Topik

- **Definisi Peluang Diskrit**
- **Sifat Peluang Diskrit**
- **Probabilitas terbatas**
- **Konsep Teori Himpunan pada Peluang Diskrit**
- **Probabilitas Kejadian Majemuk $A \cup B$ dan $A \cap B$**
- **Dua Kejadian Saling Lepas**
- **Dua Kejadian Saling Bebas**

Peluang Diskrit

- Teori peluang banyak menggunakan konsep-konsep kombinatorial.
- Teori probabilitas ini dikembangkan pertama kali pada abad tujuhbelas oleh ahli matematika Perancis Blaise Pascal. Dari hasil studi ini Pascal menemukan berbagai macam properti koefisien binomial.
- Pada abad delapan belas dikembangkan oleh ahli matematika dari Perancis Laplace.
- Aplikasi kombinatorial dan teori peluang saat ini meluas ke berbagai bidang ilmu lain maupun dalam kehidupan dunia nyata.

Peluang Diskrit

Definisi

- Himpunan dari semua hasil yang mungkin muncul pada suatu percobaan statistik disebut **ruang sampel** yang dilambangkan dengan himpunan S, sedangkan anggota-anggota dari S disebut **titik sampel**.
- Misalkan x_i adalah sebuah titik sampel di dalam ruang sampel S. Peluang bagi x_i adalah ukuran kemungkinan terjadinya atau munculnya x_i di antara titik-titik sampel yang lain di S.

Peluang Diskrit

Definisi

- Titik sampel yang mempunyai peluang lebih besar berarti kemungkinan terjadinya lebih besar pula, sedangkan titik sampel yang peluangnya lebih kecil berarti kemungkinan terjadinya juga lebih kecil.

Sifat Peluang Diskrit

- $0 \leq p(x_i) \leq 1$, $p(x_i)$ adalah nilai peluang.
- yaitu jumlah peluang semua titik sampel didalam ruang sampel S adalah 1.

Contoh

1. Pada pelemparan dadu, S = {1,2,3,4,5,6}. Peluang munculnya setiap angka = 1/6.
2. Uang logam mempunyai dua muka yaitu gambar (g) dan angka (a). Jika satu uang logam dilempar, maka peluang munculnya muka gambar = ½, muka angka = ½. Jika dua koin uang logam dilempar, maka ruang sampel adalah S = {aa, gg, ag, ga}.

   Peluang setiap titik sampel adalah p(aa) = p(gg) = p(ag) = p(ga) = ¼.

Contoh

- Sebuah koin yang mempunyai sisi A dan sisi B dilempar keatas sebanyak 4 kali. Berapa peluang munculnya sisi A sebanyak 3 kali ?

Penyelesaian *:*

- Jumlah kemungkinan munculnya sisi A sebanyak 3 kali adalah kombinasi C(4,3)=4. Jumlah seluruh hasil percobaan adalah 2x2x2x2 = 16, sehingga peluang munculnya sisi A sebanyak 3 kali adalah 4/16 = ¼.

Probabilitas terbatas (Finite Probability)

- Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel, dilambangkan dengan E.
- Misalkan pada percobaan melempar dadu, kejadian munculnya angka ganjil adalah E = {1,3,5}, kejadian munculnya angka 1 = {1}.
- Kejadian yang hanya mengandung satu titik sampel disebut **kejadian sederhana (simple event)**
- Kejadian yang mengandung lebih dari satu titik contoh disebut **kejadian majemuk (compound event).**

Probabilitas terbatas

- Suatu kejadian dikatakan terjadi jika salah satu dari titik contoh didalam kejadian tersebut terjadi.
- **Definisi**
- Peluang kejadian E di ruang sampel S adalah p(E) = |E| / |S|.
- p(E) = $$\frac{|E|}{|S|} = \sum_{x_i \in E} \mathrm{p(xi)}$$

Contoh

- Berapa peluang munculnya angka ganjil pada pelemparan dadu ?

Solusi

- Pada percobaan melempar dadu, S = {1,2,3,4,5,6}. Kejadian munculnya angka ganjil E = {1,3,5}. Disini |S| = 6 dan |E| = 3. Kejadian munculnya angka ganjil adalah 3/6 = ½. Kita juga dapat menghitung peluang munculnya satu angka ganjil = 1/6, sehingga p(E) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = ½.

Contoh

- Dua buah dadu dilemparkan. Berapa peluang munculnya angka-angka dadu dengan jumlah 8?

- Ruang sampelnya sebanyak 36. Kejadian munculnya jumlah angka sama dengan 8adalah E={(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6 ,2)}. Peluang munculnya jumlah angka sama dengan 8 adalah 5/36.

Ruang sampel dari dua buah dadu adalah

Mata dadu	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Contoh

- Kartu remi berjumlah 52. Keseluruhan kartu ini terdiri dari 13 jenis kartu, setiap jenis terdiri dari 4 buah kartu. Tiga belas jenis kartu tersebut adalah 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, joker, ratu, raja, as. Setiap pemain remi mendapatkan 5 buah kartu. Berapa peluang dari 5 kartu tersebut mengandung 4 kartu dari jenis yang sama ?

Penyelesaian :

- Cara mengambil 5 kartu sembarang dari 52 buah kartu = C(52,5) (Ini adalah Ruang sampel).
- Cara mengambil satu jenis kartu dari 13 jenis yang ada = C(13,1)
- Cara mengambil 4 kartu dari 4 kartu yang sejenis = C(4,4)
- Cara mengambil satu kartu lagi dari 48 kartu yang tersisa = C(48,1)
- Peluang dari 5 kartu tersebut mengandung 4 kartu sejenis = C(13,1) x C(4,4) x C(48,1) / C(52,5) = 0.00024

Contoh

- Berapa peluang dari 5 kartu tersebut mengandung 4 kartu as ?

Penyelesaian :

- Untuk mengambil kartu as, maka hanya ada satu cara mengambil jenis kartu as.
- Cara mengambil 4 kartu dari 4 kartu as = C(4,4)
- Cara mengambil satu kartu lagi dari 48 kartu yang tersisa = C(48,1)
- Cara mengambil 5 kartu sembarang dari 52 buah kartu = C(52,5)
- Peluang dari 5 kartu tersebut mengandung 4 kartu as = 1 x C(4,4) x C(48,1) / C(52,5) = 0.0000185

Konsep Teori Himpunan pada Peluang Diskrit

1. Kejadian bahwa A dan B terjadi sekaligus berarti munculnya salah satu titik sampel di dalam himpunan A $\cap$ B. Peluang terjadinya kejadian A dan B adalah

   P (A $\cap$ B) = $\sum_{x_i \in A \cap B} p(x_i)$

2. Kejadian bahwa A atau B atau keduanya terjadi berarti munculnya salah satu titik sampel di A$\cup$ B. Peluang terjadinya kejadian A atau B adalah

   P (A $\cup$ B) = $\sum_{x_i \in A \cup B} p(x_i)$

Konsep Teori Himpunan pada Peluang Diskrit

3. Kejadian bahwa A terjadi tetapi B tidak terjadi berarti munculnya salah satu titik sampel di A – B. Peluang terjadinya kejadian A tetapi B tidak adalah

   P (A - B) = $\sum_{x_i \in A-B} p(x_i)$

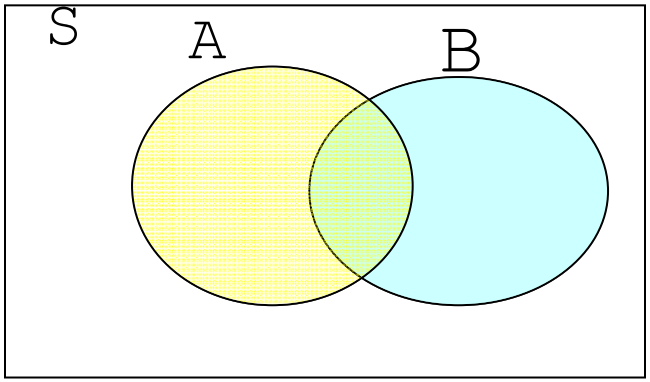
4. Kejadian salah satu dari A dan B terjadi namun bukan keduanya berarti sama dengan munculnya salah satu titik sampel di A ⊕ B. Peluang terjadinya salah satu dari A dan B namun bukan keduanya adalah

   P (A ⊕ B) = $\sum_{x_i \in A \oplus B} p(x_i)$

5. Komplemen dari kejadian A adalah p(~A) = 1-p(A)

Probabilitas Kejadian Majemuk $A \cup B$ dan $A \cap B$

- Bila A dan B adalah dua himpunan dalam himpunan semesta S, maka gabungan dari A dan B adalah himpunan baru yang anggotanya terdiri dari anggota A atau anggota B atau anggota keduanya.
- $A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$
- Diagram Venn



Probabilitas Kejadian Majemuk $A \cup B$ dan $A \cap B$

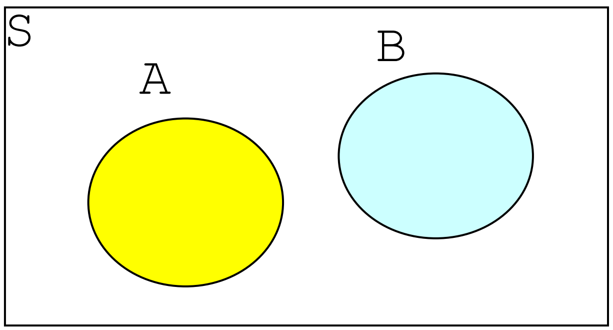
- Probabilitas kejadian $A \cup B$

  $P(A \cup B) = p(A) + p(B) – p(A \cap B)$
- Banyaknya anggota himpunan $A \cup B$

  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) – n(A \cap B)$
- Bila A dan B kejadian sembarang pada ruang sampel S, maka gabungan kejadian A dan B ($A \cup B$) adalah kumpulan semua titik sampel yang ada pada A atau B atau keduanya.
- Kejadian $A \cup B$ dan $A \cap B$ disebut kejadian majemuk. Kejadian $A \cap B$ yaitu kumpulan titik sampel yang ada pada A dan B.
- $A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$

Dua Kejadian Saling Lepas

- Bila A dan B adalah dua kejadian sembarang pada S dan berlaku $A \cap B = \emptyset$, maka A dan B dikatakan **dua kejadian saling lepas** atau **saling terpisah (*mutually exclusive*).**
- Dua kejadian A dan B saling lepas artinya kejadian A dan B tidak mungkin terjadi secara bersamaan.



Dua Kejadian Saling Lepas

- Dua kejadian saling lepas maka $p(A \cap B) = 0$, sehingga probabilitas kejadian $A \cup B$ dirumuskan sebagai berikut :
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Dua Kejadian Saling Bebas

- Dua Kejadian A dan B dalam ruang sampel S dikatakan **saling bebas** jika kejadian A tidak mempengaruhi kejadian B dan sebaliknya.
- Jika A dan B merupakan dua kejadian saling bebas.

  $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
- Jika A, B dan C kejadian **saling bebas**, maka peluang kejadian $A \cap B \cap C$:

  $P(A \cap B \cap C) = p(A).\ p(B).\ p(C)$

Contoh

- Pada pelemparan dua uang logam, apakah kejadian munculnya muka dari uang logam pertama dan uang logam kedua saling bebas ?

Penyelesaian :

- Kejadian tersebut saling bebas sebab dalam pelemparan dua uang logam secara sekaligus, muncul sisi apa saja dari uang logam pertama tidak ada sangkut pautnya dengan munculnya sisi apa saja dari uang logam kedua atau sebaliknya.
- S = {(m,m), (m,b), (b,m), (b,b)}

Contoh

- Misalkan:
- A = kejadian muncul muka(m) dari uang logam pertama
- B = kejadian muncul muka(m) dari uang logam kedua
- Maka kejadian majemuk $A \cap B$ menyatakan munculnya muka uang logam 1 dan munculnya muka uang logam 2. sehingga
- $P(A) = ½$ $P(B) = ½$
- Sehingga $p(A \cap B) = ½ . ½ = ¼ = P(A).P(B)$
- Dengan demikian karena berlaku $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ maka A dan B saling bebas.

Contoh

- Dari 100 orang mahasiswa yang hadir dalam sebuah diskusi 80 orang laki-laki dan 20 orang perempuan. Diantara mahasiswa pria terdapat 35 orang yang memakai jaket almamater (pja) dan 45 orang yang tidak memakai jaket tersebut (ptja) dan diantara mahasiswa wanita terdapat 8 orang yang memakai jaket almamater (wja) dan 12 orang yang tidak memakainya (wtja). Kita ingin memilih salah seorang dari mahasiswa tersebut sebagai notulen.

Contoh

- Maka ruang sampelnya adalah S = {pja, ptja, wja, wtja}.
- Peluang setiap mahasiswa dari kategori terpilih sebagai notulen adalah

  P(pja) = 35 / 100 = 0.35

  P(ptja) = 45 / 100 = 0.45

  P(wja) = 8 / 100 = 0.08

  P(wtja) = 12 / 100 = 0.12

Contoh

- Misalkan A adalah kejadian terpilihnya mahasiswa pria dan B adalah kejadian terpilihnya mahasiswa (i) yang memakai jaket almamater maka

  $P(A) = 0.35 + 0.45 = 0.8$

  $P(B) = 0.35 + 0.08 = 0.43$
- $A \cap B$ menyatakan kejadian terpilihnya mahasiswa pria yang memakai jaket almamater :

  $P\ (A \cap B) = 0.35$
- $A \cup B$ menyatakan kejadian terpilihnya mahasiswa pria atau mahasiswa(i) yang memakai jaket almamater : $P(A \cup B) = 0.35 + 0.45 + 0.08 = 0.88$

  $P(A \cup B) = 0.8 + 0.43 – 0.35 = 0.88$
- $A \oplus B$ menyatakan kejadian terpilihnya mahasiswa pria yang tidak memakai jaket almamater atau mahasiswi yang memakai jaket :

  $P(A \oplus B) = 0.45 + 0.12 = 0.57$
- A – B menyatakan kejadian terpilihnya mahasiswa pria tetapi tidak memakai jaket almamater : $P(A – B) = 0.45$

Contoh

- Diantara 100 bilangan bulat positif pertama, berapa peluang memilih secara acak sebuah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5 ?

Penyelesaian :

- A menyatakan kejadian bilangan bulat yang habis dibagi 3
- B menyatakan kejadian bilangan bulat yang habis dibagi 5
- $A \cap B$ menyatakan kejadian bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu bilangan bulat yang habis dibagi KPK dari 3 dan 5 yaitu 15) maka $A \cup B$ menyatakan kejadian bilangan bulat yang habis dibagi 3 atau 5.

Contoh

- Terlebih dahulu dihitung
- $|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33$
- $|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20$
- $|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$
- untuk mendapatkan $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 33/100 + 20/100 - 6/100 = 0.47$
- Jadi peluang bilangan yang habis dibagi 3 atau 5 adalah 0.45

Contoh

- Dari 8 bit (atau 1 byte) yang dibangkitkan secara acak, berapa peluang bahwa byte tersebut tidak dimulai dengan ‘11’ ?

Penyelesaian :

- Misalkan A menyatakan kejadian bahwa byte yang dibangkitkan dimulai dengan ‘11’. Maka ~A menyatakan kejadian bahwa byte yang dibangkitkan tidak dimulai dengan ‘11’. Jumlah byte yang dimulai dengan ‘11’ adalah 26 = 64 buah karena 2 posisi pertama sudah diisi dengan ‘11’ sehingga kita cukup mengisi 6 posisi bit lainnya. Jadi |A| = 64. Ruang sampel S adalah himpunan semua bit yang panjangnya 8 disini |S| = 28 =256. Maka peluang byte yang dibangkitkan tidak dimulai dengan ‘11’ adalah
- P(~A) = 1 – p(A) = 1 – 64/256 = 192 / 256