Bonusaufgaben 5

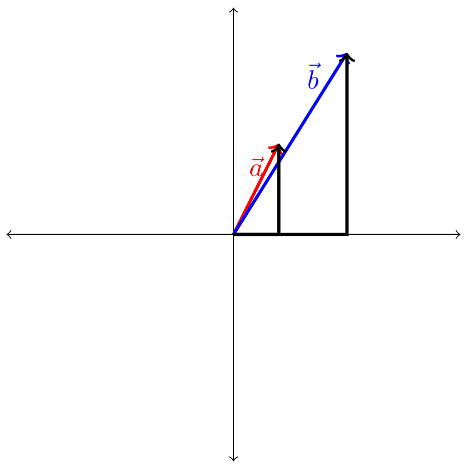
Ahmed Bajra

2020-11-29

Aufgabe (a)

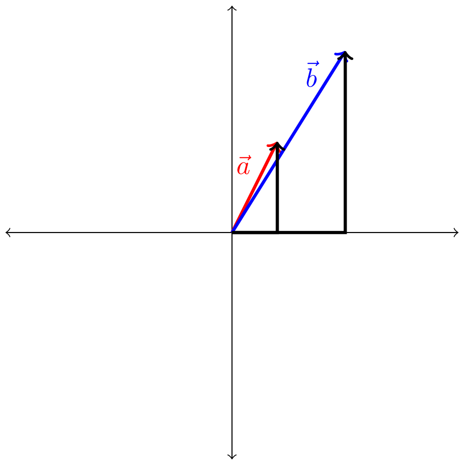
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A : \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\vec{b} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$



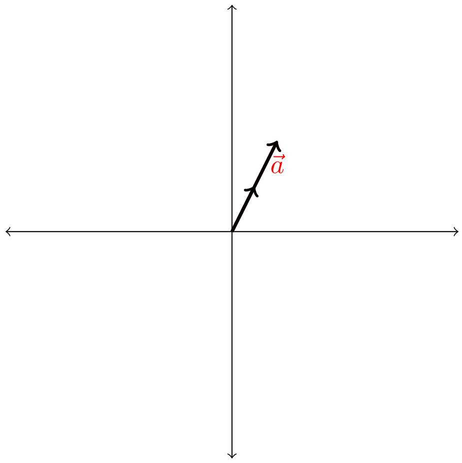
$$B: \vec{a} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = 5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$



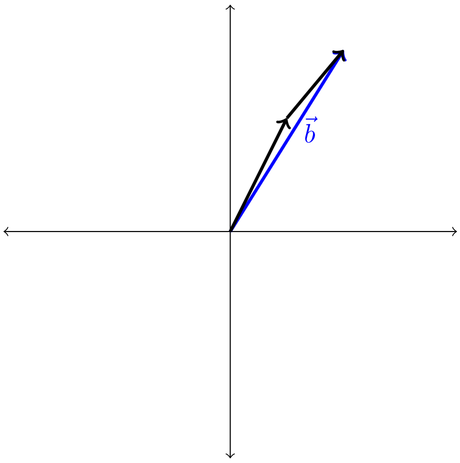
$$C: \vec{a} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$\vec{b}$ keine mögliche Linearkombination



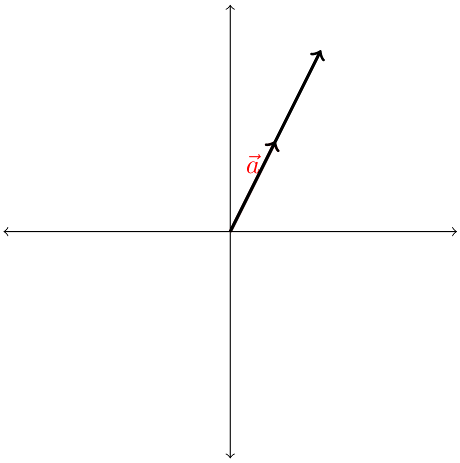
$$D: \vec{a} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \text{ (siehe C)}$$

$$\vec{b} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$$



$$E: \vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$$

$\vec{b}$ keine mögliche Linearkombination



Fazit

Um einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ mit einer Linearkombination $L : \{\vec{v}_1, ...\vec{v}_n\} \mapsto a_1\vec{v}_1 + ... + a_n\vec{v}_n$ von Vektoren aus einer Menge M abzubilden ($L(M) = \vec{v}$), muss entweder mindestens ein Vektor $\vec{u} \in M$ kollinear zu $\vec{v}$ sein oder es zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{w} \in M$ linear unabhängig zueinander sein, es gilt also:

$$
\begin{aligned}
&\exists L : \{\vec{v}_1, ...\vec{v}_n\} \mapsto a_1\vec{v}_1 + ... + a_n\vec{v}_n, M \subset \mathbb{R}^2 : L(M) = \vec{v} \\
\Leftrightarrow\ &\exists \vec{v}_i \in M : k\vec{v}_i = \vec{v} \text{ oder } \exists\{\vec{v}_i, \vec{v}_j\} \subset M\backslash\{\vec{0}\} : k\vec{v}_i \neq \vec{v}_j
\end{aligned}
$$

Aufgabe (b)

Da es sich hier stehts um Polynome ersten Grades handelt, kann die Form $p(t) = at + b$ zu einem Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ umgeschrieben werden.
Die für Linearkombinationen relevanten Operationen sind in beiden Formen analog:

$$
\begin{aligned}
p_1(t) = a_1t + b_1, & p_2(t) = a_2t + b_2 \\
\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, & \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \\
\text{Addition: } & p_1(t) + p_2(t) = (a_1 + a_2)t + (b_1 + b_2) \\
& \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ entspricht: } (a_1 + a_2)t + (b_1 + b_2) \\
\text{Multiplikation mit skalarem Wert: } & kp_1(t) = ka_1t + k_b1 \\
& k\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} ka_1 \\ kb_1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ entspricht: } ka_1t + kb_1
\end{aligned}
$$

Übersetzt man alle gegebenen Polynome in die oben genannte Vektordarstellung, kommt man zu denselben Lösungen wie bei Aufgabe (a).