

Serie 1 - Bonusaufgaben

Ahmed Bajra

2020-09-20

Aufgabe 1

Überlegungen

Gegeben sei ein Lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned}a_1x_1 + a_2x_2 &= a_3 \\ b_1x_1 + b_2x_2 &= b_3\end{aligned}$$

Dann gilt:

Gleichungssystem hat beliebig viele Lösungen wenn:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Da dann die erste Gleichung mittels der Zweiten ausgedrückt werden kann
und es darum effektiv nur eine Gleichung mit zwei Unbekannten gibt

Gleichungssystem hat keine Lösung wenn:

$$\begin{bmatrix} a_i \\ a_j \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} b_i \\ b_j \end{bmatrix}, a_k \neq cb_k \quad (2)$$

Da dadurch Gleichungen der folgenden Art resultieren:

$$\begin{aligned}a_k &= b_k \text{ (obere Bedingung ist aber } a_k \neq cb_k) \\ a_kx_k &= b_kx_k \text{ (hat beliebig viele Lösungen, wenn } x_k = 0)\end{aligned}$$

Gleichungssystem hat genau eine Lösung, wenn weder (1) noch (2) der Fall ist (3)

Resultate

- (a) (2) \Rightarrow keine Lösung
- (b) (1) \Rightarrow beliebig viele Lösungen
- (c) (2) $\Rightarrow \begin{cases} \text{beliebig viele Lösungen für } x_1, & \text{wenn } x_2 = 0 \\ \text{keine Lösung} & \text{sonst} \end{cases}$
- (d) (1) \Rightarrow beliebig viele Lösungen
- (e) Eine Lösung, da die zweite Gleichung eine Lösung für x_3 liefert und für die beiden anderen Gleichungen (3) gilt
- (f) (1) \Rightarrow beliebig viele Lösungen
- (g) (2) \Rightarrow keine Lösung (Vergleich: Koeffizienten der 1. und 3. Gleichung)

Aufgabe 2

(f) und (g) haben die jeweils linken Teile der Gleichungen gemeinsam und unterscheiden sich in den Rechten.

Da bei (f) alles $= 0$ gesetzt wird und die Koeffizienten wie nach (1) ein vielfaches voneinander sind, ergibt sich aus den drei Gleichungen immer dieselbe. Für drei Unbekannte ist diese eine Gleichung nicht ausreichend, weshalb daraus beliebig viele Lösungen zustande kommen.

Bei (g) würden die ersten zwei Gleichungen dasselbe wie bei (f) bedeuten, doch die dritte ist widersprüchlich:

$$\begin{array}{ll} (I) : & 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3 \cdot (I) \rightarrow & 3(2x_1 + x_2 + x_3) = 3 \cdot 2 \\ = & 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \\ \\ (III) : & 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8 \neq 6 \end{array}$$