مفهوم أساسي — جميع الدوالّ المثلَّثية في مثلَّث قائم الزاوية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت θ تمثّل قياس زاوية حادّة في مثلّث قائم الزاوية، فإنّ الدوالّ المثلَّثية الستّ تُعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور.

الرموز:

$\csc\theta$ (θ قاطع تمام) $= \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ $\sin\theta$ (θ جيب) $= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

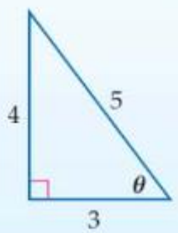
$\sec\theta$ (θ قاطع) $= \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$ $\cos\theta$ (θ جيب تمام) $= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$\cot\theta$ (θ ظل تمام) $= \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ $\tan\theta$ (θ ظل) $= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

أمثلة:

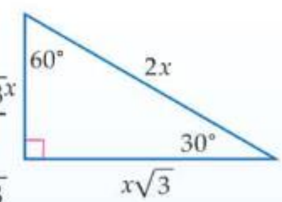
$\tan\theta = \frac{4}{3}$ $\cos\theta = \frac{3}{5}$ $\sin\theta = \frac{4}{5}$

$\cot\theta = \frac{3}{4}$ $\sec\theta = \frac{5}{3}$ $\csc\theta = \frac{5}{4}$



مفهوم أساسي — بعض قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا الخاصة

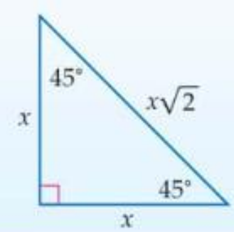
أضف إلى مطويتك



نستنتج من المثلّث الذي قياسات زواياه $30°-60°-90°$ أن:

$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\tan 60° = \sqrt{3}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}2$



نستنتج من المثلّث الذي قياسات زواياه $45°-45°-90°$ أن:

$\tan 45° = 1$ $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

مفهوم أساسي — معكوس النسب المثلَّثية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وجيبها يساوي x، فإن: **معكوس جيب** x هو قياس $\angle A$.

الرموز: إذا كان $\sin A = x$، فإن: $\sin^{-1} x = m\angle A$.

مثال: $\sin A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 30°$

التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وجيب التمام لها يساوي x، فإن: **معكوس جيب تمام** x هو قياس $\angle A$.

الرموز: إذا كان $\cos A = x$، فإن: $\cos^{-1} x = m\angle A$.

مثال: $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 45°$

التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وظلّها يساوي x، فإن: **معكوس ظل** x هو قياس $\angle A$.

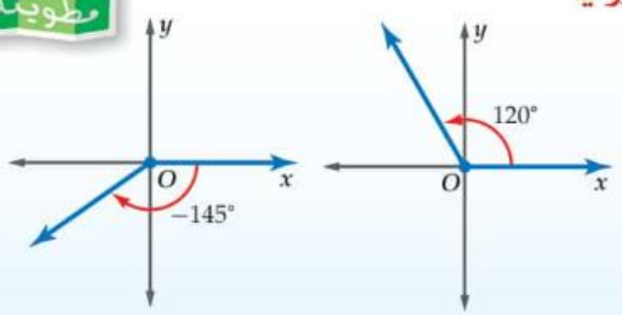
الرموز: إذا كان $\tan A = x$، فإن: $\tan^{-1} x = m\angle A$.

مثال: $\tan A = \sqrt{3} \rightarrow \tan^{-1}\sqrt{3} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 60°$

مفهوم أساسي — قياسات الزوايا

أضف إلى مطويتك

يكون قياس الزاوية موجبًا إذا دار ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة، ويكون قياس الزاوية سالبًا إذا دار ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.



مفهوم أساسي — التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

أضف إلى مطويتك

من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان	من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات
للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات في $\frac{\pi \text{ rad}}{180°}$	للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، اضرب قياس الزاوية بالراديان في $\frac{180°}{\pi \text{ rad}}$

ملخّص المفهوم

أضف إلى مطويتك

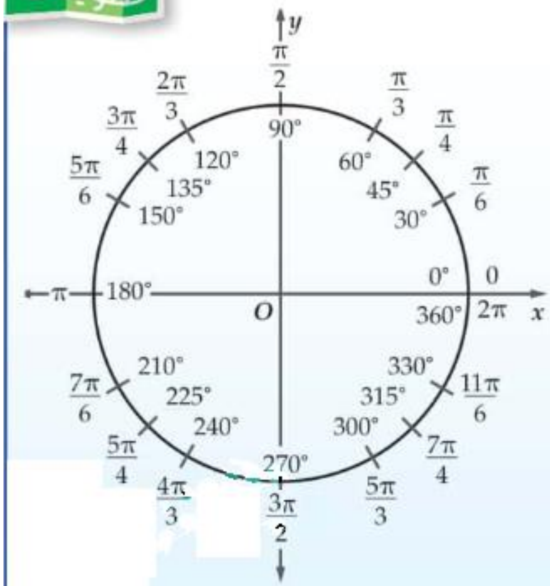
القياس بالدرجات وبالراديان

يُظهِر الشكل المجاور قياسات الزوايا الخاصة بالدرجات وبالراديان.

من المفيد أن تحفظ قياسات الزوايا الخاصّة الآتية بالدرجات وبالراديان؛ فقياسات الزوايا الخاصّة الأخرى ما هي إلا مضاعفات لقياسات هذه الزوايا.

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \qquad 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \qquad 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$



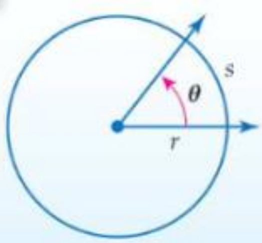
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

طول القوس

التعبير اللفظي: طول القوس من الدائرة (s)، المقابل لزاوية مركزية قياسها (θ) بالراديان يساوي حاصل ضرب نصف القطر r في θ.

الرموز: $s = r\theta$



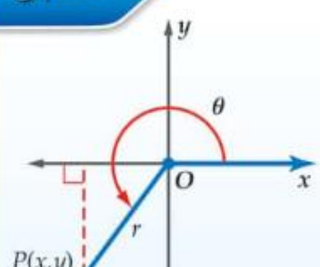
مفهوم أساسي

أضف إلى

الدوالّ المثلَّثية للزوايا

لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي ولتكن النقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء لها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد قيمة r التي تمثّل البُعد بين نقطة الأصل والنقطة P.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$. فتكون الدوالّ المثلّثية الستُّ للزاوية θ معرَّفة كما يأتي:



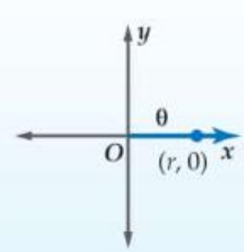
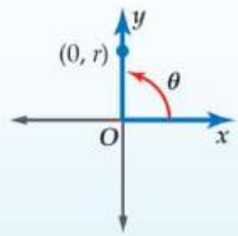
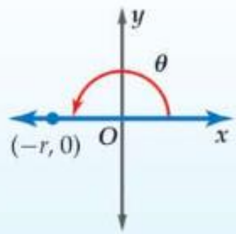
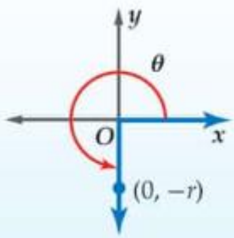
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0$$

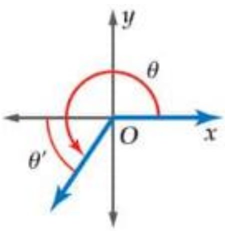
$$\csc\theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$

إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y، فإن الزاوية θ تُسمّى **زاوية ربعية**.

مفهوم أساسي — الزوايا الربعية

أضف إلى مطويتك

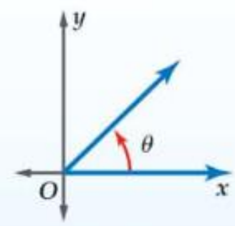
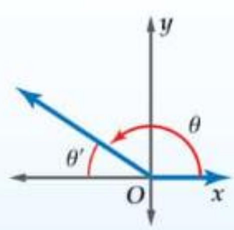
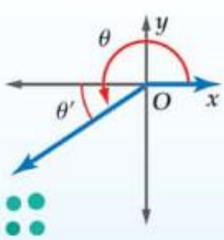
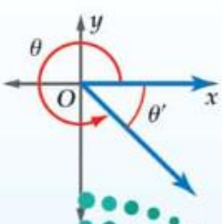
$\theta = 0°$ أو $\theta = 0\ rad$	$\theta = 90°$ أو $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad	$\theta = 180°$ أو $\theta = \pi$ rad	$\theta = 270°$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2}$ rad
			



الدوالّ المثلّثية باستعمال الزوايا المرجعية: إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن **زاويتها المرجعية** θ' هي الزاوية الحادّة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x. والجدول الآتي يبيِّن قواعد إيجاد قياس الزاوية المرجعية للزاوية θ بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها، حيث $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$.

مفهوم أساسي — الزوايا المرجعية

أضف إلى مطويتك

الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
			
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$ $\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$ $\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 360° - \theta$ $\theta' = 2\pi - \theta$

مفهوم أساسي — إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المرجعية θ'.

الخطوة 2: أوجد قيمة الدالّة المثلَّثية للزاوية θ'.

الخطوة 3: حدِّد إشارة قيمة الدالّة المثلثية للزاوية θ باستعمال الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ .

الربع الثاني	الربع الأول
$\sin\theta, \csc\theta: +$	$\sin\theta, \csc\theta: +$
$\cos\theta, \sec\theta: -$	$\cos\theta, \sec\theta: +$
$\tan\theta, \cot\theta: -$	$\tan\theta, \cot\theta: +$
الربع الثالث	**الربع الرابع**
$\sin\theta, \csc\theta: -$	$\sin\theta, \csc\theta: -$
$\cos\theta, \sec\theta: -$	$\cos\theta, \sec\theta: +$
$\tan\theta, \cot\theta: +$	$\tan\theta, \cot\theta: -$

يمكنك استعمال قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا التي قياساتها °30 , °45 , °60 التي تعلّمتها في الدرس 1-4.

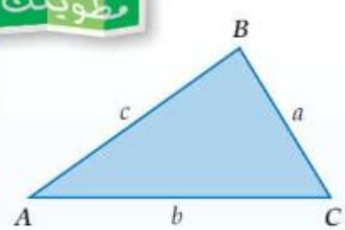
قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا الخاصّة

ظلّ التمام	القاطع	قاطع التمام	الظلّ	جيب التمام	الجيب
$\cot 30° = \sqrt{3}$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\csc 30° = 2$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 30° = \frac{1}{2}$
$\cot 45° = 1$	$\sec 45° = \sqrt{2}$	$\csc 45° = \sqrt{2}$	$\tan 45° = 1$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60° = 2$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

مفهوم أساسي — مساحة المثلَّث

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مساحة المثلَّث (k) تساوي نصف حاصل ضرب طولَي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.



الرموز: $k = \frac{1}{2} bc \sin A \qquad k = \frac{1}{2} ac \sin B \qquad k = \frac{1}{2} ab \sin C$

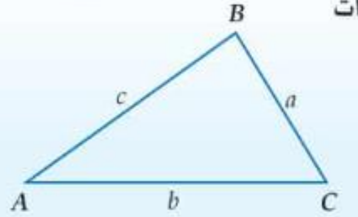
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قانون الجيوب

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



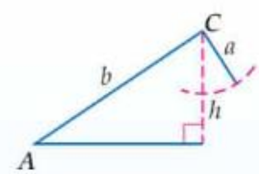
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

المثلثات الممكنة في حالة (SSA)

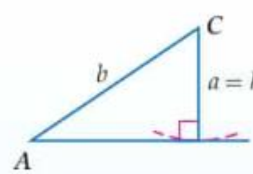
افترض مثلثًا معلومًا فيه: $m\angle A, a, b$

$\angle A$ حادّة



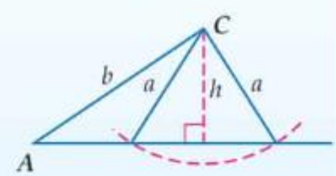
$a < h$

لا يوجد حلٌّ



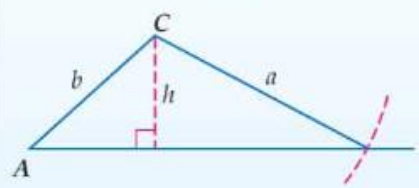
$a = h$

حلٌّ واحد



$h < a < b$

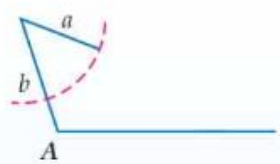
حلّان



$a \geq b$

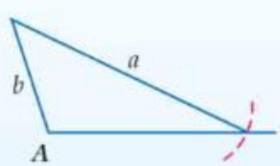
حلٌّ واحد

$\angle A$ قائمة أو منفرجة



$a \leq b$

لا يوجد حلٌّ



$a > b$

حلٌّ واحد

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

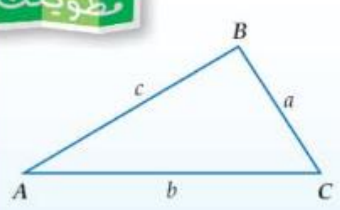
قانون جيوب التمام

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



اختيار الطريقة المناسبة لحلِّ المثلَّثات: يمكنك استعمال قانون الجيوب وقانون جيوب التمام لحل مثلَّثات غير قائمة الزاوية، حيث تحتاج على الأقلِّ إلى معرفة طول أحد الأضلاع وقياسَي أيِّ عنصرين آخرين من عناصر المثلَّث. وإذا كان للمثلَّث حلّ، فيجب أن تُقرّر ما إذا كنت ستبدأ باستعمال قانون الجيوب أو قانون جيوب التمام لحلِّه.

ملخّص المفهوم

أضف إلى مطويتك

حَلُّ المثلَّثات غير القائمة الزاوية

إذا أُعطيت	فابدأ الحلَّ باستعمال
قياسا زاويتين وطول أيّ ضلع	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما	قانون جيوب التمام
أطوال الأضلاع الثلاثة	قانون جيوب التمام