Évaluation blanche du module Méthodes Numériques pour l'Ingénieur pour les classes 3A15->3A28 & 3B1->3B12

Total des points 100/100

Il est à noter que :

- La présente évaluation sera accessible durant 48h à compter de la date de sa planification.
- Uniquement un seul envoi du présent formulaire est autorisé.
- Votre score sera affiché en pourcentage.
- Chaque question pourrait avoir une ou plusieurs réponses correctes.

L'adresse e-mail du répondant (**ahmed.issiou@esprit.tn**) a été enregistrée lors de l'envoi de ce formulaire.

✓ Cochez la bonne réponse : * 8/8

Soit :

$$I = \int_0^2 \frac{1}{x+2}\,dx$$

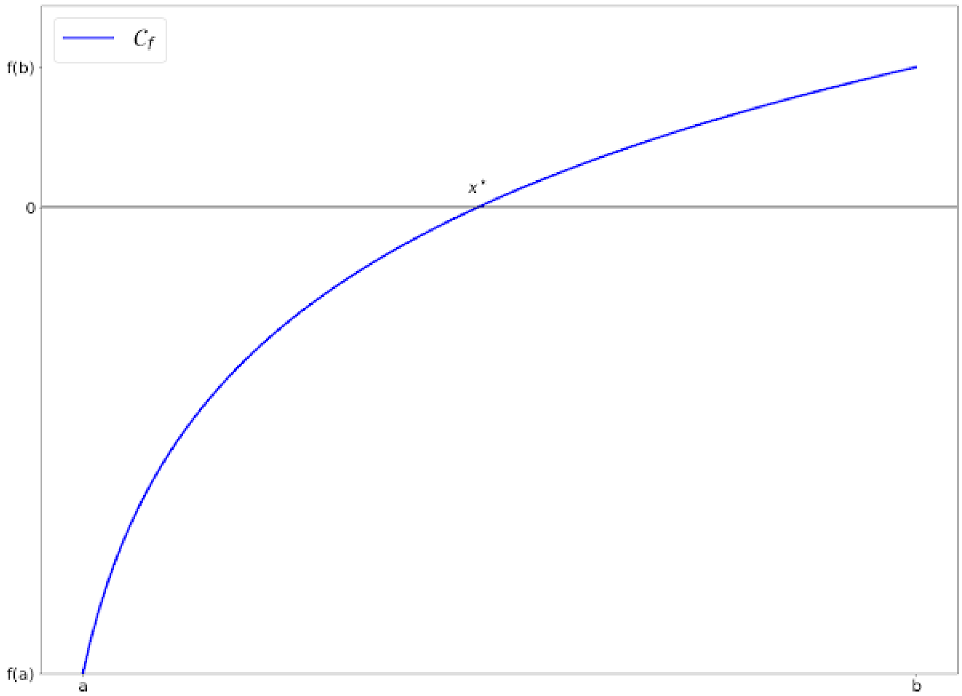
Quel est le nombre de sous intervalles minimal à choisir pour avoir une erreur d'intégration (relative à la méthode des trapèzes composites pour le calcul approché de I) inférieure à 10^{-4} ?

- ○ 43
- ○ 44
- ◉ 41 ✓

Commentaire

Trouver une majoration de l'erreur E (relative à la méthode composite des trapèzes) en fonction de n (le nombre de sous intervalles), et puis la majorer par 10^(-4).
C'est à dire :
E<=(((b-a)^3)/(12 n²)) sup |f"(x)| <=10^(-4)
avec fa=0, b=2, f(x)=1/(x+2), et sup |f"(x)|=1/4, pour x dans l'intervalle[0,2].
Le résultat trouvé est n>=40.82483.

On considère une fonction f représentée sur un intervalle [a,b] comme illustré ci-dessous. Parmi les choix de x0 (la valeur initiale) suivants, indiquer ceux qui assurent la convergence de la méthode de Newton vers x* l'unique racine de f(x)=0. * 6/6



- [x] x0=a
- [ ] x0=b
- [x] x0=x*

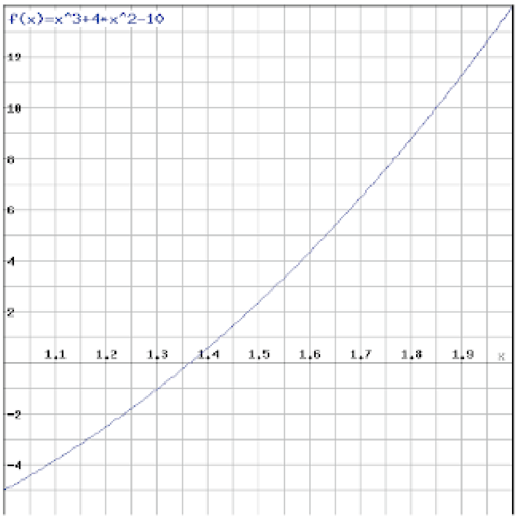
Commentaire

f est croissante et concave : f' et f'' sont de signes opposés.
Le x0 satisfaisant f(x0)f''(x0)>0 est x0=a.
Pour x0=x, même si le x0 ne vérifie pas f(x0)f''(x0)>0 mais ce choix correspond à la racine à déterminer. La suite générée est ainsi stationnaire, donc convergente.*

Cochez la bonne réponse : *

6/6

Soit $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$. On vérifie graphiquement que f admet une racine réelle dans l'intervalle $[1, 2]$ et que la méthode de dichotomie est applicable (voir la figure ci-dessous).



Alors le nombre d'itérations nécessaire pour estimer cette racine à une tolérance $\varepsilon = 10^{-10}$ est :

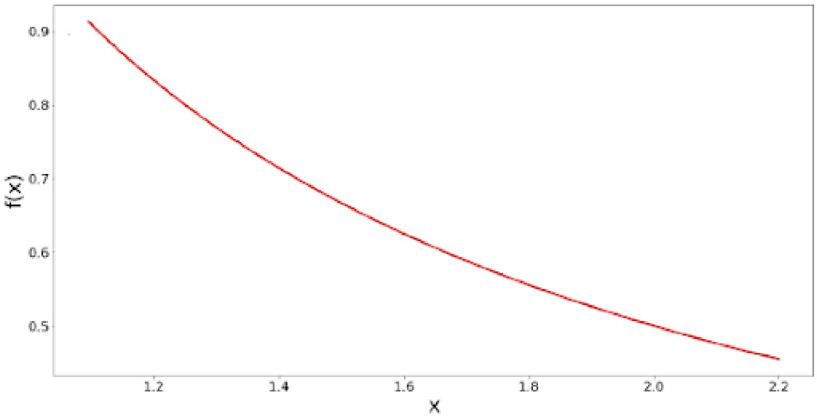
- 27
- 33
- 40

Commentaire

Application directe du théorème de convergence de la méthode de dichotomie : il suffit d'écrire que l'indice n doit vérifier |x_n - x| inférieur ou égale à 1/ 2^{n+1} , c'est à dire 1/2^{n+1} inférieure ou égale à 10^{-10} ce qui donne que n est supérieur ou égale à 10. log_2(10)-1 c'est presque égale à 32.21. D'où n = 33.*

Cochez la bonne réponse : * 5/5

Soit f une fonction définie sur $[1,2]$ par son graphe (on ne connnais pas exactement l'expression explicite de $f(x)$).



Si on note par I_{ex} la valeur exacte $\int_1^2 f(x)dx$ et par I_t^s la valeur approchée de $\int_1^2 f(x)dx$ par la méthode simple d'intégration des trapèzes, alors :

$$I_{ex} < I_t^s$$

réponse A :

$$I_{ex} = I_t^s$$

réponse B :

$$I_{ex} > I_t^s$$

réponse C :

Cochez la bonne réponse : *

6/6

Soit une fonction f définie sur $I = [-4; 4]$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	-4		-3		1		4
$f(x)$	-3	↗	2	↘	-1	↗	0

L'équation $f(x) + \frac{3}{2} = 0$

- ○ n'admet pas de solution sur]-4 , 4[
- ◉ admet une solution unique sur]-4 , 4[✓
- ○ admet 2 solutions sur]-4 , 4[
- ○ admet 3 solutions sur]-4 , 4[

Commentaire

Une solution sur]−4;−3[d'après le TVI;
Pas de solution sur]−3;1[ni sur]1;4[où f prend des valeurs supérieures ou égales à -1.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle [1,3] telle que f(1).f(3)<0. Parmi les propositions suivantes, quels sont les nombres d'itérations à appliquer par la méthode de dichotomie qui permettent d'assurer une précision Ɛ=0.001 pour estimer la solution de l'équation f(x)=0 sur]1,3[? * 6/6

- [ ] 7
- [ ] 9
- [x] 11
- [x] 20
- [x] 100

Commentaire

On utilise l'estimation du nombre d'itération pour la méthode de dichotomie avec une précision Ɛ.

Cochez la bonne réponse : * 8/8

Donner une valeur approchée de $I = \int_0^{\pi/2} f(x)dx$, par la méthode des trapèzes composites, en se basant sur le tableau suivant :

x	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$f(x)$	0	0.382683	0.707107	0.923880	1

- 1,987116
- 0.987116 (selected, correct)
- 2.98716

Commentaire

Appliquer la formule de trapèze composite avec :
x0=0, x1=π/8 x2=π/4 x3=3π/8 x4=π/2

h=π/8

*I=h/2 * [f(x0)+2f(x1)+2f(x2)+2f(x3)+f(x4)]*

Cochez la bonne réponse : *

8/8

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Quelles sont les hypothèses suffaisantes pour que la solution de $f(x) = 0$ est unique ?

- $f(a).f(b) < 0$
- f est strictement monotone sur $[a, b]$

réponse A :

- $f(a).f(b) < 0$
- $f([a, b]) \subset [a, b]$

réponse B :

- $f([a, b]) \subset [a, b]$
- f est strictement monotone sur $[a, b]$

réponse C :

- $f([a, b]) \subset [a, b]$
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$

réponse D :

Commentaire

** Pour que f(x)=0 admet une solution sur [a,b], il faut que f(a).f(b)<0*
** Pour assurer l'unicité de cette solution, il faut que f soit strictement monotone sur [a,b].*

Cochez la bonne réponse : * 8/8

Soient l'intégrale $I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx$ et E l'erreur d'intégration relative à la méthode des trapèzes composites pour le calcul approché de I, en considérant un pas de subdivision $h = \frac{\pi}{4}$ de l'intervalle $[0,\pi]$.

Parmi ces valeurs, quelle est la plus petite valeur qui majore E ?

- (x) 0.1614 ✓
- ( ) 0.1785
- ( ) 0.1523

Commentaire

Appliquer la formule de la majoration de l'erreur (Trapèze composite) avec n=4 et sup |f"(x)|=1, x dans l'intervalle [0,pi].

Cochez la bonne réponse : * 8/8

Soit $f : [2,3] \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 2x - 5$.
On se propose de résoudre numériquement par l'algorithme de Newton l'équation:

$$(E) : f(x) = 0.$$

La suite $(x_n)_n$ de la méthode de Newton définie par:

$$\begin{cases} x_0 \in [2,3] \quad \text{tel que} \quad f(x_0)f''(x_0) > 0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

est convergente vers α, l'unique solution de (E).

- (x) vrai
- ( ) faux

Commentaire

la suite converge vers la solution de (E) car:
-f est de classe C^2 sur [2,3].
- f(2)f(3)<0 donc (E) admet au moins une solution
-la dérivée de f ne s'annule pas sur [2,3] : unicité de la solution.
-la dérivée second de f ne s'annule pas sur [2,3].

Cochez la bonne réponse : * 10/10

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x - x - 2$ sur $[1,2]$. En utilisant la méthode de Newton, une valeur approchée de la solution de $f(x) = 0$ sur $[1,2]$ avec une précision de $\varepsilon = 10^{-2}$ et un choix de $x_0 = 2$ est:

- ○ 1.1488
- ◉ 1.1461 ✓
- ○ 1.2073
- ○ 0.1456

Commentaire

On utilise l'algorithme de Newton jusqu'à atteindre l'inégalité |x_{n+1}-x_n|<10^{-2}, ensuite on prend x_{n+1} comme valeur approchée de x, la racine de f sur [1,2].*

Cochez la bonne réponse : * 5/5

Une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x^2}} dx$ par la méthode d'integration simple de Simpson est

- ◉ 0.579 ✓
- ○ 0.379
- ○ 0.479

Commentaire

*Application directe de la formule de Simpson simple:
I_s=((1-0)/6) *(f(0)+4*f((0+1)/2)+ f(1)) avec f(x)=1/(1+exp(-x²)).*

Cochez la bonne réponse : * 6/6

Soit f une fonction définie, sur $[\frac{1}{2}, 1]$, par $f(x) = 3x^5 - x^4 - 1$.

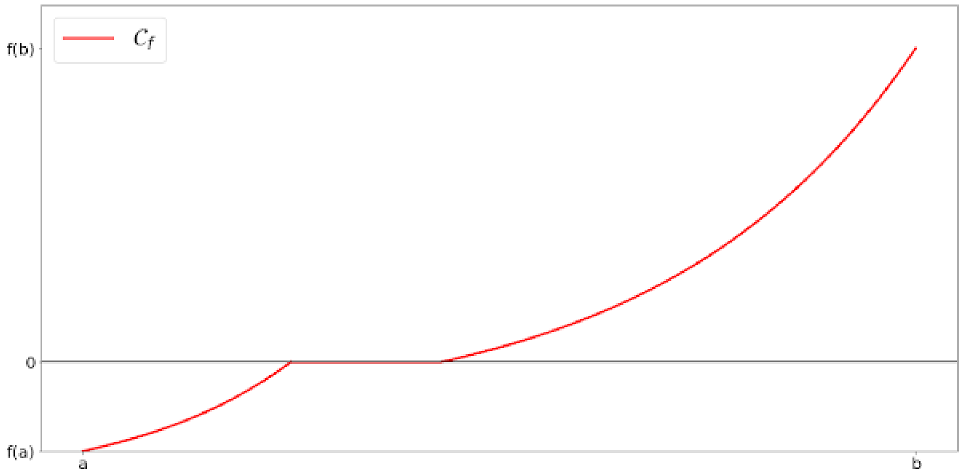
Pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$ avec la méthode de Newton , on choisit x_0 égale à

- ○ x0=3/4
- ○ x0=1/2
- ● x0=1 ✓

Commentaire

réponse 3
f''>0 alors x0=1 car f(1)>0

On considère une fonction f représentée sur un intervalle [a,b] comme illustré ci-dessous. La fonction f satisfait-elle les hypothèses de la méthode de dichotomie pour la résolution de f(x)=0? * 5/5



Oui

Non

Commentaire

La fonction f n'est pas strictement monotone. Sur un sous-intervalle de [a,b], f est nulle . Elle admet donc une infinité de solutions.

Cochez la bonne réponse : * 5/5

Soit la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{2}$ sur $[1, 2]$. La fonction f satisfait-elle les hypothèses de la convergence de la méthode de Newton pour la résolution de f(x)=0?

- Oui
- Non

Commentaire

La fonction f n'est pas dérivable en 1.