Практика 2

Методы проверки тождественной истинности формул

Рассмотрим основные методы, которые используются при исследовании формулы $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ на тождественную истинность.

1. *Прямой метод* составления истинностной таблицы формулы $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ является довольно громоздкой, но всегда выполнимой процедурой вычисления значений истинностной функции $F_\Phi(k_1,\dots,k_n)$ для 2^n упорядоченных наборов $(k_1,\dots,k_n)$ n элементов $k_1,\dots,k_n$ множества $\{0,1\}$.

2. *Алгебраический метод* преобразования формулы $\Phi = \Phi(X1,\dots,Xn)$ с помощью равносильных преобразований в тождественно истинную формулу 1.

Задача. С помощью равносильных преобразований выясните, является ли тождественно истинной формула

$$\Phi = \big((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow (\neg Y \vee V).$$

Решение. Формула Φ равносильно преобразовывается следующим образом:

$$\big((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow (\neg Y \vee V) =$$
$$= \neg\big((\neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee V) \wedge (X \vee \neg Z)\big) \vee (\neg Y \vee V) =$$
$$= \big((Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg V) \vee (\neg X \wedge Z)\big) \vee \neg Y \vee V =$$
$$= \big((Y \wedge \neg Z) \vee \neg Y\big) \vee \big((X \wedge \neg V) \vee V\big) \vee (\neg X \wedge Z) =$$
$$= \big((Y \vee \neg Y) \wedge (\neg Z \vee \neg Y)\big) \vee \big((X \vee V) \wedge (\neg V \vee V)\big) \vee (\neg X \wedge Z) =$$
$$= \neg Z \vee \neg Y \vee V \vee \big(X \vee (\neg X \wedge Z)\big)$$
$$= \neg Z \vee \neg Y \vee V \vee \big((X \vee \neg X) \wedge (X \vee Z)\big) =$$
$$= \neg Z \vee \neg Y \vee V \ \vee X \vee Z = (Z \vee \neg Z) \vee \neg Y \vee V \ \vee X = 1.$$

З а м е ч а н и е. Если в результате упрощения исследуемой формулы не получается тождественно истинная формула 1, то следует попытаться подобрать значения пропозициональных переменных, при которых истинностное значение формулы равно 0. Это докажет, что исследуемая формула не является тождественно истинной.

3. *Алгоритм Квайна* позволяет сократить полный перебор значений пропозициональных переменных за счет последовательного фиксирования возможных значений 0 или 1 пропозициональных переменных и последующего анализа истинностных значений полученных формул с меньшим числом переменных.

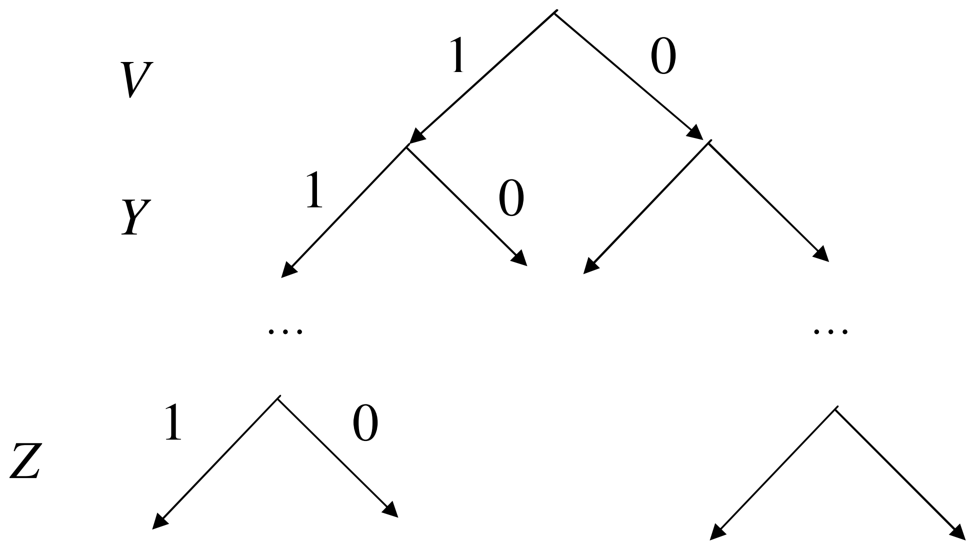
При этом используются основные тавтологии и следующие простейшие равенства, которые следуют из определения логических операций (см. табл. 1—5):

$$X \wedge 1 = X,\ X \wedge 0 = 0,\ X \vee 1 = 1,\ X \vee 0 = X,\ X \wedge \neg X = 0,\ X \vee \neg X = 1,$$
$$X \Rightarrow 1 = 1,\ 1 \Rightarrow X = X,\ 0 \Rightarrow X = 1,\ X \Rightarrow 0 = \neg X,\ X \Rightarrow X = 1,\ X \Leftrightarrow X = 1.$$

Задача. С помощью алгоритма Квайна выясните, является ли тождественно истинной формула

$$\big((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow (\neg Y \vee V).$$

Решение. Для входящих в формулу пропозициональных переменных последовательно фиксируем возможные значения 0 или 1 и упрощаем получающиеся формулы с помощью перечисленных выше простейших равенств до тех пор, пока не получим тождественно истинную формулу 1. При этом порядок последовательного фиксирования значений пропозициональных переменных может быть произвольным.



Так, если начать со значения $V = 1$, то из данной формулы

$$\big((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow (\neg Y \vee V)$$

получим

$$\big((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow 1) \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow (\neg Y \vee 1) = 1,$$

так как $\neg Y \vee 1 = 1$. В то же время при $V = 0$ из данной формулы получим

$$\big((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow 0) \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow (\neg Y \vee 0),$$

что равносильно $\big((Y \Rightarrow Z) \wedge \neg X \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow \neg Y$.

Отсюда при $Y = 0$ получаем формулу

$$\big((0 \Rightarrow Z) \wedge \neg X \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow \neg 0 = 1,$$

а при $Y = 1$ – формулу

$$\big((1 \Rightarrow Z) \wedge \neg X \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow \neg 1,$$

что равносильно

$$\big(Z \wedge \neg X \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow 0 = \neg\big(Z \wedge \neg X \wedge (X \vee \neg Z)\big) =$$

$$= \neg Z \vee X \vee (\neg X \wedge Z) = (\neg Z \vee X \vee \neg X) \wedge (\neg Z \vee X \vee Z) = 1.$$

Замечание 2. Если на каком-то заключительном шаге вычислений получается не тождественно истинная формула 1, а тождественно ложная формула 0, то исследуемая формула не является тождественно истинной – она опровергается соответствующими фиксированными значениями пропозициональных переменных.

4. *Алгоритм редукции* используется при доказательстве тождественной истинности формул с большим количеством импликаций. Идея метода основывается на получении противоречия из предположения, что истинностное значение рассматриваемой формулы равно 0 при некоторых истинностных значениях ее пропозициональных переменных. При этом используется тот факт, что импликация ложна в том и только том случае, если ее посылка истинна и заключение ложно.

Результаты таких вычислений можно схематически представлять таблицами, столбцы которых соответствуют символам логических операций или переменных рассматриваемой формулы, а строки

– шагам выполняемого алгоритма.

Задача. С помощью алгоритма редукции выясните, является ли тождественно истинной формула

$$\big((Y \Rightarrow Z) \land (X \Rightarrow V) \land (X \lor \neg Z)\big) \Rightarrow (\neg Y \lor V).$$

Решение. Запишем по пунктам шаги алгоритма редукции.

1. Предположим, что при некотором наборе значений переменных данная формула ложна, т.е. выполняется

$$\big((Y \Rightarrow Z) \land (X \Rightarrow V) \land (X \lor \neg Z)\big) \underset{\uparrow}{\Rightarrow} (\neg Y \lor V) = 0.$$

Это означает, что ложна указанная стрелкой импликация.

2. По определению операции импликации это равносильно тому, что посылка импликации $(Y \Rightarrow Z) \land (X \Rightarrow V) \land (X \lor \neg Z) = 1$ и ее следствие $\neg Y \lor V = 0$.

3. По определению операций конъюнкции и дизъюнкции последние условия равносильны тому, что

$$Y \Rightarrow Z = 1,\ \ X \Rightarrow V = 1,\ \ X \lor \neg Z = 1 \quad \text{и} \quad \neg Y = 0,\ \ V = 0.$$

4. Отсюда по определению операции отрицания получаем, что $Y = 1$.

5. Тогда по определению операции импликации из первого равенства пункта 3 следует $Z = 1$ и из второго равенства этого пункта следует $X = 0$.

6. Отсюда по определению операции отрицания получаем, что $\neg Z = 0$.

7. Подставляя найденные значения $X = 0, \neg Z = 0$ в формулу $X \lor \neg Z$, по определению операции дизъюнкции получаем условие $X \lor \neg Z = 0$, которое противоречит третьему равенству пункта 3.

Значит, наше предположение неверно и данная формула является тождественно истинной.

Проведенные рассуждения можно схематически представить в виде следующей таблицы (табл. 17).

Таблица 17

	$(Y$	$\Rightarrow$	$Z)$	$\wedge$	$(X$	$\Rightarrow$	$V)$	$\wedge$	$(X$	$\vee$	$\neg$	$Z))$	$\Rightarrow$	$(\neg$	Y	$\vee$	$V)$
1.													0				
2.						$\boxed{1}$										0	
3.		1				1				1				0			0
4.															1		
5.	(1)		1		0		(0)										
6.											0	(1)					
7.									(0)	0	(0)						

На каждом шаге алгоритма в скобках указываются значения переменных, которые были получены ранее на предыдущих шагах вычислений. Стрелка показывает полученное противоречие.

З а м е ч а н и е. Если в результате вычисления всех значений пропозициональных переменных противоречие не получается, то исследуемая формула не является тождественно истинной – она опровергается полученными значениями пропозициональных переменных.

Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Составив истинностные таблицы, докажите, что следующие формулы являются тавтологиями:

1) $X \vee (X \wedge Y) \Leftrightarrow X$;
2) $(X \vee Y) \Leftrightarrow (\neg X \Rightarrow Y)$;
3) $\big((X \Rightarrow Y) \Rightarrow X\big) \Rightarrow X$;
4) $\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee \neg Y)$;
5) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow \big((Y \Rightarrow X) \Rightarrow (X \Leftrightarrow Y)\big)$.

Задача 2. С помощью равносильных преобразований выясните, какие из следующих формул являются тождественно истинными:

1) $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \Leftrightarrow \neg Y)$;
2) $\big((X \Rightarrow Y) \Rightarrow X\big) \Rightarrow Y$;

3) $\big((X \wedge \neg Y) \Rightarrow Y\big) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$;

4) $\Big(\big((X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge Z)\big) \wedge \neg Z\Big) \vee Y$;

5) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow \Big((X \Rightarrow Z) \Rightarrow \big(X \Rightarrow (Y \wedge Z)\big)\Big)$.

Задача 3. С помощью алгоритма Квайна выясните, какие из следующих формул являются тождественно истинными:

1) $\neg(X \Rightarrow Y) \Rightarrow \neg\Big(\neg(X \Rightarrow Z) \Rightarrow \neg\big(X \Rightarrow (Y \wedge Z)\big)\Big)$;

2) $\neg\Big(\Big(\neg Z \Rightarrow \neg\big(X \Rightarrow \neg(Y \Rightarrow Z)\big)\Big) \Rightarrow \neg(X \Rightarrow \neg Y)\Big)$;

3) $\Big(\big((X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \Leftrightarrow Z)\big) \Leftrightarrow (Y \Leftrightarrow Z)\Big) \Leftrightarrow X$;

4) $\Big(\big((X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee Z)\big) \vee \neg Z\Big) \wedge Y$;

5) $(X \Rightarrow Z) \Rightarrow \Big((Y \Rightarrow Z) \Rightarrow \big((X \vee Y) \Rightarrow Z\big)\Big)$.

Задача 4. С помощью алгоритма редукции выясните, какие из следующих формул являются тождественно истинными:

1) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow \big((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X\big)$;

2) $\Big(\neg Z \Rightarrow \neg\big(X \Rightarrow \neg(Y \Rightarrow Z)\big)\Big) \Rightarrow \neg(X \Rightarrow \neg Y)$;

3) $(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \Big((X \Rightarrow \neg Z) \Rightarrow \big(X \Rightarrow \neg(Y \vee Z)\big)\Big)$;

4) $\Big(X \Rightarrow \big((Y \Rightarrow Z) \Rightarrow Z\big)\Big) \Rightarrow \Big(\big(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)\big) \Rightarrow (X \Rightarrow \neg Z)\Big)$;

5) $\Big(\big((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Z \Rightarrow Y)\big) \Rightarrow (Z \Rightarrow X)\Big) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$.

Метод резолюций в алгебре высказываний

Из предыдущих результатов следует, что задачи проверки тождественной истинности формул, логического следования формул, тождественной ложности формул и противоречивости множества формул сводится к задаче проверки противоречивости множества дизъюнктов, которая эффективно решается методом автоматического доказательства теорем, известного под называнием *метода резолюций*.

Определение. Пусть для некоторой переменной X дизъюнкты D_1, D_2 представимы в виде $D_1 = D_1' \vee X$, $D_2 = D_2' \vee \neg X$. Тогда дизъюнкт $D_1' \vee D_2'$ называется *резольвентой дизъюнктов* D_1, D_2 по переменной X и обозначается $\mathrm{Res}_X(D_1, D_2)$.

В общем случае резольвента дизъюнктов D_1, D_2 по некоторой переменной X называется *резольвентой дизъюнктов* D_1, D_2 и обозначается $\mathrm{Res}(D_1, D_2)$. По определению для любой переменной X *резольвента* $\mathrm{Res}(X, \neg X) = 0$.

ЛЕММА 1. Ели для дизъюнктов D_1, D_2 и некоторой переменной X определена резольвента $\mathrm{Res}_X(D_1, D_2)$, то из выполнимости множества формул D_1, D_2 следует выполнимость резольвенты $\mathrm{Res}_X(D_1, D_2)$.

Доказательство леммы следует из тавтологии

$$(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z) \Rightarrow (Y \vee Z).$$

Определение. *Резолютивным выводом формулы* Φ из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m\}$ называется такая последовательность формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ что $\Phi_n = \Phi$ и каждая из формул Φ_i $(i = 1, \dots, n)$ либо принадлежит множеству S, либо является резольвентой $\Phi_i = \mathrm{Res}(\Phi_j, \Phi_k)$ предыдущих формул Φ_j, Φ_k при некоторых $1 \leq j, k \leq i$.

ЛЕММА 2. Если существует резолютивный вывод формулы Φ из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m\}$ и множество формул S выполнимо, то и формула Φ также выполнима.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ (корректность и полнота метода резолюций). Множество дизъюнктов $S = \{D1,\dots,Dm\}$ противоречиво в том и только том случае, если существует резолютивный вывод значения 0 из множества S.

Задача 1. С помощью метода резолюций докажите, что множество формул

$$S = \{\neg X \vee Y \vee Z,\ \neg Y \vee Z \vee X,\ \neg Z \vee X,\ X \vee Y,\ Y \vee \neg Z,\ \neg X \vee \neg Y\}$$

противоречиво.

Решение. Рассмотрим резолютивный вывод:

$\Phi_1 = \neg X \vee Y \vee Z,$

$\Phi_2 = X \vee Y,$

$\Phi_3 = \mathrm{Res}_X(\Phi_1, \Phi_2) = \mathrm{Res}_X(\neg X \vee Y \vee Z, X \vee Y) = Y \vee Z,$

$\Phi_4 = Y \vee \neg Z,$

$\Phi_5 = \mathrm{Res}_Z(\Phi_3, \Phi_4) = \mathrm{Res}_Z(Y \vee Z, Y \vee \neg Z) = Y,$

$\Phi_6 = \neg X \vee \neg Y,$

$\Phi_7 = \mathrm{Res}_Y(\Phi_5, \Phi_6) = \mathrm{Res}_Y(Y, \neg X \vee \neg Y) = \neg X,$

$\Phi_8 = \neg Y \vee Z \vee X,$

$\Phi_9 = \mathrm{Res}_X(\Phi_7, \Phi_8) = \mathrm{Res}_X(\neg X, \neg Y \vee Z \vee X) = \neg Y \vee Z,$

$\Phi_{10} = \mathrm{Res}_Y(\Phi_5, \Phi_9) = \mathrm{Res}_Y(Y, \neg Y \vee Z) = Z,$

$\Phi_{11} = \neg Z \vee X,$

$\Phi_{12} = \mathrm{Res}_Z(\Phi_{10}, \Phi_{11}) = \mathrm{Res}_Z(Z, \neg Z \vee X) = X,$

$\Phi_{13} = \mathrm{Res}(\Phi_7, \Phi_{12}) = \mathrm{Res}(\neg X, X) = 0.$

Следовательно, из множества формул S резолютивно выводится значение 0 и по основной теореме метода резолюций множество S противоречиво.

Так как соотношение $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vDash \Phi$ равносильно условию $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \neg\Phi \vDash$, то справедлив следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 4 (проверка логического следования формул). Пусть для формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Phi$ формула $\Psi = \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi$ имеет КНФ $\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$. Тогда выполнимость логического следования $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vDash \Phi$ равносильна существованию резолютивного вывода значения 0 из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m\}$.

<u>Алгоритм проверки логического следования формул</u> $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vDash \Phi$:

1) рассматриваем формулу $\Psi = \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi$ и находим ее КНФ $\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$;

2) ищем резолютивный вывод значения 0 из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m\}$;

3) если такой вывод существует, то выполняется $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vDash \Phi$.

<u>Задача 1.</u> Методом резолюций проверьте логическое следование:

$$\neg X \Rightarrow Z,\ Y \Rightarrow W,\ (W \wedge Z) \Rightarrow V,\ \neg V \ \vDash\ X \vee \neg Y.$$

Решение. Данное логическое следование равносильно противоречивости множества формул:

$$\neg X \Rightarrow Z,\ Y \Rightarrow W,\ (W \wedge Z) \Rightarrow V,\ \neg V,\ \neg(X \vee \neg Y)\ \vDash,$$

что равносильно противоречивости формулы

$$\Psi = (\neg X \Rightarrow Z) \wedge (Y \Rightarrow W) \wedge \big((W \wedge Z) \Rightarrow V\big) \wedge \neg V \wedge \neg(X \vee \neg Y).$$

Найдем КНФ этой формулы с помощью тавтологий $X \Rightarrow Y = \neg X \vee Y, \neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y,\ \neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y,\ \neg\neg X = X$:

$$\Psi = (\neg\neg X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg(W \wedge Z) \vee V) \wedge \neg V \wedge (\neg X \wedge Y) =$$
$$= (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg W \vee \neg Z \vee V) \wedge \neg V \wedge \neg X \wedge Y.$$

Рассмотрим множество дизъюнктов полученной КНФ формулы Ψ:

$$S = \big\{ X \vee Z,\ \neg Y \vee W,\ \neg W \vee \neg Z \vee V,\ \neg V,\ \neg X,\ Y \big\}.$$

Построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества S:

$$\Phi_1 = \mathrm{Res}_X(X \vee Z, \neg X) = Z,$$
$$\Phi_2 = \mathrm{Res}_Y(\neg Y \vee W, Y) = W,$$
$$\Phi_3 = \mathrm{Res}_Z(\Phi_1, \neg W \vee \neg Z \vee V) = \mathrm{Res}_Z(Z, \neg W \vee \neg Z \vee V) = \neg W \vee V,$$
$$\Phi_4 = \mathrm{Res}_W(\Phi_2, \Phi_3) = \mathrm{Res}_W(W, \neg W \vee V) = V,$$
$$\Phi_5 = \mathrm{Res}(\Phi_4, \neg V) = \mathrm{Res}(V, \neg V) = 0.$$

Таким образом, из множества формул S резолютивно выводится значение 0 и по основной теореме множество S противоречиво. Следовательно, формула Ψ противоречива и выполняется исходное логическое следование.

Алгоритм проверки тождественной истинности формулы Φ:

1) рассматриваем формулу $\Psi = \neg\Phi$ и находим ее КНФ

$$\Psi = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m;$$

2) ищем резолютивный вывод значения 0 из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$;

3) если такой вывод существует, то выполняется $\vDash \Phi$.

Задача 2. Методом резолюций проверьте тождественную истинность формулы:

$$\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow \big((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X\big).$$

Решение. По критерию логического следования из лекции 2 тавтология $\vDash \Phi$ равносильна противоречивости формулы:

$$\Psi = \neg\Phi = \neg\Big((X \Rightarrow Y) \Rightarrow \big((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X\big)\Big).$$

Найдем КНФ этой формулы

$$\Psi = \neg\big(\neg(\neg X \vee Y) \vee (\neg(\neg X \vee \neg Y) \vee \neg X)\big) =$$
$$= (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \wedge X \,.$$

Рассмотрим множество дизъюнктов полученной КНФ формулы Ψ :

$$S = \big\{ \neg X \vee Y,\ \neg X \vee \neg Y,\ X \big\}.$$

Построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества *S:*

$\Phi_1 = \neg X \vee Y,$

$\Phi_2 = \neg X \vee \neg Y,$

$\Phi_3 = \mathrm{Res}_Y(\Phi_1, \Phi_2) = \mathrm{Res}_Y(\neg X \vee Y, \neg X \vee \neg Y) = \neg X \vee \neg X = \neg X,$

$\Phi_4 = X,$

$\mathrm{Res}(\Phi_3, \Phi_4) = \mathrm{Res}(\neg X, X) = 0.$

Таким образом, из множества дизъюнктов S резолютивно выводится значение 0 и по основной теореме множество S противоречиво. Следовательно, формула Ψ противоречива и выполняется $\vDash \Phi$.

Задача 3. Методом резолюций проверьте справедливость следующих рассуждений.

Допустим, что если руководство вуза действует по закону высшей школы, то студент-задолжник не отчисляется, если он является задолжником не более одного месяца или преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск. Не будет ли отчислен студент-задолжник, если руководство вуза действует по закону высшей школы и сессия только что закончилась?

Решение. Введем обозначения для следующих высказываний:

D = «руководство вуза действует по закону высшей школы»;

S = «студент-задолжник отчисляется»;

P = «преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск»;

T = «студент является задолжником не более одного месяца».

Тогда первое утверждение задачи выражается следующим сложным высказыванием:

$\Phi_1 = D \Rightarrow \big((T \vee P) \Rightarrow \neg S\big)$ = «если руководство вуза действует по закону высшей школы, то студент-задолжник не отчисляется, если он является задолжником не более одного месяца или преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск».

Сформулированное в вопросе задачи утверждение выражается следующим сложным высказыванием:

$\Phi_2 = D \wedge T \Rightarrow \neg S$ = «если руководство вуза действует по закону высшей школы и сессия только что закончилась, то студент-задолжник не отчисляется».

По условию задачи требуется определить, будет ли из утверждения Φ_1 логически следовать утверждение Φ_2, т.е. выполняется ли логическое следование $\Phi_1 \vDash \Phi_2$?

Чтобы доказать это логическое следование методом резолюций, рассмотрим равносильное ему условие противоречивости множества формул: $\Phi_1, \neg\Phi_2 \vDash$, что равносильно условию $\Phi_1 \wedge \neg\Phi_2 \vDash$. Найдем КНФ формулы $\Psi = \Phi_1 \wedge \neg\Phi_2$ с помощью основных равенств формул:

$$\Psi = \Big(D \Rightarrow \big((T \vee P) \Rightarrow \neg S\big)\Big) \wedge \neg(D \wedge T \Rightarrow \neg S) =$$
$$= \big(\neg D \vee (\neg(T \vee P) \vee \neg S)\big) \wedge \neg(\neg(D \wedge T) \vee \neg S) =$$
$$= \big(\neg D \vee \neg S \vee (\neg T \wedge \neg P)\big) \wedge D \wedge T \wedge S =$$
$$= \big((\neg D \vee \neg S \vee \neg T) \wedge (\neg D \vee \neg S \vee \neg P)\big) \wedge D \wedge T \wedge S.$$

Рассмотрим множество дизъюнктов полученной КНФ формулы Ψ $S = \{\neg D \vee \neg S \vee \neg T,\ \neg D \vee \neg S \vee \neg P,\ D,\ T,\ S\}$ и построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества S:

$\Phi_1 = \mathrm{Res}_D\,(\neg D \vee \neg S \vee \neg T, D) = \neg S \vee \neg T$,

$\Phi_2 = \mathrm{Res}_T\,(\neg S \vee \neg T, T) = \neg S$,

$\Phi_3 = \mathrm{Res}_T\,(\neg S, S) = 0$.

Таким образом, из множества формул S резолютивно выводится значение 0 и множество S противоречиво. Следовательно, формула Ψ противоречива и выполняется исходное логическое следование $\Phi_1 \vDash \Phi_2$, т.е. студент-задолжник не будет отчислен, если руководство вуза действует по закону высшей школы и сессия только что закончилась.

Задания для самостоятельной работы

Задача 1. С помощью метода резолюций докажите, что следующие множества формул противоречивы:

1) $S = \{\neg Z, \neg Y, \neg X \vee Z, X \vee Y \vee Z\}$;
2) $S = \{\neg X \vee Y, \neg Y \vee Z, \neg Z \vee X, X \vee Z, \neg X \vee \neg Z\}$;
3) $S = \{X \vee Y \vee Z, X \vee Y \vee \neg Z, X \vee \neg Y, \neg X \vee \neg Z, \neg X \vee Z\}$.

Задача 2. Методом резолюций проверьте логические следования:

1) $X \Rightarrow Y, Z \Rightarrow V, V \Rightarrow Y, Y \vee Z \vee V \vDash X \wedge Y$;
2) $(X \wedge Y) \Rightarrow Z, X \Rightarrow Y \vDash X \Rightarrow Z$;
3) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow Y, X \wedge \neg Y \vDash X \Rightarrow Y$.

Задача 3. Методом резолюций проверьте общезначимость следующих формул:

1) $\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee \neg Y)$;
2) $\big((X \wedge Y) \Rightarrow Z\big) \Leftrightarrow \big(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)\big)$;
3) $\big(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)\big) \Leftrightarrow \big(Y \Rightarrow (X \Rightarrow Z)\big)$.

Задача 4. Методом резолюций проверьте справедливость следующих рассуждений:

1) допустим, что если руководство вуза действует по закону высшей школы, то студент-задолжник не отчисляется, если он является задолжником не более одного месяца или преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск; и либо руководство вуза не действует по закону высшей школы, либо студент-задолжник не отчисляется, хотя он является задолжни-

ком более одного месяца. Противоречиво ли это рассуждение?;

2) допустим, что если руководство вуза действует по закону высшей школы, то студент-задолжник не отчисляется, кроме случая, когда он является задолжником более одного месяца и преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск. Допустим, что руководство вуза действует по закону высшей школы, студент-задолжник отчисляется и преподаватель-экзаменатор не уходил в отпуск. Имел ли студент задолженность более одного месяца?;
3) допустим, что если руководство вуза действует по закону высшей школы, то студент-задолжник отчисляется, если он является задолжником более одного месяца или преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск. Будет ли отчислен студент-задолжник, если руководство вуза действует по закону высшей школы и преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск?