BAB 5

Teorema Bayes

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

- Mahasiswa memahami konsep teorema Bayes
- Mahasiswa menguasai implementasi teorema Bayes pada sistem pakar

B. INDIKATOR

- Mampu memahami konsep teorema Bayes
- Mampu memahami implementasi teorema Bayes pada sistem pakar

C. DASAR TEORI

1. Teorema Bayes

a. Pengenalan Teorema Bayes

Teorema Bayes diambil dari nama ahli matematika Inggris abad ke-18 Thomas Bayes. Teorema Bayes adalah rumus matematika untuk menentukan probabilitas bersyarat. Probabilitas bersyarat adalah kemungkinan suatu hasil terjadi, berdasarkan pada hasil sebelumnya yang terjadi dalam keadaan serupa. Teorema Bayes memberikan cara untuk merevisi prediksi atau teori yang ada (memperbarui probabilitas) dengan adanya bukti baru atau tambahan.

Teorema Bayes sering digunakan dalam berbagai bidang, termasuk dalam statistika, pembelajaran mesin, kecerdasan buatan, pengenalan pola, dan banyak lagi. Teorema ini memungkinkan kita untuk mengubah keyakinan tentang suatu hipotesis dengan mempertimbangkan bukti baru atau informasi tambahan.

Secara matematis, Teorema Bayes dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

Dengan:

$P(A|B)$ adalah probabilitas suatu peristiwa A terjadi, mengingat bahwa peristiwa B telah terjadi.

$P(B|A)$ adalah probabilitas suatu peristiwa B terjadi, mengingat bahwa peristiwa A telah terjadi.

$P(A)$ adalah probabilitas awal dari peristiwa A terjadi.

$P(B)$ adalah probabilitas dari peristiwa B terjadi.

Di bidang keuangan, Teorema Bayes dapat digunakan untuk menilai risiko peminjaman uang kepada calon peminjam. Teorema Bayes juga disebut Aturan Bayes atau Hukum Bayes dan merupakan dasar dari bidang statistik Bayesian.

b. Probabilitas Prior dan Posterior

Penerapan Teorema Bayes tersebar luas dan tidak terbatas pada bidang keuangan. Misalnya, teorema Bayes dapat digunakan untuk menentukan keakuratan hasil tes medis dengan mempertimbangkan seberapa besar kemungkinan seseorang mengidap penyakit dan keakuratan tes secara umum. Teorema Bayes mengandalkan penggabungan distribusi probabilitas sebelumnya untuk menghasilkan probabilitas posterior.

Probabilitas prior dalam inferensi statistik Bayesian, adalah probabilitas suatu peristiwa terjadi sebelum data baru dikumpulkan. Dengan kata lain, ini mewakili penilaian rasional terbaik terhadap kemungkinan hasil tertentu berdasarkan pengetahuan saat ini sebelum eksperimen dilakukan. Sesuai dengan probabilitas subjektif, bila seseorang mengamati kejadian B dan mempunyai keyakinan bahwa ada kemungkinan B akan muncul, maka probabilitas B disebut Probabilitas Prior. Setelah ada informasi tambahan bahwa misalnya kejadian A telah muncul, mungkin akan terjadi perubahan terhadap perkiraan semula mengenai kemungkinan B akan muncul. Probabilitas untuk B sekarang adalah probabilitas bersyarat akibat A dan disebut Probabilitas Posterior. Probabilitas posterior adalah probabilitas revisi suatu peristiwa yang terjadi setelah mempertimbangkan informasi baru. Probabilitas posterior dihitung dengan memperbarui probabilitas sebelumnya menggunakan teorema Bayes. Dalam istilah statistik, probabilitas posterior adalah probabilitas terjadinya peristiwa A jika peristiwa B telah terjadi.

Teorema Bayes dengan demikian memberikan probabilitas suatu peristiwa berdasarkan informasi baru yang ada atau mungkin terkait dengan peristiwa itu. Rumus Bayes juga dapat digunakan untuk menentukan bagaimana probabilitas terjadinya suatu peristiwa dipengaruhi oleh informasi baru, yang hipotetis tersebut, dengan asumsi informasi baru tersebut ternyata benar.

Sebagai ilustrasi, misal ada empat kartu King, jadi peluang terambilnya kartu raja adalah empat dibagi 52, yaitu 1/13 atau sekitar 7,69%. Sekarang, misalkan terungkap bahwa kartu yang dipilih adalah kartu bergambar. Probabilitas kartu yang dipilih adalah King, mengingat itu adalah kartu bergambar, adalah 4/12 atau 33,3%, karena ada 12 kartu bergambar dalam satu tumpukan.

c. Peluang Bersyarat dan Peluang Bebas

Peluang atau probabilitas bersyarat menunjukkan besarnya kesempatan suatu peristiwa akan terjadi yang didahului oleh peristiwa lain yang dependen terhadap peristiwa tersebut. Probabilitas bersyarat adalah probabilitas terjadinya peristiwa kedua akan terjadi apabila peristiwa pertama terjadi.

1. Peluang Bersyarat

Peluang bersyarat A bila B diketahui dilambangkan dengan P(A|B) dan didefinisikan sebagai:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Jika P(B) > 0.

Diberikan contoh berikut:

Diketahui jumlah siswa yang melanjutkan dan tidak melanjutkan ke perguruan tinggi menurut jenis kelamin sebagai berikut:

	Melanjutkan ke Perguruan Tinggi	Tidak melanjutkan ke perguruan tinggi
Laki-laki	450	50
Perempuan	150	250

Perhatikan kejadian–kejadian berikut:

L: kejadian yang terpilih laki-laki

K: kejadian yang terpilih adalah orang yang melanjutkan ke perguruan tinggi.

Dengan menggunakan ruang contoh yang dipersempit K, maka akan didapatkan peluang kejadian yang terpilih laki-laki melanjutkan ke perguruan tinggi atau $P(L|K) = \frac{450}{600} = \frac{3}{4}$.

Misalkan n(A) melambangkan banyaknya unsur dalam himpunan A:

$$P(L|K) = \frac{n(K \cap L)}{n(K)} \quad \frac{n(K \cap L)/n(S)}{n(K)/n(S)} \quad \frac{P(K \cap L)}{P(K)} = \quad =$$

$$P(K \cap L) = \frac{450}{900} = \frac{1}{2}$$

$$P(K) = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}$$

$$P(L|K) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

2. Peluang Kejadian Saling Bebas

Dua kejadian dikatakan saling bebas artinya kejadian yang satu tidak mempengaruhi atau bergantung dengan kejadian lainnya. Jika kejadian A saling lepas terhadap kejadian B, maka rumus peluang keduanya dinyatakan sebagai berikut:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

P(A) = peluang kejadian A

P(B) = peluang kejadian B

P(A□B) = peluang kejadian A dan kejadian B

P(A□B) = peluang kejadian A atau kejadian B

Contoh kejadian saling lepas adalah sebagai berikut:

a) Pada pelemparan dua buah dadu, berapakah peluang muncul mata dadu berjumlah 3 atau berjumlah 9?

Mata dadu berjumlah 3 dihasilkan oleh {(1, 2), (2, 1)}, sehingga n(A) = 2.

Mata dadu berjumlah 9 dihasilkan oleh {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)}, sehingga n(B) = 4.

Artinya, kedua kejadian tidak saling mempengaruhi. Dengan demikian, peluang muncul mata dadu berjumlah 3 atau berjumlah 9 adalah sebagai berikut:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} + \frac{4}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Jadi, peluang muncul mata dadu berjumlah 3 atau berjumlah 9 adalah 1/6.

b) Sebuah dadu dan dua buah logam dilantunkan serentak satu kali. Jika A adalah munculnya satu "Angka" pada uang logam, dan B adalah kejadian munculnya angka 5 pada mata dadu. Tentukan peluang A dan B.

Pada pelemparan dua buah uang logam ➐ S = {AA, AG, GA, GG}

Pada pelemparan sebuah dadu ➐ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A = kejadian munculnya satu "Angka"

B = kejadian munculnya angka 5 pada mata dadu

Maka

$$P(A) = \frac{2}{4}$$
$$P(B) = \frac{1}{6}$$

Jadi

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$P(A \cap B) = \frac{2}{4}.\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

Jadi peluang kejadian satu angka pada uang logam dan muncul angka 5 pada mata dadu adalah 1/12

d. Rumus Teorema Bayes

Rumus umum teorema Bayes adalah sebagai berikut:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

Dengan:

$P(A|B)$ adalah probabilitas suatu peristiwa A terjadi, mengingat bahwa peristiwa B telah terjadi.

$P(B|A)$ adalah probabilitas suatu peristiwa B terjadi, mengingat bahwa peristiwa A telah terjadi.

$P(A)$ adalah probabilitas awal dari peristiwa A terjadi.

$P(B)$ adalah probabilitas dari peristiwa B terjadi.

Rumus umum teorema Bayes dapat diturunkan untuk kasus evidence tunggal dan hipotesis tunggal dengan evidence tunggal dan hipotesis ganda.

1. Evidence Tunggal dan Hipotesis Tunggal

Dalam konteks Teorema Bayes dengan evidence tunggal (*single evidence*) dan hipotesis tunggal (*single hypothesis*), kita memiliki suatu situasi di mana kita ingin memperbarui keyakinan kita tentang suatu hipotesis berdasarkan bukti tunggal yang diberikan.

Misalkan kita memiliki:

H adalah hipotesis yang ingin diuji.

E adalah bukti (evidence) yang diberikan.

Dalam kasus ini, Teorema Bayes dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$P(H|E) = \frac{P(E|H) \times P(H)}{P(E)}$$

Dalam rumus ini:

$P(H|E)$ adalah probabilitas posterior dari hipotesis *H* terjadi jika evidence *E* telah terjadi.

$P(E|H)$ adalah probabilitas likelihood dari evidence *E* terjadi jika hipotesis *H* benar.

$P(H)$ adalah probabilitas prior dari hipotesis *H*, sebelum mendapatkan evidence *E*.

$P(E)$ adalah probabilitas dari evidence *E*, juga dikenal sebagai faktor normalisasi.

Rumus ini memberikan kerangka kerja untuk memperbarui keyakinan kita tentang suatu hipotesis berdasarkan bukti tunggal yang baru saja kita peroleh.

Contoh penerapannya bisa dalam diagnosa medis, di mana kita ingin memperbarui keyakinan kita tentang suatu penyakit berdasarkan hasil tes medis yang baru saja diperoleh.

2. Evidence Tunggal dan Hipotesis Ganda

   Dalam Teorema Bayes dengan evidence tunggal (*single evidence*) dan hipotesis ganda (*multiple hypotheses*), kita memiliki situasi di mana kita ingin memperbarui keyakinan kita tentang beberapa hipotesis berdasarkan bukti tunggal yang diberikan.

   Misalkan kita memiliki beberapa hipotesis (H_1, H_2, ...H_n) yang mungkin terjadi, dan kita memiliki suatu bukti (E).

   Teorema Bayes dalam konteks ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$P(H_i|E) = \frac{P(E|H_i) \times P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E|H_j) \times P(H_j)}$$

   Dalam rumus ini:

   P (H_i|E) adalah probabilitas posterior dari hipotesis Hi terjadi jika evidence E terjadi.

   P(E|H_i) adalah adalah probabilitas likelihood dari evidence E terjadi jika hipotesis Hi benar.

   P(Hi) adalah probabilitas prior dari hipotesis Hi, sebelum mendapatkan evidence E.

   $\sum^{n}{}_{j=1} P(E|H_j) \times P(H_j)$ adalah faktor normalisasi, yang merupakan total probabilitas dari semua hipotesis terjadi dengan mempertimbangkan evidence E.

   Contoh penerapan Teorema Bayes dengan kejadian tunggal dan hipotesis ganda bisa dalam konteks klasifikasi teks, di mana kita memiliki beberapa kategori dan ingin menentukan kategori mana yang paling mungkin untuk suatu dokumen berdasarkan kata-kata yang terdapat di dalamnya.

2. Implementasi Teorema Bayes

   Berikut beberapa contoh dari implementasi Teorema Bayes.

   1. Bayangkan Anda adalah seorang analis keuangan di bank investasi. Menurut penelitian Anda terhadap perusahaan publik, 60% perusahaan yang menaikkan harga sahamnya lebih dari 5% dalam tiga tahun terakhir menggantikan CEO mereka selama periode tersebut.

      Pada saat yang sama, hanya 35% perusahaan yang tidak menaikkan harga sahamnya lebih dari 5% pada periode yang sama menggantikan CEO-nya. Diketahui probabilitas bahwa harga saham akan tumbuh lebih dari 5% adalah 4%, tentukan probabilitas bahwa saham suatu perusahaan yang memecat CEO-nya akan meningkat lebih dari 5%.

Sebelum mencari probabilitas, Anda harus terlebih dahulu menentukan notasi probabilitas.

P(A) – probabilitas kenaikan harga saham sebesar 5%

P(B) – kemungkinan pergantian CEO

P(A|B) – probabilitas kenaikan harga saham sebesar 5% jika CEO telah diganti

P(B|A) – kemungkinan penggantian CEO mengingat harga saham meningkat sebesar 5%.

Dengan menggunakan teorema Bayes, kita dapat mencari probabilitas yang diperlukan:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B|A) \times P(A) + P(B|\neg A) \times P(\neg A)}$$

$$P(A|B) \quad \frac{0.60 \times 0.04}{60 \times 0.04 + 0.35 \times (1 - 0.04)} \quad = = 0.067 = 6.67\% \quad 0.$$

Jadi, peluang saham suatu perusahaan yang menggantikan CEO-nya akan tumbuh lebih dari 5% adalah 6,67%.

2. Misalkan ada suatu perusahaan yang memproduksi lampu pijar, dan kita ingin mengetahui seberapa sering lampu-lampu tersebut mengalami kegagalan dalam produksi. Data historis menunjukkan bahwa 2% dari lampu-lampu tersebut mengalami kegagalan setelah diuji. Namun, kita juga mengetahui bahwa 95% dari lampu-lampu yang gagal diuji sebenarnya telah diidentifikasi dengan benar sebagai gagal, sedangkan 5% dari lampu yang gagal diuji disalahkan dan dianggap berhasil.

   Sekarang, kita ingin mengetahui probabilitas bahwa sebuah lampu yang dihasilkan oleh perusahaan tersebut benar-benar gagal, jika kita mengetahui bahwa lampu tersebut telah gagal diuji.

   Kita gunakan Teorema Bayes untuk menyelesaikan masalah ini. Diberikan:

   - *P*(*F*) adalah probabilitas bahwa lampu pijar yang diproduksi gagal (prior probability), yang dalam kasus ini adalah 0.02 (2%).
   - *P*(¬*F*) adalah probabilitas bahwa lampu pijar yang diproduksi berhasil, yang adalah 0.98 (98%).
   - *P*(*Pos*|*F*) adalah probabilitas bahwa lampu pijar yang gagal diuji diidentifikasi sebagai gagal, yang adalah 0.95 (95%).
   - *P*(*Neg*|¬*F*) adalah probabilitas bahwa lampu pijar yang berhasil diuji diidentifikasi sebagai berhasil, yang adalah 0.95 (95%).

Kemudian, menggunakan Teorema Bayes, kita dapat menghitung probabilitas bahwa sebuah lampu yang gagal diuji benar-benar gagal (*P*(*F*|*Pos*)):

$$P(F|Pos) = \frac{P(Pos|F) \times P(F)}{P(Pos)}$$

Pertama-tama, kita harus menghitung *P*(*Pos*), yaitu probabilitas bahwa sebuah lampu dipilih sebagai positif (gagal) diuji:

$P(Pos) = P(Pos|F) \times P(F) + P(Pos|\neg F) \times P(\neg F)$

$P(Pos) = (0.95).(0.02) + (0.05).(0.98)$

$P(Pos) = 0.019 + 0.049$

$P(Pos) = 0{,}068$

Setelah menghitung *P*(*Pos*), kita bisa menggunakannya untuk menghitung *P*(*F*|*Pos*).

$$P(F|Pos) = \frac{P(Pos|F) \times P(F)}{P(Pos)}$$

$$P(F|Pos) = \frac{(0.95).(0.02)}{0.068}$$

$$P(F|Pos) = \frac{0.019}{0.068} = 0.2794$$

Jadi, probabilitas bahwa sebuah lampu yang gagal diuji benar-benar gagal, jika kita mengetahui bahwa lampu tersebut telah gagal diuji, adalah sekitar 0.2794 atau sekitar 27.94%.

Ini adalah contoh penerapan Teorema Bayes dalam situasi di mana kita memiliki informasi tentang kegagalan produksi lampu dan kemampuan tes untuk mendeteksi kegagalan.

3. Diketahui probabilitas penyakit tanaman kedelai sebagai berikut:

No	Penyakit	Nilai
H1	Karat Daun	0.3
H2	Busuk Rhizoctonia	0.9
H3	Busuk Batang	0.9
H4	Bercak Daun Target Spot	0.3
H5	Layu Bakteri	0.9
H6	Kerdil	0.7
H7	Antraknosa	0.3

Nilai probabilitas terhadap gejala diberikan sebagai berikut:

No	Gejala	Penyakit

		H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7
E1	Menyerang setiap fase pertumbuhan	8	8	8	8	8	8	8
E2	Munculnya bercak klorotik kecil yang tidak beraturan pada permukaan daun	9	4		4			2
E3	Bercak kecil berwarna coklat kemerahan mirip karat	9		4	4	4		4
E4	Bercak kemudian berubah menjadi coklat atau coklat tua dan membentuk bisul-bisul	9		2	2			
E5	Terjadi busuk (hawar) di dekat akar		9	5		2		2
E6	Pada kondisi sangat lembab daun daun akan lengket satu sama lain, menyerupai sarang laba-laba		9	4				2
E7	Pada daun, batang, timbul hawar dengan arah serangan dari bawah ke atas	2	9	5	2	2	2	2
E8	Layu, pangkalnya berubah warna menjadi coklat kemerahan	3	5	9	3	5		3
E9	Leher akarnya tampak jamur yang berwarna putih, kemudian mati		5	9	1	3		
E10	Timbulnya bercak-bercak berwarna coklat kemerahan yang berukuran kurang lebih 10-15 mm	5			9	3		3
E11	Bercak tersebut kadang membentuk lingkaran seperti pada papan tembak	5			9			
E12	Dapat menyerang hampir seluruh bagian tanaman	4	4	4	9	6	6	4
E13	Tanaman kedelai terkena penyakit ini saat berumur 2-3 minggu	3	3	3	3	9	2	3
E14	Tanaman layu secara tiba-tiba		2	5		9		4
E15	Tanaman kedelai yang terkena penyakit ini akan mengering dan mati		4	6	4	9		4
E16	Warna daun lebih hijau dibanding daun normal	2			4		9	
E17	Warna daun berubah dari hijau menjadi kuning belang terutama pada bagian pucuk	2			2		9	
E18	Daun muda tampak keriting dan kasar	4	2		4	2	9	

E19	Pada batang akan timbul bintik-bintik hitam berupa duri-duri jamur	2	4	4	4	2		9
E20	Tulang daun pada permukaan bawah menebal dengan warna kecoklatan	4	4	6	4	4		9

Diketahui:

Munculnya bercak klorotik kecil yang tidak beraturan pada permukaan (E2) dan bercak kecil berwarna coklat kemerahan mirip karat (E3).

Disini menggunakan rumus evidence tunggal dan hipotesis ganda, probabilitas gejala di semua penyakit:

$$\sum_{k=i}^{n} P(E_n|H_k) \times P(H_k)$$

(P(E2|H1) x P(E3|H1) x P(H1)) + (P(E2|H2) x P(E3|H2) x P(H2)) + (P(E2|H3) x P(E3|H3) x P(H3)) + (P(E2|H4) x P(E3|H4) x P(H4)) + (P(E2|H5) x P(E3|H5) x P(H5)) + (P(E2|H6) x P(E3|H6) x P(H6))

+ (P(E2|H7) x P(E3|H7) x P(H7))

= (9 x 9 x 0.3) + (4 x 0 x 0.9) + (0 x 4 x 0.9) + (4 x 4 x 0.3) + (0 x 4 x 0.9) + (0 x 0 x 0.7) + (2 x 4 x 0,3)

= 24.3 + 0 + 0 + 4.8 + 0 + 0 + 2.4

= 31.5

Probabilitas di setiap penyakit:

$$P(H_i \mid E) = \frac{P(E_n|H_k) \text{ x } P(H_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(E_n \mid H_k) \text{ x } P(H_k)}$$

$$P(H_1|E_2E_3) = \frac{P(E_2|H_1) \times P(E_3|H_1) \times P(H_1)}{\sum_{k=1}^{n} P(E_n|H_k) \times P(H_k)} = \frac{(9)(9)(0.3)}{31.5} = 0.771$$

$$P(H_2|E_2E_3) = \frac{P(E_2|H_2) \times P(E_3|H_2) \times P(H_2)}{\sum_{k=1}^{n} P(E_n|H_k) \times P(H_k)} = \frac{(4)(0)(0.9)}{31.5} = 0$$

$$P(E_2|H_3) \times P(E_3|H_3) \times P(H_3) \qquad (0)(4)(0.9)$$

$$P(H_3|E_2E_3) = \frac{}{\sum_{k=1}^{n} P(E_n|H_k) \times P(H_k)} = \frac{}{31.5} = 0$$

$$P(H_4|E_2E_3) = \frac{P(E_2|H_4) \times P(E_3|H_4) \times P(H_4)}{\sum_{k=1}^{n} P(E_n|H_k) \times P(H_k)} = \frac{(4)(4)(0.3)}{31.5} = 0.152$$

$$P(H_5|E_2E_3) = \frac{P(E_2|H_5) \times P(E_3|H_5) \times P(H_5)}{\sum_{k=1}^{n} P(E_n|H_k) \times P(H_k)} = \frac{(0)(4)(0.9)}{31.5} = 0$$

$$P(H_6|E_2E_3) = \frac{P(E_2|H_6) \times P(E_3|H_6) \times P(H_6)}{\sum_{k=1}^{n} P(E_n|H_k) \times P(H_k)} = \frac{(0)(0)(0.7)}{31.5} = 0$$

$$P(H_7|E_2E_3) = \frac{P(E_2|H_7) \times P(E_3|H_7) \times P(H_7)}{\sum_{k=1}^{n} P(E_n|H_k) \times P(H_k)} = \frac{(2)(4)(0.3)}{31.5} = 0.076$$

Dari perhitungan diatas maka diambil kesimpulan bahwa hasil dari diagnosa penyakit tanaman kedelai dengan gejala munculnya bercak klorotik kecil yang tidak beraturan pada permukaan (E2) dan bercak kecil berwarna coklat kemerahan mirip karat (E3) adalah H1 atau penyakit karat daun dengan nilai probabilitas 0.771

D. REFERENSI

1. Akerkar, R dan Sajja, P. 2010. Knowledge-Based Systems. Jones & Bartlett Learning 2. Azmi, Z dan Yasin, V. 2017. Pengantar Sistem Pakar dan Metode (Introduction of Expert System and Methods). Jakarta: Mitra Wacana Media.
2. Turban, E., & E.A., J. (2005). Decision Support System and Expert System (7th ed.). Yogyakarta – Indonesia: Andi Offset.
3. Azmi, Z dan Yasin, V. 2017. Pengantar Sistem Pakar dan Metode (Introduction of Expert System and Methods). Jakarta: Mitra Wacana Media.

E. TUGAS

1. Peluang Lion Air berangkat tepat pada waktunya adalah P(B) = 0.85, peluang Lion Air datang tepat pada waktunya adalah P(D) = 0. 90 dan peluang pesawat tersebut berangkat dan datang tepat pada waktunya adalah P(B□D) = 0.75. Hitung peluang bahwa Lion air tersebut:
   a. Datang tepat pada waktunya bila diketahui pesawat komersial itu berangkat tepat pada waktunya

   $$P(\mathrm{D}|B) = \frac{P(\mathrm{B} \cap \mathrm{D})}{P(B)} = \frac{0.75}{0.85} = \frac{15}{17} = 0.8824$$

   b. Berangkat tepat pada waktunya bila diketahui pesawat komersial tersebut datang tepat pada waktunya

   $$P(\mathrm{B}|\mathrm{D}) = \frac{P(\mathrm{D} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{D})} = \frac{0.75}{0.90} = \frac{15}{18} = 0.8333$$

2. Di suatu lingkungan, 90% anak-anak jatuh sakit karena flu dan 10% karena campak dan tidak ada penyakit lain. Peluang terjadinya ruam pada campak adalah 0,95 dan flu adalah 0,08. Jika seorang anak mengalami ruam, tentukan kemungkinan anak tersebut terkena flu.

P(F) = Anak-anak yang terkena flu. = 90% = 0.9

P(C) = Anak-anak yang terkena campak. = 10% = 0.1

P(R | C) = Peluang anak-anak yang terkena ruam campak = 0.95

P(R | F) = Peluang anak-anak yang Tekena ruam flu = 0.08

Pertanyaan: Jika seorang anak mengalami ruam, tentukan kemungkinan anak tersebut terkena flu. P(F | R)?

P(R) = P(R|F) x P(F) + P(R|C) x P(C)

= (0.08x0.9) + (0.95x0.1) = 0.0972 + 0.095 = 0.167

$$P(\mathrm{F}|\mathrm{R}) = \frac{P(\mathrm{R} \cap \mathrm{F}) \times P(\mathrm{F})}{P(\mathrm{R})} = \frac{0.08 \times 0.9}{0.167} = \frac{0.072}{0.167} = \frac{72}{167} = 0.4311$$

3. Pada contoh kasus pada bagian 2.3 di atas, tentang penyakit tanaman kedelai, apabila tanaman memiliki gejala: tanaman kedelai terkena penyakit ini saat berumur 2-3 minggu; warna daun lebih hijau dibanding daun normal; dan daun muda tampak keriting dan kasar.
   Cari atau tentukan kemungkinkan diagnosa penyakit tanaman kedelai tersebut.

Diketahui probabilitas penyakit tanaman kedelai sebagai berikut:

No	Penyakit	Nilai
H1	Karat Daun	0.3
H2	Busuk Rhizoctonia	0.9
H3	Busuk Batang	0.9
H4	Bercak Daun Target Spot	0.3
H5	Layu Bakteri	0.9
H6	Kerdil	0.7
H7	Antraknosa	0.3

Nilai probabilitas terhadap gejala diberikan sebagai berikut:

No	Gejala	Penyakit						
		H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7
E1	Menyerang setiap fase pertumbuhan	8	8	8	8	8	8	8
E2	Munculnya bercak klorotik kecil yang tidak beraturan pada permukaan daun	9	4		4			2
E3	Bercak kecil berwarna coklat kemerahan mirip karat	9		4	4	4		4
E4	Bercak kemudian berubah menjadi coklat atau coklat tua dan membentuk bisul-bisul	9		2	2			
E5	Terjadi busuk (hawar) di dekat akar		9	5		2		2
E6	Pada kondisi sangat lembab daun daun akan lengket satu sama lain, menyerupai sarang laba-laba		9	4				2
E7	Pada daun, batang, timbul hawar dengan arah serangan dari bawah ke atas	2	9	5	2	2	2	2
E8	Layu, pangkalnya berubah warna menjadi coklat kemerahan	3	5	9	3	5		3
E9	Leher akarnya tampak jamur yang berwarna putih, kemudian mati		5	9	1	3		

E10	Timbulnya bercak-bercak berwarna coklat kemerahan yang berukuran kurang lebih 10-15 mm	5			9	3		3
E11	Bercak tersebut kadang membentuk lingkaran seperti pada papan tembak	5			9			
E12	Dapat menyerang hampir seluruh bagian tanaman	4	4	4	9	6	6	4
E13	Tanaman kedelai terkena penyakit ini saat berumur 2-3 minggu	3	3	3	3	9	2	3
E14	Tanaman layu secara tiba-tiba		2	5		9		4
E15	Tanaman kedelai yang terkena penyakit ini akan mengering dan mati		4	6	4	9		4
E16	Warna daun lebih hijau dibanding daun normal	2			4		9	
E17	Warna daun berubah dari hijau menjadi kuning belang terutama pada bagian pucuk	2			2		9	
E18	Daun muda tampak keriting dan kasar	4	2		4	2	9	
E19	Pada batang akan timbul bintik-bintik hitam berupa duri-duri jamur	2	4	4	4	2		9
E20	Tulang daun pada permukaan bawah menebal dengan warna kecoklatan	4	4	6	4	4		9

- (E13) Tanaman kedelai terkena penyakit ini saat berumur 2-3 minggu.
- (E16) Warna daun lebih hijau disbanding daun normal.
- (E18) Daun muda tampak keriting dan kasar.

Pertanyaan: Cari atau tentukan kemungkinan diagnose penakit tanaman kedelai tersebut!

1. Probabilitas gejala di semua penyakit:

$$\sum_{k=i}^{n} P(E_n|H_k) \times P(H_k)$$

= (P(E13 | H1)) x P(E16 | H1) x P(E18 | H1) x P(H1)) + (P(E13 | H2)) x P(E16 | H2) x P(E18 | H2) x P(H2)) + (P(E13 | H3)) x P(E16 | H3) x P(E18 | H3) x P(H3)) + (P(E13 | H4)) x P(E16 | H4) x P(E18 | H4) x P(H4)) + (P(E13 | H5)) x P(E16 | H5) x P(E18 | H5) x x P(H5)) + (P(E13 | H6)) x P(E16 | H6) x P(E18 | H6) x P(H6)) + (P(E13 | H7)) x P(E16 | H7) x P(E18 | H7) x P(H7))

= (3 x 2 x 4 x 0.3) + (3 x 0 x 2 x 0.9) + (3 x 0 x 0 x 0.9) + (3 x 4 x 4 x 0.3) + (9 x 0 x 2 x 0.9) + (2 x 9 x 9 x 0.7) + (3 x 0 x 0 x 0.3)

= 7.2 + 0 + 0 + 14.4 + 0 + 113.4 +0

135

2. Probabilitas di setiap penyakit:

$$P(H_i \mid E) = \frac{P(E_n|H_k) \text{ x } P(H_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(E_n \mid H_k) \text{ x } P(H_k)}$$

$$P(H_1 \mid E_{13}E_{16}E_{18}) = \frac{3 \text{ x } 2 \text{ x } 4 \text{ x } 0.3}{135} = 0.053$$

$$P(H_2 \mid E_{13}E_{16}E_{18}) = \frac{3 \text{ x } 0 \text{ x } 4 \text{ x } 0.9}{135} = 0$$

$$P(H_3 \mid E_{13}E_{16}E_{18}) = \frac{3 \text{ x } 0 \text{ x } 0 \text{ x } 0.9}{135} = 0$$

$$P(H_4 \mid E_{13}E_{16}E_{18}) = \frac{3 \text{ x } 4 \text{ x } 4 \text{ x } 0.3}{135} = 0.106$$

$$P(H_5 \mid E_{13}E_{16}E_{18}) = \frac{9 \text{ x } 0 \text{ x } 2 \text{ x } 0.9}{135} = 0$$

$$P(H_6 \mid E_{13}E_{16}E_{18}) = \frac{3 \text{ x } 9 \text{ x } 9 \text{ x } 0.7}{135} = 0.840$$

$$P(H_1 \mid E_{13}E_{16}E_{18}) = \frac{3 \text{ x } 0 \text{ x } 0 \text{ x } 0.3}{135} = 0$$

Dari perhitungan diatas maka diambil kesimpulan bahwa hasil dari diagnosa penyakit tanaman kedelai dengan gejala Tanaman kedelai terkena penyakit ini saat berumur 2-3 minggu (E13), Warna daun lebih hijau disbanding daun normal (E16) dan Serta daun muda tampak keriting dan kasar (E18) adalah H6 atau penyakit kerdil dengan nilai probabilitas 0.840

--- SELAMAT BELAJAR ---