array}{c} \vec{v}_3 \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} x_4 \\ \uparrow \\ k_4 \end{array} \begin{array}{c} \vec{v}_4 \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} x_5 \\ \uparrow \\ k_5 \end{array} \begin{array}{c} \vec{v}_5 \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

→ skg kita cari nilai x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

if $x_1 \dots x_5 = 0$ mk bebas linier,

if $x_1 \dots x_5$ ada nilai lain, mk \neq bebas
linier

Dari ex. 6 bab 1.2 è yang diumpamakan selalu index yang besar

$$\begin{aligned} X_1 &= -5 - t \\ X_2 &= 5 \\ X_3 &= -t \\ X_4 &= 0 \\ X_5 &= t \end{aligned}$$

ternyata ada banyak nilai
 $\underline{u} \ x_1 \dots x_s$, $s \geq 0$ & besar
 ∞ ier, stg bgn cara men-
 cari basis & dimensi dr hasil
 ini? ... caranya :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

basis $\rightarrow \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ & $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Cari x_1, x_2, x_3, x_4
dan x_5 dengan
gauss jordan

Example 4 Find a basis for the nullspace of

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Example 4 Find a basis for the nullspace of

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution. The nullspace of A is the solution space of the homogeneous system

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \quad X1 = -s-t$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \quad X2 = s$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \quad X3 = -t$$

$$x_3 + x_4 + x_5 = 0 \quad X4 = 0$$

$$X5 = t$$

In Example 10 of Section 5.4 we showed that the vectors

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

form a basis for this space.

Contoh 4: Nullspace (A) = Solution space dari $A\vec{x} = \vec{0}$
 catatan: $\vec{x} \in \mathbb{R}^5$ (perhatikan $A (4 \times 5)$)
 $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ m & n \end{matrix}$

Basis dari Nullspace (A) = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

Tambahan 1) Dimensi Basis Nullspace (A) = 2

(2) Semua vektor di Nullspace (A) merupakan vektor-vektor solusi (yang memenuhi) $A\vec{x} = \vec{0}$ dan dinyatakan dengan $\vec{x} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$

(Lihat Contoh 10 Bab 5.4. untuk proses penyelesaiannya)

$\begin{matrix} \text{Basis: Nullspace (A)} \\ \downarrow \\ \text{Rentang Nullspace (A)} \\ \downarrow \\ \text{Basis Lin. Indep.} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Jadi } \vec{x} \text{ kombinasi linier dari } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \\ \text{atau Nullspace (A) direntang oleh } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \\ \\ \bullet K_1\vec{v}_1 + K_2\vec{v}_2 = \vec{0} \\ K_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ \text{Penyelesaiannya (coba sendiri): } K_1 = 0, K_2 = 0 \\ \text{Jadi } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \text{ lin. independent} \end{array} \right.$

Koordinat titik pada basis standar dan basis baru

Contoh: (lihat Example 3 halaman 246) Dalam contoh ini ditunjukkan dua basis untuk R^3

$$B = \{e_1, e_2, e_3\} \text{ dan } S = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$\text{di mana } e_1 = (1, 0, 0); e_2 = (0, 1, 0); e_3 = (0, 0, 1)$$

$$v_1 = (1, 2, 1); v_2 = (2, 9, 0); v_3 = (3, 3, 4)$$

Bukti bahwa B adalah basis untuk R^3 . B disebut basis standar untuk R^3 .

B linearly independent?

$$k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B linearly independent

B merentang R^3 ?

$$u = (x, y, z) \in R^3$$

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 = u$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

B merentang R^3

- Koordinat titik pada basis B è $(k_1, k_2, k_3) = V$
 - Basis è e_1, e_2, e_3
- Koordinat titik pada basis S è $(c_1, c_2, c_3) = V_S$
 - Basis è v_1, v_2, v_3

✿ Lama = baru

✿ $k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$

✿ $K_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$

✿ $(k_1, k_2, k_3) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$

✿ $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$

Bukti bahwa $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ juga basis R^3 bisa dibaca di buku.

Jadi benar bahwa B dan S adalah basis untuk R^3

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$ dan $S = \{v_1, v_2, v_3\}$

di mana $e_1 = (1, 0, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$; $e_3 = (0, 0, 1)$

$v_1 = (1, 2, 1)$; $v_2 = (2, 9, 0)$; $v_3 = (3, 3, 4)$

Koordinat sebuah vektor akan berbeda jika dinyatakan berdasarkan dua basis yang berbeda.

lihat Example 4 halaman 247

$(5, -1, 9)_B$ "ekivalen" $(1, -1, 2)_S$

$(11, 31, 7)_B$ "ekivalen" $(-1, 3, 2)_S$

Soal 2

Example 4 Let $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ be the basis for R^3 in the preceding example.

Soal 2

- (a) Find the coordinate vector of $v = (5, -1, 9)$ with respect to S .
(b) Find the vector v in R^3 whose coordinate vector with respect to the basis S is $(v)_S = (-1, 3, 2)$.

Solution (a). We must find scalars c_1, c_2, c_3 such that

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

or, in terms of components,

$$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

Equating corresponding components gives

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 5$$

$$2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = -1$$

$$c_1 + 4c_3 = 9$$

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$ dan $S = \{v_1, v_2, v_3\}$

di mana $e_1 = (1, 0, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$; $e_3 = (0, 0, 1)$

$v_1 = (1, 2, 1)$; $v_2 = (2, 9, 0)$; $v_3 = (3, 3, 4)$

Carilah nilai c_1, c_2 dan c_3 dengan gauss jourdan

Solving this system, we obtain $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 2$ (verify). Therefore,

$$(v)_S = (1, -1, 2)$$

Solution (b). Using the definition of the coordinate vector $(v)_S$, we obtain

$$v = (-1)v_1 + 3v_2 + 2v_3$$

$$= (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) = (11, 31, 7)$$

Let $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ be the basis for R^3 .

Find the coordinate vektor of $v = (14, 60, -20)$ with respect to S

$v_1 = (-6, 4, 3)$ $v_2 = (7, -4, 2)$ $v_3 = (9, 6, -3)$

Carilah nilai c_1, c_2 dan c_3 dengan menggunakan gauss-jordan

-6.00	7.00	9.00	14.00									
4.00	-4.00	6.00	60.00									
3.00	2.00	-3.00	-20.00									
1.00	-1.17	-1.50	-2.33									
4.00	-4.00	6.00	60.00									
3.00	2.00	-3.00	-20.00									
1.00	-1.17	-1.50	-2.33									
0.00	0.68	12.00	69.32									
3.00	2.00	-3.00	-20.00									
1.00	-1.17	-1.50	-2.33									
0.00	0.68	12.00	69.32									
0.00	5.51	1.50	-13.01									

Pada iterasi ke 1, berapa isi sel A(1,4) -2.33

Pada iterasi ke 2, berapa isi sel A(2,3) 12

Pada iterasi ke 3, berapa isi sel A(3,2) 5.51

1.00	-1.17	-1.50	-2.33			Pada iterasi ke 4, berapa isi sel A(2,4)	101.94
0.00	1.00	17.65	101.94				
0.00	5.51	1.50	-13.01				
1.00	-1.17	-1.50	-2.33			Pada iterasi ke 5, berapa isi sel A(3,4)	-574.7
0.00	1.00	17.65	101.94				
0.00	0.00	-95.75	-574.70				
1.00	-1.17	-1.50	-2.33			Pada iterasi ke 6, berapa isi sel A(3,4)	6
0.00	1.00	17.65	101.94				
0.00	0.00	1.00	6.00				
1.00	-1.17	-1.50	-2.33			Pada iterasi ke 7, berapa isi sel A(2,4)	-3.96
0.00	1.00	0.00	-3.96				
0.00	0.00	1.00	6.00				
1.00	-1.17	0.00	6.67			Pada iterasi ke 8, berapa isi sel A(1,4)	6.67
0.00	1.00	0.00	-3.96				
0.00	0.00	1.00	6.00				
1.00	0.00	0.00	2.04			Pada iterasi ke 9, berapa isi sel A(1,4)	2.04
0.00	1.00	0.00	-3.96				
0.00	0.00	1.00	6.00				



General Solusi

Ruang baris, Ruang kolom, Basis untuk Null Space.



Keyword

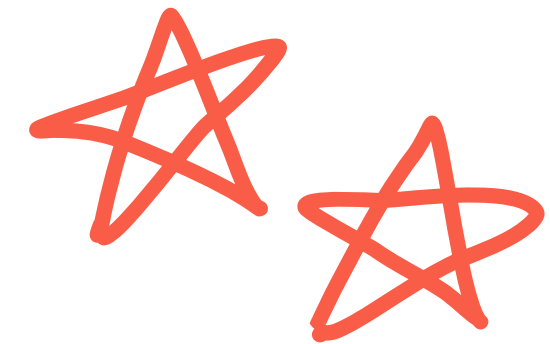
🌸 Bab terdahulu

- Kombinasi linier
- Merentang
- Bebas Linier
- Basis



🌸 Bab sekarang

- Row vektor/vektor baris
- Column vector/ vektor kolom
- Row space/ruang baris
- Column space / ruang kolom
- Null space/ruang nol
- General Solusi
- Partikular Solusi
- Basis untuk Null Space



Pengertian

4.8

1) Kombinasi Linier

\vec{w} \rightarrow kombinasi Linier dr $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ jika
 \vec{w} dpt diungkapkan dlm bentuk:

$$\vec{w} = k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \dots + k_n \vec{v}_n$$

dimana
 $k_1, k_2, \dots, k_n \rightarrow$ skalar

ingat!! baris di atas bkn hanya satu baris,
tp terdiri dari beberapa baris
or kombinasi linier \rightarrow ada nilai $\geq k_1, k_2, \dots, k_n$

Merentang = spanning

2. Merentang :

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ merentang ruang vektor V jika
 sembarang vektor pd ruang vektor V dpt
 dinyatakan sbg kombinasi linier dr $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$
 ada banyak nilai k_1, k_2, \dots, k_n
 det $\neq 0$ ($< n$ bnda dicari dlu)

ex:

tent. apakah $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ & $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ merentang \mathbb{R}^2

Jwb: merentang jika \rightarrow sembarang vektor pd \mathbb{R}^2 dpt
 dinyatakan sbg kombinasi linier \vec{v}_1, \vec{v}_2

5.3

Kebebasan Linier

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \rightarrow$ bebas linier jk hanya ada
satu pemecahan u permasalahan:
 $k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \dots + k_n \vec{v}_n = \vec{0}$
yaitu $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$

det $\neq 0$ (jk bisa dicari det)
jk ada sebuah or lebih vektor dpt
dinyatakan sbg k.l vektor lainnya mk
ex. \neq bebas linier

Basis
 $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$

merentang

$$\bar{x} = k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + \dots + k_n \bar{v}_n$$

\bar{x} = sembarang vektor

$k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n \rightarrow$ ada nilainya

or

$$\text{Det} \neq 0$$

bebas linier

$$\bar{0} = k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + \dots + k_n \bar{v}_n$$

or

$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0 \rightarrow$ hanya satu jawaban

$$\text{Det} \neq 0$$

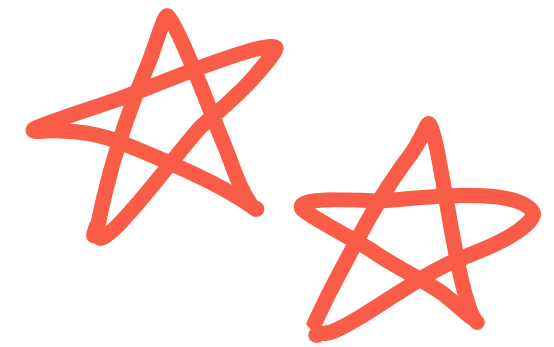
$$\text{matriks } A (m \times n) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{vektor-vektor } r_1 = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n}) \in R^n \\ r_2 = (a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ \dots \ a_{2n}) \in R^n \\ \dots \\ r_m = (a_{m1} \ a_{m2} \ a_{m3} \ \dots \ a_{mn}) \in R^n \end{array} \right\} \text{disebut vektor-vektor baris dari } A$$

$$\text{vektor-vektor } c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \in R^m \quad c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \in R^m \quad \dots \quad c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \in R^m$$

disebut vektor-vektor kolom dari A

Row, colom and null space



- ✿ Row space/ruang baris è
 - Sub ruang dari R_n yang direntang oleh $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ {vektor baris}
 - Matriks yang dibentuk dari $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$
 - Merupakan sebuah himpunan $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$
- ✿ Colomn space/ruang kolom è
 - Sub ruang dari R_m yang direntang oleh $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ {vektor kolom}
 - Matriks yang dibentuk dari $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$
 - Merupakan sebuah himpunan $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$
- ✿ Null space è sub ruang dari R_n yang merupakan ruang solusi dari SPL homogen $A.X = 0$

✿ RANK (A) : dimensi ruang baris (A) = dimensi ruang kolom(A)

NULITAS (A) / nullity(A) : dimensi ruang nol (A)

✿ Dimensi => banyaknya vektor pada suatu baris

Teorema 5.6.1 $\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n$

n = jumlah kolom

✿ Catatan:

1. Ruang / space : himpunan / set
2. Subruang / subspace: subset dari ruang-vektor yang memenuhi aksioma (1) dan (6)
3. Ruang vektor V direntang $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \}$: semua vektor $\mathbf{x} \in V$ bisa dinyatakan sebagai kombinasi linier dari S ; $\mathbf{x} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \dots + k_n \mathbf{v}_n$
4. Ruang vektor V punya basis $B = \{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n \}$: B merupakan himpunan yang linearly independent, dan B merupakan rentang ruang vektor V
5. Dimensi ruang vektor V : jika basis ruang vektor V adalah B , dimensi $V = |B|$

ex:1 hal 258

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$r_1 = [2 \ 1 \ 0] \in \mathbb{R}^3$$

$$r_2 = [3 \ -1 \ 4] \in \mathbb{R}^3$$

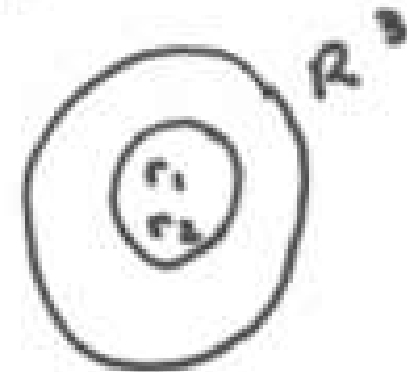
} vektor
baris dari A

$$c_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

} vektor
kolom dari A



↳ ruang baris / row space A:

↳ sub ruang dari \mathbb{R}^3 yg direntang
o $\{r_1, r_2\}$

↳ $\bar{x} = k_1 r_1 + k_2 r_2$

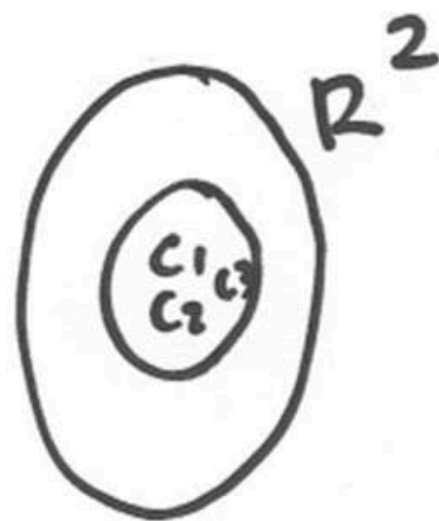
↳ untuk sembarang nilai \bar{x}
↳ ada nilai y k_1 & k_2

→ ruang kolom / column space A :

↳ subruang dari \mathbb{R}^2 yg direntang
o $\{c_1, c_2, c_3\}$

↳ $\vec{x} = k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3$

↳ \forall sembarang vektor \vec{x}
↳ ada nilai $\forall k_1, k_2, k_3$



Soal 3

Theorem 5.5.1. *A system of linear equations $Ax = b$ is consistent if and only if b is in the column space of A .*

Example 2 Let $Ax = b$ be the linear system

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Show that b is in the column space of A , and express b as a linear combination of the column vectors of A .

Theorem 5.5.1. *A system of linear equations $Ax = b$ is consistent if and only if b is in the column space of A .*

Example 2 Let $Ax = b$ be the linear system

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Show that b is in the column space of A , and express b as a linear combination of the column vectors of A .

Solution. Solving the system by Gaussian elimination yields (verify)

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3$$

Since the system is consistent, b is in the column space of A . Moreover, from (2) and the solution obtained, it follows that

$$2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Buktikan $\vec{b} \in \text{Ruang kolom } A$ } defn. Ruang kolom

artinya: \vec{b} direntang $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$ } defn. Rentan

→ : \vec{b} kombinasi linier $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$

$$\vec{b} = k_1\vec{c}_1 + k_2\vec{c}_2 + k_3\vec{c}_3$$

$$k_1 = ? \quad k_2 = ? \quad k_3 = ?$$

Dalam soal ini : $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Solusinya: $k_1 = 2, k_2 = -1, k_3 = 3$

Maka: TERBUKTI bahwa $\vec{b} \in \text{Ruang kolom } A$
dan $\vec{b} = (2)\vec{c}_1 + (-1)\vec{c}_2 + (3)\vec{c}_3$

Theorem 5.5.2. *If \mathbf{x}_0 denotes any single solution of a consistent nonhomogeneous linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, and if $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ form a basis for the nullspace of A , that is, the solution space of the homogeneous system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, then every solution of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ can be expressed in the form*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \quad (3)$$

and, conversely, for all choices of scalars c_1, c_2, \dots, c_k , the vector \mathbf{x} in this formula is a solution of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- ✿ Cari "General Solution" dari $A.x = b$
 $X = X_0 + r.V_1 + s.V_2 + t.V_3$
- ✿ Cari "particular Solution" dari $A.x = b$
 X_0
- ✿ Cari "General Solution" dari $A.x = 0$
 $X = r.V_1 + s.V_2 + t.V_3$
- ✿ Cari basis untuk null space A
 v_1, v_2 dan v_3

Soal 4

Cari solusi untuk $A.X = b$ dan $A.X = 0$

Example 3 In Example 3 of Section 1.2 we solved the nonhomogeneous linear system

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + 3x_2 - 2x_3 & & + 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 & = & -1 & & \\ & 5x_3 + 10x_4 & + 15x_6 & = & 5 \\ 2x_1 + 6x_2 & + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 & = & 6 & \end{array} \quad (4)$$

Cari solusi untuk $A.X = b$ dan $A.X = 0$

Example 3 In Example 3 of Section 1.2 we solved the nonhomogeneous linear system

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6\end{aligned}\tag{4}$$

and obtained

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

This result can be written in vector form as

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r - 4s - 2t \\ r \\ -2s \\ s \\ t \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

which is the general solution of (4). Comparing this to (3), the vector

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

is a particular solution of (4) and

$$\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

is the general solution of the homogeneous system

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 0 \end{aligned}$$

(verify).

Contoh 3: Penerapan Teorema 5.5.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} (4 \times 6) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ m \quad n \end{matrix}$

Ruang Solusi (Solution SET/space) dari $A\vec{x} = \vec{b}$
 (catatan: $\vec{x} \in \mathbb{R}^6$)

$$\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_0} + r \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3}$$

← bilangan real

$\vec{x} = \vec{x}_0 + r\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 + t\vec{v}_3$ disebut "General Solution" dari $A\vec{x} = \vec{b}$

\vec{x}_0 disebut "Particular Solution" dari $A\vec{x} = \vec{b}$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ adalah basis dari Nullspace (A)/Solution Space $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \bar{X}_0 + r \bar{V}_1 + s \bar{V}_2 + t \bar{V}_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

misal

$$\left. \begin{array}{l} r=1 \\ s=0 \\ t=0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \text{memeriksa ke pers} \rightarrow \text{hasilnya benar}$$

$$\left. \begin{array}{l} r=0 \\ s=1 \\ t=0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \text{memeriksa ke pers} \rightarrow \text{hasilnya benar}$$

• • • u : sembarang
 nilai r, s, t ~ hasil benar jika di masukkan ke persamaan.

$$A \bar{x} = \bar{0}$$

\bar{x} merupakan beberapa nilai $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$ agar menjadi $A \cdot \bar{x} = \bar{0} \hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

jawab $\Rightarrow \bar{x} = r \bar{v}_1 + s \bar{v}_2 + t \bar{v}_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

misal : $\left. \begin{matrix} r=1 \\ s=0 \\ t=0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ masukkan ke pers $A \cdot \bar{x} = \bar{0}$
 \hookrightarrow hasil benar

$\left. \begin{matrix} r=0 \\ s=1 \\ t=0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ masukkan ke pers $A \cdot \bar{x} = \bar{0}$
 \hookrightarrow hasil benar

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Solusi \underline{u} $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ adalah
 $\bar{x} = \bar{x}_0 + r \bar{v}_1 + s \bar{v}_2 + t \bar{v}_3$

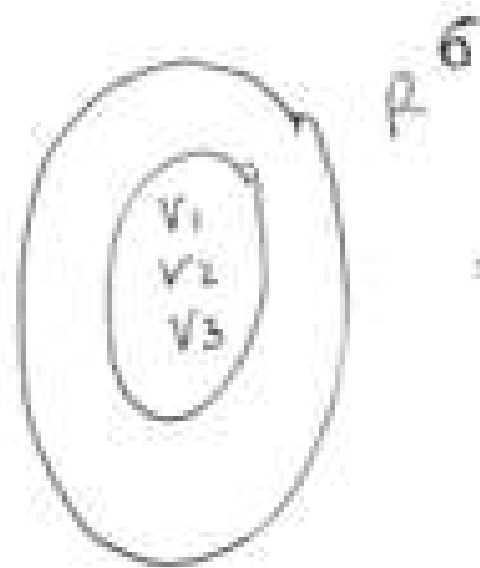
solusi \underline{u} $A \cdot \bar{x} = \bar{0}$ adalah
 $\bar{x} = r \bar{v}_1 + s \bar{v}_2 + t \bar{v}_3$

dan $\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ adalah

basis basis \underline{u} $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$

basis \underline{u} nullspace \uparrow (A)

$$A \bar{x} = \bar{0}$$



$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ ruang nol \Rightarrow yg mengandung $\bar{0}$ pada $A \cdot \bar{x}$

Carilah general solusi untuk $A \cdot X = B$
 kerjakan dengan Gauss – Jordan.

-6	X1	-4	X2	6	X3	5	X4	6	X5	-2	X6	=	-96
3	X1	9	X2	-3	X3	-4	X4	-3	X5	9	X6	=	160
9	X1	2	X2	5	X3	7	X4	9	X5	-2	X6	=	16

-6	-4	6	5	6	-2	-96							
3	9	-3	-4	-3	9	160							
9	2	5	7	9	-2	16							
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16							
3	9	-3	-4	-3	9	160							
9	2	5	7	9	-2	16							
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16							
0	6.99	0	-1.51	0	8.01	112							
9	2	5	7	9	-2	16							
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16							
0	6.99	0	-1.51	0	8.01	112							
0	-4.03	14	14.47	18	-4.97	-128							

Pada iterasi ke 1, berapa isi sel A(1,5) -1

Pada iterasi ke 2, berapa isi sel A(2,7) 112

Pada iterasi ke 3, berapa isi sel A(3,3) 14

1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 4, berapa isi sel A(2,6)	1.15
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02		
0	-4.03	14	14.47	18	-4.97	-128		
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 5, berapa isi sel A(3,4)	13.58
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02		
0	0	14	13.58	18	-0.34	-63.44		
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 6, berapa isi sel A(3,7)	-4.53
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02		
0	0	1	0.97	1.29	-0.02	-4.53		
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 7, berapa isi sel A(2,5)	0
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02		
0	0	1	0.97	1.29	-0.02	-4.53		
1	0.67	0	0.14	0.29	0.31	11.47	Pada iterasi ke 8, berapa isi sel A(1,6)	0.31
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02		
0	0	1	0.97	1.29	-0.02	-4.53		
1	0	0	0.29	0.29	-0.46	0.74	Pada iterasi ke 9, berapa isi sel A(1,4)	0.29
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02		
0	0	1	0.97	1.29	-0.02	-4.53		

20. $X1 = -0,29 t - 0,29 s + 0,46 r + 0,74$

21. $X2 = 0,22 t - 1,15 r + 16,02$

22. $X3 = -0,97 t - 1,29 s + 0,02 r - 4,53$

23. $X4 = t$

24. $X5 = s$

25. $X6 = r$



**Thank you
for your
attention!**

See you next time!

