Практика 1

Алгебра высказываний

Таблица истинностных значений логических операций.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Определение. *Алгеброй высказываний* называется множество всех высказываний $\mathcal{V}$ с логическими операциями $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Задача. Определить истинностное значение последнего высказывания, исходя из заданных истинностных значений предыдущих высказываний:

а) $\lambda(A \Rightarrow B) = 1,\ \lambda(A \Leftrightarrow B) = 0,\ \lambda(B \Rightarrow A) = ?$

Решение. Из первого условия по определению импликации следует, что либо $\lambda(A) = 0$, либо $\lambda(B) = 1$. Из второго условия по определению эквивалентности следует, что высказывания A, B имеют разные истинностные значения. Значит, выполняется $\lambda(A) = 0,\ \lambda(B) = 1$ и по определению импликации $\lambda(B \Rightarrow A) = 0$;

б) $\lambda(A \Rightarrow B) = 1,\ \lambda\big((\neg A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee B)\big) = ?$

Решение. Из первого условия по определению импликации следует, что либо $\lambda(A) = 0$, либо $\lambda(B) = 1$. Так как в первом случае по определению отрицания $\lambda(\neg A) = 1$, то в любом случае по определению дизъюнкции $\lambda(\neg A \vee B) = 1$ и, значит, по определению импликации выполняется $\lambda\big((\neg A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee B)\big) = 1$;

Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Определить истинностное значение последнего высказывания, исходя из заданных истинностных значений предыдущих высказываний:

1) $\lambda(A \wedge B) = 0,\ \lambda(A \Leftrightarrow B) = 0,\ \lambda(A \Rightarrow B) = 1,\ \lambda(A) = ?$;

2) $\lambda\big(A \Rightarrow (B \Leftrightarrow A)\big) = 0,\ \lambda(A \Rightarrow B) = ?$;

3) $\lambda\big((A \vee B) \Rightarrow A\big) = 1,\ \lambda(A \Rightarrow B) = 1,\ \lambda(A \Leftrightarrow B) = ?$;

4) $\lambda\big((A \vee B) \Rightarrow A\big) = 1,\ \lambda(A \Rightarrow B) = 1,\ \lambda(\neg A \Leftrightarrow \neg B) = ?$;

5) $\lambda(A \wedge B) = 0,\ \lambda(A \vee B) = 1,\ \lambda(A \Rightarrow B) = 1,\ \lambda(B \Rightarrow A) = ?$.

Формулы алгебры высказываний

Свойства алгебры высказываний $\mathcal{V}$ описываются с помощью специальных формул, которые строятся из переменных символов с помощью знаков логических операций. Такие формулы принято называть также *пропозициональными формулами.*

Для упрощения записи формул скобки в них по возможности опускаются с учетом следующего приоритета выполнения логических операций: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Если в формулу Ф входят переменные $X_1, \dots, X_n$, то записывают $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$. Формула Ф определяет функцию n переменных F_Φ, которая каждому упорядоченному набору $\lambda(X_1), \dots, \lambda(X_n)$ n элементов множества $\{0,1\}$ ставит в соответствие элемент $\lambda(\Phi(X_1, \dots, X_n))$ этого же множества. Такая функция F_Φ называется *истинностной функцией формулы* Ф и графически представляется *истинностной таблицей*, в которой для каждого упорядоченного набора $(k_1, \dots, k_n)$ возможных значений $k_1 = \lambda(X_1), \dots, k_n = \lambda(X_n)$ переменных $X_1, \dots, X_n$ формулы Ф по таблицам истинностных значений логических операций вычисляется значение функции $F_\Phi(k_1, \dots, k_n) = \lambda(\Phi(X_1, \dots, X_n))$.

Задача. Найти истинностную таблицу следующей формулы

$$\Phi = (\neg X \wedge \neg Y \Leftrightarrow X \vee \neg Y).$$

1 3 2 5 4

Сокращенная запись таблицы $\Phi = (\neg X \wedge \neg Y \Leftrightarrow X \vee \neg Y)$

Φ, F_Φ

X	Y	1	2	3	4	5
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

Определение. Формула Ф называется:

– *тавтологией* (или *тождественно истинной формулой*), если ее истинностная функция тождественно равна 1;
– *противоречием* (или *тождественно ложной формулой*), если ее истинностная функция тождественно равна 0;
– *выполнимой,* если ее истинностная функция не равна тождественно 0;
– *опровержимой,* если ее истинностная функция не равна тождественно 1.

Задания для самостоятельной работы

Задача 2. Составьте истинностные таблицы для следующих формул и укажите, какие из формул являются выполнимыми, какие опровержимыми, какие тождественно истинными (тавтологиями), а какие тождественно ложными (противоречиями):

1) $\big(X \wedge (Y \vee \neg X)\big) \wedge \big((Y \Rightarrow X) \vee Y\big)$;
2) $\Big(\big((X \Rightarrow Y) \Rightarrow Y\big) \Rightarrow Y\Big) \Rightarrow Y$;
3) $\Big(\big((X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \Leftrightarrow Z)\big) \Leftrightarrow (Y \Leftrightarrow Z)\Big) \Leftrightarrow X$;
4) $\big((X \vee \neg Y) \Rightarrow Y\big) \wedge (\neg X \vee Y)$;
5) $\neg\Big(\Big(\neg Z \Rightarrow \neg\big(X \Rightarrow \neg(Y \Rightarrow Z)\big)\Big) \Rightarrow \neg(X \Rightarrow \neg Y)\Big)$.

Логическая равносильность формул

Понятие равносильности формул основывается на тождественном равенстве истинностных функций этих формул. С помощью этого важного понятия осуществляются равносильные преобразования формул и приведение исследуемых формул к специальному виду.

Определение. Формулы Φ, Ψ называются *логически эквивалентными* (или просто *равносильными*), если при любой подстановке в формулы Φ, Ψ вместо переменных конкретных высказываний эти формулы превращаются в высказывания с одинаковыми истинностными значениями, т.е. выполняется $\vDash \Phi \Leftrightarrow \Psi$.

Для обозначения логически эквивалентных формул используется символическая запись $\Phi = \Psi$. Такие выражения называются *логическими эквивалентностями* или просто *равенствами формул.*

Задача. Составьте истинностные таблицы и проверьте справедливость равенства формул

$$X \Rightarrow (Y \vee Z) = (X \Rightarrow Y) \vee (X \Rightarrow Z).$$

Решение. Составим истинностные таблицы формул

$\Phi = X \Rightarrow (Y \vee Z)$, $\Psi = (X \Rightarrow Y) \vee (X \Rightarrow Z)$:

X	Y	Z	$Y \vee Z$	Φ
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

X	Y	Z	$X \Rightarrow Y$	$X \Rightarrow Z$	Ψ
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Так как в таблицах столбцы со значениями истинностных функций формул Φ, Ψ одинаковые, то при любой подстановке в формулы Φ, Ψ вместо переменных X, Y, Z конкретных высказываний эти формулы превращаются в высказывания с одинаковыми истинностными значениями. Значит, формулы Φ, Ψ логически эквивалентны и выполняется равенство $\Phi = \Psi$.

ЛЕММА (основные равенства формул). Справедливы следующие равенства формул:

1) $X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z,\ \ X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$ – свойства ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции;

2) $X \vee Y = Y \vee X,\ X \wedge Y = Y \wedge X$ – свойства коммутативности дизъюнкции и конъюнкции;

3) $X \vee X = X,\ X \wedge X = X$ – свойства идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции;

4) $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z),\ X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ – свойства дистрибутивности соответственно конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции;

5) $\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y,\ \neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$ – законы де Моргана;

6) $(X \wedge Y) \vee X = X,\ (X \vee Y) \wedge X = X$ – законы поглощения;

7) $\neg\neg X = X$ – закон двойного отрицания;

8) $X \Rightarrow Y = \neg X \vee Y,\ X \Rightarrow Y = \neg(X \wedge \neg Y)$ – взаимосвязь импликации с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

9) $X \Leftrightarrow Y = (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X),\quad X \Leftrightarrow Y = (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X)$, $X \Leftrightarrow Y = (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$ – взаимосвязь эквивалентности с импликацией, дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием.

ЛЕММА (правило замены). Если формулы Φ, Φ' равносильны, то для любой формулы $\Psi(X)$, содержащей переменную X, выполняется равенство $\Psi(\Phi) = \Psi(\Phi')$.

Это правило означает, что при замене в любой формуле $\Psi = \Psi(\Phi)$ некоторой ее подформулы Φ на равносильную ей формулу Φ' получается формула $\Psi' = \Psi(\Phi')$, равносильная исходной формуле Ψ. По этому правилу замены можно от одной формулы переходить к равносильной ей формуле с помощью основных равенств формул. Такие переходы называются *равносильными преобразованиями формул* и используются как для упрощения формул, так и для представления их в некоторой специальной форме. В частности, любую формулу можно равносильно преобразовать в формулу, содержащую символы логических операций $\neg, \wedge, \vee$.

Примеры

1. Формула $\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z$ с помощью равенств 5),7),8) из леммы равносильно преобразовывается следующим образом:

$$\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z = \neg(X \Rightarrow Y) \vee Z = \neg\big(\neg(X \wedge \neg Y)\big) \vee Z$$
$$= (X \wedge \neg Y) \vee Z.$$

2. Формулу $(\neg X \Leftrightarrow Y) \Rightarrow Z$ преобразуем равносильными преобразованиями так, чтобы она содержала только логические связки $\neg, \wedge$:

$$(\neg X \Leftrightarrow Y) \Rightarrow Z = \neg(\neg X \Leftrightarrow Y) \vee Z = \neg\big((\neg X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow \neg X)\big) \vee Z =$$
$$= \neg\big((\neg\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee \neg X)\big) \vee Z = \neg(X \vee Y) \vee \neg(\neg X \vee \neg Y) \vee Z =$$
$$= (\neg X \wedge \neg Y) \vee (\neg\neg X \wedge \neg\neg Y) \vee Z = (\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y) \vee Z =$$
$$= \neg(\neg(\neg X \wedge \neg Y) \wedge \neg(X \wedge Y) \wedge \neg Z).$$

3. Формулу $(\neg X \Leftrightarrow Y) \Rightarrow Z$ преобразуем равносильными преобразованиями так, чтобы она содержала только логические связки $\neg, \vee$:

$$(\neg X \Leftrightarrow Y) \Rightarrow Z = (\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y) \vee Z =$$
$$= \neg(\neg\neg X \vee \neg\neg Y) \vee \neg(\neg X \vee \neg Y) \vee Z = \neg(X \vee Y) \vee \neg(\neg X \vee \neg Y) \vee Z.$$

Задания для самостоятельной работы

Задача 3. С помощью равносильных преобразований докажите, что следующие формулы являются противоречиями:

1) $\big((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg(X \Rightarrow Z)\big) \wedge \neg(Z \Rightarrow Y)$;

2) $\big(Z \Rightarrow \neg(X \wedge \neg Z)\big) \Rightarrow (\neg(X \vee Z) \wedge X \wedge Y)$;

3) $\neg Y \wedge X \wedge (X \Rightarrow Y)$;

4) $(X \vee Y) \Leftrightarrow \big(\neg X \wedge (Y \Rightarrow \neg Y)\big)$;

5) $\Big((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \big((\neg Z \Rightarrow \neg V) \Rightarrow (X \wedge Y)\big)\Big) \wedge \neg(Z \Rightarrow X)$;

6) $\Big((\neg X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \big((\neg X \Rightarrow Y) \Rightarrow X\big)\Big) \Rightarrow \neg\big((\neg X \Rightarrow X) \Rightarrow X\big)$.

Задача 4. С помощью равносильных преобразований установите, какие из следующих равенств действительно выполняются:

1) $X \Rightarrow (X \wedge Y) = X \Rightarrow Y$;

2) $X \Rightarrow (X \vee Y) = X \Rightarrow Y$;

3) $X \wedge (Y \Leftrightarrow Z) = (X \wedge Y) \Leftrightarrow (X \wedge Z)$;

4) $X \vee (Y \Rightarrow Z) = (X \vee Y) \Rightarrow (X \vee Z)$;

5) $(X \Rightarrow Y) \vee Z = (X \vee Z) \Rightarrow (Y \vee Z)$;

6) $(X \Rightarrow Y) \wedge Z = (X \wedge Z) \Rightarrow (Y \wedge Z)$.

Нормальные формы формул алгебры высказываний

По определению формулы Φ, Ψ равносильны в том и только том случае, если их истинностные функции F_Φ, F_Ψ совпадают. Значит, отношение равносильности формул $\cong$ является отношением эквивалентности на множестве всех формул F_{AB}, которое разбивает это множество на классы эквивалентности $[\Phi] = \{\Psi \in F_{\text{AB}} : \Phi = \Psi\}$, определяемые формулами $\Phi \in F_{\text{AB}}$. Из основных равенств формул следует, что для каждой формулы $\Phi \in F_{\text{AB}}$ можно указать равносильные ей формулы специального вида, содержащие только символы логических операций $\neg, \wedge, \vee$.

Определение. *Литерой* называется пропозициональная переменная X или ее отрицание $\neg X$. Для обозначения литеры используется символ X^α, где $\alpha \in \{0,1\}$ и по определению $X^1 = X,\ X^0 = \neg X$.

Определение. *Конъюнктом* (соответственно *дизъюнктом*) называется литера или конъюнкция (соответственно дизъюнкция) литер.

При этом конъюнкт (дизъюнкт) называется *совершенным*, если он содержит все пропозициональные переменные рассматриваемой формулы.

Определение. *Конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно КНФ) называется дизъюнкт или конъюнкция дизъюнктов. *Дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно ДНФ) называется конъюнкт или дизъюнкция конъюнктов.

При этом КНФ (соответственно ДНФ) называется *совершенной*, если совершенны все ее дизъюнкты (соответственно конъюнкты).

ТЕОРЕМА 1. Любая формула равносильна некоторой ДНФ и некоторой КНФ.

Доказательством этого факта является следующий алгоритм приведения произвольной формулы Ф к ДНФ (соответственно, к КНФ) с помощью основных равенств формул:

1) согласно равенствам 8),9) выражаем все входящие в формулу Ф импликации и эквивалентности через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание;

2) согласно законам де Моргана все отрицания, стоящие перед скобками, вносим в эти скобки и сокращаем все двойные отрицания;

3) согласно законам дистрибутивности преобразуем формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций (соответственно, чтобы все дизъюнкции выполнялись раньше конъюнкций).

Очевидно, что в результате выполнения этих действий получается ДНФ (соответственно, КНФ) исходной формулы Ф. Ясно также, что такие формы для формулы Ф определяются неоднозначно.

Задача. Равносильными преобразованиями приведите формулу $(X \Leftrightarrow \neg Y) \vee \neg(X \Rightarrow Y)$ к дизъюнктивной нормальной форме и к конъюнктивной нормальной форме.

Решение. Данная формула с помощью равенств 1),5),7),8) из леммы равносильно преобразовывается следующим образом:

$$(X \Leftrightarrow \neg Y) \vee \neg(X \Rightarrow Y) = \big((X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge \neg\neg Y)\big) \vee \neg(\neg X \vee Y) =$$
$$= (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y).$$

Полученная формула $(X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)$ является ДНФ. Раскрывая в этой формуле скобки с помощью равенств 4), получаем следующую КНФ:

$$(X \Leftrightarrow \neg Y) \vee \neg(X \Rightarrow Y) = (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) =$$
$$= (X \vee \neg X) \wedge (X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee \neg X) \wedge (\neg Y \vee Y) = (X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee \neg X).$$

ТЕОРЕМА 2. Любая выполнимая формула $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ равносильна формуле вида

$$\bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} (X_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge X_n^{\alpha_n}),$$

где дизъюнкция берется по всем наборам $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$, для которых $F_\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$.

Такая формула определяется однозначно (с точностью до порядка членов конъюнкций и дизъюнкций) и называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СДНФ) формулы Φ.

ТЕОРЕМА 3. Любая опровержимая формула $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ равносильна формуле вида

$$\bigwedge_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} (X_1^{1-\alpha_1} \vee \dots \vee X_n^{1-\alpha_n}),$$

где конъюнкция берется по всем наборам $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$, для которых $F_\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$.

Такая формула определяется однозначно (с точностью до порядка членов конъюнкций и дизъюнкций) и называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СКНФ) формулы Φ .

<u>Алгоритм нахождения СДНФ и СКНФ</u> формулы $\Phi = \Phi$*(X1,…,Xn)*:

1) составляем истинностную таблицу формулы Φ и добавляем к ней два дополнительных столбца с заголовками «Совершенные конъюнкты» и «Совершенные дизъюнкты» (табл. 10);

2) если при значениях $\lambda(X_1) = k_1, \dots, \lambda(X_n) = k_n$ истинностное значение $\lambda(\Phi(X_1, \dots, X_n))$ формулы Φ равно 1, то в соответствующей строке табл. 10 в столбце «Совершенные конъюнкты» записываем конъюнкт $X_1^{k_1} \wedge \dots \wedge X_n^{k_n}$, а в столбце «Совершенные дизъюнкты» делаем прочерк. При этом учитываем, что $X_i^1 = X_i$ и $X_i^0 = \neg X_i$;

3) Если при значениях $\lambda(X_1) = m_1, \dots, \lambda(X_n) = m_n$ истинностное значение $\lambda(\Phi(X_1, \dots, X_n))$ формулы Φ равно 0, то в соответствующей строке табл. 10 в столбце «Совершенные дизъюнкты» записываем дизъюнкт $X_1^{1-m_1} \vee \dots \vee X_n^{1-m_n}$, а в столбце «Совершенные конъюнкты» делаем прочерк;

Таблица 10

X_1	…	X_n	...	$\Phi(X_1,\dots,X_n)$	Совершенные конъюнкты	Совершенные дизъюнкты
…	…	…	...	…	…	…
k_1	…	k_n	...	1	$X_1^{k_1}\wedge\dots\wedge X_n^{k_n}$	–
…	…	…	...	…	…	…
m_1	…	m_n	...	0	–	$X_1^{1-m_1}\vee\dots\vee X_n^{1-m_n}$
…	…	…	...	…	…	…

4) СДНФ формулы Ф равна дизъюнкции полученных совершенных конъюнктов: $(X_1^{k_1}\wedge\dots\wedge X_n^{k_n})\vee\dots$;

5) СКНФ формулы Ф равна конъюнкции полученных совершенных дизъюнктов: $(X_1^{1-m_1}\vee\dots\vee X_n^{1-m_n})\wedge\dots$.

Задачи

1. Найдите СДНФ и СКНФ формулы

$$\Phi(X,Y,Z)=\neg(X\wedge Y)\Rightarrow\neg(X\vee Z).$$

Решение. Составляем истинностную таблицу формулы Ф и добавляем к ней два дополнительных столбца с заголовками «Совершенные конъюнкты» и «Совершенные дизъюнкты» (табл. 11).

В строках табл. 11, где значение формулы Ф равно 1, в столбце «Совершенные дизъюнкты» делаем прочерк, а в столбце «Совершенные конъюнкты» записываем конъюнкты $X^\alpha\wedge Y^\beta\wedge Z^\gamma$, где α,β,γ – соответствующие значения переменных X,Y,Z в этой строке табл. 11.

В строках табл. 11, где значение формулы Ф равно 0, в столбце «Совершенные конъюнкты» делаем прочерк, а в столбце «Совершенные дизъюнкты» записываем дизъюнкты $X^{1-\alpha}\vee Y^{1-\beta}\vee Z^{1-\gamma}$, где α,β,γ – соответствующие значения переменных X,Y,Z в этой строке табл. 11.

Таблица 11

X	Y	Z	$\Phi(X,Y,Z)$	Совершенные конъюнкты	Совершенные дизъюнкты
0	0	0	1	$X^0 \wedge Y^0 \wedge Z^0$	–
0	0	1	0	–	$X^1 \vee Y^1 \vee Z^0$
0	1	0	1	$X^0 \wedge Y^1 \wedge Z^0$	–
0	1	1	0	–	$X^1 \vee Y^0 \vee Z^0$
1	0	0	0	–	$X^0 \vee Y^1 \vee Z^1$
1	0	1	0	–	$X^0 \vee Y^1 \vee Z^0$
1	1	0	1	$X^1 \wedge Y^1 \wedge Z^0$	–
1	1	1	1	$X^1 \wedge Y^1 \wedge Z^1$	–

С учетом равенств $X^1 = X$, $X^0 = \neg X$ записываем СДНФ данной формулы Φ в виде дизъюнкции совершенных конъюнктов:

$$\Phi(X,Y,Z) = (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \\ \vee (X \wedge Y \wedge Z).$$

Аналогично записываем СКНФ данной формулы Φ в виде конъюнкции совершенных дизъюнктов:

$$\Phi(X,Y,Z) = (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \\ \wedge (\neg X \vee Y \wedge \neg Z).$$

Задания для самостоятельной работы

Задача 5. Равносильными преобразованиями приведите каждую из следующих формул к дизъюнктивной нормальной форме:

1) $\big((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Z \Rightarrow \neg X)\big) \Rightarrow (Y \Rightarrow \neg Z)$;

2) $\big((X \Rightarrow Y) \vee \neg Z\big) \Rightarrow \big(X \vee (X \Leftrightarrow Z)\big)$;

3) $X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)$;

4) $(X \Leftrightarrow Y) \Rightarrow (X \wedge Z)$;

5) $\big(X \vee \neg(Y \Rightarrow Z)\big) \wedge (X \vee Z)$.

Задача 6. Равносильными преобразованиями приведите каждую из следующих формул к конъюнктивной нормальной форме:

1) $\big(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)\big) \Rightarrow \big((X \Rightarrow \neg Z) \Rightarrow (X \Rightarrow \neg Y)\big)$;

2) $\big((X \Rightarrow Y) \vee \neg Z\big) \Rightarrow \big(X \vee (X \Leftrightarrow Z)\big)$;

3) $(X \Leftrightarrow Y) \Rightarrow (X \wedge Z)$;

4) $\big(X \vee \neg(Y \Rightarrow Z)\big) \wedge (X \Leftrightarrow Z)$;

5) $\neg(X \vee Z) \wedge (X \Rightarrow Y)$.

Задача 7. Для следующих формул составьте истинностные таблицы, найдите СДНФ и СКНФ:

1) $(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \Rightarrow \neg Y) \wedge \neg Z$;

2) $\neg\Big(\neg X \Leftrightarrow \big((Y \vee \neg Z) \Rightarrow \neg(X \vee Y)\big)\Big)$;

3) $\big((\neg X \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Z)\big) \wedge \neg Y$;

4) $\neg(\neg X \vee \neg Y) \wedge \big(X \Rightarrow (Y \wedge Z)\big)$;

5) $(X \Leftrightarrow Z) \Rightarrow (X \wedge \neg Y)$;

6) $\big((X \vee Y) \Rightarrow Z\big) \Leftrightarrow \neg X$.

Логическое следование формул

Логическое следование формул есть отношение между конечными множествами формул и отдельно взятыми формулами, в основе которого лежит сравнение значений истинностных функций данных формул. С помощью этого понятия определяются общие способы доказательства взаимосвязи между истинностными значениями высказываний посредством исследования формальной структуры высказываний.

Определение. Формула Φ называется *логическим следствием формул* $\Phi_1, \dots, \Phi_m$, если при любой подстановке в эти формулы вместо их переменных $X_1, \dots, X_n$ конкретных высказываний $A_1, \dots, A_n$ из истинности высказываний $\Phi_1(A_1, \dots, A_n), \dots, \Phi_m(A_1, \dots, A_n)$ следует истинность высказывания $\Phi(A_1, \dots, A_n)$. Такое логическое следствие формул символически обозначается $\Phi_1, \dots, \Phi_m \vDash \Phi$ и называется *логическим следованием*. При этом формулы $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ называются *посылками*, а формула Φ – *следствием* логического следования $\Phi_1, \dots, \Phi_m \vDash \Phi$.

Задачи

1. Для следующих формул выясните, будет ли какая-либо формула логическим следствием другой: $\Phi = Z \Rightarrow (Y \vee \neg X)$, $\Psi = X \Rightarrow (Y \wedge Z)$.

Решение. Построим истинностные таблицы для формул Φ, Ψ (табл. 12,13).

Таблица 12

X	Y	Z	$\neg X$	$Y \vee \neg X$	Φ
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Таблица 13

X	Y	Z	$Y \wedge Z$	Ψ
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Так как для каждой строки табл. 13, в которой истинностное значение формулы Ψ равно 1, истинностное значение формулы Φ в этой же строке табл. 12 также равно 1, то формула Φ является логическим следствием формулы Ψ. В то же время формула Ψ не является логическим следствием формулы Φ, так как, например, при $X = 1, Y = 1, Z = 0$ формула Φ в 7-й строке табл. 12 имеет истинностное значение 1, а формула Ψ в этой же строке табл. 13 имеет истинностное значение 0.

2. Пользуясь определением логического следствия, выясните, справедливо ли следующее логическое следование: $X \wedge Y, Y \Rightarrow \neg Z \vDash \neg Y$.

Решение. Построим истинностные таблицы для формул $\Phi_1 = X \wedge Y$, $\Phi_2 = Y \Rightarrow \neg Z$ и $\Phi = \neg Y$ (табл. 14—16).

Таблица 14

X	Y	Z	Φ_1
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Таблица 15

X	Y	Z	$\neg Z$	Φ_2
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Таблица 16

X	Y	Z	Φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Из построенных таблиц видно, что формула $\neg Y$ не является логическим следствием формул $X \wedge Y, Y \Rightarrow \neg Z$, так как, например, при значениях
$X = 1, Y = 1, Z = 0$ формулы $\Phi_1 = X \wedge Y$, $\Phi_2 = Y \Rightarrow \neg Z$ в 7-й строке табл. 14,15 имеют логическое значение 1, а формула $\Phi = \neg Y$ в 7-й табл. 16 имеет значение 0.

3. Выясните, справедливо ли следующее логическое следование:

$$F \Rightarrow G,\ K \Rightarrow \neg H,\ H \vee \neg G \ \vDash\ F \Rightarrow \neg K.$$

Решение. Справедливость данного логического следования покажем методом доказательства от противного. Допустим, что данное логическое следование не выполняется, т.е. существуют такие истинностные значения пропозициональных переменных F, G, K, H, при которых истинностные значения формул-посылок равны 1, а истинностное значение формулы-следствия равно 0, т.е. выполняются равенства:

1) $\lambda(F \Rightarrow G) = 1;$
2) $\lambda(K \Rightarrow \neg H) = 1;$
3) $\lambda(H \vee \neg G) = 1;$
4) $\lambda(F \Rightarrow \neg K) = 0.$

Тогда по определению операции импликации (см. табл. 4) из условия 4) следует, что $\lambda(F) = 1$ и $\lambda(\neg K) = 0$, значит $\lambda(K) = 1$. Из условия 1) в силу $\lambda(F) = 1$ по определению операции импликации (см. табл. 4) следует, что $\lambda(G) = 1$, а значит, $\lambda(\neg G) = 0$. Далее из условия 3) в силу $\lambda(\neg G) = 0$ по определению операции дизъюнкции (см. табл. 3) следует, что $\lambda(H) = 1$, а значит, $\lambda(\neg H) = 0$. Наконец, из условия 2) в силу $\lambda(\neg H) = 0$ по определению операции импликации (см. табл. 4) следует, что $\lambda(K) = 0$. Пришли к противоречию с ранее полученным условием $\lambda(K) = 1$. Следовательно, при любой подстановке в рассматриваемые формулы вместо их переменных конкретных высказываний формула $F \Rightarrow \neg K$ не может превращаться в ложное высказывание, если все формулы $F \Rightarrow G,\ K \Rightarrow \neg H,\ H \vee \neg G$ превратились в истинные высказывания. Это означает, что рассматриваемое логическое следование верно.

Определение. Множество формул $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ называется *противоречивым*, если при любой подстановке в формулы $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ вместо их переменных конкретных высказываний хотя бы одна из данных формул превращается в ложное высказывание. Это равносильно тому, что из множества формул $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ логически следует любая (в том числе и тождественно ложная) формула Φ.

Поэтому противоречивость множества формул $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ символически обозначается $\Phi_1, \dots, \Phi_m \vDash$ и называется *логическим противоречием*.

ЛЕММА (критерии логического следования). Условие логического следования $\Phi_1, \dots, \Phi_m \vDash \Phi$ равносильно каждому из следующих условий:

1) $\Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_m \vDash \Phi$;
2) $\vDash \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_m \Rightarrow \Phi$;
3) $\Phi_1, \dots, \Phi_m, \neg\Phi \vDash$.

В частности, $\Phi \vDash \Psi$ равносильно $\vDash \Phi \Rightarrow \Psi$. Отсюда также следует, что $\Phi = \Psi$ равносильно тому, что $\Phi \vDash \Psi$ и $\Psi \vDash \Phi$.

Задания для самостоятельной работы

Задача 8. Для следующих формул выясните, будет ли какая-либо из них логическим следствием другой:

1) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Z)$, $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z$;

2) $(X \vee Z) \Leftrightarrow Y, \quad (X \vee Y) \Leftrightarrow Z$;

3) $(X \wedge Y) \Rightarrow Z, \quad X \vee (Y \Rightarrow Z)$;

4) $X \vee (Y \Rightarrow Z), \quad (X \vee Y) \Leftrightarrow Z$;

5) $(X \wedge Y) \Rightarrow Z, \quad (X \Rightarrow Y) \vee Z$.

Задача 9. Методом от противного выясните, верны ли следующие логические следования:

1) $F \Rightarrow G,\ K \Rightarrow L,\ F \vee K \ \vDash\ G \vee L$;

2) $F \Rightarrow G,\ ((F \vee L) \wedge H) \Rightarrow M,\ L \Rightarrow H \ \vDash\ ((F \vee L) \wedge G) \Rightarrow \neg M$;

3) $(F \wedge G) \Rightarrow H,\ (H \wedge K) \Rightarrow L,\ \neg M \Rightarrow (K \wedge L) \ \vDash\ (F \wedge G) \Rightarrow M$;

4) $F \Rightarrow (G \Rightarrow H),\ (H \wedge K) \Rightarrow L,\ \neg M \Rightarrow (K \wedge L) \ \vDash\ F \Rightarrow (G \Rightarrow M)$;

5) $(F \Rightarrow G) \wedge (H \Rightarrow K),\ (G \Rightarrow L) \wedge (K \Rightarrow M),\ \neg(\mathrm{L} \wedge M),\ F \Rightarrow H \ \vDash \neg F$.