Projet ECMA 2022-2023

Rym Ben Maktouf Ahmed Belmabrouk

3 janvier 2023

Table des matières

1 Contexte

Le but de ce projet est l'étude d'un problème de partitionnement robuste. L'objectif du problème statique consiste à partitionner les sommets du graphe en au plus K parties de poids inférieur ou égal à B, de façon a minimiser les distances des arêtes à l'intérieur des parties.Alors que pour le problème robuste les distances sont dotées d'incertitude ; On considère la possibilité que les valeurs choisies pour les distances soient sous-évaluées. On propose de résoudre ce par problème :

1. par un algorithme de plans coupants ;
2. par un algorithme de branch-and-cut (via un LazyCallback) ;
3. par dualisation ;
4. par une heuristique ou la résolution d'une formulation non compacte.

2 Modélisation Papier

1. Modélisation statique compacte :

$$min_{z,x} \sum_{ij\in E} l_{ij}x_{ij}$$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{lll}
x_{ij} + z_i^k - z_j^k \leq 1 & \forall ij \in E\ \forall k \in \{1,..K_{max}\} & (1a)\\
x_{ij} - z_i^k + z_j^k \leq 1 & \forall ij \in E\ \forall k \in \{1,..K_{max}\} & (1b)\\
-x_{ij} + z_i^k + z_j^k \leq 1 & \forall ij \in E\ \forall k \in \{1,..K_{max}\} & (1c)\\
\sum_{k=1}^{k_{max}} z_i^k = 1 & \forall i \in V & (1d)\\
z_i^k = 0 & \forall k > i, i \in V\ \forall k \in \{1,..K_{max}\} & (1e)\\
\sum_{i\in V} z_i^k \geq 1 & \forall k \in \{1,..K_{max}\} & (1f)\\
\sum_{i\in V} w_i z_i^k \leq B & \forall k \in \{1,..K_{max}\} & (1g)\\
z_i^k \in \{0,1\} & \forall i \in V\ \forall k \in \{1,..K_{max}\} & (1h)\\
x_{ij} \in \{0,1\} & \forall ij \in E & (1i)
\end{array}$$

Les variables :
- x_{ij} est une variable binaire qui vaut 1 si l'arc (i,j) est choisi dans une des clusters(parties) et 0 sinon.
- z_i^k est une binaire qui vaut 1 si le noeud i est affecté au cluster k et 0 sinon pour tout noeud $i \in V$ et $k \in \{1..K_{max}\}$.

Les contraintes :
- Les contraintes (1a)(1b)(1c) : contraintes liantes entre les variables x et z.
- Les contraintes (1d) : chaque noeud i est dans exactement un cluster.
- Les contraintes (1e) : chaque noeud ne peut pas être dans un cluster d'indice plus grand que i.
- Les contraintes (1f) : chaque cluster est non vide.
- Les contraintes (1g) : Contraintes de poids sur les sommets de chaque cluster .
- Les contraintes (1h)(1i) : Contraintes de variables binaires

2. Modèle du problème robuste :

$$min_{z,x}\ max_{l_{ij}^1 \in U^1} \sum_{ij\in E} l_{ij}^1 x_{ij}$$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{lll}
x_{ij} + z_i^k - z_j^k \leq 1 & \forall ij \in E\ \forall k \in \{1,..K_{max}\} & (2a)\\
x_{ij} - z_i^k + z_j^k \leq 1 & \forall ij \in E\ \forall k \in \{1,..K_{max}\} & (2b)\\
-x_{ij} + z_i^k + z_j^k \leq 1 & \forall ij \in E\ \forall k \in \{1,..K_{max}\} & (2c)\\
\sum_{k=1}^{k_{max}} z_i^k = 1 & \forall i \in V & (2d)\\
z_i^k = 0 & \forall k > i, i \in V\ \forall k \in \{1,..K_{max}\} & (2e)\\
\sum_{i\in V} z_i^k \geq 1 & \forall k \in \{1,..K_{max}\} & (2f)\\
\sum_{i\in V} w_i^k z_i^k \leq B & \forall k \in \{1,..K_{max}\}\ ,\ w_i^k \in U^k & (2g)\\
z_i^k \in \{0,1\} & \forall i \in V\ \forall k \in \{1,..K_{max}\} & (2h)\\
x_{ij} \in \{0,1\} & \forall ij \in E & (2i)
\end{array}$$

Toutes les contraintes sont statiques car elles ne font pas intervenir la donnée incertaine : le temps minimal de déplacement entre deux villes.

3. Résolution par plans coupants et LazyCallback :

   (a) Le modèle du problème robuste est équivalent au modèle suivant :

$$min_z z$$

sous les contraintes :

$$x_{ij} + z_i^k - z_j^k \leq 1 \qquad \forall ij \in E \ \forall k \in \{1, ..K_{max}\} \qquad (3a)$$
$$x_{ij} - z_i^k + z_j^k \leq 1 \qquad \forall ij \in E \ \forall k \in \{1, ..K_{max}\} \qquad (3b)$$
$$-x_{ij} + z_i^k + z_j^k \leq 1 \qquad \forall ij \in E \ \forall k \in \{1, ..K_{max}\} \qquad (3c)$$
$$\sum_{k=1}^{k_{max}} z_i^k = 1 \qquad \forall i \in V \qquad (3d)$$
$$z_i^k = 0 \qquad \forall k > i, i \in V \ \forall k \in \{1, ..K_{max}\} \qquad (3e)$$
$$\sum_{i \in V} z_i^k \geq 1 \qquad \forall k \in \{1, ..K_{max}\} \qquad (3f)$$
$$\sum_{i \in V} w_i^k z_i^k \leq B \qquad \forall k \in \{1, ..K_{max}\} \ , \ w_i^2 \in U^2 \qquad (3g)$$
$$z_i^k \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in V \ \forall k \in \{1, ..K_{max}\} \qquad (3h)$$
$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall ij \in E \qquad (3i)$$
$$z \geq \sum_{ij \in E} l_{ij}^1 x_{ij} \qquad \forall ij \in E \qquad (3j)$$

La robustesse n'apparaît plus dans l'objectif mais dans la contrainte (3j) dans ce modèle.

   (b) On peut définir U^{0*} (resp U^{k*}) comme étant l'ensemble des distances initiales proposées (resp l'ensemble des poids initiaux) dans le modèle statique et on a $l_{ij}^0 = l_{ij}$ pour tout l_{ij}^0 dans U^{0*} (resp on a $w_i^k = w_i$ pour tout w_i^k dans U^{k*}) .

   (c) Le sous-problème lié à U^{0*} :

$$\max_{l_{ij}^0 \in U^0} \sum_{ij \in E} l_{ij}^0 x_{ij}^*$$

avec x^* la solution optimale du problème maître.
Ce qui est équivalent à :

$$\max_\delta \sum_{ij \in E} (l_{ij} + \delta_{ij}^0 (\hat{\text{l}}_i + \hat{\text{l}}_j) x_{ij}^*$$

sous les contraintes :

$$\sum_{ij \in E} \delta_{ij}^0 \leq L$$
$$\delta_{ij}^0 \in [0, 3] \qquad \forall ij \in E$$

on a k_{max} sous-problèmes liés à U^{k*} :

$$\max_{w_i^k \in U^k} \sum_{i \in V} w_i^k z_i^{*k}$$

avec z^* la solution optimale du problème maître.
Ce qui est équivalent à :

$$\max_\delta \sum_{i \in V} w_i^k (1 + \delta_i^k) z_i^{*k}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{i \in V} \delta_i^k \leq W$$
$$\delta_i^k \in [0, W_i] \qquad \forall i \in V$$

   (d) Les conditions à satisfaire pour qu'une solution soit optimale :
On trouve Z^* (valeur obejctif de probleme maitre), x^* et z^* en résolvant le problème maître.
On trouve δ^{*0} en résolvant le sous-problème lié a U^{0*} et on trouve alors l^{0*}.
On trouve $\delta^{*1}, ...\delta^{*m}$ en résolvant les k_{max} sous-problèmes liés a U^{k*} et on trouve alors $w^{1*}, ...w^{m*}$.
Il faut que $\sum_{ij \in E} l_{ij}^{0*} x_{ij}^* \leq Z^*$ et $\sum_{i \in V} w_i^{k*} z_i^{k*} \leq B \ \forall k \in \{1, ..K_{max}\}$ pour que la solution (x^*, z^*) soit optimale.

   (e) Si on trouve que l^{0*} (et/ou $w^{1*}, ...w^{m*}$)est tel que $\sum_{ij \in E} l_{ij}^{0*} x_{ij}^* > Z^*$ (et/ou $\sum_{i \in V} w_i^{k*} z_i^{k*} > B$), on doit ajouter l^{0*} à U^{0*} (et/ou w^{k*} à U^{k*}) donc la coupe qui s'ajoute est la suivante :

$$l_{ij}^{0*} x_{ij} < z \quad \text{(et/ou } \sum_{i \in V} w_i^{k*} z_i^k <= B \ \forall k \in \{1, ..K_{max}\}),$$

4. Résolution par dualisation :

   (a) Reformulation de l'objectif :

$$min_{x,z} max_{l^0_{ij} \in U^0} \sum_{ij \in E} l^0_{ij} x_{ij}$$
$$= min_{x,z} max_{\delta^0_{ij}} \sum_{ij \in E} (l_{ij} + \delta^0_{ij}(\hat{\mathrm{l}}_i + \hat{\mathrm{l}}_j)) x_{ij}$$
$$= min_{x,z} \sum_{ij \in E} l_{ij} x_{ij} + min_{x,z} max_{\delta^0_{ij}} \sum_{ij \in E} \delta^0_{ij}(\hat{\mathrm{l}}_i + \hat{\mathrm{l}}_j) x_{ij}$$

(b) Le problème interne est :

$$max_{\delta} \sum_{ij \in E} \delta^0_{ij}(\hat{\mathrm{l}}_i + \hat{\mathrm{l}}_j) x_{ij}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{ij \in E} \delta^0_{ij} \leq L$$
$$\delta^0_{ij} \in [0,3] \quad \forall ij \in E$$

(c) Dualisation :

$$min\ \alpha^0 L + \sum_{ij \in E} 3\beta^0_{ij}$$

sous les contraintes :

$$\alpha^0 + \beta^0_{ij} \geq (\hat{\mathrm{l}}_i + \hat{\mathrm{l}}_j) x_{ij} \quad \forall ij \in E$$
$$\alpha^0 \geq 0$$
$$\beta^0_{ij} \geq 0$$

(d) Reformulation des contraintes :

$$min_{x,z} max_{w^k_i \in U^k} \sum_{i \in V} w^k_i x_{ij}$$
$$= min_{x,z} max_{\delta^k_i} \sum_{i \in V} w_i (1 + \delta^k_i) z^k_i$$
$$= min_{x,z} \sum_{i \in V} w_i z^k_i + min_{x,z} max_{\delta^k_i} \sum_{i \in V} w_i \delta^k_i z^k_i$$

(e) Le problème interne est :

$$max_{\delta^k_i} \sum_{i \in V} w_i \delta^k_i z^k_i$$

sous les contraintes :

$$\sum_{i \in V} \delta^k_i \leq W$$
$$\delta^k_i \in [0, W_i] \quad \forall i \in V$$

(f) Dualisation :

$$min\ \alpha^k W + \sum_{i \in V} W_i \beta^k_i$$

sous les contraintes :

$$\alpha^k + \beta^k_i \geq w_i \delta^k_i z^k_i \quad \forall i \in V$$
$$\alpha^k \geq 0$$
$$\beta^k_i \geq 0$$

(g) On remplace les 2 min par un seul min et on obtient le probleme robuste dualisé suivant :

$$= min_{x,z,\alpha,\beta} \sum_{ij \in E} l_{ij} x_{ij} + \alpha^0 L + \sum_{ij \in E} 3\beta^0_{ij}$$

sous les contraintes :

$$x_{ij} + z^k_i - z^k_j \leq 1 \qquad \forall ij \in E\ \forall k \in \{1, ..K_{max}\}$$
$$x_{ij} - z^k_i + z^k_j \leq 1 \qquad \forall ij \in E\ \forall k \in \{1, ..K_{max}\}$$
$$-x_{ij} + z^k_i + z^k_j \leq 1 \qquad \forall ij \in E\ \forall k \in \{1, ..K_{max}\}$$
$$\sum_{k=1}^{k_{max}} z^k_i = 1 \qquad \forall i \in V$$
$$z^k_i = 0 \qquad \forall k > i, i \in V\ \forall k \in \{1, ..K_{max}\}$$
$$\sum_{i \in V} z^k_i \geq 1 \qquad \forall k \in \{1, ..K_{max}\}$$
$$\sum_{i \in V} w_i z^k_i + \alpha^k W + \sum_{i \in V} W_i \beta^k_i \leq B \qquad \forall k \in \{1, ..K_{max}\}$$
$$\alpha^0 + \beta^0_{ij} \geq (\hat{\mathrm{l}}_i + \hat{\mathrm{l}}_j) x_{ij} \quad \forall ij \in E$$
$$\alpha^0 \geq 0$$
$$\beta^0_{ij} \geq 0$$
$$\alpha^k + \beta^k_i \geq w_i \delta^k_i z^k_i \quad \forall i \in V\ \forall k \in \{1, ..K_{max}\}$$
$$\alpha^k \geq 0$$
$$\beta^k_i \geq 0$$
$$z^k_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in V\ \forall k \in \{1, ..K_{max}\}$$
$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall ij \in E$$