محاضرة ١

Date ____ Subject ____

مقررنا ٩ تفاضلية دراسات ~~التفاضلية~~ المشاكل الهندسية
دراسة المنحنيات بإستخدام اشكال التفاضل

الباب الاول المتجهات

Vectors

Field: حقل هي فئة معرف عليها عمليتي الضرب والجمع بحيث ان مع عملية الضرب تكون زمرة ابدالية

تعريف: الفضاء الاقليدي R^3: هو فراغ (فضاء) متجه معرف على حقل الاعداد الحقيقية R ونرمز له بالرمز $\{^3$, R^3:

$\dim$: بعد الفراغ: $R^3 = 3$

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \Leftarrow \bar{a} \in R^3$$

$$R^3 = \{(a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in R\}$$

المتجه كله $\bar{a}$ ينتمي الى R^3
لكن المركبات تنتمي الى R

تعريف: اساس الفضاء المتجه R^3

١) الارتباط الخطي (linear dependent):
المتجهات $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_n \in R^3$
تكون مرتبطة خطيا اذا وجد ثوابت $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$
ليست كلها اصفار تحقق الشرط $a_1 V_1 + a_2 \bar{V}_2 + \cdots + a_n \bar{V}_n = \bar{0}$

٢) الاستقلال الخطي (linearly independent)
المتجهات $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_n \in R^3$ مستقلة خطيا
إذا وجد ثوابت $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ كلها اصفار وتحقق الشرط

$$a_1 \bar{V}_1 + a_2 \bar{V}_2 + \cdots + a_n \bar{V}_n = 0$$

ملاحظة مهمة: المتجهات $\bar{b}$ و $\bar{a}$ لهما نفس الاتجاه إذا كانا مرتبطين خطياً أحدهما ثابت في الآخر: $\bar{a} = k\bar{b}$

حيث $\bar{a} = k\bar{b}, k>0$

أساس الفضاء (الفراغ): لا يلزم المتجهات تكون مستقلة

أساس لـ R^3 لا بد أن يتوفر الآتي: $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_n$

1) المتجهات $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_n$ مستقلة خطياً

2) المتجهات $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_n$ تولد الفراغ

يمكن كتابة أي متجهة في R^3 على هيئة تركيب خطي من المتجهات $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_n$

البعد هو عدد عناصر الأساس

Ex

ليكن $\bar{e}_1 = (1,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0)$

$\bar{e}_3 = (0,0,1)$

$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2$ أساس لـ R^3 ويسمى بالأساس القانوني لـ R^3

1) هل e_1, e_2, e_3 مستقلة

$\exists\, a_1, a_2, a_3 \in R$ s.t

$a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3 = 0$

$a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) = \bar{0}$

$(a_1,0,0) + (0,a_2,0) + (0,0,a_3) = \bar{0} = (0,0,0)$

$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ مستقلة خطياً

2) هل $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ تولد الفراغ

let $(a,b,c) \in R^3$

$\Rightarrow (a,b,c) = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3$

$a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (a,b$

$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ أساس لـ R^3 بعد $= 3$

عدد المتجهات المستقلة خطياً

baraka

Date ____ Subject ____

* أى 3 متجهات مستقلة خطياً في R_3 تكون اساس له
* واى اساس يتكون لـ 3 متجهات لـ R_3 يتكون من ثلاث متجهات مستقلة خطياً
لو قال مرتبطة غلط
* لو 4 متجهات او اكثر تكون مرتبطة خطياً

الضرب الداخلى في R^3

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$$
$$\bar{b} = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos\theta$$
$$|\bar{a}|^2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$
$\cos 90 = 0$

متعامدين عندما $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ ، $\cos 90 = 0$

تعريف:
الاسقاط العددى المتجه a على b : يعرف العدد$\bar{a}$ على $\bar{b}$ يعرف بالعدد

$$P_b(\bar{a}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$$

تعريف: أى اساس $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ يسمى اساس متعامد اذا كان كل متجهين متعامدان

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$$

تعريف: ليكن $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ ، $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ اساس لـ R^3
ليكن

$$\bar{v}_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\, \bar{v}_j$$

$j = 1,2,3$ ((u ال بدلا v اكتب)

نقول أن $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ لها نفس الاتجاه مثل $\{u_1, v_2, u_3\}$

* اذا كان محدد المعاملات ← 0 (موجب)

$$|a_{ij}| > 0$$

Date ________ Subject ________

* الضرب الاتجاهي

$\bar{a}, \bar{b} \in R^3$

$$\bar{a} = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3 = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\bar{b} = b_1 \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2 + b_3 \bar{e}_3 = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin\theta$$

$\bar{a} \times \bar{b} \neq \bar{b} \times \bar{a}$ ليست ابدالي

$a \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot a$ ابدالي

نظرية: $a \times b = \bar{0}$ لو حاصل الضرب الاتجاهي بيساوي صفر إذا وفقط إذا إذا كان a, b مرتبطان خطياً

ملاحظة: إذا كان $\bar{a} \times \bar{b} \neq 0$ فإن $\bar{a}, \bar{b}$ يكونان مستقلان خطياً

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = |a|^2 , \quad \bar{a} \times \bar{a} = 0$$