probability

Day 01

→ random (non deterministic)

لا اقدر احسبه بمعادلة
وبالتالي حاليًا انا معرفش النتائج بتاع التجربة

outcomes → النواتج المحتملة

* outcome → result of single trial

* Sample space "S" → set of all possible outcomes

* Event → subset of S

Classical probability

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(S)}$$

احتمال حدوث

احتمال الكل

$S = \{H, T\}$

$$\boxed{P(H) = \frac{1}{2}}$$

probability

- Experimental probability
- Theoretical probability

Experimental probability:

$$p(\text{event}) = \frac{\text{no. of times event occurs}}{\text{total numbers}}$$

$p(\text{head}) = \frac{7}{10}$

$p(\text{tail}) = \frac{3}{10}$

Theoretical probability:

$$p(\text{event}) = \frac{\text{no. of favorable outcomes}}{\text{total number}}$$

$p(\text{head}) = \frac{1}{2}$

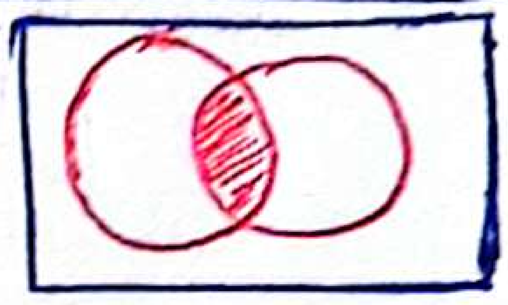
$p(\text{tail}) = \frac{1}{2}$

امتى الاحتماليين يساووا بعض؟

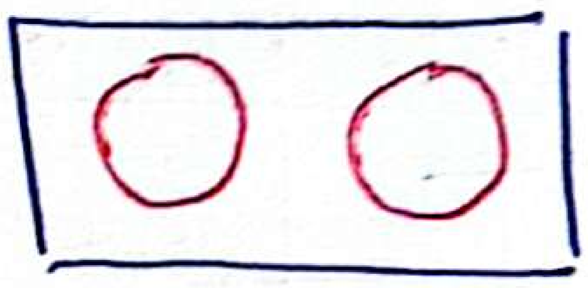
← لما اعمالهم إلى ما لانهاية

$$\boxed{f(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N(A)}{N}}$$

$A \cap B$ →

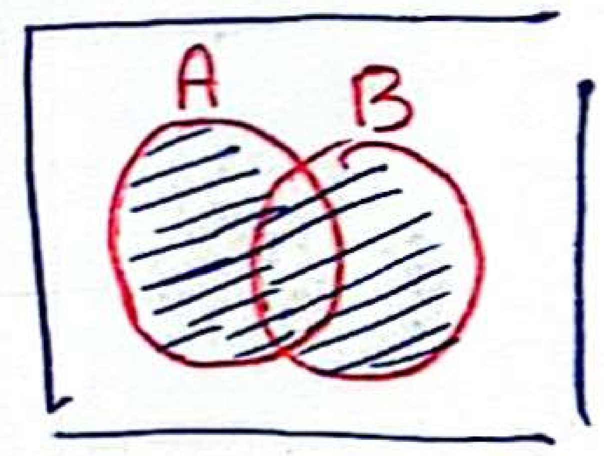


Disjoint Events →



$A \cap B = \emptyset$ mutually exclusive

$A \cup B = B \cup A$ →



$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

not mutully exclusive

Fundamentals of probability

- probability is a number that is assigned to each number of collection of events from a random experiment

① $P(S) = 1$ ← sample space

② $0 \leq P(E) \leq 1$ ← event

② For any two events E_1 and E_2 with $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$$\boxed{P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)}$$

③ probability of complementary event

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

Ex Tossing three coins

$\equiv$ Tossing 1 coin three times

Counting

C_1	C_2	C_3	
H	H	H	1/8
H	H	T	1/8
H	T	H	1/8
H	T	T	1/8
T	H	H	1/8
T	H	T	1/8
T	T	H	1/8
T	T	T	1/8

$p(H_1 H_2 H_3) = p(H_1 \text{ and } H_2 \text{ and } H_3)$

$= p(H_1 \cap H_2 \cap H_3) =$

$p(H_1) \cdot p(H_2) \cdot p(H_3)$

في حالة الـ independent بس

$= p(H)^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

$p(\text{two heads and 1 tail}) \equiv$

$p(H_1 H_2 T_3 \underset{=}{\overset{\cup}{or}} H_1 T_2 H_3 \underset{=}{\overset{\cup}{or}} T_1 H_2 H_3)$

وبما انهم disjoint ← مفيش تقاطع بينهم

$= p(H_1 H_2 T_3) + p(H_1 T_2 H_3) + p(T_1 H_2 H_3)$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$= 3 \times p(H)^2 p(T)$

$= 3 \times (\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}$

Combination

$^nC_K = \binom{n}{K}$

$= \frac{n!}{K!(n-K)!}$

if I have 3 coins, How many ways to choose from 3 coin outcomes. to get 2 heads

طبيعي أنا برمي ٣ عملات وعايز أجيب 2 H
فبالتالي التالتة هتكون T

$p = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

هما ٨ حالات ← عندي منهم
٣ حالات بيطلع فيهم مرتين H

Ex → 10 coins. find prob. of getting 7 heads.

C_1	C_2	---	C_{10}
H	H	- - -	
-	---	---	
-	---		

$P = \binom{10}{7} \cdot P(H)^7 \cdot p(T)^3$

$\therefore p(7\ H \text{ in } 10 \text{ tosses}) = \binom{10}{7} * (0.5)^{10}$

Binomial Distribution

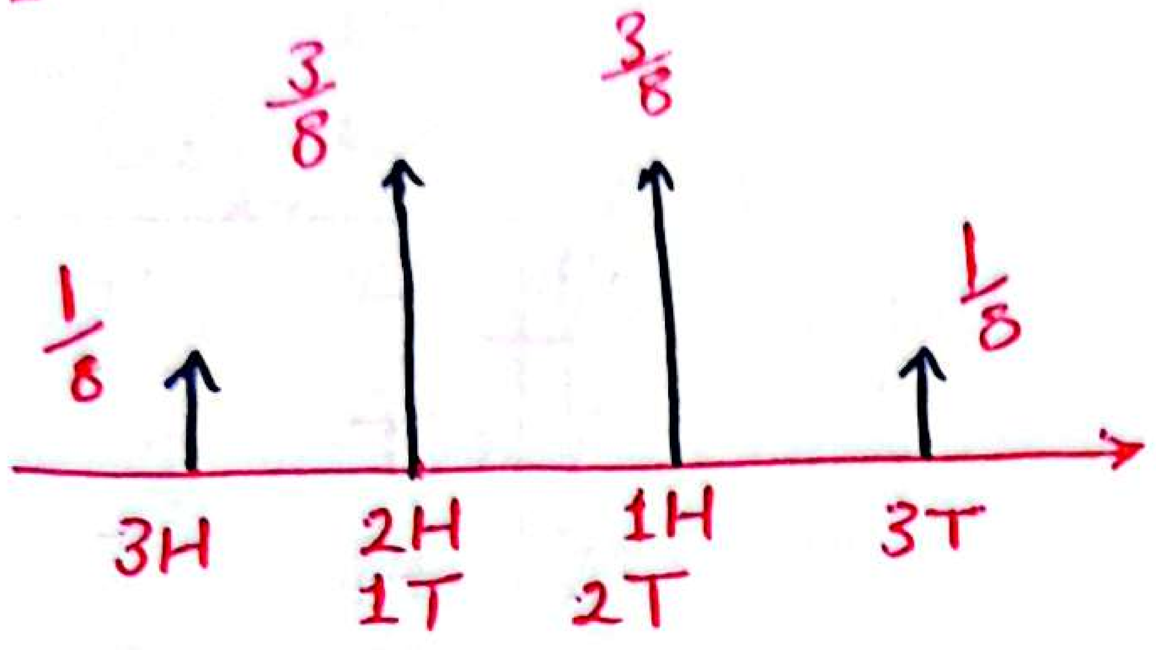
$p(K \text{ success in } n \text{ trials})$

$= \binom{n}{K} \, p(\text{success})^K \, p(\text{not success})^{n-K}$

لشرط الـ independence

3 Coins

الاحتمالات مش شرط تكون متساوية



Ex

2 dice $\longrightarrow x: 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$\quad\longrightarrow y: 1, 2, 3, 4, 5, 6$

y \ x	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	-	-	-- (6,1)
2	(2,1)	(2,2)				
3						
4						
5						
6	(6,1)	(2,6)				

$\boxed{Z = x + y}$

$P(Z=1) = ??$

$\hookrightarrow \phi$

$P(Z=2) = 1/36$

أعلى مجموع أقدر أوصله ← 12

مجموع الأرقام

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

probability

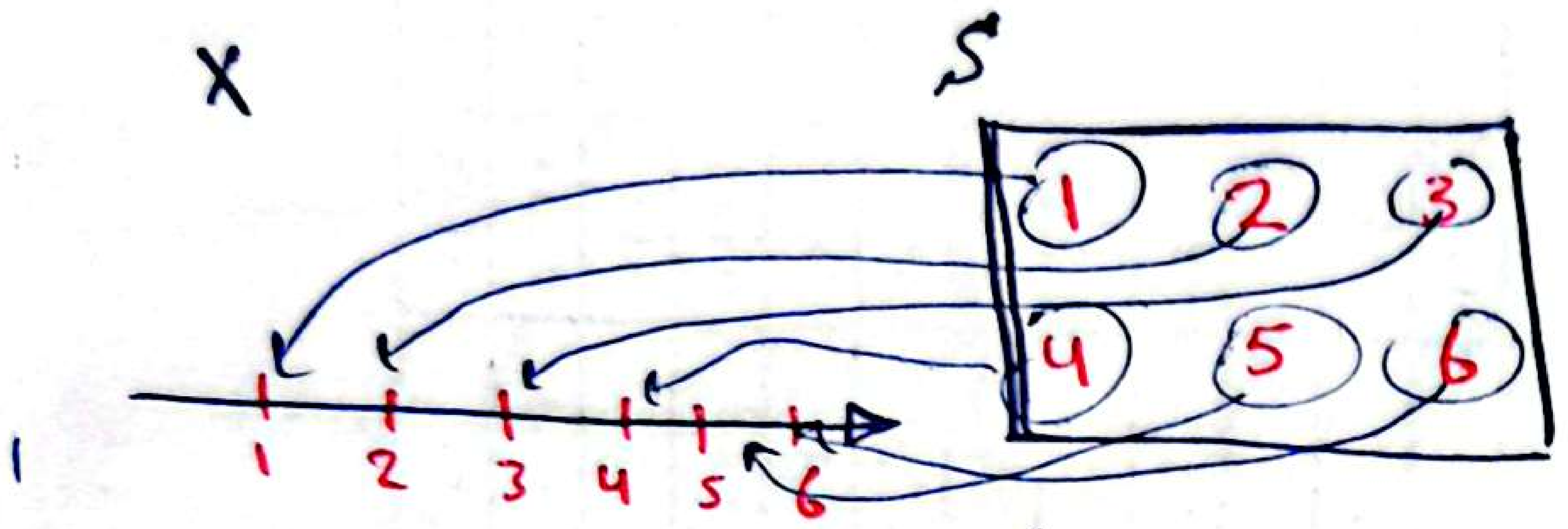
Day 02

متغير عشوائي

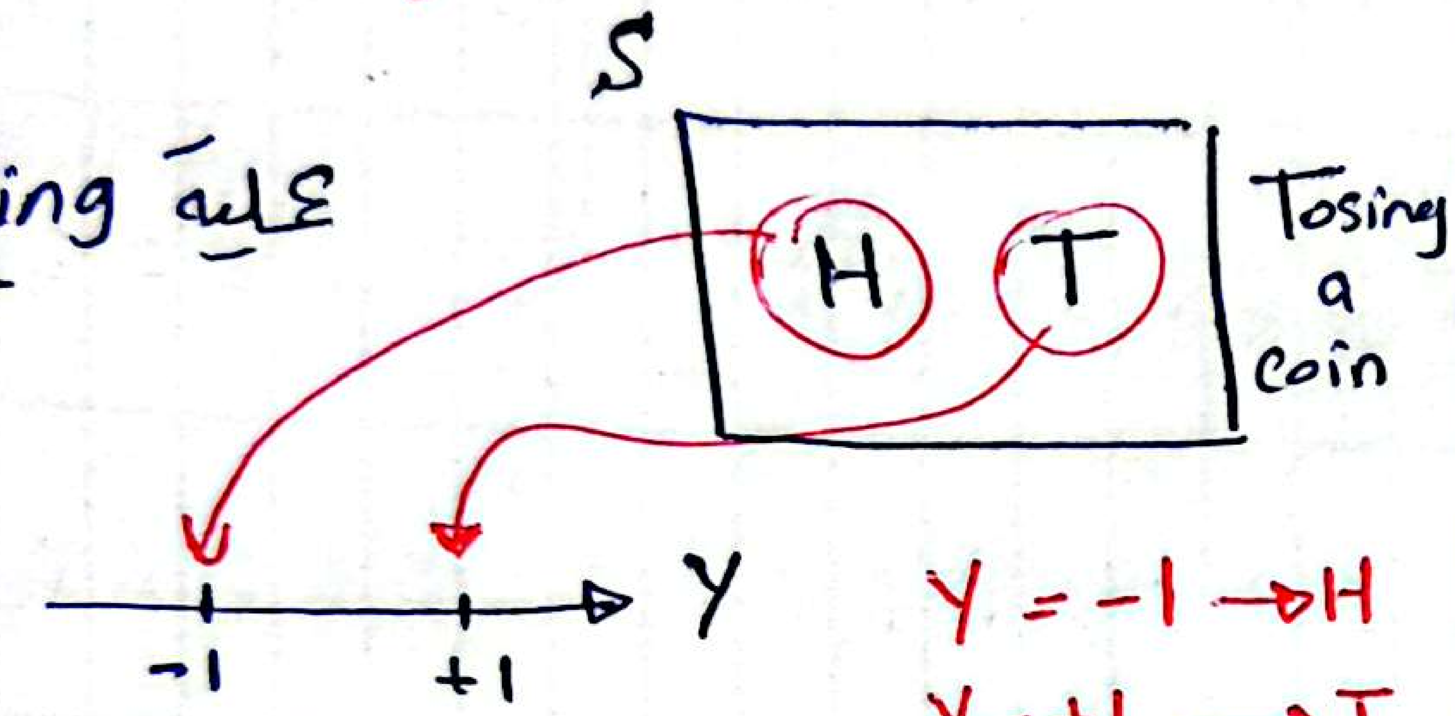
Random Variables

بياخذ إلى قيمة أو أكتر

بياخذها باحتمال معين



maping عملية



$Y = -1 \rightarrow H$

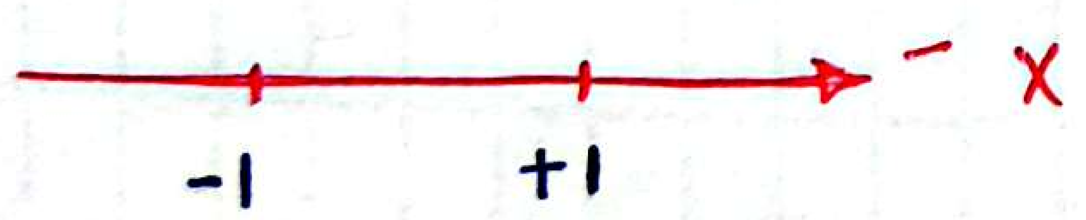
$Y = +1 \rightarrow T$

القيمة في حد ذاتها لا تعني شيء ←

وهو دا المقصود من ال Random variables

الكتابة لطريقة ال Random Variables

$$P(H) = P(T) = 0.5$$



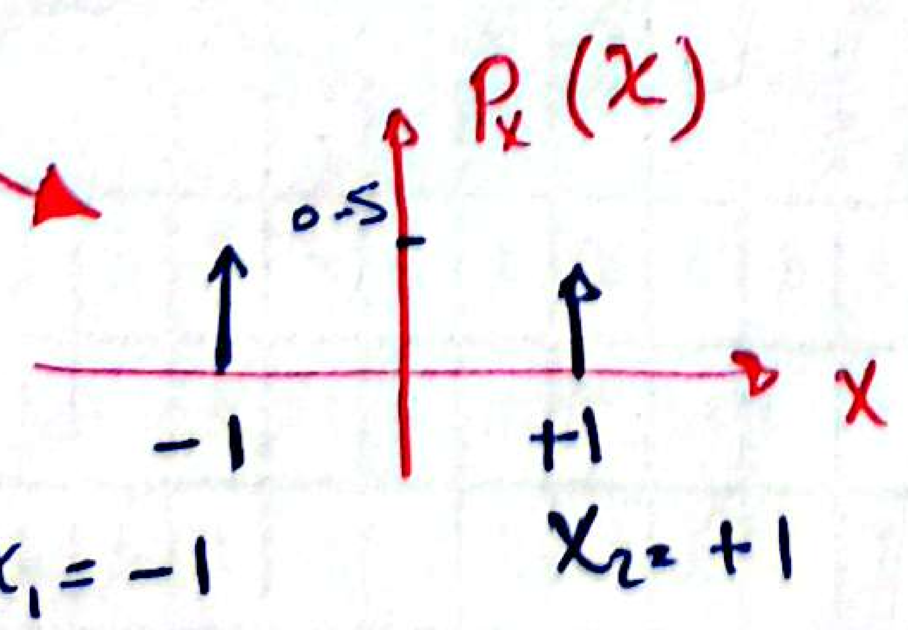
$x_1 = -1 \qquad x_2 = +1$

$$P(H) = P(X = x_1) = P(X = 1)$$

$$= P_X(x_1) = P_X(-1) = 0.5$$

PMF Function : prob. Mass fun.

الاسم الأدق



$x_1 = -1 \qquad x_2 = +1$

$$\boxed{PMF : \sum_i P_X(x_i) = 1}$$

if A,B are independent

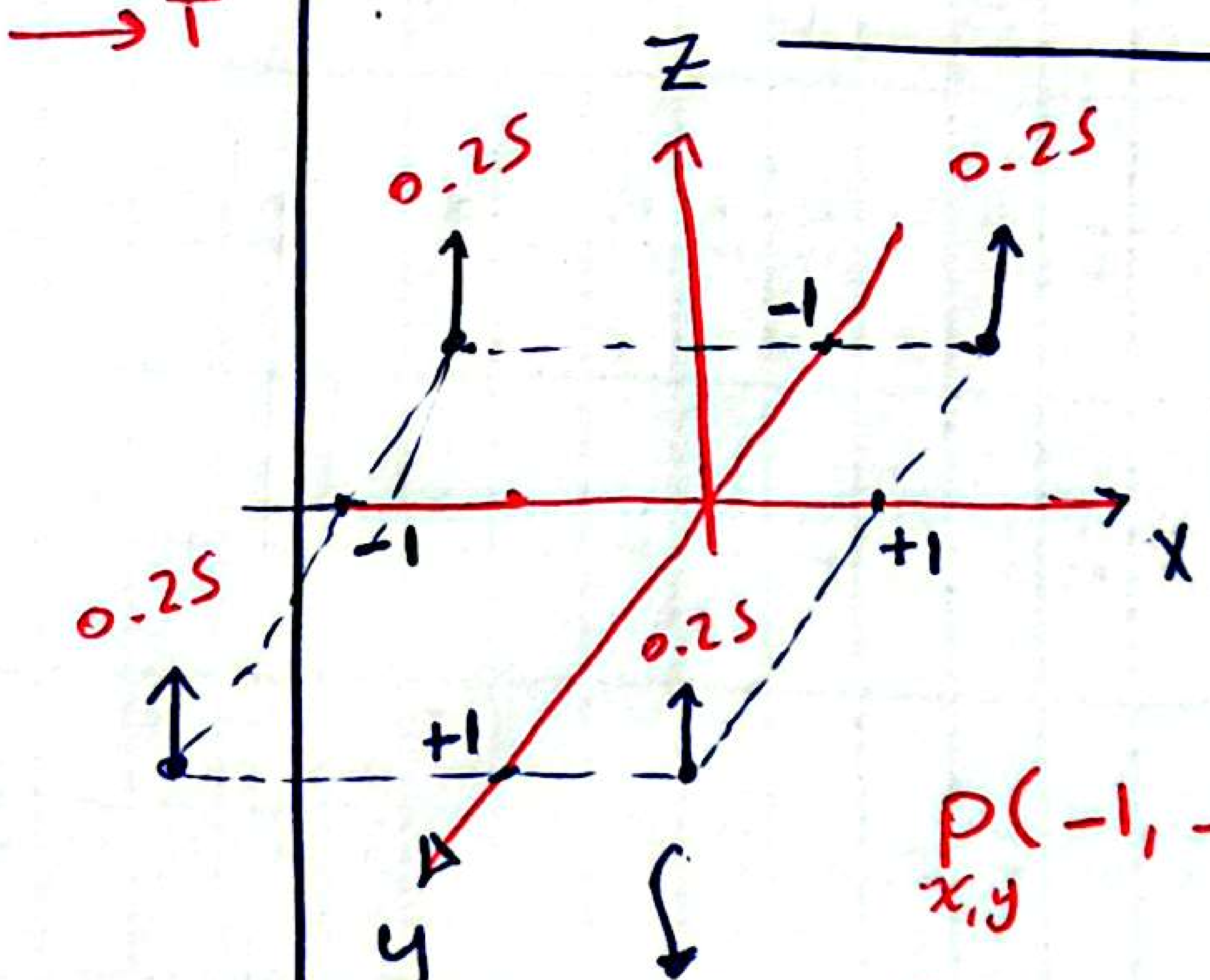
$* \; P(A/B) = P(A)$

مش فارق معايا احتمال P(B) حصل ولا لأ

$* \; P(A\,B) = P(A).P(B)$

Random Variable تطبق بدلالة ال

$$P_{X/Y}(x/y) = P_X(x)$$



Joint PMF

S

HH	HT
TH	TT

بنعبر بالشكل 3D دا في لو عندي 2 Random Variables

$P_{x,y}(-1,-1) = 0.25$

$P_{x,y}(-1,+1) = 0.25$

$P_{x,y}(+1,-1) = 0.25$

$P_{x,y}(+1,+1) = 0.25$

مجموعهم بـ ①

← وبالتالي لما افكر احسب كل احتمال لوحده

$$\boxed{P_x(x_i) = \sum_j P_{x,y}(x_i, y_j)} \rightarrow ①$$

$$P(+1) = P_{x,y}(+1,+1) + P_{x,y}(+1,-1)$$

اني تكون Head فقط (العملة الأولى)

$$\boxed{P_y(y_j) = \sum_i P_{x,y}(x_i, y_j)} \rightarrow ②$$

①, ② ⟶ marginal PMF's

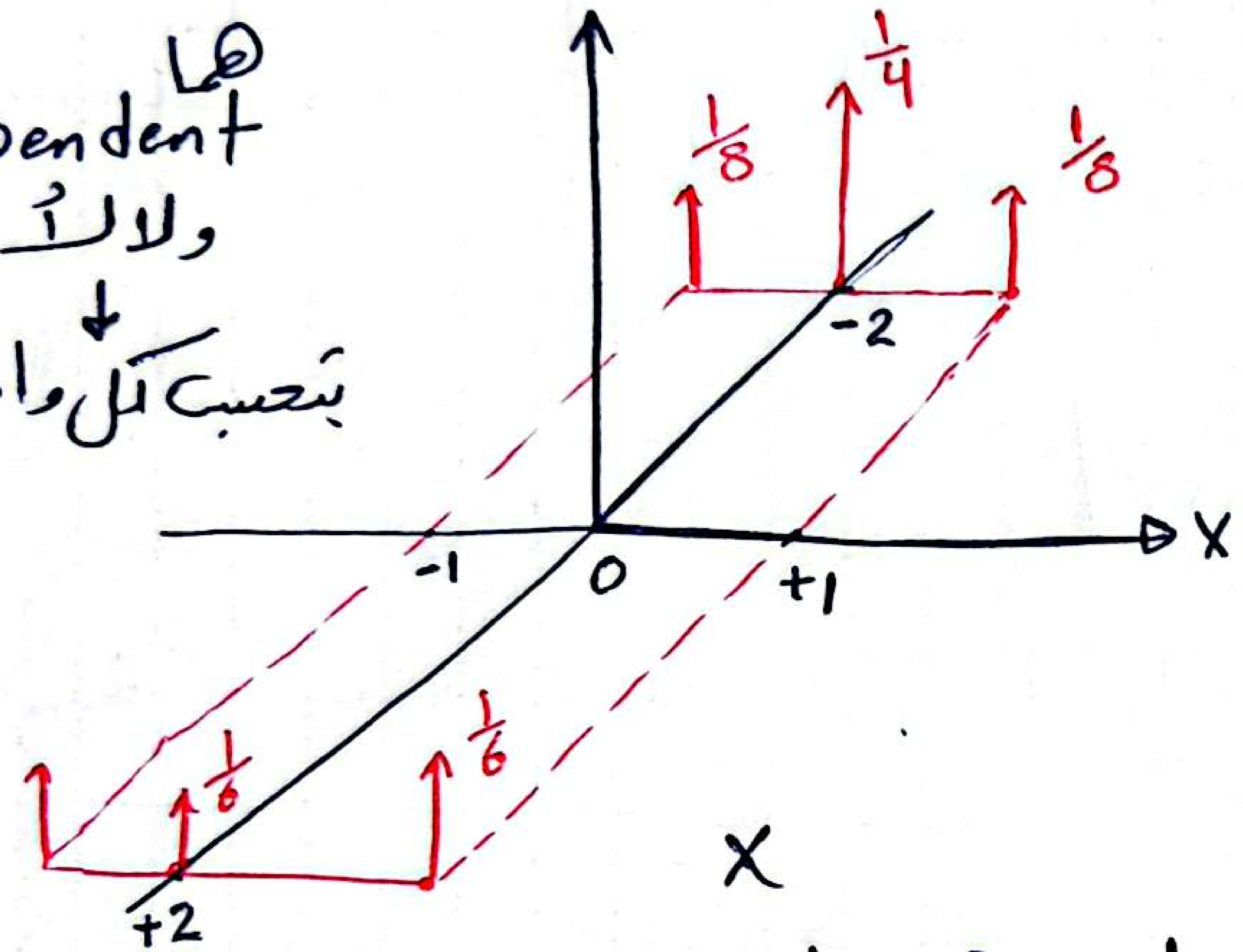
assume Joint PMF

$P_{x,y}(x_i, y_i)$

is given by:

$y \backslash x$	-1	0	1
-2	1/8	1/4	1/8
+2	1/6	1/6	1/6

لو عايز تشوف ال 2 Random Variables دول هما independent ولا لأ ؟
↓
بتحسب كل واحدة لوحدها



Find marginal PMFs

$P_x(x_i) =$

	X		
	-1	0	1
	7/24	10/24	7/24

$\frac{1}{8}+\frac{1}{6}$

$P_y(y_i) =$

-2	0.5
+2	0.5

$\sum$ 1

$x, y \longrightarrow$ independent

if $P_{x,y}(x_i, y_i) = P_x(x_i)\, P_y(y_i)$

دلوقت لو عايز احل check

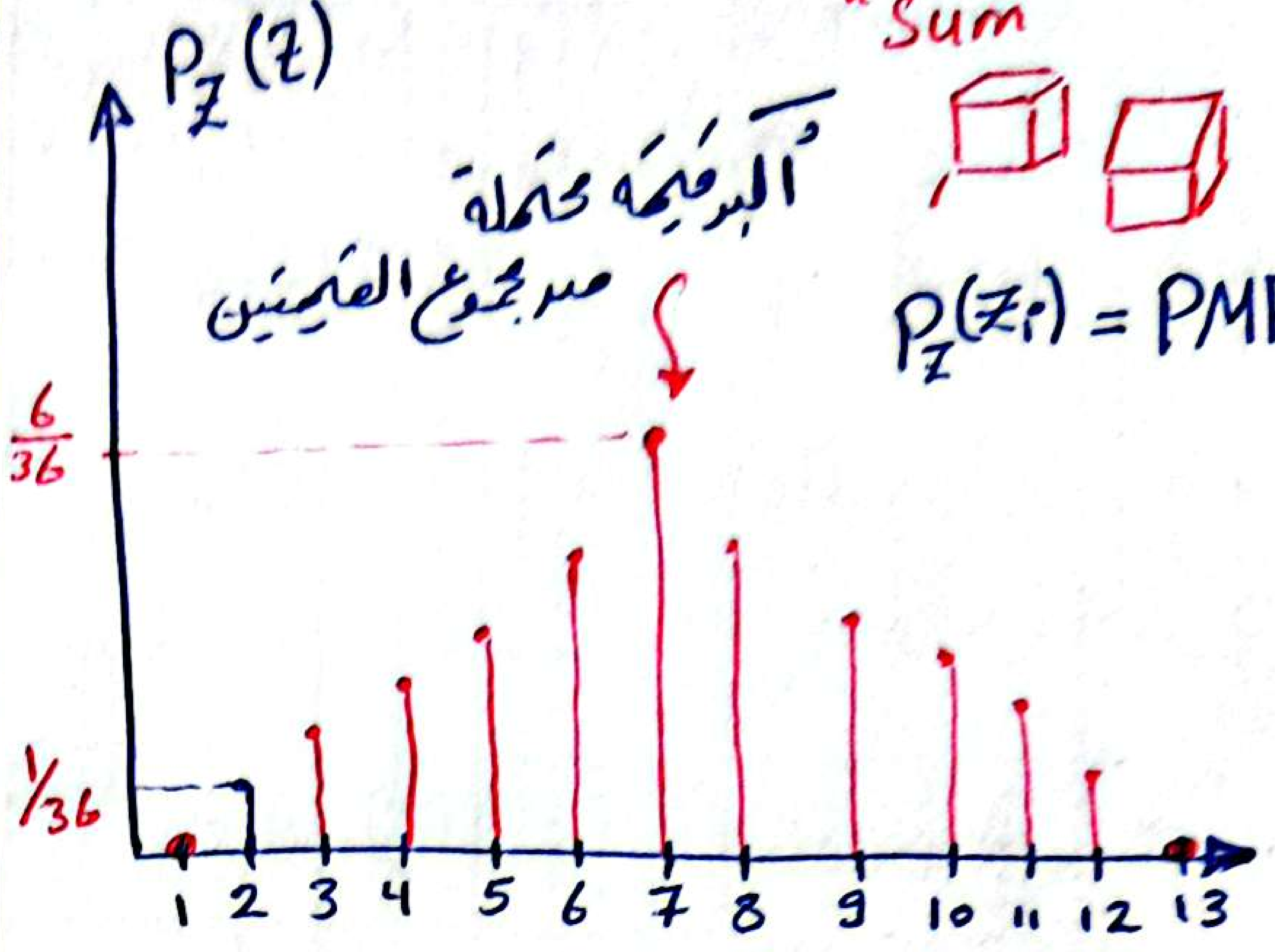
Ex $P_{x,y}(-1,-2) = \frac{1}{8} \overset{?}{=} P_x(-1) \cdot P_y(-2)$

$\frac{7}{24} \qquad \frac{1}{2}$

$\frac{1}{8} \neq \frac{7}{48}$

$\therefore x, y$ are dependent #

Ex rolling 2-dice, observing "sum"



$P_Z(Z_i) = $ PMF

PMF $\sum_i P_x(x_i) = 1$ (Must)

لو جمعت كل القيم المحتملة لل i

properties of Joint probability

1. $\sum_i \sum_j P_{x,y}(x_i, y_j) = 1$

لازم دايما مجموع كل الاحتمالات = 1

2. $\sum_i P_{x,y}(x_i, y_j) = P_y(y_j)$

كده هيديلي ال margin بتاع التاني

Margin probabilities

$\sum_j P_{x,y}(x_i, y_j) = P_x(x_i)$

كده هيديلي ال margin بتاع الأول

Conditional probability

$P_{x/y}(x_i / y_j)$ → prob. of (x) بشرط ثبوت (y)

Statistical Moments

العــزوم

mean, average, Expected value of any Random Variable

1st moment

$x_i = 1,2,2,2,3,4,4,5$

$$\mu = E(x) = \bar{X} = \frac{1+2+2+2+3+4+4+5}{8}$$

$$= \frac{1*1 + 2*3 + 3*1 + 4*2 + 5}{8}$$

$$= 1*\frac{1}{8} + 2*\frac{3}{8} + 3*\frac{1}{8} + 4*\frac{2}{8} + 5*\frac{1}{8}$$

⇒ ومن هنا ناخد بالنا من التعريف الأصلي للاحتمالات

← دايما الأصل اننا هنتكلم عن الاحتمالات كنسب (نسبة بين تكرار ظهور حاجة إلى عدد مرات اجراء التجربة)

$$\Rightarrow \boxed{\bar{X} = \sum_i x_i \cdot P_X(x_i)}$$ 1st moment -mean -expect -avg

$\sum_i$ ← مجموع كل القيم الممكنة

x_i ← القيمة

$P_X(x_i)$ ← احتمال ظهور هذه القيمة

$$\boxed{\overline{x^2} = \sum_i x_i^2 \, P_X(x_i)}$$ 2nd moment

$$\boxed{\overline{x^3} = \sum_i x_i^3 \, P_X(x_i)}$$ 3rd moment

So $\overline{x^n} = \sum_i x_i^n P_X(x_i)$ → nth moment

2nd central moment : Varience

الهدف منه اقيس الـ spread بتاع الـ data حول القيمة المتوسطة بتاعتي عشان كدا اسمه central

5 6 7 → $\bar{X} = \frac{5+6+7}{3} = 6$

$$\sigma_x^2 = \overline{(x_i - \bar{X})^2}$$

x_i ← point ، $\bar{X}$ ← القيمة المتوسطة

وبربع الـ data عشان اتخلص من القيم السالبة حول القيم المتوسطة

3 6 9 → $Y : 3, 6, 9$

$\bar{Y} : \frac{3+6+9}{3} = 6$

دلوقت عايزين نشوف الـ Varience في الحالتين

بمعنى ← عايز اشوف توزيع القيم بتاعتي حول القيمة المتوسطة

$$\sigma_x^2 = \overline{(X_i - \bar{X})^2}$$

X	$X-\bar{X}$	$(X-\bar{X})^2$
5	$5-6=-1$	+1
6	$6-6=0$	0
7	$7-6=1$	+1
$\bar{X}=6$	$\overline{(X-\bar{X})}=0$	$\frac{1+0+1}{3} = \frac{2}{3}$

-1 0 +1

لو انا معملتش حاجة لأبد المتوسط بـ Zero

Varience $\boxed{\sigma_x^2 = \frac{2}{3}}$ ← هاخد التربيع

Standard deviation $\boxed{\sigma_x = \sqrt{\frac{2}{3}}}$

$\sigma_y = \sqrt{6}$, $\sigma_y^2 = 6$ ← للحالة التانية

وبالتالي التوزيع أبعد عن القيمة المتوسطة

→ So the general equation for 2nd central moment "Varience"

$$\boxed{\sigma_x^2 = \sum_i (x_i - \bar{X})^2 \, P_X(x_i)}$$

احتمال ان الـ random variable ياخد القيمة المتوسطة

Correlation

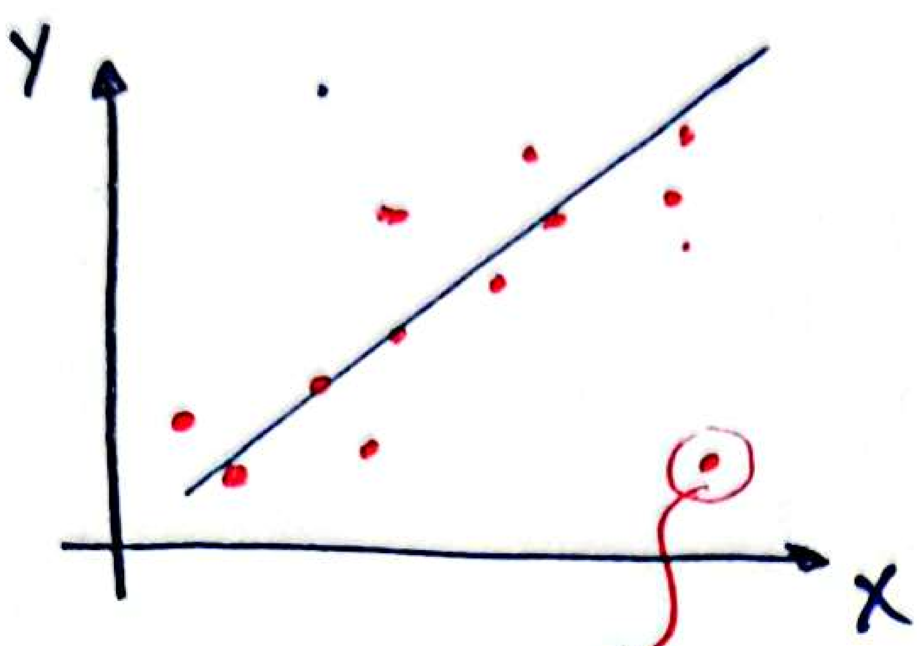
Correlation → Covariance : σ_{xy}

→ correlation Coefficient : ρ_{xy}

الهدف منه ← دراسة وجود علاقة خطية

"Linear dependance or not"

بصفة عامة في علاقة بين x , y

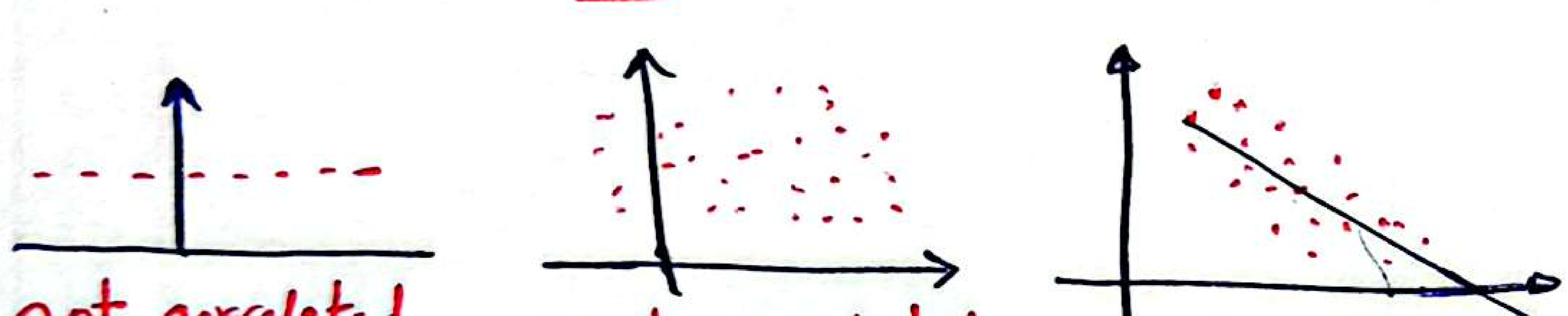


+ve Correlated (dependent)

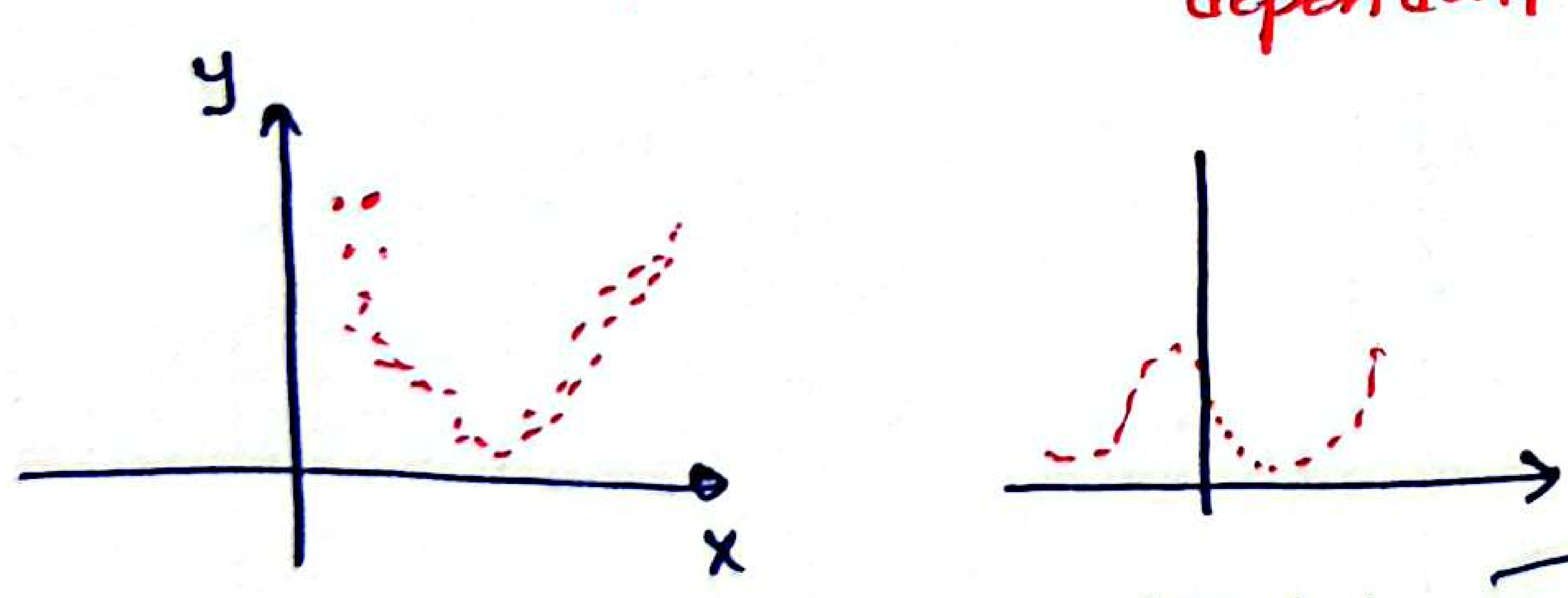
outlier

- نتيجة خطأ في القياس مثلاً (error)
- نتيجة حقيقية ← لازم ندرسهم

بناءاً عليها هنحدد الـ objective function في الـ M.L



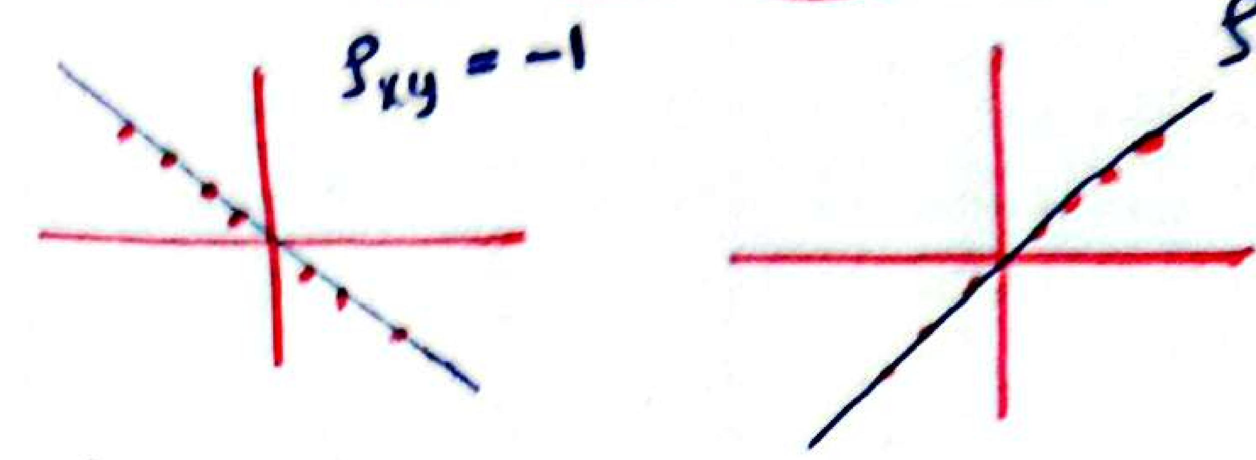
not correlated independent — not correlated independant — -ve correlated dependent



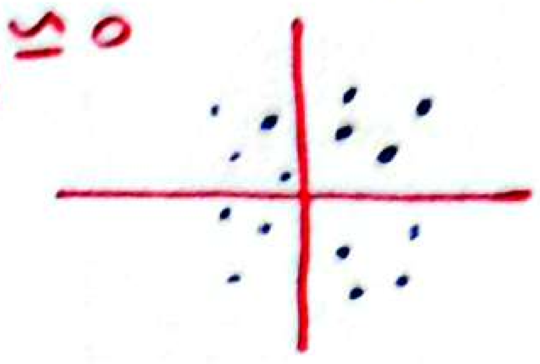
not $\boxed{\text{Correlated}}$ but dependent → لما نقول لوحدها قصده ↓ Linear correlated

(σ_{xy}) Covariance $= \overline{(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}$

$$-1 < \rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} < +1$$



على حسب توزيع الـ data $\rho_{xy} \simeq 0$



Covariance Matrix

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

Correlation Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{xy} & 1 & \rho_{yz} \\ \rho_{xz} & \rho_{yz} & 1 \end{bmatrix}$$

- أحيانا يتم استخدام الاسمين مكان بعض
- لو حسبت للـ Covariance Matrix الـ eigenvalues, eigenvectors
  - هنلاقي ان الـ eigenvectors يُعتبر هي الـ PCA مباشرة

probability

Day 03

Covariance → $\overline{(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})} = \frac{1}{N}\sum_i (x_i-x)(y_i-y)$

"N-1" for sample cov.

$= \overline{x_i y_i} - \overline{x_i \bar{y}} - \overline{\bar{x} y_i} + \overline{\bar{x}\bar{y}}$

$= \overline{xy} - \overline{x\bar{y}} - \overline{\bar{x}y} + \overline{\bar{x}\bar{y}}$

$= \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} - \cancel{\bar{x}}\bar{y} + \cancel{\bar{x}}\bar{y}$

$\boxed{\sigma_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}$ #

→ if x, y are uncorrelated

$\sigma_{xy} = 0 = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$

$\therefore \overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$

مش مرتبطين بعلاقة خطية.

→ compare this to independence

x, y are independent

مش مرتبطين بأي نوع من العلاقات | $P_{x,y}(x,y) = P_x(x) \cdot P_y(y)$

وبالتالي شرط الـ independence أقوى من الـ uncorrelated

لأن في الـ correlated ← ببص بس عالقيم المتوسطة للتوزيع

Probability Distribution

- Discrete RV
- Continous RV

شكل الاحتمالات متوزعة ازاي ؟ ←

اختلافات بين الاتنين ←

Discrete RV

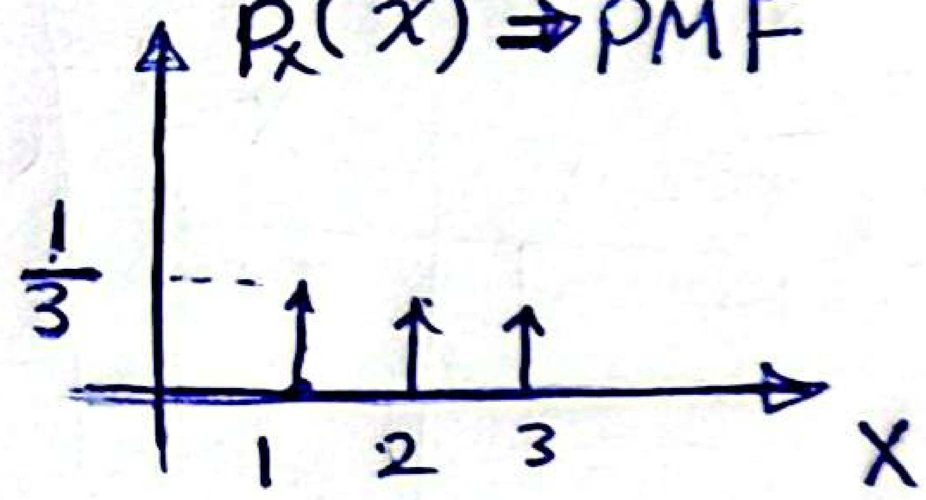
- uniform — متساويين
- Binomial $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ — بتزيد وتقل
- Bernoulli → success / fail
- poisson
- Geometric — مرتبطين ببعض
- hypergeometric
- ---

Continous RV

- uniform
- Normall "Gaussian" dist.
- exponential dist.
- student-t dist. — توزيع للـ sample تحت ظروف معينة
- ---

Discrete uniform dist.

$P_x(x) \Rightarrow$ PMF



Cummulative Distribution Function (CDF)

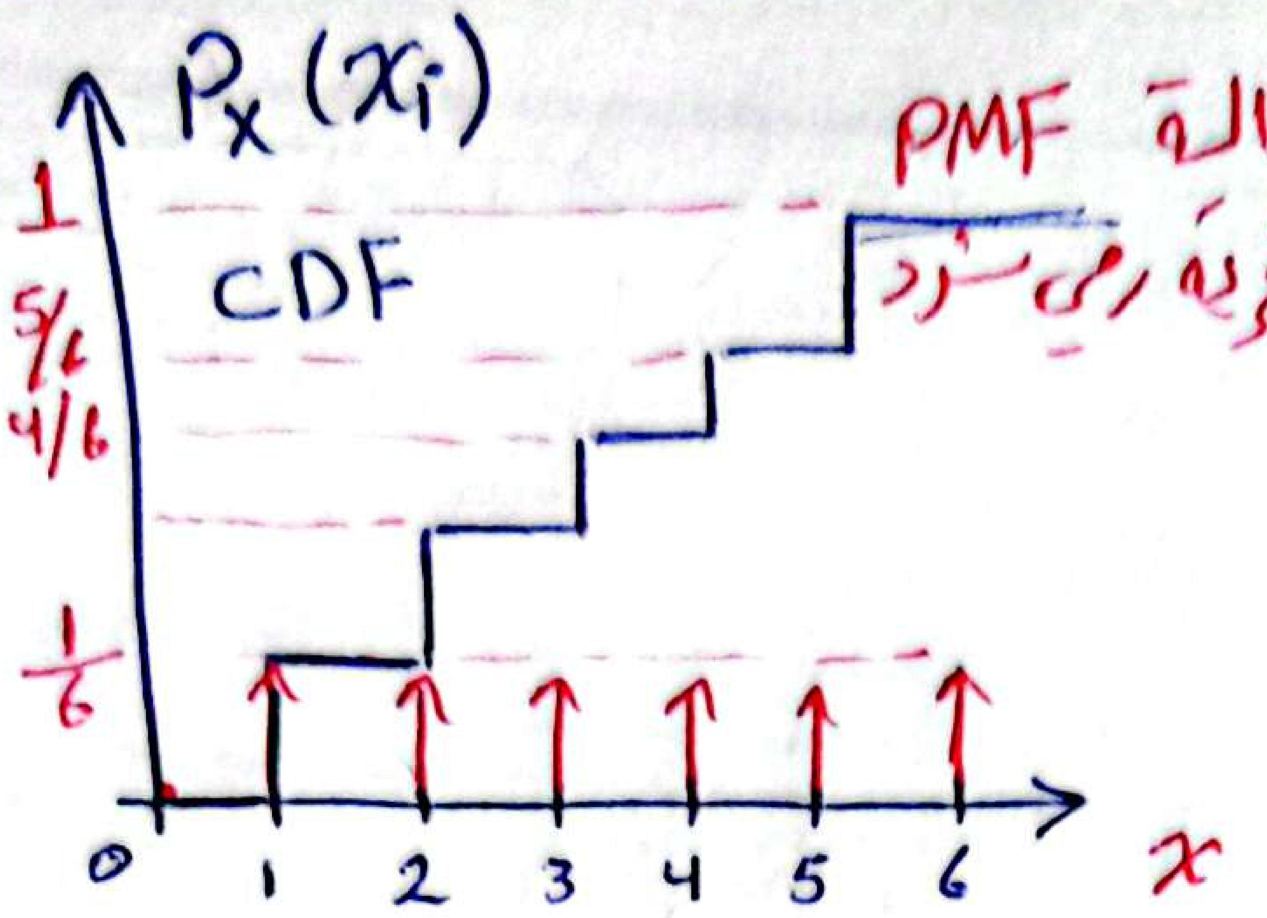
الدالة التجميعية

$F_x(x_i) = P(x \le x_i)$

القيمة

احتمال الـ Random variable (x) ياخد قيمة أقل من أو تساوي القيمة اللي أنا محددها

Ex



دالة PMF لتجربة رمي نرد

$P(x \le 1) = ?$

$P(x \le 1.1)$

$P(x \le 2)$

$P(x < 3)$

هي دالة تراكمية (بتجمع احتمالات فوق بعض)

① تزيد وتثبت لحد

CDF properties

for general (Disc. / cont.) CDF

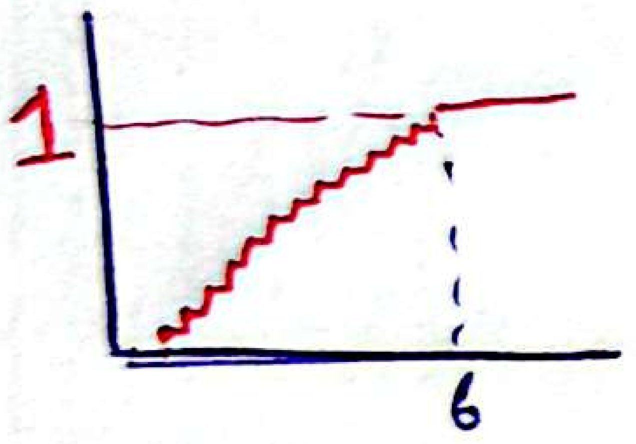
[1] $F(\infty) = 1$

$F(-\infty) = 0$

[2] non decreasing :

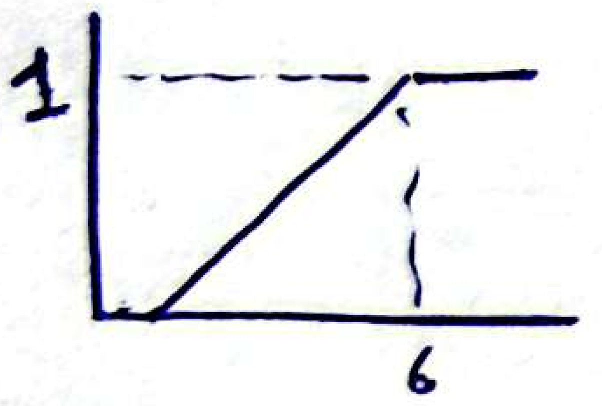
$F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$ if $x_2 > x_1$

[3] $P(x_1 < X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$



* لو الرقم زاد

steps → size بتاعها يقل



* لو الرقم وصل انه يكون ∞

هتبقى خط مستقيم

عدد حقيقي بين $1 \to 6$

عدد لانهائي

$\boxed{\frac{1}{\infty} = 0}$

Continous R.V

$P_X(x) = 0$

not necessary means that x is impossible

prob. Density function

الدالة الاحتمالية

$$f_X(x) = P_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

$$\rightarrow F_X(x) = \int f_X(x)\, dx$$

وبما ان هنا انا محتاج function مش فئية

يبقى حدود التكامل مش هتكون معروفة لقيم

متغير

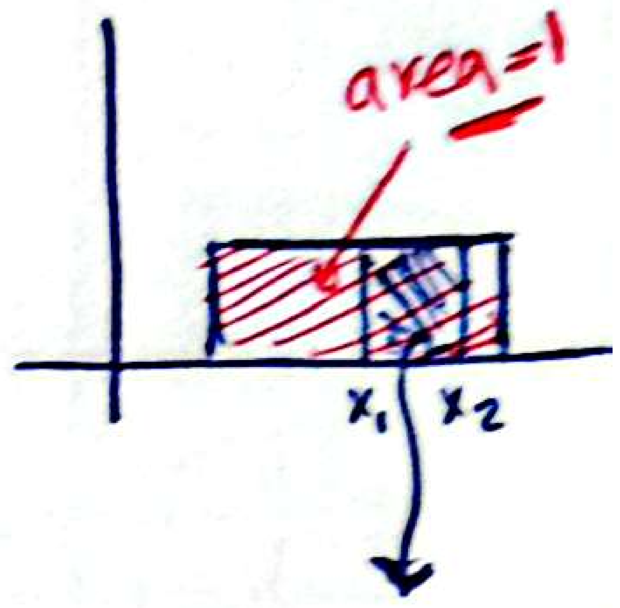
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha$$

PDF → دالة كثافة احتمالات

بتقول الاحتمالات متكثفة فين ؟

PDF properties

① $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$



prob$(x_1 < X < x_2)$

② $P_X(x_1 < X < x_2)$

$= F_X(x_2) - F_X(x_1)$

$= \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\, dx$

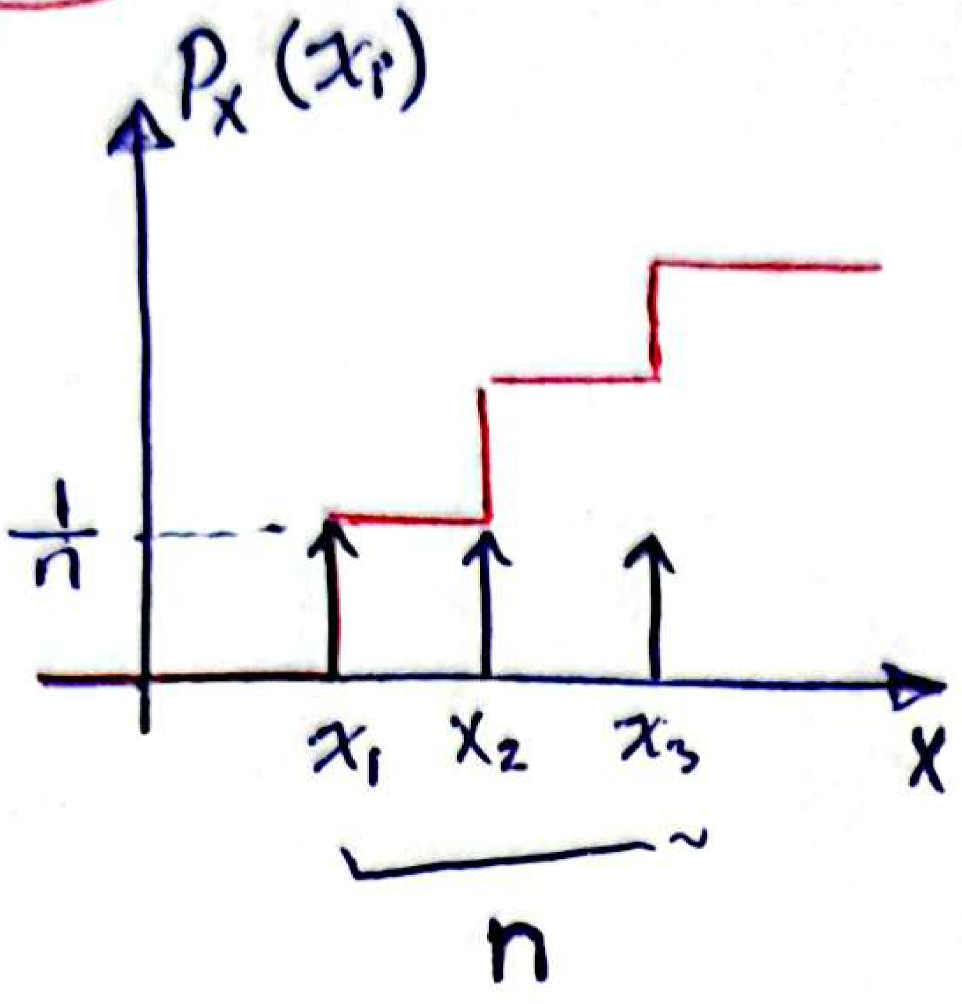
اقدر احسب ال Mean وال Standard deviation

بدل ال PMF وال PDF

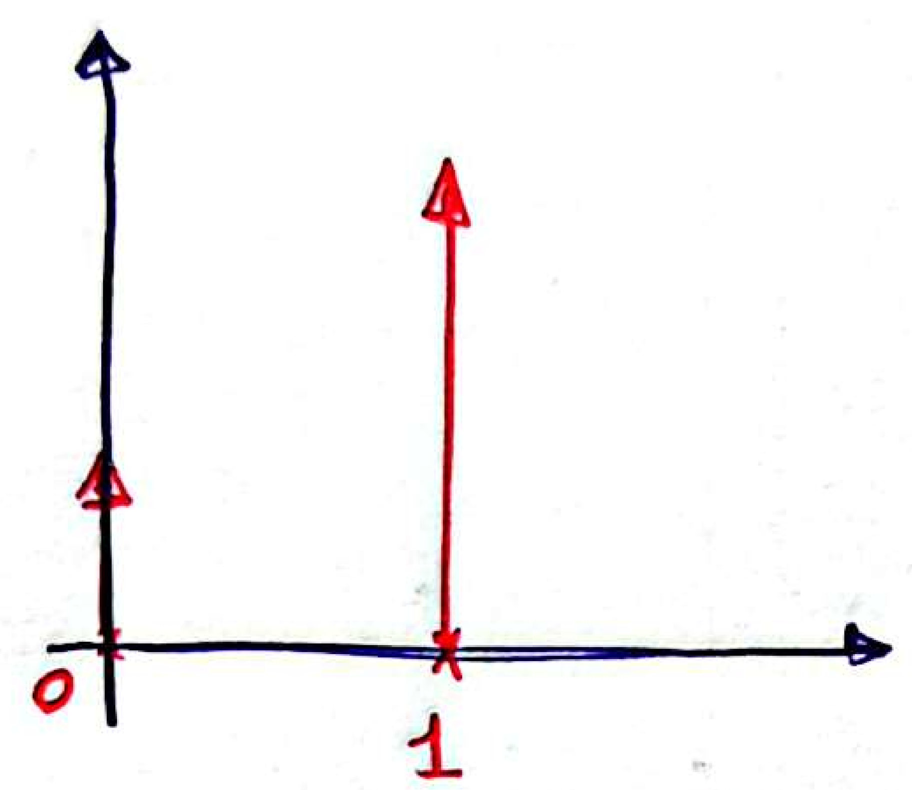
Discrete R.V	Continous R.V
given : PMF ↓ $P_X(x)$	given : PDF ↓ $f_X(x)$
Mean $\bar{X} = \sum_i x P_X(x)$	$\bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$
$\sigma_X^2 = \overline{(x_i - \bar{X})^2} = \sum_i (x_i - \bar{X})^2 P_X(x)$	$\sigma_X^2 = \overline{(X - \bar{X})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f_X(x)\, dx$
any func. of R.V.	
$\overline{g(x)} = \sum_i g(x_i) P_X(x_i)$	$\overline{g(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx$

Discrete R.Vs

① uniform



② Bernolli R.V



فيه احتمالين بس

- success $\rightarrow 1$
- failure $\rightarrow 0$

$P(0) = 1-P = q$

$P(1) = P = 1-q$

$$P_X(x_i) = \begin{cases} 1-p & \text{if } x_i = 0 \\ p & \text{if } x_i = 1 \end{cases}$$

$$\bar{X} = \sum_i x_i P_X(x_i) = 0(1-P) + 1(P) = P$$

weighted average

$$\sigma_X^2 = \overline{(X_i - \bar{X})^2} = \overline{X^2} - \bar{X}^2$$

P^2

$$\overline{X^2} = \sum_i x_i^2 P_X(x_i) = 0^2 P(0) + 1^2 (P(1)) = P$$

$$\boxed{\sigma_x^2 = P - P^2 = P(1-P) = Pq}$$

③ Binomial dist.

distribution of no. of successes in "n" Bernolli trials.

احتمال يظهر ملك لو رميت ٣ عملات معدنية؟

$$P(\text{"K" success in "n" trial}) = P_X(K) = \binom{n}{K} P^K (1-P)^{n-K}$$

$K \rightarrow x_i$

④ poisson R.V.s

اي events بيحصل ورا بعض بدون ما يكونوا معتمدين او مرتبطين مع بعض

$$P(K) = \frac{\lambda^K e^{-\lambda}}{K!}$$

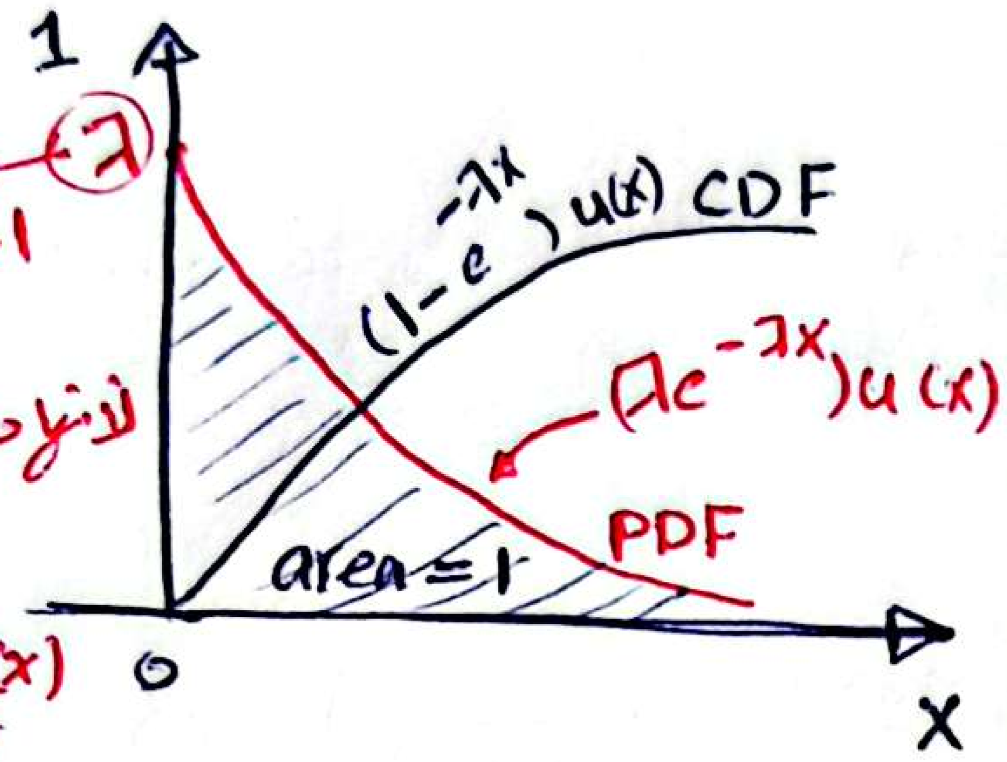
poission point process $\longrightarrow$ التوزيع المكاني

probability

day 04

* Exponential distribution

λ ← مفيش مايمنع انها تكون اكبر من ①
لانها دالة لكثافة احتمالات

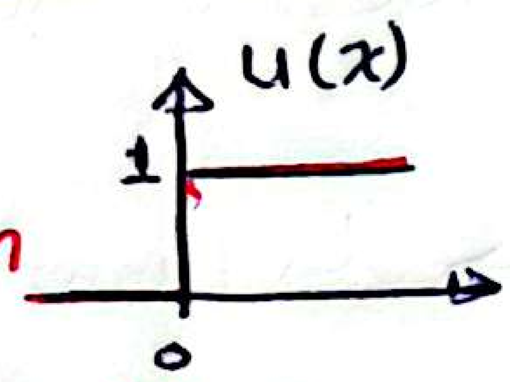


CDF :

$$F_X(x) = (1-e^{-\lambda x})\,u(x)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } x<0 \\ (1-e^{-\lambda x}) & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

unit step function



بتلغي القيم السالبة

PDF

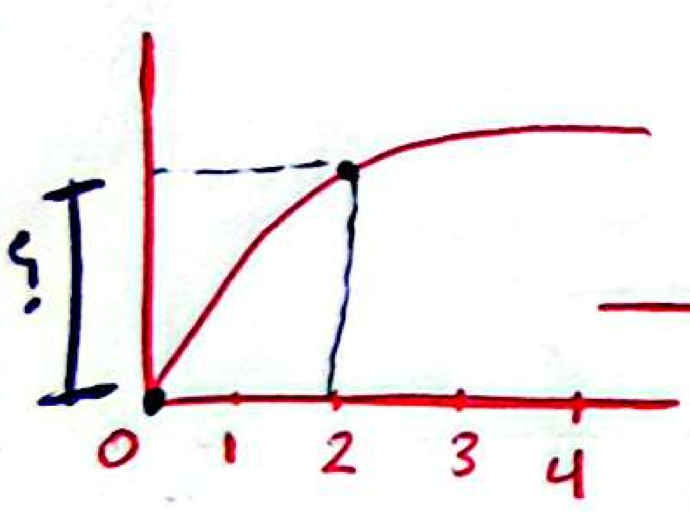
$$P_X(x) = f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

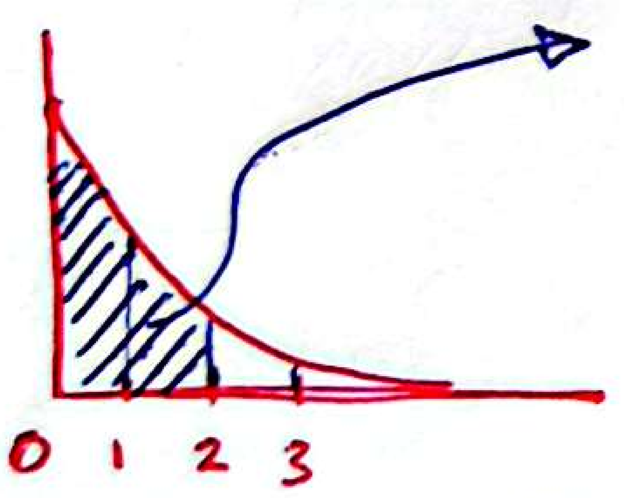
Ex

$$P(0<X<2) = \begin{cases} \text{CDF} \\ \text{PDF} \end{cases}$$

بحسب الاحتمال دا بطريقتين



$$= F(2) - F(0)$$



$$= \int_0^2 p(x)\,dx$$

القوانين العامة

disc.	cont.
$\bar{x} = \sum_i x_i P_X(x_i)$	$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$

$$\therefore \bar{x} = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$$

Mean

تكامل بالتجزيء

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 f_x(x)\,dx$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

← أو ممكن احسبها بطريقة تانية

Varience

$$\sigma_x^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2$$

Mean^2

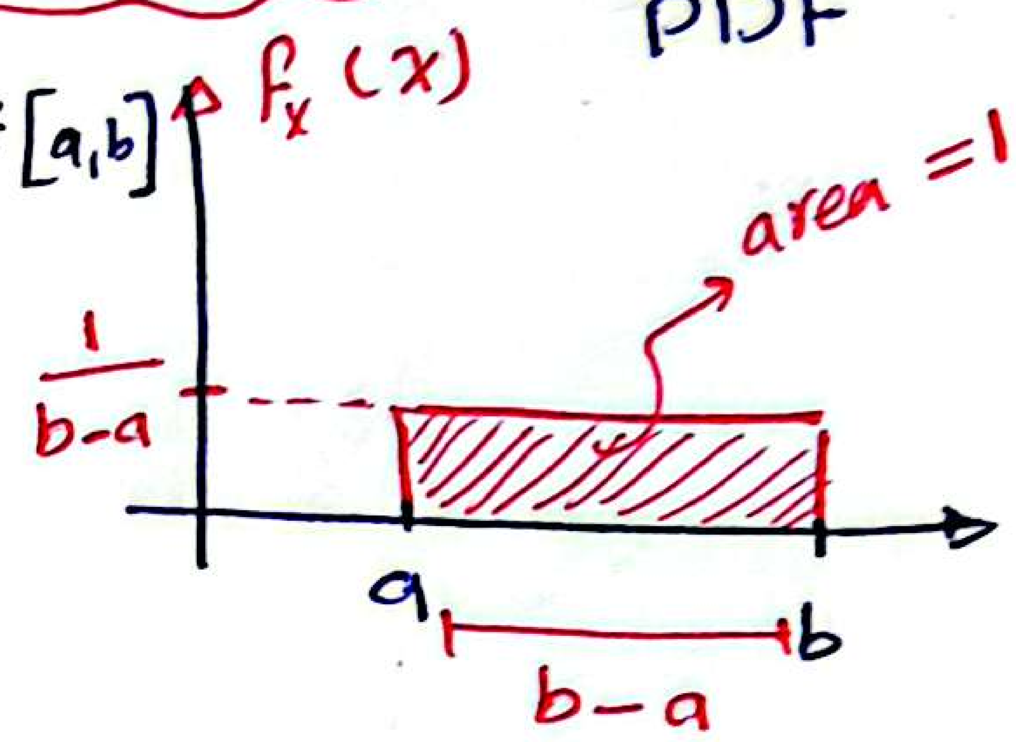
$$\therefore \overline{X^2} = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,dx$$

uniform distribution

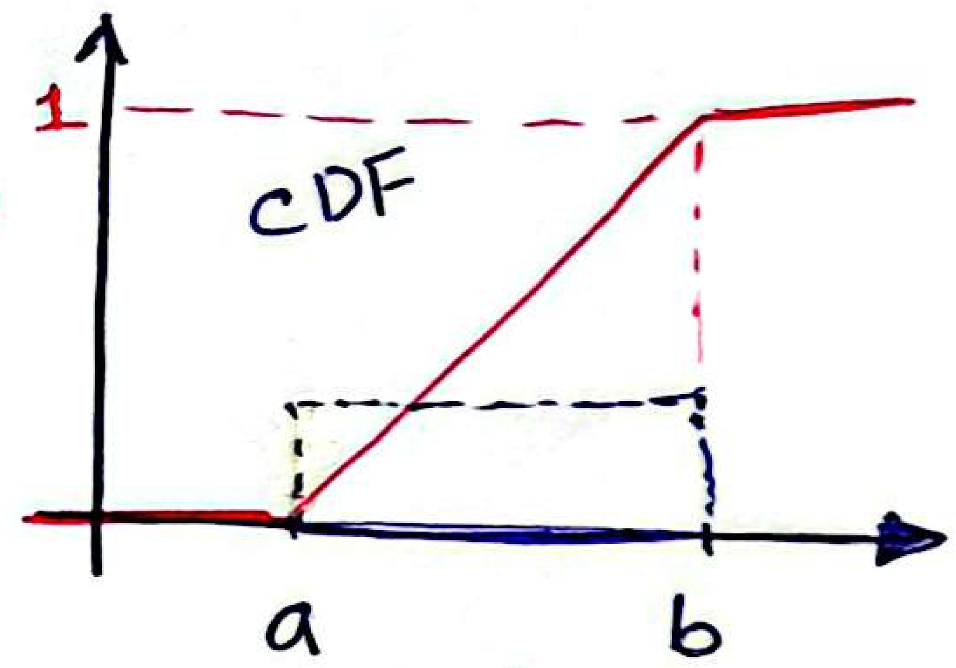
Gaussian

PDF

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

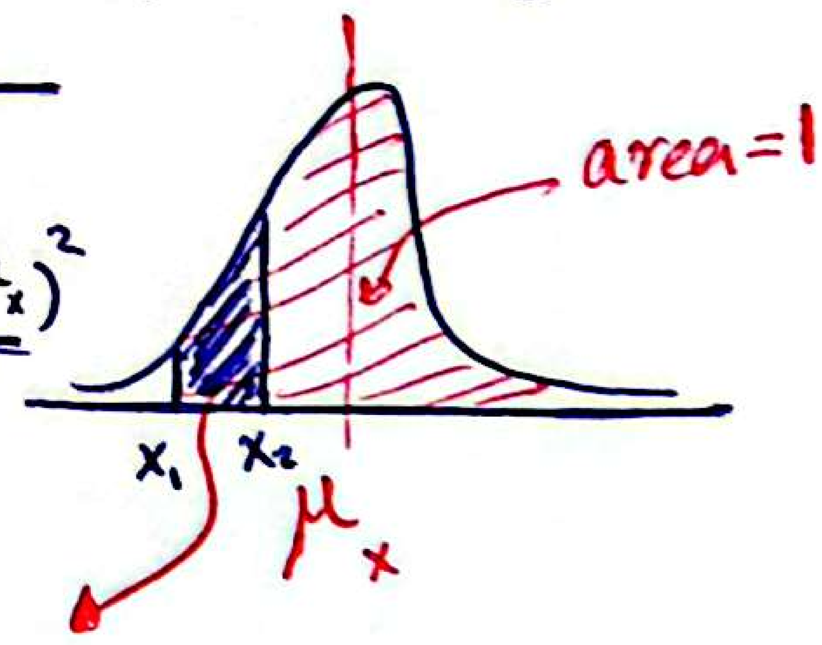


$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & \text{if } x>b \end{cases}$$



Normal Dist.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$



بيوصف معظم الظواهر الطبيعية

$$P(x_1 < x < x_2)$$

$$\therefore P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx = ??$$

← عملية معقدة لذلك يتم حلها بالجداول

(Numerical)

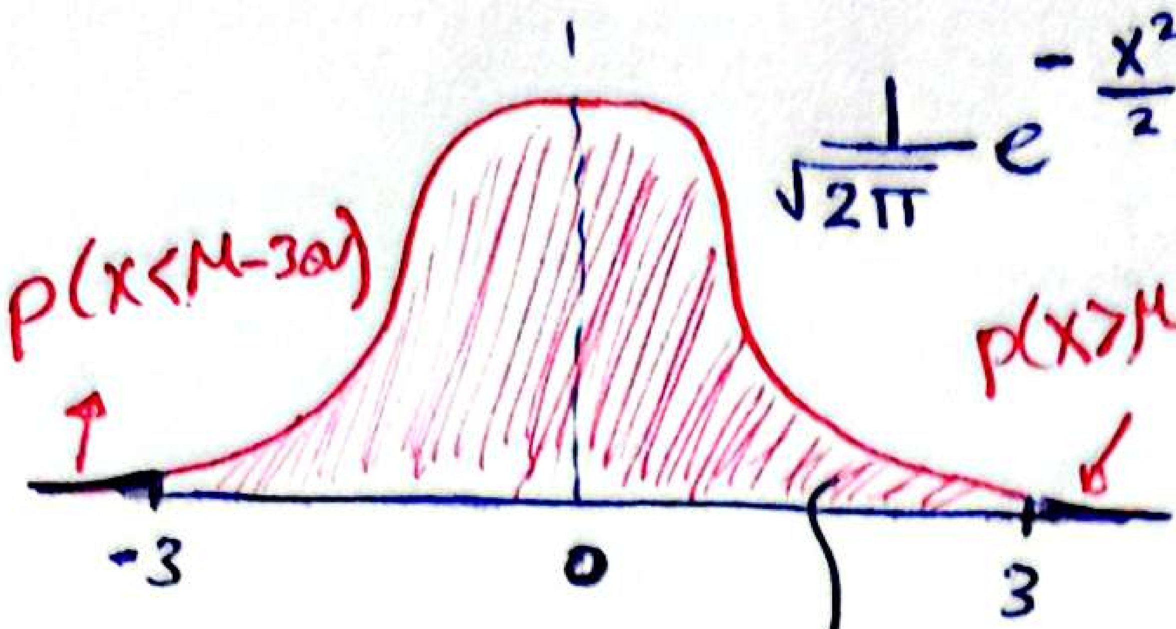
$$= 1 - Q(x)$$

function معروفة (حسابها بجداول)

$\mu = 0$

$\sigma_x = 1$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$



if area $[-\infty \to \infty] = 1$

$[-3,3]$ area $= 0.9973$

Ex $\mu_x = 170$ cm

$\sigma_x = 10$ cm

$\therefore P(\overbrace{170-30}^{\boxed{140}} < X \leq \overbrace{170+3\times 10}^{\boxed{200}}) = 99.73\ \%$

$170 + 3\times10 \to \mu_x + 3\sigma$

notes

68-95-97.7 rule

$P(\mu-3\sigma < X \leq \mu+3\sigma) = 99.7\%$

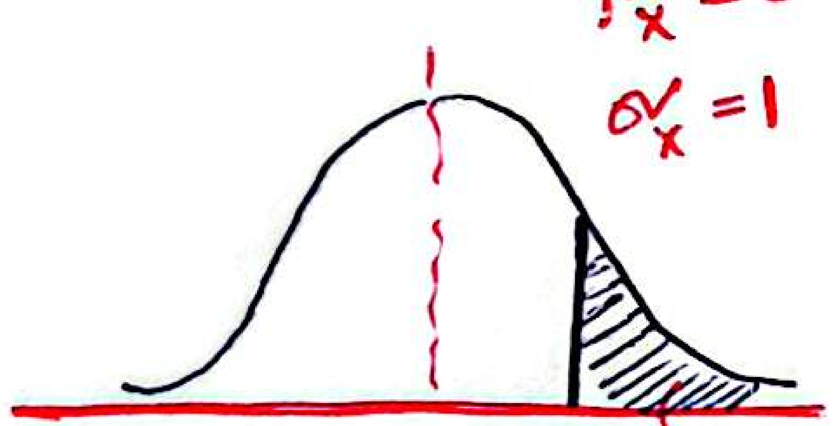
$P(\mu-2\sigma < x \leq \mu+2\sigma) = 95.45\%$

$P(\mu-\sigma < X \leq \mu+\sigma) = 68.2\%$

Q-tables

$\mu_x = 0$

$\sigma_x = 1$



area of Q-table

$P(X \geq x) = Q(x)$

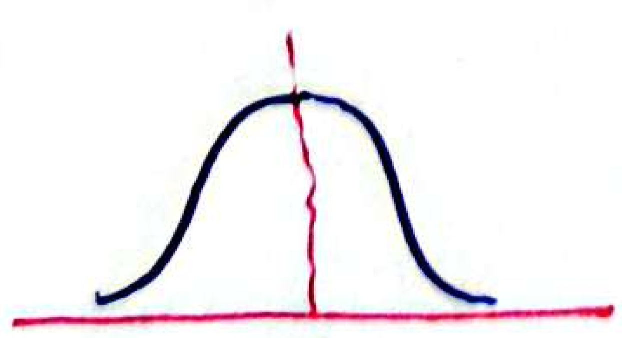
لو عندي حالة general جمعي

$\mu_x \neq 0$, $\sigma_x = 1$ $\longrightarrow$ احولها للـ standard case

general $\longrightarrow$ standardization

$P(X \geq x_1)$

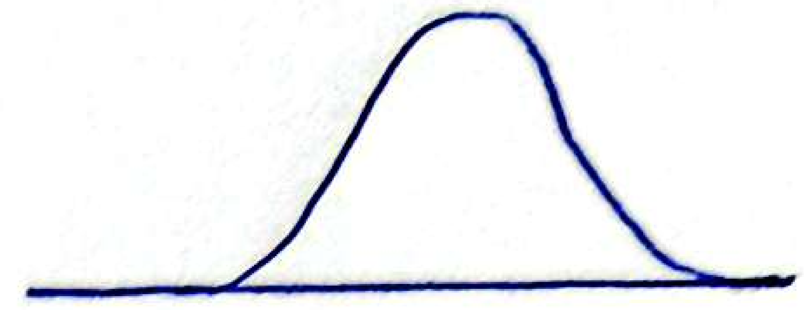
$\boxed{Q\left(Z > \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)}$

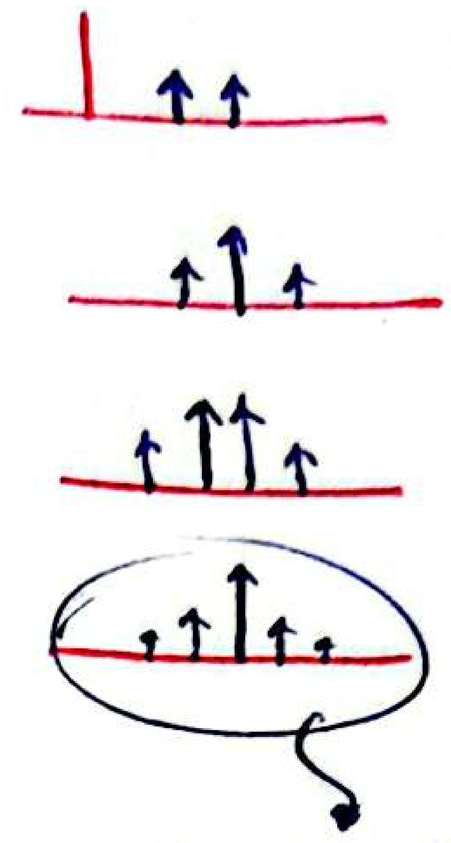


Central limit theorem (CLT)

واحدة من تطبيقاتها انه تفسر ليه شكل الـ normal dist. بيعبر عن الظواهر الطبيعية

$Z = X + Y + W$





رمي عملة واحدة

رمي عملتين

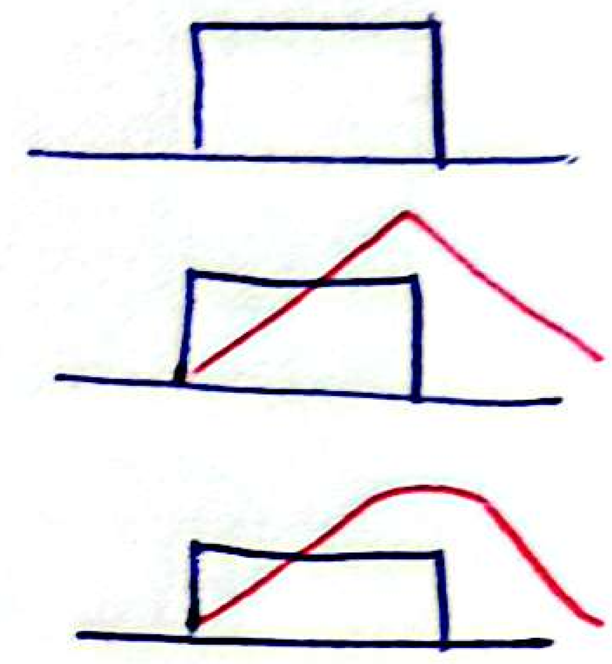
رمي ٣ عملات

رمي ٤ عملات

شكل اقرب للـ normal dist.

$\therefore f_Z(z) = f_X(x) * f_Y(y) * f_W(w) * \text{----}$

conv



وهكذا لو ٣ هتفرد هتلاقي تمسك بيوصل للـ normal dist.

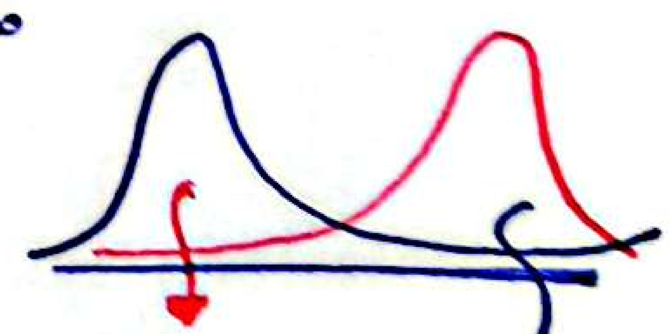
Higher order Moments

$n > 2$

n^{th} moment $\quad \overline{x^n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_x(x)\, dx$

n^{th} central moment $\quad \overline{(X-\bar{x})^n} = \int_{-\infty}^{\infty} (X-\bar{x})^n f_x(x)\, dx$

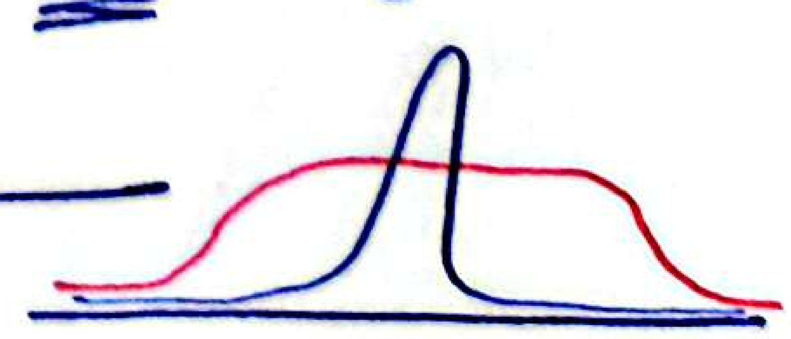
$n = 3 \longrightarrow$ Skewness



$n = 4 \longrightarrow$ Kurtosis

بيوصف شكل الـ curve

الـ Kurtosis على حسب parameter



Student-t distribution.

probability

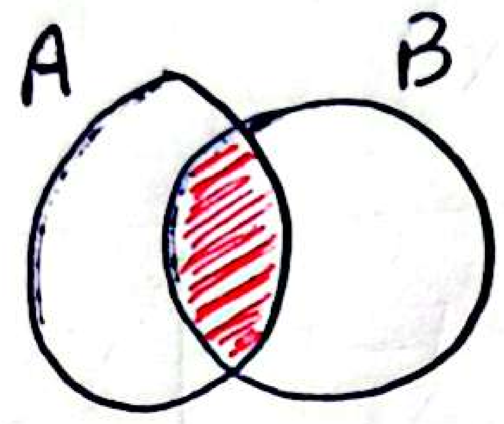
Day 05

- Conditional probability

$$P(A/B) = P(A), \quad P(B/A) = P(B) \quad \Big\} \text{ independent events}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\rightarrow P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \rightarrow ①$$



لو حسبت ال $P(A/B)$ ولقيته $= P(A)$

independent events يعني متأثرش باحتمال

← لو اتأثر ← dependent events

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \rightarrow ②$$

from ①, ② $\quad P(A \cap B) = P(A/B)\, P(B) = P(B/A)\, P(A)$

$$\therefore P(A/B)\, P(B) = P(B/A)\, P(A)$$

Bayes' Rule

$$\therefore \underbrace{P(A/B)}_{\text{posterior}} = \frac{\overbrace{P(B/A)}^{\text{likelihood}}\; P(A)}{\boxed{P(B)}}$$

$P(A)$: prior — احتمال A قبل ما ال B تحصل

$P(B)$: evidence (marginal)

#

مبني عليه استنتاجات كثيرة جداً وحاجات كتيرة في ال Data science

→ Belief updating

بتعمل Estimation بناءً على event حصل

← ممكن نكتب نفس القاعدة على طريقة R.V.s

$$\underbrace{P(AB)}_{\text{joint prop.}} = \underbrace{P(A/B)}_{\text{conditional prop.}}\ \underbrace{P(B)}_{\text{marginal prop.}}$$

$$\underbrace{P_{X,Y}(x,y)}_{\text{joint PMF}} = \underbrace{P_{X/Y}(x/y)}_{\text{conditional PMF}}\ \underbrace{P_X(x)}_{\text{marginal PMF}} \quad \Big] \text{ prob. PMF.}$$

$$\underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{\text{joint pdf}} = \underbrace{f_{X/Y}(x/y)}_{\text{conditional pdf}} \cdot \underbrace{f_X(x)}_{\text{marginal pdf}} \quad \Big] \text{ PDF}$$

Bayes' rule

$$P_{X/Y}(x/y) = \frac{P_{Y/X}(y/x)\, P_X(x)}{P_Y(y)}$$

مكتوبة بدلالة PMF

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{Y/X}(y/x)\, f_X(x)}{f_X(x)}$$

مكتوبة بدلالة pdf

Allergy test 98% accurate in +ve and 99% accurate in -ve Results

test ⟷ classifier

[ت] → classifier → cat? → Yes / No

TP → true positive
cat صورة فيها classifier ✓

TN → True Negative
cat صورة مفيش فيها classifier ✓
حقيقة

FP → False positive
نتيجة تحليل ايجابية لكورونا للب الواقع غلط

FN → False Negative
نتيجة غلط ومش حقيقية
صورة فيها cat ← طلع النتيجة مفيهاش

Confussion Matrix

TP	TN
FP	FN

Confussion Matrix

نتيجة الـ classifier

ground truth

Actual

prediction	+ve	-ve
+ve	TP	FP
-ve	FN	TN

← نعرف منين هل الأرقام دي كويسة ولا لأ؟

Event

B : +ve Test Result

B^c : -ve Test Result

A: has allergy

A^c: doesn't allergy

P(B) ↓ prob. of +ve test Result

وهكذا في الباقي

P(A|B) : prob. that he has allergy given that he tested positive

P(B/A) : prob that he has tested positive given that he has allergy

لازم تكون عالية

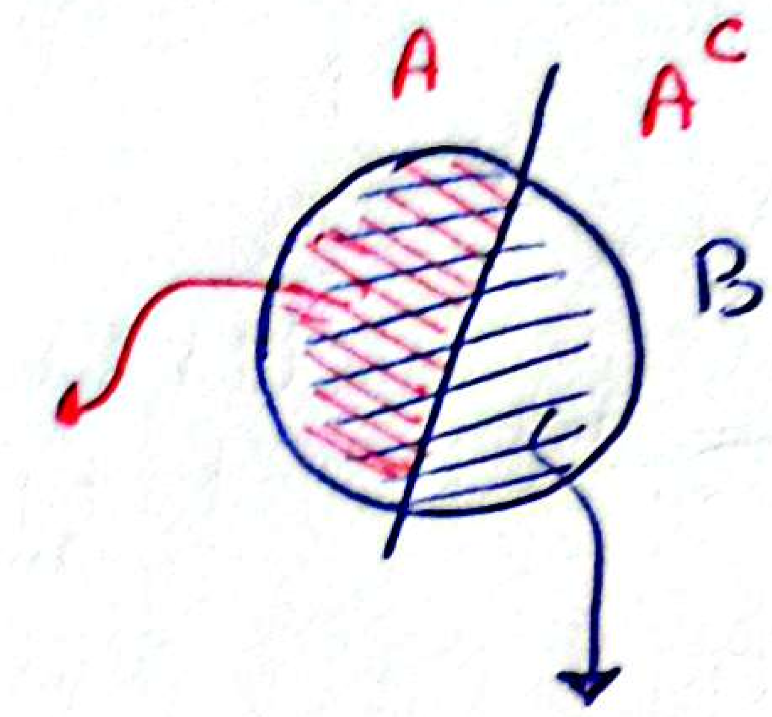
$$P(A/B) = \frac{P(B/A)\,P(A)}{P(B)}$$

from last example

$P(B/A) = 0.98$

$P(B^c/A^c) = 0.99$

← ايه احتمال ان الشخص يـ Test positive وهو معندوش الـ allergy



$A \cap B$

$B \cap A$

has allergy and test +ve

don't have allergy and test +ve

$P(B) = P(A\cap B) + P(A^c \cap B)$

disjoint

$$\therefore \underbrace{P(B)}_{\text{المقام}} = \overbrace{P(B/A)\,P(A)}^{P(A\cap B)} + \overbrace{P(B/A^c)\,P(A^c)}^{P(A^c \cap B)}$$

لأنهم

$$= 0.98 * 0.03 + (\underbrace{1-0.99}_{0.01}) * 0.97$$

مهم

$P(A'/B) = 1 - P(A/B)$

$P(B'/A) = 1 - P(B/A)$

$P(B'/A') = 1 - P(B - A')$

$\underbrace{P(A'/B')}_{\text{prob }(A^c)} = 1 - \underbrace{P(A/B')}_{\text{prob }(A)}$

prob (A^c) ↳ given that ____

prob (A) ↳ given same thing

$$\text{So} \quad P(A/B) = \frac{\overset{0.98}{P(B/A)}\;\overset{0.03}{P(A)}}{\underset{0.0391}{P(B)}}$$

$= 0.715$

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)\ P(A)}{P(B)}$$

$$= \frac{\overset{\boxed{0.98}}{P(B/A)}\ \overset{0.01}{P(A)}}{P(B/A)\,P(A) + P(B/A^{`})\,P(A^{`})}$$

لو ال Test بتاعي فاشل

يبقى ملوش لازمة اعمل كل دا

وبالتالي لازم دايمًا $P(B/A)$

تكون كبيرة

	+ve	-ve
+ve	Tp	Fp
-ve	FN	TN

$$\text{accuracy} = \frac{\text{كل الصح}}{\text{الإجمالي}} = \frac{Tp + TN}{Tp + TN + Fp + FN}$$

$$\text{precision} = \frac{Tp}{Tp + Fp}$$

total P

Recall "sensitivity" "True +ve rate" = الحاجات +ve فعليًا وعرف يطلع منهم أد ايه $= \frac{Tp}{Tp + FN}$

specificity "TNR" $= \frac{TN}{TN + Fp}$

NPV $= \frac{TN}{TN + FN}$

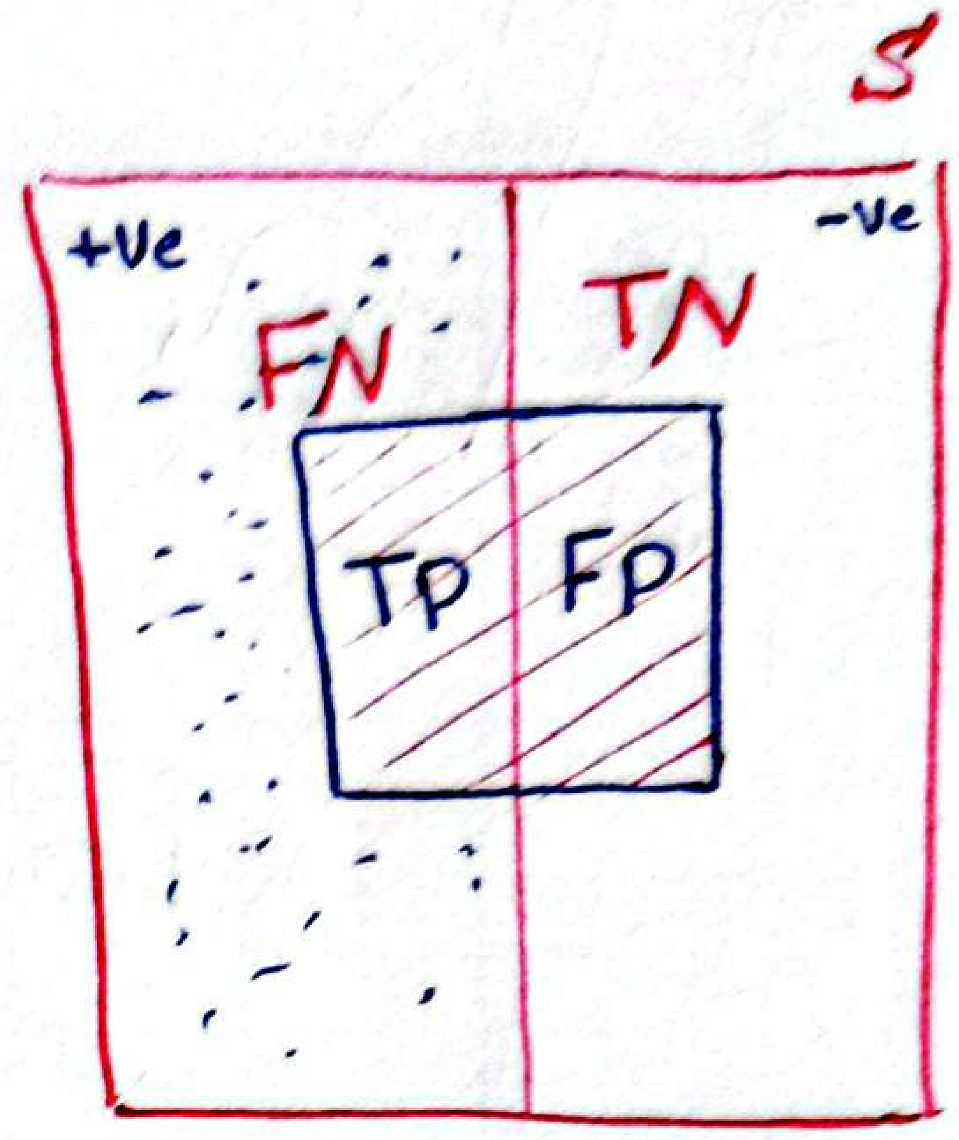
F1-score: harmonic mean of precision and Recall

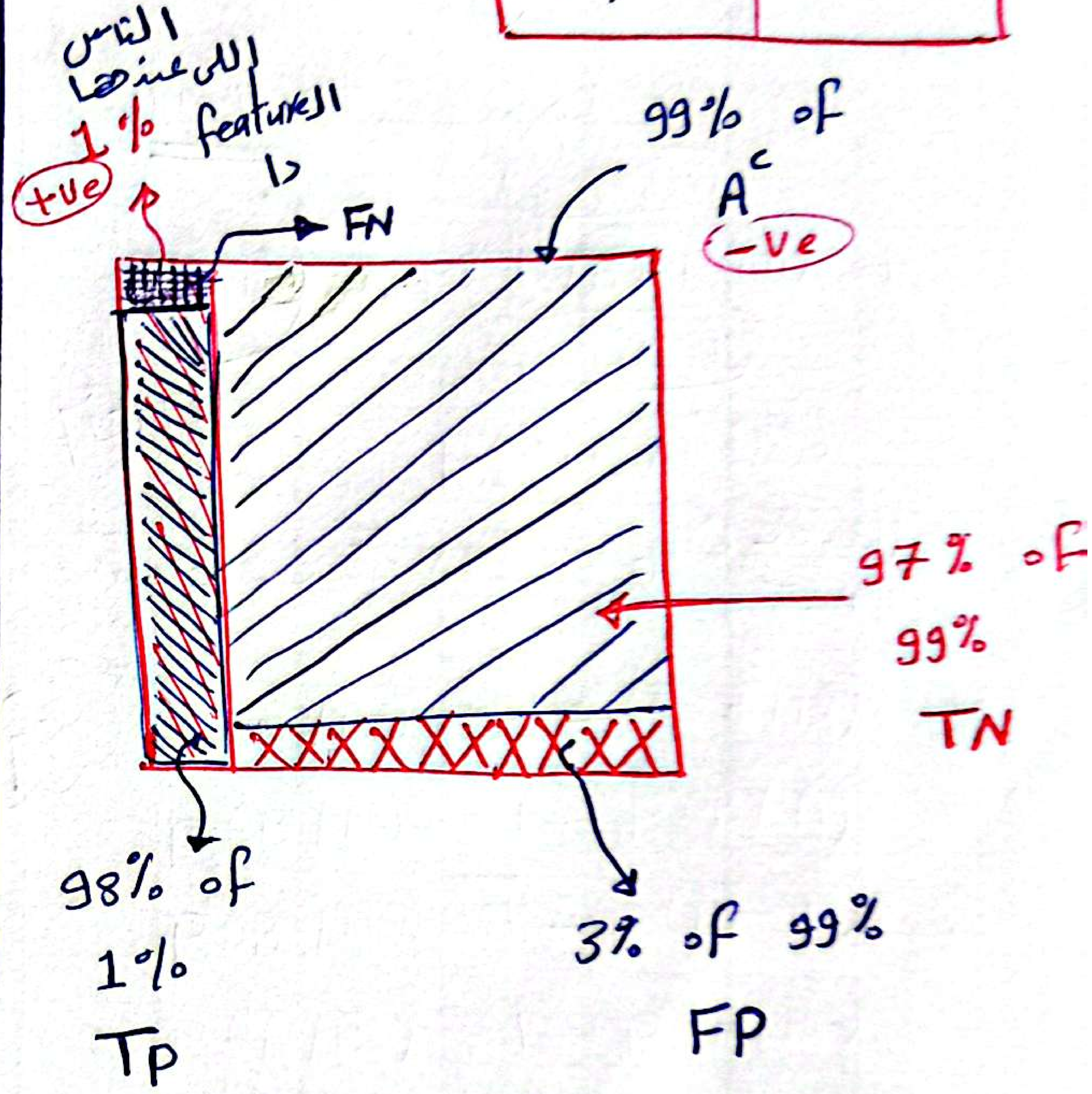
$$= 2\,\frac{\text{precision} * \text{Recall}}{\text{precision} + \text{Recall}}$$

≃ أصغر من أصغر واحدة فيهم

← واحدة من الطرق الكويسة انك تحول كل الأرقام عندك لنسب

EX





$$\text{precision} = \frac{Tp}{\text{total } P} = \frac{Tp}{Tp + Fp}$$

$$= \frac{0.98 * 0.01}{0.98 * 0.01 + 0.03 * 0.99}$$

$$\simeq 0.25 \equiv P(A/B)$$

(عندك مشكلة مهمة ان ال precision قليلة)

accuracy = ↑↑

Naïve Bayes' classifier

$$P(ABCD) = P(A)\,P(B)\,P(C)\,P(D)$$

if A, B, C, D are independent

→ if A, B, C, D are dependent

$$P(ABCD) = \frac{P(ABCD)}{P(BCD)} \cdot \frac{P(BCD)}{P(CD)} \cdot \frac{P(CD)}{P(D)} \cdot P(D)$$

$P(A|BCD)$ $P(B|CD)$

$P(C|D)$ $P(D)$

$$\boxed{\therefore P(ABCD) = P(A|BCD) \cdot P(B|CD) \cdot P(C|D) \cdot P(D)}$$

chain rule / multiplication rule

Ex cards

$P(K^1 K^2 10^3)$

King King number 10

without Replacement

$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{4}{50}$$

Female or male? naïve Bay's classifier

$P(\text{male} / \text{measurments}) = ??$ 0.55

$P(\text{Female} / \text{measurments}) = ??$ 0.45

الاحتمال الأكبر بناخد عليه $\therefore$ male