Serie 1

Ahmed Bajra

2020-09-20

Bonusaufaben

Aufgabe 1

Überlegungen

Gegeben sei ein Lineares Gleichungssystem

$$a_1x_1 + a_2x_2 = a_3$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 = b_3$$

Dann gilt:

$$\text{Gleichungssystem hat beliebig viele Lösungen wenn:} \\ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \\ \text{Da dann die erste Gleichung mittels der Zweiten ausgedrückt werden kann} \\ \text{und es darum effektiv nur eine Gleichung mit zwei Unbekannten gibt} \tag{1}$$

$$\text{Gleichungssystem hat keine Lösung wenn:} \\ \begin{bmatrix} a_i \\ a_j \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} b_i \\ b_j \end{bmatrix}, a_k \neq cb_k \\ \text{Da dadurch Gleichungen der folgenden Art resultieren:} \\ a_k = b_k (\text{obere Bedingung ist aber } a_k \neq cb_k) \\ a_kx_k = b_kx_k (\text{hat nur Lösungen, wenn } x_k = 0) \tag{2}$$

$$\text{Gleichungssystem hat genau eine Lösung, wenn weder (1) noch (2) der Fall ist} \tag{3}$$

Resultate

(a) (2) $\Rightarrow$ keine Lösung

(b) (1) $\Rightarrow$ beliebig viele Lösungen

(c) (2) $\Rightarrow \begin{cases} \text{eine Lösung für } x_1, & \text{wenn } x_2 = 0 \\ \text{keine Lösung} & \text{sonst} \end{cases}$

(d) (1) $\Rightarrow$ beliebig viele Lösungen

(e) Eine Lösung, da die zweite Gleichung eine Lösung für x_3 liefert und für die beiden anderen Gleichungen (3) gilt

(f) (1) $\Rightarrow$ beliebig viele Lösungen

(g) (2) $\Rightarrow$ keine Lösung (Vergleich: Koeffizienten der 1. und 3. Gleichung)

Aufgabe 2

(f) und (g) haben die jeweils linken Teile der Gleichungen gemeinsam und unterscheiden sich in den Rechten.
Da bei (f) alles = 0 gesetzt wird und die Koeffizienten wie nach (1) ein vielfaches voneinander sind, ergibt sich aus den drei Gleichungen immer dieselbe. Für drei Unbekannte ist diese eine Gleichung nicht ausreichend, weshalb daraus beliebig viele Lösungen zustande kommen.
Bei (g) würden die ersten zwei Gleichungen dasselbe wie bei (f) bedeuten, doch die dritte ist wiedersprüchlich:

$$\begin{array}{ll} (I): & 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3 \cdot (I) \rightarrow & 3(2x_1 + x_2 + x_3) = 3 \cdot 2 \\ = & 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \\ & \\ (III): & 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8 \neq 6 \end{array}$$

Aufgaben zum Rang

Aufgabe 1

Auf das gegebene LGS treffen folgende Aussagen zu:

- (a)
- (c)
- (d)

Aufgabe 2

$$\begin{array}{lrrrrcr}
(I): & x_1+ & x_2+ & 2x_3+ & 2x_4 & = & b_1 \\
(II): & x_1+ & 2x_2+ & 3x_3+ & 4x_4 & = & b_2 \\
(III): & x_1+ & 3x_2+ & 6x_3+ & 10x_4 & = & b_3 \\
(IV): & x_1+ & 4x_2+ & 10x_3+ & 20x_4 & = & b_4 \\
 & & & & & & \\
(V)=(II)-(I): & & x_2+ & x_3+ & 2x_4 & = & b_2-b_1 \\
(VI)=(III)-(II)-(V): & & & 3x_3+ & 4x_4 & = & b_3-2b_2+b_1 \\
(VII)=(IV)-(III)-(V)-(VI): & & & & 4x_4 & = & b_4-2b_3+b_2
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & x_4=\frac{1}{4}b_4-\frac{1}{2}b_3+\frac{1}{4}b_2 \\
\Leftrightarrow \quad & x_3=-\frac{1}{3}b_4-b_3-b_2+\frac{1}{3}b_1 \\
\Leftrightarrow \quad & x_2=-\frac{1}{6}b_4+2b_3+\frac{5}{2}b_2-\frac{4}{3}b_1 \\
\Leftrightarrow \quad & x_1=-\frac{1}{3}b_4+b_3+\frac{5}{3}b_1
\end{aligned}$$

a) $x_1=3, x_2=\frac{22}{3}, x_3=\frac{16}{3}, x_4=\frac{1}{4}$

b) $x_1=\frac{5}{3}, x_2=\frac{53}{6}, x_3=\frac{2}{3}, x_4=-\frac{3}{2}$

c) $x_1=\frac{7}{3}, x_2=3, x_3=-2, x_4=0$

Aufgabe 3

$$\begin{array}{lrrrcr}
(I): & 3x_1+ & 4x_2+ & 2x_3 & = & 8 \\
(II): & x_1+ & 3x_2- & x_3 & = & 2 \\
 & & & & & \\
(I)-3(II)= & & -5x_2+ & 5x_3 & = & 2 \\
\Leftrightarrow & & x_2 & & = & x_3-\frac{2}{5} \\
\Leftrightarrow & x_1 & & & = & x_3-\frac{2}{5}
\end{array}$$