Linear Algebra

Day 01

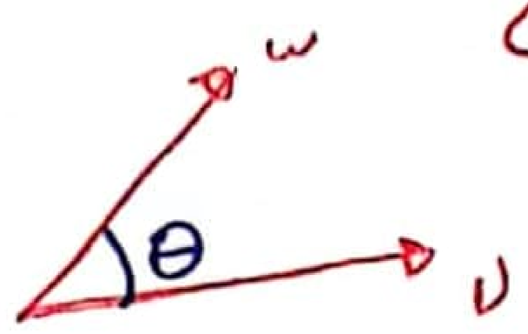
[1] Cross product

$a * b = |a||b| \sin\theta_n$

[2] Dot product

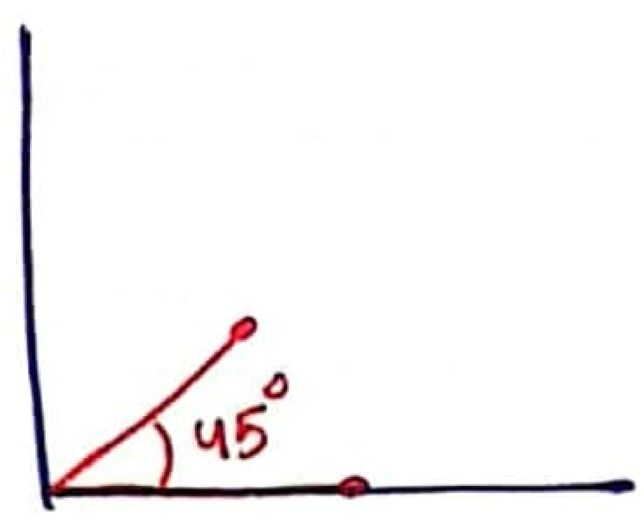
inner product

$v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos\theta$



[3] Cosine similarity

$\cos(45) = 0.71$



[4] Distance

$v_1 = (3,4)$

$v_2 = (1.5, 1.5)$

$$\sqrt{(3-1.5)^2 + (4-1.5)^2} = 2.915$$

Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matrix-vector product

Ex

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{Matrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\text{vector}} = \text{Result}$$

$2 \times \boxed{3 \quad 3} \times 1$ → $\boxed{2 \times 1}$

$$Res = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

or

$$Res = \begin{pmatrix} 2*2 + 3*1 + 0*3 \\ 1*2 + 2*1 - 1*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Distributive property → $\boxed{(A+B)X = AX + BX}$

Matrix-Matrix product

* $A(BC) = (AB)C$
* $A(B+C) = AB + AC$

  $(B+C)D = BD + CD$
* $AB \neq BA$

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$3 \times \boxed{2 \quad 2} \times 3$ → $\boxed{3 \times 3}$

A.B

$$= \begin{bmatrix} 3*3+4*6 & 3*1+4*9 & 3*5+4*7 \\ 7*3+2*6 & 7*1+2*9 & 7*5+2*7 \\ 5*3+9*6 & 5*1+9*9 & 5*5+9*7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 33 & 39 & 43 \\ 33 & 25 & 49 \\ 69 & 86 & 88 \end{bmatrix}$$

Hadamard product

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A \odot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 16 \\ 36 & 50 \end{bmatrix}$$

properties

① $A \odot B = B \odot A$

② $A^T \odot B^T = (B \odot A)^T$

Kronecker Matrix product

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$2*2$ 2×2

$M \times N$ $P \times q$

$A \otimes B \Rightarrow$ dimension → $\boxed{MP \times Nq}$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1*5 & 1*6 & 2*5 & 2*6 \\ 1*7 & 1*8 & 2*7 & 2*8 \\ 3*5 & 3*6 & 4*5 & 4*6 \\ 3*7 & 3*8 & 4*7 & 4*8 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{4 \times 4}$$

Matrix Row Echelon form

Gauss-jordan Elimination

→ algorithm can used to solve systems of linear equations

* REF properties

① All leading entries in each of the rows of matrix are $\boxed{1}$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 9 \end{bmatrix}$$

prop.① ✓
prop.② X

② لازم كل ال $\boxed{1}$ يكون باقي عموده كله
Zero بيساوي

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

③ لازم كل entry جديد يكون في الصف
اللي بعد صف ال entry القديم

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

prop.① ✓
prop.② ✓
prop.③ ✓

④ All rows which consist entirely of zeros appear at the bottom of matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

* احنا دايما بنحاول نعمل عمليات عال matrix
بتاعتنا بحيث نوصل للـ REF
← من خلال عمليات جمع وطرح
عالصفوف

Reduced Row Echelon form

Must be REF + 1 Rule

كل الـ elements اللي تحت $\boxed{1}$ لازم تكون Zero

Ex

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 = -R_2 + r_1$$

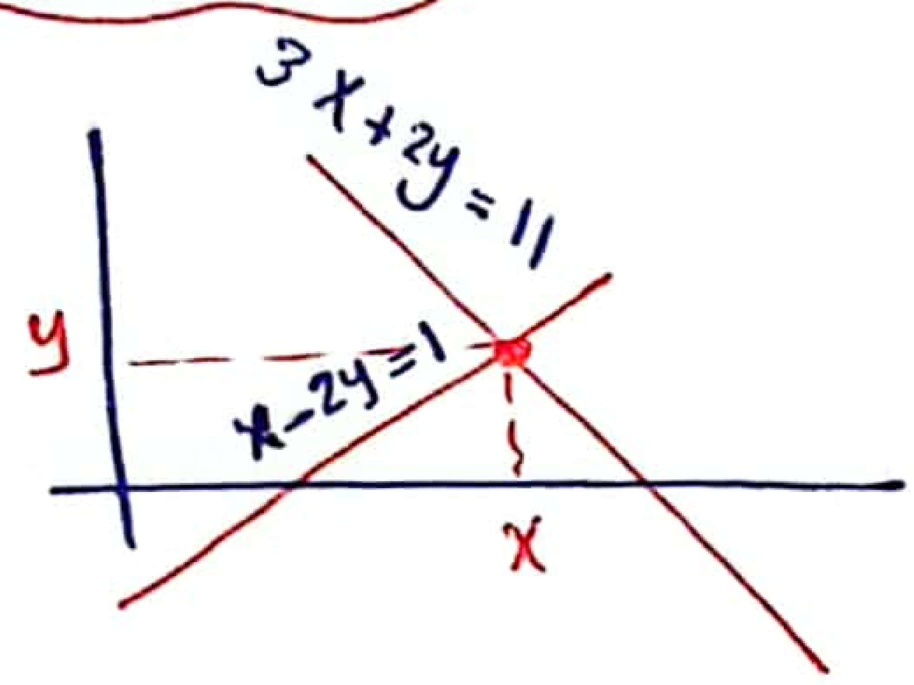
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{RREF } \#$$

System of linear equations

معادلتين في مجهولين

↓

تقاطعهم هو الحل



---

* using Gaussian Elimination

To Solve :-

$$\begin{cases} x + y - z = 9 \\ y + 3z = 3 \\ -x - 2z = 2 \end{cases}$$

↓

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \quad R_1 + R_3 \rightarrow R_3$$

عايزينهم كلهم Zero

عايزينه $\boxed{1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 11 \end{array}\right]$$

$$-R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{array}\right] \quad -\frac{1}{6}R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{3} \end{array}\right]$$

$$x + y - z = 9$$

$$y - 3z = 3$$

$$z = \frac{-4}{3}$$

هنعوض ونجيب x, y

$$y = 7$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Linear Algebra

Day 02

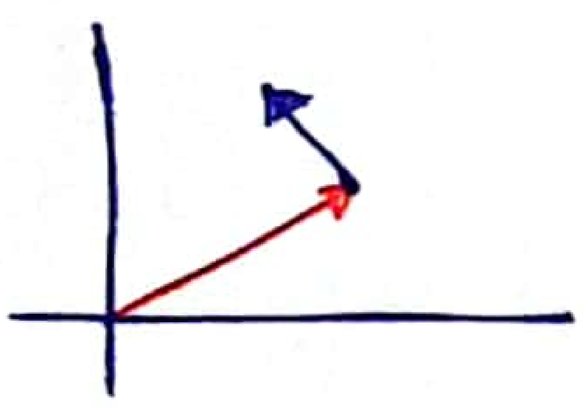
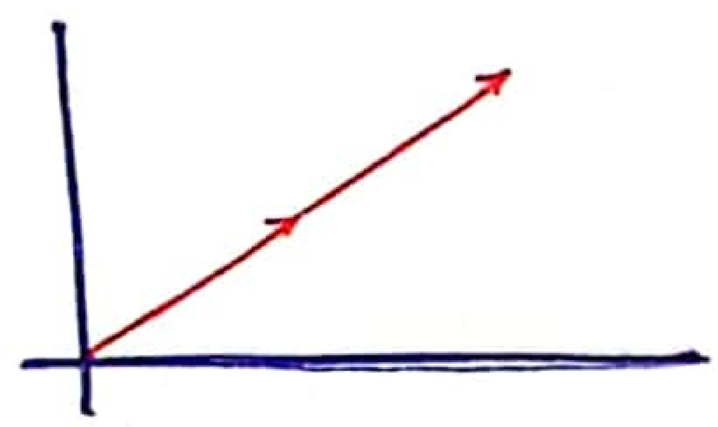
Linear combinations of vector

→ if one vector = sum of scalar multiples of other vectors

$a = 2b + 3c$

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 16 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vector spaces & sub spaces

Vector Addition	Scalar Multiplication
	
$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix}$	$c\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cu_1 \\ \vdots \\ cu_n \end{pmatrix}$

Rules:

Vector addition
1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0$

Scalar Multiplication
5. $c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + d\vec{v}$
6. $(c+d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{v}$
7. $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$
8. $1\vec{u} = \vec{u}$

9. $\vec{u} + \vec{v} \in V$
10. $c\vec{u} \in V$

∴ Vector space → two operation
- vector addition
- scalar Multiplicat

that obeys 10 rules

المتجه في الفضاء

Ex → A subspace of R^3

$w = (x_1, 0, x_3)$

x_1 → Real, x_3 → Real

لو جبت x_1, x_3 وضربتهم أو جمعتهم
لازم يطلعلك حاجة
من ال R^3

الخلاصة

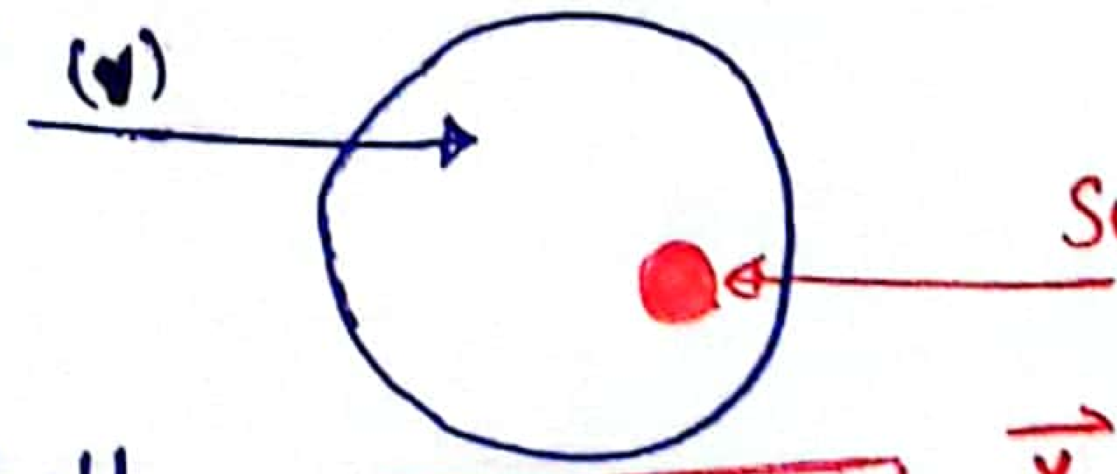
$\boxed{\text{Vector space}}$ → set of vectors that is closed under linear combination

* All linear combination of elements stay in the vector space

$\boxed{\text{Subspace}}$ → Non empty subset that satisfies the requirement of a vector space

* the smallest ~~sub~~ subspace contains only zero vector

Vector space (V)



Subspace (S)

R^3

Set of all real vectors with three components

$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

$\boxed{S \text{ جزء من } V}$

$\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{bmatrix}$

every element in S is necessary also in R^3

Span

V

$\vec{V_1}, \vec{V_2}, \cdots \vec{V_n} \in V$

$a_1\vec{V_1} + a_2\vec{V_2} + \cdots a_n\vec{V_n}$

a_1 → Scaler

دا كدا له اسمه Linear combination

→ Set of all linear combination is → Span

So Let's take three vectors from R^3

$$\vec{V_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{V_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{V_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Span}(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}) = \underbrace{a\vec{V_1} + b\vec{V_2} + c\vec{V_3}}_{\text{Linear combination}}$$

$a, b, c \longrightarrow$ Scalers

$$= a\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2a \\ a \\ -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2b \\ 2b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c \\ -c \\ -c \end{bmatrix}$$

$$\text{Span} = \begin{bmatrix} 2a - c \\ a + 2b - c \\ -a + 2b - c \end{bmatrix}$$

small subset of V contain elements

عشان كدا نقدر نقول حاليًا

→ Span of any number of elements of vector space V is also a subspace of V

Span → important for descriping vector spaces

Linear independence of vectors

→ if $V_1 = 5V_2 + 7V_3$

then $V_1, V_2, V_3 \longrightarrow$ dependent

لأن واحد منهم بيساوي مجموع الاتنين التانيين مع scaler وبالتالي معتمدين على بعض

→ if $a_1V_1 + a_2V_2 + \cdots a_nV_n = 0$

So $V_1, V_2, \cdots V_n \longrightarrow$ independent

Ex
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

$$a_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

هنحاول نطبق هنا R.R.E.F

$2R_1 + R_2 \longrightarrow R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 0 \end{array}\right] \quad -R_2 + R_3 \rightarrow R_3$$

+ دلوقتي عندنا صفين زي بعض بالظبط

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \frac{1}{8}R_2 \rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad -4R_2 + R_1 \rightarrow R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

من الشكل هنطلع معادلات جديدة

$$a_1 + \frac{1}{2}a_3 = 0$$

$$a_2 + \frac{5}{8}a_3 = 0$$

$a_3 = K$ free Variable

So
$$\left.\begin{array}{l} a_1 = -\frac{1}{2}K \\ a_2 = -\frac{5}{8}K \end{array}\right\} \text{non trivial Solution of the form}$$

$$\left(-\frac{1}{2}K,\ -\frac{5}{8}K,\ K\right)$$

نقدر ناخذ قيم مختلفة للـ K

So a_1, a_2, a_3 values don't have to all equal zero

↓

our set is Linearly dependent

Another Examples

1. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$ Linearly independent

2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \longrightarrow$ dependent

3. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$ dependent

Basis of vector space — min. set of vectors that span the space

Two properties
1. linearly independent
2. span the space

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$ standard basis for R^2

↓

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$ independend → span R^2 ✓

Ex

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ independent ↓ basis for R^3

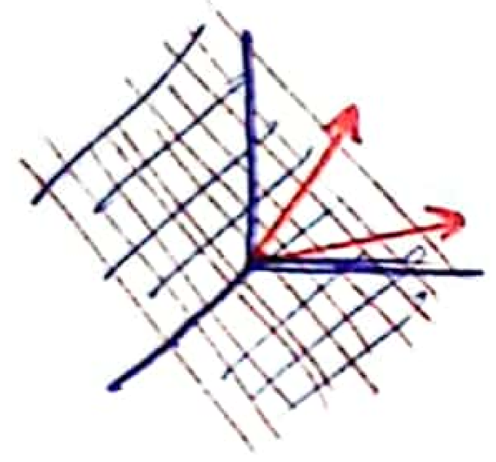
$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dependent ↓ aren't basis

Fundamental spaces

- Row space $R(A)$
- column space $C(A)$
- Null space $N(A)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$ independent

Row space → linear compinations/span of rows of matrix A



هتشكل span لمستوى في الـ R^2

Coloumn space → Subspace of linear combinations of matrix A's columns

Null space →
$$\underset{2\times3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}} \underset{3\times1}{\vec{X}} = \vec{Y}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

لو قدرت ألاقي vector لما اضربه في الـ matrix تطلع $\vec{0}$

← يبقى حل المعادلة دي بيطلع null space of matrix A

Example

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Basis $R(A)$
Basis $C(A)$
Basis $N(A)$

$\boxed{1}$ Gaussian elimination → RREF

$$R_2 - 4R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\div -6 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 - 3R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

كدا كدا الصفوف ← independent
لأنه مطلعش صف كامل Zero

$$\therefore R(A) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

نيجي دلوقتي عند $C(A)$

← هنسأل نفسنا سؤال ← هل الـ 3 columns يقدروا يعملوا span للـ R^3 كله؟

X الشروط ← independent
← vector in R^3

يبقى بعد الـ RREF ← هنشوف الـ 2 columns اللي independent

هناخد بقى الأول والتالت في الأصلية
$$\begin{bmatrix} 1 & \cancel{2} & 0 \\ 0 & \cancel{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore C(A) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}\right)$$

لأنه الـ RREF بتأثر على الـ columns

$\underline{N(A)}$ → حسابه هوائي
احل معادلة

$$N(A):-\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 8 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$2\times 3 \quad 3\times 1 \qquad 2\times 1$

فيها عدد مجاهيل أكتر من عدد المعادلات

وبالتالي هنقدر نحلها وهيكون عندنا free variable

free variable → نحدد قيمته ونتحكم في باقي ال variables بتوعي

after $\underline{RREF}$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1+2x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$\boxed{x_3=0}$

$x_1+2x_2=0$

$\therefore x_1=-2x_2$

free variable ← لأني بعرف x_1 بدلالة x_2

$$\therefore N(A)=\text{span}\left(\begin{bmatrix}-2b\\ b\\ 0\end{bmatrix}\right)$$

Linear Algebra

Day 03

$\underline{Ex}$ on $C(A)$
$R(A)$
$N(A)$

$m=3$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \\ 3 & 9 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ Apply RREF

$n=4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

independent
لأنه معيش صف كله أصفار

$R(A) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

$\dim(R(A)) = 3$

$C(A) \longrightarrow$ بنشوف الـ columns بتوع الـ matrix الأصلية

يقدروا يـ span ايه؟

بما ان م (4) تأكيد عندي ← 3 independent
و 1 dependent

فهاخد الـ 3 independent من الـ matrix الأصلية

$C(A) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} \right)$

$\dim((C(A))) = 3$

For any matrix

$$\boxed{\text{rank}(A) = \dim(R(A)) = \dim(C(A))}$$

$N(A) \rightsquigarrow A\vec{X} = 0$

↓

non Zero vector

$$\underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{4\times 1}{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$X_1 = -2X_2$ → free variable

$X_3 = 0$

$X_4 = 0$

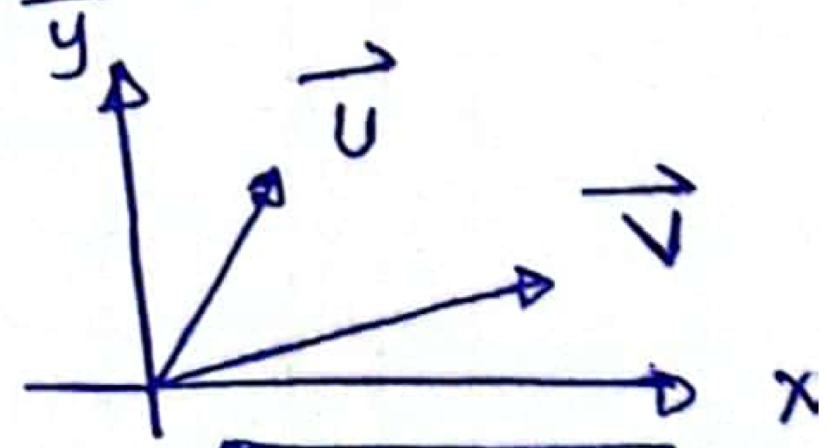
Let $X_2 = b$

$\dim(N(A)) = 1$

$\therefore N(A) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} -2b \\ b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$

Linear Transformation

$A\vec{U} = \vec{V} \Rightarrow T_A(\vec{U}) = \vec{V}$



function

$f(x) = Y$

$\cos(x) = Y$

linearity $\boxed{aV_1 + bV_2}$

$Y = x + 3$

$Y = 2x$

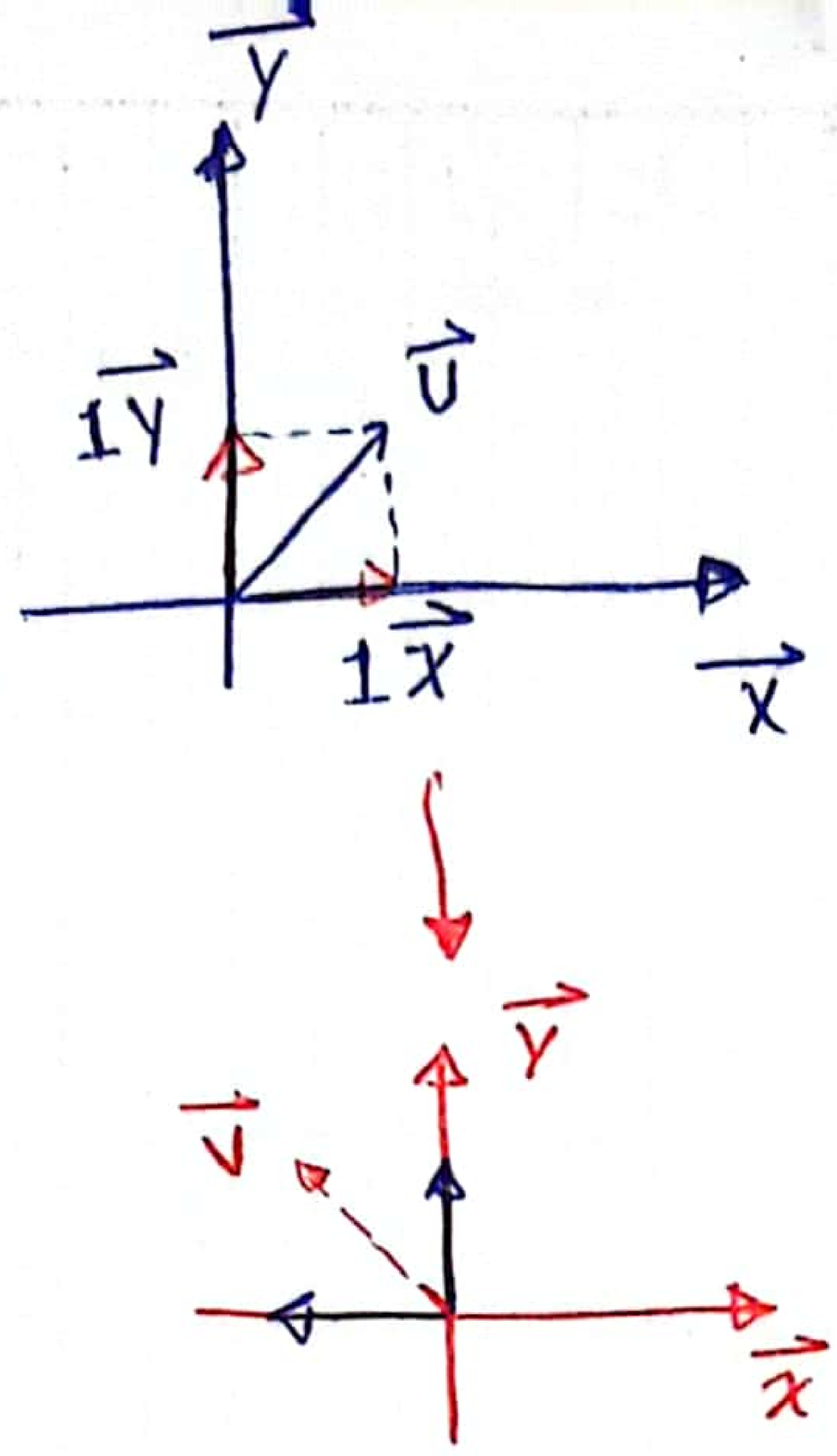
Rotation

90° counterclockwise

where $\hat{y}$ vector goes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

where $\hat{x}$ vector goes



يبقى كدا بقى عندي

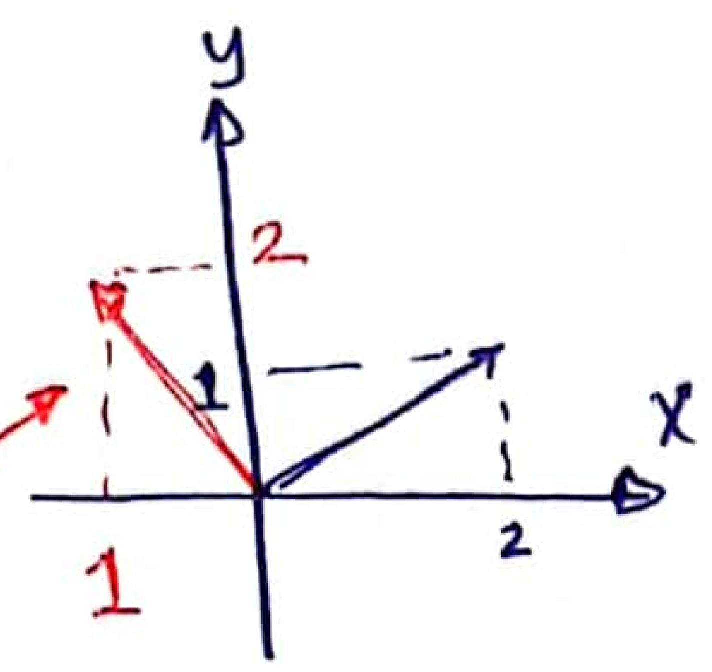
matrix لو ضربت في اي vector

اقدر احول علطول الـ direction بتاعه

واعمله rotation بـ 90°

$$A\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



كل الـ invertable square matrix

- كل الـ columns بتوعه independent هيكونوا عن بعض
- dim $N(A) = 0$
- dim $(R(A))$ = dim $(C(A)) = n$
- كل الـ rows بتوعه independent
- rank $(A) = n$ (full-rank square matrix)
- rref $(A) = I_n$
- det $(A) \neq 0$

properties of transformations

① $T_A(\vec{x} + \vec{y}) = T_A(\vec{x}) + T_A(\vec{y})$

$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$

② $T_A(a\vec{x}) = \underbrace{a}_{\text{Scalar}}\, T_A(\vec{x})$

$A(a\vec{x}) = a(A\vec{x})$

③ $T_A(T_B(\vec{x})) = AB\vec{x}$

$\neq T_B(T_A(\vec{x})) = B(A\vec{x})$

ترتيب الـ Transformation بيفرق

Matrix Inverse

$T_A(\vec{x}) = \vec{y}$

$T_{A^{-1}}(\vec{y}) = \vec{x}$??

if such inverse transformation exists

→ so A is invertible (square matrix)

$A^{-1}(A\vec{x}) = \vec{x}$

So $T_{A^{-1}}(T_A(\vec{x})) = T_{A^{-1}}(\vec{y}) = \vec{x}$

يبقى حاليًا أنا بدور على

$(A^{-1}A)\vec{x} = \vec{x}$

$\underbrace{I}_{\text{identity matrix}}\vec{x} = \vec{x}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = ??$$

$$a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, C_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij}}$$

minors $M_{i,j}$

$$M_{1,1} : \det\begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ \cancel{d} & e & f \\ \cancel{g} & h & i \end{vmatrix}$$

$$M_{1,1} = ei - fh$$

وهكذا بقى

Cofactors → minors + signals

الإشارة بتاعتها

$$\det\left(\begin{bmatrix} a^{+} & b^{-} & c^{+} \\ d^{-} & e^{+} & f^{-} \\ g^{+} & h^{-} & i^{+} \end{bmatrix}\right)$$

القانون العام بتاعها

$$\boxed{C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}}$$

i → rows, j → column

---

inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} (-1)^{i,j} M_{i,j} \end{bmatrix}^{T}$$

Ex $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 17 & 5 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = ??$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7(5)-2(17)}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -17 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -17 & 7 \end{bmatrix}$$

Finding inverse using Gaussian elimination

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right] \rightarrow G.E$$

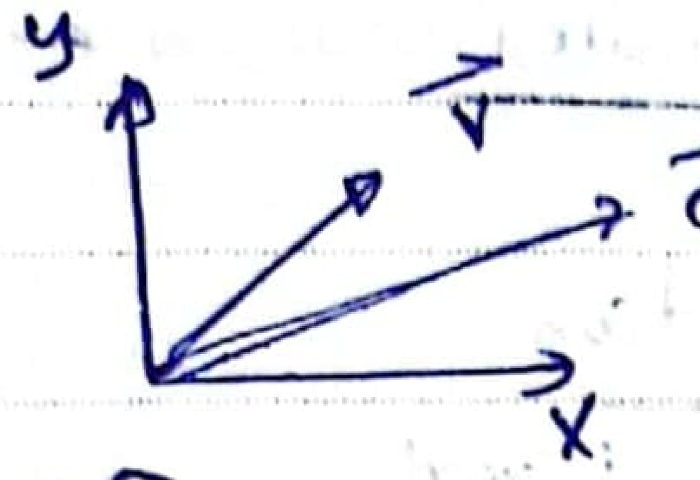
$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| A^{-1} \right]$$

A^{-1} → required

Linear Algebra — day 4

Change of basis

عندي نفس ال Vector لو اعبر عنه بدلالة 2 basis أو basis تانية



2D space

ال basis: لو linear independant vectors مش unique

بيـ span فضاء ثنائي الأبعاد كله

Change of basis transformation

→ Linear transformation

Gram Schmidt method → orthonormalization (orthogonalization + normalization)

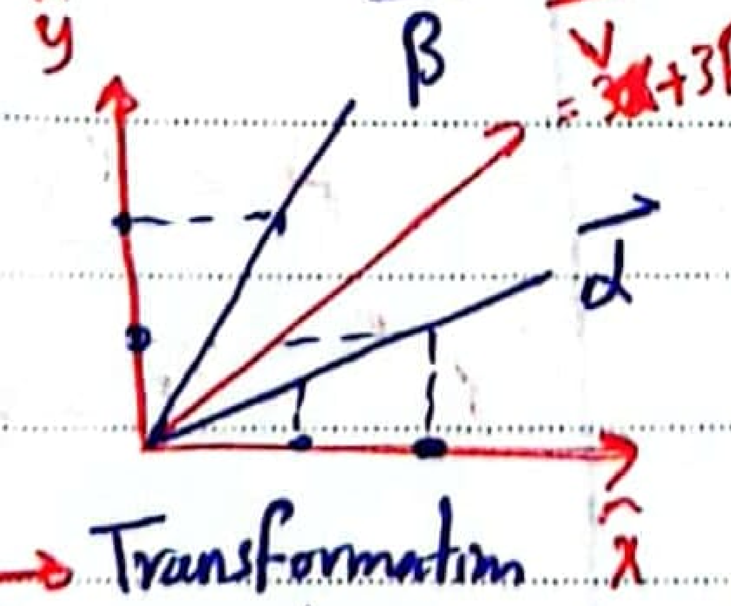
عندي اي اتنين basis وعايز اطلع منهم اي 2 basis orthonormal

→ eigen values & eigenvectors

→ diagnolization (change to eigen basis)

مثال ← تفاح وبرتقال

vector بيعبر عن ال quantity



change of basis matrix → Transformation matrix

$$[\ \ ]\,[\vec V]_e \Rightarrow [\vec V]_s$$

old basis — new basis

$(\alpha, \beta) \longrightarrow (x, y)$ standard basis

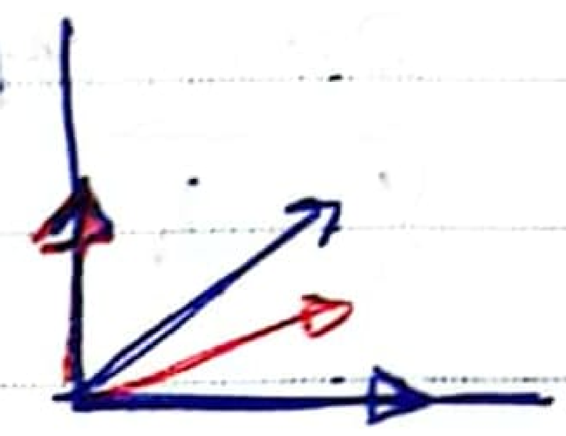
عايز نحول ...

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat x\cdot\hat\alpha & \hat x\cdot\hat\beta \\ \hat y\cdot\hat\alpha & \hat y\cdot\hat\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix}$$

لو عايز العكس هضرب في ال inverse

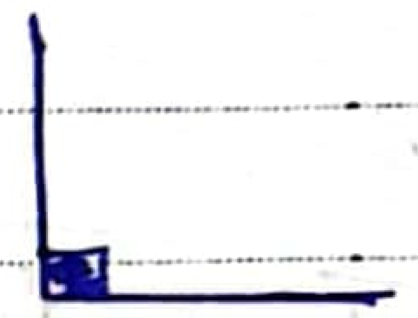
$$\begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat x\cdot\hat\alpha & \hat x\cdot\hat\beta \\ \hat y\cdot\hat\alpha & \hat y\cdot\hat\beta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$$

العلامات دي هتكلم عنها في ال Gram schmit method



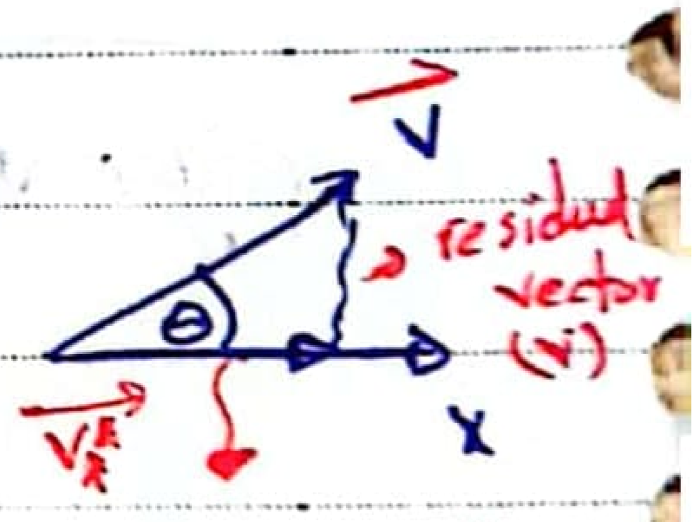
$\boxed{\text{orthogonal}}$

$$\vec X\cdot\vec Y = \|X\|\,\|Y\|\cos\theta = 0 \quad (\theta = 90)$$



$\boxed{\text{non orthogonal vectors}}$

$$V = \vec V_x + \vec V_\perp$$



component of $\vec V$ in $\vec X$ direction

← عايز واحد منهم واعمل واحد عمودي عليه عشان اقدر اعمل basis جديدة

$\vec V_x \rightarrow$ projection of $\vec V$ on $\vec X$

$$proj_x(\vec V) = c\,\vec X$$

$$proj_x(\vec V) = \frac{\vec V\cdot\vec X}{\vec X\cdot\vec X}\,\vec X$$

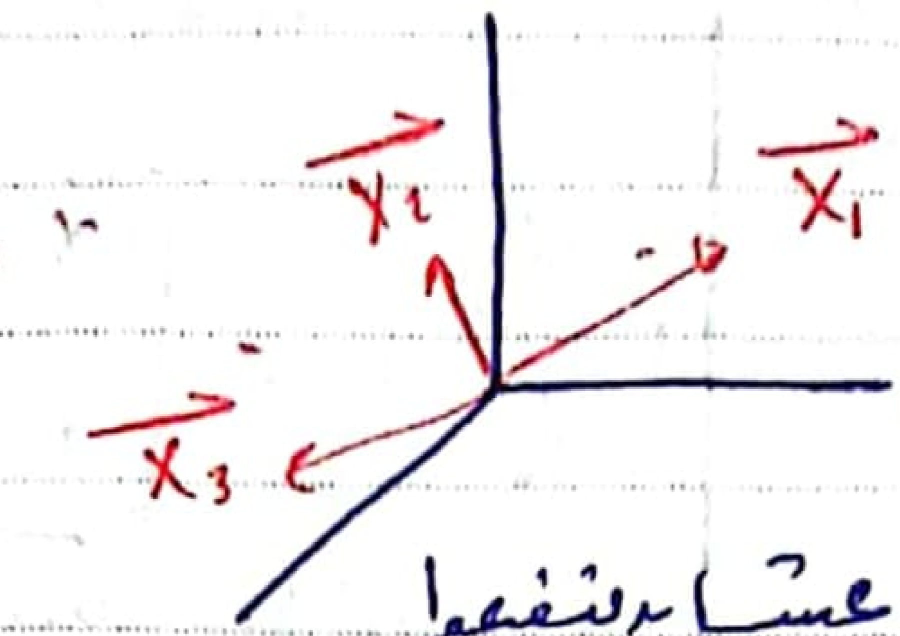
ثابت

PCA كل دا عشان ال dimensionality reduction

Gram schmit method

1 orthogonalization

$\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}$



→ non-orthogonal

independent → عشان ينفعوا يبقوا basis

→ n-vectors $\in R^n$

Come up with
$\vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{y_3} \longrightarrow$ orthogonal vectors

→ n-vectors $\in R^n$

هناخد

$\vec{y_1} = \vec{x_1}$

---

eigen value

eigen vector

$A\vec{v} = \lambda \vec{u}$

λ → (scalar) eigen value

$\vec{u}$ → eigen vector

$\vec{u}$ عملت scaling فقط

→ matrix × vector = scaler × vector

vector عشان مانقدر اخد عامل مشترك

← لازم اضرب في ال I

I → identity matrix

$A\vec{v} - \lambda I \vec{v} = 0$

$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$

eigen value ← قيمة ال scaling اللي بيحصل لل eigen vector

← نفس الاتجاه أو عكس الاتجاه في نفس الخط

Diagonalization

if: $\underset{\text{matrix}}{A} = P \underset{\text{Diagonal matrix}}{D} P^{-1}$ $= Q\Lambda$

$\therefore$ A is diagonalizable

لازم شروط معينة

eigen decomposition $= Q \Lambda Q^{-1}$

Q: matrix of eigen vectors

Λ: matrix of eigen values (diagonal matrix)

$$Q = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$A = Q\Lambda Q^{-1} \longrightarrow \Lambda = Q^{-1}AQ$

$A^n = (Q\Lambda \cancel{Q^{-1}} \cancel{Q}\Lambda \cancel{Q^{-1}} \cancel{Q}\Lambda Q^{-1} \ldots)$

$= Q\Lambda^n Q^{-1}$

نحت

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \lambda_2^n & \\ & & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

أسهل

A^K ? امتى يحتاج اضرب matrices

Markov chains

Transformation mutel times

وبالتالي طريقة الـ diagonalitation يتسهل علينا ضرب الـ matrices

Day 05

Linear Algebra

PCA

مرتبط بفكرة الـ dimensionality reduction

عايز اعبر عنه بمعلومات أقل

- eigen decomposition → rank reduction
- Singular value Decomposition

كـ عشان اقدر اتعامل مع أي مصفوفة مش شرط تكون مربعة

- Solving overdetermined linear system of equations.

Linear equations

$ax_1 + bx_2 + \dots = c$

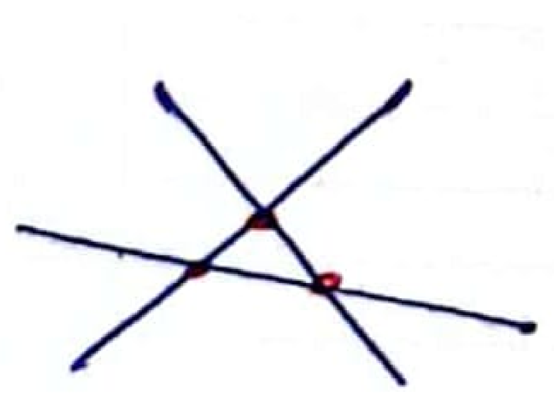
→ no solution

|| متوازيين

→ unique solution

حل وحيد

→ infinite no. of solutions



no solution!

بالطرق القديمة

$2X + Y = 5$

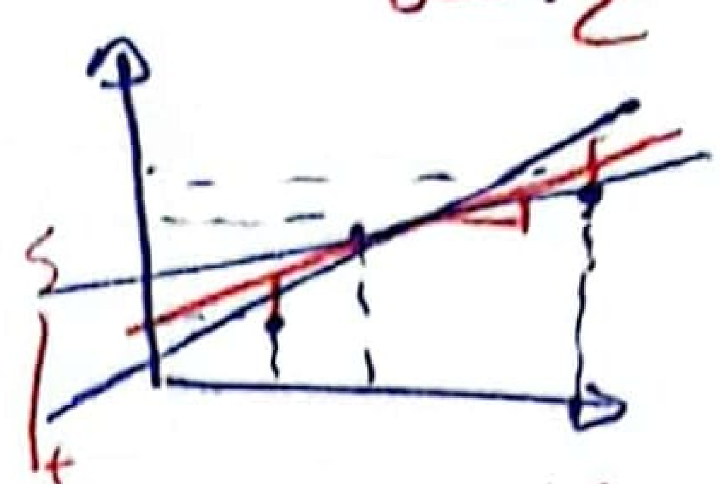
$3X + y = 7$

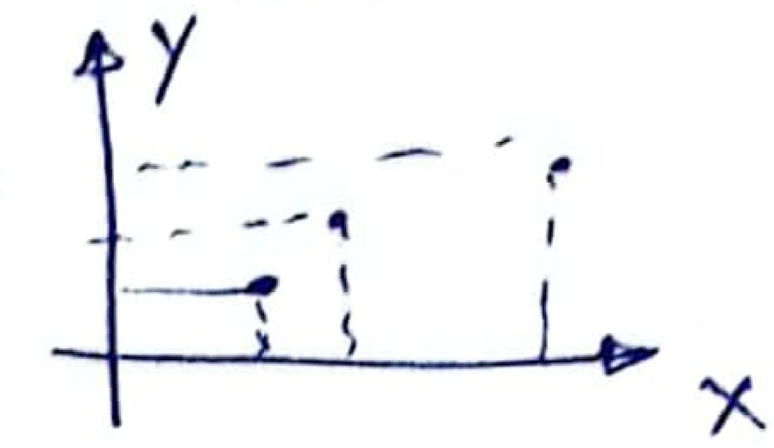
$X + 9y = 3$

كل معادلتين لو اخدتهم ليهم حل لوحدهم لكن مفيش نقطة واحدة بتحل الـ ٣ معادلات

Curve fitting

لو عايز approximate الـ ٣ معادلات دول مع بعض





اعرف مين انهي خط الأحسن للـ fit بتاعي اللي بيوصفلي العلاقة

بيشوف الـ minimum distance بين الخط واقرب نقطة عمودية عليه

$\alpha x + \beta = Y$

عايز بقى نجيب احسن نقط لـ α و β

وبالتالي هنستخدم التعويض

$\alpha x_1 + \beta = y_1$

$\alpha x_2 + \beta = y_2$

$\alpha x_3 + \beta = y_3$

كدا عندي ٣ معادلات في مجهولين (α, β)

independant → لأنهم مش واقعين على خط واحد

overdetermined system.

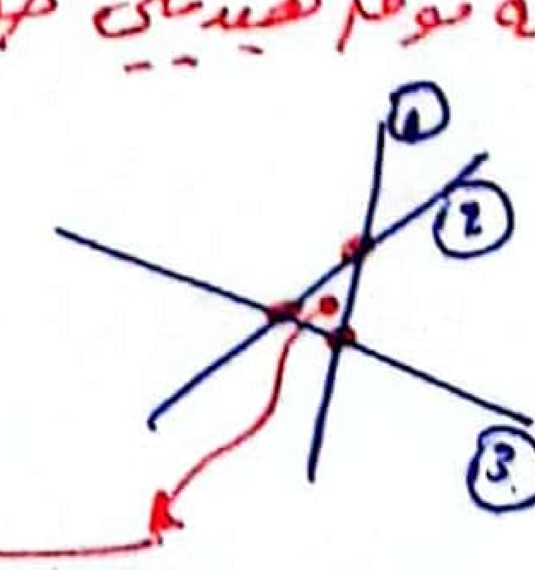
$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix}}_{X} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

generalized inverse (pseudo-inverse) of non square matrix:

$(X^T X)^{-1} X^T$ → لو خدت دا وضربته في المعادلة هيوفر هيديلي حل unique للمعادلة

$\alpha = ✓$

$\beta = ✓$



$\boxed{\alpha, \beta}$

$$\boxed{(X^TX)^{-1} X^T X}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \left[(X^TX)^{-1}\right) X^T \begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\\ Y_3\end{bmatrix} \rightarrow I$$

$2\times 3 \qquad 3\times 1$

$$= \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 & 1\\ X_2 & 2\\ X_3 & 3\end{bmatrix}$$

الناتج منها square matrix

---

[*] properties of eigenvalues

Just for square matrices

→ $A_{n\times n}$

→ for symmetric matrices, eigenvalues are real

→ if there are 2 repeated eigenvalues that have the same value "α"

eigenvalue with algebaric multiplicity of two

→ trace of matrix A : sum of diagonal entries

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & a_{22} & & \\ a_{n1} & & \ddots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$\text{Trace}(A) = \sum_i a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

eigen value of matrix

→ $\boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i}$

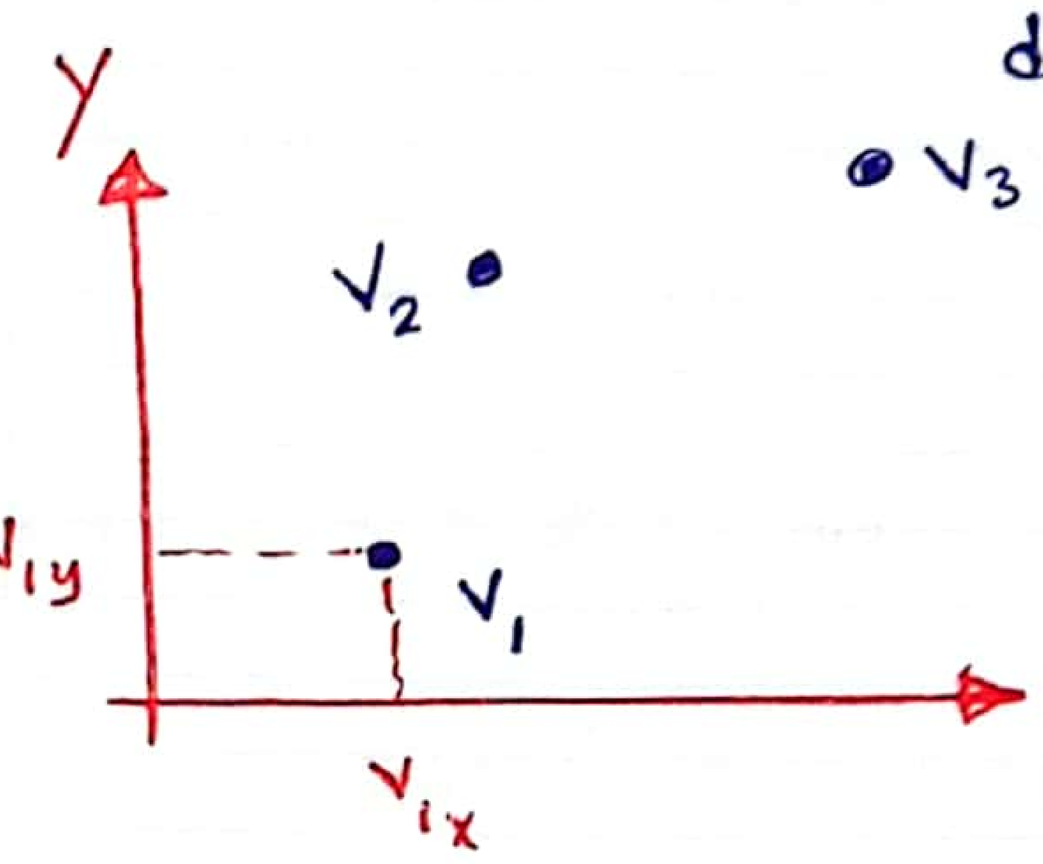
حاصل ضرب

حاصل ضرب الـ eigenvalues في بعضها

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots\end{bmatrix}$$

Principle Component Analysis (PCA)

بيدور على المكونات الأساسية للـ data



$V_1 = \begin{bmatrix} V_{1x}\\ V_{1y}\end{bmatrix}$ $V_2 = \begin{bmatrix} V_{2x}\\ V_{2y}\end{bmatrix}$ $V_3 = \begin{bmatrix} V_{3x}\\ V_{3y}\end{bmatrix}$

[1] Save data (data compression)

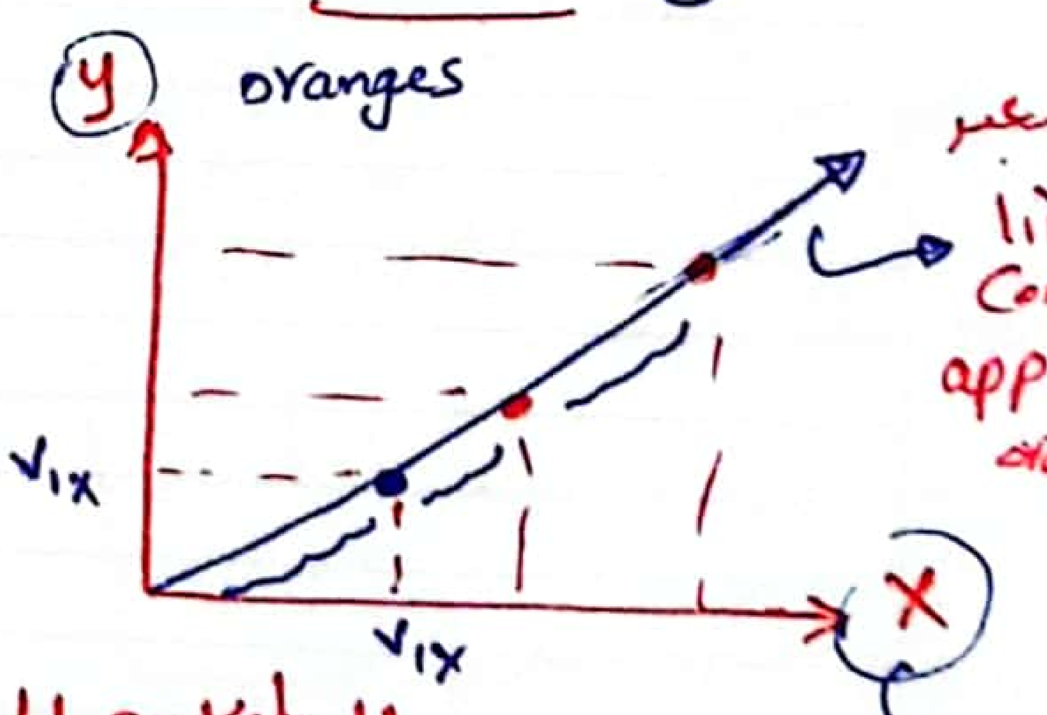
اسجل كل واحد منهم في رقمين ← اسجله في رقم واحد

[2] Visualization → easy

اقلل من بعدين مثلاً وارسمه في فضاء ثنائي الأبعاد بدلاً من رباعي الأبعاد

عشان تقلل الـ Complexity

Ex



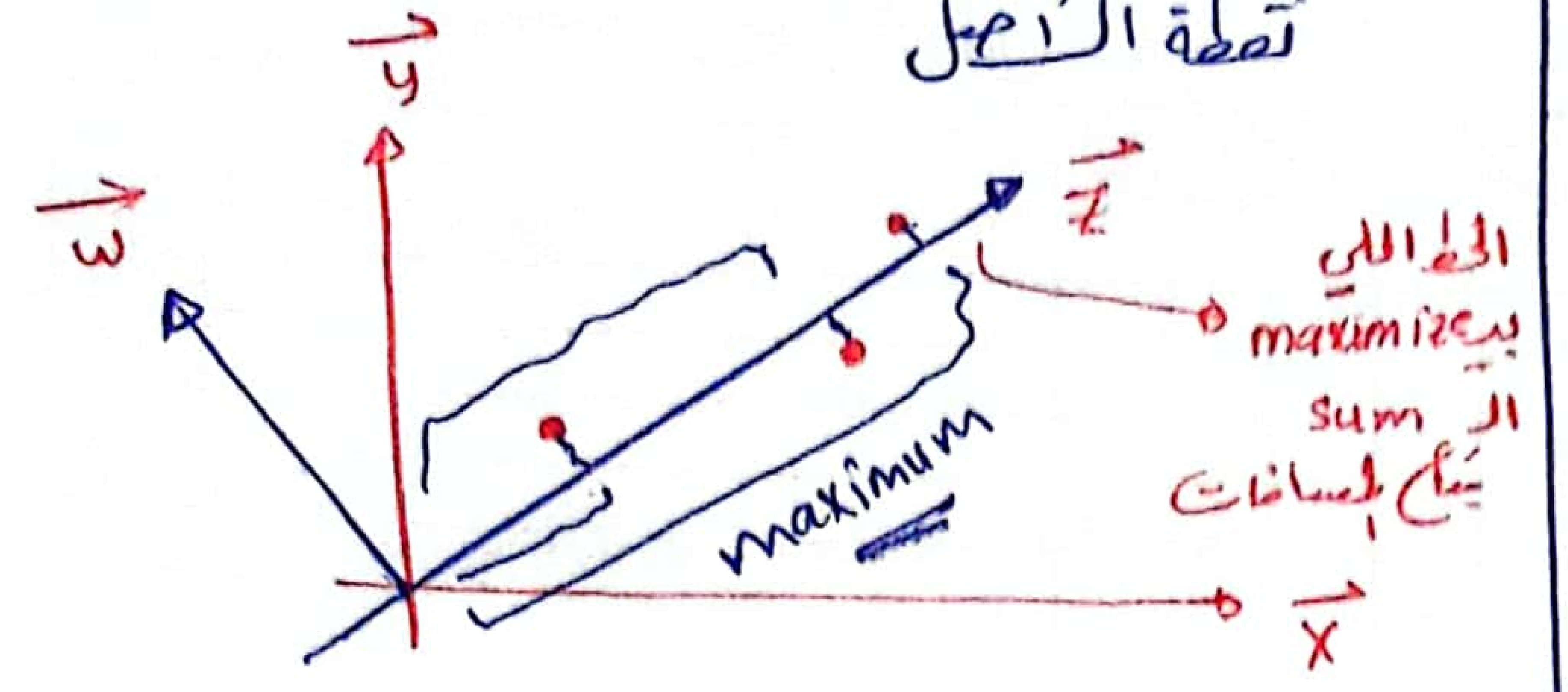
الخط دا بيعبر عن linear Combination بين الـ apples والـ oranges

الـ packets المتاحة

no. of apples = oranges

لذا هنا انا مش مضطر اكتب كل data vector بدلالة رقمين ← لان كدا اقدر اعبر عنه بدلالة رقم واحد بس

في ال PCA ← لازم الخط يتبني يعدي على نقطة الأصل



وبالتالي العمودي عليه هيعمل minimize للمسافات دي

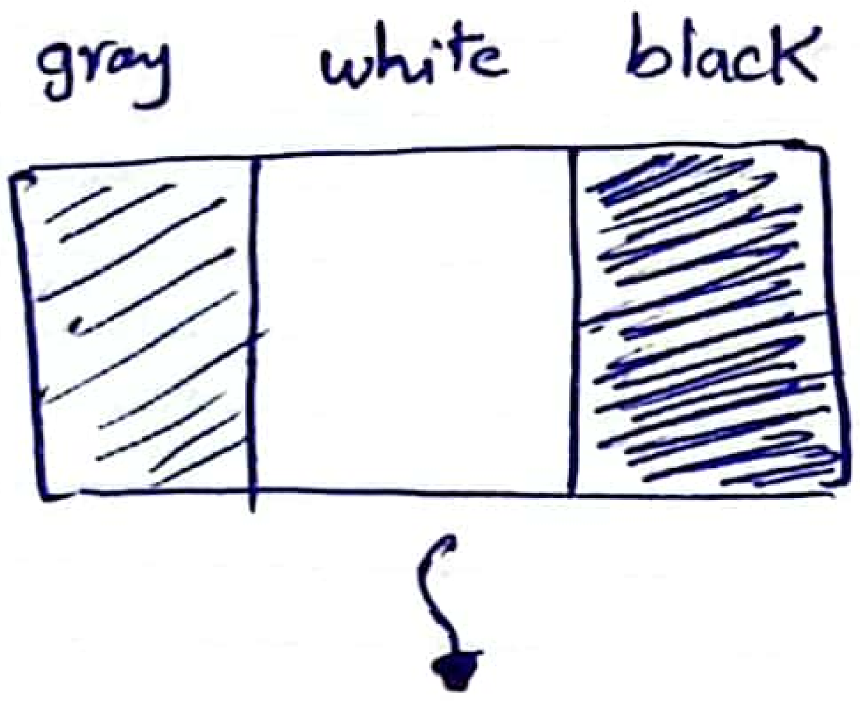
← دا مش بيشتغل واحدة واحدة
↳ بنحسب حاجة اسمها

1. Covarience matrix , correlation matrix
2. λ (c)

↳ discussed in prop.

3. eigen decomposition

لو عندي صورة



$$\begin{bmatrix} 128 & 127 & 255 & 254 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \lambda_1 \to \text{non Zero} \\ \to \lambda_2 \to \text{non Zero but small} \\ \to \lambda_6 = 0 \end{array}$$

وبالتالي لو عندنا حاجات في الصورة مش عايز بنزل
↳ مش هنأثر اوي في شكل الصورة
↳ dimensionality reduction

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

eigen value   eigen vector

← لو ال variation بين القيم موجودة
هلاقي λ_1 ↑↑ وباقي القيم من
λ_2 ← λ_6 صغيرين جداً
← لو مش موجودين هلاقيهم بأصفار
(مش بيضيفوا للصورة)
اقدر مثلاً استغنى عن λ_6 ، λ_5
↳ لدا داسمه ① dimensionality reduction using using eigen decomposition

or

② Rank Reduction لأنني كدا قللت ال rank وفي نفس الوقت هي تعتبر عملية PCA

SVD

eigendecomposition $[A_{n\times n}]$ Square matrices.

$$A_{n\times n} = Q_{n\times n} \Lambda_{n\times n} Q^T_{n\times n}$$

Singular value Decomposition (SVD)

$$B_{m\times n} = U_{m\times m} \Sigma_{m\times n} V^T_{n\times n}$$

Σ → Singular values

$V^T_{n\times n}$ → square matrix

$\Sigma_{m\times n}$ → Rectangular matrix

$U_{m\times m}$ → square matrix

$$\Sigma_{m\times n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m \end{bmatrix}$$

$$B = U \Sigma V^T = \sigma_1 [\ ] + \sigma_2 [\ ] + \cdots \cancel{\sigma_n [\ ]}$$

لو صغيرة جدا اقدر استغنى عادي

[redacted]

وبالتالي بتفضل تجرب عندك
على صورة مثلاً وتشوف تقدر تستغنى عن كام
singular value وتشوف كم التغيير اللى هيحصل

مهم → Singular values of matrix $B_{m\times n}$

$=$ eigenvalues of $\underline{B^T B}$ → square matrix