Metode Komputasi Numerik

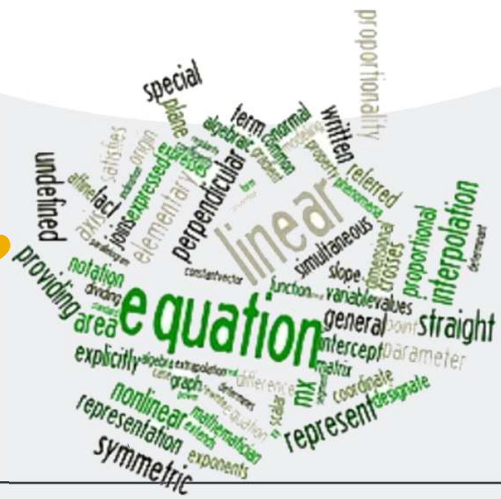
Sistem Persamaan Linear

Jacobi and Gauss-Seidel Iteration

$$\frac{10+17}{3.45}$$

$$\left(\frac{C-B}{3-D}\right) = \left(\frac{A}{3B}\right) = \frac{3C(2)^4}{X+Y+C}$$

$$C = \frac{B^3+C^2+A}{3BA}$$



Jacobi Iteration

$\frac{10+17}{3.45}$

- Metode ini lebih efektif digunakan dalam operasi penyelesaian system persamaan linear maupun tidak linear dengan dimensi banyak (lebih dari 100 dimensi), terutama dalam komputasi big data.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{B}$$

$a_{11} > a_{12} + a_{13}$
$a_{22} > a_{21} + a_{23}$
$a_{33} > a_{31} + a_{32}$

- Metode ini diterapkan pada matriks hanya jika elemen diagonal lebih besar dari jumlah semua elemen pada persamaan tersebut

$\left(\frac{C-B}{3-D}\right) = \left(\frac{A}{3B}\right) = \frac{3C(2)^4}{X+Y+C}$

$$\frac{10+17}{3.45}$$

Jacobi Iteration Method

- Perhitungan setiap variable diformulasikan dalam persamaan ini:

$$X_1^n = \frac{b_1 - a_{12}X_2^{n-1} - a_{13}X_3^{n-1}}{a_{11}}$$

$$X_2^n = \frac{b_2 - a_{21}X_1^{n-1} - a_{23}X_3^{n-1}}{a_{22}}$$

$$X_3^n = \frac{b_3 - a_{31}X_1^{n-1} - a_{32}X_2^{n-1}}{a_{33}}$$

- Perhitungan dimulai dengan nilai perkiraan sembarang untuk variable yang dicari (biasanya Semua variable diambil = 0)

$$X_1^1 = \frac{b_1 - a_{12}(O) - a_{13}(O)}{a_{11}}$$

$$X_2^1 = \frac{b_2 - a_{21}(O) - a_{33}(O)}{a_{22}}$$

$$X_3^1 = \frac{b_3 - a_{31}(O) - a_{32}(O)}{a_{33}}$$

$$\left(\frac{C-B}{3-D}\right) = \left(\frac{A}{3B}\right) = \frac{3C(2)^4}{X+Y+C}$$

Metode Iterasi Jacobi

$\frac{10+17}{3.45}$

- Iterasi dilanjutkan, di mana nilai variable baru yang didapat, disubstitusikan ke dalam persamaan iterasi berikutnya

$$X_1^2 = \frac{b_1 - a_{12}(X_2) - a_{13}(X_3)}{a_{11}}$$

$$X_2^2 = \frac{b_2 - a_{21}(X_1) - a_{33}(X_3)}{a_{22}}$$

$$X_3^2 = \frac{b_3 - a_{31}(X_1) - a_{32}(X_2)}{a_{33}}$$

- Prosedur diulangi sampai nilai setiap variable pada iterasi ke-n mendekati nilai pada iterasi ke n-1

$$x_1^n \approx x_1^{n-1}\ ;\ x_2^n \approx x_2^{n-1}\ ;\ \text{dan } x_3^n \approx x_3^{n-1}$$

atau

$$\left| \frac{X_i^{(k+1)} - X_i^{k}}{X_i^{(k+1)}} \right| < \varepsilon\ ,\ i = 1,2,3,\ldots,n$$

$\begin{pmatrix} \frac{C-B}{3-D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A}{3B} \end{pmatrix} = \frac{3C(2)^4}{X+Y+C}$

Contoh

$$
\begin{aligned}
3X_1 + X_2 - X_3 &= 5 \\
-X_1 + 3X_2 + X_3 &= -4 \\
2X_1 + 2X_2 + 5X_3 &= 1
\end{aligned}
$$

dengan toleransi error $\varepsilon = 0.001$

$$C = \frac{B^3 + C^2 + A}{3BA}$$

$$3X_1 + X_2 - X_3 = 5$$

$$-X_1 + 3X_2 + X_3 = -4$$

$$2X_1 + 2X_2 + 5X_3 = 1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$X_1^n = \frac{b_1 - a_{12}X_2^{n-1} - a_{13}X_3^{n-1}}{a_{11}}$$

$$X_2^n = \frac{b_2 - a_{21}X_1^{n-1} - a_{23}X_3^{n-1}}{a_{22}}$$

$$X_3^n = \frac{b_3 - a_{31}X_1^{n-1} - a_{32}X_2^{n-1}}{a_{33}}$$

$$X_1 = \frac{-X_2 + X_3 + 5}{3}$$

$$X_2 = \frac{X_1 - X_3 - 4}{3}$$

$$X_3 = \frac{-2X_1 - 2X_2 + 1}{5}$$

$$X_1 = \frac{-X_2 + X_3 + 5}{3}$$

$$X_2 = \frac{X_1 - X_3 - 4}{3}$$

Perkiraan awal X1 = X2 = X3 = 0

$$X_3 = \frac{-2X_1 - 2X_2 + 1}{5}$$

Iterasi 1

$$X_1{}^1 = \frac{X_2 + X_3 + 5}{3} = \frac{0+0+5}{3} = 1{,}667$$

$$X_2{}^1 = \frac{X_1 - X_3 - 4}{3} = \frac{0-0-4}{3} = -1{,}333$$

$$X_3{}^1 = \frac{-2X_1 - 2X_2 + 1}{5} = \frac{-2(0)-2(0)+1}{5} = 0{,}2$$

X1 = 1,667 ; X2 = −1,333 ; X3 = 0,2

Iterasi 2

$$X_1{}^1 = \frac{X_2 + X_3 + 5}{3} = \frac{1{,}667 - 1{,}333 + 5}{3} = 2{,}1778$$

$$X_2{}^1 = \frac{X_1 - X_3 - 4}{3} = \frac{1{,}667 - 0{,}2 - 4}{3} = -0{,}8444$$

$$X_3{}^1 = \frac{-2X_1 - 2X_2 + 1}{5} = \frac{-2(1{,}667) - 2(-1{,}333) + 1}{5} = 0{,}6667$$

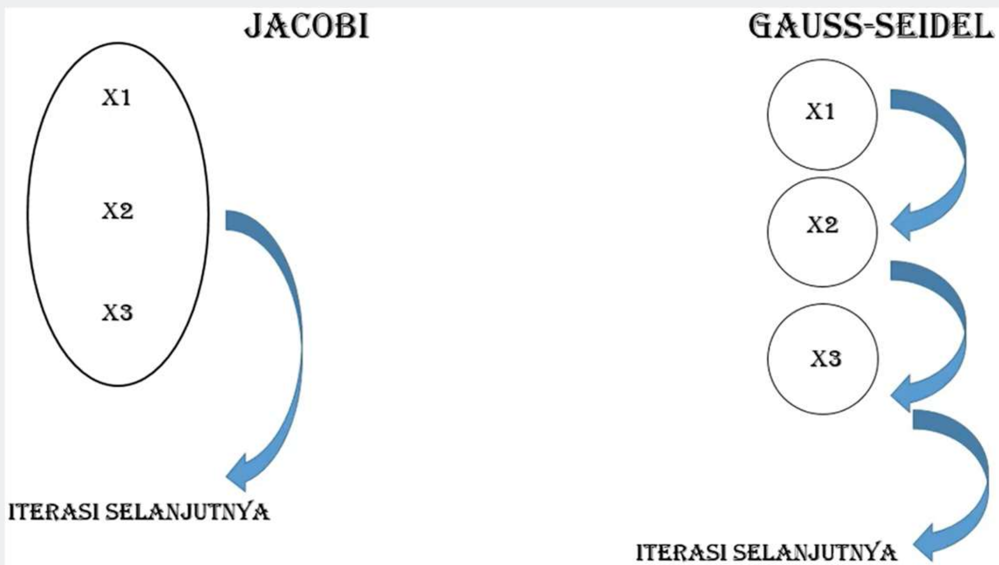
Iterasi 3,4, ... ; berhenti ketika:

$$\left| \frac{X_i{}^{(k+1)} - Xi^k}{Xi^{(k+1)}} \right| < \varepsilon \text{ , } i = 1,2,3,\ldots,n$$

Gauss – Seidel Iteration

$\frac{10+17}{3.45}$

- Konsep perhitungannya sama dengan Iterasi Jacobi, namun pada iterasi Gauss – Seidel, ketika kita sudah menemukan nilai X1, **nilai X1 ini dapat langsung digunakan untuk mencari nilai X2 pada iterasi yang sama**, begitu juga dengan nilai X2 untuk mencari nilai X3



$\left(\frac{C-B}{3-D}\right) = \left(\frac{A}{3B}\right) = \overline{X+Y+C}$

$$\frac{10+17}{3.45}$$

Gauss – Seidel Iteration

- Iterasi 1

$$X_1^1 = \frac{b_1 - a_{12}(X_2^0) - a_{13}(X_3^0)}{a_{11}}$$

Nilai baru dari X_1^1 tersebut kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan kedua pada iterasi 1

$$X_2^1 = \frac{b_2 - a_{21}(X_1^1) - a_{23}(X_3^0)}{a_{22}}$$

Demikian juga ke dalam persamaan ketiga dari sistem termodifikasi, nilai X_1^1 dan X_2^1 tersebut kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan ketiga pada iterasi 1

$$X_3^1 = \frac{b_3 - a_{31}(X_1^1) - a_{32}(X_2^1)}{a_{33}}$$

Dengan cara ini, nilai X1, X2, dan X3 lebih cepat diperoleh daripada metode Jacobi

Contoh

$$
\begin{aligned}
3X_1 + X_2 - X_3 &= 5 \\
-X_1 + 3X_2 + X_3 &= -4 \\
2X_1 + 2X_2 + 5X_3 &= 1
\end{aligned}
$$

dengan toleransi error $\varepsilon = 0.001$

$C = \frac{B^3 + C^2 + A}{3BA}$

$$3X_1 + X_2 - X_3 = 5$$
$$-X_1 + 3X_2 + X_3 = -4$$
$$2X_1 + 2X_2 + 5X_3 = 1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$X_1^n = \frac{b_1 - a_{12}X_2^{n-1} - a_{13}X_3^{n-1}}{a_{11}}$$
$$X_2^n = \frac{b_2 - a_{21}X_1^{n-1} - a_{23}X_3^{n-1}}{a_{22}}$$
$$X_3^n = \frac{b_3 - a_{31}X_1^{n-1} - a_{32}X_2^{n-1}}{a_{33}}$$

$$X_1 = \frac{-X_2 + X_3 + 5}{3}$$
$$X_2 = \frac{X_1 - X_3 - 4}{3}$$
$$X_3 = \frac{-2X_1 - 2X_2 + 1}{5}$$

$$X_1 = \frac{-X_2 + X_3 + 5}{3}$$

$$X_2 = \frac{X_1 - X_3 - 4}{3}$$

Perkiraan awal $X_2 = X_3 = 0$

$$X_3 = \frac{-2X_1 - 2X_2 + 1}{5}$$

Iterasi 1

$$X_1{}^1 = \frac{X_2 + X_3 + 5}{3} = \frac{0+0+5}{3} = 1{,}667$$

$$X_2{}^1 = \frac{X_1 - X_3 - 4}{3} = \frac{1{,}667-0-4}{3} = -0{,}778$$

$$X_3{}^1 = \frac{-2X_1 - 2X_2 + 1}{5} = \frac{-2(1{,}667)-2(-0{,}778)+1}{5} = -0{,}156$$

Assignment

$\frac{10+17}{3.45}$

Selesaikan persamaan berikut dengan metode Jacobi dan Gauss - Seidel

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 19$$

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 39$$

Selesaikan dan temukan solusi untuk kasus di atas dengan kode program dengan ketentuan:

- ✓ NIM genap menggunakan metode Gauss - Seidel
- ✓ NIM ganjil menggunakan metode Jacobi

Pengumpulan tugas berupa kode program, input, dan solusi nya.
Kode program yang dikumpulkan diberi komentar keterangan di tiap baris prosedurnya