Correction TD

Programmation linéaire

Exercice 1 :

Une compagnie fabriquant des Climatiseurs et des Ventilateurs voudrait connaitre le nombre optimal de produits finis à fabriquer par semaine pour maximiser son profit hebdomadaire. Elle vous demande de l'aider en vous informant que les heures-machine et heures de Main d'œuvre sont limitées comme indiqué dans le tableau suivant :

	Heures-Machine h/unité	Heures-Main d'œuvre h/unité	Profit unitaire
Climatiseurs	2	3	25 Dt
Ventilateur	2	1	15 Dt
Total	240	140	

Correction

X1 : nombre de climatiseurs à fabriquer

X2 : nombre de ventilateurs à fabriquer

Max Z=25X1+15X2

$$\text{Sous-contraintes} \begin{cases} 2X1 + 2X2 \leq 240 \\ 3X1 + X2 \leq 140 \\ X1 \geq 0 \\ X2 \geq 0 \\ X1 et X2 \text{ sont des entiers} \end{cases}$$

Exercice 2 :

Une entreprise de relations publiques veut faire un sondage d'opinions.
Chaque employé fait par jour 80 interviews par téléphone ou bien 40 interviews en direct.
Un employé ne peut faire qu'un seul type d'interviews pendant une journée.
Afin d'avoir un échantillon représentatif on doit satisfaire les 3 critères suivants

- ✓ Au moins 3000 interviews
- ✓ Au moins 1000 interviews par téléphone
- ✓ Au moins 800 interviews en direct.

L'employé qui conduit l'interview par téléphone est payé 50Dt/jour

L’employé qui conduit l’interview en direct est payé 70Dt/jour.

Correction

X1 : nombre d’employés qui conduisent les interviews par téléphones

X2 : nombre d’employés qui conduisent les interviews en direct

Min Z=50X1+70X2

$$\text{Sous-contraintes}\begin{cases} 80X1+40X2\geq 3000 \\ 80X1\geq 1000 \\ 40X2\geq 800 \\ X1\geq 0 \\ X2\geq 0 \\ X1 et X2 \textit{ sont des entiers} \end{cases}$$

Exercice 3 :

Un agriculteur veut déterminer les quantités de 3 types de grains à donner à son bétail au coût minimum.

	Mais	Blé	Orge	Minimum Requis
Protéines mg/Kg	10	9	11	20 mg
Fer mg/Kg	9	8	7	12 mg
Calories	1000	800	850	4000 cal
Coût / Kg	0,55Dt	0,47Dt	0,45Dt	

Correction

X1 : quantité de Maïs en kg

X2 : quantité de blé en kg

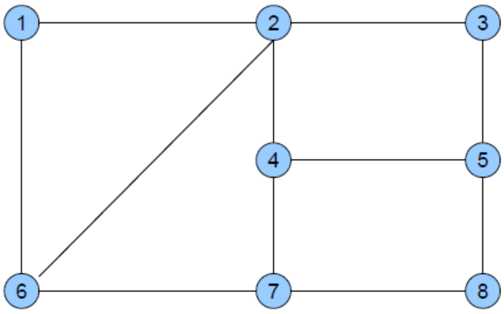
X3 : quantité d’orge en kg

Min Z=0,55X1+0,47X2+0,45X3

$$\text{Sous-contraintes}\begin{cases} 10X1+9X2+11X3\geq 20 \\ \\ 9X1+8X2+7X3\geq 12 \\ 1000X1+800X2+850X3\geq 4000 \\ X1\geq 0 \\ X2\geq 0 \\ X3\geq 0 \\ X1, X2\ et X3 \textit{ sont des réelles} \end{cases}$$

Exercice 4:

Problème de couverture : Le département de sécurité d'un campus veut installer des téléphones d'urgence. Chaque rue doit être servie au moins par un téléphone, le but étant de minimiser le nombre de téléphones à installer (installation aux carrefours)



Correction :

Soit i : un carrefour ; i=1..8

On peut distinguer 11 rues : rue(1,2) ; rue(1,6) ; rue(2,6) ; rue(2,4) ; rue(4,7) ; rue(6,7) ; rue(2,3) ; rue(3,5) ; rue(4,5) ; rue(5,8) et rue(7,8)

On veut minimiser le nombre de téléphones affectés aux carrefours.

Contrainte :Au moins 1 téléphone par rue.

Variables de décision :

Soit Xi une variable binaire.

$$Xi = \begin{cases} 1 \ si\ un\ téléphone\ est\ affecté\ au\ carrefour\ i \\ 0 \quad\quad si\ non \end{cases}$$

Formulation de PL

PL : $Min\ Z = \sum_{i=1}^{8} Xi$ i:1,..,8

Sous-contraintes $\begin{cases} X1 + X6 \geq 1 \\ X1 + X2 \geq 1 \\ X2 + X6 \geq 1 \\ X7 + X6 \geq 1 \\ X2 + X4 \geq 1 \\ X4 + X7 \geq 1 \\ X7 + X8 \geq 1 \\ X8 + X5 \geq 1 \\ X5 + X4 \geq 1 \\ X5 + X3 \geq 1 \\ X3 + X2 \geq 1 \\ \\ Xi \in \{0,1\} \end{cases}$ (Au moins 1 téléphone par rue)

Exercice 5:

On annonce à la gérante d'une charcuterie qu'elle dispose de 112 Kg de mayonnaise dont 70 Kg seront bientôt périmés. Pour écouler cette mayonnaise, elle a décidé de l'utiliser pour préparer une mousse au jambon et une autre aux épices. Les mousses sont préparées par lots. Un lot de mousse au jambon nécessite 1.4Kg de mayonnaise contre 1Kg pour la mousse aux épices. La gérante reçoit une commande de 10 lots de mousse au jambon et 8 aux épices. Elle désire garder 10 lots par type pour la vente locale.

Chaque lot coûte 3Dt à préparer et se vend à 5Dt le lot au jambon et 7Dt aux épices.

Formuler le problème pour maximiser le profit de la gérante.

Correction

	Mousse au jambon	Mousse aux épices
Qté de mayonnaise	1.4Kg/lot	1Kg/lot
Commandes	10 lots	8 lots
Besoin interne	10 lots	10 lots
Prix de vente	5D/lot	7D/lot
Coût	3D/lot	3D/lot

Quantité totale de mayonnaise=112 kg dont 70Kg sera bientôt périmée.

X1 : Nombre de lots de mousse au jambon

X2 : Nombre de lots de mousse au jambon

Profit=Ventes-coûts

(Max)Z=(5-3)X1+(7-3)X2=2X1+4X2

Sous-contraintes

$$\begin{cases} 1{,}4X1 + X2 \leq 112 & (la\ quantité\ de\ mayonnaise\ ne\ doit\ pas\ dépasser\ 112kg) \\ 1{,}4X1 + X2 \geq 70 & (70Kg\ doivent\ être\ consommées\ au\ plutôt\ possible\ ) \\ X1 \geq 20 & (besoin\ en\ mousse\ au\ jambon) \\ X2 \geq 18 & (besoin\ en\ mousse\ aux\ épices) \\ X1 \geq 0 & \\ X2 \geq 0 & \\ X1, X2\ \ sont\ des\ variables\ entières & \end{cases}$$

Exercice 6 :

Un agriculteur voudrait cultiver 2 sortes de légumes : des carottes et des courgettes.
Il pourrait pour cela planter toute sa terre si le besoin nécessite.
Il utilise 2 sortes d'engrais (A et B) et 1 sorte d'antiparasite.
Les rendements des carottes et des courgettes sont de 4Kg/m^2 et 5Kg/m^2 respectivement.
Ses stocks sont de 8 litres d'engrais A, 7 litres d'engrais B et 3litres d'antiparasites.
Les besoins en ces matières sont de 2 litres/m^2 d'engrais A et 1 litre/m^2 d'engrais B pour les carottes contre 1 litre/m^2 d'engrais A et 2 litres/m^2 d'engrais B pour les courgettes.
L'antiparasite n'est utilisé que pour les courgettes à raison de 1litre/m^2
L'agriculteur voudrait produire le maximum de poids de légumes. Il vous demande de l'aider.

Correction

	Carottes	Courgettes	Qté en stock
Engrais A	2	1	8 l
Engrais B	1	2	7l
Antiparasite	-	1	3l
Rendement	4Kg/m2	5Kg/m2	-

On veut maximiser le rendement total

X1 : surface dédiée aux carottes en m^2

X2 : surface dédiées aux courgettes en m^2

Max Z =4X1+5X2

$$\text{Sous-contraintes} \begin{cases} 2X1 + X2 \leq 8 \\ X1 + 2X2 \leq 7 \\ X2 \leq 3 \\ X1 \geq 0 \\ X2 \geq 0 \\ X1, X2 \ \textit{sont des réelles} \end{cases}$$

Exercice 7 :

La directrice d'une entreprise produisant des jus de fruits désire maximiser ses profits compte tenu d'un ensemble de normes et de standards de production à respecter. A partir de concentrés, elle produit 4 types de jus dont les prix au détail apparaissent ci-dessous

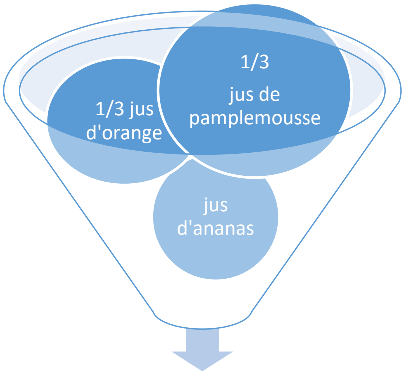
Produit	**Prix au détail**
Jus d'orange	1 $ / L
Jus de pamplemousse	0, 9 $ /L
Jus d'ananas	0,8 $/L
Tutti Frutti	1,1 $/L

La gestionnaire dispose en entrepôt de 1600 litres de concentré de jus d'orange, de 1200 L de concentré de jus de pamplemousse et de 800 L de concentré de jus d'ananas. Les concentrés de jus sont achetés par contenants de 4 L respectivement à 2$ le paquet de jus d'orange, 1.6$ pour le pamplemousse et 1.4$ pour l'ananas. Finalement la directrice désire que le jus de pamplemousse ne dépasse pas 30 % des quantités vendues et que le rapport jus d'orange / jus d'ananas soit d'au minimum 7/5.

Quelles sont les quantités optimales à produire pour maximiser les profits ?

Correction

Produit	**Qté disponible(l)**
Jus d'orange	1600
Jus de pamplemousse	1200
Jus d'ananas	800



jus Tutti Frutti

le jus de pamplemousse ne dépasse pas 30 % des quantités vendues

le rapport jus d'orange / jus d'ananas soit d'au minimum 7/5.

On veut **maximiser les profits**

X1 : Quantité de jus d’orange /litre

X2 : Quantité de jus de pamplemousse / litre

X3 : Quantité de jus de d’ananas / litre

X4 : Quantité de jus Tutti frutti/ litre

Profit=ventes-achats

Produit	Jus d’orange	Jus de pamplemousse	Jus d’ananas	Jus Tutti Frutti
Profit	1-2/4=0,5	0,9-(1,6/4)=0,5	0,8-(1,4/4)=0,45	1,1-[(2+1,6+1,4)/12]=0,69

Max Z =0,5X1+0,5X2+0,45X3+0,69X4

Sous-contraintes

$$\left\{\begin{array}{c} X1+\frac{1}{3}X4 \leq 1600 \\ X2+\frac{1}{3}X4 \leq 1200 \\ X3+\frac{1}{3}X4 \leq 800 \\ X2 \leq 0,3\ (X1+X2+X3+X4) \\ X1/X3 \geq 7/5 \\ \\ X1 \geq 0 \\ X2 \geq 0 \\ X1, X2\ \ sont\ des\ réelles \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} X1+\frac{1}{3}X4 \leq 1600 \\ X2+\frac{1}{3}X4 \leq 1200 \\ X3+\frac{1}{3}X4 \leq 800 \\ 0,3X1-0,7X2+0,3X3+0,3X4 \quad \geq 0 \\ X1-7/5X3 \geq 0 \\ \\ X1 \geq 0 \\ X2 \geq 0 \\ X1, X2\ \ sont\ des\ réelles \end{array}\right.$$

Exercice 8 :

1.2.3 Un problème de mélange

Exemple 1.8 *Un industriel veut fabriquer deux sortes d'alliages A1 et A2 dont les caractéristiques sont les suivantes :*

type	*spécifications*	*prix de vente (euros/tonnes)*
A1	*pas moins de 30% de zinc* *pas plus de 40% de fer*	*680*
A2	*pas moins de 15% de cuivre* *pas plus de 60% de fer*	*570*

Il trouve disponibles sur le marché trois sorte d'alliages C1, C2 et C3 dont les compositions, les disponibilités et les prix d'achat sont les suivants :

alliage	*fer (en %)*	*zinc (en %)*	*cuivre (en %)*	*disponibilité (en tonnes)*	*prix d'achat (euros/tonnes)*
C1	*10*	*50*	*40*	*200*	*300*
C2	*30*	*40*	*30*	*250*	*200*
C3	*80*	*10*	*10*	*120*	*100*

Quels alliages faut-il acheter et dans quelles proportions les mélanger pour maximiser le profit net ?

Correction

On cherche à trouver les meilleures proportions des alliages C1,C2 et C3 à mélanger pour obtenir les besoins en A1 et A2.

Soit Xij la proportion de l'alliage Ci à mettre dans Aj ; i :1,2,3 et j :1,2

Profit=Prix de vente-coûts d'achat

	A1	A2
Prix de Vente	680(X11+X21+X31)	570(X12+X22+X32)
Coût d'achat	300X11+200X21+100X31	300X12+200X22+100X32
Profit	(680-300)X11+(680-200)X21+(680-100)X31	(570-300)X12+(570-200)X22+(570-100)X32
Profit total	380X11+270X12+480X21+370X22+580X31+470X32	

(Max)Z= 380X11+270X12+480X21+370X22+580X31+470X32

Sous-contraintes

$$\begin{cases} X11 + X12 \leq 200 \\ X21 + X22 \leq 250 \quad\quad disponibilit\acute{e}\ des\ alliages \\ X31 + X32 \leq 120 \\ \\ 0{,}1X11 + 0{,}3X21 + 0{,}8X31 \leq 0{,}4(X11 + X21 + X31)\ \ \%\ de\ fer\ dans\ A1 \\ 0{,}1X12 + 0{,}3X22 + 0{,}8X32 \leq 0{,}6(X12 + X22 + X32)\ \ \%\ de\ fer\ dans\ A2 \\ 0{,}5X11 + 0{,}4X21 + 0{,}1X31 \leq 0{,}3(X11 + X21 + X31)\ \ \%\ du\ zinc\ \ dans\ A1 \\ 0{,}5X12 + 0{,}4X22 + 0{,}1X32 \leq 0{,}15(X12 + X22 + X32)\ \ \%\ de\ cuivre\ dans\ A2 \\ \\ Xij \geq 0\ i = 1{,}2{,}3\ et\ j = 1{,}2 \\ \\ Xij\ \ sont\ des\ \ r\acute{e}elles \end{cases}$$

En simplifiant le PL on obtient

(Max)Z= 380X11+270X12+480X21+370X22+580X31+470X32

$$\text{Sous-contraintes} \begin{cases} X11 + X12 \leq 200 \\ X21 + X22 \leq 250 \quad\quad disponibilit\acute{e}\ des\ alliages \\ X31 + X32 \leq 120 \\ \\ 0{,}2X11 + 0{,}1X21 - 0{,}2X31 \geq 0\ \ \%\ de\ fer\ dans\ A1 \\ 0{,}3X12 + 0{,}1X22 - 0{,}4X32 \geq 0\ \%\ de\ fer\ dans\ A2 \\ 0{,}5X11 + 0{,}3X21 - 0{,}2X31 \geq 0\ \%\ du\ zinc\ \ dans\ A1 \\ 0{,}25X12 + 0{,}15X22 - 0{,}05X32 \geq 0\ \ \%\ de\ cuivre\ dans\ A2 \\ \\ Xij \geq 0 \\ \\ Xij\ \ sont\ des\ \ r\acute{e}elles \end{cases}$$

Exercice 9 :

Une compagnie fabrique trois (3) ballons de sport : un de football, un de basket-ball et un de volley-ball. Les ressources nécessaires à la fabrication sont le cuir et la main-d'œuvre. Le nombre d'unités de chaque ressource nécessaire à la fabrication d'un ballon de chaque type, le profit unitaire résultant de la vente des ballons ainsi que les coûts utilisés pour la production sont indiqués sur le tableau, ci-dessous.

	Football	**Basket-ball**	**Volley-ball**
Cuir	5	3	6
Main-d'œuvre	4	4	3
Profit	\$ 6 pour les 50 premiers ballons fabriqués \$ 5.50 au-delà du cinquantième	\$ 5	\$ 7

La compagnie peut vendre autant de ballons qu'elle en fabrique. Elle dispose de 600 unités de cuir et 700 unités de temps de main-d'œuvre.

Nous vous demandons de définir clairement, les variables de décision, les contraintes et la fonction économique du problème.

Correction

X11 : nombre de ballons de foot à fabriquer au-dessous de 5

X12 : nombre de ballons de foot à fabriquer au-dessus de 50

X2 : nombre de ballons de basket à fabriquer

X3 : nombre de ballons de volley à fabriquer

(Max)Z= 6X11+5,5X12+5X2+7X3

Sous-contraintes

$$\begin{cases} 5(X11+X12)+3X2+6X3 \leq 600\ (cuir) \\ 6(X11+X12)+4X2+3X3 \leq 700\ (MO) \\ X11, X12, X2\ et\ X3 \geq 0 \\ X11, X12, X2\ et\ X3\ sont\ des\ réelles \end{cases}$$

Exercice 10 :

Un chocolatier a décidé d'ouvrir un kiosque dans un centre commercial à la mode. Pour commencer, il a décidé de limiter les produits vendus. Le kiosque offrira 2 mélanges en boites de 1 Kg : mélange «R» et «L». Le mélange «R» est formé en parts égales de noisettes , de raisins , de caramel et de chocolat. Tandis que le mélange «L» sera constitué de 50% de chocolat et de 50% de noisettes. De plus le kiosque offrira des contenants de 1 Kg de noisettes, de chocolat, de caramel ou de raisins.

Les stocks de ces produits sont limités :

Ingrédients	**Capacités par jour en Kg**
Noisettes	120
Raisins	200
Caramel	100
chocolat	160

Le chocolatier a décidé de préparer un minimum de 20 boites de 1 Kg par produit et par jour. Les profits par produits sont de 0,8 $/kg pour «R», de 0,9 $/kg pour «L», de 0,7 $/kg pour les noisettes, de 0,6 $/kg pour les raisins, », de 0,5 $/kg pour le caramel et de 0,75 $/kg pour le chocolat

Correction

Xij : proportion du composant i dans le mélange j

i : 1 pour les noisettes, 2 pour les raisins, 3 pour les caramels et 4 pour le chocolat.

j :R et L

(Max)Z= 0,1X11+0,2X12+0,3X13+0,005X14+0,2X12+0,3X22+0,4X32+O,15X42

Sous-contraintes

$$
\begin{cases}
O,25X11 + 0{,}5X12 \leq 120 \\
O,25X21 \leq 200 \\
O,25X31 \leq 100 \\
0{,}25X41 + 0{,}5X42 \leq 160 \\
0{,}25X11 + 0{,}25X21 + 0{,}25X31 + 0{,}25X41 \geq 20 \\
0{,}5X12 + 0{,}5X42 \geq 20 \\
Xij \geq 0 \\
\\
Xij \textit{ sont des variables réelles}
\end{cases}
$$