Т.П.Балакина, Е.А.Левина, Е.В.Покатович, Е.В.Попова

МИКРОЭКОНОМИКА
промежуточный уровень

Сборник задач с решениями и ответами

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.П.Балакина, Е.А.Левина, Е.В.Покатович, Е.В.Попова

МИКРОЭКОНОМИКА
промежуточный уровень

Сборник задач с решениями и ответами

Рекомендовано УМО в области экономики, менеджмента, логистики и бизнес-информатики в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлениям «Экономика», «Менеджмент», «Бизнес-информатика» и специальности «Логистика»

Издательский дом Высшей школы экономики
Москва 2013

УДК 330.101.542
ББК 65.012.1
М59

Р е ц е н з е н т ы:
доктор экономических наук, профессор кафедры «Инвестиции и инновации» Финансового университета при Правительстве Российской Федерации *Д.И. Кокурин*;
доктор экономических наук, зав. кафедрой экономической теории НИУ ВШЭ, профессор *С.Ф. Серегина*;
доктор экономических наук, зам. зав. кафедрой экономической теории НИУ ВШЭ *Т.В. Кулакова*

М59 **Микроэкономика:** промежуточный уровень. Сборник задач с решениями и ответами [Текст] : учеб. пособие / Т. П. Балакина, Е. А. Левина, Е. В. Покатович, Е. В. Попова ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2013. — 503, [1] с. — 1000 экз. — ISBN 978-5-7598-0983-8 (в обл.).

Учебное пособие содержит подборку заданий по основным разделам микроэкономики (выбор потребителя в условиях определенности и в условиях неопределенности, поведение производителя, общее равновесие, провалы рынка, рыночные структуры), помогающих читателям научиться применять полученные базовые знания по предмету. Сборник включает задачи различного уровня сложности, для решения которых требуется знание стандартных микроэкономических моделей. Приводятся решения некоторых задач, ответы к большинству заданий или подсказки к решению. Многие задачи, вошедшие в пособие, подготовлены авторами для семинаров и контрольных мероприятий по микроэкономике на различных факультетах НИУ ВШЭ, МШЭ МГУ и РАНХиГС.

Для студентов-бакалавров, обучающихся по направлению «Экономика», а также специальностям, учебный план которых предусматривает изучение микроэкономики; для абитуриентов, готовящихся поступать в магистратуру экономических факультетов; для преподавателей бакалаврских курсов «Микроэкономика», «Экономическая теория» и таких дисциплин микроэкономического блока, как теория отраслевых рынков и теория общественного выбора.

УДК 330.101.542
ББК 65.012.1

ISBN 978-5-7598-0983-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Кафедра микроэкономического анализа Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» существует уже более десяти лет, однако до сих пор не был издан сборник задач, соответствующий бакалаврским программам кафедры. Понятно, что такое положение вещей огорчало студентов, которые хотели бы иметь возможность решать как можно большее количество задач, так как именно умение решать задачи рассматривается в качестве критерия освоения курса. У каждого лектора — свой стиль подачи материала и свои методики преподавания, которые, к тому же, меняются в зависимости от аудитории слушателей. И все же есть базовый материал, который должен быть освоен при любом подходе к изложению курса современной микроэкономики. Именно для помощи в освоении базовых понятий и моделей и создано данное учебное пособие.

Задачник состоит из шести глав, охватывающих основные темы, входящие в бакалаврский курс микроэкономики: теория поведения потребителя в условиях определенности, теория поведения производителя, равновесие, провалы рынка, рыночные структуры и выбор потребителя в условиях неопределенности. Большие разделы поделены на подразделы, что позволяет читателю лучше ориентироваться. В некоторых задачах подразделов есть вопросы и по темам предыдущих подразделов, чтобы охватить общую тему раздела как можно более комплексно. Из своего опыта можем сказать, что зачастую переформулированный вопрос или небольшое изменение в условии задачи приводит к тому, что студенты воспринимают задание как абсолютно новое и незнакомое. Для закрепления полученных знаний и выработки навыка решения типовых задач в сборнике приводятся пулы сходных упражнений. Сборник включает задачи различного уровня сложности, для решения которых требуется знание стандартных микроэкономических моделей: от коротких теоретических вопросов до практико-ориентированных заданий, содержащих стилизованные ситуации.

Одним из выгодных отличий от других пособий такого рода мы считаем то, что для каждой из вошедших в данный сборник задач приведено либо решение (эти задачи отмечены *), либо ответ, либо подсказка. Это позволяет широко использовать пособие. Наличие ответов и решений типовых задач поможет студентам бакалавриата экономических специальностей самостоятельно работать с пособием, а затем, в преддверии предстоящих контрольных мероприятий, проверить, в какой степени усвоен базовый материал. По этой же причине — наличию решений, подсказок и ответов, — задачник может использоваться абитуриентами, поступающими в магистратуры экономических факультетов. Ведь даже абитуриентам, прошедшим соответствующую подготовку в бакалавриате, часто требуется освежить в памяти полученные знания. А абитуриентам, которые получили образование по неэкономическим специальностям, требуется пройти весь материал с нуля. И в этом, мы надеемся, задачник будет для них подспорьем. Также мы надеемся, что задачник окажется востребован преподавателями микроэкономических дисциплин, которые смогут найти в нем большое количество задач, проверяющих знание базовых понятий и моделей, для семинаров и контрольных мероприятий, что позволит улучшить методическое обеспечение курсов микроэкономики и, благодаря наличию разделов, посвященных рыночным структурам, теории организации рынков.

В учебное пособие вошли задания, которые создавались нами для занятий и контрольных мероприятий по микроэкономике не только на различных факультетах НИУ ВШЭ, и в Московской школе экономики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации. Естественно, при подготовке мы изучали опыт коллег, и многие задачи возникли как дополнение, обобщение или, наоборот, частный случай задач из различных источников, а несколько упражнений, ставших уже классикой, вошли в пособие переформулированными и с новыми вопросами. Мы постарались не забыть для всех таких заданий рядом с номером в скобках указать «источник вдохновения». Список использованной литературы приводится в конце книги. Отдельно отметим в этом списке учебник «Микроэкономика: промежуточный уровень» экономиста Хэла Вэриана, который является теоретической базой для задачника и который, на настоящий момент, указан в качестве базового учебника в программах по микроэкономике для бакалавриата НИУ ВШЭ, МШЭ МГУ и РАНХиГС. Мы постарались также учесть в своей книге, что ряд тем (например, задачи по теме частичное равновесие) обеспечен большим количеством заданий в других источниках, в то время как задания бакалаврского уровня, удовлетворяющие требованиям указанных выше вузов, по некоторым темам (например, экономика обмена, декомпозиция Слуцкого, выявленные предпочтения) представлены в небольшом объеме. Также хотим заметить, что мы намеренно не приводили в разделах основные определения и разъяснения ряда понятий, использованных при постановке заданий, полагая, что все необходимые понятия и определения уже изучены пользователями сборника задач на теоретическом уровне в процессе прослушивания лекционного курса и при необходимости могут быть самостоятельно найдены в соответствующей литературе.

Мы рады возможности публично сердечно поблагодарить профессора кафедры микроэкономического анализа и ординарного профессора НИУ ВШЭ Бусыгина Владимира Петровича за поддержку, критический подход, советы и помощь, к которым мы прибегаем на протяжении всех лет совместной работы. Мы благодарим заведующего нашей кафедрой микроэкономического анализа и ординарного профессора НИУ ВШЭ Левина Марка Иосифовича за поддержку в создании задачника и доверие. Кроме того, выражаем благодарность и признательность руководству НИУ ВШЭ, МШЭ МГУ и экономического факультета РАНХиГС за предоставленную нам возможность «тестировать» многие из составленных нами заданий в рамках учебных мероприятий. Также мы благодарим студентов этих вузов, чье непосредственное участие в решении заданий во время практических занятий помогло нам составить дополнительные вопросы к заданиям и выявить наиболее трудные моменты при изучении дисциплины. Выражаем также благодарность рецензентам — профессору кафедры «Инвестиционный менеджмент» ФГОБУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» д. э. н. Кокурину Д.И., зам. зав. кафедрой экономической теории НИУ ВШЭ д. э. н. Кулаковой Т.В, зав. кафедрой Экономической теории НИУ ВШЭ, ординарному профессору НИУ ВШЭ д. э. н. профессору Серегиной С.Ф. — за полезные предложения, редактору Легостаевой И.Л., кропотливо проработавшей текст

в поиске неточностей, и Андреевой И.Г., прекрасно оформившей текст.

Мы будем также признательны всем нашим читателям, которые, обнаружив в тексте заданий и решений незамеченные нами опечатки и неточности, сообщат нам о них на адрес электронной почты zadachnikmicro@gmail.com.

Апрель 2013 *Авторы*

Глава 1

ТЕОРИЯ ПОВЕДЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

1.1. Бюджетное ограничение

1.1. (а) Пусть доход потребителя равен m, а цены товаров равны $(1, 2, 3)$. Найдите все значения параметра m, при которых набор $(30, 20, 10)$ будет доступен данному потребителю.

(б) Пусть теперь $m = 120$, сможет ли потребитель приобрести набор, содержащий по 25 ед. (единиц) каждого блага?

1.2. (а) Пусть доход потребителя равен 100, а цены товаров равны $(3, p, 1)$. Найдите все значения параметра p, при которых потребитель не сможет приобрести набор $(10, 20, 30)$.

(б) Пусть теперь $p = 2$, сможет ли потребитель приобрести набор, содержащий по 10 ед. каждого блага?

1.3. Предположим, что потребитель потребляет в день только благо X и благо Y. Его бюджет таков, что если он тратит весь свой доход на потребление благ X и Y, он может приобрести набор, состоящий из 5 ед. X и 7 ед. Y, или набор, состоящий из 3 ед. X и 11 ед. Y.

(а) В координатах XOY изобразите графически данные потребительские наборы и бюджетную линию.

(б) Найдите отношение цен благ X и Y.

(в) Если весь свой доход потребитель потратит на благо X, какое его количество он сможет приобрести? Если весь свой доход потребитель потратит на благо Y, какое его количество он сможет приобрести?

(г) Выпишите бюджетное ограничение потребителя, считая, что Y — товар-измеритель.

1.4. **По мотивам [2.9].** Потребитель тратит весь доход на два товара и потребляет 6 ед. первого товара и 20 ед. второго товара. Цена первого товара в два раза выше цены второго товара. Доход потребителя и цена второго товара удвоились, цена первого товара при этом осталась неизменной. Если потребитель по-прежнему будет потреблять 20 ед. второго товара, то какое максимальное количество первого товара он сможет себе позволить?

1.5.* Семья Ивановых тратит 5000 руб. в месяц на товары X и Y. Цена единицы товара X равна 40 руб., а цена единицы товара Y равна 50 руб.

(а) Выпишите бюджетное ограничение семьи Ивановых и изобразите графически соответствующее бюджетное множество.

(б) Правительство ввело налог на стоимость на товар Y. Теперь каждая единица товара Y будет обходиться всем потребителям на 20% дороже. Выпишите бюджетное ограничение семьи Ивановых в этом случае и изобразите графически новое бюджетное множество. Ограничила ли такая политика государства множество доступных семье Ивановых потребительских наборов?

(в) После введения налога на стоимость администрация региона ввела потоварную субсидию на товар X в размере 5 руб. Выпишите бюджетное ограничение семьи Ивановых в этом случае и изобразите графически бюджетное множество. Как изменилось бюджетное множество семьи по сравнению с начальным бюджетным множеством?

(г) Правительство ввело в действие программу поддержки малообеспеченных семей, таких как семья Ивановых, выдавая каждой малообеспеченной семье паушальную субсидию в размере 1000 руб. Данные средства Ивановы решили тратить на товары X и Y. Считая, что программы, введенные в пп. (б) и (в), продолжают действовать, выпишите бюджетное ограничение семьи Ивановых в этом случае и изобразите графически новое бюджетное множество.

(д) В качестве альтернативной схемы поддержки малообеспеченных семей рассматривается программа, по которой каждая семья получает в подарок талон на получение $\overline{y}$ ед. блага Y, который нельзя продавать. Полагая, что условия пп. (б) и (в) выполнены, выпишите новое бюджетное ограничение семьи Ивановых и изобразите бюджетное множество. При каком минимальном значении $\overline{y}$ Ивановы смогут купить точно такое же количество товара Y, как и в п. (а)?

Предположим теперь, что все правительственные программы отменены.

(е) Супермаркет, в котором обычно семья Ивановых делает свои покупки, ввел в действие следующую систему скидок: при покупке товара X в количестве $\overline{x}$ ($\overline{x} < 125$) все дополнительные единицы товара Xпродаются на 5 руб. дешевле. Выпишите бюджетное ограничение семьи Ивановых и изобразите графически соответствующее бюджетное множество.

(ж) Менеджер супермаркета предлагает альтернативную систему скидок: при покупке товара X в количестве $x > \overline{x}$ ($\overline{x} < 125$) все приобретенные единицы товара X продаются на 5 руб. дешевле. Выпишите бюджетное ограничение семьи Ивановых и изобразите графически соответствующее бюджетное множество. При какой схеме скидок супермаркета Ивановы смогли бы приобрести больше товара X, если бы захотели потратить на него все свои деньги, выделенные на покупку товаров X и Y?

1.6. Рассмотрите бюджет одинокого пенсионера, который свою ежемесячную пенсию расходует только на коммунальные платежи (товар x) и продовольственные товары (товар y). Предположим, что ставка оплаты всех коммунальных платежей в регионе возросла на 10% для всех категорий граждан. Однако региональные власти готовы поддержать одиноких пенсионеров, выплачивая им ежемесячно паушальную субсидию в размере S. Полагая, что размер пенсии составляет m, найдите минимальный размер субсидии S, который позволит пенсионеру приобретать все потребительские корзины, доступные ему до повышения ставки оплаты коммунальных платежей.

1.7. Господин М позволяет себе в каждый период времени тратить десятую часть своего дохода, составляющую m, на игру в компьютерном клубе и картинг. Заезд на карте стоит p руб. за одну минуту, а одна минута игры в компьютерном клубе стоит q руб.

(а) Определите товары, выпишите бюджетное ограничение господина M и проиллюстрируйте графически его бюджетное множество.

(б) Для привлечения дополнительных клиентов картинг-клуб, клиентом которого является г-н M, ввел следующую систему скидок: за каждую минуту сверх $\overline{x}$ цена за минуту заезда снижается на 25% от базового тарифа, а за каждую минуту сверх $\widetilde{x}$ цена за минуту заезда снижается на 50% от базового тарифа. Полагая, что $\overline{x} < \widetilde{x} < m/p$, выпишите новое бюджетное ограничение г-на M и изобразите соответствующее бюджетное множество.

(в) В качестве альтернативы предложенной системе скидок менеджер картинг-клуба предлагает ввести бонусную программу, при которой каждый клиент клуба получает в подарок C минут картинга, если он катался не менее $\overline{x}$ минут. Выпишите бюджетное ограничение г-на M при новой бонусной схеме оплаты и изобразите соответствующее бюджетное множество. При каком наименьшем значении C господин M сможет кататься на карте не меньше, чем при ценовой политике картинг-клуба, описанной в п. (б), при любых расходах на игру в компьютерном клубе.

(г) В летние месяцы компьютерный клуб и картинг-клуб, клиентом которых является г-н M, ввели следующую систему бонусов: каждый клиент компьютерного клуба получает в подарок 3 часа игры, а каждый клиент картинг-клуба получает в подарок 2 часа заездов на карте в месяц. Полагая, что прежняя система скидок в картинг-клубе отменена, выпишите бюджетное ограничение г-на M и изобразите соответствующее бюджетное множество.

(д) В следующем году руководство компьютерного клуба, постоянным клиентом которого является г-н M, решило ввести новый тарифный план «оптовый», согласно которому при игре не более $\overline{y}$ минут цена за минуту будет, по-прежнему, равна q руб., а при игре сверх $\overline{y}$ цена за минуту составит три четверти от базового тарифа. Полагая, что $\overline{y} < m/q$ и в следующем году компьютерный клуб вернется к прежней тарифной сетке без летних скидок, выпишите новое бюджетное ограничение г-на M и изобразите соответствующее бюджетное множество.

1.8. Бюджетное ограничение потребителя представлено неравенством $2x + 5y \leqslant 120$. Как оно изменится, если будет введен потоварный налог на товар x в размере 1 д. е. и одновременно с введением налога потребителю будет выдан купон на 5 ед. блага y, который он не может продавать. Изобразите на одном рисунке начальное бюджетное множество и бюджетное множество потребителя после применения данных мер.

1.9. Бюджетное ограничение потребителя представлено неравенством $5x + 2y \leqslant 190$. Как оно изменится, если будет введен 5%-ный налог на стоимость товара y и одновременно с введением налога потребитель получит карточку на сумму 20, которую он может использовать только при оплате блага x. Изобразите на одном рисунке начальное бюджетное множество и бюджетное множество потребителя после применения данных мер.

1.10. Бюджетное ограничение потребителя представлено неравенством $x + 4y \leqslant 120$. Как оно изменится, если потребителю будет предложена скидка за каждую единицу блага y, приобретаемую сверх $\overline{y}$ $(\overline{y} < 25)$, в размере 25% от начальной цены и одновременно с этим будет введен 10% налог на его текущий доход? Налог вводится вне зависимости от объема потребления товара y. Изобразите на одном рисунке начальное бюджетное множество и бюджетное множество потребителя после применения данных мер.

1.11. Бюджетное ограничение потребителя представлено неравенством $4x + y \leqslant 100$. Как оно изменится, если будет введен 25% налог на стоимость каждой единицы блага x, приобретаемой сверх $\overline{x}$ $(\overline{x} \leqslant 25)$, и одновременно агент получит субсидию, равную 20% от его текущего дохода? Субсидия предоставляется потребителю вне зависимости от объема потребления товара x. Изобразите на одном рисунке начальное бюджетное множество и бюджетное множество потребителя после применения данных мер.

1.12. Верно ли, что введение потоварной субсидии на любой из товаров неизменно расширит бюджетное множество потребителя? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

1.13. Верно ли, что введение налога на стоимость на любой из товаров и одновременное введение паушальной субсидии для потребителя неизбежно расширит множество доступных ему альтернатив. Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

1.14. Студент имеет доход 120 д. е. (денежных единиц) в месяц и часть его тратит на посещение фитнес-центра, а остаток — на все остальные товары и услуги, не потребляя при этом других «спортивно-оздоровительных» услуг. Пусть один час занятия в фитнес-центре стоит 5 д. е.; цена «остальных» товаров и услуг равна 10 д. е.

(а) Выпишите уравнение бюджетной линии и изобразите бюджетное множество.

(б) Предположим, накануне 1-го сентября фитнес-центр раздал своим членам, являющимся студентами, купон на 2 часа бесплатных занятий. Как изменится бюджетное множество студента? Считайте, что купон не подлежит продаже. Запишите новое уравнение бюджетной линии и изобразите бюджетное множество.

(в) Укажите на рисунке множество наборов, доступных потребителю при наличии купона и недоступных при его отсутствии.

(г) Предположим теперь, что купон можно продать. Как изменится ваш ответ на п. (б)?

(д) Предположим теперь, что вместо купона фитнес-центр предлагает студентам такую программу: каждый час занятий до 10 часов занятий в месяц стоит 5 д. е., а сверх этого времени — 2 д. е. Выведите уравнение бюджетной линии и изобразите бюджетное множество.

(е) Предположим теперь, что фитнес-центр предлагает студентам такую программу: за абонентскую плату 50 д. е. в месяц студент может заниматься 10 часов в месяц бесплатно, а каждый час занятий сверх этого времени стоит 2 д. е. Выведите уравнение бюджетной линии и изобразите бюджетное множество.

(ж) Что можно сказать о том, какая из программ, описанных в пп. (д) и (е), для студента более привлекательна?

1.15. В каждом из следующих случаев изобразите бюджетное множество потребителя и выведите уравнение бюджетной линии, считая, что потребитель часть денег тратит на курсы вождения, а остаток — на все остальные товары и услуги.

(а) Господин M, доход которого составляет $m = 40\,000$ д. е. в неделю, намеревается ходить на курсы вождения. Он пришел в офис курсов как раз во время рекламной кампании. Всем пришедшим в этот день в офис предоставляется возможность бесплатно заниматься с инструктором 4 часа. Если индивид решит продолжить заниматься с инструктором, то час занятий стоит 2500 д. е. Исходя из этой стоимости, всем клиентам предоставляется право варьировать продолжительность занятия (таким образом, клиент может заниматься, например, 5 ч 40 мин).

(б) Коллега М, г-н Л, доход которого также $m = 40\,000$ д. е., услышав о столь заманчивом предложении, пришел на следующий день в офис курсов вождения. Однако условия изменились. Теперь всем пришедшим в этот день в офис предоставляется возможность, заплатив 5000 д. е. за 4 часа, заниматься с инструктором пробный 1 час. Если занятие не понравится, то клиенту возвращается вся уплаченная сумма. Если клиент решит продолжить заниматься с инструктором свыше 4 часов, то час занятий (сверх уже оплаченных четырех) стоит 2500 д. е. Индивид может варьировать продолжительность занятия.

(в) Коллега г-д М и Л, получающий доход $m = 40\,000$ д. е., господин Н, узнав о рекламной кампании от г-на Л, пришел на следующий день в офис курсов вождения. Условия снова изменились. Теперь всем пришедшим предлагают оплатить 10 000 д. е. за 5 занятий, каждое следующее занятие оплачивается по ставке 3000 д. е. за час. Индивид может варьировать продолжительность занятия.

(г) Сын господина Н, г-н К, просит у отца разрешение заниматься на курсах вождения. Его доход $m = 20\,000$ д. е. Ему предложили те же условия, что и Н. Отец обещает К, что если К самостоятельно оплатит 7 часов занятий, то он за каждый следующий час занятий вернет сыну 1000 д. е. Индивид может варьировать продолжительность занятия.

1.16. Тарифы городской телефонной сети, предоставляющей услуги местной телефонной связи в Санкт-Петербурге, приведены ниже в табл. 1.1. На основании приведенной в данной таблице информации выпишите бюджетные ограничения и изобразите на одном графике бюджетные линии абонентов данной ГТС, имеющих одинаковый доход $m > 5000$ руб., и подключенных к различным тарифным планам (6–9, 11, 12), полагая, что абоненты принадлежат к группе «население» и не используют спаренную или параллельную схемы включения абонентских устройств.

Таблица 1.1

Тарифы городской телефонной сети (ГТС) г. Санкт-Петербург на услуги местной телефонной связи (начиная с $N_{\text{ст.}} = 5$); данные за 2011 г. http://www.tarifer.ru/A71

№ ст.	№ поз.	Вид услуги	Размер платы в рублях	
			население	организации
5		Предоставление в постоянное пользование абонентской линии, в месяц		
	11	независимо от типа абонентской линии	130	160
	12	с использованием спаренной или параллельной схемы включения абонентских устройств, установленных у разных абонентов	87	107
Продолжительность местных телефонных соединений при наличии технической возможности повременного учета				
		Тарифные планы		
6		Тарифный план с повременной системой оплаты		
	13	Предоставление местного телефонного соединения, за минуту	0,25	0,25
7		Безлимитный тарифный план — тарифный план с абонентской системой оплаты		
	14	Предоставление местного телефонного соединения за неограниченный объем местных телефонных соединений, в месяц	165	290
		Тарифные планы с комбинированной системой оплаты		
8		Комбинированный 100		
	15	Предоставление местного телефонного соединения за включенный объем местного трафика (100 минут исходящих соединений), в месяц	20	—
	16	Стоимость одной минуты при превышении включенного объема	0,3	—

Продолжение табл. 1.1

9		Комбинированный 400		
	17	Предоставление местного телефонного соединения за включенный объем местного трафика (400 минут исходящих соединений), в месяц	95	—
	18	Стоимость одной минуты при превышении включенного объема	0,2	—
11		Комбинированный 600		
	21	Предоставление местного телефонного соединения за включенный объем местного трафика 600 минут, в месяц	—	140
	22	Стоимость одной минуты при превышении включенного объема	—	0,2
12		Комбинированный 1000		
	23	Предоставление местного телефонного соединения за включенный объем местного трафика 1000 минут, в месяц	—	240
	24	Стоимость одной минуты при превышении включенного объема	—	0,18

1.2. Предпочтения и полезность

1.17. Типичные кривые безразличия потребителя имеют отрицательный наклон. Верно ли, что предпочтения данного агента строго монотонны? Если **да**, то докажите, если **нет**, то приведите контрпример.

1.18. Типичные кривые безразличия потребителя имеют положительный наклон. Верно ли, что предпочтения данного агента не могут обладать ни свойством строгой монотонности, ни свойством монотонности, ни свойством слабой монотонности? Если **да**, то докажите, если **нет**, то приведите контрпример.

1.19. Верно ли, что если предпочтения строго монотонны, то они являются выпуклыми? Если **да**, то докажите, если **нет**, то приведите контрпример. Верно ли обратное: если предпочтения выпуклы, то они монотонны? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

1.20. Верно ли, что если кривые безразличия пересекаются, то предпочтения агента не могут характеризоваться свойством транзитивности? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

1.21. Верно ли, что если предпочтения потребителя не являются выпуклыми, то любой средневзвешенный набор любых двух данных наборов, один из которых не хуже, чем другой, всегда хуже, чем лучший из данных наборов? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

1.22. Предположим, в магазине продаются уже расфасованные пакеты, в которых содержатся яблоки, груши и апельсины. На пакетах указан отдельно вес яблок, груш и апельсинов. Вы очень любите указанные фрукты, но больше всего любите яблоки. Поэтому вы попросили своего друга купить для вас упаковку, в которой больше всего яблок.

(а) Запишите определения полноты и транзитивности предпочтений.

(б) Формализуйте заданные предпочтения.

(в) Будут ли заданные предпочтения полными? Если да, то докажите. Если нет, то приведите контрпример (пример, который иллюстрирует ваш ответ).

(г) Будут ли заданные предпочтения транзитивными? Если да, то докажите. Если нет, то приведите контрпример (пример, который иллюстрирует ваш ответ).

1.23. Предположим, в магазине продаются уже расфасованные пакеты, в которых содержатся яблоки и груши. На пакетах указан отдельно вес яблок и груш. Поэтому вы попросили своего друга купить для вас упаковку, в которой больше и яблок, и груш, чем в других пакетах.

(а) Запишите определения полноты и транзитивности предпочтений.

(б) Формализуйте заданные предпочтения.

(в) Будут ли заданные предпочтения полными? Если да, то докажите. Если нет, то приведите контрпример (пример, который иллюстрирует ваш ответ).

(г) Будут ли заданные предпочтения транзитивными? Если **да**, то докажите. Если **нет**, то приведите контрпример (пример, который иллюстрирует ваш ответ).

1.24. Рассмотрите предпочтения потребителя относительно двух благ: орехов и дынь. Индивид считает, что еда есть еда и чем больше еды, тем лучше.

(а) Изобразите кривые безразличия для указанных предпочтений.

(б) Запишите определение выпуклости предпочтений.

(в) Будут ли указанные предпочтения выпуклыми?

(г) Предложите функцию полезности, представляющую указанные предпочтения.

(д) Запишите уравнение кривой безразличия, проходящей через набор, содержащий 1 ед. орехов и 8 ед. дынь.

1.25. По мотивам [2.9]. Тренер сборной страны по теннису принимает в сборную игроков, имеющих высокий процент первой подачи, хорошо играющих на задней линии и у сетки. Тренер предпочитает одного игрока другому тогда и только тогда, когда первый игрок не хуже второго по двум из этих характеристик. Игрок A попадает первым мячом в 80% случаев, плохо играет на задней линии, но неплохо играет у сетки. У игрока B процент попадания первой подачи равен 70, он хорошо играет на задней линии и крайне плохо у сетки. У игрока C процент попадания первой подачи равен 60, он средне играет на задней линии и очень хорошо играет у сетки.

(а) Предпочтет ли тренер игрока A игроку B, или наоборот?

(б) Предпочтет ли тренер игрока B игроку C, или наоборот?

(в) Предпочтет ли тренер игрока A игроку C, или наоборот?

(г) Обладают ли предпочтения тренера свойством полноты?

(д) Транзитивны ли предпочтения тренера?

После неудачного сезона тренер решил изменить свой критерий выбора игроков. Теперь он предпочитает одного игрока другому тогда и только тогда, когда первый игрок не хуже второго по всем трем характеристикам.

(е) Обладают ли новые предпочтения тренера свойством полноты?

(ж) Транзитивны ли новые предпочтения тренера?

1.26. На экзамене по микроэкономике студентам была предложена следующая задача: «Тренер школьной команды по математическим играм заявляет, что из двух учеников, желающих участвовать в соревнованиях, он всегда предпочитает того, который имеет более высокую среднюю оценку по математике, более коммуникабелен и менее эмоционален. Является ли данное отношение предпочтения полным и транзитивным?»

***Найдите ошибку/ошибки в решении, которое представил один из студентов*:**

Тренер не может сравнить двух учеников, обладающих, например, следующими качествами:

- *ученик* A *имеет средний балл* 4,5, *очень коммуникабелен и сильно эмоционален*;
- *ученик* B *имеет средний балл* 5, *не является коммуникабельным и эмоционально очень устойчив.*

Следовательно, предпочтения тренера не могут быть полными. Так как существуют ученики, которые несравнимы с точки зрения предпочтений тренера, то предпочтения также не могут характеризоваться и транзитивностью.

1.27. Для каждого из представленных на рис. 1.1 случаев, определите, обладают ли предпочтения, типичные кривые безразличия которых изображены, свойствами монотонности, выпуклости? Объясните и проиллюстрируйте ваш ответ на графике.

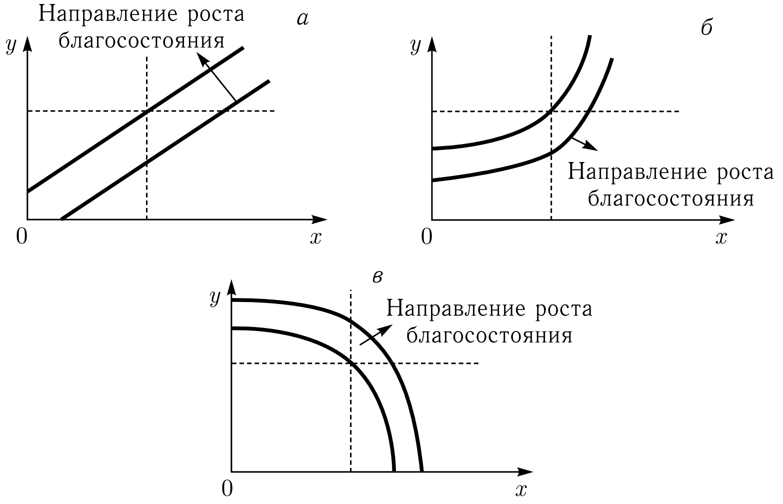

Рис. 1.1. Примеры кривых безразличия для различных предпочтений

1.28. Выполните следующие задания.

(а) Предпочтения потребителя A, определенные на множестве двух товаров (кофе и пирожное), полны и транзитивны. Данный потребитель, выпивая чашку кофе, съедает два пирожных, и ни за что не будет употреблять одно без другого. Чем больше кофе и пирожных он съедает, тем ему лучше. Рассмотрите следующие наборы: $(2,4)$, $(8,4)$, $(3{,}10)$, $(2,16)$, где первое благо — кофе, а второе благо — пирожные. Проранжируйте наборы в соответствии с предпочтениями потребителя, если это возможно.

(б) Предпочтения потребителя B, определенные на множестве R^2_+, полны, транзитивны и строго выпуклы. Верно ли, что $(3,\ 6) \succ (2,\ 8)$, если известно, что для данного потребителя $(4,\ 4) \succsim (2,\ 8)$? Если **да**, то докажите, если **нет**, то приведите контрпример.

(в) Предпочтения потребителя C, определенные на множестве R^2_+, полны, транзитивны и строго монотонны. Рассмотрите следующие наборы: $(2,8)$, $(1,5)$, $(4,3)$, $(3,9)$. Проранжируйте данные наборы в соответствии с предпочтениями потребителя, если это возможно.

(г) Предпочтения потребителя D, определенные на множестве R^2_+, полны, транзитивны, выпуклы и строго монотонны. Известно, что для данного потребителя $(2,\ 11) \sim (5,\ 2)$. Докажите, что $(4,\ 8) \succ (5,\ 1)$.

1.29. Выполните следующие задания.

(а) Предпочтения потребителя A слабо монотонны и представимы функцией полезности. Рассмотрите наборы $x = (4,\ 8)$ и $y = (4,\ 9)$. Верно ли, что $u(x) < u(y)$? Если **да**, то докажите, если **нет**, то приведите контпример.

(б) Предпочтения потребителя B гомотетичны и представимы функцией полезности. Известно, что $(4,\ 8) \succsim (2,\ 10)$. Верно ли, что $u(8,\ 16) \geqslant u(4,\ 20)$? Если **да**, то докажите, если **нет**, то приведите контрпример.

(в) Предпочтения потребителя C строго монотонны и представимы функцией полезности. Рассмотрите наборы $x = (4,\ 8)$ и $y = (4,\ 9)$. Может ли $u(x) = u(y)$? Если **да**, то докажите, если **нет**, обоснуйте почему.

1.30. Рассмотрите предпочтения потребителей относительно двух благ: суши и куриные крылышки.

(а) В каждом из следующих случаев изобразите кривые безразличия индивидов в пространстве двух благ (количество порций суши и куриных крылышек в неделю).

1) Индивид A считает, что еда есть еда и не заботится о том, как он получает необходимые калории: чем больше еды, тем лучше.

2) Индивид B, считает, что чем больше еды, тем лучше, но еда должна быть сбалансированной. Поэтому он съедает две порции суши с одной порцией куриных крылышек, и не ест одно без другого.

3) Индивид C любит куриные крылышки (чем больше, тем лучше) и безразличен к суши.

4) Индивид D очень разборчив в еде и всегда старается съесть 20 порций суши и 15 порций куриных крылышек в течении недели. Любое отклонение от этого набора крайне расстраивает индивида, причем чем сильнее отклонение, тем в большей степени.

(б) В каждом из случаев, перечисленных в п. (а), объясните, являются ли предпочтения индивидов: 1) монотонными; 2) строго монотонными; 3) выпуклыми; 4) строго выпуклыми.

(в) В каждом из случаев, перечисленных в п. (а), приведите пример функции полезности, которая могла бы описывать данные предпочтения.

1.31. Потребитель имеет предпочтения, представимые функцией полезности вида $u(x_1, x_2) = 10 + 5\,x_1^2 + x_2$. Изобразите схематично кривую безразличия для значения полезности, равного 110. Верно ли, что предпочтения индивида выпуклы? Проиллюстрируйте графически.

1.32. Пусть предпочтения индивида описываются функцией полезности Кобба–Дугласа вида $u(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^2$.

(а) Выведите уравнение кривой безразличия, проходящей через точку (4, 2). Изобразите данную кривую безразличия.

(б) Укажите все наборы, которые для индивида не хуже набора $(2, 4)$. Выведите уравнение кривой безразличия, соответствующей уровню полезности, равному 100. Изобразите данную кривую безразличия.

(в) Вычислите предельную норму замещения в точках $(2, 4)$ и $(4, 2)$. Обсудите полученный результат.

(г) Проделайте пп. (а)–(б) также для следующих функций полезности: 1) $u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$; 2) $u(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_1} + x_2$; 3) $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$.

1.33. Рассмотрите предпочтения, заданные следующим образом: $x \succsim y \Leftrightarrow 2x_2 - (x_1)^2 \geqslant 2y_2 - (y_1)^2$.

(а) Являются ли предпочтения полными?

(б) Являются ли предпочтения транзитивными?

(в) Какая функция полезности представляет заданные предпочтения? Аргументируйте.

(г) Запишите уравнение кривой безразличия, которой принадлежит набор $(x_1 = 2,\ x_2 = 1)$.

(д) Изобразите на рисунке кривую безразличия, проходящую через точку $(x_1 = 2,\ x_2 = 1)$. Укажите на рисунке направление роста полезности. Обоснуйте свой ответ.

(е) Запишите определение строгой монотонности предпочтений. Являются ли предпочтения строго монотонными?

(ж) Запишите определение выпуклости предпочтений. Являются ли предпочтения выпуклыми?

1.34. Рассмотрите кривые безразличия, изображенные на рис. 1.2.

(а) Достаточно ли информации для того, чтобы указать, как соотносятся наборы x, y и z (какой хуже, лучше и т. д.)? Если **да**, то укажите, каким образом соотносятся. Если **нет**, то объясните почему.

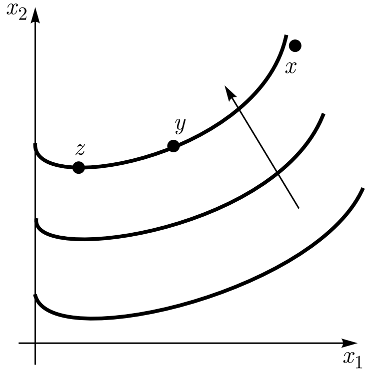

Рис. 1.2. Кривые безразличия

(б) Будут ли предпочтения, для которых изображены кривые безразличия, монотонными?

(в) Функции полезности $u(x_1, x_2)$ и $\widetilde{u}(x_1, x_2)$ представляют предпочтения, для которых изображены кривые безразличия. Известно, что $u(y_1, y_2) = 10$ и

$\widetilde{u}(y_1, y_2) = 18$. Как пройдут кривые безразличия, соответствующие данным функциям, через точку y?

1.35. Результирующая оценка по микроэкономике $O_{\text{итог}}$ во втором модуле рассчитывается с учетом накопленной оценки $O_{\text{нак}}$ и оценки, полученной на зачете $O_{\text{зач}}$, следующим образом:

$$O_{\text{итог}} = \frac{\max\{0{,}1 \cdot O_{\text{нак}} + 0{,}9 \cdot O_{\text{зач}};\ 0{,}5 \cdot O_{\text{нак}} + 0{,}5 \cdot O_{\text{зач}}\}}{10}.$$

Любая из оценок $O_{\text{нак}}$ и $O_{\text{зач}}$ может принимать любые неотрицательные значения, не превышающие 100. Будем полагать, что благосостояние студента определяется оценкой $O_{\text{итог}}$: чем она больше, тем студенту лучше, и студенту без разницы, каким способом получена оценка.

(а) Являются ли предпочтения студента относительно оценок $O_{\text{нак}}$ и $O_{\text{зач}}$ полными, транзитивными?

(б) Если это возможно, в пространстве двух оценок $O_{\text{нак}}$ и $O_{\text{зач}}$ изобразите кривые безразличия, соответствующие предпочтениям студента относительно этих оценок.

(в) Являются ли предпочтения студента относительно $O_{\text{нак}}$ и $O_{\text{зач}}$ (**i**) монотонными, (**ii**) выпуклыми? Объясните.

1.36. Рассмотрите экономику с двумя товарами (1 и 2). Пусть потребитель ценит товар 2, а товар 1 считает антиблагом. Предположим также, что предпочтения потребителя выпуклы, но не строго выпуклы.

(а) Изобразите кривые безразличия потребителя. Обоснуйте свой рисунок.

(б) Сформулируйте свойство монотонности предпочтений. Являются ли данные предпочтения монотонными?

1.37. Функция полезности студента, описывающая его предпочтения относительно жареной картошки и майонеза, может быть задана следующим образом:

$$u(x_1, x_2) = \min\{2x_1 + x_2;\ x_1 + 3x_2\},$$

где x_1 — потребление жареной картошки (в граммах), а x_2 — потребление майонеза (в граммах).

(а) Изобразите кривые безразличия для следующих значений функции полезности:

$$u(x_1, x_2) = 5,$$
$$u(x_1, x_2) = 15.$$

(б) Предположим, студент потребляет 5 ед. жареной картошки и 2 ед. майонеза. Какое количество жареной картошки студент будет готов обменять на одну единицу майонеза для того, чтобы его благосостояние не изменилось?

(в) Определите, являются ли предпочтения агента полными, транзитивными, строго монотонными, строго выпуклыми, выпуклыми. Ваши ответы должны быть обоснованы.

1.38. На экзамене студентам предложили привести определение комплементарных товаров. Некоторые из студентов дали следующие ответы:

1) «*Комплементами называются такие товары, что для любых наборов выполено следующее соотношение*: $(x, y) \sim \sim (kx, y) \sim (x, ky)$ *для любого* $k \geqslant 1$».

2) «*Комплементами называются такие товары, что добавление одного из благ в набор не влияет на значение функции полезности потребителя*».

Верные ли определения дали студенты? Поясните.

1.39. Пусть предпочтения агента, определенные на множестве N товаров, представимы дифференцируемой функцией полезности $u\,(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Воспользовавшись определением предельной нормы замещения между товарами k и l (MRS_{kl}) как максимального количества блага l, которое потребитель готов обменять на малую единицу блага k, докажите, что предельную норму замещения в точке $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_N)$ можно вычислить по формуле

$$MRS_{kl}\,(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_N) = \frac{\partial u\,(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_N)\,/\partial x_k}{\partial u\,(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_N)\,/\partial x_l}\,.$$

1.40. Пусть предпочтения агента могут быть описаны функцией полезности вида $u(x, y) = xy$. Найдите все ошибки в рассуждении: «Агент одинаково ценит блага x и y, поэтому он всегда будет готов заменить товар y товаром x в пропорции один к одному».

1.41. Докажите, что положительное монотонное преобразование функции полезности не изменяет предпочтений данного агента.

1.42. Пусть $MRS_{12}(\widetilde{x}) = 3$, где $\widetilde{x}_i > 0$ для любого i. Предпочтения агента строго выпуклы. Верно ли следующее утверждение: «Если дать потребителю ε ($\varepsilon > 0$ и близко к нулю) первого блага и взамен забрать у него 4ε второго блага, то благосостояние потребителя неизбежно снизится?» Поясните свой ответ.

1.43. Рассмотрите потребителя, обладающего набором $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$, где $\widetilde{x}_i > 0$ для любого i. Известно, что с точки зрения данного потребителя $MRS_{12}(\widetilde{x}) = 5$, а предпочтения его полны, транзитивны и строго монотонны. Полагая, что $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$, определите, если это возможно, как изменится положение (благосостояние) данного агента в следующих случаях:

(а) У потребителя заберут ε ед. второго товара, взамен предоставив ему дополнительно 4ε ед. первого товара.

(б) У потребителя заберут ε ед. первого товара, взамен предоставив ему дополнительно 4ε ед. второго товара.

(в) Изменятся ли ваши ответы в случаях (а) и (б), если опустить предпосылку о строгой монотонности предпочтений?

1.3. Выбор потребителя и спрос. Сравнительная статика и анализ благосостояния

1.44. Функция полезности потребителя имеет вид $u(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2$. Выберет ли потребитель такой набор, на который потратит весь свой доход? Обоснуйте, не решая задачу потребителя.

1.45. Ответьте на следующие вопросы:

(а) Верно ли, что если предпочтения потребителя строго монотонны, то потребитель всегда выберет такой набор, на который потратит свой доход полностью? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

(б) Верно ли, что если предпочтения потребителя слабо монотонны, то потребитель всегда выберет такой набор, на который потратит свой доход полностью? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

1.46. Потребитель тратит весь доход на первый и второй товары. Пусть при некоторых ценах $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$ и доходе m потребитель выбрал набор $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$. Рассмотрим набор $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, который при тех же ценах стоит дороже набора $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$. Верно ли, что $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \succ (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$?

1.47. Рассмотрите потребителя, предпочтения которого описываются функцией полезности $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$.

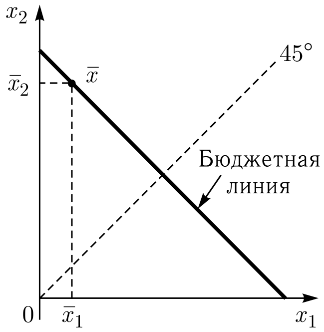

Рис. 1.3

(а) В ситуации, представленной на рис. 1.3, укажите все наборы, которые для данного потребителя одновременно и лучше, чем набор $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, и

- дешевле, чем набор $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$;
- дороже, чем набор $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$.

(б) Верно ли, что если набор стоит дороже, то он обязательно лучше? Если это не так, то среди наборов, которые дороже, чем $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, выделите те, которые хуже, чем $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$. Укажите один из таких наборов.

1.48. Верно ли, что среди множества наборов дороже данного всегда найдутся наборы хуже данного? Если вы считаете, что утверждение верно, тогда докажите его, если нет — приведите контрпример.

1.49.* Студент М тратит свой доход на дополнительные занятия английским языком и математикой. На этой неделе студент предполагает посетить 3 дополнительных урока английского языка и 4 дополнительных урока математики. Известно, что предпочтения М относительно дополнительных занятий строго монотонны, и предельная норма замещения уроков английского языка уроками математики в данной точке равна 2. Цена одного занятия английским языком в полтора раза выше цены одного занятия математикой. Покажите, как перераспределение дохода студента могло бы повысить его благосостояние.

1.50. Потребитель выбрал набор $x = (5, 2)$. Известно, что в этой точке предельная полезность первого блага равна 2, а предельная полезность второго блага равна 1. Первый товар стоит в два раза дешевле второго. Рационально ли поведение потребителя? Если **да**, то докажите, если **нет**, то укажите, потребление какого блага стоит увеличить.

1.51. В настоящий момент потребитель обладает набором $\widetilde{x}$, содержащим a единиц первого блага и b единиц второго блага ($a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$). Известно, что предпочтения данного потребителя строго монотонны. В данной точке предельная полезность первого блага равна 6, а предельная полезность второго блага равна 2. Рыночная цена первого блага в два раза меньше цены второго блага.

(а) Пусть $a > 0$, $b > 0$, покажите, как обмен по рыночным ценам может улучшить положение данного потребителя.

(б) Верно ли утверждение: «Если предельная норма замещения двух товаров в точке $\widetilde{x}$ не равна отношению цен на эти товары, то всегда есть возможность улучшить положение потребителя?» Если **да**, то докажите, если **нет**, то приведите контрпример.

1.52. Верно ли, что если строго монотонные предпочтения агента не являются выпуклыми, то точка касания бюджетной линии и кривой безразличия не является оптимальной для потребителя? Если **да**, то докажите, если **нет**, то приведите контрпример.

1.53. На рис. 1.4 изображены бюджетное множество потребителя и несколько типичных кривых безразличия (полезность агента растет по каждому товару). Отметьте на рисунке направление роста полезности и точку выбора потребителя. Поясните.

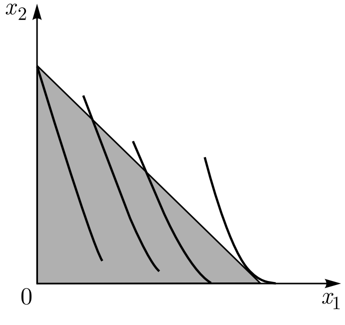

Рис. 1.4

1.54. Предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2^2\}$. Определите доход потребителя, если при ценах $p_1 = 20$, $p_2 = 20$ он выбрал набор, содержащий 2 ед. второго блага.

1.55. Приведите пример предпочтений, специфицируя функцию полезности, при которых введение потоварного налога на одно из благ может не изменить благосостояние потребителя, имеющего уровень дохода $m > 0$ и покупающего блага по ценам $(p_1, p_2) > 0$.

1.56. Предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2^2$. Определите выбор потребителя, если известно, что цены товаров $p_1 = 1$ руб., $p_2 = 4$ руб., а доход потребителя составляет 3000 руб. в месяц.

1.57. Рассмотрите потребителя, который тратит доход на два товара, x и y. Известно, что цена товара x равна 1 руб., цена товара y равна 24 руб., а доход равен 1000 руб. Предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u(x, y) = x + 72y - 6y^2$. Найдите, сколько единиц товара y будет потреблять агент.

1.58. Пусть предпочтения индивида представимы функцией полезности $u\,(x_1, x_2) = -\,(x_1 - 2)^2 - (x_2 - 3)^2$.

(а) Можно ли утверждать, что заданная функция представляет те же предпочтения, что и функция $\widetilde{u}\,(x_1, x_2) = (u\,(x_1,\, x_2))^2$? Аргументируйте свой ответ!

(б) Определите выбор потребителя, предпочтения которого представляет функция $u\,(x_1,\, x_2)$, при доходе $m = 16$ и ценах $p = (4, 2)$.

1.59. Рассмотрите потребителя, предпочтения которого описываются функцией полезности $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$. Пусть потребитель имеет доход $m = 120$ д. е. и приобретает блага по ценам $p_1 = 3$ д. е. и $p_2 = 1$ д. е. за единицу соответственно.

(а) Выпишите уравнение бюджетной линии и изобразите бюджетное множество.

(б) Найдите оптимальный потребительский набор. Приведите графическую иллюстрацию.

(в) Предположим теперь, что в силу дефицита товаров правительство ввело следующую схему рационирования: по цене $p_2 = 1$ д. е. потребитель может приобрести не более 30 ед. второго блага, а за каждую последующую единицу второго блага цена устанавливается на уровне $p_2' = 6$ д. е. Выпишите уравнение бюджетной линии и изобразите новое бюджетное множество потребителя.

(г) Найдите оптимальный потребительский набор при схеме рационирования, описанной в п. (в).

(д) Как изменится ваш ответ на п. (г), если предпочтения потребителя описываются функцией полезности $u(x_1, x_2) = x_2 - 2x_1$?

1.60. Известно, что экономический агент потребляет только два товара (x и y). Его предпочтения описываются функцией полезности $u(x, y) = 3x + 2y$. Доход потребителя равен 120 евро, цена товара x составляет 2 евро за единицу и цена товара y также составляет 2 евро за единицу. Пусть правительство решило субсидировать потребление товара y в размере 50% от его стоимости. Найдите расходы правительства на субсидирование.

1.61. Рассмотрите индивида, доход которого в неделю составляет $m = 4000$ руб. Часть денег он тратит на покупку чая в супермаркете «5 элемент», а остаток — на все остальные товары и услуги. Цена «всего остального» $p_2 = 100$ руб. Будем считать, что чай продается вразвес, и обозначим цену одной упаковки чая (весом 100 г) через p_1.

(а) Пусть $p_1 = 100$ руб. Будет ли потребителю доступен набор, содержащий 5 упаковок чая и 8 ед. «всего остального»?

В пунктах (б)–(в) изобразите бюджетное множество и задайте аналитически его границу (запишите уравнение бюджетной линии).

(б) В недавно открытом супермаркете «5 элемент» индивиду выдали карточку, позволяющую получить 5 упаковок чая бесплатно. Карточка не подлежит продаже. Цена упаковки чая — 100 руб.

(в) В ходе новой рекламной акции покупателям супермаркета предлагается приобретать первые 6 упаковок по 100 руб. за каждую, а сверх этого количества — по цене 50 руб. за каждую упаковку.

(г) Пусть предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u\,(x_1,\, x_2) = 3x_1 - 2x_2$, где x_1 — это количество упаковок чая, а x_2 — объем потребления «всего остального». Найдите оптимальный выбор потребителя при бюджетном ограничении из п. (б).

1.62. Пусть предпочтения индивида представимы функцией полезности $u\,(x_1, x_2) = (3x_1 - 7)/4$.

(а) Можно ли утверждать, что заданная функция представляет те же предпочтения, что и функция $\widetilde{u}(x_1, x_2) = x_1$? Аргументируйте свой ответ!

(б) Изобразите кривые безразличия для заданной функции $u(x_1, x_2)$.

(в) Найдите функции спроса для заданной функции полезности $u(x_1, x_2)$.

1.63. Пусть предпочтения потребителя, который получает ежемесячный доход в размере $m > 0$, представимы функцией полезности вида $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{a_1} x^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$, причем $a_i > 0$ $\forall i = \overline{1, n}$. Обозначим цену товара i через p_i.

(а) Найдите спрос потребителя на i-е благо и покажите, что при любых положительных ценах потребитель всегда будет тратить на это благо фиксированную часть своего дохода.

(б) Изобразите графически кривую доход — потребление при $n = 2$ для i-го блага и объясните полученный результат.

1.64. Господин M очень любит китайский зеленый чай и черный цейлонский чай. Ежемесячно часть своего дохода, составляющую m условных единиц, он тратит на любимые напитки. Предпочтения г-на M могут быть описаны функцией полезности вида $u(x, y) = 100\,x + y$, где x — потребление зеленого чая, а y — потребление черного чая. В небольшом городке, где проживает M, китайский зеленый чай приходится покупать у единственного поставщика, причем чем больше чая у него покупаешь, тем дороже он обходится. Таким образом, зеленый чай массой x стоит x^2 рублей. Черный чай стоит p условных единиц.

(а) Верно ли, что господину M придется отказаться от потребления зеленого чая? Будет ли полученный результат справедлив для любых положительных уровней цен черного и зеленого чая и дохода господина M? Обоснуйте свой ответ.

(б) Найдите функции спроса господина M на зеленый и черный чай.

1.65.* Предпочтения потребителя заданы функцией полезности $u(x_1, x_2) = 4\sqrt{x_1} + x_2$, где x_1 — потребление первого блага, а x_2 — потребление второго блага. Потребитель может позволить себе наборы $(12, 1)$ и $(8, 9)$, потратив весь свой доход.

(а) Определите выбор потребителя.

(б) Предположим, что первый товар подешевел в 20 раз, а доход потребителя не изменился. Каков будет выбор потребителя в этом случае?

(в) Найдите функции спроса потребителя на первое и второе благо.

(г) Изобразите кривую доход–потребление и кривую Энгеля для данного потребителя и охарактеризуйте каждый товар с точки зрения реакции на изменение дохода.

1.66. Предположим, предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_2} + x_1$.

(а) Найдите для заданной функции предельную норму замещения второго блага первым.

(б) Предположим, у потребителя есть набор ($x_1 = 1$, $x_2 = 16$). От какого количества первого блага он готов отказаться при увеличении потребления второго блага на малую единицу при неизменной полезности? Аргументируйте свой ответ. Приведите графическую иллюстрацию.

(в) Найдите функции спроса. Приведите графические иллюстрации.

1.67.* Пусть предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u(x_1, x_2)$. Полагая, что m — доход потребителя ($m > 0$), а $p = (p_1, p_2)$ — вектор цен, для функций полезности

(а) $u(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, где α_1, $\alpha_2 > 0$,

(б) $u(x_1, x_2) = \min\{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2\}$, где α_1, $\alpha_2 > 0$,

(в) $u(x_1, x_2) = (x_1)^2 + (x_2)^2$,

выполните следующие задания:

(i) найдите функции спроса на каждое благо;

(ii) охарактеризуйте каждый товар с точки зрения реакции на изменение дохода, на изменение своей цены, на изменение цены другого блага;

(iii) изобразите кривую цена–потребление, кривую доход–потребление и кривую Энгеля для первого блага.

1.68. На рис. 1.5 изображен участок кривой цена–потребление для некоторого потребителя. Известно, что цена блага x повышалась, а доход потребителя и цена блага y оставались неизменными. Можем ли мы сделать однозначный вывод о том,

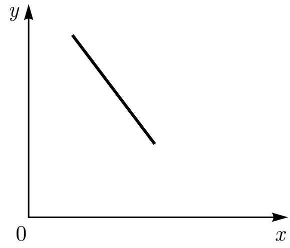

Рис. 1.5. Участок кривой цена–потребление

является ли благо x обычным товаром или товаром Гиффена (на рассматриваемом участке), анализируя поведение кривой на данном участке? Ваш ответ должен быть обоснован.

1.69. На рис. 1.6, *а* и рис. 1.6, *б* изображены участки кривых доход–потребление для двух различных потребителей. Цены блага x и блага y оставались неизменными, в то время как доход агентов увеличивался. Какой вывод о том, является ли благо x нормальным или инфериорным (на рассматриваемом участке при данных ценах) для каждого потребителя, можно сделать на основе анализа поведения этих кривых? Ваш ответ должен быть обоснован.

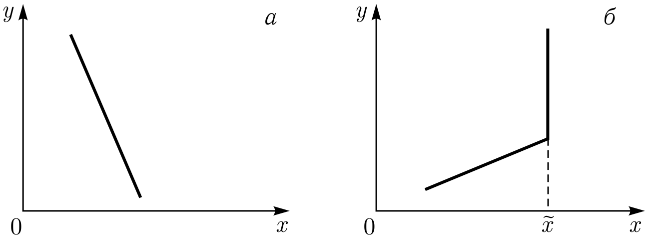

Рис. 1.6. Участки кривых доход–потребление

1.70. Функция спроса на первый товар имеет следующий вид $x_1(p_1, p_2, m) = mp_2/(2p_1^2)$, где p_i — цена i-го блага и $p_i > 0$, $m > 0$ — доход потребителя. Можно ли утверждать, что первый товар является (валовым) заменителем второго товара? Поясните.

1.71. Если спрос на первый товар описывается следующей функцией $x_1(p_1, p_2, m) = m/(p_1 + p_2)$ (где p_i — цена i-го блага, $p_i > 0$, $m > 0$ — доход потребителя), то этот товар является (валовым) заменителем или дополнителем второго товара? Поясните.

1.72. Как изменятся расходы пенсионера на продукты питания, если его пенсия возрастет в полтора раза, а цены на все товары и услуги вырастут на 50%? Других источников дохода, кроме пенсии, у пенсионера нет. Предпочтения его относительно продуктов питания и всех остальных товаров и услуг остаются неизменными, и весь свой доход пенсионер всегда тратит полностью.

1.73.* Потребитель тратит свой доход, который составляет 600 д. е., на два товара, x и y. Предпочтения потребителя представимы функцией полезности вида $u(x, y) = xy$. Цены товаров равны соответственно $p_x = 25$ д. е., $p_y = 36$ д. е. Товар y облагается потоварным налогом, который составляет 4 д. е. за каждую приобретаемую единицу этого блага.

(а) Найдите доходы правительства от налогообложения товара y.

(б) Предположим, что правительство хочет заменить потоварный налог на товар y паушальным налогом. Найдите наибольшую величину паушального налога, который позволил бы данному потребителю не ухудшить свое положение. Как изменилось бы потребление товара y при такой смене политики правительства?

(в) Сравните величины, полученные в пп. (а) и (б), и объясните полученный результат.

(г) Будет ли результат п. (в) справедлив при любых предпочтениях потребителя? Объясните.

1.74. Студент тратит всю свою стипендию на обеды в студенческой столовой и развлечения. Известно, что обеды субсидируются и субсидия составляет 25% от стоимости каждого обеда. В настоящее время в ректорате рассматривается проект, согласно которому субсидии на обеды отменяются и заменяются персональными компенсациями. Величина компенсации будет в точности равна расходам на субсидирование обедов для каждого студента. Известно, что предпочтения студента монотонны и выпуклы.

(а) Верно ли, что если данный проект будет одобрен ректоратом, то благосостояние студента не снизится? Зависит ли ваш ответ от величины субсидии на стоимость, величин стипендии и цен, предпочтений студента?

(б) Назовите причины, если таковые имеются, по которым проведение такой (нейтральной к бюджету учебного заведения) замены стоимостной субсидии паушальной субсидией может привести к результатам, отличным от п. (а)?

(в) Пусть субсидия на стоимость обедов будет заменена паушальной субсидией, меньшей, чем расходы учебного заведения на субсидию на стоимость для данного студента. Возможно ли, что такая замена (**i**) повысит благосостояние студента, (**ii**) понизит благосостояние студента?

1.75. Ежемесячно домохозяйства, имеющие низкий доход, получают от городских властей талон на сумму S, используя который в специализированном магазине домохозяйства могут приобрести продукты питания. В связи с участившимися случаями незаконной продажи этих талонов городские власти решили отменить выдачу талонов и субсидировать покупку продуктов питания в этих же магазинах для данных домохозяйств. Предположим, что предпочтения каждого домохозяйства относительно продуктов питания и всех остальных товаров известны властям и являются строго монотонными и строго выпуклыми. Замена талонов потоварным субсидированием осуществляется по индивидуальному для каждого домохозяйства тарифу таким образом, чтобы расходы местных властей на субсидирование каждого домохозяйства остались неизменными. Как в этом случае изменится благосостояние каждого домохозяйства и объем потребления им продуктов питания?

1.76. Предположим, что правительство приняло решение о субсидировании оплаты проезда для семей с низким уровнем дохода. Субсидия составила $s\%$ от стоимости проезда только для количества поездок в месяц, не превышающих $\overline{x}$ (все поездки сверх $\overline{x}$ семья должна оплачивать по полному тарифу). Верно ли, что эквивалентная по стоимости субсидирования оплаты проезда для каждой семьи денежная помощь не ухудшила бы положение этой семьи?

1.77. Верно ли, что семья военнослужащего предпочтет получить от государства жилищный сертификат на некоторую сумму, позволяющий этой семье оплатить часть стоимости жилья, вместо субсидирования стоимости каждого квадратного метра жилья для семей военнослужащих, если расходы государства на жилищный сертификат и субсидирование стоимости жилья для данной семьи будут одинаковы? Проиллюстрируйте решение графически.

1.78. Предпочтения потребителя могут быть описаны функцией полезности следующего вида: $u(x_1, x_2) = \min\{2x_1 + x_2; x_1 + 2x_2\}$. Цены благ одинаковы и равны p. Доход потребителя равен m ($p > 0$, $m > 0$).

(а) Найдите минимальный размер потоварного налога на первое благо, t, который может заставить потребителя отказаться от потребления этого блага.

(б) Найдите наименьший размер паушальной субсидии S, которая позволит потребителю после введения потоварного налога, описанного в п. (а), вернуться на прежний уровень благосостояния.

1.4. Выявленные предпочтения

1.79. Рассмотрите ситуацию, изображенную на рис. 1.7. Пусть при ценах $p = (p_1, p_2)$ потребитель выбрал набор A, а при ценах $q = (q_1, q_2)$ выбрал набор B. Предположим, потребитель тратит весь свой доход на оба блага и его предпочтения согласуются со слабой аксиомой выявленных предпочтений (WARP — Weak Axiom of Revealed Preferences). Отметьте схематично на рисунке набор B. Обоснуйте свой ответ.

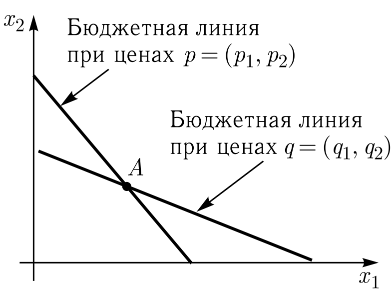

Рис. 1.7

1.80. Рассмотрите ситуацию, изображенную на рис. 1.8. Пусть A — набор, выбранный потребителем при ценах $p' = (p'_1, p'_2)$, а B — выбор потребителя при ценах $p'' = (p''_1, p''_2)$.

(а) Сформулируйте слабую аксиому выявленных предпочтений.

(б) Объясните, согласуется ли подобный выбор со слабой аксиомой выявленных предпочтений?

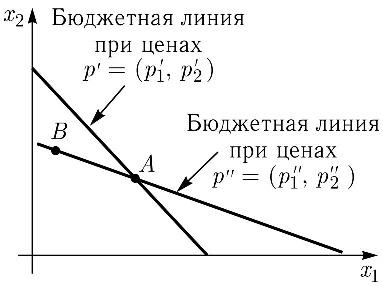

Рис. 1.8

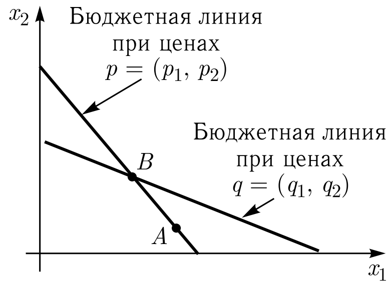

Рис. 1.9

1.81. Рассмотрите ситуацию, изображенную на рис. 1.9. Пусть A — набор, выбранный потребителем при ценах $p = (p_1, p_2)$, а B — выбор потребителя при ценах $q = (q_1, q_2)$.

(а) Сформулируйте слабую аксиому выявленных предпочтений.

(б) Объясните, согласуется ли подобный выбор со слабой аксиомой выявленных предпочтений?

1.82. На экзамене по микроэкономике студентам было предложено привести определение набора, который выявлено предпочитается другому набору. Один из студентов привел следующее определение: «*Набор x выявлено предпочитается набору y, если при ценах p набор x стоит меньше, чем набор y*». Верное ли определение дал студент? Обоснуйте.

1.83.* Доход потребителя в текущем периоде вырос в четыре раза по сравнению с доходом в базисном периоде. Одновременно цены на оба блага возросли в шесть раз. Что можно сказать об изменении благосостояния потребителя? Считайте, что в каждом периоде потребитель тратит весь свой доход на оба блага.

1.84. Пусть потребитель при ценах $p = (p_1, p_2)$ выбрал набор $x = (x_1, x_2)$, а при ценах $q = (q_1, q_2)$ — набор $y = (y_1, y_2)$. Будем считать, что потребитель тратит весь свой доход на оба блага. Рассмотрите следующие случаи:

(а) $p = (4,\ 6)$, $x = (6,\ 6)$, $q = (6,\ 3)$, $y = (10,\ 0)$;

(б) $p = (4,\ 6)$, $x = (12,\ 6)$, $q = (6,\ 3)$, $y = (12,\ 4)$;

(в) $p = (4,\ 2)$, $x = (2,\ 4)$, $q = (2,\ 4)$, $y = (4,\ 2)$;

(г) $p = (4,\ 2)$, $x = (8/3,\ 8/3)$, $q = (2,\ 4)$, $y = (4,\ 2)$;

(д) $p = (4,\ 2)$, $x = (8/3,\ 8/3)$, $q = (2,\ 4)$, $y = (2,\ 3)$.

В каждом из случаев объясните, согласуется ли подобное поведение со слабой аксиомой выявленных предпочтений. Приведите графическую иллюстрацию. Что можно сказать о том, какой набор (x или y) для потребителя более предпочтителен?

1.85. Рассмотрите потребителя, который тратит доход на два товара: хлеб и картофель. Известно, что N лет назад он покупал хлеб по цене 10 коп. за буханку и картофель по цене 14 коп. за кг и в месяц потреблял 11 буханок хлеба и 7 кг картофеля. Известно также, что его текущий доход составляет 393 руб. в месяц, буханка хлеба стоит 21 руб., а кг картофеля 16 руб. Будем считать, что предпочтения потребителя не изменились. Можно ли сделать вывод, что потребителю N лет назад было лучше, чем сейчас?

1.86. Пусть потребитель при ценах $p = (p_1, 4)$, $p_1 > 0$, выбрал набор $x = (8, 8)$, а при ценах $q = (4, 4)$ — набор $y = (2, 23)$. Будем считать, что потребитель тратит весь свой доход на оба блага.

(а) Сформулируйте слабую аксиому выявленных предпочтений.

(б) При каких значениях p_1 слабая аксиома выявленных предпочтений не выполнена?

(в) При каких значениях p_1 слабая аксиома выявленных предпочтений выполнена? Какой из двух наборов (x или y) выявлено предпочитается потребителем?

1.87. Пусть потребитель при ценах $p = (10, 4)$ выбрал набор $x = (8, 8)$, а при ценах $q = (4, 4)$ — набор $y = (2, y_2)$, $y_2 > 0$. Будем считать, что потребитель тратит весь свой доход на оба блага.

(а) Сформулируйте слабую аксиому выявленных предпочтений.

(б) При каких значениях y_2 слабая аксиома выявленных предпочтений не выполнена?

(в) Пусть слабая аксиома выявленных предпочтений выполнена. При каких значениях y_2 набор x выявлено предпочитается набору y? Приведите графическую иллюстрацию.

1.88. Пусть потребитель, предпочтения которого удовлетворяют слабой аксиоме выявленных предпочтений, потребляет два блага — яблоки и груши. Предположим, цена яблок возросла, а цена груш упала. Если после изменения цен потребитель, по-прежнему, потратив весь свой доход, может приобрести исходный набор яблок и груш, то верно ли, что он предпочтет потреблять, по крайней мере, то же количество груш?

1.89. В период 0 при ценах $p^0 = (1,\ 1)$ потребитель выбрал набор $x^0 = (5,\ 3)$. В период 1 при ценах $p^1 = (1,\ 2)$ потребитель выбрал набор $x^1 = (8,\ 2)$. Известно, что потребитель тратит весь свой доход на оба блага.

(а) Согласуется ли такое поведение потребителя со слабой аксиомой выявленных предпочтений? Обоснуйте свой ответ.

(б) Можно ли сделать какой-либо вывод о том, как данный потребитель соотносит наборы x^0 и x^1?

(в) Можно ли сделать какой-либо вывод о том, как данный потребитель соотносит наборы $x^1 = (8,\ 2)$ и $\overline{x} = (1,\ 6)$?

(г) Можно ли сделать какой-либо вывод о том, как данный потребитель соотносит наборы $x^1 = (8,\ 2)$ и $\widetilde{x} = (4,\ 5)$?

1.90.* По мотивам заданий LSE [2.7]. Доход потребителя в базисном периоде составлял m. Известно, что в текущем периоде его доход возрос на 50% относительно базисного значения. Будем считать, что в каждый период времени потребитель тратит свой доход полностью. Если это возможно, то на основании имеющейся информации об оценке индексов цен Ласпейреса (L_p) и Пааше (P_p) определите, как изменилось благосостояние потребителя в текущем периоде по сравнению с базисным периодом, если

(i) $L_p > 3/2$ и $P_p < 3/2$,

(ii) $L_p < 3/2$ и $P_p > 3/2$.

1.91.* Пусть в 2000 г. индивид C потреблял 2 кг груш и x_2^{2000} кг яблок в месяц, а в 2012 г. он потреблял 5 кг груш и 3 кг яблок в месяц. В 2000 г. и груши, и яблоки продавались по цене 5 д. е. за 1 кг. А в 2012 г. 1 кг груш стоил 4 д. е., а яблок — 6 д. е. Считайте, что потребитель тратит весь свой доход на оба блага.

(а) Запишите определение индекса цен Ласпейреса в общем виде (не подставляя цифры).

(б) Найдите величину x_2^{2000}, при которой благосостояние индивида C в 2012 г. по сравнению с 2000 г. возросло.

(в) Изобразите ситуацию графически. На рисунке отметьте наборы x^{2000} и x^{2012} и подробно объясните их расположение.

1.92.* Пусть в 2000 г. индивид D потреблял 2 кг груш и x_2^{2000} кг яблок в месяц, а в 2011 г. он потреблял 6 кг груш и 2 кг яблок в месяц. В 2000 г. груши и яблоки продавались по цене 5 д. е. и 7 д. е. за 1 кг, соответственно. А в 2011 г. 1 кг груш стоил 4 д. е., а яблок — 6 д. е. Считайте, что потребитель тратит весь свой доход на оба блага. При каких значениях x_2^{2000} индекс объема Пааше больше единицы? Что можно сказать о том, как изменилось благосостояние потребителя в 2011 г. по сравнению с 2000-м?

1.93. Пусть в 2000 г. индивид X потреблял 2 кг груш и 4 кг яблок в месяц, а в 2011 г. он потребляет 5 кг груш и 3 кг яблок в месяц. В 2000 г. груши и яблоки продавались по цене 5 д. е. и 1 д. е. за 1 кг соответственно. А в 2011 г. 1 кг груш стоит 4 д. е., а яблок — 6 д. е. Считайте, что потребитель тратит весь свой доход на оба блага.

(а) Вычислите индекс объема Пааше.

(б) Опираясь на результат п. (а), что можно сказать о том, как изменилось благосостояние индивида X в 2011 г. по сравнению с 2000 г.?

1.94. Всю свою пенсию пенсионерка тратит только на еду, одежду и коммунальные услуги. В прошлом году пенсионерка тратила 5000 руб. на еду и одежду и 2000 руб. на коммунальные услуги. В этом году расходы на еду и одежду составили 6000 руб., а на коммунальные услуги — 3000 руб. Отвечая на вопросы анкеты социологического исследования, она определила, что для такого же уровня потребления еды, одежды и коммунальных услуг, что и в прошлом году, в этом году ей понадобилась бы сумма в размере 9500 руб., а если бы она потребляла текущий объем еды, одежды и коммунальных услуг в прошлом году, то ей понадобилась бы сумма в размере 8500 руб.

(а) Определите на основе имеющейся информации, если это возможно, индексы цен Ласпейреса (L_p) и Пааше (P_p).

(б) Можно ли на основе имеющейся информации однозначно определить, как изменилось благосостояние пенсионерки в этом году по сравнению с прошлым годом? Обоснуйте.

1.95. Пенсионер К тщательно контролирует все свои ежемесячные расходы и всегда полностью тратит весь свой доход. Помимо пенсии он получает финансовую поддержку от своих детей, которая от месяца к месяцу может различаться. К заметил, что в марте и апреле его потребительская корзина состояла из одних и тех же товаров, но количество их не было одинаково по всем товарам и на некоторые товары цены в марте и апреле были различны. Однако пенсионер отметил, что в апреле его положение ухудшилось. Можем ли мы на основании этих наблюдений сделать вывод о том, что его апрельская потребительская корзина в марте стоила дешевле, чем мартовская корзина в марте? Обоснуйте.

1.96. Пенсионерка М тщательно контролирует все свои ежемесячные расходы и всегда полностью тратит весь свой доход. Помимо пенсии она получает финансовую поддержку от своих детей, которая от месяца к месяцу может различаться. М заметила, что в январе и феврале ее потребительская корзина состояла из одних и тех же товаров, но количество их не было одинаково по всем товарам, а на некоторые товары цены в январе и феврале были различны. Однако пенсионерка отметила, что в феврале ее положение улучшилось. Можем ли мы на основании этих наблюдений сделать вывод о том, что ее февральская потребительская корзина в январе стоила дороже, чем январская корзина в этот же месяц? Обоснуйте.

1.97. Рассмотрите потребителя, который тратит весь доход m на два товара, x и y. Стоимость товара x составляет p_x. Потребитель выбрал набор, содержащий $\widetilde{x} = 10$. Известно, что компания, предоставляющая товар x, изменила тарифную политику. Теперь потребитель должен заплатить фиксированную плату $A = 5p_x$, а цена за каждую единицу товара составляет теперь $0{,}6\,p_x$. Если известно, что потребитель увеличил потребление товара x, то как изменилось благосостояние потребителя?

1.98. Рассмотрите студента, который тратит весь доход на два товара — посещение бассейна и агрегированный товар. Доход студента составляет m руб. в месяц. Стоимость одного посещения бассейна равна p_1 руб. Известно, что в прошлом месяце студент 20 раз посетил бассейн. В текущем месяце руководство бассейна изменило тарифную политику. Теперь студент должен оплатить стоимость месячного абонемента $A = 10p_1$, при этом цена одного посещения бассейна снизилась до $0{,}5p_1$. Будет ли теперь студент реже посещать бассейн и как изменится благосостояние студента?

1.99. Рассмотрите студента, который тратит весь доход на два товара — посещение бассейна и агрегированный товар. Доход студента составляет m руб. в месяц. Стоимость одного посещения бассейна равна p_1 руб. Известно, что в прошлом месяце студент $\widehat{x}_1$ раз посетил бассейн. В текущем месяце руководство бассейна изменило тарифную политику. Теперь студент должен оплатить стоимость месячного абонемента $A = 0{,}6p_1\widehat{x}_1$, при этом цена одного посещения бассейна снизилась до $0{,}3p_1$. Будет ли теперь студент реже посещать бассейн, если посещение бассейна для него — нормальное благо?

1.100.* Пусть агент потребляет два блага: x и y. Доход агента составляет 6000 руб. в неделю. Товар y — агрегированное благо, цена которого равна 30 руб. Благо x субсидируется правительством, причем величина субсидии составляет 30 руб. на каждую купленную единицу товара. До введения субсидии цена одной единицы блага x была равна 150 руб. Известно, что потребитель полностью тратит свой доход и при субсидировании он выбрал набор, содержащий 25 ед. товара x.

(а) Если вместо потоварной субсидии правительство предложит потребителю бесплатный талон, на получение 6 ед. блага x, согласится ли данный потребитель на такое предложение? Поясните свой ответ и проиллюстрируйте решение графически.

(б) Если потребитель согласится на предложение правительства, то как изменится его потребление блага x, по сравнению с потреблением при субсидировании этого товара? Обоснуйте ответ.

1.101. По мотивам [2.8]. Рассмотрите студента, имеющего доход 120 д. е. в неделю, который часть денег тратит на уроки вождения, а остаток — на все остальные товары и услуги. В августе один час занятия по вождению стоил 4 д. е. и при этом студент занимался 10 часов в неделю. Предположим, с сентября перед началом учебного года автошкола решила изменить ценовую политику, введя плату за посещение автошколы 30 д. е. в неделю, но снизив цену одного часа занятия до 1 д. е.

(а) Выведите уравнение бюджетной линии и изобразите бюджетное множество студента в августе и сентябре.

(б) Как отразится изменение ценовой политики автошколы в сентябре по сравнению с августом на благосостоянии студента, если его предпочтения согласуются со слабой аксиомой выявленных предпочтений? Приведите графическую иллюстрацию.

1.102. Потребитель всегда тратит одинаковую часть своего постоянного ежемесячного дохода на два товара, x и y. В предыдущем месяце он купил 6 ед. блага x по цене 40 руб. за единицу и 4 ед. блага y по цене 60 руб. за единицу. В этом месяце потребитель купил 4 ед. блага x по цене 60 руб. за единицу, а на остальные деньги он докупил благо y по цене 40 руб. за единицу.

(а) Какое количество блага y купил потребитель в этом месяце?

(б) Верно ли, что такое поведение потребителя не противоречит предположению о рациональном поведении? Ответ обоснуйте.

(в) Можно ли сделать однозначный вывод о том, что благосостояние агента по сравнению с прошлым месяцем неизбежно возрастет? Ответ обоснуйте.

(г) Если в следующем месяце при ценах текущего месяца потребитель потратит на эти товары на 40 руб. больше, то он может сократить потребление товара y, по сравнению с прошлым месяцем. Верно ли данное утверждение? Ответ обоснуйте.

1.103. Мистер N является владельцем салона красоты. Чтобы привлечь в свой салон клиентов, он планирует изменить схему оплаты за услуги салона. Наряду с почасовой оплатой за услуги салона (p долл./час) он предлагает ввести следующую гибкую схему оплаты услуг салона:

- для клиентов, посещавших салон менее $\overline{X}$ часов в месяц: при внесении фиксированной платы F посещение $\overline{X}$ часов в месяц гарантируется без взимания дополнительной платы, однако цена каждого часа посещения сверх $\overline{X}$ часов будет стоить посетителям дороже обычного тарифа ($\overline{p} > p$);

- для клиентов, посещавших салон более $\overline{X}$ часов в месяц: при внесении фиксированной платы F посещение $\overline{X}$ часов в месяц гарантируется без взимания дополнительной платы, однако цена каждого часа посещения сверх $\overline{X}$ часов будет стоить посетителям дороже обычного тарифа ($\overline{p} > p$).

Величины F и $\overline{p}$ будут подбираться для каждого клиента таким образом, чтобы прежний выбор был в точности доступен. Мистеру N известно, что для каждого его клиента услуги салона являются благом, которое они ценят.

(а) Верно ли, что все клиенты, посещавшие салон менее $\overline{X}$ часов в месяц, перейдут на новую схему оплаты услуг? Обоснуйте ответ.

(б) Верно ли, что все клиенты, посещавшие салон более $\overline{X}$ часов в месяц, перейдут на новую схему оплаты услуг? Обоснуйте ответ.

(в) Верно ли, что если клиенты, посещавшие салон более $\overline{X}$ часов в месяц, перейдут на новую схему оплаты, то они неизбежно увеличат объем потребления услуг салона? Обоснуйте ответ.

1.104. Пусть потребитель тратит весь свой доход на два блага: x и y. Товар x стоит в два раза дороже товара y. Правительство решило субсидировать стоимость товара x, и субсидия составила 20% от стоимости этого товара. После введения субсидии агент выбрал набор, содержащий 15 ед. товара x и 26 ед. товара y. Известно, что доход агента не меняется за рассматриваемый период и потребитель тратит его полностью.

Если бы вместо субсидии на стоимость потребитель получил в подарок талон на бесплатное получение 3 ед. товара x, то как изменилось бы его благосостояние? Обоснуйте ответ.

1.105. Малообеспеченная многодетная семья M с трудом сводит концы с концами и тратит 3000 руб. в неделю на продукты питания и 1500 руб. на остальные товары. Новая программа помощи малообеспеченным семьям предоставляет семьям выбор между получением материальной помощи, составляющей 1500 руб. в неделю, которую они могут потратить по своему усмотрению, и покупкой продовольственных купонов для приобретения продуктов в специализированных магазинах. Каждый купон, дающий право на получение продуктов на 2 руб., будет обходиться семье только в 1 руб., причем перепродажа купонов запрещена. Будем полагать, что многодетная семья с ростом дохода увеличивает потребление продуктов питания. Семья M обратилась к вам, как к будущему экономисту, с просьбой помочь выбрать одну из двух предложенных альтернатив. Какой вид помощи предложили бы вы выбрать многодетной семье? Обоснуйте свой ответ.

1.106. Агент M потребляет только два товара и полностью тратит на них свой доход. Цена первого товара равна 2 д. е., а цена второго товара равна 1 д. е. Доход потребителя составляет 60 д. е., но он вынужден платить паушальный налог в размере 10 д. е. В этих условиях потребитель выбирает набор, содержащий 30 ед. второго товара. Правительство решило отменить паушальный налог и вместо него ввести потоварный налог в размере 1 д. е. за каждую единицу второго блага. Это привело к уменьшению потребления второго блага до 20 ед. Известно, что за рассматриваемый период цена первого товара и доход потребителя не менялись.

(а) Какова сумма налоговых поступлений, полученных от данного потребителя при введении потоварного налога? Как изменились доходы государства, получаемые с данного потребителя?

(б) Предположим, что вместо потоварного налога на второе благо правительство ввело потоварные налоги на оба блага, причем введенные налоги изменили цены таким образом, что соотношение цен на первое и второе благо осталось таким же, как до введения потоварных налогов, причем новый вид налогообложения приносит правительству такой же доход, как и в п. (а). Как вы считаете, какой вид потоварного налогообложения предпочел бы потребитель?

1.107. По мотивам заданий LSE [27]. Выпускник Академии МВД Макаров — начинающий криминалист. В настоящее время он расследует исчезновение гражданина Захарова, который подозревается в совершении преступления. Макаров выяснил, что гражданин Захаров покинул родной город и сменил фамилию. Есть трое подозреваемых, которые очень похожи на Захарова: гражданин Иванов, проживающий в городе И, гражданин Петров, проживающий в городе П, и гражданин Смирнов, проживающий в городе С. Молодому криминалисту удалось получить записную книжку Захарова, в которую он очень аккуратно записывал все свои расходы. При внимательном наблюдении за подозреваемыми Макаров обнаружил, что они, как и Захаров, любят одинаковые сорта пива и сигарет. Из записей в записной книжке за неделю до исчезновения стало известно, что Захаров покупал в день две пачки сигарет по 20 руб. за пачку и две бутылки пива по 10 руб. за бутылку. Наблюдения за подозреваемыми выявило следующие факты:

- Иванов покупает в день две пачки сигарет по 10 руб. каждая и одну бутылку пива за 30 руб.;
- Петров покупает в день одну пачку сигарет за 20 руб. и три бутылки пива по 20 руб. каждая;
- Смирнов покупает одну пачку сигарет за 40 руб. и 4 бутылки пива по 10 руб. каждая.

Полагая, что преступник и все подозреваемые полностью тратят весь свой доход, можно ли сделать вывод о том, кто из подозреваемых не является гражданином Захаровым?

1.108. По мотивам [2.4; гл. 8]. Предположим, что правительство планирует введение потоварного налога на импортные мясопродукты. Данная политика должна привести к сокращению спроса на импортируемое мясо. Однако эти меры непопулярны среди широких слоев населения, в частности пенсионеров и малообеспеченных семей. Поэтому было предложено одновременно возвратить этим группам населения доходы, собранные посредством данного налога, в виде прямых денежных выплат. Противники данной политики утверждают, что она не окажет влияния на спрос на импортное мясо, так как потребители смогут возвращенные им деньги потратить на покупку дополнительного количества мясопродуктов. Проанализируйте данную ситуацию относительно некоторой семьи, для которой выплаты осуществляются на основе ее потребления мяса, и ответьте на следующие вопросы.

(а) Как изменится потребление мясопродуктов и благосостояние семьи при такой политике правительства?

(б) Как изменилось бы потребление мясопродуктов, если бы возврат налога семье основывался бы не на ее конечном потреблении данного товара, а на его потреблении до введения налога?

(в) Какую сумму при этом (п. (б)) выплачивало бы правительство семье — бóльшую, чем сумма, получаемая в виде налоговых поступлений, или меньшую?

1.109. В задаче 1.16 (тарифы на местные телефонные соединения в Санкт-Петербурге) найдите, если это возможно, для потребителя с ежемесячным доходом 10 000 руб. наиболее выгодный тариф, полагая, что ежемесячно абонент разговаривает по телефону 450 минут и полностью тратит весь свой доход.

1.5. Декомпозиция Слуцкого при фиксированном доходе потребителя

1.110. На рис. 1.10, приведенном ниже, изображено разложение изменения спроса на первое благо в результате снижения цены этого блага на изменение спроса в силу эффекта замещения и изменение спроса в силу эффекта дохода. Исходя из изображенной ситуации, ответьте на следующие вопросы:

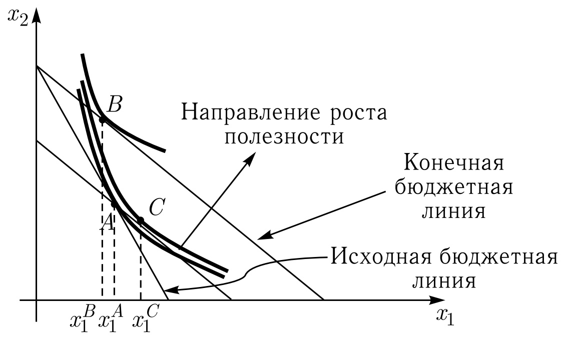

Рис. 1.10

(а) Верно ли, что здесь проиллюстрирована декомпозиция по Хиксу? Обоснуйте свой ответ.

(б) Отметьте на рисунке изменение спроса в силу эффекта дохода и изменение спроса в силу эффекта замещения. Обоснуйте свой ответ.

(в) Каким благом является первое благо: 1) нормальным или инфериорным? 2) обычным или товаром Гиффена? Обоснуйте свой ответ.

1.111. На рис. 1.11, *а* и рис. 1.11, *б* изображено разложение изменения спроса на первое благо в результате снижения цены этого блага на изменение спроса в силу эффекта дохода и изменение в силу эффекта замещения по Слуцкому. Отметьте на

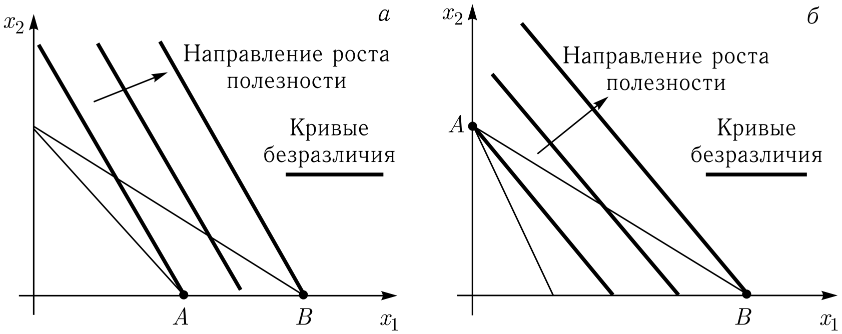

Рис. 1.11

рисунках исходную бюджетную линию, новую бюджетную линию, изменение спроса на первое благо в силу эффекта дохода и изменение спроса в силу эффекта замещения. Обоснуйте свой ответ.

1.112. Рассмотрите потребителя, имеющего доход $m = 16$. Пусть цены благ заданы вектором $p = (2,\ 2)$. Предположим цена первого блага упала до $p_1' = 1$. Для функций полезности:

(1) $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$;

(2) $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$.

Ответьте на следующие вопросы:

(а) Найдите изменение спроса на первое благо. Приведите графическую иллюстрацию.

(б) Вычислите изменение спроса на первое благо в силу эффекта дохода и эффекта замещения (по Слуцкому). Приведите графическую иллюстрацию.

(в) Вычислите изменение спроса на первое благо в силу эффекта дохода и эффекта замещения (по Хиксу). Приведите графическую иллюстрацию.

1.113.* Рассмотрите двухтоварную экономику, где при изменении цены одного из товаров объем потребления этого товара изменяется **(а)** только за счет эффекта замещения и **(б)** только за счет эффекта дохода. Приведите примеры таких предпочтений агентов, что изменение в объеме спроса на некоторый товар соответствует указанным условиям, и проиллюстрируйте графически изменения в объемах потребления за счет указанных эффектов.

1.114. Пусть предпочтения потребителя определенные относительно двух товаров x и y, полны, транзитивны и строго

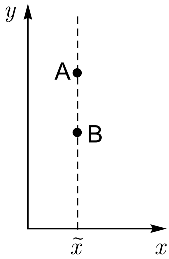

Рис. 1.12

монотонны. На рис. 1.12 изображен выбор потребителя (наборы A и B) в двух различных ценовых ситуациях, где $p_x^{\mathsf{A}}/p_y^{\mathsf{A}} > p_x^{\mathsf{B}}/p_y^{\mathsf{B}}$ и $p_x^k,\ p_y^k > 0$ $\forall k = \mathsf{A}, \mathsf{B}$.

(а) Изобразите бюджетные линии, соответствующие указанным экономическим ситуациям.

(б) Удовлетворяет ли выбор потребителя предположению о рациональном поведении? Обоснуйте свой ответ.

(в) Сравните благосостояние потребителя в ситуациях A и B.

(г) Верно ли, что **(i)** товар x является инфериорным, **(ii)** товар y является нормальным товаром? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

1.115. В задаче 1.102 объясните, можно ли сделать однозначный вывод о том, что оба товара являются для потребителя нормальными благами?

1.116. Пусть в базисном периоде агент тратил весь свой доход на два блага, расходуя на каждый из товаров ровно половину своего постоянного ежемесячного дохода. В результате налогообложения и субсидирования в текущем периоде цена первого блага возросла на 20%, а цена второго блага снизилась на 20%. Известно, что в текущем периоде потребитель также тратит весь свой доход на два блага.

Верны ли следующие утверждения? Ваши ответы должны быть обоснованы.

(а) Благосостояние агента в текущем периоде по сравнению с базисным не изменилось.

(б) Если после изменения цен правительство введет 10% подоходный налог, то благосостояние потребителя неизбежно снизится по сравнению с начальной ситуацией.

(в) Если после введения подоходного налога агент потребляет такое же количество первого товара, как и до изменения цен, то первый товар является для агента инфериорным благом.

1.117.* Спортсмен-тяжеловес каждый месяц тратит сумму m д. е. на еду, приготовленную из натуральных продуктов, и специальные пищевые добавки. Только различная комбинация этих составляющих позволяет спортсмену подбирать необходимый рацион для поддержания хорошей физической формы, причем полная замена одной компоненты рациона другой для тяжеловеса невозможна. В допустимом диапазоне положительных объемов потребления каждой составляющей рациона спортсмена, чем больше он потребляет любой из компонентов, тем в лучшей физической форме он находится. Кроме того, любая средневзвешенная комбинация наборов рациона всегда лучше для спортсмена, чем худший из этих наборов.

(а) Охарактеризуйте предпочтения спортсмена, указав, какими свойствами они обладают и изобразив, если это возможно, несколько кривых безразличия, соответствующих его предпочтениям.

(б) Объясните в терминах эффектов замещения и дохода, какие изменения в объеме потребления пищевых добавок для данного спортсмена будут происходить при повышении их цены, если его предпочтения относительно этих двух товаров имеют вид, указанный вами в ответе на п. (а).

(в) Пусть предпочтения спортсмена относительно пищевых добавок (товар x) и натуральных продуктов (товар y) могут быть описаны функцией полезности вида $u(x, y) = \ln x + \ln y$. Цены этих товаров равны соответственно $p_x = 3$ д. е. и $p_y = 1$ д. е., а доход $m = 150$ д. е. Как изменится объем потребления каждого товара, если цена пищевых добавок возрастет до 5 д. е.? Изобразите полученный ответ графически.

(г) Разложите найденное изменение в потреблении пищевых добавок на две составляющие: изменение в потреблении, вызванное эффектом дохода, и изменение в потреблении, вызванное эффектом замещения, рассчитывая эффект замещения по Слуцкому. Проиллюстрируйте графически.

(д) Разложите найденное изменение в потреблении пищевых добавок на две составляющие: изменение в потреблении, вызванное эффектом дохода, и изменение в потреблении, вызванное эффектом замещения, рассчитывая эффект замещения по Хиксу. Проиллюстрируйте графически.

(е) Сравните изменения в потреблении пищевых добавок, вызванные эффектом дохода, полученные в пп. (г) и (д), и объясните полученный результат.

1.118.* По мотивам [2.4; гл. 8]. Пусть предпочтения потребителя полны, транзитивны, строго монотонны и строго выпуклы. Рассмотрите изменение в объеме потребления некоторого блага при изменении его цены, вызванное эффектом замещения, рассчитанным по Хиксу. Докажите, что либо изменение в потреблении этого блага и изменение его цены будут действовать в противоположных направлениях, либо это изменение в потреблении будет нулевым.

1.119.* По мотивам [2.4; гл. 8]. Пусть предпочтения потребителя полны, транзитивны, строго монотонны и строго выпуклы. Рассмотрите изменение в потреблении некоторого блага при изменении его цены, вызванное эффектом замещения, рассчитанным по Слуцкому. Докажите, что либо изменение в объеме потребления этого блага и изменение его цены будут действовать в противоположных направлениях, либо изменение в потреблении будет нулевым.

1.120. По мотивам заданий LSE [2.7]. Пусть предпочтения потребителя относительно двух товаров (x и y) полны, транзитивны, строго монотонными и строго выпуклы, а кривые безразличия, соответствующие данным предпочтениям, являются гладкими, без изломов. Пусть также оба товара являются для данного агента нормальными благами, а цена товара x возрастает.

(а) Сравните для данного агента изменение в объеме спроса в результате изменения цены, вызванное эффектом дохода, при расчете эффекта замещения по Слуцкому (Δx_S^{IE}) и по Хиксу (Δx_H^{IE}). Верно ли, что $\Delta x_S^{IE} < \Delta x_H^{IE}$? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

(б) Изменится ли ответ на вопрос п. (а), если товар x является для данного агента инфериорным, но не является товаром Гиффена?

(в) Изменится ли ответ на вопрос п. (а), если цена первого блага снизится, а не возрастет?

(г) Сравните для данного агента изменение в объеме спроса в результате изменения цены, вызванное эффектом замещения, рассчитанным по Слуцкому (Δx_S^{SE}) и по Хиксу (Δx_H^{SE}). Верно ли, что $\Delta x_S^{SE} > \Delta x_H^{SE}$? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

(д) Изменится ли ответ на вопрос п. (г), если товар x является для данного агента инфериорным, но не является товаром Гиффена?

(е) Изменится ли ответ на вопрос п. (г), если цена первого блага снизится, а не возрастет?

1.121. Когда цена обоих благ была равна 5 д. е., агент выбирал набор, состоящий из 60 ед. блага y и 40 ед. блага x. Когда цена блага x упала до 2 д. е., агент в силу эффекта замещения по Слуцкому выбрал потребительский набор, содержащий 75 ед. блага x. Предпочтения агента строго монотонны.

(а) Насколько изменилось в силу эффекта замещения по Слуцкому потребление блага y при указанном снижении цены блага x?

(б) Если после снижения цены блага x правительство введет паушальный налог на доход потребителя, равный 130 д. е., то благосостояние потребителя неизбежно снизится по сравнению с первоначальной ситуацией. Верно ли это утверждение? Поясните свой ответ.

(в) Если известно, что после введения паушального налога благосостояние потребителя снизилось, можно ли утверждать, что товар y является для данного потребителя нормальным благом? Поясните свой ответ.

1.122.* В поселке городского типа установлен единый тариф на электроэнергию из расчета p руб. за киловатт. Предпочтения репрезентативного домохозяйства, имеющего доход m руб., представимы функцией полезности вида $u(x, y) = x^a y^b$, где x — количество электроэнергии (в киловаттах), а y — агрегированное потребительское благо, $a > 0$, $b > 0$.

(а) В целях экономии электроэнергии местные власти ввели новую систему тарифов оплаты электроэнергии: тарифы на электроэнергию повышаются на 50%, но повышение тарифов распространяется лишь на первые $\overline{x}$ киловатт. Сверхнормативное потребление (свыше $\overline{x}$ киловатт) оплачивается по прежнему тарифу. Достигнет ли подобная политика своей цели экономии электроэнергии? Проиллюстрируйте решение графически.

(б) Пусть $p = 2$ руб., $a = 1$, $b = 7$, $m = 3400$ руб., $\overline{x} = 200$. Сравните потребление электроэнергии репрезентативным домохозяйством до и после изменения тарифов. Проиллюстрируйте решение графически.

(в) Новый мэр предлагает вместо описанной в п. (а) политики установить единый тариф на электроэнергию в размере 1,5p руб. за киловатт, но при этом выплачивать каждому домохозяйству минимальную паушальную субсидию, достаточную для сохранения прежнего уровня его благосостояния. Может ли предложенная новым мэром политика привести к увеличению потребления электроэнергии? Проиллюстрируйте решение графически.

1.6. Денежная оценка благосостояния

1.123. Спрос потребителя на дискретный товар x представлен в табл. 1.2. Каков был бы излишек потребителя, если бы он приобрел три единицы товара x по цене 5 руб.? Каков был бы излишек потребителя, если бы он отказался от покупки товара x?

Таблица 1.2

Количество	1	2	3	4	5	6	7
Максимальная цена, которую готов заплатить потребитель за i-ю единицу	10	9	7	5	2	0	0

1.124. Пусть цена товара x повысилась, в то время как цена товара y не менялась, оставаясь равной 1. На рис. 1.13 изобразите компенсирующую и эквивалентные вариации дохода и охарактеризуйте товар x с точки зрения нормальности/инфериорности. Обоснуйте.

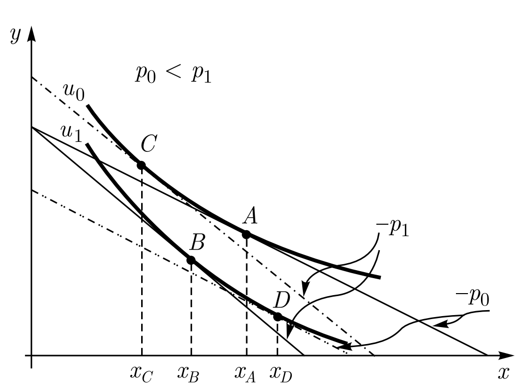

Рис. 1.13

1.125. Городские власти планируют субсидировать озеленение прилежащей к домохозяйству территории для тех домохозяйств, которые своевременно вносят оплату за коммунальные платежи. Однако вместо снижения стоимости зеленых насаждений и услуг по озеленению, власти планируют выплатить каждому домохозяйству минимальную сумму, которая необходима, чтобы положение домохозяйства стало таким же, как если бы была предоставлена субсидия на стоимость зеленых насаждений и услуг по озеленению. Определите вариацию дохода, которую выплатят власти домохозяйствам, и проиллюстрируйте ее графически.

1.126. Предположим, что недобросовестный служащий банка предлагает клиенту снизить процентную ставку по кредиту за некоторое вознаграждение. В результате переговоров клиент соглашается выплатить банковскому служащему сумму, которая является максимальной суммой денег, которую он готов заплатить за снижение процентной ставки. Определите вариацию дохода, которую отдаст в виде взятки клиент, и проиллюстрируйте ее графически.

1.127. Правительство рассматривает возможные варианты государственной поддержки молодых семей в условиях увеличения процентной ставки выплат по ипотеке. Так, например, при увеличении процентной ставки правительство обещает выплатить каждой молодой семье, взявшей кредит по ипотеке, минимальную сумму денег, которая позволила бы не ухудшить положение молодой семьи. Определите вариацию дохода, которая будет выплачена молодой семье, и проиллюстрируйте ее графически.

1.128.* Обратная функция спроса потребителя на благо x имеет вид: $p(x) = 100 - 2x$. Эластичность спроса по доходу для данного блага равна нулю.

(а) В настоящее время цена товара x такова, что агент не может приобрести ни одной единицы этого товара. Какую максимальную сумму денег он готов будет отдать, чтобы иметь возможность покупать товар x по цене 50 д. е. за единицу?

(б) Какую максимальную сумму денег готов будет отдать данный потребитель за возможность приобретать товар x по цене 30 д. е. вместо 50 д. е.?

1.129. Когда цена на услуги массажиста составляет 1000 руб. и выше за получасовой сеанс, домохозяйка М считает массаж слишком дорогим удовольствием и не обращается к услугам массажиста. Когда цена за получасовой сеанс сокращается до 500 руб., домохозяйка М покупает 10 получасовых сеансов в месяц. Будем предполагать, что функция спроса М на услуги массажиста линейна, кроме того, спрос обладает нулевой эластичностью по доходу.

(а) В настоящее время получасовой сеанс массажа обходится домохозяйке в 800 руб. Какую максимальную сумму денег в виде премии массажисту готова отдать М, чтобы покупать эту услугу по цене 400 руб. за сеанс?

(б) Предположим, что есть возможность купить месячную клубную карту, которая дает право платить за получасовой сеанс массажа 400 руб. Какую максимальную сумму денег готова будет заплатить М за такую клубную карту?

1.130.* По мотивам [2.2]. Пусть предпочтения потребителя в двухтоварной экономике строго монотонны и строго выпуклы, а кривые безразличия, соответствующие его предпочтениям, являются гладкими, без изломов. При положительном доходе агент всегда покупает положительное количество обоих товаров. Известно, что один из товаров для потребителя является инфериорным, но не является товаром Гиффена, и цена этого товара снижается вследствие его субсидирования.

(а) Изобразите на двух графиках (в осях двух товаров и в осях количество–цена) эквивалентную (EV) и компенсирующую вариации (CV), соответствующие данному изменению цены, и объясните соотношение между ними, а также сравните графически величины EV и CV с изменением потребительского излишка. Указанные графики должны быть связаны между собой.

(б) Зависят ли полученные в п. (а) результаты от того, снижается ли цена блага x или повышается?

(в) Зависят ли полученные в п. (а) результаты, от того является ли товар x нормальным или инфериорным?

1.131. Предположим, что городские власти приняли решение о субсидировании оплаты электроэнергии для малообеспеченных семей. Субсидия составила 1 д. е. на каждую потребляемую единицу электроэнергии.

Предпочтения семьи, которая получает городскую субсидию, могут быть представлены функцией полезности вида $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, где x — количество потребляемой электроэнергии, а y — объем потребления агрегированного блага. До введения субсидии цены благ составляют $p_x = 3$ д. е., $p_y = 1$ д. е., а доход семьи равен $m = 12\,000$ д. е.

(а) Сравните расходы правительства на субсидирование (S) и выигрыш семьи, которая получает городскую субсидию, рассчитанный на основе эквивалентной вариации (EV).

(б) Поясните результаты, полученные в п. (а). Ответы должны быть представлены на двух графиках: один — в осях товаров, а второй — в осях количество–цена.

1.132. Пусть в двухтоварной экономике предпочтения потребителя строго монотонны и строго выпуклы, а кривые безразличия, соответствующие им, являются гладкими, без изломов. Рассмотрите повышение цены на первый товар, вызванное введением потоварного налога t. Известно, что оба товара являются нормальными для потребителя. Ответьте на следующие вопросы, представляя ваши ответы графически на двух графиках: один — в осях товаров, а второй — в осях цена–количество.

(а) Сравните величину, на которую следует изменить доход потребителя в начальной ценовой ситуации, чтобы его благосостояние изменилось так же, как и в результате введения налога на первый товар, с эквивалентной и компенсирующей вариациями дохода и изменением потребительского излишка, вызванного указанным изменением цены.

(б) Верно ли, что доходы, собранные правительством от введения налога, превышают величину, найденную в п. (а)? Обоснуйте.

(в) Предположим, что одновременно с введением потоварного налога на первый товар вводится паушальная субсидия для данного агента, причем подобная политика нейтральна к госбюджету. Как изменится положение данного потребителя? Сравните размер паушальной субсидии, выплачиваемой данному потребителю при нейтральной к госбюджету политике, описанной в этом пункте, с величиной, найденной в п. (а). Объясните полученный результат.

1.133. Для двухтоварной экономики приведите два различных с точки зрения выбора агента примера (графические или со спецификацией функции полезности) положительного потребления обоих благ, для которых благосостояние потребителя будет одинаковым, как в случае потоварного налога, так и в случае подоходного налога.

(а) Сравните для каждого из приведенных вами примеров доходы правительства от потоварного и подоходного налогообложения.

(б) Сравните для каждого из приведенных вами примеров доходы правительства от указанных в условии видов налогообложения и эквивалентную вариацию дохода, соответствующую изменению цен, связанных с введением потоварного налога.

1.134. Правительство рассматривает возможные варианты государственной поддержки молодых семей при приобретении жилья. Так, например, при увеличении процентной ставки выплат по ипотеке правительство обещает выплатить каждой молодой семье, взявшей кредит по ипотеке, эквивалентную вариацию дохода, соответствующую повышению процентной ставки выплат по ипотеке для данной семьи. Как изменится благосостояние молодой семьи, если выплаты по ипотеке при любой процентной ставке положительны, кроме того, выплаты по ипотеке являются для нее нормальным товаром и предпочтения семьи строго монотонны и строго выпуклы?

1.135. Предположим, что недобросовестный служащий банка предлагает клиенту снизить процентную ставку по кредиту за некоторое вознаграждение. В результате переговоров служащий банка объявил минимальную сумму вознаграждения, равную эквивалентной вариации дохода клиента, соответствующей снижению процентной ставки по кредиту. Примет ли клиент предложение банковского служащего, если выплаты по кредиту являются для него нормальным товаром, выплаты положительны при любой ставке процента, а предпочтения клиента строго монотонны и строго выпуклы?

1.136. Предположим, что власти города приняли решение о повышении тарифов на вывоз мусора на 10%. Сравните дополнительные доходы городского бюджета, связанные с повышением тарифов, и потери домохозяйства, измеренные с помощью эквивалентной вариации его дохода. Представьте ваши ответы графически на двух графиках: один — в осях товаров, а второй — в осях количество–цена, полагая, что вывоз мусора является для домохозяйства нормальным товаром, а предпочтения его строго монотонны, строго выпуклы. Считайте, что повышение тарифов не заставит домохозяйства отказаться от услуг по вывозу мусора.

1.7. Выбор потребителя при наличии натурального дохода: сравнительная статика и анализ благосостояния. Межпериодный выбор. Модель предложения труда

1.137. Верны ли следующие утверждения для двухтоварной экономики, в которой потребитель тратит весь доход:

(а) Чистый продавец некоторого товара не может выиграть от снижения цены этого товара?

(б) Чистый покупатель некоторого товара не может выиграть от повышения цены этого товара?

(в) Чистый продавец некоторого товара не может проиграть от повышения цены этого товара?

(г) Чистый покупатель некоторого товара не может проиграть от снижения цены этого товара?

1.138. Для двухтоварной экономики в терминах эффектов замещения и богатства объясните, как может измениться потребление нормального товара при снижении его цены, если потребитель являлся до изменения цены чистым покупателем этого товара, каждый месяц получает некоторое положительное количество обоих товаров и не имеет фиксированного дохода.

1.139. Для двухтоварной экономики в терминах эффектов замещения и богатства объясните, как может измениться потребление инфериорного товара при относительном росте его цены, если потребитель являлся чистым покупателем этого товара до изменения цен, каждый месяц получает некоторое положительное количество обоих товаров и не имеет фиксированного дохода.

1.140. Для двухтоварной экономики в терминах эффектов замещения и богатства объясните, как может измениться потребление нормального товара при относительном росте его цены, если потребитель являлся чистым продавцом этого товара до изменения цен, каждый месяц получает некоторое положительное количество обоих товаров и не имеет фиксированного дохода.

1.141. Для двухтоварной экономики в терминах эффектов замещения и богатства объясните, как может измениться потребление инфериорного товара при относительном снижении его цены, если потребитель являлся чистым покупателем этого товара до изменения цен, каждый месяц получает некоторое положительное количество обоих товаров и не имеет фиксированного дохода.

1.142. Небольшое домохозяйство продает около 30% всего производимого ею количества товара X. Остальное количество данного товара потребляется самим домохозяйством. В рамках модели выбора потребителя в двухтоварной экономике при наличии натурального дохода ответьте на следующие вопросы:

(а) Верно ли, что снижение рыночной цены товара X может привести к улучшению положения домохозяйства, только если оно увеличит собственное потребление этого товара? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

(б) Верно ли, что если снижение рыночной цены товара X привело к улучшению положения домохозяйства, то данный товар не является в рассматриваемом диапазоне цен и дохода нормальным товаром? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

1.143. Каждый месяц агент получает ω_1 ед. первого товара и ω_2 ед. второго товара. В январе при ценах $p = (1,\ 1)$ потребитель выбрал набор $\widetilde{x} = (14,\ 2)$. При этом он продал 4 ед. второго блага. Предпочтения данного агента строго монотонны.

(а) Найдите, какое количество первого товара купил/продал данный потребитель в январе и какое количество первого и второго товара агент получает ежемесячно.

(б) Известно, что в феврале цена второго товара выросла в два раза. Мог ли данный агент в феврале потребить набор $\overline{x} = (15,\ 4)$? Мог ли данный агент в феврале выбрать набор $\widehat{x} = (8,\ 7)$? Обоснуйте.

(в) Как изменилось благосостояние потребителя в феврале по сравнению с январем? Обоснуйте.

1.144. По мотивам [2.9]. Рассмотрите индивида, потребляющего два блага (1 и 2), который так описывает свои предпочтения: «Есть у меня первое благо или второе — мне все равно; я не вижу между ними разницы, но чем больше любого товара, тем мне лучше». Предположим, у потребителя имеется запас, состоящий из 14 ед. первого блага и 6 ед. второго блага. Пусть цена первого блага в четыре раза выше цены второго. Потребитель может торговать имеющимся запасом и не имеет другого источника дохода. Какое количество каждого блага будет потреблять данный индивид? Будет ли он чистым покупателем или чистым продавцом второго блага?

1.145. Каждый месяц потребитель получает ω_1 ед. первого товара и ω_2 ед. второго товара и не имеет фиксированного дохода. В прошлом месяце при ценах на товары $p_1 = 6$ д. е., $p_2 = 12$ д. е. потребитель выбрал набор $x = (7, 6)$. В текущем месяце цена второго товара упала до 6 д. е., а цена первого товара не изменилась, агент выбрал набор $\widetilde{x} = (3, 9)$. Предпочтения потребителя строго монотонны.

(а) Найдите, какое количество первого и второго товара потребитель получает каждый месяц в виде натурального дохода.

(б) Можно ли утверждать, что поведение потребителя, описанное в условии задачи, противоречит WARP? Ответ должен быть обоснован.

(в) Определите, если это возможно, как изменилось благосостояние потребителя в текущем месяце по сравнению с прошлым месяцем? Ответ должен быть обоснован.

(г) Верно ли утверждение: «Если в следующем месяце цена второго блага снизится, по сравнению с текущим месяцем, а цена первого блага не изменится, то потребление второго товара неизбежно возрастет по сравнению с текущим месяцем, если первый товар является для данного агента инфериорным?» Если **да**, то докажите, если **нет**, то приведите контрпример.

1.146.* По мотивам [2.4; гл. 8]. Домохозяйство ежемесячно получает по 20 ед. каждого товара в двухтоварной экономике и не имеет фиксированного дохода. Его предпочтения относительно этих товаров представимы функцией полезности вида $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$. Цена первого товара равна 4 д. е., а цена второго товара равна 2 д. е.

(а) Какое количество каждого товара потребляет домохозяйство ежемесячно?

(б) Предположим, цена первого товара снизится, в то время как цена второго товара останется неизменной. Можно ли, не проводя расчетов, сделать однозначный вывод о том, в каком направлении изменится объем потребления первого товара и как изменится при этом благосостояние домохозяйства?

(в) Найдите изменение объема потребления первого товара домохозяйством, вызванное снижением цены этого товара вследствие введения потоварной субсидии по ставке 1 д. е.

(г) Разложите найденное изменение в потреблении первого товара на две составляющие: изменение в потреблении, вызванное эффектом богатства (выделяя обычный эффект дохода и эффект начального запаса), и изменение в потреблении, вызванное эффектом замещения, рассчитывая эффект замещения по Слуцкому. Проиллюстрируйте декомпозицию на графике и объясните направление изменения объема потребления данного товара в силу указанных эффектов.

1.147.* По мотивам [2.4; гл. 9]. Работник, выбирая между трудом и досугом, может варьировать свою занятость. Установлено, что повышение для него ставки заработной платы за сверхурочные часы работы приводит к увеличению рабочего времени данного агента. Известно также, что такое же повышение ставки заработной платы за все рабочее время, предложенное тому же работнику, приводит к сокращению его рабочего времени. Объясните этот феномен, полагая, что предпочтения работника строго монотонны и строго выпуклы.

1.148. Рассмотрите модель выбора между потреблением и досугом. Известно, что по программе помощи одиноким матерям правительство увеличило для них ставку заработной платы на величину s и при этом обязало их тратить больше времени на воспитание детей (которое не учитывается при распределении времени на досуг и труд), что сократило запас времени одинокой матери на k часов. Для произвольных k и s покажите графически, как меняется объем потребления досуга матерью. Считайте, что труд для нее является нормальным благом и она может произвольно варьировать уровень своей занятости.

1.149. Рассмотрите агента, выбирающего между потреблением и отдыхом, предпочтения которого представимы функцией полезности $u(c, l) = lc^2$, где l — количество часов отдыха, c — стоимость потребления. Недельный запас времени агента — 100 часов. Известно, что за час работы платят 10 евро, но агент должен платить подоходный налог в размере 60% в случае, если недельный доход превысит 500 евро (налог берется с суммы сверх 500 евро).

(а) Запишите бюджетное ограничение потребителя и приведите графическую иллюстрацию.

(б) Найдите, сколько часов в неделю будет работать агент. Изобразите выбор потребителя графически.

(в) Захочет ли агент заплатить взятку за уклонение от уплаты налога? Обоснуйте свой ответ, используя график. Вычислите максимальную величину взятки, если агент готов ее заплатить.

1.150. Студент А совмещает учебу с работой в ресторане быстрого обслуживания, где получает 4 долл. в час, а также получает стипендию 50 долл. в неделю. Студент должен распределить 90 часов в неделю между работой и досугом. Будем считать, что он может произвольно варьировать уровень занятости.

(а) Выведите уравнение бюджетной линии студента А и изобразите графически.

(б) Предположим теперь, что студенту А предложили следующую схему оплаты: 4 долл. в час за первые 40 часов работы в неделю и 6 долл. в час за каждый час работы сверх 40 часов в неделю. Выведите уравнение бюджетной линии студента А и изобразите его бюджетное множество.

(в) Предположим, известно, что при ставке заработной платы 4 долл. в час независимо от часов работы в неделю студент предпочел работать 40 часов в неделю. Будет ли студент работать сверхурочно при указанной в п. (б) схеме оплаты сверхурочных часов? Приведите графическую иллюстрацию.

1.151. Студент устроился на практику на предприятие, где получает заработную плату 5 долл. в час. При этом он сам может определять, сколько времени ему работать. Будучи отличником, во время практики студент по-прежнему получает стипендию

50 долл. в неделю. Будем считать, что он располагает 100 часами в неделю на работу и досуг.

(а) Выведите уравнение бюджетной линии и приведите графическую иллюстрацию.

(б) Предположим, правительство ввело программу поддержки студентов, по которой каждый студент, проходящий практику на предприятии, получает грант 100 долл., но при этом должен заплатить налог в размере 50% от трудового дохода. Выведите уравнение бюджетной линии и приведите графическую иллюстрацию

(в) Предположим теперь, что предпочтения студента описываются функцией полезности $u(l, c) = l \cdot c$, где c — это расходы на потребление, а l — время, потраченное на досуг в течение недели. Какой уровень занятости выберет студент при программе поддержки студентов, описанной в п. (б)?

1.152. Пусть функция полезности индивида имеет вид: $u(l, c) = \ln l + c$, где c — расходы на потребление агрегированного блага, l — часы досуга в течение дня. Предположим, индивид должен распределить 12 часов в день между работой и досугом. Кроме того, потребитель имеет также нетрудовой доход, равный 20 д. е. в день.

(а) Если почасовая ставка зарплаты равна 10 д. е., то сколько часов индивид предпочтет работать?

(б) Предположим, введен 20%-ный налог на весь доход, получаемый индивидом. Сколько часов будет работать индивид?

(в) Как изменится ваш ответ на п. (б), если налогом облагается только трудовой доход индивида? Можно ли ответить на этот вопрос, не производя дополнительных вычислений?

1.153. Пусть функция полезности индивида имеет вид: $u(l, c) = c + v(l)$, где $c > 0$ — потребительское благо, l — часы досуга в течение дня, $v'(l) > 0$, $v''(l) < 0$. Предположим, индивид должен распределить 12 часов между работой и досугом. Известно, что при почасовой ставке зарплаты равной 10 долл. и нетрудовом доходе, равном 20 долл., индивид предпочел работать 9 часов в день. Если нетрудовой доход индивида сократится до 5 долл. в день, то что можно сказать о том, сколько времени он будет работать?

1.154. По мотивам [2.9]. Предположим, правительство решило ввести программу помощи малообеспеченным семьям. Будем считать, что ставка заработной платы $w = 10$ долл. в час, совокупный запас времени составляет 168 часов в неделю и домохозяйство не имеет нетрудового дохода. Пусть домохозяйство может произвольно варьировать уровень занятости. Рассмотрите следующие варианты правительственной программы.

(1) Домохозяйству предлагается паушальная субсидия $S = 200$ и домохозяйство не платит подоходного налога.

(2) Домохозяйству предлагается паушальная субсидия $S = 200$, но трудовые доходы облагаются подоходным налогом со ставкой $t = 0{,}5$.

(3) Домохозяйству не предлагается паушальная субсидия, но оно освобождается от подоходного налога.

(4) Домохозяйству предлагается паушальная субсидия $S = 200$, освобождение от подоходного налога за первые заработанные 400 долл., но за каждый доллар дохода сверх 400 долл. домохозяйство должно заплатить подоходный налог по ставке $t = 0{,}5$.

(а) В каждом из случаев (1)–(4) выведите уравнение бюджетной линии, изобразите бюджетную линию и бюджетное множество домохозяйства.

(б) Какая программа субсидирования из (1)–(4) наиболее привлекательна для домохозяйства?

(в) Какую из программ (2) и (4) предпочтет домохозяйство?

(г) При каком уровне субсидии для домохозяйства с любыми предпочтениями программа (2) будет не хуже программы (3)?

1.155. По мотивам [2.9]. Государственный служащий получает заработную плату $w = 5$ долл. в час и не имеет никакого дополнительного источника дохода, кроме заработка. Будем считать, что служащий располагает $\overline{L} = 80$ часами в неделю на работу и отдых и может произвольно варьировать уровень занятости. Рассмотрите следующие программы субсидирования и налогообложения работников госсектора:

(1) Государственный служащий получает паушальную субсидию 100 долл. в неделю.

(2) Государственный служащий получает от правительства паушальную субсидию 100 долл. в неделю, не платит по-

доходный налог за первые заработанные 100 долл., но за каждый доллар дохода сверх 100 долл. платит 50% подоходный налог.

(3) Если индивид не работает, то он получает пособие 100 долл., а если работает, то 100 долл. не получает и весь заработанный доход облагается 50%-ным подоходным налогом.

(4) Те же условия, что и в п. (3), но при условии, что доход, заработанный за первые 20 часов работы не облагается подоходным налогом.

(5) Весь заработанный доход государственного служащего облагается 50%-м подоходным налогом, но вводится система стимулирования труда, согласно которой правительство выплачивает 100 долл. каждому, кто работает свыше 20 часов в неделю.

(а) В каждом из указанных случаев выведите уравнение бюджетной линии и изобразите бюджетное множество государственного служащего.

(б) Какая программа более предпочтительна для государственного служащего (1) или (2)?

(в) Какая программа более предпочтительна для государственного служащего (3) или (4)?

1.156. Господин A работает переводчиком за 10 долл. в час. Он сам решает, сколько времени ему работать, и не имеет другого источника дохода, кроме заработка. Будем считать, что он располагает 168 часами в неделю на работу и досуг. Предположим, в описанных условиях господин A предпочел работать 60 часов в неделю.

(а) Выведите и изобразите уравнение бюджетной линии и изобразите бюджетное множество.

(б) Журналу X срочно понадобилось перевести некоторые материалы и они обратились к услугам господина A, предложив ему 20 долл. за час работы, позволив ему работать столько, сколько он пожелает. В этих условиях господин A по-прежнему предпочел работать 60 часов в неделю. Согласуется ли такое поведение с WARP? Как изменилось благосостояние господина A? Приведите графическую иллюстрацию.

(в) Журналу X нужно срочно подготовить материалы для нового номера, и поэтому его руководству хотелось бы, чтобы господин А работал более 60 часов в неделю. Какая схема оплаты могла бы гарантировать это? Приведите графическую иллюстрацию.

1.157. Рассмотрите индивида, который работает на государственном предприятии, получая заработную плату $w = 20$ руб. в час и одновременно пенсию $P = 2000$ руб. в месяц. Известно, что в этих условиях данный индивид работает $L^* = 160$ часов в месяц, а его расходы на потребление составляют c^* руб. в месяц. Будем считать, что индивид располагает $\overline{L} = 720$ часами в месяц на работу и досуг.

(а) Найдите оптимальный уровень потребления c^*.

Предположим, государство планирует повысить ставку заработной платы до $w' = 25$ руб. в час и при этом сократить пенсию до $P' < P$.

(б) Найдите размер пенсии P', при котором набор $(L^*,\ c^*)$ будет в точности доступен индивиду (т. е. будет лежать на новой бюджетной линии). Приведите графическую иллюстрацию.

(в) Предположим, что пенсия снижена до уровня, полученного в п. (б). Будет ли в результате такого изменения заработной платы и пенсии индивид работать больше?

(г) Как изменится ваш ответ на п. (в), если рост заработной платы сопровождается таким снижением пенсии, что прежний набор $(L^*,\ c^*)$ становится для потребителя недоступным?

(д) Предположим теперь, что предпочтения потребителя описываются функцией полезности $u(l, c) = lc^3$, где l — часы досуга. Сколько часов в месяц будет работать индивид при заработной плате $w' = 25$ руб. в час и пенсии $P' = 1500$ руб. в месяц?

1.158.* Известно, что предпочтения потребителя относительно потребления в текущем и будущем периоде строго монотонны и строго выпуклы, а кривые безразличия, которые их представляют, гладкие, без изломов.

(а) Предположим, что в текущий период времени потребитель является кредитором. Верно ли, что если ставка процента возрастет, то потребитель останется кредитором? Если **да**, то докажите, если **нет**, то приведите контрпример.

(б) Предположим, что в текущий период времени потребитель является кредитором. Верно ли, что если ставка процента снизится, то потребитель станет заемщиком? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

1.159.* Научный сотрудник одного из исследовательских институтов планирует получить годовой грант на свои научные разработки. У него есть возможность получить средства на свои исследования в двух научных фондах (A и B). Если сотрудник получит грант в фонде A, то выплаты по гранту будут производиться следующим образом: 50 тыс. руб. в первый период выплат по гранту и 110 тыс. руб. он получит во втором периоде. Если сотрудник получит грант в фонде B, то выплаты по гранту будут производиться таким образом: 100 тыс. руб. он получит в первый период выплат по гранту и 55 тыс. руб. он получит во втором периоде. Подать заявление и получить грант научный сотрудник может только в одном из фондов. Известно, что рыночная ставка процента по кредитам и депозитам равна 10% и остается неизменной.

(а) Как вы полагаете, в какой из научных фондов будет подавать заявление научный сотрудник?

(б) Будет ли потребление сотрудника в каждый период зависеть от того, в каком из научных фондов он будет получать грант?

(в) Предположим теперь, что у сотрудника есть возможность брать кредит только по ставке 12%, а класть деньги на депозит только по ставке 8%. Как изменятся в этом случае ваши ответы на пп. (а) и (б)?

1.160. Предположим, что страховая компания предлагает вам два различных варианта выплат после аварии, произошедшей с вашим автомобилем. Вариант A: возврат 30% страховой суммы в текущий месяц, а оставшихся 70% — в следующем месяце. Вариант B: возврат 60% страховой суммы в текущем месяце, а 40 % — в следующем месяце. Пусть банковская ставка процента по кредитам и депозитам составляет 10%. В рамках модели межпериодного выбора объясните, какой вариант вы предпочтете, если ваши доходы в текущем и следующем месяцах составляют C и D, соответственно, без учета суммы страховой выплаты, размер которой составляет величину M? Зависит ли ваше решение от размера страховой суммы?

1.161. Господин M решил купить автомобиль. При этом у него есть две возможности оплатить покупку: 1) расплатиться за автомобиль в два этапа: 70% от стоимости автомобиля он выплачивает в этом году и 30% — в следующем. 2) он расплачивается за автомобиль в этом году полностью. Считайте, что годовой доход господина M превышает стоимость автомобиля. Предположим, что ставка по депозитам составляет 10%, а по кредитам — 15%. Используя модель выбора потребителя при наличии натурального дохода, ответьте на следующие вопросы:

(а) Какой из вариантов оплаты покупки предпочтет данный господин?

(б) Предположим, что как лучший работник отдела, господин M получит в этом и следующем году премии. Размер премии в следующем году составит половину суммы, полученной в этом. Какой из вариантов оплаты выберет данный господин в этом случае?

(в) Если функция полезности господина M имеет вид: $u(c_1, c_2) = c_1 \cdot c_2^2$, где c_1 и c_2 — расходы на потребительские товары и услуги, не включающие стоимость автомобиля, господина M в текущем и следующем году соответственно; его годовой доход не меняется и равен 1 млн руб., а цена автомобиля составляет 400 тыс. руб., определите расходы господина M на потребительские товары и услуги, не включающие стоимость автомобиля, в текущем и следующем году.

1.162. Рассмотрите двухпериодную модель, в которой потребитель тратит весь доход.

(а) Известно, что после повышения банковской процентной ставки только по кредитам положение потребителя A ухудшилось. Верно ли, что до повышения ставки он был заемщиком? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

(б) Известно, что после повышения банковской процентной ставки только по депозитам потребитель B является кредитором. Верно ли, что повышение процентной ставки не могло ухудшить положение данного агента? Верно ли, что до повышения ставки он также был кредитором? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

(в) Известно, что после повышения банковской ставки процента (ставка единая по кредитам и депозитам) потребитель С стал тратить больше средств на текущее потребление. Верно ли, что потребитель С являлся заемщиком до изменения ставки процента, если потребление в оба периода является для него нормальным благом? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

(г) Верно ли, что снижение банковской ставки процента (ставка единая по кредитам и депозитам) не может побудить индивида Д снизить потребление в текущий период, если потребление в оба периода является для него нормальным товаром? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

1.163. Семья Ивановых собирается приобрести мебельный гарнитур «Гармония», стоимость которого составляет 100 тыс. руб. в мебельном салоне «Мечта» и 102 тыс. руб. в мебельном салоне «Надежда». Каждый из салонов предлагает оплату гарнитура в два этапа: в первый период клиентом осуществляется предоплата, во второй период одновременно с доставкой клиент выплачивает оставшуюся сумму стоимости покупки. В салоне «Мечта» предоплата составляет 70% стоимости гарнитура, а в салоне «Надежда» предоплата составляет 30 тыс. руб. Рыночная ставка процента по кредитам и депозитам составляет 10%. Известно, что предпочтения семьи относительно потребления в оба периода монотонны, а ее доходы в оба периода превышают стоимость гарнитура.

(а) В каком салоне будет приобретать мебельный гарнитур семья Ивановых?

(б) Изменится ли ваш ответ на п. (а), если рыночная ставка по депозитам будет меньше в два раза, чем исходная?

(в) Известно, что при 5%-ной ставке по депозитам и 10%-ной ставке по кредитам семья будет кредитором. Можно ли однозначно определить статус семьи (кредитор или заемщик) при увеличении ставки по депозитам в два раза? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

1.164. Рассмотрите двухпериодную модель, где предпочтения агентов относительно потребления в оба периода строго монотонны.

(а) Известно, что после снижения банковской ставки процента (ставка единая по кредитам и депозитам) потребитель A является кредитором. Верно ли, что до снижения ставки процента данный потребитель не мог являться заемщиком? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

(б) Известно, что после снижения банковской ставки процента (ставка единая по кредитам и депозитам) потребитель A является кредитором. Верно ли, что снижение ставки процента не могло улучшить положение данного агента? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

(в) Известно, что после снижения банковской ставки процента (ставка единая по кредитам и депозитам) потребитель B увеличил объем текущего потребления. Верно ли, что потребление в оба периода является для него нормальным благом? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

(г) Известно, что после снижения банковской ставки процента (ставка единая по кредитам и депозитам) потребитель B увеличил объем текущего потребления. Верно ли, что потребитель B являлся кредитором, если потребление в оба периода является для него нормальным благом? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

1.165. Рассмотрите двухпериодную модель. Известно, что ставка процента по кредитам и депозитам одинакова и составляет 10%, доход потребителя на предприятии в текущем периоде составляет m_0, а в будущем периоде m_1. Других доходов данный агент не имеет. Известно также, что его предпочтения относительно потребления в оба периода строго монотонны, строго выпуклы.

(а) Работодатель предлагает данному агенту изменить схему оплаты труда. В соответствии с новой схемой доход агента в текущем периоде увеличится на 16 000 руб., а в будущем периоде сократится на 17 000 руб. Согласится ли данный агент на изменения в оплате своего труда, если $m_1 > 17\,000$, а банковская ставка процента по кредитам и депозитам по-прежнему составляет 10%?

(б) Как изменится потребление данного агента в текущем и будущем периодах, если оплата его труда будет производиться по новой схеме, а потребление в оба периода является для данного агента нормальным благом?

(в) Как изменится ответ на вопрос п. (а), если ставка по кредитам составляет 15%, а ставка по депозитам 5%?

1.166. Предположим, вы успешно сдали экзамены за 2-й курс и теперь размышляете, как провести летние каникулы (т. е. июль и август). У вас есть только два варианта проведения каникул: вы работаете в июле и отдыхаете в августе или вы отдыхаете в июле и работаете в августе. Если вы будете отдыхать в июле, то ваши дополнительные расходы на отдых в этом месяце составят 40 000 руб., а если будете отдыхать в августе, то ваши расходы на отдых возрастут на 20% по сравнению с отдыхом в июле. Если вы будете работать в июле или в августе, то ваш дополнительный доход составит 50 000 руб. Считайте, что ваши предпочтения строго монотонны, а ваш регулярный доход в каждый из этих месяцев фиксирован и превышает расходы на отдых в августе. Известно также, что рыночная ставка процента по кредитам и депозитам составляет 10%. Используя двухпериодную модель, ответьте на следующие вопросы:

(а) Какой из вариантов проведения каникул вы предпочтете?

(б) Предположим, что родители обязали вас работать в июле, а отдыхать в августе, а родители вашего одногруппника, имеющего такие же предпочтения и такие же доходы и расходы, обязали его работать в августе, а отдыхать в июле. Как вы полагаете, чей (ваш или вашего одногруппника) объем потребления в августе будет больше? Объясните.

(в) Какой вариант проведения каникул вы предпочтете, если ставка по кредитам составляет 20%, а по депозитам 5%?

1.8. Решения задач

1.5. (а) Бюджетное ограничение задается неравенством:

$$p_x x + p_y y \leqslant m \;\Rightarrow\; 40\,x + 50\,y \leqslant 5000 \;\Rightarrow\; 4\,x + 5\,y \leqslant 500,$$

где x и y — объемы потребления товаров X и Y соответственно.

Заметим, что бюджетную линию можно построить по двум точкам, которые характеризуются объемом одного блага, в случае, когда все средства тратятся на его покупку. Если весь доход в 5000 руб. семья Ивановых потратит на благо X, то сможет приобрести его в количестве 125 ед., а если потратит на благо Y, то сможет приобрести его в количестве 100 ед. (см. рис. 1.14).

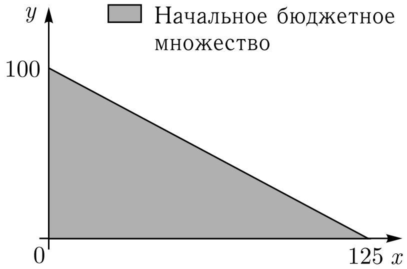

Рис. 1.14. Начальное бюджетное множество семьи Ивановых

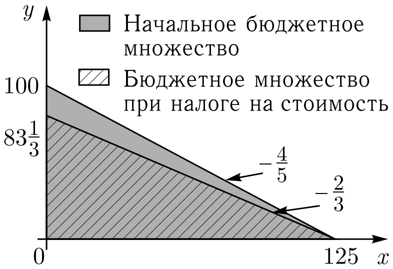

Рис. 1.15. Начальное бюджетное множество семьи и ее бюджетное множество после введения налога на стоимость товара Y

(б) Бюджетное ограничение после введения 20% налога на стоимость для товара Y имеет вид:

$$p_x x + p_y (1 + \tau) y \leqslant 5000,$$

где $\tau = 0{,}2$ — ставка налога,

$$40x + 60y \leqslant 5000 \;\Rightarrow\; 2x + 3y \leqslant 250.$$

Заметим, что бюджетное множество при введении налога на стоимость товара Y (см. рис. 1.15) является подмножеством начального бюджетного множества. Обратное неверно. Следовательно, данная политика государства ограничила множество доступных семье Ивановых наборов. Часть множества наборов, доступных семье до введения налога на стоимость, стала недоступной после введения налога, в то время как все наборы, доступные семье после введения налога, были доступны и в начальной ситуации.

(в) Бюджетное ограничение после введения потоварной субсидии для товара X и при сохранении налога на стоимость товара Y имеет вид:

$$(p_x - s)x + p_y (1 + \tau) y \leqslant 5000,$$

где $s = 5$ — ставка потоварной субсидии для товара X,

$$35x + 60y \leqslant 5000 \;\Rightarrow\; 7x + 12y \leqslant 1000.$$

При введении потоварной субсидии для товара X и сохранении налога на стоимость товара Y у семьи Ивановых появились

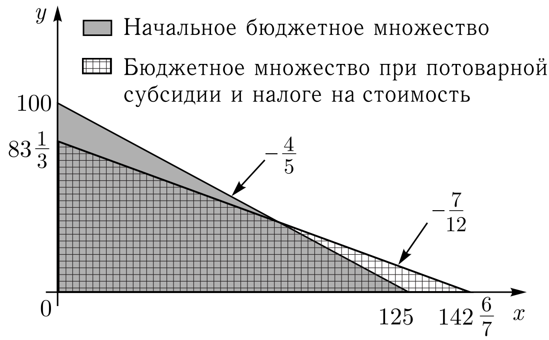

Рис. 1.16. Начальное бюджетное множество семьи и ее бюджетное множество после введения налога на стоимость товара Y и потоварной субсидии для товара X

наборы, недоступные ей при начальном бюджетном ограничении, в то же время некоторое множество наборов, доступных семье при начальном бюджетном ограничении, стало недоступным при налогообложении товара Y и субсидировании товара X (рис. 1.16).

(г) Бюджетное ограничение в данном случае имеет вид:

$$(p_x - s)x + p_y\,(1+\tau)\,y \leqslant 5000 + S,$$

где $S = 1000$ — размер паушальной субсидии,

$$35\,x + 60\,y \leqslant 6000 \;\Rightarrow\; 7\,x + 12\,y \leqslant 1200.$$

Можно заметить, что начальное бюджетное множество является подмножеством бюджетного множества, полученного в этом пункте (см. рис. 1.17).

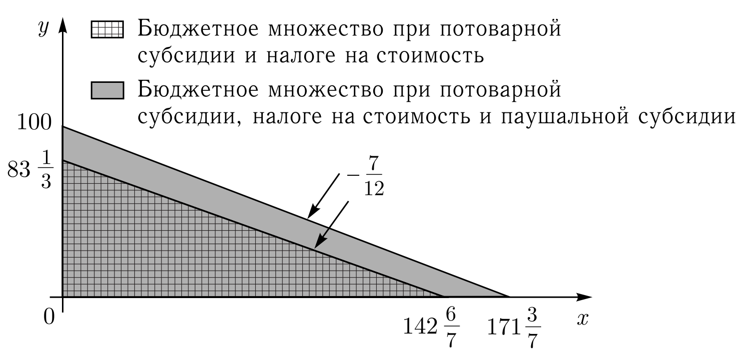

Рис. 1.17. Бюджетные множества семьи при условии действия программы государственной помощи и в ее отсутствие

(д) Так как семья получает в подарок талон на получение $\overline{y}$ ед. блага Y, который нельзя продавать, то бюджетное ограничение Ивановых будет иметь вид:

$$7\,x + 12(y - \overline{y}) \leqslant 1000, \quad x \leqslant 142\frac{6}{7}, \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 7\,x + 12\,y \leqslant 1000 + 12\overline{y}, \quad x \leqslant 142\frac{6}{7}.$$

Найдем минимальное значение $\overline{y}$, при котором Ивановы смогут купить точно такое же количество товара Y, как и в п. (а). В этом случае семья должна приобрести ровно 100 ед. блага y, откуда получаем $\overline{y} = 50/3$.

Бюджетное множество семьи в этом случае проиллюстрировано на рис. 1.18.

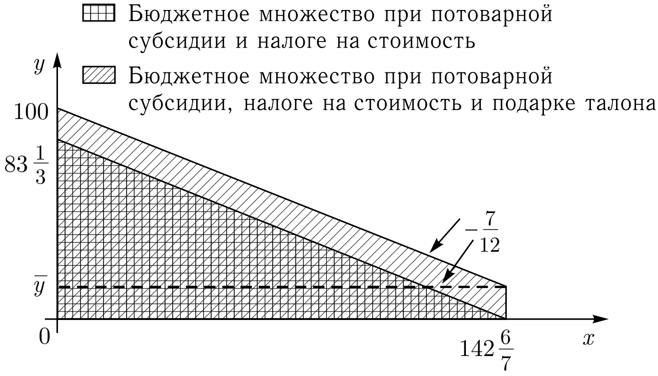

Рис. 1.18. Бюджетные множества семьи при введении альтернативной программы помощи

(е) Если все правительственные программы отменены, то бюджетное ограничение семьи имеет вид:

$$p_x x + p_y y \leqslant m \;\Rightarrow\; 4\,x + 5\,y \leqslant 500.$$

Предположим теперь, что введена в действие программа скидок в супермаркете, такая, что при покупке товара X в количестве $\overline{x}$ ($\overline{x} < 125$) все дополнительные единицы товара X продаются на 5 руб. дешевле. Бюджетное ограничение в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} p_x x + p_y y \leqslant m, & x \leqslant \overline{x}, \\ (p_x - 5)(x - \overline{x}) + p_y y \leqslant m - p_x\overline{x}, & x > \overline{x}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 40\,x + 50\,y \leqslant 5000, & x \leqslant \overline{x}, \\ 35(x - \overline{x}) + 50\,y \leqslant m - 40\,\overline{x}, & x > \overline{x}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\,x + 5\,y \leqslant 500, & x \leqslant \overline{x}, \\ 7(x - \overline{x}) + 10\,y \leqslant 1000 - 8\,\overline{x}, & x > \overline{x}. \end{cases}$$

Новое бюджетное множество семьи Ивановых представлено на рис. 1.19.

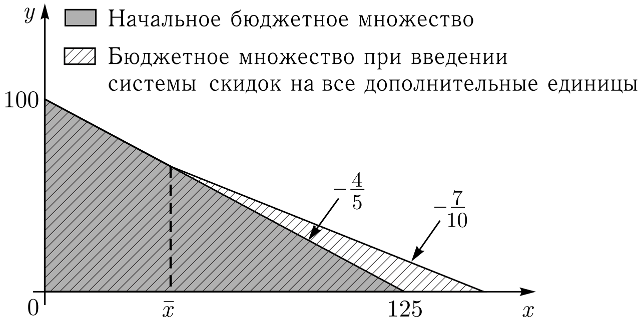

Рис. 1.19. Начальное бюджетное множество и бюджетное множество при введении системы скидок на дополнительные единицы

(ж) При альтернативной системе скидок в супермаркете бюджетное ограничение имеет вид:

$$\begin{cases} p_x x + p_y y \leqslant m, & x \leqslant \overline{x}, \\ (p_x - 5)x + p_y y \leqslant m, & x > \overline{x}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 40\,x + 50\,y \leqslant 5000, & x \leqslant \overline{x}, \\ 35\,x + 50\,y \leqslant 5000, & x > \overline{x}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\,x + 5\,y \leqslant 500, & x \leqslant \overline{x}, \\ 7\,x + 10\,y \leqslant 1000, & x > \overline{x}. \end{cases}$$

«Скачок» объясняется тем, то теперь цена может быть снижена не только за единицы, приобретенные сверх $\overline{x}$, но и за все единицы, которые семья приобретает до $\overline{x}$, если объем ее покупок превысит это количество (см. рис. 1.20).

При системе оптовых скидок в супермаркете семья Ивановых сможет приобрести больше товара X, потратив на него все деньги, чем при системе скидок на дополнительные единицы товара

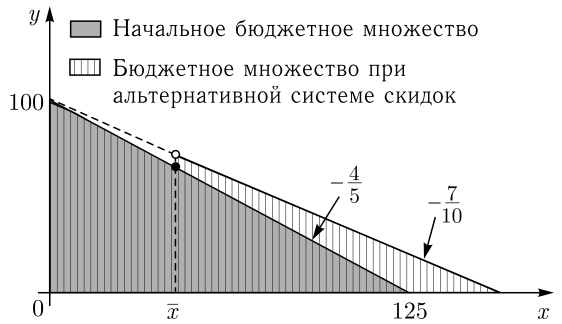

Рис. 1.20. Начальное бюджетное множество семьи и бюджетное множество при введении системы оптовых скидок

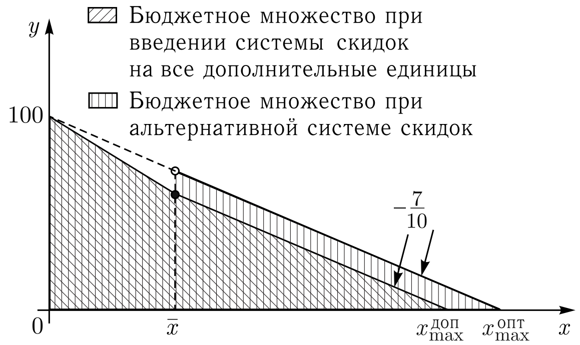

Рис. 1.21. Бюджетные множества семьи при введении различных систем скидок в супермаркете

(см. рис. 1.21):

$$x_{\max}^{\text{доп}} = \frac{1000 - \overline{x}}{7} < x_{\max}^{\text{опт}} = \frac{1000}{7} \text{ для любого } \overline{x} < 125.$$

1.49. Пусть (x, y) — набор, содержащий x занятий математикой и y занятий английским языком, а p_x и p_y — рыночные цены этих услуг, соответственно. Поскольку предельная норма замещения уроков английского языка уроками математики для данного студента не совпадает с рыночной нормой обмена этих услуг и набор $(x, y) = (4, 3)$ является внутренним (т. е. потребление всех услуг в наборе строго положительное), то имеется возможность улучшить положение данного потребителя. Продемонстрируем это.

Заметим, что в данной точке студент выше ценит занятия математикой, чем рынок. За 1 малую ед. занятий математикой в данной точке студент готов пожертвовать 2 малыми ед. занятий английским языком, оставаясь при этом на том же уровне благосостояния, в то время как 1 малую ед. занятий математикой по рыночным ценам можно обменять только на 2/3 малых ед. занятий английским языком. Отказавшись от $2\varepsilon > 0$ (ε — бесконечно малое) занятий английским языком, студент мог бы приобрести $2\varepsilon p_y/p_x = 3\varepsilon$ занятий математикой. Заметим, что при отказе от 2ε занятий английским языком взамен увеличения количества занятий математикой на ε, студент остался бы на прежнем уровне благосостояния (по определению предельной нормы замещения). Рыночный обмен позволит ему увеличить количество занятий математикой на 3ε, $3\varepsilon > \varepsilon$. Следовательно, в силу строгой монотонности предпочтений студента при таком рыночном обмене его благосостояние возрастет.

Обратите внимание, что подобное перераспределение дохода оказалось возможным в силу положительности количества каждой услуги в исходном наборе.

1.65. (а) Для того чтобы определить выбор агента, необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{cases} 4\sqrt{x_1} + x_2 \to \max\limits_{x_1, x_2 \geqslant 0}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant m, \end{cases}$$

где p_1, p_2 — цены 1-го и 2-го товаров соответственно, а m — доход потребителя.

Заметим, что нам не известны цены товаров и доход потребителя. Однако мы знаем, что, потратив весь свой доход, потребитель может приобрести наборы $(12, 1)$ и $(8, 9)$. Располагая этими сведениями, составим систему уравнений, благодаря которой определим доход потребителя и цену одного из товаров относительно цены другого товара:

$$\begin{cases} 12p_1 + p_2 = m, \\ 8p_1 + 9p_2 = m, \end{cases} \quad \text{откуда находим } p_1 = 2p_2 \text{ и } m = 25p_2.$$

Пусть p_2 — цена товара-измерителя, тогда приняв $p_2 = 1$, получим $p_1 = 2$, а $m = 25$.

Функция полезности данного потребителя возрастает по каждому благу, поэтому потребитель в точке оптимального набора потратит свой доход полностью. Иначе на неизрасходованные деньги он мог бы докупить одного из товаров, повысив свой уровень благосостояния, так как полезность возрастает по каждому товару. Следовательно, бюджетное ограничение в решении задачи потребителя будет выполняться как равенство. Таким образом, задача потребителя сводится к следующей оптимизационной задаче:

$$\begin{cases} 4\sqrt{x_1} + x_2 \to \max\limits_{x_1, x_2 \geqslant 0}, \\ 2x_1 + x_2 = 25. \end{cases}$$

Найдем сначала внутреннее решение последней задачи, а затем проверим, не является ли один из угловых наборов наилучшим для потребителя, сравнив их полезности. Выразим из уравнения бюджетной линии x_2 и подставим в целевую функцию, перейдя тем самым к задаче безусловной оптимизации функции одной переменной:

$$4\sqrt{x_1} + (25 - 2x_1) \to \max_{x_1 \geqslant 0}. \qquad (*)$$

Условие первого порядка (для внутреннего решения) имеет вид: $2/\sqrt{\widetilde{x}_1} - 2 = 0$. Обратите внимание, что условия первого порядка будут не только необходимыми, но и достаточными для нахождения внутреннего максимума целевой функции, поскольку целевая функция в задаче (*) строго вогнута (ее вторая производная строго меньше нуля).

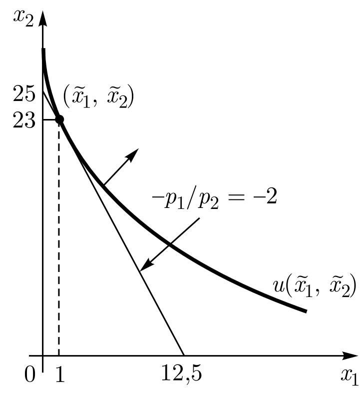

Рис. 1.22. Начальный выбор потребителя

Из условия первого порядка находим количество первого блага в оптимальном внутреннем наборе: $\widetilde{x}_1 = 1$. А затем из уравнения бюджетной линии определим количество второго блага в оптимальном наборе: $\widetilde{x}_2 = 23$. Для проверки угловых решений вычислим полезность потребителя на наборах $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = (1, 23)$, $(\widetilde{\widetilde{x}}_1, \widetilde{\widetilde{x}}_2) = (0, 25)$, $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = (12{,}5,\ 0)$, где последние два набора — угловые наборы, в которых потребитель отказывается от потребления одного из товаров; $u(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = 27$, $u(\widetilde{\widetilde{x}}_1, \widetilde{\widetilde{x}}_2) = 25$, $u(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = 10\sqrt{2}$. Сравнив полезности, замечаем, что оптимальным для потребителя является набор $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = (1, 23)$. Заметим, что в данном случае угловые решения мы могли бы и не проверять, поскольку целевая функция задачи (*) строго вогнута, следовательно, найденный внутренний оптимум должен быть единственным. Продемонстрируем решение задачи данного потребителя при данных ценах и доходе на рис. 1.22.

(б) Если цена первого товара снизится в 20 раз, то задача потребителя будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} 4\sqrt{x_1} + x_2 \to \max\limits_{x_1, x_2 \geqslant 0}, \\ 0{,}1\, x + x_2 = 25. \end{cases}$$

Выражая, как и в п. (а), потребление второго блага через первое из уравнения бюджетной линии и подставляя полученное выражение в целевую функцию, сведем задачу потребителя к задаче на безусловный экстремум функции одной переменной. Найдем внутреннее решение задачи

$$4\sqrt{x_1} + (25 - 0{,}1\, x) \to \max_{x_1 \geqslant 0}.$$

Условие первого порядка для внутреннего решения дает нам $2/\sqrt{\breve{x}_1} - 0{,}1 = 0$, откуда находим $\breve{x}_1 = 400$.

Заметим, что полученный объем потребления первого товара $\breve{x}_1$ недоступен потребителю при данных ценах и доходе. Поскольку условия первого порядка являются необходимыми и достаточными для нахождения внутреннего максимума целевой функции, так как она строго вогнута, то делаем вывод, что наше предположение о том, что оптимальный набор потребителя при данных ценах и доходе является внутренним, неверно. Сравним полезности от угловых точек, лежащих на бюджетной линии потребителя: $u(0,\, m/p_2) = u(0,\, 25) = 25$ и $u(m/p_1,\, 0) = u(250,\, 0) = 20\sqrt{10} > 25$.

Таким образом, оптимальный набор потребителя в этом случае не будет содержать второго блага, а весь свой доход потребитель потратит на покупку первого: $(\overline{x}_1,\, \overline{x}_2) = (250,\, 0)$. Продемонстрируем графически выбор потребителя после изменения цены на рис. 1.23.

Обратите внимание, что при данных предпочтениях оказалось возможным не только внутреннее решение, но и угловое при некотором соотношении цен и дохода.

(в) Спрос потребителя на первое и второе благо найдем, решив задачу потребителя при произвольных ценах $p_i > 0$, $i = 1,\, 2$,

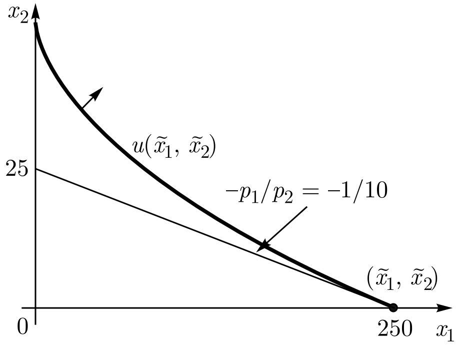

Рис. 1.23. Выбор потребителя после изменения цены первого товара

и доходе $m > 0$:

$$\begin{cases} 4\sqrt{x_1} + x_2 \to \max\limits_{x_1, x_2 \geqslant 0}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant m. \end{cases}$$

Решение задачи потребителя разобьем на два этапа: 1) определим сначала, при каких условиях на цены и доход агента при данных предпочтениях возможно угловое решение задачи потребителя, 2) затем найдем условия на доход и цены, при которых возможно только внутреннее решение задачи потребителя.

1. Предположим, что оптимальным является набор, не содержащий первое благо. Найдем предельную норму замещения второго блага первым в этой точке: $MRS_{12} = 2/\sqrt{x_1}$ и $MRS_{12} \to \infty$ при $x_1 = 0$. Таким образом, ради увеличения потребления первого блага на ε ед. ($\varepsilon > 0$, ε — бесконечно малое), в точке, где агент не потребляет это благо, потребитель готов отказаться от бесконечно большого количества второго блага. Поэтому если перераспределить доход потребителя так, чтобы, оставаясь на границе бюджетного множества, он увеличил бы потребление первого блага на бесконечно малую величину, ему пришлось бы отказаться от второго блага в количестве $p_1\varepsilon/p_2$, а для того, чтобы остаться на том же уровне благосостояния, агент готов был отказаться от бесконечно большого количества второго товара. В силу строгой монотонности предпочтений (функция полезности возрастает по каждому аргументу) благосостояние потребителя при указанном перераспределении дохода возрастет.

Изложим сказанное выше формально. Пусть потребитель увеличивает потребление первого блага на ε ($\varepsilon > 0$). Тогда ему необходимо отказаться от $(p_1/p_2)\varepsilon$ ед. второго блага (в этом случае потребитель тратит свой доход полностью). Найдем уровень благосостояния потребителя в точке $\widehat{x} = (0, m/p_2)$ и в точке $\overline{x} = \left(\varepsilon, \dfrac{m - p_1\varepsilon}{p_2}\right)$ после указанного выше перераспределения дохода

$$u(\widehat{x}) = \frac{m}{p_2} \quad \text{и} \quad u(\overline{x}) = 4\sqrt{\varepsilon} + \frac{m - p_1\varepsilon}{p_2}.$$

Заметим, что всегда при любых положительных ценах товаров найдется $\varepsilon < 16\,(p_2/p_1)^2$, при котором $u(\overline{x}) > u(\widehat{x})$. Следовательно, при данных предпочтениях агент всегда (при $p_1 > 0$, $p_2 > 0$) может перераспределить свой доход таким образом, чтобы повысить свое благосостояние, если он находится в точке, где уровень потребления первого блага равен нулю.

Заметим также, что поскольку предпочтения агента строго монотонны, то при нулевой цене какого-либо из благ задача потребителя не имеет решения (максимум полезности при бюджетном ограничении в этом случае недостижим).

Найдем теперь, при каких условиях на цены и доход потребителя его оптимальный набор не будет содержать второе благо. Эта ситуация будет возможна, если предельная норма замещения второго товара первым в точке $\underline{x} = (m/p_1, 0)$ окажется больше, чем отношение цен товаров (p_1/p_2). В этом случае у потребителя нет ресурсов (отсутствует второе благо) для перераспределения дохода таким образом, чтобы можно было повысить его благосостояние. Либо оптимальный набор в точке $\underline{x} = (m/p_1, 0)$ будет возможен, если $MRS_{1,2}(\underline{x}) = p_1/p_2$. Поэтому имеем

$$\begin{cases} x_1 = m/p_1, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad \text{если } MRS_{1,2}(\underline{x}) \geqslant \frac{p_1}{p_2},$$

т. е. $\dfrac{2}{\sqrt{m/p_1}} \geqslant \dfrac{p_1}{p_2}$, или $p_1 \leqslant 4\,(p_2)^2/m$.

2. Таким образом, если $p_1 > 4\,(p_2)^2/m$, то оптимальный набор потребителя может быть только внутренним. В этом случае условие $MRS_{12}(x^*) = p_1/p_2$ является необходимым и достаточным в силу строгой выпуклости предпочтений. Поэтому имеем

$$\begin{cases} 2/\sqrt{x_1^*} = p_1/p_2, \\ p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = m, \end{cases}$$

если $p_1 > 4\,(p_2)^2/m$, откуда получаем

$$\begin{cases} x_1^* = 4\,(p_2/p_1)^2\,, \\ x_2^* = m/p_2 - 4\,p_2/p_1. \end{cases}$$

Итак, учитывая все ограничения на цены и доход потребителя, выпишем функции спроса на первое и второе благо для данного потребителя:

$$x_1\,(p_1, p_2, m) = \begin{cases} m/p_1, & p_1 \leqslant 4\,(p_2)^2/m, \\ 4\,(p_2/p_1)^2\,, & p_1 > 4\,(p_2)^2/m, \end{cases}$$

и

$$x_2\,(p_1, p_2, m) = \begin{cases} 0, & p_1 \leqslant 4\,(p_2)^2/m, \\ m/p_2 - 4\,p_2/p_1, & p_1 > 4\,(p_2)^2/m. \end{cases}$$

(г) Кривая доход–потребление представляет собой совокупность точек в координатах товаров, являющихся оптимальным набором потребителя при неизменных ценах на все товары и различных уровнях дохода потребителя. Кривая Энгеля представляет собой совокупность точек на плоскости в координатах товар–доход, являющихся оптимальным уровнем потребления данного товара при неизменных ценах на все товары и различных уровнях дохода потребителя. Найденные выше функции спроса на первое и второе благо помогут построить нам указанные кривые.

Заметим, что при относительно низком доходе, $m \leqslant 4\,(p_2)^2/p_1$, второй товар не потребляется при любых положительных ценах благ. При доходе $m > 4\,(p_2)^2/p_1$ агент не меняет потребление первого блага с ростом дохода (спрос его на первое благо в этом случае не зависит от уровня дохода). Предпочтения данного потребителя квазилинейные, поэтому кривые безразличия являются точной копией друг друга со сдвигом по вертикальной оси. Наклон любой кривой безразличия при любом значении x_2 и некотором значении x_1 одинаков и определяется только значением координаты x_1 (вспомним, что $MRS_{12} = 2/\sqrt{x_1}$). Поэтому при неизменных ценах и росте дохода, начиная с некоторого уровня дохода $m \geqslant 4\,(p_2)^2/p_1$, любая кривая безразличия будет касаться бюджетной линии (т. е. иметь с ней одинаковый наклон) в точке, где $x_1 = 4\,(p_2/p_1)^2$.

Заметим, что до некоторого уровня дохода спрос потребителя на первое благо пропорционален доходу, следовательно, спрос на первое благо растет с ростом дохода при неизменных ценах на товары. Значит, до некоторого уровня дохода при неизменных ценах ($m < 4\,(p_2)^2/p_1$) первый товар ведет себя, как нормальное благо. Второй товар при этом уровне дохода ведет себя, как нейтральный к доходу, поскольку при этом уровне дохода спрос на него равен нулю, т. е. не изменяется. Но, начиная с некоторого уровня дохода при неизменных ценах ($m \geqslant 4\,(p_2)^2/p_1$), спрос данного потребителя на первый товар не зависит от уровня дохода. Значит, первый товар при этом уровне дохода ведет себя, как нейтральное к доходу благо. Второй же товар при этом уровне дохода ведет себя, как нормальный товар, поскольку спрос на него растет с ростом дохода потребителя.

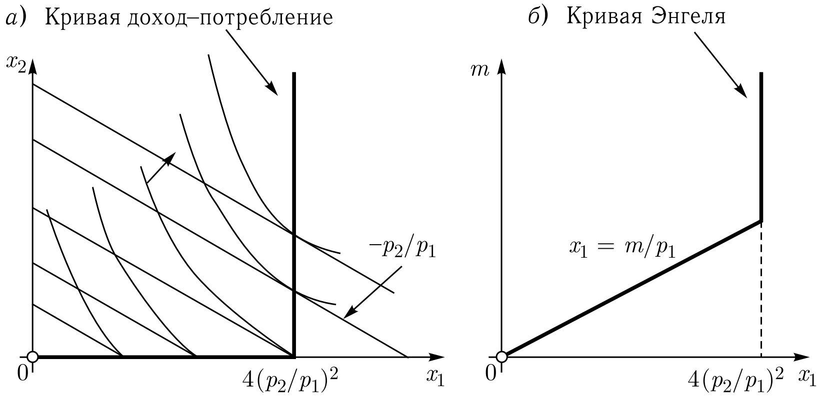

Рис. 1.24. Кривая доход–потребление и кривая Энгеля для квазилинейных предпочтений

На рис. 1.24 представлены кривая доход–потребление и кривая Энгеля для данного потребителя.

1.67. (a) (i) Для нахождения функции спроса необходимо решить задачу потребителя:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \to \max\limits_{x_1, x_2 \geqslant 0}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant m. \end{cases}$$

Поскольку полезность потребителя возрастает по каждому аргументу, то потребитель выберет набор, на который полностью потратит свой доход.

Следует также заметить, что при нулевой цене хотя бы одного товара объем спроса данного агента на этот товар неограниченно возрастает, вследствие чего задача потребителя решения не имеет. Поэтому искать функцию спроса мы будем только при положительных ценах обоих благ.

Товары являются совершенными субститутами для данного потребителя, так как предельная норма замещения товаров постоянна, $MRS_{12}(x) = \alpha_1/\alpha_2 = \text{const}$. Если субъективная оценка потребителя первого товара окажется выше рыночной оценки, то он откажется от потребления второго товара, потратив весь свой доход на первое благо. Если субъективная оценка потребителя первого товара окажется ниже рыночной оценки, то он откажется от потребления первого товара, потратив весь доход на второе благо. Если субъективная оценка потребителя первого товара окажется такой же, как и рыночная оценка, то ему будет безразлично, как именно распределить свой доход между товарами.

Таким образом:

если $MRS_{12}(x) > \dfrac{p_1}{p_2}$, т. е. $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} > \dfrac{p_1}{p_2}$, то $\begin{cases} x_1(p_1, p_2, m) = \dfrac{m}{p_1}, \\ x_2(p_1, p_2, m) = 0; \end{cases}$

если $MRS_{12}(x) < \dfrac{p_1}{p_2}$, т. е. $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} < \dfrac{p_1}{p_2}$, то $\begin{cases} x_1(p_1, p_2, m) = 0, \\ x_2(p_1, p_2, m) = \dfrac{m}{p_2}; \end{cases}$

если же $MRS_{12}(x) = \dfrac{p_1}{p_2}$, т. е. $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$, тогда потребитель выберет любой набор, удовлетворяющий уравнению бюджетной линии $p_1x_1 + p_2x_2 = m$.

Итак, функция спроса для данного потребителя имеет вид:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \begin{cases} \dfrac{m}{p_1}, & \dfrac{p_1}{p_2} < \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}, \\ 0, & \dfrac{p_1}{p_2} > \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}, \end{cases} \qquad x_2(p_1, p_2, m) = \begin{cases} 0, & \dfrac{p_1}{p_2} < \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}, \\ \dfrac{m}{p_2}, & \dfrac{p_1}{p_2} > \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}; \end{cases}$$

если же $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$, то любые наборы (x_1, x_2), удовлетворяющие уравнению бюджетной линии $p_1x_1 + p_2x_2 = m$, являются решением задачи потребителя.

Графическое решение задачи потребителя представлено на рис. 1.25.

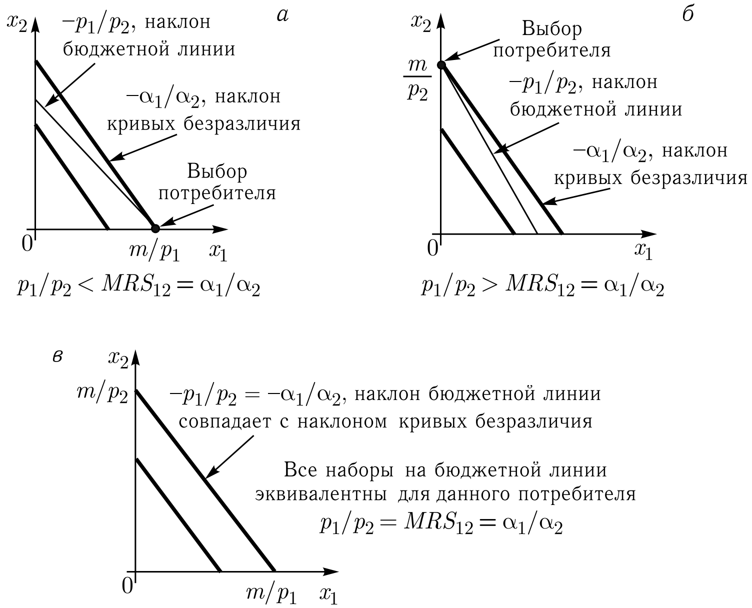

Рис. 1.25. Изображение выбора потребителя с функцией полезности вида $u(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$

(ii) Охарактеризуем каждый товар с точки зрения реакции на изменение дохода и изменение цен.

• Первый товар ведет себя как нормальное благо, если $p_1/p_2 < \alpha_1/\alpha_2$, поскольку $\partial x_1\,(p, m)/\partial m = 1/p_1 > 0$ и ведет себя как нейтральное к доходу благо, если $p_1/p_2 > \alpha_1/\alpha_2$, поскольку $\partial x_1\,(p, m)/\partial m = 0$.

Второй товар ведет себя как нормальное благо, если $p_1/p_2 > \alpha_1/\alpha_2$, поскольку $\partial x_2\,(p, m)/\partial m = 1/p_2 > 0$, и ведет себя как нейтральное к доходу благо, если $p_1/p_2 < \alpha_1/\alpha_2$, поскольку $\partial x_2\,(p, m)/\partial m = 0$.

При $p_1/p_2 = \alpha_1/\alpha_2$ и $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ выбор потребителя неоднозначен, поэтому нельзя охарактеризовать товары с точки зрения изменения спроса на изменение дохода.

Таким образом, ни один из товаров не является ни нормальным, ни нейтральным к доходу товаром, так как не демонстрирует одинаковой реакции на изменение дохода потребителя при любых ценах и доходах.

• Первый товар ведет себя как обычное благо при $p_1/p_2 < \alpha_1/\alpha_2$, поскольку $\partial x_1\,(p, m)/\partial p_1 = -m/(p_1)^2 < 0$.

Второй товар ведет себя как обычное благо при $p_1/p_2 > \alpha_1/\alpha_2$, поскольку $\partial x_2(p,m)/\partial p_2 = -m/(p_2)^2 < 0$.

В тех случаях, когда первое или второе благо не потребляется, нет смысла говорить о том, как спрос на него изменяется при изменении его цены.

При $p_1/p_2 = \alpha_1/\alpha_2$ и $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ выбор потребителя неоднозначен, поэтому нельзя охарактеризовать товары с точки зрения изменения спроса на изменение своей цены.

• Если повышение цены первого товара приводит к увеличению спроса на второй товар, то второй товар является (валовым) заменителем (субститутом) первого товара для данного потребителя. Поскольку $\partial x_1(p_1,p_2,m)/\partial p_2 = 0$ при $p_1/p_2 < \alpha_1/\alpha_2$, то в соответствии с определением (валового) заменителя первый товар не является (валовым) заменителем второго. Аналогично, поскольку $\partial x_2(p_1,p_2,m)/\partial p_1 = 0$ при $p_1/p_2 > \alpha_1/\alpha_2$, то второй товар не является (валовым) заменителем первого.

(iii) Используя функции спроса, полученные ранее, изобразим кривые цена–потребление (для изменения цены первого товара), доход–потребление и Энгеля.

• Для данного вида предпочтений при изменении цены первого товара при $p_1/p_2 > \alpha_1/\alpha_2$ потребитель не будет потреблять первое благо, расходуя весь свой доход только на второй товар. При $p_1/p_2 = \alpha_1/\alpha_2$ любой набор, лежащий на бюджетной линии, является наилучшим для данного агента. При $p_1/p_2 < \alpha_1/\alpha_2$ потребитель будет тратить весь свой доход только на первый товар, причем спрос на него будет расти при снижении цены этого блага. Рисунок 1.26 демонстрирует построение кривой цена–потребление.

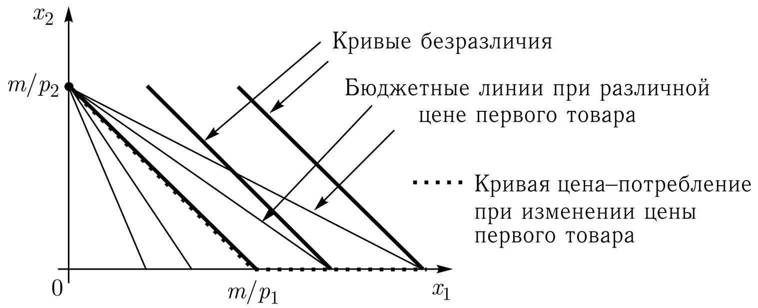

Рис. 1.26. Построение кривой цена–потребление для потребителя с функцией полезности $u(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$

• Кривая доход–потребление является геометрическим местом точек в пространстве товаров, являющихся выбором потребителя при неизменных ценах товаров и различных уровнях дохода. Кривая Энгеля представляет зависимость в пространстве доход–потребление количества потребляемого товара от дохода агента при неизменных ценах на товары.

Если при некоторых ценах данный агент не предъявляет спрос на один из товаров, то изменение дохода агента при фиксированных ценах не изменит объем потребления этого товара. Если цены благ фиксированы на таком уровне, что наклоны кривой безразличия и бюджетной линии совпадают, то выбор потребителя не определен однозначно. Читателю предлагается самостоятельно построить кривую доход–потребление и кривую Энгеля в этом случае. А мы построим кривые доход–потребление и Энгеля лишь для того случая, когда потребитель предъявляет ненулевой спрос на один из товаров, первый, отказавшись при этом от потребления второго товара, т. е. при $p_1/p_2 < \alpha_1/\alpha_2$. При этом увеличение дохода агента не изменяет объем его спроса на

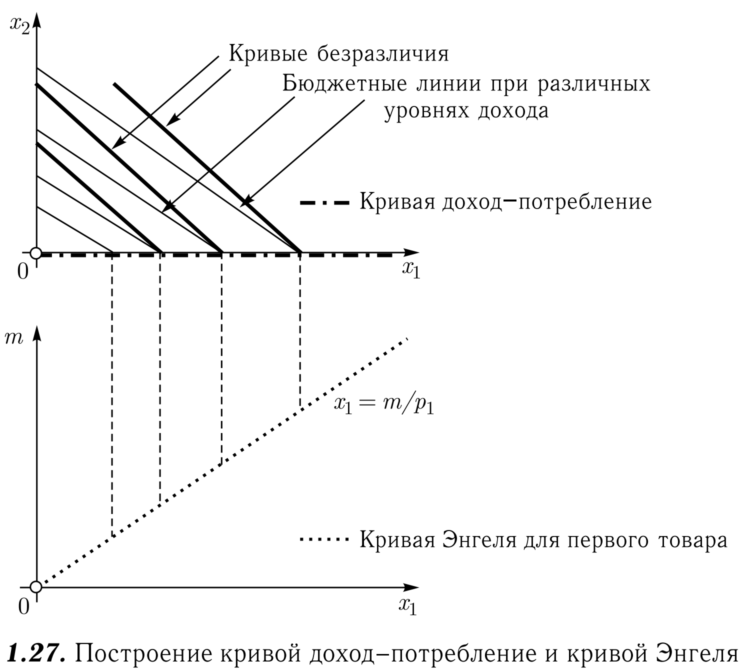

Рис. 1.27. Построение кривой доход–потребление и кривой Энгеля для потребителя с функцией полезности $u(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$

второй товар, поскольку отношение цен остается неизменным. Построение кривой доход–потребление демонстрирует рис. 1.27.

(б) (i) Для нахождения функции спроса необходимо решить задачу потребителя:

$$\begin{cases} \min\{\alpha_1 x_1,\, \alpha_2 x_2\} \to \max\limits_{x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant m. \end{cases}$$

Поскольку предпочтения потребителя монотонны, то потребитель выберет набор, на который полностью потратит свой доход.

Оба товара будут потребляться в положительном количестве. В противном случае полезность агента от приобретения набора, содержащего нулевое количество хотя бы одного блага, меньше, чем полезность, которую агент получит, потребив оба блага в положительном количестве, что возможно, поскольку доход потребителя положителен.

Покажем, что в точке выбора потребителя $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ при положительных ценах агент таким образом распределит свой доход, что $\alpha_1 \widetilde{x}_1 = \alpha_2 \widetilde{x}_2$. Предположим, что это не так. Например, $\alpha_1 \widetilde{x}_1 > \alpha_2 \widetilde{x}_2$ и $p_1 \widetilde{x}_1 + p_2 \widetilde{x}_2 = m$, следовательно, $u\,(x_1,\, x_2) = \min\{\alpha_1 \widetilde{x}_1, \alpha_2 \widetilde{x}_2\} = \alpha_2 \widetilde{x}_2$. Тогда рассмотрим набор $(\overline{x}_1,\, \overline{x}_2) = (\widetilde{x}_1 - \varepsilon,\, \widetilde{x}_2)$, где $\varepsilon = \dfrac{\alpha_1 \widetilde{x}_1 - \alpha_2 \widetilde{x}_2}{\alpha_1} > 0$. Заметим, что $u\,(\overline{x}_1,\, \overline{x}_2) = u\,(\widetilde{x}_1,\, \widetilde{x}_2) = \alpha_1\,(\widetilde{x}_1 - \varepsilon) = \alpha_2 \widetilde{x}_2$. Построим теперь набор $(\widehat{x}_1,\, \widehat{x}_2) = (\overline{x}_1 + \delta, \overline{x}_2 + \delta)$, где $\delta = \dfrac{\varepsilon p_1}{p_1 + p_2} = \dfrac{(\alpha_1 \widetilde{x}_1 - \alpha_2 \widetilde{x}_2)\, p_1}{\alpha_1\,(p_1 + p_2)} > 0$. Набор $(\widehat{x}_1,\, \widehat{x}_2)$ в точности доступен потребителю, так как

$$\begin{aligned} p_1 \widehat{x}_1 + p_2 \widehat{x}_2 &= p_1\,(\widetilde{x}_1 - \varepsilon + \delta) + p_2\,(\widetilde{x}_2 + \delta) = \\ &= p_1 \left(\widetilde{x}_1 - \frac{\alpha_1 \widetilde{x}_1 - \alpha_2 \widetilde{x}_2}{\alpha_1} + \frac{(\alpha_1 \widetilde{x}_1 - \alpha_2 \widetilde{x}_2)\, p_1}{\alpha_1\,(p_1 + p_2)} \right) + \\ &\quad + p_2 \left(\widetilde{x}_2 + \frac{(\alpha_1 \widetilde{x}_1 - \alpha_2 \widetilde{x}_2)\, p_1}{\alpha_1\,(p_1 + p_2)} \right) = p_1 \widetilde{x}_1 + p_2 \widetilde{x}_2 = m. \end{aligned}$$

При этом $u\,(\widehat{x}_1,\, \widehat{x}_2) = \min\{\alpha_1\,(\widetilde{x}_1 - \varepsilon + \delta),\, \alpha_2\,(\widetilde{x}_2 + \delta)\} > \alpha_1\,(\widetilde{x}_1 - \varepsilon) = \alpha_2 \widetilde{x}_2 = u\,(\widetilde{x}_1,\, \widetilde{x}_2)$. Таким образом, перераспределив доход, потребитель может повысить свое благосостояние. А значит, набор, в котором содержится количество благ, такое что $\alpha_1 \widetilde{x}_1 > \alpha_2 \widetilde{x}_2$, не является наилучшим для потребителя среди доступных ему наборов. Аналогично можно показать, что потребитель не будет выбирать набор, в котором $\alpha_1\widetilde{x}_1 < \alpha_2\widetilde{x}_2$. Следовательно, в точке оптимума $\alpha_1\widetilde{x}_1 = \alpha_2\widetilde{x}_2$.

Выбор потребителя при положительных ценах будет удовлетворять следующим условиям:

$$\alpha_1\widetilde{x}_1 = \alpha_2\widetilde{x}_2, \qquad p_1\widetilde{x}_1 + p_2\widetilde{x}_2 = m.$$

Следует заметить также, что существует решение задачи потребителя с данными предпочтениями и при нулевой цене одного из товаров. При нулевой цене первого товара, максимизируя свою полезность, агент купит максимально возможное для его бюджета количество второго товара, а именно: $x_2 = m/p_2$, при этом количество первого товара, которое будет потреблять агент, может быть любым, удовлетворяющим условию $x_1 \geqslant \alpha_2 m/\alpha_1 p_2$. Аналогично, при нулевой цене второго товара агент, максимизируя свою полезность, купит максимально возможный при его бюджете объем первого товара $x_1 = m/p_1$, при этом количество второго товара, которое будет потреблять агент, может быть любым, удовлетворяющим условию $x_2 \geqslant \alpha_1 m/\alpha_2 p_1$.

Отсюда находим функции спроса на каждое благо:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_2 m}{\alpha_1 p_2 + \alpha_2 p_1}, & p_1,\ p_2 > 0, \\ \forall x_1 \geqslant \dfrac{\alpha_2 m}{\alpha_1 p_2}, & p_1 = 0,\ p_2 > 0, \\ \dfrac{m}{p_1}, & p_1 > 0,\ p_2 = 0, \end{cases}$$

$$x_2(p_1, p_2, m) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_1 m}{\alpha_1 p_2 + \alpha_2 p_1}, & p_1,\ p_2 > 0, \\ \forall x_2 \geqslant \dfrac{\alpha_1 m}{\alpha_2 p_2}, & p_1 > 0,\ p_2 = 0, \\ \dfrac{m}{p_2}, & p_1 = 0,\ p_2 > 0. \end{cases}$$

Проиллюстрируем решение задачи потребителя при положительных ценах товаров графически на рис. 1.28.

(ii) Охарактеризуем каждый товар с точки зрения реакции на изменение дохода и изменение цен.

• Первый и второй товары являются нормальными благами, так как $\dfrac{\partial x_i(p_1, p_2, m)}{\partial m} = \dfrac{\alpha_j}{\alpha_1 p_2 + \alpha_2 p_1} > 0$ при любых $p_1, p_2, m > 0$, $i, j = 1, 2,\ i \neq j$.

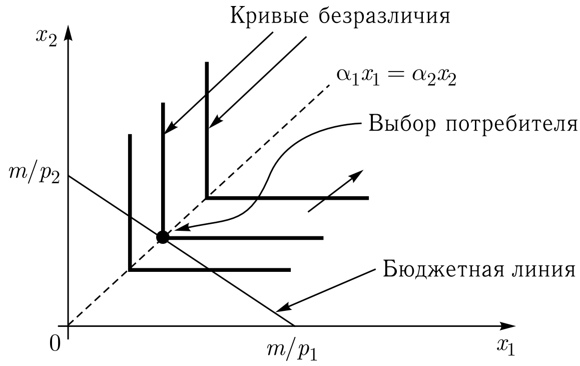

Рис. 1.28. Выбор потребителя с функцией полезности $u(x_1, x_2) = \min\{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2\}$ при положительных ценах товаров

• Первый и второй товары являются обычными благами, так как $\dfrac{\partial x_i\,(p_1, p_2, m)}{\partial p_i} = -\dfrac{(\alpha_j)^2\, m}{(\alpha_1 p_2 + \alpha_2 p_1)^2} < 0,\ i, j = 1, 2,\ i \neq j.$

• Первый и второй товары являются (валовыми) дополнителями благами друг для друга, поскольку $\dfrac{\partial x_i\,(p_1, p_2, m)}{\partial p_j} = -\dfrac{\alpha_1 \alpha_2 m}{(\alpha_1 p_2 + \alpha_2 p_1)^2} < 0,\ \ i \neq j,\ \ i, j = 1, 2,$ причем стоит заметить, что товары являются абсолютно взаимодополняющими (совершенными комплементами), по определению, поскольку при $\alpha_1 x_1 > \alpha_2 x_2$ имеем $MRS_{12} = 0$ и при $\alpha_1 x_2 < \alpha_2 x_2$ $MRS_{12} = \infty$.

(iii) Используя функцию спроса, изобразим кривые цена–потребление (для изменения цены первого товара), доход–потребление и кривую Энгеля.

• Изобразим кривую цена–потребление. Заметим, что при данных предпочтениях задача потребителя может иметь решение и при нулевых ценах на товары.

Пусть цена второго товара фиксирована, в то время как цена первого товара изменяется. Если $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, то потребитель выбирает наборы, лежащие на луче, выходящем из начала координат: $\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2$ (не включая само начало координат). Поэтому участок кривой цена–потребление совпадает с лучом $\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2$, где $0 < x_2 \leqslant m/p_2$.

Если $p_1/p_2 \to \infty$, т. е. цена первого товара столь велика, что потребитель не имеет возможности приобрести первый товар ни в каком количестве, то любой набор, содержащий нулевое количество первого товара и любое положительное количество второго товара в том объеме, в котором агент может себе его позволить, будет приносить потребителю максимальный уровень полезности, равный 0, следовательно, будет являться решением задачи потребителя при этих ценах и принадлежать кривой цена–потребление.

Если $p_1/p_2 \to 0$, т. е. цена первого товара равна нулю, то любой набор, содержащий количество второго товара $x_2 = m/p_2$ и количество первого товара, равное $x_1 \geqslant \alpha_2 m/(\alpha_1 p_2)$, будет приносить потребителю максимальный уровень полезности, равный $u = \alpha_2 m/p_2$, следовательно, будет являться решением задачи потребителя при этих ценах и принадлежать кривой цена–потребление. Построение кривой цена–потребление демонстрирует рис. 1.29.

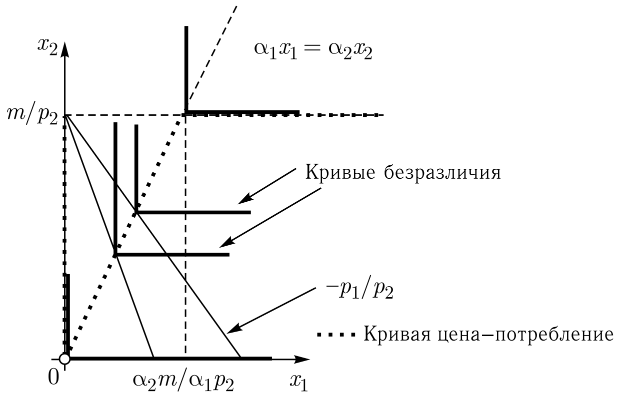

Рис. 1.29. Построение кривой цена–потребление для агента с функцией полезности $u(x_1, x_2) = \min\{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2\}$

• Кривая доход–потребление (при положительных ценах товаров) представляет собой луч, выходящий из начала координат, где $\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2$.

• Кривая Энгеля представляет собой луч, выходящий из начала координат в пространстве доход–потребление первого товара, где $x_1\,(p_1, p_2, m) = \alpha_2 m/(\alpha_1 p_2 + \alpha_2 p_1)$.

Рисунок 1.30 демонстрирует построение кривой доход–потребление.

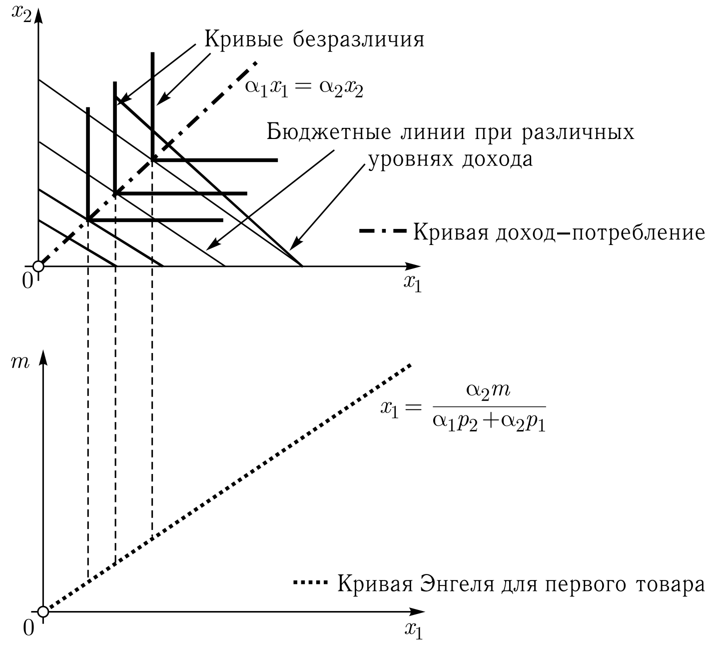

Рис. 1.30. Построение кривой доход–потребление и кривой Энгеля для потребителя с функцией полезности $u(x_1, x_2) = \min\{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2\}$

(в) (i) Найдем функцию спроса, решив задачу потребителя:

$$\begin{cases} (x_1)^2 + (x_2)^2 \to \max\limits_{x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant m. \end{cases}$$

Выбирая наилучший набор, потребитель полностью потратит весь свой доход, так как полезность возрастает по своим аргументам.

Сразу заметим, что решение задачи потребителя возможно только при положительных ценах товаров, поскольку при нулевой цене хотя бы одного товара в силу строгой монотонности предпочтений решения задачи максимизации полезности данного агента не существует.

Приведем сначала аналитическое решение, а затем продемонстрируем, что для данного вида предпочтений решение задачи потребителя можно получить графически.

Найдем внутреннее решение задачи потребителя, затем сравним полезность от внутреннего решения и угловых точек.

Внутреннее решение задачи потребителя определяется соотношениями:

$$\begin{cases} MRS_{12}(\widetilde{x}) = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ \widetilde{x}_1 > 0, \ \ \widetilde{x}_2 > 0, \\ p_1\widetilde{x}_1 + p_2\widetilde{x}_2 = m, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\widetilde{x}_1}{\widetilde{x}_2} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ \widetilde{x}_1 > 0, \ \ \widetilde{x}_2 > 0, \\ p_1\widetilde{x}_1 + p_2\widetilde{x}_2 = m, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{x}_1 = \dfrac{mp_1}{p_1^2 + p_2^2}, \\ \widetilde{x}_2 = \dfrac{mp_2}{p_1^2 + p_2^2}. \end{cases}$$

Полезность от внутреннего набора: $u(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = m^2/(p_1^2 + p_2^2)$.

Найдем полезность от угловых наборов:

- если потребитель отказывается от потребления первого товара, то он выбирает набор $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = (0, m/p_2)$. Полезность от этого набора $u(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = m^2/p_2^2$;
- если потребитель отказывается от потребления второго товара, то он выбирает набор $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = (m/p_1, 0)$. Полезность от этого набора $u(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = m^2/p_1^2$.

Сравним полезность от внутреннего решения задачи потребителя и угловых наборов:

$$u(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \frac{m^2}{p_1^2 + p_2^2} < \frac{m^2}{p_1^2} = u(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2),$$
$$u(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \frac{m^2}{p_1^2 + p_2^2} < \frac{m^2}{p_2^2} = u(\overline{x}_1, \overline{x}_2).$$

Итак, ни при каких ценах и доходе потребитель не выберет набор, содержащий положительное количество каждого блага.

Сравним полезности от угловых наборов:

$$u(\overline{x}_1, \overline{x}_2) > u(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2), \text{ если } \frac{m^2}{p_2^2} > \frac{m^2}{p_1^2}, \text{ или } p_1 > p_2;$$
$$u(\overline{x}_1, \overline{x}_2) < u(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2), \text{ если } \frac{m^2}{p_2^2} < \frac{m^2}{p_1^2}, \text{ или } p_1 < p_2;$$
$$u(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = u(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2), \text{ если } \frac{m^2}{p_2^2} = \frac{m^2}{p_1^2}, \text{ или } p_1 = p_2.$$

Следовательно, потребитель откажется от потребления первого товара, если цена его будет больше, чем цена второго товара. Потребитель откажется от потребления второго товара, если цена его будет больше, чем цена первого товара. Для потребителя эквивалентны наборы, не содержащие либо первое благо, либо второе благо, если их цены равны.

Функции спроса на товары имеют вид:

$$x_1(p_1,p_2,m) = \begin{cases} \dfrac{m}{p_1}, & p_1 \leqslant p_2, \\ 0, & p_1 > p_2, \end{cases} \qquad x_2(p_1,p_2,m) = \begin{cases} 0, & p_1 < p_2, \\ \dfrac{m}{p_2}, & p_1 \geqslant p_2. \end{cases}$$

Представим выбор потребителя при различных ценах графически на рис. 1.31.

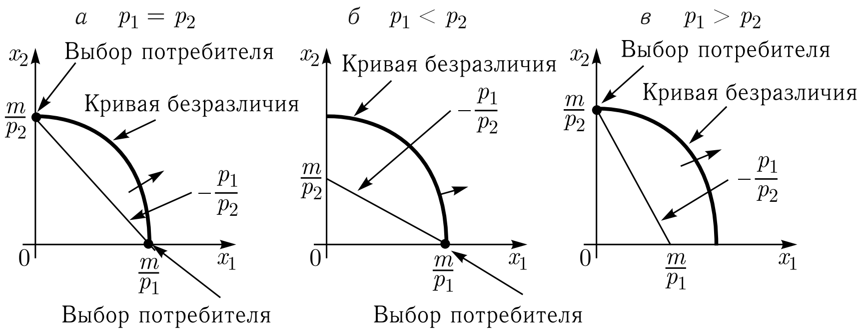

Рис. 1.31. Выбор потребителя с функцией полезности $u(x_1,x_2) = (x_1)^2 + (x_2)^2$

Заметим, что предпочтения потребителя не являются выпуклыми. Более того, любая выпуклая комбинация двух данных наборов ($C = \alpha A + (1-\alpha)B$ $\forall \alpha$: $0 < \alpha < 1$, где A, B, C — наборы) для данного агента всегда строго хуже, чем худший из данных наборов. Поэтому решение задачи потребителя стоит искать только среди угловых наборов, в котором не содержится один из товаров.

(ii) Охарактеризуем спрос на каждый товар с точки зрения реакции на изменение дохода и изменение цен.

• Если $p_1 \leqslant p_2$, то первый товар ведет себя как нормальное благо, поскольку $\partial x_1(p_1,p_2,m)/\partial m = 1/p_1 > 0$. Если $p_1 > p_2$ (рис. 1.31, *в*), то первый товар ведет себя как нейтральное к доходу благо, поскольку $\partial x_1(p_1,p_2,m)/\partial m = 0$.

Аналогично, если $p_1 \geqslant p_2$, то второй товар ведет себя как нормальное благо, поскольку $\partial x_2(p_1,p_2,m)/\partial m = 1/p_2 > 0$. Если $p_1 < p_2$ (рис. 1.31, *б*), то второй товар ведет себя как нейтральное к доходу благо, поскольку $\partial x_2(p_1,p_2,m)/\partial m = 0$.

Таким образом, ни один из товаров не является ни нормальным, ни нейтральным к доходу товаром, так как не демонстрирует нормальной или нейтральной реакции на изменение дохода потребителя при любых ценах и доходах.

• Поскольку $\partial x_i\,(p_1, p_2, m)/\partial p_i = -m/(p_i)^2 < 0\ \forall i$, то оба товара ведут себя как обычные блага, если относительные цены таковы, что данные блага потребляются агентом.

• Поскольку $\partial x_i\,(p_1, p_2, m)/\partial p_j = 0$ при $p_i < p_j\ \ \forall i \neq j$, то товары не являются (валовыми) заменителями.

(iii) Используя функции спроса, изобразим кривые цена–потребление (при изменении цены первого товара), доход–потребление и кривую Энгеля.

• Кривую цена–потребление при изменении цены первого блага демонстрирует рис. 1.32. Обратите внимание, что точка $(x_1, x_2) = (0,\ m/p_2)$ также принадлежит кривой цена–потребление.

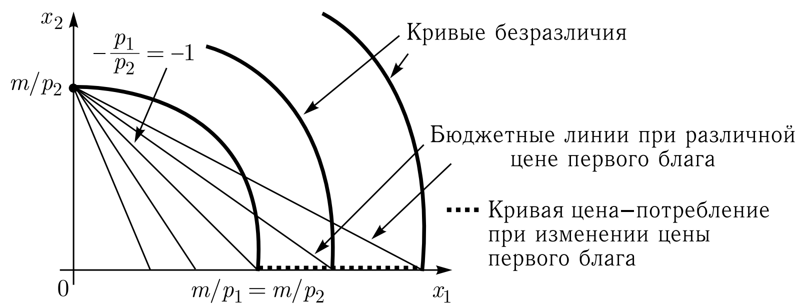

Рис. 1.32. Построение кривой цена–потребление для агента с функцией полезности $u(x_1, x_2) = (x_1)^2 + (x_2)^2$

• Построение кривых доход–потребление и кривой Энгеля представлены на рис. 1.33. При этом рассмотрены лишь те случаи, когда потребление первого товара положительное.

1.73. (a) Для того чтобы найти доходы правительства от налогообложения товара y, необходимо найти количество блага y, на которое предъявляет спрос данный потребитель при налогообложении. Для этого решим задачу потребителя:

$$\begin{cases} xy \to \max\limits_{x,y\geqslant 0}, \\ p_x x + (p_y + t)y \leqslant m, \end{cases}$$

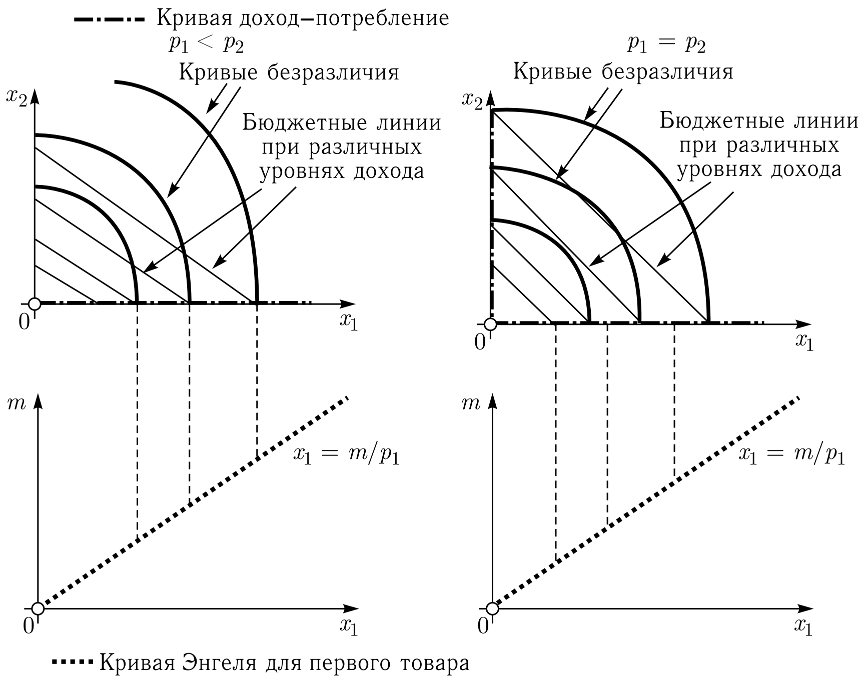

Рис. 1.33. Построение кривой доход–потребление и кривой Энгеля для агента с функцией полезности $u(x_1, x_2) = (x_1)^2 + (x_2)^2$

где m — доход потребителя, а t — величина потоварного налога. Или для данного агента:

$$\begin{cases} xy \to \max\limits_{x,y\geqslant 0}, \\ 25\,x + 40\,y \leqslant 600. \end{cases}$$

Предпочтения данного потребителя представимы функцией полезности вида Кобба–Дугласа ($u(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$), где $\alpha = \beta = 1$. Поэтому мы можем воспользоваться известной функцией спроса на каждое благо:

$$x\,(p_x, p_y, m) = \frac{\alpha\, m}{(\alpha+\beta)\, p_x} \quad \text{и} \quad y\,(p_x, p_y, m) = \frac{\beta\, m}{(\alpha+\beta)\, p_y}.$$

Найдем выбор потребителя при данных ценах и уровне дохода:

$$x^* = 12, \qquad y^* = 7{,}5.$$

Таким образом, доход правительства от налогообложения составит $T = ty^*$, или в данном случае $T = 30$ д. е.

(б) Если правительство заменит потоварный налог на товар y паушальным налогом, это сократит располагаемый доход потребителя на величину $\widetilde{T}$. Так как необходимо найти наибольший паушальный налог, который позволил бы потребителю остаться на том же уровне благосостояния, то необходимо найти минимальный доход, позволяющий достичь прежнего уровня благосостояния. Следовательно, необходимо решить следующую задачу потребителя:

$$\begin{cases} p_x x + p_y y \to \min\limits_{x,y\geqslant 0}, \\ u(x,y) = u(x^*, y^*), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25\,x + 36\,y \to \min\limits_{x,y\geqslant 0}, \\ xy = u(x^*, y^*) = 90. \end{cases} \qquad (*)$$

Решим поставленную задачу графически на рис. 1.34, зная, как ведут себя кривые безразличия для предпочтений вида Кобба–Дугласа.

Угловое решение задачи (*) не существует, так как любой набор, не содержащий какого-либо блага, дает потребителю нулевую полезность в силу вида его функции полезности. Агенту же необходимо достичь уровня благосостояния $u(x^*, y^*) = x^*y^* = 90$. Так как кривые безразличия — гладкие, без изломов, то бюджетная линия агента при взимании наибольшего паушального налога должна коснуться данной кривой безразличия, иначе была бы возможность снизить доход потребителя за счет большей суммы паушального налога. Поэтому в новой точке оптимума $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ необходимо выполнение условия касания кривой безразличия и бюджетной линии, т. е. $MRS_{x,y}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = p_x/p_y$, или $\widetilde{y}/\widetilde{x} = 25/36$. Кроме того, набор $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$

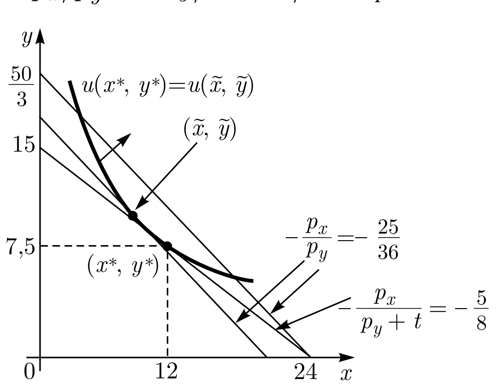

Рис. 1.34. Замена потоварного налога паушальным налогом без изменения благосостояния потребителя

должен лежать на кривой безразличия $u(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \widetilde{x}\,\widetilde{y} = x^*y^* = 90$. Таким образом, имеем: $(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \left(18\sqrt{10}/5, 5\sqrt{10}/2\right)$. Тогда величину необходимого паушального налога найдем из уравнения бюджетной линии: $25\,\widetilde{x} + 36\,\widetilde{y} = 600 - \widetilde{T}$, откуда имеем $\widetilde{T} \approx 30{,}8$ д. е.

Заметим, что при такой замене потоварного налога паушальным налогом, при которой благосостояние потребителя осталось бы на прежнем уровне, потребление товара y возрастает ($\widetilde{y} > y^*$).

(в) Сравним доходы правительства, получаемые при различных схемах налогообложения, описанных выше: $\widetilde{T} > T$. Таким образом, если бы правительство заменило потоварный налог на товар y паушальным налогом, который позволил бы данному потребителю остаться на прежнем уровне благосостояния, то доход правительства возрос бы.

Объясним полученный результат. Сначала выпишем уравнения бюджетных линий потребителя в обоих случаях налогообложения:

$$p_x x + (p_y + t)y = m,$$
$$p_x x + p_y y = m - T.$$

В случае нейтральной к госбюджету замены ($ty^* = T$) набор (x^*, y^*) будет удовлетворять обоим бюджетным ограничениям. Следовательно, обе бюджетные линии пройдут через точку (x^*, y^*), но с различными наклонами. Изобразим графически указанную ситуацию на рис. 1.35.

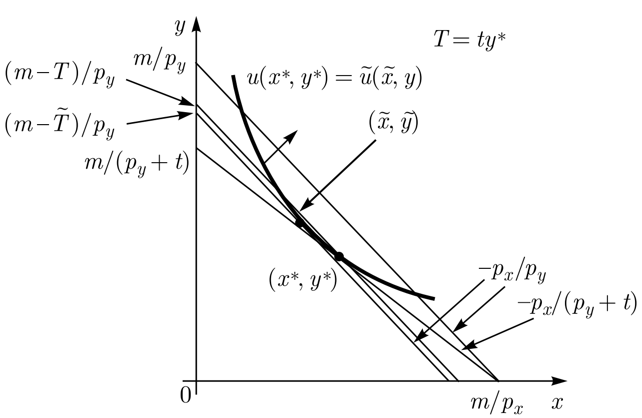

Рис. 1.35. Сравнение доходов правительства от потоварного и паушального налогообложения

Заметим, что в точке (x^*, y^*) наклон кривой безразличия равен наклону бюджетной линии при потоварном налоге $\big(MRS_{xy}(x^*, y^*) = p_x/(p_y + t)\big)$. А наклон бюджетной линии при паушальном налогообложении равен (по абсолютной величине) p_x/p_y. Следовательно, наклон кривой безразличия в точке (x^*, y^*) отличен от наклона бюджетной линии при паушальном налогообложении в случае нейтральной к госбюджету замены. Значит, есть возможность снизить доход потребителя таким образом, чтобы он остался на том же уровне благосостояния. Покажем это. В точке (x^*, y^*) потребитель готов был отказаться от ε ед. товара x ($\varepsilon > 0$, ε — бесконечно малое) ради увеличения потребления товара y на $p_x\varepsilon/(p_y + t)$. Найдем стоимость набора $\big(x^* - \varepsilon,\ y^* + p_x\varepsilon/(p_y + t)\big)$ при паушальном налогообложении:

$$p_x\,(x^* - \varepsilon) + p_y\Big(y^* + \frac{p_x\varepsilon}{p_y + t}\Big) = m + \varepsilon\, p_x\Big(\frac{p_y}{p_y + t} - 1\Big) < m.$$

Таким образом, чтобы достичь уровня благосостояния, соответствующего потоварному налогообложению, можно сократить доход потребителя в случае паушального налога на величину бóльшую, чем доход правительства при потоварном налоге.

(г) Исследуем, будет ли результат п. (в) справедлив при любых предпочтениях потребителя.

Заметим, что величина максимального паушального налога не может быть меньше, чем доходы правительства от потоварного налога, поскольку всегда можно установить $\widetilde{T} = ty^*$, оставив потребителя на том же уровне благосостояния.

Если предпочтения потребителя таковы, что кривые безразличия гладкие, без изломов, и выбор потребителя при потоварном налоге внутренний, то всегда будет иметь место тот же результат, который был получен в предыдущем пункте, а именно: $\widetilde{T} > T = ty^*$.

Приведем примеры, когда будет иметь место результат, отличный от полученного в п. (в). Если предпочтения агента таковы, что кривые безразличия имеют излом или потребитель в случае потоварного налога отказался от потребления товара, который не облагается налогом, то максимальный паушальный налог, который позволил бы потребителю остаться на прежнем уровне благосостояния, был бы в точности равен доходу правительства от данного потребителя при потоварном налоге.

Продемонстрируем сказанное выше графически на рис. 1.36.

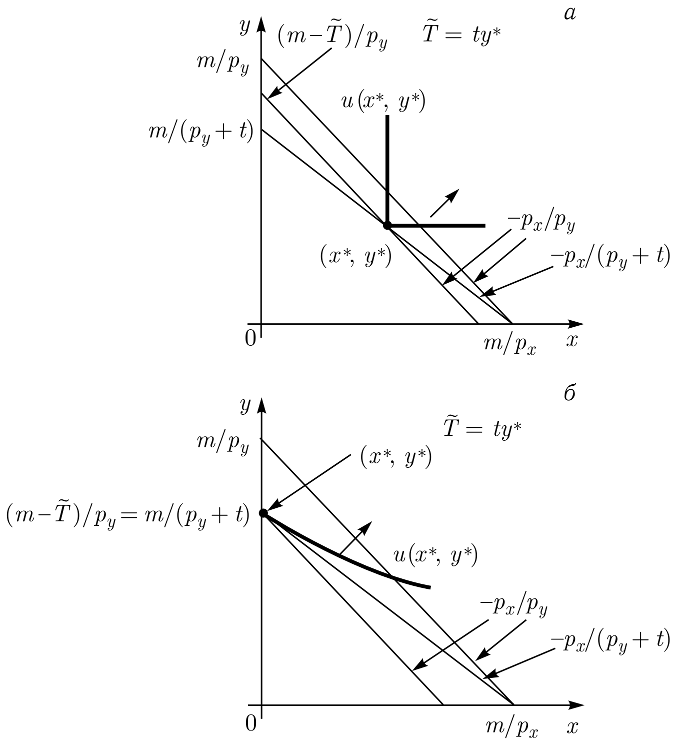

Рис. 1.36. Примеры предпочтений агентов, при которых доходы правительства от потоварного и паушального налогообложения при сохранении уровня благосостояния совпадают

1.83. Из условия следует, что $p_i^t = 6\,p_i^b$ и $m^t = 4m^b$, где p_i^t — цена блага i в текущем периоде, p_i^b — цена блага i в базисном периоде, m^t — доход потребителя в текущем периоде, m^b — доход потребителя в базисном периоде. Уравнение бюджетной линии в текущий период $p_1^t x_1 + p_2^t x_2 = m^t$. Выразив цены и доход текущего периода через, соответственно, цены и доход базисного периода, получим $6\,p_1^b x_1 + 6\,p_2^b x_2 = 4m^b$. Разделим левую и правую часть полученного тождества на шесть: $p_1^b x_1 + p_2^b x_2 = 2m^b/3$, тогда как уравнение бюджетной линии в базисный период $p_1^b x_1 + p_2^b x_2 = m^b$. Следовательно, бюджетное множество текущего периода содержится в бюджетном множестве базисного периода, а это означает, что в базисный период благосостояние не меньше, чем в текущем.

1.90. Приведенные далее рассужения справедливы для случая n товаров в экономике, а графические иллюстрации приведены для случая двух товаров. По условию, $m^1/m^0 = 1{,}5\,m^0/m^0 = 3/2$, где m^0 — доход потребителя в базисном периоде, а m^1 — доход потребителя в текущем периоде.

(а) $L_p > 3/2$ и $P_p < 3/2$.

Если $L_p = (p^1x^0)/(p^0x^0) > 3/2$, то отсюда следует, что $p^1x^0 > 1{,}5\,p^0x^0 = 1{,}5\,m^0 = p^1x^1 = m^1$. То есть набор x^0 недоступен потребителю в текущем периоде, и, соответственно, мы не можем сравнить наборы на основе данной информации.

Если $P_p = (p^1x^1)/(p^0x^1) < 3/2$, то отсюда следует, что $p^0x^1 > p^0x^0 = m^0$. То есть набор x^1 был недоступен потребителю в базисном периоде, и, соответственно, мы не можем сравнить наборы на основе данной информации.

Такая ситуация возможна. Сравнить наборы в этом случае мы не можем, следовательно, не можем сделать однозначный вывод о том, как изменилось благосостояние потребителя. Оно могло возрасти, снизиться и не измениться.

Проиллюстрируем на рис. 1.37 данный результат для двухтоварной экономики, где обозначено $\boxed{0}$ — бюджетная линия в базисном периоде, $\boxed{1}$ — бюджетная линия в текущем периоде.

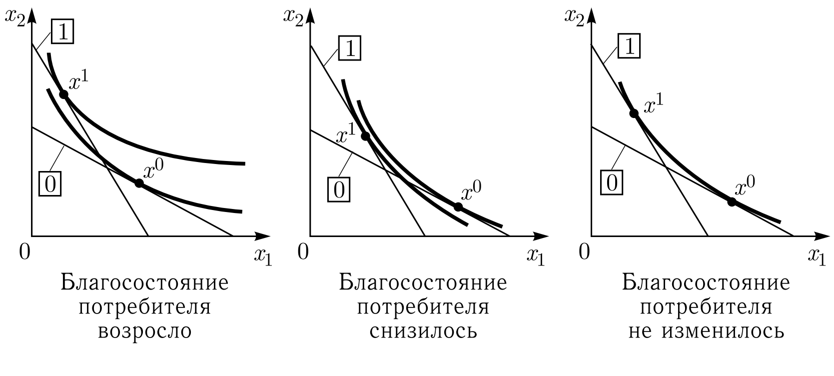

Рис. 1.37. Оценка благосостояния потребителя при $L_p > 3/2$ и $P_p < 3/2$

(б) $L_p < 3/2$ и $P_p > 3/2$.

Если $L_p = (p^1x^0)/(p^0x^0) < 3/2$, отсюда следует, что $p^1x^0 < m$. То есть набор x^0 доступен потребителю в текущем периоде, однако в этом периоде потребитель выбрал набор $x^1 \neq x^0$ (мы знаем, что это разные наборы, поскольку различаются расходы на их приобретение при одинаковых ценах). Следовательно, набор x^1 (прямо выявлено) предпочитается набору x^0.

Если $P_p = (p^1x^1)/(p^0x^1) > 3/2$, отсюда следует, что $p^0x^1 < m^0$. То есть набор x^1 был доступен потребителю в ценах базисного периода, однако был выбран набор $x^0 \neq x^1$ (мы знаем, что это разные наборы, поскольку различаются расходы на их приобретение при одинаковых ценах). Следовательно, набор x^0 (прямо выявлено) предпочитается набору x^1.

Приходим к противоречию. Если потребитель ведет себя рационально, то такая ситуация невозможна.

Проиллюстрируем данный результат на рис. 1.38 для двухтоварной экономики, используя те же обозначения бюджетных линий, что и на рис. 1.37.

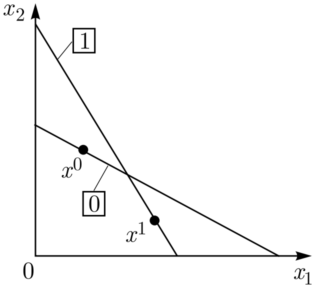

Рис. 1.38. Анализ потребительского выбора при $L_p < 3/2$ и $P_p > 3/2$

1.91. (а) Пусть x_1^y — потребление груш в килограммах в год y, x_2^y — потребление яблок в килограммах в год y, p_1^y, p_2^y — цены груш и яблок, соответственно, в год y. Будем считать, что базисным периодом является 2000 г. Соответственно, текущим является 2012 г. Тогда индекс цен Ласпейреса записывается следующим образом: $L_p = \dfrac{p_1^{2012}x_1^{2000} + p_2^{2012}x_2^{2000}}{p_1^{2000}x_1^{2000} + p_2^{2000}x_2^{2000}}$.

(б) В введенных обозначениях индекс номинального дохода M, представляющий собой отношение расходов на потребление в текущем периоде к расходам на потребление в базисном периоде: $M = \dfrac{p_1^{2012}x_1^{2012} + p_2^{2012}x_2^{2012}}{p_1^{2000}x_1^{2000} + p_2^{2000}x_2^{2000}}$. Если $L_p < M$, то $p_1^{2012}x_1^{2000} + p_2^{2012}x_2^{2000} < p_1^{2012}x_1^{2012} + p_2^{2012}x_2^{2012}$, где в правой части стоит доход в 2012 г., в левой — стоимость набора 2000 г. при ценах 2012-го. Таким образом, набор 2000 г. — это точка внутри бюджетного множества 2012 г. Полученное соотношение означает, что набор, который потребитель покупал в 2000 г., был доступен ему и в 2012-м, однако потребитель предпочел ему другой набор. Следовательно, благосостояние потребителя в 2012 г. не ниже, чем в 2000-м. Подставляя значения, заданные в условии, в неравенства, получим $x_2^{2000} < 5$.

(в) *Подсказка*: отношение цен в 2000 г. составляет $\dfrac{p_1^{2000}}{p_2^{2000}} = 1$, отношение цен в 2012 г. составляет $\dfrac{p_1^{2012}}{p_2^{2012}} = \dfrac{2}{3}$. Поскольку $\dfrac{p_1^{2000}}{p_2^{2000}} > \dfrac{p_1^{2012}}{p_2^{2012}}$, бюджетная линия для 2012 г. должна быть более пологой, чем бюджетная линия для 2000-го.

1.92. Пусть x_1^y — потребление груш в килограммах в год y, x_2^y — потребление яблок в килограммах в год y, p_1^y, p_2^y — цены груш и яблок, соответственно, в год y. Будем считать, что базисным периодом является 2000 г. Соответственно, текущим является 2011 г. В введенных обозначениях индекс объема Пааше записывается следующим образом:

$$P_q = \frac{p_1^{2011}x_1^{2011} + p_2^{2011}x_2^{2011}}{p_1^{2011}x_1^{2000} + p_2^{2011}x_2^{2000}}.$$

Тогда соотношение $P_q > 1$ выполнено при $x_2^{2000} < 4$. Из соотношения $P_q > 1$ следует, что

$$p_1^{2011}x_1^{2011} + p_2^{2011}x_2^{2011} > p_1^{2011}x_1^{2000} + p_2^{2011}x_2^{2000}.$$

Это означает, что набор, выбранный индивидом D в 2000 г., был доступен и в 2011-м, однако не был выбран. Таким образом, благосостояние в 2011 г. выше, чем в 2000-м.

1.100. (а) Для того чтобы понять, согласится ли потребитель на такое предложение, необходимо определить, как изменится при этом его благосостояние.

Выпишем бюджетное ограничение при потоварной субсидии: $(p_x - s)x + p_y y \leqslant m$, где p_x, p_y — цены товаров x и y до введения субсидии, соответственно, m — доход потребителя. В нашем случае:

$$120\,x + 30\,y \leqslant 6000.$$

Определим выбор потребителя в случае потоварной субсидии. Известно, что он выбрал набор, содержащий 25 ед. товара x. Найдем, какое количество товара y выберет агент, зная, что он полностью израсходует свой доход. Таким образом, выбором потребителя в случае потоварной субсидии является набор $(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = (25, 100)$.

Выпишем также бюджетное ограничение потребителя, если ему предложен бесплатный талон:

$$p_x(x - \overline{x}) + p_y y \leqslant m, \ y \leqslant \frac{m}{p_y} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ 150\,(x - 6) + 30\,y \leqslant 6000, \ y \leqslant 200.$$

Нам известен выбор потребителя в случае потоварной субсидии. Проверим, доступен ли выбор потребителя при потоварной субсидии, если вместо нее потребителю будет предложен бесплатный талон на получение 6 ед. товара x.

$$150\,(25 - 6) + 30 \cdot 100 = 5850 < 6000.$$

Таким образом, выбор потребителя при потоварной субсидии лежит внутри бюджетного множества при получении талона. Это означает, что при получении талона благосостояние потребителя по сравнению с потоварным субсидированием, по крайней мере, не снизится. Следовательно, потребитель согласится на такое предложение.

Проиллюстрируем полученный результат на рис. 1.39.

(б) Изменение в потреблении товара x по сравнению с потреблением при субсидировании этого товара будет зависеть от предпочтений потребителя. Потребление может сократиться, не

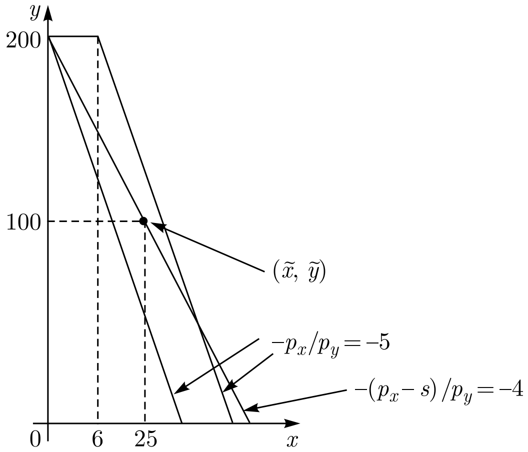

Рис. 1.39. Доступность выбора при потоварной субсидии при получении талона

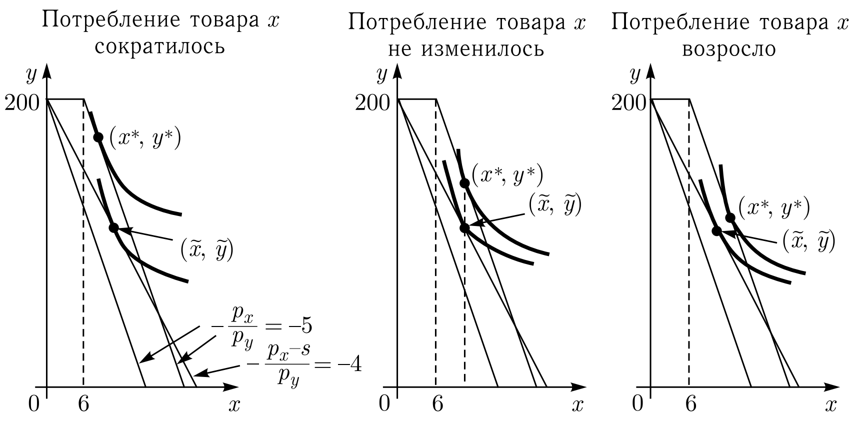

Рис. 1.40. Изменение в потреблении товара x

измениться и увеличиться. Продемонстрируем эти возможности на рис. 1.40.

1.113. Для полноты приводимого решения мы предложим примеры, различные с точки зрения выбора потребителя, а именно, внутренние и угловые оптимальные наборы.

(а) ***Решение внутреннее.*** Изменение дохода не должно приводить к изменению в потреблении.

Пусть, например, предпочтения потребителя представлены функцией полезности вида $u(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_1} + x_2$, причем до и после изменения цены оптимальный выбор потребителя таков, что $x_i > 0$ для любого $i = 1, 2$, т. е. доход потребителя таков, что благо x_1 является для него нейтральным к доходу. В этом случае спрос потребителя при изменении цены товара x_1 изменяется только за счет эффекта замещения. Изменение в потреблении первого блага, вызванное эффектом дохода, равно нулю.

Функция спроса на первый товар в этом случае имеет вид:

$$x_1\,(p_1, p_2) = (p_2/p_1)^2 \quad \text{при} \quad m > p_2^2/p_1.$$

Заметим, что спрос на первое благо зависит только от цен товаров и не зависит от дохода потребителя, что и демонстрирует рис. 1.41. Заметим, что совокупное изменение в потреблении первого блага, вызванное только эффектом замещения: $\Delta x = \Delta x^{SE} = x_1^s - x_1^0 < 0$.

Решение угловое. Изменение дохода не приведет к изменению в потреблении какого-то блага, только если потребитель

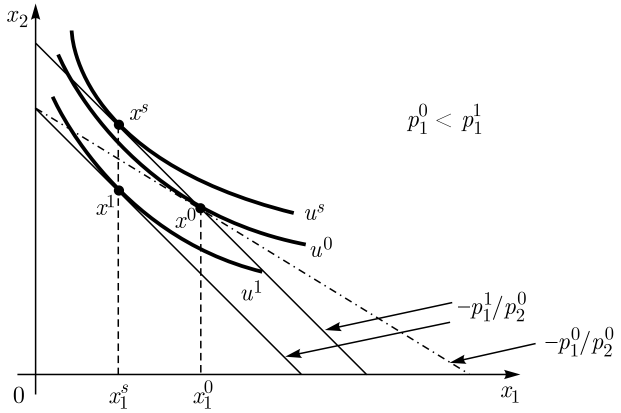

Рис. 1.41. Изменение потребления товара только за счет эффекта замещения при внутреннем оптимальном наборе

не потребляет его, а, значит, при изменении цены он должен переключиться на потребление другого блага.

Пусть, например, предпочтения потребителя представлены функцией полезности вида $u(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, до повышения цены первого товара агент выбирал только первое благо, а после повышения цены агент переключился на потребление второго блага. В этом случае спрос потребителя при изменении цены товара x_1 изменяется только за счет эффекта замещения. Изменение в потреблении первого блага, вызванное эффектом дохода, равно нулю, что и демонстрирует рис. 1.42. Заметим, что совокупное изменение в потреблении первого блага, вызванное только эффектом замещения: $\Delta x = \Delta x^{SE} = x_1^s - x_1^0 < 0$.

(б) ***Решение внутреннее.*** Для того чтобы отсутствовало изменение в потреблении, вызванное эффектом замещения, необходимо, чтобы при изменении цены и компенсации дохода прежнее потребление оставалось доступным, при этом выбор потребителя измениться не должен.

Пусть, например, предпочтения потребителя представлены функцией полезности вида $u(x_1, x_2) = \min\{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2\}$. В этом случае спрос потребителя при изменении цены товара x_1 изменяется только за счет эффекта дохода. Изменение в потреблении первого блага, вызванное эффектом замещения, равно нулю, что и демонстрирует рис. 1.43. Обратим внимание, что совокупное

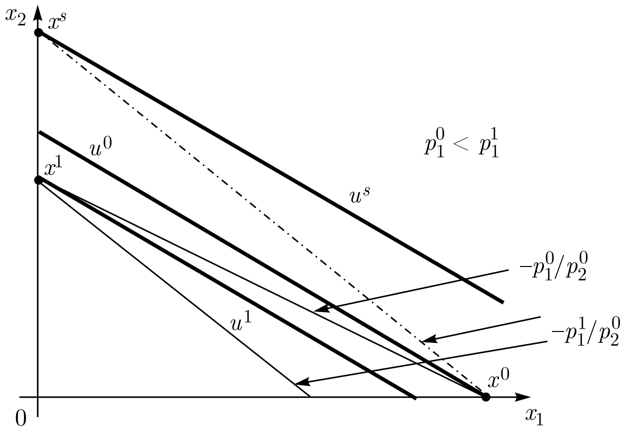

Рис. 1.42. Изменение в потреблении товара только за счет эффекта замещения при угловом оптимальном наборе

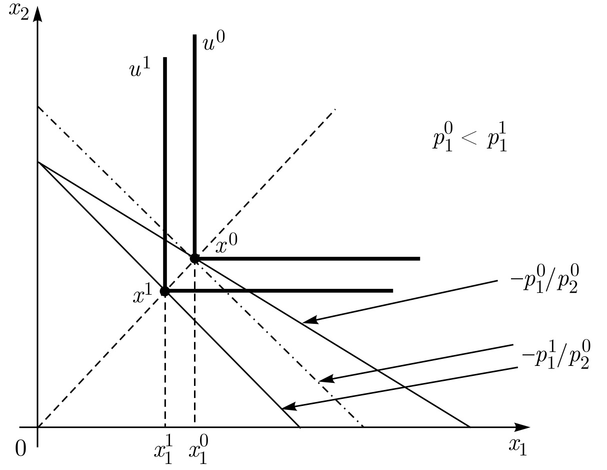

Рис. 1.43. Изменение в потреблении товара только за счет эффекта дохода при внутреннем оптимальном наборе

изменение в потреблении первого блага, вызванное только эффектом дохода, $\Delta x = \Delta x^{IE} = x_1^1 - x_1^0 < 0$.

Решение угловое. Для того чтобы отсутствовало изменение в потреблении, вызванное эффектом замещения, необходимо, чтобы при изменении цены и компенсации дохода прежнее потребление оставалось доступным, при этом выбор потребителя измениться не должен. Требуемое условие изменения в потреблении только за счет эффекта дохода в этом случае будет удовлетворено, если изначально агент некий товар не потребляет, и при повышении его цены весь прирост дохода тратится на другой товар.

Например, предпочтения потребителя представлены функцией полезности вида $u(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$. До повышения цены первого товара агент выбирал только первое благо, после повышения цены агент также тратит весь свой доход только на первое благо. То есть, повышение цены оказалось недостаточным, чтобы потребитель переключился на потребление другого блага. В этом случае спрос потребителя при изменении цены товара x_1 изменяется только за счет эффекта дохода. Изменение в потреблении первого блага, вызванное эффектом замещения равно нулю, что и демонстрирует рис. 1.44. Заметим, что совокупное изменение в потреблении первого блага, вызванное только эффектом дохода, $\Delta x = \Delta x^{IE} = x_1^1 - x_1^0 < 0$.

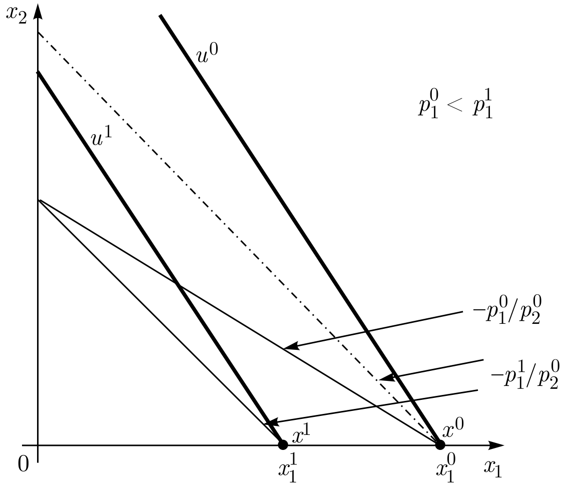

Рис. 1.44. Изменение в потреблении товара только за счет эффекта дохода при угловом оптимальном наборе

1.117. (а) Поскольку, согласно описанию, чем больше каждой компоненты рациона потребляет спортсмен, тем ему лучше, можно предположить, что его предпочтения строго монотонны. Поскольку любая средневзвешенная комбинация эквивалентных

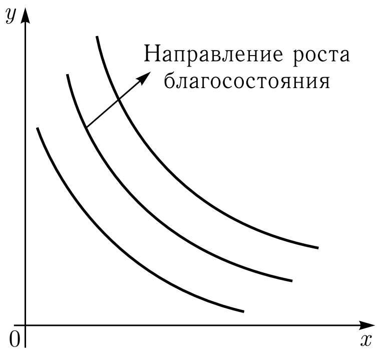

Рис. 1.45. Кривые безразличия

для него наборов рациона всегда лучше для спортсмена, чем любой из этих наборов, следует предположить, что предпочтения спортсмена строго выпуклы. Поскольку только различная комбинация компонент рациона необходима спортсмену для поддержания хорошей физической формы, и замена одной компоненты другой для него невозможна, то следует предположить, что выбор его всегда внутренний, и потребление нулевого объема одной из компонент рациона сильно ухудшает положение данного агента. Таким образом, в качестве примера предпочтений для данного агента могут быть приведены предпочтения, обладающие свойствами строгой монотонности, строгой выпуклости, определенные только при положительных объемах потребления обоих благ. Несколько кривых безразличия, соответствующие данным предпочтениям, изображены на рис. 1.45.

(б) При росте цены пищевых добавок меняется относительная цена этого товара, а именно, возрастает. Поэтому в силу эффекта замещения спортсмен при сохранении покупательной способности дохода будет замещать относительно подорожавший товар (пищевые добавки) относительно подешевевшим товаром (натуральные продукты).

Поскольку цена пищевых добавок возрастает, то покупательная способность фиксированного дохода снижается, так как теперь на сумму, составляющую фиксированный доход потребителя, он сможет купить данного товара меньше, затратив на него все свои деньги. Таким образом, если пищевые добавки являются для данного спортсмена нормальным товаром, то в силу снижения покупательной способности дохода объем спроса на них в силу эффекта дохода должен сократиться. В этом случае эффект дохода и эффект замещения действуют в одном направлении, сокращая потребление относительно подорожавшего товара (пищевых добавок). Если же пищевые добавки являются для данного спортсмена инфериорным товаром, то в силу снижения покупательной способности дохода объем спроса на пищевые добавки в силу эффекта дохода должен возрасти. В этом случае совокупное изменение в объеме потребления пищевых добавок будет зависеть от величин изменений в объемах потребления в силу эффектов дохода и замещения, поскольку действуют эффекты разнонаправлено.

(в) Объем спроса на каждый товар найдем, воспользовавшись формулой спроса для предпочтений вида Кобба–Дугласа (см. решение задачи 1.73). Тогда до повышения цены объем спроса на каждый товар составляет:

$$x^* = \frac{0{,}5 \cdot 150}{3} = 25, \qquad y^* = \frac{0{,}5 \cdot 150}{1} = 75.$$

Объем спроса на каждое благо после повышения цены (заметим сразу, что спрос на второе благо не изменится, поскольку он не зависит от цены первого блага при фиксированном доходе потребителя) равен

$$x' = \frac{0{,}5 \cdot 150}{5} = 15, \qquad y' = \frac{0{,}5 \cdot 150}{1} = 75.$$

Совокупное изменение спроса на пищевые добавки составит $\Delta x = x' - x^* = -10$.

(г) Декомпозиция Слуцкого при расчете эффекта замещения по Слуцкому осуществляется при сохранении покупательной способности дохода. Найдем, каков должен был бы быть доход спортсмена, чтобы прежний потребительский набор был бы ему в точности доступен после повышения цены:

$$m^S = p'_x x + p_y y \;\Rightarrow\; m^S = 5 \cdot 25 + 1 \cdot 75 = 200.$$

Найдем теперь объем спроса на каждое благо, если доход спортсмена равен 200 д. е., а цены $p = (5, 1)$:

$$x^S = \frac{0{,}5 \cdot 200}{5} = 20, \qquad y^S = \frac{0{,}5 \cdot 200}{1} = 100.$$

Таким образом, найдем изменение в потреблении пищевых добавок, вызванное эффектом замещения: $\Delta x^{SE} = x^S - x^* = -5$. Тогда изменение в потреблении пищевых добавок, вызванное эффектом дохода: $\Delta x^{IE} = x' - x^S = -5$.

На рис. 1.46 приведена графическая иллюстрация.

(д) Декомпозиция Слуцкого при расчете эффекта замещения по Хиксу осуществляется при сохранении начального уровня

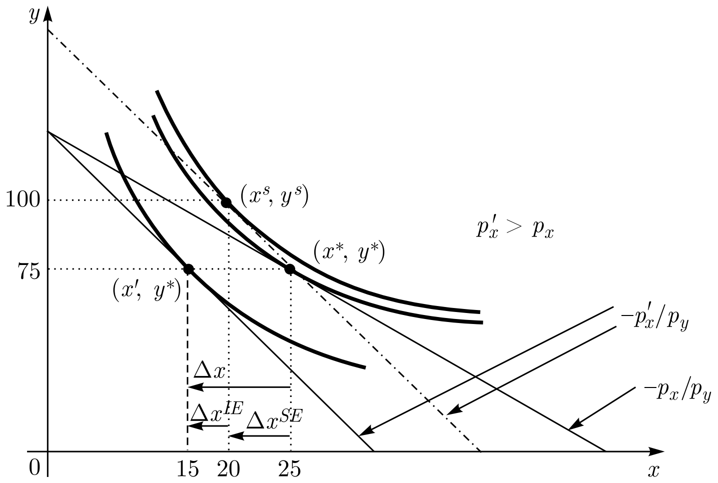

Рис. 1.46. Декомпозиция изменения спроса при расчете эффекта замещения по Слуцкому

благосостояния потребителя. В этом случае изменением в потреблении, вызванным эффектом замещения, называется изменение спроса в результате изменения цены при сохранении начального уровня благосостояния потребителя (см. рис. 1.47).

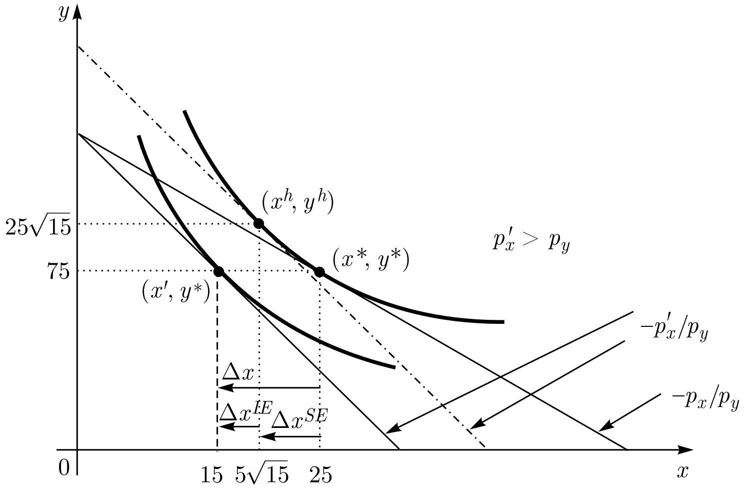

Рис. 1.47. Декомпозиция изменения спроса при расчете эффекта замещения по Хиксу

Вспомогательная бюджетная линия при декомпозиции по Хиксу поворачивается вдоль кривой безразличия соответствующей исходному потребительскому набору. Таким образом, вспомогательная бюджетная линия соответствует тем же относительным ценам, что и бюджетная линия при конечном выборе потребителя, но другому, компенсированному, доходу.

Итак, при расчете эффекта замещения по Хиксу потребитель должен получить ровно столько денег в качестве компенсации дохода, чтобы достичь начального уровня благосостояния при конечных ценах. Найдем выбор спортсмена $\left(x^h, y^h\right)$ (хиксианский спрос или компенсированный спрос) при ценах p' и новом доходе. Для этого необходимо решить следующую оптимизационную задачу:

$$\begin{cases} p'_x x + p_y y \to \min\limits_{x,y>0}, \\ u(x,y) = \ln x + \ln y = u(x^*, y^*), \end{cases}$$

т. е. найти минимальный доход, который при конечных ценах позволит потребителю достичь исходного уровня благосостояния. При этом кривая безразличия касается вспомогательной бюджетной линии (иначе, можно было бы достичь меньшего уровня дохода при том же уровне благосостояния), следовательно, наклоны исходной кривой безразличия и вспомогательной бюджетной линии совпадают:

$$MRS_{xy}(x^h, y^h) = p'_x/p_y \ \text{ при условии } \ u(x^h, y^h) = u^*(x^*, y^*).$$

Таким образом, получаем

$$\begin{cases} y^h/x^h = p'_x/p_y, \\ x^h y^h = x^* y^*, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^h/x^h = 5, \\ x^h y^h = 25 \cdot 75. \end{cases}$$

Отсюда находим $x^h = 5\sqrt{15} < x^*,\ y^h = 25\sqrt{15}$.

Найдем теперь изменения в потреблении пищевых добавок, вызванные эффектами замещения и дохода:

$$\begin{aligned} \Delta x^{SE} &= x^h - x^* = 5\sqrt{15} - 25 < 0, \\ \Delta x^{IE} &= x' - x^h = 15 - 5\sqrt{15} < 0, \\ \Delta x_1 &= x' - x^* = \Delta x^{SE} + \Delta x^{IE} = -10. \end{aligned}$$

(е) Сравнив результаты пп. (г) и (д), заметим, что изменение в объеме спроса на пищевые добавки, вызванное эффектом дохода, при расчете эффекта замещения по Слуцкому, оказалось больше, чем изменение в объеме спроса на этот товар, вызванное эффектом дохода при расчете эффекта замещения по Хиксу, т. е. $\left|\Delta x_{(\text{г})}^{IE}\right| = 5 > \left|\Delta x_{(\text{д})}^{IE}\right| = \left|15 - 5\sqrt{15}\right|$.

При данных свойствах предпочтений спортсмена полученный результат является следствием двух причин:

1) пищевые добавки в силу предпочтений спортсмена являются нормальным товаром;
2) компенсированный по Слуцкому доход, необходимый потребителю, чтобы сохранить его покупательную способность, всегда не меньше, чем компенсированный доход по Хиксу, необходимый потребителю, чтобы сохранить его уровень благосостояния. Поскольку в данном случае кривые безразличия гладкие, без изломов, а выбор потребителя всегда внутренний, компенсированный по Слуцкому доход будет строго больше, чем компенсированный по Хиксу доход. Действительно, $\left(x^h, y^h\right) \sim (x^*, y^*)$. При компенсации дохода по Слуцкому набор (x^*, y^*) остается потребителю в точности доступным, но поскольку при компенсации дохода по Хиксу потребитель выбирает набор $\left(x^h, y^h\right)$, отличный от набора (x^*, y^*), но эквивалентный ему, то это возможно только в том случае, если набор (x^*, y^*) при компенсации дохода по Хиксу оказывается потребителю недоступным.

В силу названных причин $x^h < x^S$, а следовательно, имеем $\left|\Delta x_{(\text{г})}^{IE}\right| > \left|\Delta x_{(\text{д})}^{IE}\right|$.

1.118. Приведем доказательство неположительности собственного эффекта замещения по Хиксу с точки зрения выявленных предпочтений.

Рассмотрим изменение в потреблении, вызванное эффектом замещения по Хиксу. Рисунок 1.48 иллюстрирует наше доказательство. Нас будет интересовать случай изменения цены одного блага (в данном случае будет изменяться цена первого товара).

По построению $x^h \sim x^*$, однако при изначальных ценах был выбран набор x^*, следовательно, $px^h \geqslant px^*$. Так как при конечных ценах был выбран набор x^h, то $p'x^* \geqslant p'x^h$. Равенство справедливо для случая, когда наборы совпадают: $x^h \equiv x^*$. Так, например, для случая двухтоварной экономики получаем нера-

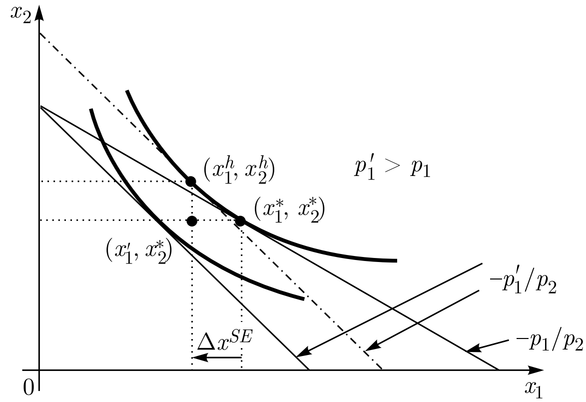

Рис. 1.48. Иллюстрация доказательства неположительности эффекта замещения при расчете эффекта замещения по Хиксу

венства:

$$p_1 x_1^h + p_2 x_2^h \geqslant p_1 x_1^* + p_2 x_2^*,$$

$$p_1' x_1^* + p_2 x_2^* \geqslant p_1' x_1^h + p_2 x_2^h.$$

Отсюда, сложив два неравенства, получаем

$$p_1\left(x_1^h - x_1^*\right) + p_1'\left(x_1^* - x_1^h\right) \geqslant 0$$

и после преобразования:

$$\left(p_1' - p_1\right)\left(x_1^h - x_1^*\right) \leqslant 0.$$

Таким образом, изменение спроса, вызванное эффектом замещения, должно быть либо противоположно изменению цены, либо быть нулевым. То есть, с ростом цены хиксианский (компенсированный) спрос не должен возрастать, а при снижении цены хиксианский спрос не должен сокращаться.

Если выбор потребителя внутренний, а кривые безразличия, соответствующие его предпочтениям, гладкие, без изломов, то направление изменения объема потребления товара, относительная цена которого изменилась, вследствие эффекта замещения будет всегда противоположно направлению изменения его цены.

1.122. (а) Данная политика приведет к снижению потребления электроэнергии репрезентативным домохозяйством, следовательно, достигнет своей цели. Изменение цены какого-либо товара приводит не только к изменению спроса на него в силу изменения пропорции обмена между товарами (т. е. изменению, обусловленному эффектом замещения), но и к изменению спроса в силу изменения покупательной способности дохода (т. е. изменению, обусловленному эффектом дохода). Повышение цены электроэнергии не может привести к увеличению спроса на нее в силу эффекта замещения. Поскольку кривые безразличия гладкие, то домохозяйство всегда заместит относительно более дорогой товар более дешевым, следовательно, изменение в спросе, вызванное эффектом замещения, для данных предпочтений домохозяйства приведет к снижению спроса на электроэнергию. Повышение цены этого товара приводит к снижению покупательной способности дохода, а значит, должно приводить к снижению потребления этого товара, поскольку данный товар в силу предпочтений домохозяйства является нормальным благом. Таким образом, эффекты дохода и замещения действуют в одном на-

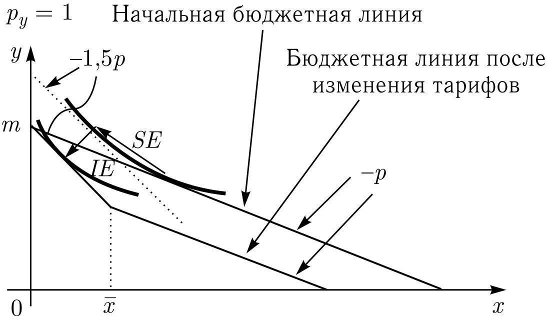

Рис. 1.49. Домохозяйство после изменения тарифов потребляет меньше $\overline{x}$ киловатт

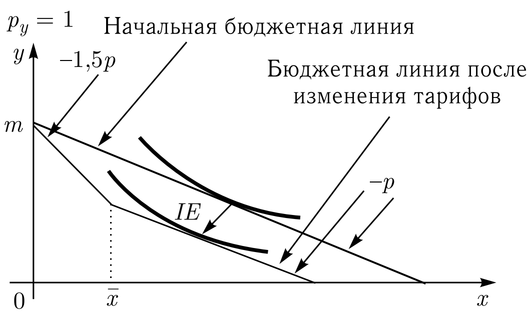

Рис. 1.50. Домохозяйство после изменения тарифов потребляет больше $\overline{x}$ киловатт

правлении и приведут к снижению потребления электроэнергии репрезентативным домохозяйством при любом положительном объеме потребления в начальной ценовой ситуации.

На рис. 1.49 и рис. 1.50 проиллюстрируем решение графически.

(б) Спрос домохозяйства на электроэнергию до изменения тарифов найдем, решив задачу потребителя [1]:

$$\begin{cases} xy^7 \to \max\limits_{x,y\geqslant 0}, \\ 2x + y \leqslant 3400, \end{cases} \quad \text{откуда} \ \ x = \frac{3400}{8 \cdot 2} = 212{,}5.$$

Спрос домохозяйства после изменения тарифов находим, решая задачу потребителя на новом бюджетном множестве:

$$\begin{cases} xy^7 \to \max\limits_{x,y\geqslant 0}, \\ 3x + y \leqslant 3400, \quad x \leqslant 200, \\ 2\,(x - 200) + y \leqslant 3400 - 3 \cdot 200, \quad x > 200, \end{cases}$$

откуда либо $\widetilde{x} = \dfrac{3400}{8 \cdot 3} = \dfrac{425}{3} < 200$, либо $\widetilde{\widetilde{x}} = \dfrac{3200}{8 \cdot 2} = 200$.

Поскольку в точке, где $\widetilde{\widetilde{x}} = 200$, кривая безразличия имеет наклон (-2) и пересекает бюджетную линию домохозяйства, которая в точке $\widetilde{\widetilde{x}} = 200$ имеет излом, то $u\big(\widetilde{\widetilde{x}}, \widetilde{\widetilde{y}}\big) < u\,(\widetilde{x}, \widetilde{y})$. Следовательно, домохозяйство выберет набор, в котором будет потреблять электроэнергию в количестве $\widetilde{x} = 425/3$. Таким образом, потребление электроэнергии репрезентативным домохозяйством сократится.

Графически ситуация представлена на рис. 1.49.

(в) Подобная политика не может привести к увеличению потребления электроэнергии. В данном случае мы будем иметь дело с такой компенсацией дохода, которая в новых ценах позволит домохозяйству достичь старого уровня благосостояния, т. е. имеем дело с компенсацией дохода по Хиксу, при которой увеличение цены товара не может привести к увеличению его потребления. Так как кривые безразличия гладкие, товары замещаемы, то спрос на электроэнергию при увеличении ее цены в силу эффекта замещения сократится.

---

[1] См. функции спроса для функции полезности Кобба–Дугласа в решении задачи 1.73.

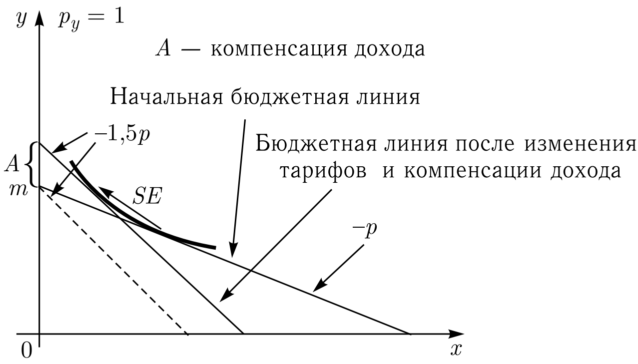

Рис. 1.51. Выбор домохозяйства после изменения тарифов и компенсации дохода

На рис. 1.51 проиллюстрируем решение графически.

1.128. Если эластичность спроса для некоторого товара по доходу равна нулю, то данный товар является нейтральным к доходу, поэтому изменение в потребительском излишке, связанное с изменением цены этого товара, в точности равно изменению благосостояния потребителя. Таким образом, изменение потребительского излишка равно максимальной сумме, которую потребитель готов будет заплатить за возможность покупать благо по более низкой цене.

(а) Максимальная сумма денег, которую агент будет готов отдать, чтобы иметь возможность покупать товар x по цене 50 д. е. за ед., равна потребительскому излишку, который может быть рассчитан в данном случае как площадь треугольника ABC, представленного на рис. 1.52:

$$CS = \frac{1}{2}(100 - 50) \cdot 25 = 625.$$

(б) Максимальная сумма денег, которую готов будет отдать данный потребитель за возможность приобретать товар x по цене 30 д. е. вместо 50 д. е., будет равна изменению потребительского излишка, который может быть рассчитан как площадь трапеции $ABKM$, представленной на рис. 1.53:

$$CS = \frac{1}{2}(25 + 35)(50 - 30) = 600.$$

1.130. Пусть для данного потребителя товар x является инфериорным товаром, но не является товаром Гиффена. Следова-

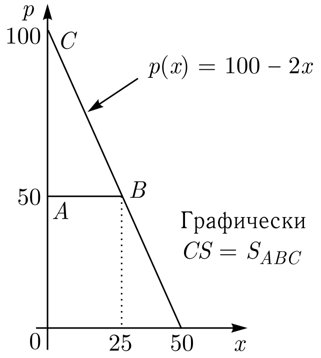

Рис. 1.52. Потребительский излишек

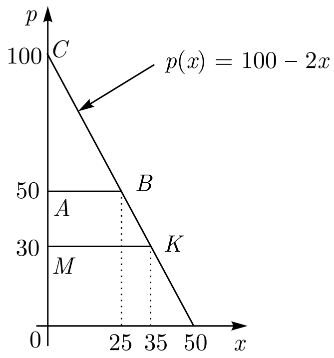

Рис. 1.53. Изменение потребительского излишка при снижении цены товара

тельно, в условиях двухтоварной экономики товар y является для данного потребителя нормальным товаром. Выберем в качестве товара измерителя товар y, приняв его цену равной 1.

(a) Графически эквивалентная вариация дохода может быть представлена в осях количество–цена, как площадь, ограниченная кривой компенсированного (хиксианского) спроса, соответствующей новому уровню благосостояния потребителя, горизонтальными прямыми, соответствующими новой и старой цене товара, и вертикальной осью цены. Аналогично, компенсирующая вариация дохода может быть представлена графически в осях количество–цена, как площадь, ограниченная кривой компенсированного (хиксианского) спроса, соответствующей начальному уровню благосостояния потребителя, горизонтальными прямыми, соответствующими новой и старой цене товара и вертикальной осью цены. Поэтому для сравнения эквивалентной и компенсирующей вариаций необходимо оценить взаимное расположение кривых компенсированного спроса, соответствующих различным уровням благосостояния.

Сначала определим, как изменилось благосостояние потребителя при снижении цены товара. В нашем случае начальное бюджетное множество является подмножеством бюджетного множества после снижения цены. Поскольку выбор потребителя по условию всегда внутренний, а его предпочтения строго монотонны, то благосостояние данного потребителя после снижения цены одного из товаров возрастет, т. е. в нашем случае $u_0 < u_1$.

Компенсированный спрос на инфериорное благо, соответствующий более высокому уровню благосостояния, будет всегда меньше, чем компенсированный спрос на то же благо, соответствующий более низкому уровню благосостояния (при одинаковых ценах). Заметим, что для того, чтобы достичь более высокого уровня благосостояния, необходима бóльшая сумма денег в качестве компенсированного дохода: $m(p, u_0) < m(p, u_1)$, если $u_0 < u_1$ при любом p. Тогда в силу инфериорности блага $x(p, m(p, u_0)) > x(p, m(p, u_1))$. Но $x^{\text{comp}}(p, u_0) = x(p, m(p, u_0))$ и $x^{\text{comp}}(p, u_1) = x(p, m(p, u_1))$. Последние соотношения между компенсированным и маршаллианским спросом являются следствием строгой монотонности и непрерывности (которую мы предполагаем в бакалаврском курсе микроэкономики) предпочтений. Тогда получаем, что $x^{\text{comp}}(p, u_0) > x^{\text{comp}}(p, u_1)$ для любого p.

Следовательно, компенсирующая вариация дохода (CV) в нашем случае будет больше, чем эквивалентная вариация дохода (EV), т. е. $CV > EV$.

Графически изменение потребительского излишка представляет собой площадь, ограниченную кривой маршаллианского спроса, горизонтальными прямыми, соответствующими новой и начальной цене товара x, и вертикальной осью цены. Следовательно, для графического сравнения вариаций дохода и потребительского излишка необходимо рассмотреть взаимное расположение кривых маршаллианского спроса и компенсированного спроса, соответствующих начальному и новому уровню благосостояния. В силу строгой монотонности и непрерывности предпочтений потребительские корзины, соответствующие хиксианскому (компенсированному) и маршаллианскому спросу совпадают при начальных ценах, начальном уровне благосостояния потребителя и начальном бюджетном множестве (точка A на рис. 1.54). По тем же причинам совпадают потребительские корзины компенсированного и маршаллианского спроса при изменении цен, конечном уровне благосостояния потребителя и конечном бюджетном множестве (точка B на рис. 1.54).

Для объяснения взаимного расположения кривых маршаллианского и компенсированного спроса рассмотрим, например, точку A на рис. 1.54, *а* и соответствующую ей точку (x_{A}, p_0) на связанном с ним рис. 1.54, *б*. Вспомним, что по определению компенсированного спроса изменения в его объеме происходят

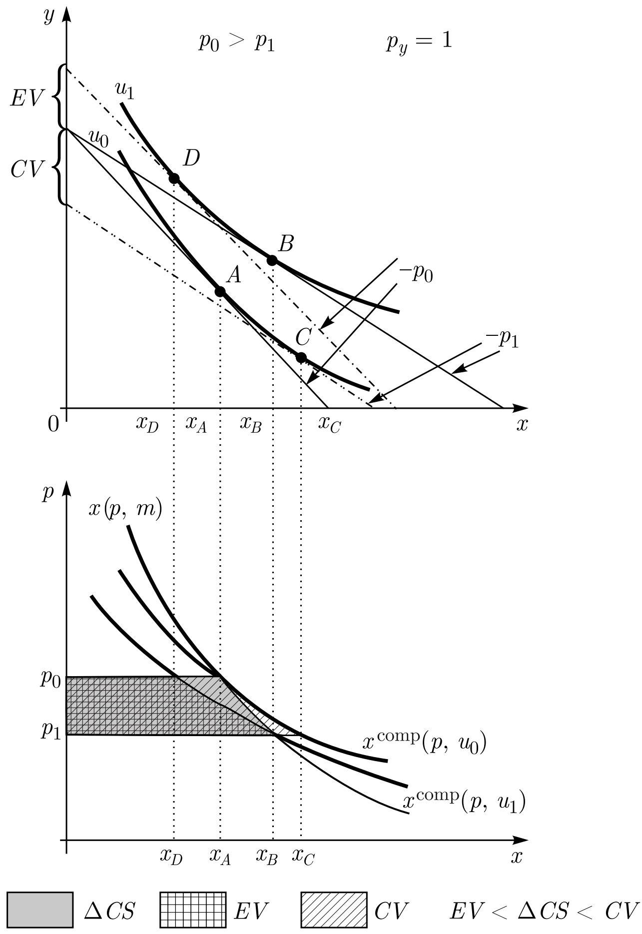

Рис. 1.54. Соотношение между компенсирующей, эквивалентной вариациями дохода и изменением потребительского излишка при снижении цены инфериорного товара в двухтоварной экономике

только за счет эффекта замещения, в то время, как изменение в объеме маршаллианского спроса происходят, как за счет эффекта замещения, так и за счет эффекта дохода. Тогда при снижении цены товара x относительно цены p_0 в силу эффекта замещения объем компенсированного спроса на этот товар возрастет. Поскольку в нашем случае данный товар является инфериорным, при увеличении покупательной способности фиксированного дохода вследствие снижения цены товара, объем спроса на товар x должен снизиться. Поэтому изменения в потреблении данного товара в силу эффектов замещения и дохода происходят в различных направлениях. Вследствие этого при $p < p_0$ объем компенсированного спроса превышает объем маршаллианского спроса. Графически это отражается в том, что при $p < p_0$ кривая маршаллианского спроса будет лежать левее кривой компенсированного спроса, соответствующей начальному уровню благосостояния. При повышении цены товара x относительно цены p_0 в силу эффекта замещения объем компенсированного спроса на этот товар должен снизиться, в то время как объем спроса в силу эффекта дохода должен возрасти, поскольку данный товар является инфериорным, а покупательная способность дохода снижается. Таким образом, эффекты дохода и замещения действуют в различных направлениях, что приводит к тому, что объем компенсированного спроса, соответствующего начальному уровню благосостояния, при цене $p > p_0$ меньше, чем объем маршаллианского спроса. Из чего можно сделать вывод, что $\Delta CS < CV$. Аналогично можно показать, что $EV < \Delta CS$.

(б) Как следует из приведенного в п. (а) объяснения соотношения между кривыми компенсированного спроса, соответствующими различным уровням благосостояния, результат соотношения между компенсирующей и эквивалентной вариациями дохода должен зависеть от того, растет цена товара или снижается. Так при росте цены товара x начальный уровень благосостояния в силу строгой монотонности предпочтений и внутреннего выбора потребителя будет выше, чем уровень благосостояния после повышения цены, а значит, в силу инфериорности данного товара объем компенсированного спроса, соответствующего начальному уровню благосостояния, будет ниже объема компенсированного спроса, соответствующего новому уровню благосостояния при любых положительных ценах. Следовательно, для инфериорного товара и повышения его цены $CV < EV$. Заметим, что изменение потребительского излишка в данном случае, как следует из объяснения п. (а), будет лежать между компенсирующей и эквивалентной вариациями дохода, т. е. $CV < \Delta CV < EV$. Данные соотношения продемонстрированы на рис. 1.55.

(в) Действительно, соотношения, полученные в п. (а) будут зависеть от того, является ли товар x нормальным или инфериорным. Как следует из объяснения в п. (а) соотношения между

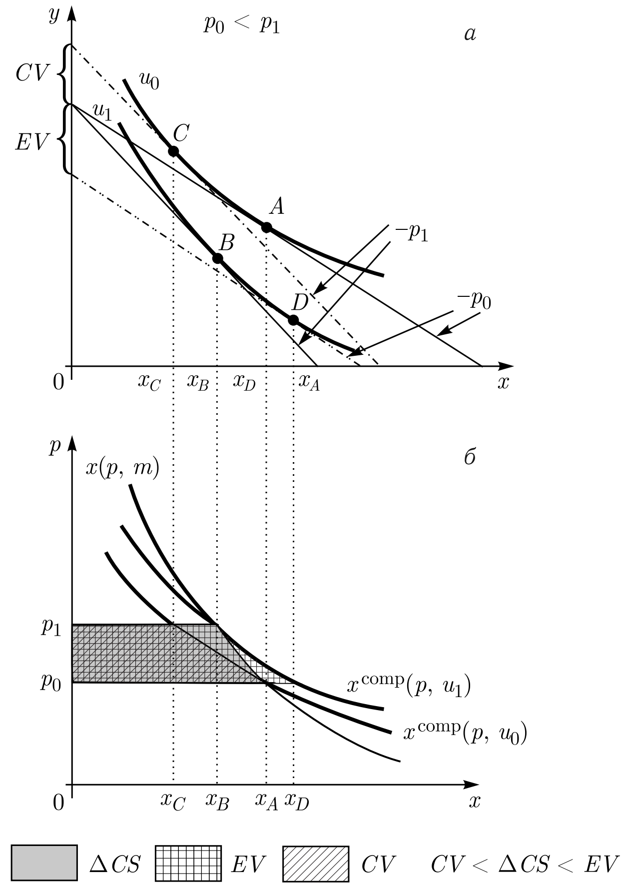

Рис. 1.55. Соотношение между компенсирующей и эквивалентной вариациями дохода и изменением потребительского излишка при росте цены инфериорного товара в двухтоварной экономике

кривыми компенсированного спроса при снижении цены, объем компенсированного спроса на нормальное благо, соответствующего более низкому уровню благосостоянию будет при любых положительных ценах меньше, чем объем компенсированного спроса на нормальное благо, соответствующего более высокому уровню благосостояния. Поэтому $CV < EV$. Как уже объяснялось выше, изменение потребительского излишка будет лежать между значением компенсирующей и эквивалентной вариациями, т. е. $CV < \Delta CS < EV$.

1.146. (а) Для определения выбора домохозяйства необходимо решить задачу максимизации его полезности при соответствующем бюджетном ограничении:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) \to \max\limits_{x_1, x_2 \geqslant 0}, \\ p_1^0 x_1 + p_2 x_2 \leqslant p_1^0 \omega_1 + p_2 \omega_2, \end{cases}$$

где начальный вектор цен $p = \left(p_1^0, p_2\right) = (4,\ 2)$.

Поскольку предпочтения домохозяйства представлены функцией полезности Кобба–Дугласа, то можно воспользоваться известной функцией спроса для данных предпочтений, учитывая, что доход потребителя определяется стоимостью его первоначального запаса[2]:

$$x_1 = \frac{p_1^0 \omega_1 + p_2 \omega_2}{2\,p_1^0}, \qquad x_2 = \frac{p_1^0 \omega_1 + p_2 \omega_2}{2\,p_2},$$

откуда находим выбор домохозяйства, графически представленный на рис. 1.56: $\left(x_1^*, x_2^*\right) = (15, 30)$.

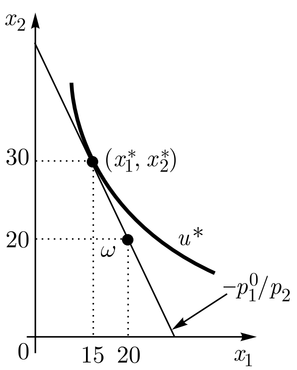

Рис. 1.56. Выбор потребителя при наличии натурального дохода

(б) Для ответа на этот вопрос разложим совокупное изменение в потреблении первого блага на изменение в потреблении, вызванное эффектом богатства, и изменение в потреблении, вызванное эффектом замещения. Поскольку рассматривается конечное изменение цены, то воспользуемся уравнением Слуцкого для конечных приращений:

$$\Delta x_1^{TE} = \Delta x_1^{SE} + \Delta x_1^{IE} + \Delta x_1^{IE(\omega)},$$

где Δx_1^{TE} — совокупное изменение в потреблении, Δx_1^{SE} — изменение в потреблении, вызванное эффектом замещения, Δx_1^{IE} — изменение в потреблении, вызванное обычным эффектом дохода (при неизменном доходе), $\Delta x_1^{IE(\omega)}$ — изменение в потреблении, вызванное эффектом начального запаса. Совокупность последних двух изменений мы называем эффектом богатства.

[2] См. функции спроса для функции полезности Кобба–Дугласа в решении задачи 1.73.

Поскольку эффект замещения неположителен (см. задачу 1.118), то при снижении относительной цены первого блага его потребление не может уменьшиться. Следовательно, для данного снижения цены $\Delta x_1^{SE} > 0$. Знак неравенства строгий в силу гладкости кривых безразличия и внутреннего выбора домохозяйства.

При снижении цены первого блага покупательная способность постоянного дохода возрастает, поэтому в силу нормальности блага, которое следует из вида предпочтений домохозяйства, увеличение дохода приводит к повышению спроса на него. Следовательно, $\Delta x_1^{IE} > 0$.

Поскольку потребитель является чистым продавцом первого товара (как мы выяснили в п. (а)), то снижение цены этого товара приводит к сокращению дохода домохозяйства, так как при продаже своего начального запаса домохозяйство не сможет выручить за него столько же денег, что и раньше, и начальный выбор будет ему теперь недоступен. В силу нормальности данного блага при снижении дохода агент снизит его потребление. Следовательно, $\Delta x_1^{IE(\omega)} < 0$.

Таким образом, эффект постоянного дохода и эффект начального запаса действуют в различных направлениях. Кроме того, эффект замещения действует в противоположном направлении эффекту начального запаса.

Подводя итог, можно сделать вывод, что, не проводя расчетов, мы не знаем, как изменится потребление первого блага, так как не знаем, какой из эффектов преобладает.

Потребление первого блага может возрасти, уменьшиться или не измениться.

В зависимости от того, был ли новый потребительский набор доступен при начальном бюджетном ограничении, благосостояние потребителя может возрасти, снизиться и не измениться.

Сказанное относительно изменения в потреблении первого товара и изменении благосостояния домохозяйства проиллюстрировано на рис. 1.57.

(в) Найдем изменение спроса на первый товар, используя функцию спроса для потребителя, предпочтения которого представимы функцией полезности Кобба–Дугласа:

$$\overline{x}_1 = \frac{p_1^1\omega_1 + p_2\omega_2}{2\,p_1^1}, \qquad \overline{x}_2 = \frac{p_1^1\omega_1 + p_2\omega_2}{2\,p_2},$$

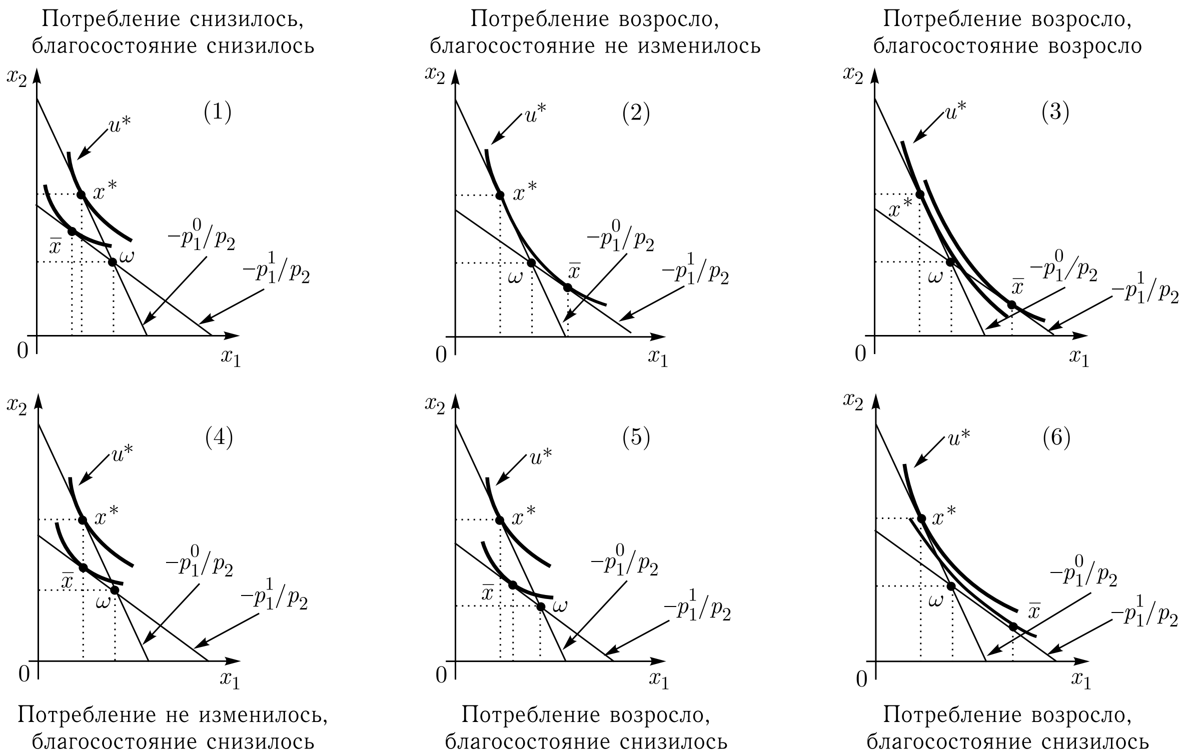

Рис. 1.57. Изменение в потреблении и изменение в благосостоянии домохозяйства при снижении цены первого товара

где вектор цен после снижения цены первого товара $p = (p_1^1, p_2) = (3,\ 2)$.

Тогда выбор потребителя после снижения цены $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = (50/3,\ 25)$. Заметим, что потребление первого блага возрастает и потребитель остается чистым продавцом первого блага.

Таким образом, при данных предпочтениях и начальном запасе потребителя реализуется случай (5) из проиллюстрированных на рис. 1.57.

(г) Для того чтобы облегчить построение, можно заметить, что предпочтения потребителя гомотетичны (функция полезности однородна первой степени). Следовательно, при неизменных ценах и увеличении дохода потребитель будет выбирать наборы, лежащие на луче, выходящем из начала координат, как проиллюстрировано на рис. 1.58.

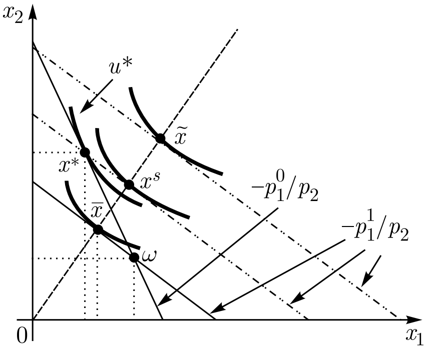

Рис. 1.58. Изменение в потреблении первого товара вследствие эффектов замещения, постоянного дохода и начального запаса

• Найдем изменение спроса, вызванное эффектом замещения по Слуцкому. Для этого найдем сначала компенсированный доход, который позволил бы домохозяйству при новых ценах сохранить покупательную способность, т. е. первоначальный набор должен быть в точности доступен домохозяйству в новых ценах:

$$m^S = p_1^1 x_1^* + p_2 x_2^* \quad \Rightarrow \quad m^S = 3 \cdot 15 + 2 \cdot 30 = 105.$$

Затем найдем компенсированный спрос домохозяйства при найденном компенсированном доходе, используя функцию спроса:

$$x_1^S = \frac{m^S}{2\,p_1^1}, \qquad x_2^S = \frac{m^S}{2\,p_2},$$

откуда получаем

$$x_1^S = \frac{105}{2\cdot 3} = \frac{35}{2}, \qquad x_2^S = \frac{105}{2\cdot 2} = \frac{105}{4}.$$

Таким образом, изменение в потреблении первого товара, вызванное эффектом замещения:

$$\Delta x_1^{SE} = x_1^S - x_1^* = 5/2.$$

• Найдем изменение в спросе на первое благо, вызванное обычным эффектом дохода, т. е. изменение спроса при сохранении денежного дохода неизменным.

Если бы доход домохозяйства оставался бы неизменным, то он составил бы

$$\widetilde{m} = p_1^0\omega_1 + p_2\omega_2 \;\;\Rightarrow\;\; \widetilde{m} = 4\cdot 20 + 2\cdot 20 = 120.$$

При таком доходе оптимальный набор домохозяйства можно найти, используя функции спроса: $\widetilde{x}_1 = \dfrac{\widetilde{m}}{2p_1^1}$ и $\widetilde{x}_2 = \dfrac{\widetilde{m}}{2p_2}$. Тогда $\widetilde{x}_1 = \dfrac{120}{2\cdot 3} = 20$, $\widetilde{x}_2 = \dfrac{120}{2\cdot 2} = 30$.

Отсюда получаем изменение в спросе, вызванное обычным эффектом дохода:

$$\Delta x_1^{IE} = \widetilde{x}_1 - x_1^S = 20 - \frac{35}{2} = \frac{5}{2}.$$

• Осталось найти изменение в потреблении, вызванное эффектом начального запаса:

$$\Delta x_1^{IE(\omega)} = \overline{x}_1 - \widetilde{x}_1 = 16\frac{2}{3} - 20 = -\frac{10}{3}.$$

Таким образом, получаем совокупное изменение спроса:

$$\Delta x_1^{TE} = \Delta x_1^{SE} + \Delta x_1^{IE} + \Delta x_1^{IE(\omega)} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} - \frac{10}{3} = \frac{5}{3}.$$

Объяснение знаков эффектов было приведено в п. (б).

1.147. Для объяснения указанного феномена воспользуемся декомпозицией Слуцкого.

Выпишем начальное бюджетное ограничение работника

$$C = wL = w(\overline{L} - l), \quad \text{или} \quad C + w_0 l = w_0\overline{L},$$

где C — расходы на агрегированное потребительское благо, L — объем труда, предлагаемый потребителем, $\overline{L}$ — начальный запас времени, l — объем досуга работника, w_0 — начальная ставка заработной платы.

Пусть предложение труда при w_0 равно $L^* = \overline{L} - l^*$ и потребление агрегированного блага составляет C^*.

Увеличение ставки заработной платы только за сверхурочные часы, приведет к изменению бюджетного ограничения (излом бюджетной линии в точке (l^*, C^*), который продемонстрирован на рис. 1.59).

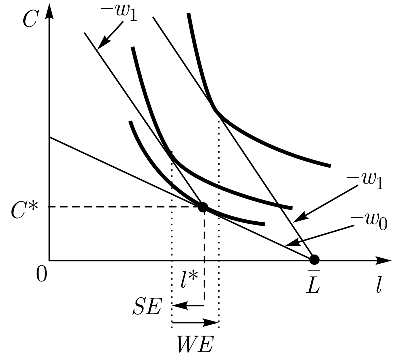

Рис. 1.59. Возможное соотношение действия эффектов замещения и богатства при повышении ставки заработной платы при условии, что досуг является нормальным товаром

При увеличении ставки заработной платы за сверхурочные часы работник (с гладкими кривыми безразличия, без изломов) увеличит предложение труда, так как варианты выбора, предполагающие меньшее предложение труда, были доступны потребителю и ранее, но были отвергнуты в пользу L^*. В данном случае изменение предложения труда, а следовательно, и досуга, вызвано только эффектом замещения по Слуцкому, который, как известно неположителен (по условию задачи это изменение не нулевое). В данном случае, работник в силу только эффекта замещения сократил потребление досуга при относительном росте его цены.

При увеличении ставки заработной платы за все часы работы мы сталкиваемся с изменением предложения труда, вызванным не только эффектом замещения, но и эффектом богатства. Поскольку работник является чистым продавцом досуга, относительная цена которого возрастает, то покупательная способность работника возрастает (прежний выбор в новых ценах остается ему доступным с избытком). В зависимости от того, является ли досуг нормальным, инфериорным или нейтральным к доходу благом, изменение в потреблении досуга в силу роста покупательной способности работника может быть каким угодно. Поэтому совокупное действие эффектов замещения и богатства при повышении ставки заработной платы за все время работы может приводить к изменению объема потребления досуга, а, значит, и объема предложения труда, в любом направлении. По условию задачи повышение ставки заработной платы привело к снижению предложения труда данным работником (т. е. к увеличению потребления досуга). Следовательно, эффекты замещения и богатства действовали в различных направлениях, кроме того, эффект богатства «превысил» эффект замещения, что проиллюстрировано на рис. 1.59. Подобное соотношение между эффектами в указанном в условии задачи случае возможно, только если досуг является для данного работника нормальным благом.

Таким образом, рассмотренный в задаче феномен объясняется действием эффектов замещения и богатства и тем, что досуг является для данного работника нормальным благом.

1.158. Уравнение бюджетной линии имеет вид:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = m_1 + \frac{m_2}{1+r},$$

где c_1, c_2 — расходы на потребление в текущем и будущем периоде, соответственно, m_1, m_2 — начальный запас потребителя в текущем и будущем периоде, соответственно, а r — ставка процента.

(а) Утверждение верно.

Изобразим бюджетную линию потребителя и предполагаемую кривую безразличия на рис. 1.60.

Возрастание ставки процента приведет к тому, что бюджетная линия станет более крутой. Потребление в размере начального запаса доступно в обоих случаях, следовательно, бюджетная линия повернется вокруг точки первоначального запаса.

Наборы, лежащие на новой бюджетной линии правее точки начального запаса (и сам начальный запас), были доступны потребителю при исходном бюджетном ограничении, но не были выбраны потребителем, поскольку они хуже, чем выбранный им исходный набор. Следовательно, при новом бюджетном ограни-

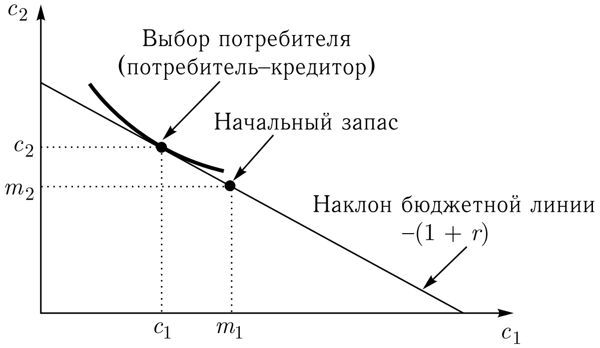

Рис. 1.60. Выбор потребителя кредитора

чении выбор потребителя должен лежать левее точки начального запаса. Значит, потребитель остается кредитором при повышении ставки процента, что иллюстрирует рис. 1.61.

Заметим, что, так как прежний набор оказывается доступным потребителю с излишком денежных средств, а предпочтения агента по условию задачи строго монотонны, то благосостояние потребителя может только возрасти.

(б) Утверждение неверно. Снижение ставки процента приведет к тому, что бюджетная линия станет более пологой. Потребление в размере начального запаса доступно в обоих случаях, следовательно, бюджетная линия повернется вокруг точки первоначального запаса.

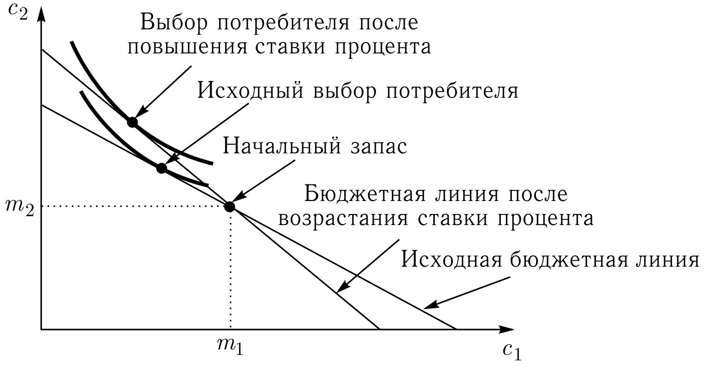

Рис. 1.61. Возможный выбор потребителя кредитора после повышения ставки процента

Поскольку теперь потребителю недоступна часть потребительских наборов, доступных ранее (наборы, расположенные левее точки первоначального запаса между двумя бюджетными линиями, в том числе и прежний потребительский выбор), и доступны новые наборы, которые ранее не были доступны (наборы, расположенные правееточи начального запаса между двумя бюджетными линиями), то нельзя сделать однозначный вывод о том, какой выбор сделает потребитель, не зная в точности предпочтения потребителя.

Таким образом, возможны различные варианты выбора потребителя. В качестве примера рассмотрим случай, когда потребитель останется кредитором, и продемонстрируем его на рис. 1.62.

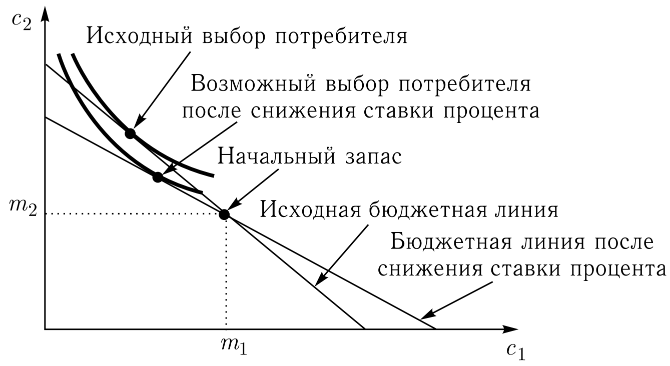

Рис. 1.62. Возможный выбор потребителя кредитора после снижения ставки процента

Потребитель остается кредитором (текущее потребление меньше начального запаса в текущий период). Заметим также, что благосостояние потребителя при этом может только снизиться, так как в этом случае он выбирает набор, который был доступен ему при исходном бюджетном ограничении.

1.159. (а) Полагая, что индивид может занимать или кредитовать по ставке процента, равной 10%, построим его бюджетную линию в случае различных грантов. В случае получения гранта в фонде A:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = m_1 + m_1^A + \frac{m_2}{1+r} + \frac{m_2^A}{1+r},$$

где c_1, c_2 — расходы на потребление сотрудника в текущем и будущем периоде, соответственно, m_1, m_2 — начальный запас индивида до получения гранта, r — ставка процента, $m_1^A = 50\,000$, $m_2^A = 110\,000$ — размер получаемого гранта в фонде A в текущем и будущем периодах, соответственно. Получаем уравнение бюджетной линии:

$$c_1 + \frac{c_2}{1{,}1} = m_1 + 50\,000 + \frac{m_2}{1{,}1} + \frac{110\,000}{1{,}1} = \\ = m_1 + \frac{m_2}{1{,}1} + 150\,000. \tag{*}$$

Действуя аналогично, получаем уравнение бюджетной линии при условии, что сотрудник получает грант в фонде B:

$$c_1 + \frac{c_2}{1{,}1} = m_1 + 100\,000 + \frac{m_2}{1{,}1} + \frac{55\,000}{1{,}1} = \\ = m_1 + \frac{m_2}{1{,}1} + 150\,000. \tag{**}$$

Замечаем, что уравнения (*) и (**) описывают одну и ту же бюджетную линию, что и показано на рис. 1.63.

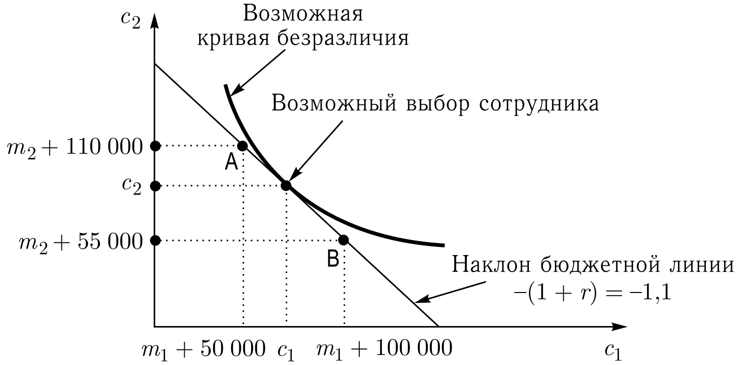

Рис. 1.63. Бюджетная линия сотрудника и его возможный выбор при получении грантов в фондах A и B при одинаковой ставке процента по кредитам и депозитам

Следовательно, поскольку бюджетное множество в обоих случаях одинаково, то сотруднику безразлично, получить грант в фонде A или в фонде B.

(б) В соответствии со сказанным в п. (а) потребительский выбор сотрудника в различные периоды не будет отличаться в зависимости от того, какой грант он получит, что и демонстрирует рис. 1.63. То есть, в текущем периоде при получении гранта из фонда А индивид выберет такое же потребление, как и в текущем периоде при получении гранта из фонда В. В будущем периоде при получении гранта из фонда А индивид выберет такое же потребление, как и в будущем периоде при получении гранта из фонда В.

(в) Если ставки процента по кредитам и депозитам различаются, то бюджетная линия будет иметь излом в точке начального запаса (а именно, в точках А и В на рис. 1.63).

В этом случае бюджетные линии будут описываться следующим образом:

При получении гранта в фонде А бюджетная линия сотрудника имеет вид:

$$\begin{cases} c_1 + \dfrac{c_2}{1{,}08} = m_1 + 50\,000 + \dfrac{m_2}{1{,}08} + \dfrac{110\,000}{1{,}08}, & c_1 \leqslant m_1 + 50\,000, \\ c_1 + \dfrac{c_2}{1{,}12} = m_1 + 50\,000 + \dfrac{m_2}{1{,}12} + \dfrac{110\,000}{1{,}12}, & c_1 \geqslant m_1 + 50\,000, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} c_1 + \dfrac{c_2}{1{,}08} = m_1 + \dfrac{m_2}{1{,}08} + 151\,852, & c_1 \leqslant m_1 + 50\,000, \\ c_1 + \dfrac{c_2}{1{,}12} = m_1 + \dfrac{m_2}{1{,}12} + 148\,214, & c_1 \geqslant m_1 + 50\,000. \end{cases}$$

Бюджетная линия сотрудника при получении гранта в фонде В будет описваться следующим образом:

$$\begin{cases} c_1 + \dfrac{c_2}{1{,}08} = m_1 + 100\,000 + \dfrac{m_2}{1{,}08} + \dfrac{55\,000}{1{,}08}, & c_1 \leqslant m_1 + 100\,000, \\ c_1 + \dfrac{c_2}{1{,}12} = m_1 + 100\,000 + \dfrac{m_2}{1{,}12} + \dfrac{55\,000}{1{,}12}, & c_1 \geqslant m_1 + 100\,000, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} c_1 + \dfrac{c_2}{1{,}08} = m_1 + \dfrac{m_2}{1{,}08} + 150\,926, & c_1 \leqslant m_1 + 100\,000, \\ c_1 + \dfrac{c_2}{1{,}12} = m_1 + \dfrac{m_2}{1{,}12} + 149\,107, & c_1 \geqslant m_1 + 100\,000. \end{cases}$$

Обе бюджетные линии изображены на рис. 1.64.

Можно заметить, что в зависимости от предпочтений сотрудника относительно потребления в текущий и будущий период потребитель может предпочесть либо грант в фонде A (рис. 1.64), либо грант в фонде B (рис. 1.65).

Также в зависимости от предпочтений может оказаться, что индивиду безразлично, какой из грантов ему выбрать. В этом случае кривая безразличия, соответствующая выбору сотрудника, должна касаться одновременно обеих бюджетных линий. Пример, когда сотруднику безразлично, грант в каком из фондов выбрать, представлен на рис. 1.66.

Заметим также, что во всех представленных в п. (в) случаях потребление сотрудника в текущем и будущем периодах будет зависеть от того, грант в каком из фондов он выберет.

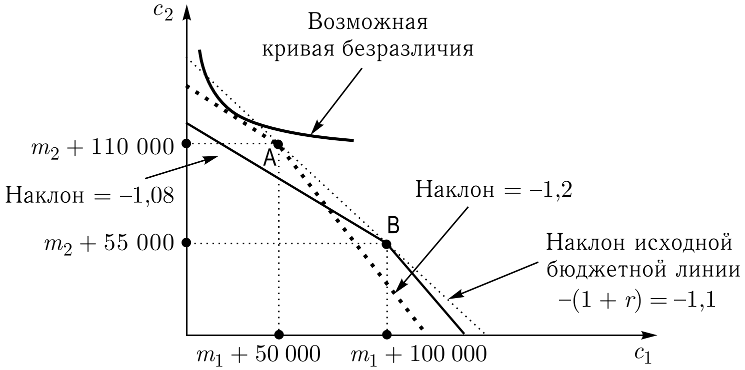

Рис. 1.64. Бюджетная линия сотрудника и его возможный выбор при получении грантов в фондах A $(\cdot\cdot\cdot\cdot)$ и B (——) при различной ставке процента по кредитам и депозитам

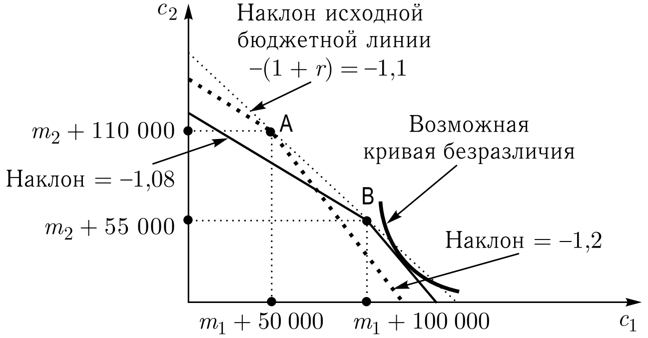

Рис. 1.65. Бюджетная линия сотрудника и его возможный выбор при получении грантов в фондах A $(\cdot\cdot\cdot\cdot)$ и B (——) при различной ставке процента по кредитам и депозитам

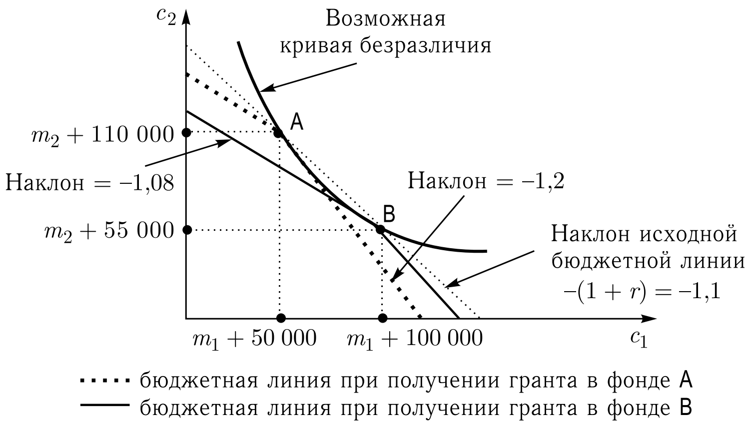

Рис. 1.66. Бюджетные линии сотрудника при различных ставках по кредитам и депозитам, а также возможный выбор, если ему безразлично, в каком из фондов получать грант

1.9. Ответы и подсказки

1.1. (а) $m \geqslant 100$. **(б)** Не сможет. **1.2. (а)** $p > 2$. **(б)** Сможет. **1.3. (б)** $p_x = 2\,p_y$. **(в)** Сможет купить 8,5 ед. товара X и 17 ед. товара Y. **(г)** $2x + y \leqslant 17$. **1.4.** Сможет потребить 12 ед. первого товара. **1.6.** $S = 0{,}1\,m$. **1.7. (а)** $px + qy \leqslant m$, где x — количество минут катания на карте, а y — количество минут игры в компьютерном клубе.

(б) $$\begin{cases} px + qy \leqslant m, & x \leqslant \overline{x}, \\ 0{,}75\,px + qy \leqslant m - 0{,}25\,p\overline{x}, & \overline{x} < x \leqslant \widetilde{x}, \\ 0{,}5\,px + qy \leqslant m - 0{,}25\,p(\overline{x} + \widetilde{x}), & \widetilde{x} < x \leqslant \widehat{x}, \text{ где} \\ & \widehat{x} = \dfrac{2\,m}{p} - 0{,}5\,(\overline{x} + \widetilde{x}). \end{cases}$$

(в) $$\begin{cases} px + qy \leqslant m, & x \leqslant \overline{x}, \\ qy \leqslant m - p\overline{x}, & \overline{x} < x \leqslant \overline{x} + C, \\ px + qy \leqslant m + pC, & \overline{x} + C < x \leqslant C + \dfrac{m}{p}. \end{cases}$$

$C_{\min} = \dfrac{m}{p} - \dfrac{1}{2}(\overline{x} + \widetilde{x})$.

(г) $px + qy \leqslant m + 120\,p + 180\,q$, $y \leqslant m/q + 180$, $x \leqslant \dfrac{m}{p} + 120$.

(д) $$\begin{cases} px + qy \leqslant m, \quad y \leqslant \overline{y}, \\ px + 0{,}75\,qy \leqslant m - 0{,}25\,q\overline{y}, \ \overline{y} < y \leqslant \widehat{y}, \text{ где } \widehat{y} = \dfrac{3\,m}{4\,q} - \dfrac{\overline{y}}{3}. \end{cases}$$

1.8. $3\,x + 5(y - 5) \leqslant 120$, $x \leqslant 40$. **1.9.** $5\,x + 2{,}1\,y \leqslant 210$, $y \leqslant \dfrac{190}{2{,}1}$.

1.10. $\begin{cases} x + 4\,y \leqslant 108, & y \leqslant \overline{y}, \\ x + 3(y - \overline{y}) \leqslant 108 - 4\,\overline{y}, & \overline{y} < y \leqslant 36 - \dfrac{\overline{y}}{3}. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 4\,x + y \leqslant 120, & x \leqslant \overline{x}, \\ 5(x - \overline{x}) + y \leqslant 120 - 4\,\overline{x}, & x > \overline{x}. \end{cases}$ **1.12.** Верно. *Подсказка*: проверьте доступность любого набора начального бюджетного множества при новом бюджетном ограничении. **1.13.** Неверно. В качестве контрпримера можно нарисовать две бюджетные линии, которые пересекаются при положительном объеме потребления обоих товаров. **1.14.** Пусть первое благо — это часы занятий в фитнес-центре, второе благо — всё остальное. **(а)** Уравнение бюджетной линии: $5\,x_1 + 10\,x_2 = 120$. **(б)** Уравнение бюджетной линии: $x_2 = \begin{cases} 12, & 0 \leqslant x_1 \leqslant 2, \\ 13 - 0{,}5\,x_1, & 2 \leqslant x_1 \leqslant 26. \end{cases}$ **(в)** Площадь под бюджетной линией из п. (б), ограниченная снизу бюджетной линией из п. (а). **(г)** Уравнение бюджетной линии: $5\,x_1 + 10\,x_2 = 120 + 2 \cdot 5$. **(д)** Уравнение бюджетной линии: $x_2 = \begin{cases} 12 - 0{,}5\,x_1, & 0 \leqslant x_1 \leqslant 10, \\ 9 - 0{,}2\,x_1, & 10 \leqslant x_1 \leqslant 45. \end{cases}$ **(е)** Уравнение бюджетной линии: $x_2 = \begin{cases} 12, & x_1 = 0, \\ 7, & 0 \leqslant x_1 \leqslant 10, \\ 9 - 0{,}2\,x_1, & 10 \leqslant x_1 \leqslant 45. \end{cases}$ **(ж)** Поскольку бюджетное множество из п. (д) содержит в себе бюджетное множество из п. (е), то программа из п. (д) для студента по крайней мере не хуже. Если студент предпочитает заниматься 10 и более часов, то эти программы эквивалентны, если менее 10 часов, то программа из п. (д) более привлекательна. **1.15. (а)** Уравнение бюджетной линии г-на М:

$$x_2 = \begin{cases} 40\,000/p_2, & 0 \leqslant x_1 \leqslant 4, \\ -(2500/p_2)x_1 + 50\,000/p_2, & 4 < x_1 \leqslant 20, \end{cases}$$

где x_1 — количество часов, проведенных на курсах вождения, x_2 — все остальные товары и услуги, p_2 — цена x_2. **(б)** Уравнение бюджетной линии г-на Л:

$$x_2 = \begin{cases} 40\,000/p_2, & 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \\ 35\,000/p_2, & 1 < x_1 \leqslant 4, \\ -(2500/p_2)x_1 + 45\,000/p_2, & 4 < x_1 \leqslant 18. \end{cases}$$

(в) Уравнение бюджетной линии г-на Н:

$$x_2 = \begin{cases} 40\,000/p_2, & x_1 = 0, \\ 30\,000/p_2, & 0 < x_1 \leqslant 5, \\ -(3000/p_2)x_1 + 45\,000/p_2, & 5 < x_1 \leqslant 15. \end{cases}$$

(г) Уравнение бюджетной линии г-на К:

$$x_2 = \begin{cases} 20\,000/p_2, & x_1 = 0, \\ 10\,000/p_2, & 0 < x_1 \leqslant 5, \\ -(3000/p_2)\,x_1 + 25\,000/p_2, & 5 < x_1 \leqslant 7, \\ -(2\,000/p_2)\,x_1 + 18\,000/p_2, & 7 < x_1 \leqslant 9. \end{cases}$$

1.16. *Подсказка*: определите товары (количество минут разговора при использовании услуг ГТС и агрегированное благо). Выпишите бюджетные ограничения, учитывая абонентскую плату и стоимость минуты разговора. **1.17.** Неверно. Контрпример: оба товара, относительно которых заданы предпочтения агента являются антиблагами. *Подсказка*: поскольку в определении различных видов монотонности предпочтений в различных учебниках могут быть разночтения, то для пояснения вопроса приведем соответствующие определения. Определение *монотонности* предпочтений: для любых двух наборов x и y из множества допустимых наборов, если $x > y$, то $x \succ y$, т. е. если в наборе x каждого блага больше, чем в наборе y, то набор x лучше набора y. Определение *строгой монотонности* предпочтений: для любых двух наборов x и y из множества допустимых наборов если $x \geqslant y$ и $x \neq y$, то $x \succ y$, т. е. если в наборе x хотя бы одного блага больше, чем в наборе y, а остальных благ не меньше, то набор x лучше набора y. **1.18.** Верно. *Подсказка*: увеличение потребления одного из товаров приведет к ухудшению положения агента. **1.19.** Оба утверждения неверны. Рисунки 1.67, *а* и *б* демонстрируют контрпримеры к первому и второму утверждению соответственно. **1.20.** Верно. *Подсказка*: рассмотрите три набора, соответствующие точке пересечения кривых безразличия и двум точкам на различных кривых безразличия. **1.21.** Неверно. Рисунок 1.68 демонстрирует контрпример. **1.22.** **(б)** $x \succsim y \Leftrightarrow x_1 \geqslant y_1$, где x_1, y_1 — количество яблок в наборах x и y соответственно. **(в)** Предпочтения полны: всегда наиболее предпочтителен набор с наибольшим количеством яблок, а если количество яблок одинаково, то наборы эквивалентны и при этом не важно какое количество других фруктов. **(г)** Предпочтения

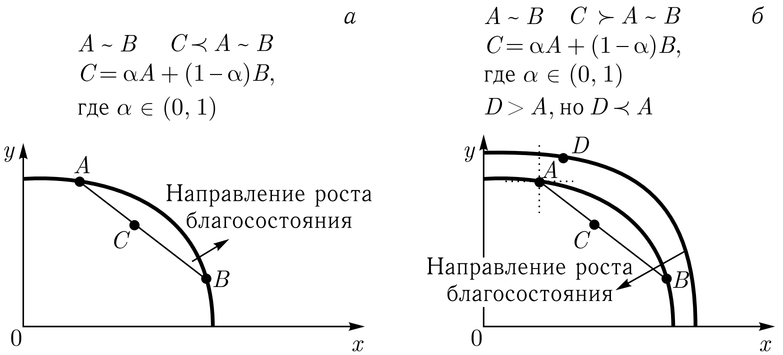

Рис. 1.67. Пример типичных кривых безразличия для строго монотонных, невыпуклых предпочтений (*а*) и типичных кривых безразличия для выпуклых, немонотонных предпочтений (*б*)

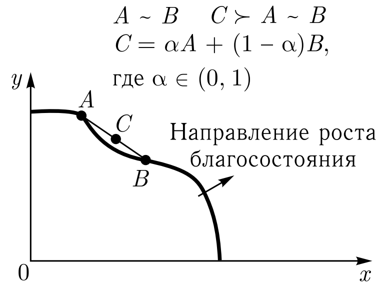

Рис. 1.68. Пример кривой безразличия для невыпуклых предпочтений

являются транзитивными. **1.23. (б)** $x \succsim y \Leftrightarrow x_1 \geqslant y_1$, $x_2 \geqslant y_2$, где x_i и y_i — координаты наборов x и y соответственно. **(в)** Предпочтения не являются полными, что можно продемонстрировать контрпримером. **(г)** Предпочтения являются транзитивными. **1.24. (а)** Кривые безразличия — прямые с наклоном равным -1. **(в)** Предпочтения являются выпуклыми. **(г)** Пример функции полезности: $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. **(д)** Уравнение кривой безразличия, проходящей через набор $(1, 8)$: $x_2 = 9 - x_1$. **1.25. (а)** Тренер предпочтет игрока A игроку B. **(б)** Тренер предпочтет игрока B игроку C. **(в)** Тренер предпочтет игрока C игроку A. **(г)** Поскольку все спортсмены сравнимы, то предпочтения являются полными. **(д)** Предпочтения не являются транзитивными. **(е)** Новые предпочтения не являются полными. Поскольку если, например, один спортсмен превосходит другого по двум характеристикам, но уступает по третьей, то тренер не может выбрать между двумя этими спортсменами. **(ж)** Новые предпочтения тренера транзитивны. **1.26.** *Подсказка*: полнота предпочтений не влечет их транзитивность, так же, как и отсутствие полноты предпочтений не влечет отсутствие их транзитивности. **1.27. (а)** Предпочтения не являются монотонными, являются выпуклыми. **(б)** Предпочтения не являются монотонными, не являются выпуклыми. **(в)** Предпочтения являются монотонными, не являются выпуклыми. **1.28**. **(а)** $(3,\ 10) \succ (2,\ 4) \succsim (8,\ 4) \succsim (2,\ 16)$, причем последние три набора эквивалентны. **(б)** Верно. *Подсказка*: воспользуйтесь определением строгой выпуклости предпочтений. **(в)** $(3,\ 9) \succ (2,\ 8) \succ (1,\ 5)$. Не достаточно информации о свойствах предпочтений, чтобы сравнить набор $(4, 3)$ с любым из оставшихся. **(г)** *Подсказка*: воспользовавшись выпуклостью предпочтений, например, можно показать, что $(4,\ 5) \succsim (2,\ 11) \sim (5,\ 2)$, а затем воспользоваться строгой монотонностью предпочтений. **1.29**. **(а)** Неверно. Контрпример: «толстые» кривые безразличия. **(б)** Верно. *Подсказка*: воспользуйтесь определениями гомотетичности предпочтений и функции полезности. **(в)** Не может. *Подсказка*: воспользуйтесь определением строгой монотонности предпочтений и определением функции полезности. **1.30. (а)** Пусть x_1 — это количество порций суши, x_2 — количество порций куриных крылышек (в неделю). **1)** Для данного индивида суши и куриные крылышки являются взаимозаменяемыми благами (совершенными субститутами) с пропорцией замещения один к одному: индивид готов обменять одну порцию куриных крылышек на одну порцию суши. Таким образом, семейство кривых безразличия описывается уравнениями вида $x_1 + x_2 = k$. **2)** Для данного индивида суши и куриные крылышки взаимодополняющие блага (совершенные комплементы) с пропорцией замещения один к двум: индивид с каждой порцией крылышек потребляет две порции суши. Таким образом, семейство кривых безразличия описывается уравнениями вида $\min\{x_1/2, x_2\} = k$. **3)** Поскольку единственное, что приносит удовлетворение данному индивиду — это куриные крылышки, то кривые безразличия в пространстве (x_1, x_2) — горизонтальные линии, т. е. семейство кривых безразличия описывается уравнениями вида $x_2 = k$. **4)** Для данного индивида точка (20, 15) является точкой насыщения. Кривые безразличия — окружности с центром в точке (20, 15): чем дальше окружность от центра, тем менее предпочтительны лежащие на ней наборы. Семейство кривых безразличия описывается уравнениями вида $-(x_1-20)^2-(x_2-15)^2=k$. **(б) 1)** Предпочтения удовлетворяют свойствам: монотонности, строгой монотонности, выпуклости. Предпочтения не удовлетворяют свойству строгой выпуклости. **2)** Предпочтения удовлетворяют свойствам: монотонности, выпуклости. Предпочтения не удовлетворяют свойствам строгой монотонности, строгой выпуклости. **3)** Предпочтения удовлетворяют свойствам: монотонности, выпуклости. Предпочтения не удовлетворяют свойствам строгой монотонности и строгой выпуклости. **4)** Предпочтения удовлетворяют свойствам выпуклости и строгой выпуклости. Предпочтения не удовлетворяют свойствам монотонности и строгой монотонности. **(в)** Примеры функций полезности. **1)** $u(x_1,x_2)=x_1+x_2$; **2)** $u(x_1,x_2)=\min\{x_1/2,x_2)\}$; **3)** $u(x_1,x_2)=x_2$; **4)** $u(x_1,x_2)= =-(x_1-20)^2-(x_2-15)^2$. **1.31.** Предпочтения не являются выпуклыми. **1.32. (а)** Уравнение кривой безразличия: $64=(x_1x_2)^2$ или $x_2=8/x_1$. Кривая безразличия — гипербола. **(б)** Уравнение кривой безразличия, соответствующей уровню полезности, равному 100: $100=(x_1x_2)^2$ или $x_2=10/x_1$. Данная кривая безразличия расположена дальше от начала координат, чем полученная в п. (а). **(в)** $MRS_{12}=-dx_2/dx_1=x_2/x_1$, $MRS_{12}(2,4)=4/2=2$, $MRS_{12}(4,2)=2/4=1/2$. Кривые безразличия демонстрируют убывание предельной нормы замещения, т. е. чем больше у потребителя первого блага, тем ниже норма, по которой он готов заместить второе благо первым. **(г)** 1) (а) $2x_1+x_2=10$, кривая безразличия — отрезок прямой с отрицательным наклоном; (б) $2x_1+x_2=100$ — отрезок прямой с отрицательным наклоном, расположенный дальше от начала координат, чем в п. (а); (в) $MRS_{12}(2,4)=MRS_{12}(4,2)=2$. 2) (а) $2\sqrt{x_1}+x_2=6$, график квадратного корня с отрицательным знаком смещенный вдоль оси ординат на величину полезности; (б) $2\sqrt{x_1}+x_2=100$; (в) $MRS_{12}(2,4)=1/(\sqrt{x_1})=1/(\sqrt{2})$, $MRS_{12}(4,2)=1/(\sqrt{x_1})=1/(\sqrt{4})=1/2$. Предельная норма замещения в каждой точке зависит только от количества первого блага. 3) Кривая безразличия и предельная норма замещения совпадают с вычисленными в пп. (а), (в), поскольку заданная функция представляет собой положительное монотонное преобразование исходной функции; (б) $x_2=\exp\{100\}/x_1$. **1.33. (а)** Предпочтения полные. Для любого набора можно вычислить разницу между удвоенной второй координатой и квадратом первой. Из двух наборов, тот набор, для которого эта разница окажется больше, является более предпочтительным. Если вычисленные разницы одинаковы, то наборы эквивалентны. **(б)** Предпочтения транзитивные. **(в)** Функция полезности $u(x_1, x_2) = 2x_2 - (x_1)^2$. **(г)** $2x_2 - (x_1)^2 = -2$. **(д)** *Подсказка*: для того, чтобы изобразить кривую безразличия, удобно записать уравнение кривой в виде $x_2 = (x_1)^2/2 - 1$. **(е)** Предпочтения не являются строго монотонными. **(ж)** Предпочтения удовлетворяют свойству выпуклости. **1.34. (а)** Информации достаточно: $z \sim y \succ x$. **(б)** Предпочтения не являются монотонными. **(в)** Совпадут с кривой безразличия, которой принадлежит набор y. **1.35. (а)** Предпочтения удовлетворяют свойствам полноты, транзитивности. **(в)** Предпочтения монотонны и не являются выпуклыми. **1.36. (а)** В пространстве товаров, где по оси абсцисс откладывается количество первого блага, а по оси ординат — количество второго блага, кривые безразличия представляют собой прямые с положительным наклоном, причем наиболее предпочитаемым наборам соответствуют кривые безразличия, пересекающие ось ординат дальше от начала координат. Другими словами, предпочтения могут быть описаны, например, так: $x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $x_2 - x_1 \geqslant y_2 - y_1$. **(б)** Предпочтения не являются монотонными. **1.37. (а)** Рис.1.69 демонстрирует ответ на п. (а). **(б)** Три грамма картошки готов будет обменять на один грамм майонеза. **(в)** Предпочтения полны, транзитивны, строго монотонны, выпуклы, но не являются строго выпуклыми. **1.38**. Оба ответа неверны. *Подсказка*: рассмотрите такой набор комплементарных товаров, для которо-

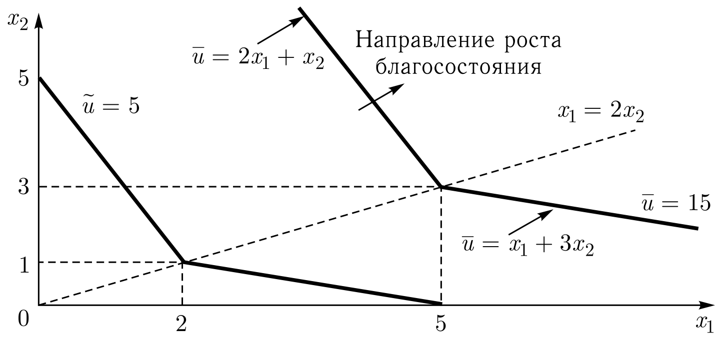

Рис. 1.69. Кривые безразличия для агента с предпочтениями вида $u(x_1, x_2) = \min\{2x_1 + x_2,\, x_1 + 3x_2\}$

го увеличение потребления одного из товаров может привести к росту благосостояния. **1.39.** *Подсказка*: используйте определение предельной нормы замещения и правило взятия полного дифференциала функции многих переменных, учитывая, что вдоль любой кривой безразличия значение функции полезности не меняется. **1.40.** *Подсказка*: найдите MRS_{xy}. Обратите внимание, что значение предельной нормы замещения товаров зависит от объема товаров в любом данном наборе. **1.41.** Пусть предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u(x)$, т. е. $x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geqslant u(y)\ \ \forall x, y \in R_+$. Пусть $\widetilde{u}(x) = g(u(x))$, где $g(\cdot)$ — непрерывная строго возрастающая функция. Тогда $x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geqslant u(y) \Leftrightarrow g(u(x)) \geqslant g(u(y)) \Leftrightarrow \widetilde{u}(x) \geqslant \widetilde{u}(y)$, т. е. функция полезности $\widetilde{u}(x)$, представляющая собой положительное монотонное преобразование функции $u(x)$, описывает те же предпочтения. **1.42.** Неверно. *Подсказка*: рассмотрите строго выпуклые предпочтения, где оба товара являются антиблагами. **1.43.** **(а)** Положение улучшится. **(б)** Положение ухудшится. **(в)** Изменятся. **1.44.** Да. *Подсказка*: функция полезности возрастает хотя бы по одному аргументу. **1.45.** **(а)** Верно. *Подсказка*: воспользуйтесь доказательством от противного. **(б)** Неверно. *Подсказка*: в качестве контрпримера рассмотрите предпочтения с «толстыми» кривыми безразличия. **1.46.** Неверно, наборы сравнить нельзя. Необходимо привести контрпример. **1.47.** **(а)** *Подсказка*: изобразите кривую безразличия потребителя, проходящую через точку $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, укажите направление роста полезности и воспользуйтесь определением бюджетной линии. **(б)** Утверждение неверно. **1.48.** Утверждение неверно. *Подсказка*: рассмотрите случай совершенных субститутов. **1.50.** Нерационально. Увеличив потребление первого товара на бесконечно малую величину, потребитель улучшит свое положение. **1.51.** **(а)** *Подсказка*: найдите $MRS_{12}(\widetilde{x})$, сравните с отношением рыночных цен, используйте бесконечно малые изменения в потреблении. **(б)** Неверно. *Подсказка*: рассмотрите набор, в котором не потребляется один из товаров. **1.52**. Неверно. Рисунок 1.70 демонстрирует контрпример, где изображена типичная кривая безразличия

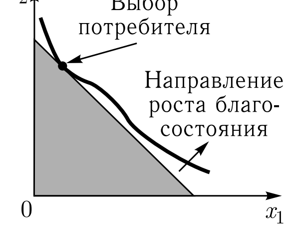

Рис. 1.70. Контрпример к задаче 1.52

предпочтений агента, предпочтения которого являются строго монотонными, но не являются выпуклыми. **1.53.** *Подсказка*: возьмите любую точку в бюджетном множестве и проведите через нее кривую безразличия. Определите, будет ли данная точка оптимальной. **1.54.** 120. **1.55.** $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $p_1 = 2p_2$, t — потоварный налог на первое благо, доходпотребителя, любая положительная величина. **1.56.** $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = (1000,\ 500)$. **1.57.** $\widetilde{y} = 4$. **1.58.** **(а)** Функция $\widetilde{u}(x_1, x_2) = (u(x_1, x_2))^2$ не представляет те же предпочтения, что и заданная функция в условии. Например, для потребителя, предпочтения которого представимы функцией полезности $u(x_1, x_2) = -(x_1 - 2)^2 - (x_2 - 3)^2$, набор $(2, 3)$ предпочтительней набора $(1, 3)$, тогда как для потребителя, функция полезности которого $u(x_1, x_2) = \big(- (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 3)^2\big)^2$, наоборот, набор $(1, 3)$ предпочтительней набора $(2, 3)$. Это следствие того, что $\widetilde{u}(x_1, x_2)$ не является возрастающим монотонным преобразованием функции $u(x_1, x_2)$. **(б)** $(2, 3)$. **1.59.** **(а)** Уравнение бюджетной линии: $3x_1 + x_2 = 120$. **(б)** Оптимальный потребительский набор: $(10, 90)$. **(в)** Уравнение бюджетной линии: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 120, & 0 \leqslant x_2 \leqslant 30, \\ x_1 + 2x_2 = 90, & 30 < x_2 \leqslant 45. \end{cases}$ **(г)** Оптимальный потребительский набор: $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = (30,\ 30)$. **(д)** Оптимальный потребительский набор: $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = (0,\ 45)$. **1.60.** 120. **1.61.** **(а)** Поскольку стоимость набора меньше дохода потребителя, то набор доступен. **(б)** Уравнение бюджетной линии $\begin{cases} 40, & 0 \leqslant x_1 \leqslant 5, \\ -x_1 + 45, & 5 < x_1 \leqslant 45, \end{cases}$ где x_1 — количество упаковок чая, x_2 — объем потребления остальных товаров и услуг. **(в)** Уравнение бюджетной линии $\begin{cases} -x_1 + 40, & 0 \leqslant x_1 \leqslant 6, \\ -1/2\, x_1 + 37, & 6 < x_1 \leqslant 74. \end{cases}$ **(г)** Оптимальный набор $x_1 = 45$, $x_2 = 0$. **1.62.** **(а)** Утверждение верно, функция $\widetilde{u}(x_1, x_2)$ представляет те же предпочтения, что и $u(x_1, x_2)$. **(б)** В пространстве товаров, где по оси абсцисс откладывается количество первого блага, а по оси ординат — количество второго блага, кривые безразличия представляют собой вертикальные прямые. **(в)** $x_1(p_1, p_2, m) = m/p_1$, $x_2(p_1, p_2, m) = 0$, где p_i — цена i-го блага, m — доход. **1.63.** **(а)** $x_j = \Big(\alpha_j \Big/ \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\Big)\Big) \cdot (m/p_j)$. Доля расходов на каждое благо составляет $\alpha_j \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$. **(б)** Кривая доход–потребление представляет собой луч, выходящий из начала координат (не включая саму точку начала координат). *Подсказка*: наклон любой кривой безразличия вдоль одного и того же любого луча, выходящего из начала координат, для данного вида предпочтений одинаков в силу однородности функции полезности. **1.64. (а)** Неверно. Да, будет. *Подсказка*: сравните предельную норму замещения черного чая зеленым при отказе от потребления зеленого чая и рыночную норму обмена чаев. **(б)** $x(p,m)=\begin{cases}\sqrt{m}\,, & m\leqslant 2500\,p^2,\\ 50\,p, & m>2500\,p^2,\end{cases}$

$y(p,m)=\begin{cases}0, & m\leqslant 2500\,p^2,\\ (m-2500\,p^2)/p, & m>2500\,p^2.\end{cases}$ **1.66. (а)** $MRS_{12}=\sqrt{x_2}$. **(б)** $MRS_{21}(1,\ 16)=1/4$.

(в) $x_1(p_1,p_2,m)=\begin{cases}(mp_2-(p_1)^2)/(p_2p_1), & m>(p_1)^2/p_2,\\ 0, & m\leqslant (p_1)^2/p_2,\end{cases}$

$x_2(p_1,p_2,m)=\begin{cases}(p_1/p_2)^2, & m>(p_1)^2/p_2,\\ m/p_2, & m\leqslant (p_1)^2/p_2,\end{cases}$ **1.68**. Нельзя. *Подсказка*: постройте различные бюджетные линии при росте цены товара x и неизменной цене другого товара и неизменном доходе потребителя. **1.69. (а)** Нельзя. В зависимости от отношения цен данных товаров, спрос на товар x может либо расти, либо падать. **(б)** Можно. На участке кривой с положительным наклоном товар x ведет себя, как нормальное благо. На вертикальном участке кривой товар x ведет себя, как нейтральное к доходу благо. **1.70.** Можно. С ростом цены второго товара спрос на первый растет. **1.71.** Является (валовым) дополнителем — с ростом цены второго товара спрос на первый снижается. **1.72.** Возрастут в полтора раза. *Подсказка*: функция спроса потребителя однородна нулевой степени относительно цен и дохода. **1.74. (а)** Верно. Не зависит от перечисленных параметров. *Подсказка*: прежний выбор студента будет доступен ему и при замене субсидии на стоимость персональной компенсацией. **(б)** Да. *Подсказка*: субсидия может быть рассчитана, как среднее по расходам на обеды для всех студентов. **(в)** (i) Да. (ii) Да. В каждом случае достаточно привести графический пример. **1.75.** Благосостояние не снизится. Потребление продуктов питания возрастет. *Подсказка*: воспользуйтесь тем, что потребительская корзина, выбираемая домохозяйством при получении талонов, в точности доступна домохозяйству и при потоварном субсидировании. **1.76.** Верно. *Подсказка*: проверьте доступность прежнего потребительского выбора при денежной помощи. **1.77.** Верно. *Подсказка*: проверьте доступность потребительской корзины, выбираемой семьей при субсидировании квадратного метра жилой площади, в случае, когда семья получает сертификат. **1.78. (а)** $t = p$. **(б)** $S = m/2$. **1.79.** Набор B должен лежать на бюджетной линии при ценах справа от точки A. **1.80. (б)** Поскольку набор A (прямо выявлено) предпочитается набору B, а набор B (прямо выявлено) предпочитается набору A, то такое поведение потребителя не согласуется с WARP. **1.81. (б)** Поскольку набор A (прямо выявлено) предпочитается набору B, а набор B (прямо выявлено) предпочитается набору A, то такое поведение потребителя не согласуется с WARP. **1.82.** Неверно. *Подсказка*: приведите контрпример, когда набор x стоит меньше, чем набор y при некоторых ценах, однако, набор y выявлено предпочитается набору x. **1.84. (а)** Поведение потребителя не согласуется с WARP. Набор x (прямо выявлено) предпочитается набору y и одновременно набор y (прямо выявлено) предпочитается набору x. **(б)** Поведение потребителя согласуется с WARP. Набор x (прямо выявлено) предпочитается набору y. **(в)** Выбор потребителя не противоречит WARP. Поскольку, когда приобретался набор x набор y не был доступен, и наоборот, то нельзя сказать, какой из двух наборов предпочтительнее. **(г)** Поведение потребителя согласуется с WARP. Набор y (прямо выявлено) предпочитается набору x. **(д)** Поведение потребителя не согласуется с WARP. Набор x (прямо выявлено) предпочитается набору y и одновременно набор y (прямо выявлено) предпочитается набору x. **1.85.** Нельзя. Прежний выбор остался потребителю доступным и сейчас. **1.86. (б)** $p_1 \geqslant 10$. **(в)** Набор y прямо выявлено предпочитается набору x при $p_1 < 10$. **1.87. (б)** $y_2 \in [14, 23]$. **(в)** $y_2 < 14$. **1.88.** Утверждение верно. *Подсказка*: изобразите бюджетные линии до и после изменения цен и отметьте на них выбор потребителя. **1.89. (а)** Да. **(б)** Набор x^1 (прямо выявлено) предпочитается набору x^0. **(в)** Набор x^1 предпочитается набору $\overline{x}$. **(г)** Нет. **1.93. (а)** Индекс объема Пааше: $P_q = 38/32$. **(б)** Поскольку индекс объема Паше больше 1, то набор текущего 2011 г. выявлено предпочитается набору 2000 г., а значит, благосостояние потребителя в 2011 г. возросло. **1.94. (а)** $L_p = 19/14$, $P_p = 18/17$. **(б)** Нельзя. Выбор текущего года был недоступен пенсионерке в прошлом году, выбор прошлого года недоступен пенсионерке в текущем году. **1.95.** Не можем. Потребительская корзина апреля могла быть и недоступна пенсионеру в марте. Достаточно привести графический пример двухтоварной экономики. **1.96.** Можем. Если бы это было не так, то пенсионерка выбрала бы в январе февральскую потребительскую корзину. **1.97.** Определить нельзя. Благосостояние могло возрасти, снизиться или остаться неизменным. Необходимо привести примеры. **1.98.** Студент не будет посещать бассейн реже, благосостояние его точно не снизится. **1.99.** Не будет. **1.101.** **(а)** Пусть первое благо — это часы занятий вождением (в неделю), а второе благо — агрегированное потребительское благо, цену которого будем считать равной единице. Уравнение бюджетной линии в августе: $4x_1 + x_2 = 120$. Уравнение бюджетной линии в сентябре: $x_1 + x_2 = 90$ при $x_1 \in (0, 90]$ и $x_2 = 120$ при $x_1 = 0$. **(б)** Согласно теории выявленных предпочтений студент либо выберет тот же набор, что и в августе, и тогда его благосостояние останется неизменным, либо ранее недоступный набор на новой бюджетной линии (сентябрьской), и тогда благосостояние студента в сентябре по сравнению с августом возрастет. **1.102.** **(а)** 6 единиц. **(б)** Верно. Набор каждого месяца не был доступен в другом месяце. **(в)** Нельзя, благосостояние может измениться как угодно. **(г)** Неверно. Наборы, содержащие меньший объем товара y, по сравнению с прошлым месяцем, были доступны потребителем и в прошлом месяце, но не были выбраны. Поскольку выбор прошлого месяца доступен потребителю и в следующем месяце, потребитель не сократит потребление товара y. **1.103.** **(а)** Верно. При новой схеме оплаты клиенты смогут увеличить потребление услуг салона по сравнению с начальными условиями оплаты без сокращения объемов потребления всех остальных благ. **(б)** Неверно. Могут быть клиенты, которым будет безразлично переходить или не переходить на новую схему оплаты. **(в)** Неверно. Наборы, содержащие большие объемы услуг салона, чем $\overline{X}$, были доступны и при старой схеме, но не были выбраны. Поскольку старый выбор доступен и при новой схеме, то увеличение потребления объема услуг салона при новой схеме данными клиентами невозможно. **1.104.** Благосостояние потребителя не снизится. **1.105.** Нужно выбрать альтернативу с покупкой купонов. В силу того, что продукты питания нормальное благо, любой набор, выбираемый семьей при получении материальной помощи, будет доступен ей (с избытком) при покупке продовольственных купонов. **1.106. (а)** 20. Доходы государства возросли в два раза. **(б)** Система налогообложения, при которой облагаются потоварным налогом оба товара не хуже для потребителя, чем система налогообложения только второго товара. **1.107.** Исключить из числа подозреваемых можно только Петрова. **1.108. (а)** Потребление мяса не увеличится, а благосостояние не повысится. **(б)** Потребление мяса не увеличится, благосостояние потребителей не снизится. **(в)** Не меньшую. **1.109.** *Подсказка*: воспользовавшись теорией выявленных предпочтений проверьте доступность набора, при котором клиент разговаривает 450 минут в каждом варианте тарифа. **1.110. (а)** Не верно. На рисунке проиллюстрирована декомпозиция по Слуцкому. **(б)** Разность $x_1^C - x_1^A$ — это изменение спроса в силу эффекта замещения, разность $x_1^B - x_1^C$ — изменение спроса в силу эффекта дохода. **(в)** Первое благо является инфериорным и товаром Гиффена. **1.111. (а)** Эффект замещения равен нулю. Эффект дохода равен совокупному изменению спроса на первое благо. **(б)** Эффект замещения равен совокупному изменению спроса на первое благо. Эффект дохода равен нулю. **1.112. (1) (а)** Совокупное изменение спроса на первое благо: $\Delta x_1 = 4$. **(1) (б)** Изменение спроса на первое благо, обусловленное эффектом замещения, равно двум, изменение спроса на первое благо, обусловленное эффектом дохода, также равно двум. **(1) (в)** Изменение спроса на первое благо, обусловленное эффектом замещения, равно $4\sqrt{2} - 4 \approx 1{,}657$, изменение спроса на первое благо, обусловленное эффектом дохода, равно $8 - 4\sqrt{2} = 4 \approx 2{,}343$. **(2) (а)** Совокупное изменение спроса на первое благо: $\Delta x_1 = 0{,}75$. **(2) (б)** Изменение спроса на первое благо, обусловленное эффектом замещения, равно 0,75, эффект дохода равен нулю. **(2) (в)** Изменение спроса на первое благо, обусловленное эффектом замещения, равно 0,75, эффект дохода равен нулю. **1.114. (б)** Да. Выбор не противоречит WARP: когда выбирался набор A, набор B был доступен потребителю, но не был выбран, когда выбирался набор B, набор A был недоступен потребителю. **(в)** В ценовой ситуации, когда был выбран набор A, благосостояние потребителя выше, чем в ценовой ситуации, когда выбирался набор B. *Подсказка*: воспользуйтесь строгой монотонностью предпочтений потребителя. **(г) (i)** Неверно. **(ii)** Неверно. *Подсказка*: воспользуйтесь разложением изменения спроса на товары на изменения в силу эффектов замещения и дохода. **1.115.** Нельзя. *Подсказка*: воспользовавшись разложением изменения спроса на товары на изменения в силу эффектов замещения и дохода, приведите два различных контрпримера, когда один из товаров может быть инфериорным товаром, в то время как другой товар является нормальным. **1.116. (а)** Неверно. Его благосостояние не снизилось, поскольку набор базисного периода остается доступным потребителю и в текущем периоде. **(б)** Неверно. Благосостояние потребителя после введения подоходного налога может измениться в любую сторону, несмотря на недоступность при новом бюджетном ограничении оптимального набора базисного периода. Достаточно привести контрпример. **(в)** Неверно. Если бы первый товар являлся инферионым благом для данного агента, то совокупное действие эффектов дохода и замещения заставило бы потребителя увеличить потребление первого товара. **1.119.** *Подсказка*: смотри доказательство неположительности эффекта замещения, рассчитанного по Хиксу, в задаче 1.118. **1.120. (а)** Неверно. *Подсказка*: сравните компенсированный доход, который необходим данному потребителю, чтобы достичь прежней покупательной способности и прежнего уровня благосостояния. **(б)** Нет, поскольку не изменится соотношение между компенсацией доходов по Слуцкому и по Хиксу. **(в)** Да, поскольку изменится соотношение между компенсацией доходов по Слуцкому и по Хиксу. **(г)** Неверно. *Подсказка*: воспользуйтесь результатом п. (а) и «однонаправленностью» эффектов замещения и дохода для нормального товара. **(д)** Изменится. Утверждение верно. *Подсказка*: воспользуйтесь результатом пункта (б) и тем, что для инфериорного товара эффекты замещения и дохода действуют разнонаправлено. **(е)** Изменится. Утверждение верно. *Подсказка*: воспользуйтесь результатом пункта (в) и тем, что для инфериорного товара эффекты замещения и дохода действуют разнонаправлено. **1.121. (а)** Сократилось бы на 14 ед. **(б)** Неверно. Может измениться в любую сторону. **(в)** Неверно, может вести себя и как инфериорное благо. **1.123.** Потребительский излишек составил бы 11 руб. Потребительский излишек был бы равен нулю. **1.124.** Товар x ведет себя на рассматриваемом участке, как инфериорный товар. См. рис. 1.71. **1.125.** Эквивалентная вариация дохода. **1.126.** Компенсирующая вариация дохода. **1.127.** Компенсирующая вариация дохода. **1.129. (а)** 2000 руб.

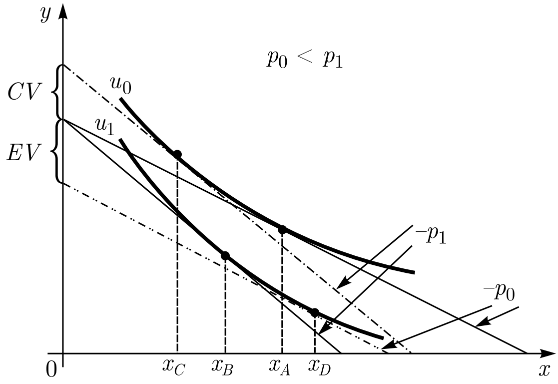

Рис. 1.71. Компенсирующая и эквивалентная вариации дохода

(б) 3600 руб. **1.131. (а)** $EV = 1500$, $S = 2000$, $EV < S$. **(б)** Графическое сравнение эквивалентной вариации дохода и расходов правительства представлено на рисунке 1.72. *Подсказка*: сравните минимальную компенсацию дохода, необходимую для достижения нового уровня благосостояния (EV), и расходы правительства (S), учитывая, что наборы $(x, y)^{\mathrm{comp}}$ и (x^S, y^S) эквивалентны. Графически сравнение представлено на рис. 1.72. **1.132. (а)** $\Delta m = EV < \Delta CS < CV$. *Подсказка*: смотри решение к задаче 1.130. **(б)** Неверно. **(в)** Положение улучшится. $\Delta m < S$, где S — размер указанной субсидии. *Подсказка*: при нейтральной к госбюджету политике начальный выбор потребителя (до изменения цен) будет в точности ему доступен. Для доказательства этого факта выпишите уравнение начальной бюджетной линии потребителя и уравнение бюджетной линии при нейтральной к госбюджету политике. Затем сравните размер паушальной субсидии с компенсирующей вариацией дохода и воспользуйтесь результатом п. (а). **1.133.** Два различных примера предпочтений: 1) товары являются абсолютно дополняющими и $u(x, y) = \min\{x, y\}$; 2) товары являются несовершенными заменителями, предпочтения монотонны, выпуклы, кривые безразличия при положительных объемах потребления товаров гладкие, без изломов, и $u(x, y) = xy$. **(а)** 1) доходы от потоварного и паушального налогообложения равны; 2) доходы от паушального налогообложения превышают доходы от потоварного налогообложения. **(б)** 1) доходы от указанных видов налогообложения в точности равны эквивалентной вариации дохода; 2) доход от потоварного

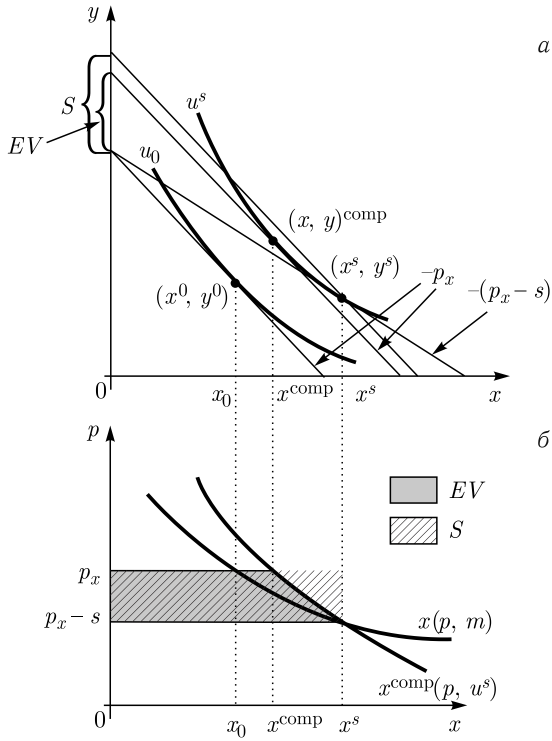

Рис. 1.72. Сравнение расходов правительства на субсидирование с эквивалентной вариацией дохода

налогообложения меньше эквивалентной вариации дохода, доход от паушального налогообложения в точности равен эквивалентной вариации дохода. **1.134.** Снизится. *Подсказка*: вместо компенсирующей вариации дохода, которая вернула бы потребителя на прежний уровень благосостояния, выплатили эквивалентную вариацию дохода. Для ответа на поставленный вопрос, необходимо сравнить, размеры компенсирующей и эквивалентных вариаций дохода. **1.135.** Не примет. *Подсказка*: максимальная сумма, которую клиент готов был бы заплатить в качестве вознаграждения служащему банка, равна компенсирующей вариации дохода клиента, связанной со снижением процентной ставки по кредиту. Для ответа на поставленный вопрос, необходимо сравнить, размеры компенсирующей и эквивалентных вариаций дохода. **1.136.** Потери домохозяйства превышают доходы муниципальных властей. *Подсказка*: смотри рисунок к задаче 1.131.

1.137. (а) Неверно. Агент может выиграть, если станет чистым покупателем этого товара. **(б)** Неверно. Агент может выиграть, если станет чистым продавцом этого товара. **(в)** Верно. Начальный выбор агента доступен ему с избытком после изменения цены. **(г)** Верно. Начальный выбор агента доступен ему с избытком после изменения цены. **1.138.** Снижение относительной цены товара не приводит к снижению объема спроса на него в силу эффекта замещения («неположительность» эффекта замещения). Если кривые безразличия гладкие, без изломов, а потребление второго товара до изменения относительных цен не нулевое, то эффект замещения приведет к увеличению объема потребления товара, относительная цена которого снизилась. Поскольку агент является чистым покупателем товара, относительная цена которого снизилась, то покупательная способность агента возросла (прежний выбор в новых ценах остается доступным ему с избытком). Поскольку товар является нормальным, то объем его потребления при увеличении покупательной способности должен возрасти в силу эффекта богатства. Следовательно, эффект богатства и эффект замещения действуют в одном направлении, если изменение потребления в силу эффекта замещения не нулевое. Поэтому снижение относительной цены нормального товара должно приводить к увеличению объема его потребления, если агент являлся чистым покупателем этого товара до изменения цен. **1.139.** *Подсказка*: эффекты замещения и богатства действуют в одном направлении, если изменение объема потребления данного товара в силу эффекта замещения не нулевое, приводя к снижению потребления этого товара. **1.140.** *Подсказка*: эффекты замещения и богатства действуют в различных направлениях, если изменение объема потребления данного товара в силу эффекта замещения не нулевое; поэтому при «нулевом эффекте замещения» потребление данного товара возрастет, при «ненулевом эффекте замещения» изменение в объеме потребления данного товара может быть каким угодно. **1.141.** *Подсказка*: эффекты замещения и богатства действуют в различных направлениях, если изменение объема потребления данного товара в силу эффекта замещения не нулевое; поэтому при «нулевом эффекте замещения» потребление данного товара сократится, при «ненулевом эффекте замещения» изменение в объеме потребления данного товара может быть каким угодно. **1.142. (а)** Верно. Снижение потребления этого товара приводило бы к тому, что домохозяйство выбирало бы набор, доступный ему до изменения цен. **(б)** Неверно. *Подсказка*: эффекты замещения и богатства, действующие для нормального товара в различных направлениях, могут приводить в совокупности к увеличению его потребления. Необходимо привести контрпример. **1.143. (а)** Купил 4 ед. первого товара. $(\omega_1, \omega_2) = (10,\ 6)$. **(б)** Набор $\overline{x} = (15,\ 4)$ не мог потребить, поскольку он не был доступен потребителю в феврале. Потребитель не мог выбрать набор $\widehat{x} = (8,\ 7)$, иначе его поведение было бы нерационально. **(в)** Положение потребителя улучшилось, поскольку январский набор доступен потребителю с излишком, а его предпочтения строго монотонны. **1.144.** Данный потребитель считает блага 1 и 2 совершенными субститутами с пропорцией замещения один к одному, т. е. имеет функцию полезности вида $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Оптимальный набор не содержит первое благо, а второе благо содержит в количестве $x_2 = 62$. Поскольку $x_2 = 62 > \omega_2 = 6$, то потребитель будет чистым покупателем второго блага. **1.145. (а)** $\omega = (5,\ 7)$. **(б)** Нельзя, поведение потребителя не противоречит слабой аксиоме выявленных предпочтений. **(в)** Невозможно определить, как изменилось благосостояние, поскольку набор текущего месяца не был доступен потребителю в прошлом месяце, а набор прошлого месяца не доступен потребителю в текущем месяце. **(г)** Верно. Эффекты замещения и богатства в этом случае действуют в одном направлении, если изменение в объеме потребления первого товара в силу эффекта замещения не равно нулю. **1.148.** *Подсказка*: выделите эффекты замещения и богатства. **1.149. (а)** $\begin{cases} 10\,l + c \leqslant 1000, & 100 \geqslant l \geqslant 50, \\ 4\,l + c \leqslant 700, & 0 \leqslant l < 50. \end{cases}$ **(б)** 50. **(в)** Захочет. Максимальная величина взятки $1000 - 750\sqrt[3]{2} \approx 55$. **1.150.** Пусть c — агрегированное потребительское благо, цена которого равна 1, а l — часы досуга. **(а)** Уравнение бюджетной линии: $c + 4\,l = 4 \cdot 90 + 50$, или $c = 410 - 4\,l$. **(б)** Уравнение бюджетной линии: $c = \begin{cases} 410 - 4\,l, & 90 \geqslant l \geqslant 50, \\ 510 - 6\,l, & 0 < l < 50. \end{cases}$ **(в)** Для труда, предлагаемого сверх 40 часов в неделю, наклон бюджетной линии по абсолютной величине будет больше, чем в исходной ситуации. Тогда, согласно теории выявленных предпочтений, студент не уменьшит предложение труда, т. е. предпочтет работать сверхурочно или столько же. **1.151. (а)** Уравнение бюджетной линии: $c + 5\,l = 550$. **(б)** Уравнение бюджетной линии: $c + (5/2)l = 400$.

(в) Студент будет работать 20 часов в неделю. **1.152. (а)** Индивид предпочтет работать 11,9 часов в день. **(б)** Индивид предпочтет работать 11,875 часов в день. **(в)** В силу квазилинейности предпочтений индивида ответ останется неизменным. **1.153.** Индивид по-прежнему будет работать 9 часов в день. **1.154. (а)** Пусть c — агрегированное потребительское благо, цена которого равна 1, а l — часы досуга. Уравнение бюджетной линии: (1) $c+10l=1880$; (2) $c+5l=1040$; (3) $c+10l=1680$; (4) $c=\begin{cases}1880-10l, & 168\geqslant l\geqslant 128,\\ 1240-5l, & 0\leqslant l<128.\end{cases}$ **(б)** Поскольку бюджетное множество при программе (1) включает в себя бюджетные множества всех других программ, то при любых предпочтениях эта программа будет, по крайней мере, не хуже остальных. **(в)** Поскольку бюджетное множество при программе (2) содержится в бюджетном множестве при программе (4), то программа (4), по крайней мере, не хуже. **(г)** Программа (2) будет предпочитаться программе (3), если бюджетное множество программы (2) будет содержать в себе бюджетное множество программы (3), т. е. если выполнено условие $S>tw\overline{L}=5\cdot 168=840$, где $\overline{L}$ — совокупный запас времени. **1.155. (а)** Пусть c — агрегированное потребительское благо, цена которого равна 1, а l — часы досуга. Уравнения бюджетной линии: (1) $c+5l=500$.

(2) $c=\begin{cases}500-5l, & 80\geqslant l\geqslant 60,\\ 350-2{,}5l, & 0<l<60.\end{cases}$ (3) $c=\begin{cases}100, & l=80,\\ 200-2{,}5l, & 0\leqslant l<80.\end{cases}$

(4) $c=\begin{cases}100, & l=80,\\ 5(80-l), & 60\leqslant l<80,\\ 250-2{,}5l, & 0\leqslant l<60.\end{cases}$ (5) $c=\begin{cases}200-2{,}5l, & 60\leqslant l<80,\\ 300-2{,}5l, & 0\leqslant l<60.\end{cases}$

(б) Если государственный служащий работает 20 часов в неделю и более, то первая программа для него более привлекательна, в противном случае программы эквивалентны. Другими словами, программа (1) не хуже программы (2). **(в)** Если индивид предпочитает работать, то программа (4) для него более привлекательна, если он все доступное время тратит на досуг, то программы эквивалентны. **1.156.** Пусть c — агрегированное потребительское благо, цена которого равна 1, а l — часы досуга. **(а)** Уравнение бюджетной линии: $c+10l=1680$. **(б)** Уравнение бюджетной линии: $c+20l=3360$. Поведение потребителя рационально. Благосостояние возросло. **(в)** С ростом ставки заработной платы за все часы работы предложение труда может как измениться (возрасти или снизиться), так и остаться неизменным (как в данном случае), однако если потребителю предлагается более высокая ставка заработной платы не за все часы работы, а за сверхурочную работу, то предложение труда согласно концепции выявленных предпочтений не уменьшится. **1.157. (а)** $c^* = 5200$. **(б)** $P' = 1200$. **(в)** Индивид не снизит уровень занятости. **(г)** Нельзя дать однозначный ответ: все зависит от конкретных предпочтений индивида. **(д)** $L = 525$. **1.160.** Вариант B не хуже варианта A, поскольку бюджетное множество при принятии варианта A является подмножеством бюджетного множества при принятии варианта B. Если ваши предпочтения относительно потребления в текущий и следующий месяцы монотонны, то вариант B будет строго предпочитаться варианту A. Решение не зависит от размера страховой выплаты. **1.161. (а)** Схема 1) лучше, чем схема 2). *Подсказка*: изобразите на одном графике бюджетные линии господина M при различных схемах оплаты покупки. **(б)** Ответ на этот вопрос будет таким же, как и в пункте (а). **(в)** $c_1 \approx 506{,}7$ тыс. руб., $c_2 \approx 1114{,}7$ тыс. руб. **1.162. (а)** Верно. Положение в данном случае могло ухудшиться, только если потребителю пришлось выбрать набор, ранее доступный ему с излишком денежных средств. Поскольку повысилась ставка только по кредитам, он мог быть ранее только заемщиком, в противном случае его положение не изменилось бы. **(б)** Верно, положение агента ухудшиться не могло, поскольку начальное бюджетное множество является подмножеством нового бюджетного множества. Неверно, до повышения ставки агент мог быть и заемщиком. **(в)** Неверно. *Подсказка*: для нормального товара при повышении его относительной цены эффекты богатства и замещения действуют в одном направлении, стремясь сократить объем потребления этого товара, при условии, что данный агент являлся до изменения цены чистым покупателем этого блага. **(г)** Неверно. *Подсказка*: в качестве контрпримера рассмотрите случай, когда снижение ставки процента происходит для кредитора; при этом эффекты замещения и богатства действуют в различных направлениях и могут приводить в совокупности к снижению объема текущего потребления. **1.163. (а)** Семья будет приобретать мебельный гарнитур в салоне «Надежда». **(б)** Изменится. Если текущее потребление семьи будет меньше, чем $(m_0 - 70\,000)$ (m_0 — доход семьи в текущий период времени), то семье будет безразлично, в каком из салонов приобретать гарнитур, если ее текущее потребление будет больше, чем $(m_0 - 70\,000)$, то семья предпочтет приобретать гарнитур в салоне «Надежда». **(в)** Семья останется кредитором. Наборы потребления в текущий и будущий период, при которых семья является заемщиком, были доступны ей при 5%-ной ставке по депозитам, но были отвергнуты, следовательно, поскольку прежний набор доступен семье с излишком денежных средств, лучший набор может находиться только среди ранее недоступных семье; она останется кредитором. **1.164. (а)** Верно, иначе его поведение противоречило бы WARP. **(б)** Верно, поскольку после снижения ставки процента он выбирает набор, ранее доступный ему с избытком денежных средств. **(в)** Неверно, текущее потребление могло быть в рассматриваемом интервале изменения цен и инфериорным товаром для данного агента. *Подсказка*: в качестве контрпримера рассмотрите случай, когда потребитель является до изменения ставки процента либо заемщиком, либо кредитором, текущее потребление является для него инфериорным товаром, действия эффектов замещения и богатства сонаправлены (для кредитора) или противоположно направлены (для заемщика). **(г)** Неверно, потребитель мог быть и заемщиком. *Подсказка*: в контрпримере учтите, что эффекты замещения и богатства при снижении относительной цены нормального товара будут действовать в одном направлении, увеличивая объем его потребления, если агент являлся чистым покупателем этого товара. **1.165. (а)** Согласится. Прежнее бюджетное множество является подмножеством нового бюджетного множества. **(б)** Потребление в оба периода возрастет. **(в)** Нельзя однозначно ответить на поставленный вопрос, не зная предпочтений агента. Может согласиться или отказаться. **1.166. (а)** Отдыхать в августе, работать в июле. Ваше бюджетное множество при втором варианте проведения каникул является подмножеством бюджетного множества при выбранном первом варианте, а обратное неверно. **(б)** Если потребление в августе нормальный товар для агентов, то объем потребления в этом месяце будет больше у вас. Если потребление в августе инфериорный товар для агентов, то объем потребления в этом месяце будет больше у вашего одногруппника. **(в)** Не зная ваших предпочтений относительно потребления в оба месяца, нельзя дать однозначный ответ на данный вопрос.

Глава 2

ТЕОРИЯ ПОВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЯ

2.1. Технология, максимизация прибыли

2.1. По мотивам [2.4]. Технология производства может быть описана производственной функцией вида Кобба–Дугласа $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

(а) Найдите предельную производительность каждого фактора производства. При каких значениях α и β предельный продукт первого фактора возрастает с ростом использования первого фактора?

(б) Найдите предельную норму технологического замещения $MRTS_{12}$. При каких значениях α и β данная технология будет обладать убывающей нормой технологического замещения при росте использования первого фактора производства? Какой вывод о характере отношений между рассматриваемыми факторами производства, с точки зрения замещаемости и/или дополняемости, можно сделать на основе полученного выражения?

(в) При каких значениях α и β данная производственная функция обладает возрастающей отдачей от масштаба; постоянной отдачей от масштаба; убывающей отдачей от масштаба?

(г) Может ли технология характеризоваться одновременно убыванием предельного продукта каждого фактора производства и возрастающей отдачей от масштаба?

2.2. Назовите какие-либо причины, следствием которых является убывающая отдача от масштаба для реальных технологических процессов.

2.3. Пусть технологический процесс производства некоторого товара таков, что производственная функция, описывающая его, вогнута и производственное множество обладает свободой расходования (распоряжения). Процесс производства требует затрат только двух факторов производства — труда и капитала. Известно, что для производства 24 ед. продукции можно использовать, например, 4 ед. капитала и 72 ед. труда, или 12 ед. капитала и 8 ед. труда. Как вы полагаете, можно ли произвести тот же объем продукции, затрачивая 10 ед. капитала и 32 ед. труда? Обоснуйте.

2.4. Приведите определение изокванты. Могут ли изокванты пересекаться? Может ли изокванта иметь положительный наклон? Может ли изокванта быть «толстой линией»?

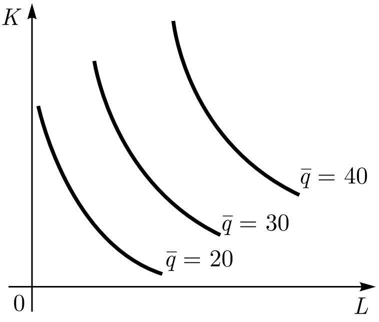

Рис. 2.1. Изокванты

2.5. На рисунке 2.1 изображены изокванты, соответствующие некоторой производственной функции. Выбранный по осям масштаб остается неизменным. Может ли функция $q(L, K) = 2L^{1/2}K^{1/2}$ представлять данную технологию? Обоснуйте свой ответ.

2.6. **По мотивам заданий LSE [2.7].** Пусть технология такова, что факторы производства x_1 и x_2 могут использоваться только в фиксированных пропорциях. Производственная функция имеет вид $f(x_1, x_2) = \min\{3x_1, x_2\}$.

(а) Найдите предельный продукт каждого фактора производства во всех точках, где это возможно.

(б) Найдите предельную норму технологического замещения в точках $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = (8, 5)$ и $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = (5, 16)$. Какой вывод о характере отношений между факторами производства с точки зрения их замещаемости и/или дополняемости можно сделать на основе полученных в данном пункте результатов?

(в) Какова отдача от масштаба при производстве по указанной технологии?

2.7. Производственная функция имеет вид: $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2^2$.

(а) Охарактеризуйте поведение предельного продукта каждого фактора производства.

(б) Охарактеризуйте отдачу от масштаба для данной технологии.

(в) Предположим, что количество второго фактора фиксировано и равно $\widetilde{x}_2 > 0$.

(i) Изобразите графически зависимость объема выпускаемой продукции от объема использования первого фактора.

(ii) Проиллюстрируйте на том же графике средний и предельный продукт первого фактора. На графике, расположенном ниже, выполненном в координатах «объем продукции — средний и предельный продукты» и соотнесенном с графиком п. (i) также изобразите средний и предельный продукты первого товара.

(iii) Сравните поведение предельного и среднего продуктов первого фактора. Объясните полученный результат интуитивно. Будет ли полученный результат справедлив для любой технологии, представленной дифференцируемой производственной функцией?

2.8. Исследования некоторого производственного процесса показали, что производственная функция за рассматриваемый период может быть аппроксимирована следующей функцией: $q(L, K) = 0{,}1\, LNK + 3\, L^2N^2K - 0{,}1\, L^3NK$, где L, N и K — объемы использования труда (в часах), количества работников (в сотнях штатных единицах), занятых в производстве, и капитала (в квадратных метрах) в данном производстве, соответственно. В краткосрочном периоде объем капитала фиксирован и равен 10, а штат сотрудников, занятых в производстве, составляет 100 работников.

(а) На двух графиках, расположенных соответственно один под другим, один из которых выполнен в координатах «объем труда–выпуск», а другой в координатах «объем труда–предельный и средний продукты», проиллюстрируйте соотношение между средним и предельным продуктом, приведя необходимые экономические объяснения этого соотношения.

(б) Используя дифференцируемость производственной функции и функции среднего продукта для произвольной технологии, докажите в общем виде полученные в п. (а) соотношения между средним и предельным продуктами.

(в) Поясните смысл «закона убывания предельного продукта». Найдите предельный продукт труда каждой сотни штатных единиц, занятой в производстве, для указанной в условии задачи технологии. Удовлетворяет ли «закону убывания предельного продукта» найденный предельный продукт? Объясните полученный результат.

2.9. Предположим, что две маленькие фирмы производят кованые стойки для цветов, закупая необходимые материалы у одних и тех же поставщиков и арендуя одинаковые по площади помещения. Технология производства стоек одинакова в фирмах и квалификации работников фирм, производящих стойки, одинаковы.

(а) Объясните, почему в действительности объемы производства товара при одних и тех же затратах материалов и труда могут различаться для этих фирм.

(б) Исследования процесса производства на одном из этих предприятий показали, что все работники обладают одинаковой квалификацией и производительностью (постоянной во времени). При этом было замечено, что при найме одного работника предприятие производит 5 стоек в день, а при найме двоих работников предприятие производит 8 стоек в день при соответствующем увеличении объемов используемых материалов. Как вы полагаете, выявляет ли данное исследование убывающую отдачу от масштаба используемой технологии? Выявляет ли данное исследование убывающую предельную производительность труда? Назовите причины, которые могли бы объяснить сложившуюся ситуацию.

2.10. Фирма производит продукт в соответствии с технологией $f(x) = 4\sqrt{x}$, где x — количество используемого в производстве фактора. Продукт продается по цене 100 долл. за единицу. Фактор производства x стоит 50 долл. за единицу.

(а) Изобразите графически на одном рисунке производственную функцию фирмы и несколько линий одинаковой прибыли.

(б) Найдите оптимальный выпуск фирмы, прибыль фирмы и оптимальное количество используемого фактора производства. Изобразите графически полученный результат.

(в) Правительство ввело потоварный налог по ставке 20 долл. на единицу выпуска фирмы, но при этом был субсидирован фактор производства в размере 10 долл. на единицу. Найдите оптимальный выпуск фирмы, прибыль фирмы и оптимальное количество используемого фактора производства в этом случае. Изобразите полученный результат графически.

(г) Предположим теперь, что вместо потоварного налога и субсидии был введен налог на прибыль фирмы в размере 50%. Найдите оптимальный выпуск фирмы, прибыль фирмы и оптимальное количество используемого фактора производства. Сравните найденные значения со значениями п. (б) и объясните полученный результат.

2.11.* Фирма производит продукт, используя два фактора производства согласно технологии, производственная функция которой $y = f(L, K)$ характеризуется убывающими предельными продуктами каждого фактора производства. В краткосрочном периоде объем капитала зафиксирован на уровне $\overline{K}$. Пусть фирма осуществляет продажу своей продукции на рынке совершенной конкуренции по цене p, а фактор приобретает на конкурентном рынке по цене w.

(а) Запишите задачу максимизации прибыли фирмы. Выпишите условия первого порядка, характеризующие внутреннее решение поставленной задачи. Проиллюстрируйте внутреннее решение задачи фирмы графически.

(б) Пусть теперь правительство субсидирует используемый в производстве данного товара труд. В результате политики субсидирования цена труда, используемого фирмой, снизилась на величину s $(s < w)$. Как изменится используемый объем труда, объем выпускаемого продукта и прибыль фирмы? Приведите графическое и аналитическое решения.

2.12. Верно ли утверждение: «Если стоимость предельного продукта труда при положительном объеме его использования превышает ставку заработной платы, то фирма, работающая на рынке совершенной конкуренции, снизит использование труда?» Приведите аналитическое решение в общем виде и продемонстрируйте решение графически для двухфакторного производства в периоде, когда один из факторов фиксирован.

2.13. Рассмотрите фирму, которая производит готовую продукцию, используя два фактора производства, труд и капитал, согласно производственной функции $g(K, L)$. Известно, что данная функция характеризуются положительным, но убывающим предельным продуктом каждого фактора. Изобразите схематично кривую спроса на фактор L в краткосрочном периоде, когда объем капитала зафиксирован на уровне $\overline{K}$. Объясните форму полученной кривой.

2.14.* По мотивам [2.6]. Не предполагая дифференцируемость производственной функции, докажите следующее утверждение: «Выручка фирмы, максимизирующей прибыль в условиях совершенной конкуренции, производящей один продукт и использующей в производстве два фактора производства, не убывает по цене готовой продукции». Будет ли данное утверждение справедливо для любой фирмы, выпускающей любое количество продуктов и использующей любое количество факторов производства при изменении цены данного продукта?

2.15. Рассмотрите фирму, максимизирующую прибыль в условиях совершенной конкуренции. Не предполагая дифференцируемость производственной функции, докажите, что величина спроса на труд не возрастает при увеличении ставки заработной платы.

2.16. Не предполагая дифференцируемость производственной функции, докажите следующее утверждение: «Фирма, максимизирующая прибыль, всегда будет минимизировать свои издержки».

2.17. Рассмотрите фирму, которая производит готовую продукцию, используя один фактор производства. При цене выпуска p'' и цене фактора w'' объем спроса фирмы на фактор составил x'' и объем выпуска составил y'', а при ценах p' и w' фирма выбрала x' и y'. На рис. 2.2, *а* и рис. 2.2, *б* изображены соответствующие изопрофиты. Можно ли утверждать, что фирма максимизировала прибыль?

2.18. Будем говорить, что фирма работает эффективно, если у нее нет возможности произвести больший объем выпуска, используя данный набор объемов факторов производства, и если у нее нет возможности использовать набор, содержащий меньший объем хотя бы одного из факторов производства, для производства данного объема продукта.

(а) Верно ли, что максимизирующая прибыль фирма работает эффективно? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

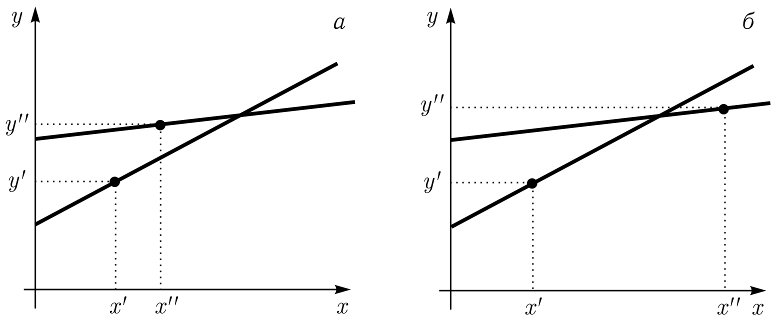

Рис. 2.2. Изопрофиты

(б) Верно ли, что работающая эффективно фирма максимизирует свою прибыль? Если **да**, то докажите, если **нет**, то приведите контрпример.

2.19. Пусть технология обладает свойством свободного распоряжения и задана производственной функцией вида $y = 12\,L^{1/3}K^{1/3}$. Данная фирма работает на рынке совершенной конкуренции. Известно, что при всех условиях, указанных ниже, фирма производит положительный объем продукции.

(а) Верно ли, что используя 27 ед. труда и 1 ед. капитала, данная фирма сможет произвести 25 ед. продукции? Объясните почему.

(б) Найдите отношение факторов, максимизирующее прибыль фирмы при цене продукции, равной p, цене труда, равной w, и цене капитала, равной r.

(в) В результате субсидирования стоимости труда правительством при условии п. (б) стоимость каждой единицы труда сократилось на 50%. Во сколько раз изменится объем продукции, производимой фирмой?

2.20. На двух заводах, производящих некоторый товар y, производится проверка. Результаты проверки выявили следующие показатели. За период, который охватывала проверка, цены на товар y менялись, а цена одного из факторов производства данного товара (фактора x), оставалась стабильной и равной 10 долл. за единицу. Цены всех остальных факторов производства данного товара оставались стабильны.

Первый завод производил 1 млн ед. товара y, используя 1 млн ед. фактора x, когда цена продукции была 10 долл. за единицу. Когда цена продукта возросла до 20 долл. за единицу, компания производила 3 млн ед. продукции, используя 4 млн ед. фактора x. Когда цена за единицу продукции стала равна 40 долл., первый завод использовал 10 млн ед. фактора x и производил 5 млн ед. продукции.

Второй завод производил такое же количество продукции, используя тот же объем факторов, что и первый, когда цена его была 10 и 20 долл., но когда цена за единицу продукции возросла до 40 долл., второй завод производил 3,5 млн ед. продукции, используя 8 млн ед. фактора.

Есть ли основания полагать, что какой-либо из заводов не максимизирует прибыль?

2.21. Фирма работает на рынке совершенной конкуренции, максимизируя свою прибыль и используя только один фактор производства. Известно, что для технологического процесса данной фирмы свойственно увеличение объема выпускаемого продукта при увеличении объема использования фактора производства. Верны ли следующие утверждения:

(а) Если цена фактора производства не изменится, в ответ на снижение цены товара фирма снизит выпуск продукта производства.

(б) Если цена продукта производства не изменится, при снижении цены фактора производства фирма будет использовать такое же количество фактора производства или больше.

(в) Если цены продукции фирмы и фактора производства возрастут и выпуск фирмы увеличится, то фирма неизбежно увеличит свою прибыль.

2.22. На экзамене по микроэкономике студентам была предложена для решения следующая задача: «Фирма работает в условиях совершенной конкуренции, используя только два фактора производства x_1, x_2 в объеме 5 и 7 ед. соответственно, и выпускает 16 ед. готовой продукции по цене 3 за каждую единицу. Цены факторов производства в этот период составляют $(w_1, w_2) = (2,\ 4)$. После увеличения цены первого фактора на 1 и снижения цены второго фактора на 2 фирма произвела 13 ед. готовой продукции, снизив использование первого фактора до 4, а второго фактора — до 6. При этом цена каждой единицы продукции была равна 2. Совместимы ли подобные наблюдения с максимизацией прибыли?»

Студент предложил следующее решение: «*Воспользуемся следствием из слабой аксиомы максимизации прибыли, которое для данной задачи имеет вид*: $\Delta p\,\Delta y - \Delta w_1 x_1 - \Delta w_2 x_2 \geqslant 0$, где Δp, Δw_1, Δw_2 — *изменение цен продукции и факторов производства соответственно, и* Δy, Δx_1, Δx_2 — *изменение объемов выпускаемой продукции и использования факторов производства соответственно. Подставляя в указанное неравенство значения, данные в условии задачи, убеждаемся, что неравенство выполняется*: $(-1)\cdot(-3) - 1\cdot(-1) - (-2) \times \times (-1) \geqslant 0$, *следовательно, поведение фирмы согласуется с теорией максимизации ее прибыли*».

Не решая предложенную задачу, укажите все ошибки, допущенные студентом.

2.23. Вскоре после чудесного и долгожданного спасения с необитаемого острова Робинзон затосковал по великолепному острову, где ему пришлось провести в одиночестве длительный период своей жизни. За время проживания на острове он научился столь ловко руками ловить рыбу в прибрежных водах, богатых ею, что решил создать фирму, единственным владельцем и работником которой он являлся, занимающуюся исключительно ловлей и продажей рыбы. Один раз в месяц в течение недели он нанимал небольшое судно-рефрижератор, которое доставляло его на остров в понедельник и возвращало в порт его родного города с уловом в воскресенье. Аренда судна обходилась Робинзону в T долл. По приезду в порт он тут же продавал весь свой улов, пользующийся большим спросом, по цене P долл. за центнер, причем цену рыбы устанавливали городские власти и строго следили, чтобы ни один торговец не продавал рыбу по иной цене, кроме назначенной. В то время, когда Робинзон не отправлялся на остров для ловли рыбы, он обеспечивал себя тем, что продавал картины с великолепными видами природы островов, которые писал сам. По подсчетам Робинзона каждый час его времени, который он тратил на занятие живописью, приносил ему стабильный доход в W долл. По понедельникам и воскресеньям он принципиально отказывался от любых творческих занятий, полагая, что хороший отдых в эти дни ему совсем не повредит, а в любой другой день, где бы он ни находился, обязательно занимался живописью. Приезжая на остров, Робинзон сам решал, заниматься ли ему рыбной ловлей или писать картины, однако целью его, конечно же, было получение наибольшей прибыли для организованного им предприятия, что позволяло ему безбедно жить в родном городе. Робинзон подсчитал, что за время нахождения на острове количество (масса) рыбы, которое он вылавливает, зависит от времени, которое он на это затрачивает, следующим образом: $y = \sqrt{L}$. Несмотря на то, что предприятие Робинзона приносит немалую прибыль, находчивый Робинзон также определил, что если бы у него была сеть, связанная из веток лиан, растущих исключительно на острове, где он ловит рыбу, то средняя производительность его труда, затрачиваемого на ловлю рыбы, возросла бы в 4 раза. Однако в этом случае сеть пришлось бы плести заново каждую поездку на остров, затрачивая на это $\widetilde{L}$ времени, поскольку спустя неделю использования она приходит в негодность, и сохранять ее до следующей поездки невозможно.

Как раз за размышлением о том, стоит ли Робинзону плести сеть и ловить рыбу с ее помощью, мы с вами и застали его на морском берегу его родного города.

Помогите Робинзону определить, при каких временны́х затратах на плетение сети его предприятие сможет увеличить прибыль.

2.2. Максимизация прибыли и минимизация издержек. Кривые издержек

2.24.* Фирма использует труд и капитал для производства продукта в соответствии с технологией $f(L, K) = 4L^{1/2}K^{1/2}$, где L и K — количество единиц используемого труда и капитала соответственно. Стоимость единицы труда равна w, а стоимость единицы капитала равна r.

(а) Изобразите графически несколько изокост. Какой наклон имеют эти линии?

(б) Изобразите графически изокванту, соответствующую выпуску y единиц продукта фирмы. Найдите отношение капитала к труду, которое позволит выпустить y единиц продукции с наименьшими издержками в долгосрочном периоде. Зависит ли это отношение от количества выпускаемой продукции? Объясните полученный результат и изобразите его графически.

(в) Найдите условный спрос на каждый фактор производства в долгосрочном периоде.

(г) Найдите функцию издержек фирмы в долгосрочном периоде.

(д) Найдите средние и предельные издержки производства в долгосрочном периоде и изобразите графически кривые средних и предельных издержек. Объясните форму полученных кривых.

2.25. Ответьте на вопросы пунктов (б), (в), (г), (д) задачи 2.24, если технологии фирм описываются следующими производственными функциями:

(1) $f(L, K) = 4L + K$;

(2) $f(L, K) = \min\{L, 4K\}$;

(3) $f(L, K) = 2\sqrt{L} + \sqrt{K}$.

2.26. Пусть фирма использует только два фактора производства и выпускает продукт в точке, где используются оба фактора в ненулевых количествах, причем $MP_1/w_1 > MP_2/w_2$. (MP_1, MP_2 — предельные продукты факторов, а w_1, w_2 — цены факторов производства).

(а) Минимизирует ли фирма свои издержки? Если да, то докажите, если нет, то укажите в явном виде способ снижения затрат фирмы.

(б) Останется ли ответ на п. (а) таким же, если опустить предпосылку о том, что оба фактора используются в ненулевых количествах. Обоснуйте.

2.27. Фирма производит продукт, используя две единицы труда и три единицы капитала. Известно, что предельная норма технологического замещения капитала трудом ($MRTS_{LK}$) в данной точке равна 4. Цена единицы капитала в пять раз ниже цены единицы труда. Покажите, как перераспределение ресурсов может снизить издержки, оставив объем производства на том же уровне.

2.28. Будем говорить, что фирма работает эффективно, если у нее нет возможности произвести больший объем выпуска, используя данный набор объемов факторов производства, и если у нее нет возможности использовать набор, содержащий меньший объем хотя бы одного из факторов производства, для производства данного объема продукта. Верно ли, что минимизирующая издержки при данном объеме выпуска фирма всегда работает эффективно?

2.29. Фирма работает в условиях совершенной конкуренции и приобретает все факторы производства на совершенно конкурентном рынке. Предположим, при данных ценах продукта, факторов производства и данном объеме выпускаемой продукции издержки фирмы минимальны. Верно ли, что при данных условиях фирма получает максимальную прибыль?

2.30. Фирма, работающая на рынке совершенной конкуренции, имеет производственную функцию $f(x, y) = x + 2y$ и использует оба фактора производства в ненулевом количестве. Верно ли следующее утверждение: «Если цена фактора x удвоится, а цена фактора y возрастет в три раза, то долгосрочные издержки производства возрастут более чем в два раза при любом данном положительном объеме выпускаемой продукции по сравнению с начальной ценовой ситуацией?»

2.31. К вам, как к будущему экономисту, обратился ваш знакомый — владелец небольшого производства, имеющего технологию $f(S, L) = S^{0,3}L^{0,3}K^{0,1}E^{0,2}$, где S — количество используемой стали, L — объем затрачиваемого труда, K — величина площади завода, E — объем необходимого для производства оборудования. У него есть возможность построить завод либо в городе A, либо в городе B, причем затраты на строительство одинаковы в этих городах. Объем продукции, который должен выпускать построенный завод, строго регламентирован госзаказом вне зависимости от того, в каком из городов он будет функционировать. Приятель просит вас помочь ему определить, в каком городе обосновать производство. В городе A сталь стоит s^{A} за тонну, а ставка заработной платы равна w^{A}; в городе B сталь стоит s^{B} за тонну, а ставка заработной платы равна w^{B}. Объем занимаемой площади помещения и объем необходимого для производства оборудования в каждом из городов будут, соответственно, одинаковы, и у владельца завода не будет возможности изменять их объемы в течение всего времени их использования. Кроме того, арендные платы за единицу используемой площади и за единицу используемого оборудования в этих городах также одинаковы. Не принимая в расчет издержки на строительство заводов, дайте вашему знакомому профессиональный совет, подтверждая ваши доводы соответствующим обоснованием, в каком из городов необходимо строить завод.

2.32. Когда цены на факторы производства x_1 и x_2 были одинаковы и равны 10 долл. за единицу, фирма использовала 50 ед. первого фактора и 150 ед. второго фактора для производства z единиц продукта. Когда цена второго фактора повысилась до 20 долл., а цена первого фактора не изменилась, то для производства того же самого количества продукта фирма повысила использование первого фактора до 300 ед. и перестала использовать в производстве второй фактор. Когда цена первого фактора повысилась до 20 долл., а цена второго фактора упала до 10 долл., то для производства того же самого количества продукта фирма увеличила использование второго фактора до 260 ед., а первый фактор перестала использовать.

(а) Каковы затраты фирмы в каждой ценовой ситуации? Изобразите графически изокосты, соответствующие данным комбинациям факторов производства для каждого случая.

(б) Согласуется ли поведение фирмы с теорией минимизации издержек? Обоснуйте.

(в) Если данная фирма минимизирует свои издержки, возможно ли, что для производства того же самого количества продукта она использовала бы в своем производстве 150 ед. первого фактора и 50 ед. второго фактора? Если **да**, то приведите пример соответствующей технологии, если **нет**, то докажите.

2.33. Рассмотрите фирму, производящую товар из двух факторов и выбирающую комбинации факторов при фиксированном выпуске. При ценах факторов w'_1, w'_2 фирма выбрала комбинацию факторов x'_1, x'_2. А при ценах факторов w''_1, w''_2 фирма выбрала комбинацию факторов x''_1, x''_2. Соответствующие изокосты изображены на рис. 2.3, *а* и рис. 2.3, *б*. Можно ли утверждать, что фирма минимизировала издержки?

2.34. Пусть технология фирмы, работающей на рынке совершенной конкуренции, задана производственной функцией вида $y = 10\,L^{2/3}K^{2/3}$. Пусть цена продукции равна p, цена труда равна w и цена капитала равна r.

(а) Верно ли, что при любом данном положительном объеме выпускаемой продукции отношение факторов производства ми-

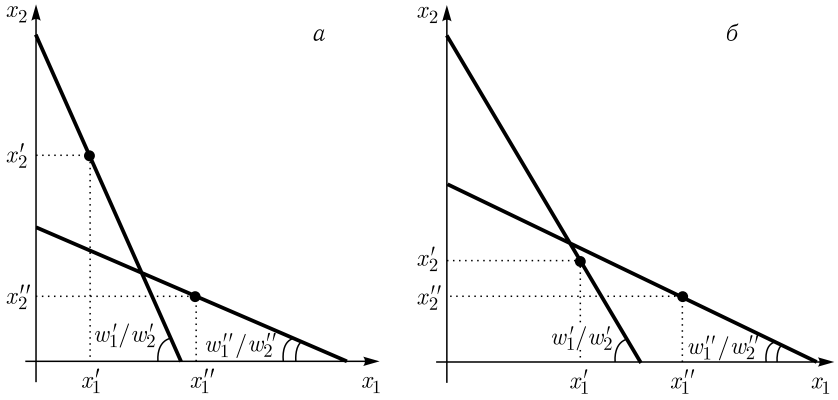

Рис. 2.3. Изокосты

нимизирующей издержки данной фирмы задается соотношением: $\widetilde{K}/\widetilde{L} = w/r$? Если **да**, то докажите, если **нет**, то объясните почему.

(б) Верно ли, что указанное в п. (а) отношение факторов производства максимизирует прибыль фирмы? Если **да**, то докажите, если **нет**, то объясните почему.

2.35. Пусть функция средних издержек, соответствующая некоторому технологическому процессу, дифференцируема. Покажите, что на участке, где средние издержки возрастают, предельные издержки всегда больше средних. Также покажите, что средние издержки равны предельным издержкам в точке, где средние издержки минимальны.

2.36.* Предположим, из 1 ед. труда и 16 ед. капитала фирма производит 2 ед. готовой продукции, а из 4 ед. труда и 64 ед. капитала — 4 ед. продукции. Можно ли предположить/утверждать, что функция издержек фирмы имеет вид $c\,(w_1,\, w_2,\, y) = 2w_1^{0,5}w_2^{0,5}\sqrt{y}$? Аргументируйте свой ответ.

2.37.* Предположим, что в условии совершенной конкуренции кривая долгосрочных средних издержек минимизирующей издержки фирмы имеет U-образную форму.

(а) Какие условия могут определять форму этой кривой?

(б) Объясните взаимное расположение кривой долгосрочных средних издержек и кривой краткосрочных средних издержек для данной фирмы.

2.38.* Рассмотрите фирму, выпускающую продукт по технологии $y = f(x_1, x_2)$ и работающую на рынке совершенной конкуренции. В краткосрочном периоде второй фактор производства зафиксирован на уровне $\overline{x}_2 > 0$. Пусть производственная функция монотонна, цены факторов производства равны w_1 и w_2 соответственно.

(а) Для краткосрочного периода покажите аналитически, что поведение кривой средних переменных издержек будет определяться соотношением между средней и предельной производительностью переменного фактора.

(б) Используя графическое представление, объясните, какими свойствами производственной функции будет определяться соотношение между средней и предельной производительностью переменного фактора.

(в) Используя результаты пп. (а) и (б), объясните, поведение кривой средних совокупных издержек для различных двухфакторных технологий в краткосрочном периоде, когда один из факторов используется в фиксированном количестве.

2.39. Рассмотрите фирму, владеющую двумя заводами с различными функциями издержек, $c_1(y_1)$ и $c_2(y_2)$. Предположим, фирме необходимо произвести y единиц выпуска. Как распределен выпуск между заводами минимизирующей издержки фирмы, если известно, что фирма выпускает положительный объем продукции на каждом из заводов, а предельные издержки для каждого завода являются возрастающими функциями? Объясните. Изобразите графически полученный результат.

2.40.* По мотивам заданий LSE [2.7]. Рассмотрите фирму, в собственности которой находятся два завода, A и B, производящие одинаковую продукцию по различным технологиям. Технология производства на заводе A может быть описана функцией $f_{\mathsf{A}}(K, L) = \sqrt{KL}$, а на заводе B $f_{\mathsf{B}}(K, L) = \sqrt{K} + \sqrt{L}$. Цена за единицу труда равна 1 долл., а за единицу капитала 4 долл.

(а) Каждый завод работает в краткосрочном периоде, когда капитал фиксирован и равен 4. Какое количество труда, минимизирующее издержки производства, будет использоваться, чтобы произвести по 10 ед. продукции на каждом заводе? Чему равны издержки производства 10 ед. продукции на каждом заводе?

(б) Если при фиксированном капитале на каждом из заводов, $K = 4$, фирме необходимо выпустить всего 10 ед. продукции, верно ли, что она должна закрыть завод B, и выпустить всю продукцию на заводе A? Поясните свой ответ.

2.41. Рассмотрите фирму владеющую двумя заводами, A и B, которые производят одинаковый продукт по различным технологиям. Технология производства на заводе A может быть описана функцией $f_{\mathsf{A}}(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$, а на заводе B $f_{\mathsf{B}}(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, где x_1 и x_2 — первый и второй факторы производства соответственно. Цена за единицу первого фактора равна 1, а за единицу второго 4.

(а) Если по условию государственного контракта в долгосрочном периоде фирме необходимо выпускать 20 ед. продукции на каждом из заводов, каковы будут ее издержки?

(б) Пусть теперь по условию контракта фирма может перераспределять выпуски между заводами и должна произвести 40 ед. продукции. Верно ли, что фирма по-прежнему будет выпускать по 20 ед. продукции на каждом из заводов? Обоснуйте.

(в) Найдите функцию издержек фирмы.

2.42.* Фирма «Белоснежка, Inc» выпускает глину для изготовления садовых керамических гномиков. Производственный процесс, описываемый производственной функцией $f(L, S, R) = S\sqrt{LR}$, осуществляется в подвале замка «Белоснежки, Inc» площадью S (в арах) и включает использование лишь сырья в объеме R (в кг) и труда бригады гномов-обработчиков в объеме L (в гномо-часах). Если это необходимо, колдовские способности гномов-обработчиков и их командный дух позволяют произвести объем глины больший, чем объем сырья, который они используют. Сырье «Белоснежка, Inc» приобретает у гномов-копателей по цене $q = 2$ золотые монеты за кг, труд бригады гномов-обработчиков оплачивается по ставке $w = 2$ золотые монеты за гномо-час, а площадь подвала замка «Белоснежки, Inc» составляет 1 ар, и подвал не используется под другие нужды, когда процесс приготовления глины не осуществляется. В Волшебной стране, где функционирует фирма «Белоснежка, Inc», никому не нужно оплачивать арендную плату за используемые помещения или коммунальные платежи.

(а) Хозяйка фирмы «Белоснежка, Inc» ежедневно несет производственные затраты в размере 32 золотые монет. Какой объем глины выпускает «Белоснежка, Inc» ежедневно? Проиллюстрируйте выбор фирмы графически.

(б) Гномы различных профессий объединились и создали профсоюз, который выдвигает требование увеличить зарплату гномов в 4 раза. Вступив в переговоры с «Белоснежкой, Inc», бригада гномов-обработчиков достигла с работодательницей следующих условий работы: если гномам приходится использовать сырья в объеме, не меньшем 8 кг, ставка их заработной платы возрастает в 4 раза, при других объемах использования сырья гномы согласны, благодаря их многолетней дружбе с «Белоснежкой, Inc», получать за свою работу прежнее вознаграждение. Учитывая, что работа профсоюзов не повлияла на цену сырья, изобразите семейство изокост, соответствующих новым условиям оплаты факторов производства.

(в) В силу обязательств по долгосрочному договору на поставку глины фирмой «Белоснежка, Inc» объем ее производства не может быть изменен и равен найденному в п. (а). На сколько изменятся ежедневные производственные затраты «Белоснежки, Inc» при введении в действие новых условий оплаты труда гномов-обработчиков? Интуитивно объясните полученный результат. Проиллюстрируйте выбор фирмы графически.

2.43.* Фирма, выпускающая некоторый продукт, арендует для производства помещения, расположенные в городах A и B. По условиям договора долгосрочной аренды указанных площадей для данной фирмы ежемесячная плата составляет F_A и F_B в месяц, в независимости от того, осуществлялось ли производство продукта или нет. Технологии производства продукции в городах A и B различаются, а потому ежемесячные переменные издержки производства в этих городах имеют вид $VC_\mathsf{A}(y_\mathsf{A}) = \alpha y_\mathsf{A}^2$ и $VC_\mathsf{B}(y_\mathsf{B}) = \beta y_\mathsf{B}^2$, где $\alpha > \beta > 0$.

(а) Если фирме, минимизирующей свои издержки, необходимо выпустить Y единиц продукции, то какую долю этого объема она выпустит на заводе A? Приведите аналитическое и графическое (схематично) решение. Найдите функцию издержек фирмы.

(б) Муниципальные власти города B приняли закон, в соответствии с которым все фирмы, выпускающие данный продукт на территории города, обязаны покупать лицензию, дающую право на производство этого продукта. Ежемесячный размер лицензии составляет $\widetilde{F}$. Если фирма не производит данный продукт, то она может не приобретать лицензию. Найдите размер лицензии, при которой фирма не будет отказываться от производства своей продукции в городе B.

2.44. Фирма, работающая в условиях совершенной конкуренции, владеет двумя заводами, расположенными в разных городах. Технологические процессы, используемые на этих заводах, различны, но обладают постоянной отдачей от масштаба. Средние затраты на производство каждой единицы продукции в долгосрочном периоде на первом заводе составляют c_1, а на втором заводе они равны c_2.

(а) Если известно, что $c_1 > c_2$, верно ли, что фирма закроет первый завод и будет производить весь объем продукции только на втором заводе? Объясните.

(б) Если известно, что $c_1 > c_2$, останется ли решение фирмы о распределении выпусков между заводами неизменным, если для выпуска положительного объема продукции на втором заводе фирма должна приобрести у городских властей лицензию размером F ($F > 0$, $F = \text{const}$), дающую право на производство этого продукта в городе? Объясните.

2.3. Предложение фирмы

2.45. Издержки фирмы, работающей на рынке совершенной конкуренции в краткосрочном периоде, имеют вид $c(y) = y^3 + 6y^2 + 30y + 8$.

(а) Найдите и изобразите графически средние совокупные, средние переменные и предельные краткосрочные издержки фирмы.

(б) При какой цене на свою продукцию фирма не будет нести убытки? При какой цене на свою продукцию фирма будет выпускать положительный объем продукции?

(в) Найдите функцию предложения фирмы и изобразите кривую предложения графически.

2.46.* Издержки фирмы, работающей в условиях совершенной конкуренции в долгосрочном периоде, имеют вид:

$$TC\,(y) = \begin{cases} y^2 + T, & y > 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

где T представляют собой затраты фирмы при входе в отрасль и являются за рассматриваемый период постоянной положительной величиной.

(а) Найдите и изобразите графически средние и предельные издержки фирмы.

(б) Найдите и изобразите графически функцию предложения фирмы в долгосрочном периоде.

2.47. Фирма работает в условиях совершенной конкуренции и производит продукт в соответствии с технологией $f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{1/3}$, где x_1 — количество капитала, которое использует фирма при производстве продукта, а x_2 — количество используемого труда. Цены факторов равны, соответственно, w_1 и w_2, продукт фирма продает на рынке совершенной конкуренции по цене p за единицу.

(а) Найдите объем произведенной продукции фирмы в долгосрочном периоде.

(б) Найдите функцию прибыли фирмы в долгосрочном периоде.

2.48. Предположим, продукт производится при использовании однофакторной технологии с постоянной отдачей от масштаба, причем из 100 ед. фактора производится 1 ед. продукта. Рыночная цена фактора равна 20 за единицу. Несколько лет назад фирма подписала контракт, по которому она может купить до 2000 ед. фактора по 10 за единицу. По условию контракта фирма может купить любое количество фактора, которое ей будет необходимо, но меньшее, чем 2000. Но фирма не может перепродать купленный по контракту фактор. Для того чтобы получить от правительства разрешение на производство продукта, предприятие должно заплатить 10 000 за лицензию на производство.

(а) Найдите и изобразите графически предельные издержки фирмы и ее средние издержки.

(б) Если цена единицы продукции фирмы 1600, сколько единиц продукции будет выпускать фирма? Какова при этом будет прибыль фирмы? Объясните.

(в) Правительство рассматривает проект увеличения стоимости лицензии на производство продукта до 11 000. Владелец фирмы полагает, что он закроет фирму, если новый проект правительства вступит в силу, а цена продукции не изменится. Прав ли он? Какова минимальная стоимость лицензии на право производства продукта, при введении которой владелец фирмы откажется от производства продукта?

(г) Юрист фирмы нашел в контракте изъян, благодаря которому владелец фирмы сможет продавать купленный по контракту фактор производства по рыночной цене. Если рыночная цена продукта равна 1600, какой объем товара будет производить фирма в этом случае? Какова будет при этом прибыль фирмы?

2.49. Предположим, что издержки фирмы в долгосрочном периоде имеют вид $C(y) = y^2/20 + y$.

(а) Найдите функцию предложения фирмы, работающей в условиях совершенной конкуренции, полагая, что цена продукции фирмы равна p.

(б) Для сокращения объемов выпускаемой продукции с целью сокращения вредных выбросов в атмосферу, связанных с его производством, правительство ввело в действие специальную программу, по которой фирма получает $(40 - y)/2$ единиц продукта из государственных запасов в виде натуральной дотации, где y — объем товара, который выпускает фирма. Если фирма намерена выпускать 40 или более единиц продукции, то дотацию она от государства не получает. Найдите функцию предложения фирмы при введении данной государственной программы? При каких рыночных ценах продукции дотационная политика государства достигнет цели сокращения выпуска данной фирмы?

(в) Пусть рыночная цена товара, выпускаемого предприятием, равна 8. Если вместо предлагаемой в п. (б) программы будет введен потоварный налог со ставкой t, которым облагается выпускаемая продукция данной фирмы, найдите величину потоварного налога, который позволит так же сократить выпуск фирмы, как и государственная дотация.

2.50. Фирма, максимизирующая свою прибыль, действует на рынке совершенной конкуренции. Пусть товар, производимый ею, является бесконечно делимым. Верны ли следующие утверждения:

(а) Если цена продукции превышает предельные издержки данной фирмы, ей следует увеличить выпуск своей продукции? Если **да**, то докажите, если **нет**, то приведите контрпример.

(б) Если средние переменные издержки при данном объеме выпускаемой продукции превышают ее рыночную цену, то фирма должна закрыть производство. Если **да**, то докажите, если **нет**, то приведите контрпример.

(в) Если фирма несет убытки, то ей следует прекратить производство. Если **да**, то докажите, если **нет**, то приведите контрпример.

2.51. Производственная функция фирмы, работающий в условиях совершенной конкуренции, имеет вид $f(x_1, x_2, x_3) = \min\{3x_1, x_2, 3x_3\}$. Фирма приобретает факторы производства по ценам w_1, w_2, w_3.

(а) Не проводя расчетов, укажите вид функциональной зависимости функции издержек фирмы в долгосрочном периоде.

(б) Найдите функцию издержек для данной технологии в долгосрочном периоде.

(в) Найдите долгосрочную функцию предложения фирмы и изобразите кривую предложения графически, если цена готовой продукции на конкурентном рынке равна p.

(г) Может ли максимальная прибыль данной фирмы в долгосрочном периоде быть равной 100 при какой-либо цене готовой продукции и ценах факторов производства? Если может, то укажите соответствующий вектор цен и объем выпускаемой продукции, если **нет**, то объясните почему.

2.52.* **По материалам [2.5].** Рассмотрите фирму, действующую в условиях совершенной конкуренции и производящую готовую продукцию, максимизируя свою прибыль. Пусть в краткосрочном периоде некоторые факторы производства фиксированы. Верны ли следующие утверждения:

(а) Фирма никогда не будет производить такой объем выпуска, при котором средние переменные издержки убывают.

(б) Фирма, никогда не будет производить такой объем выпуска, при котором средние краткосрочные издержки убывают.

(в) Фирма никогда не будет производить такой объем выпуска, при котором краткосрочные предельные издержки убывают.

2.4. Решения задач

2.11. (а) Выпишем задачу максимизации прибыли:

$$\max_{L\geqslant 0}\left(pf\left(L,\overline{K}\right)-wL-r\overline{K}\right).$$

Условие первого порядка для внутреннего решения задачи:

$$p\frac{\partial f\left(L^*,\overline{K}\right)}{\partial L}-w=0 \quad \text{или} \quad p\,MP_L\left(L^*,\overline{K}\right)-w=0.$$

Решение задачи производителя будет определяться условием первого порядка в силу строгой вогнутости целевой функции (по условию предельный продукт труда убывает, а издержки на труд линейны). Следовательно, условие первого порядка является необходимым и достаточным условием решения задачи производителя.

Приведенный ниже рис. 2.4 демонстрирует внутреннее решение данной задачи фирмы, если $f(0;\overline{K})=0$.

(б) Выпишем задачу производителя при введении субсидии:

$$\max_{L\geqslant 0}(pf(L,\overline{K})-(w-s)L-r\overline{K}).$$

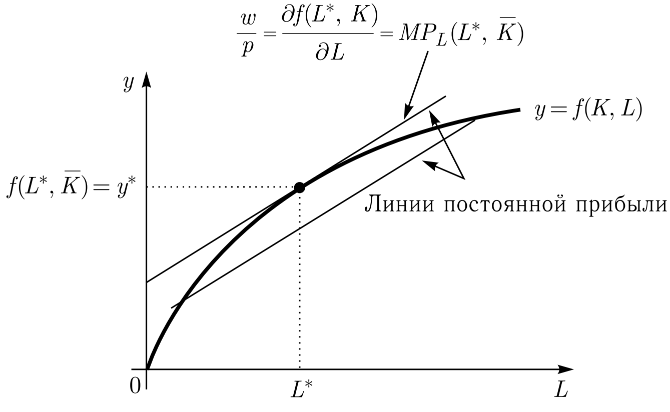

Рис. 2.4. Решение задачи максимизации прибыли

Условие первого порядка, как было показано выше, является необходимым и достаточным условием решения задачи производителя.

$$p\,\frac{\partial f\bigl(\widetilde{L},\overline{K}\bigr)}{\partial L} - (w-s) = 0, \quad \text{или} \quad p\,MP_L\bigl(\widetilde{L},\overline{K}\bigr) - (w-s) = 0.$$

Так как производственная функция характеризуется убывающим предельным продуктом труда, то в силу того, что $(w-s) < w$, имеем $MP_L\bigl(L^*,\overline{K}\bigr) > MP_L\bigl(\widetilde{L},\overline{K}\bigr)$, откуда получаем $L^* < \widetilde{L}$.

Таким образом, при субсидировании труда фирма увеличит использование этого фактора в данном случае.

В силу предпосылки о производственных процессах, состоящей в том, что увеличение использования каждого фактора не уменьшает выпуск продукции, имеем $y^* = f\bigl(L^*,\overline{K}\bigr) \leqslant f\bigl(\widetilde{L},\overline{K}\bigr) = \widetilde{y}$. Для случая производственной функции, которая проиллюстрирована на рис. 2.4, $y^* < \widetilde{y}$.

Найдем, как изменится прибыль фирмы:

$$\pi^* = py^* - wL^* - r\overline{K} \geqslant p\widetilde{y} - w\widetilde{L} - r\overline{K},$$

так как любая иная комбинация факторов производства, вместо той, которая при данных ценах максимизировала прибыль фирмы, будет давать фирме не бóльшую прибыль, чем максимальная.

По той же причине

$$\widetilde{\pi} = p\widetilde{y} - (w-s)\widetilde{L} - r\overline{K} \geqslant py^* - (w-s)L^* - r\overline{K}.$$

Заметим, что

$$\widetilde{\pi} = p\widetilde{y} - (w-s)\widetilde{L} - r\overline{K} \geqslant py^* - (w-s)L^* - r\overline{K} > py^* - wL^* - r\overline{K} = \pi^*.$$

Таким образом, получили $\widetilde{\pi} > \pi^*$. Проиллюстрируем полученные результаты.

Графически сравнить прибыли в каждой ценовой ситуации можно на оси выпусков, проиллюстрируем это на рис. 2.5 ниже.

Линии одинаковой прибыли в разной ценовой ситуации:

$$py - wL - r\overline{K} = \pi^* = py^* - wL^* - r\overline{K},$$

$$py - wL - r\overline{K} = \widetilde{\pi} = p\widetilde{y} - (w-s)\widetilde{L} - r\overline{K}.$$

Отсюда, сравнивая значения выпусков при $L = 0$, получаем $\widetilde{\pi} > \pi^*$.

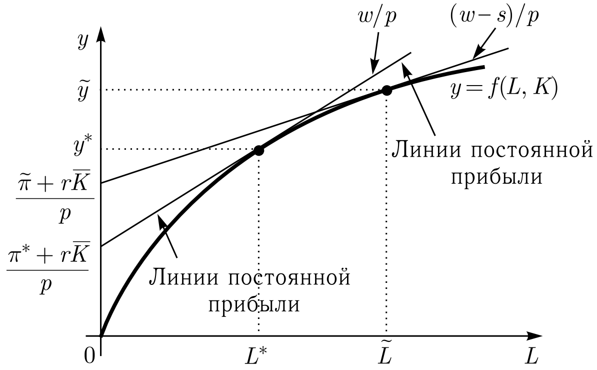

Рис. 2.5. Введение субсидии

2.14. Фирма максимизирует прибыль, воспринимает цены как заданные. Рассмотрим, как изменится выбор фирмы при изменении цены продукта. Будем полагать, что фирма использует два фактора x_1 и x_2 для производства продукта y. Предположим, что цена продукта увеличилась: $p^0 < p^1$. В начальной ценовой ситуации фирма, максимизируя свою прибыль, производит y^0 единиц выпуска и использует набор (x_1^0, x_2^0) факторов производства. В другой ценовой ситуации фирма, максимизируя свою прибыль, производит y^1 единиц выпуска и использует набор (x_1^1, x_2^1) факторов производства. Полагаем также, что цены факторов не изменялись, так как нам необходимо выделить реакцию фирмы на изменение цены продукта. Тогда $p^0y^0 - w_1^0x_1^0 - w_2^0x_2^0 \geqslant p^0y^1 - w_1^0x_1^1 - w_2^0x_2^1$ (поскольку любой другой выбор выпуска и факторов не может принести фирме бо́льшую прибыль), $p^1y^1 - w_1^0x_1^1 - w_2^0x_2^1 \geqslant p^1y^0 - w_1^0x_1^0 - w_2^0x_2^0$ (аналогично).

Сложив два неравенства, получаем

$$(p^0 - p^1)(y^0 - y^1) \geqslant 0 \Rightarrow \text{ если } (p^0 - p^1) < 0, \text{ то } (y^0 - y^1) \leqslant 0.$$

Таким образом, при увеличении цены продукта выпуск продукта не уменьшится. Тогда можно сравнить выручку фирмы в предложенных ценовых ситуациях: $p^0y^0 \leqslant p^1y^1$. Следовательно, выручка фирмы не убывает с ростом цены продукта.

Очевидно, что в силу приведенного в решении доказательства, утверждение будет справедливо для фирмы производящей любое количество продуктов и использующей любое количество факторов производства.

2.24. (а) Уравнение изокосты (линии одинаковых расходов) имеет вид $c = wL + rK$. В координатах факторов производства изокоста представляет собой прямую линию с тангенсом угла наклона, равным $-w/r$ (будем говорить «с наклоном $-w/r$»), причем стоит заметить, что изокоста, соответствующая большим расходам, лежит дальше от начала координат, чем изокоста, соответствующая меньшим расходам. Проиллюстрируем сказанное на рис. 2.6.

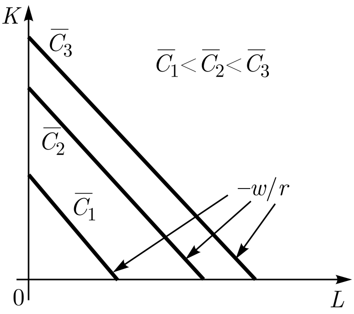

Рис. 2.6. Линии одинаковых расходов

(б) Технология производства описывается функцией Кобба–Дугласа. Изокванта, соответствующая y единиц выпуска, представляет собой совокупность наборов факторов производства, при использовании которых производится y единиц продукта, причем $y = 4L^{1/2}K^{1/2}$. В координатах факторов производства изокванта для данной технологии, соответствующая y единиц выпуска, описывается уравнением $K = y^2/(16L)$. Заметим, что чем больше уровень выпуска, тем дальше находится изокванта от начала координат.

Выпишем задачу минимизации издержек:

$$\begin{cases} wL + rK \to \min\limits_{L,K \geqslant 0}, \\ y = 4\,L^{1/2}K^{1/2}. \end{cases}$$

Выпишем Лагранжиан для данной оптимизационной задачи:

$$\mathcal{L}\,(L, K, \lambda) = wL + rK + \lambda\big(y - 4\,L^{1/2}K^{1/2}\big).$$

Заметим сразу, что $L = 0$ или $K = 0$ не может быть решением поставленной задачи, так как в этом случае невозможно достичь выпуска $y > 0$.

Условия первого порядка для внутреннего решения имеют вид:

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\widetilde{L}, \widetilde{K}, \lambda)}{\partial L} = w - 2\lambda\,\widetilde{L}^{-1/2}\widetilde{K}^{1/2} = 0,$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}(\widetilde{L}, \widetilde{K}, \lambda)}{\partial K} = r - 2\lambda\,\widetilde{L}^{1/2}\widetilde{K}^{-1/2} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}(\widetilde{L}, \widetilde{K}, \lambda)}{\partial \lambda} = y - 4\,\widetilde{L}^{1/2}\widetilde{K}^{1/2} = 0,$$

откуда имеем минимизирующее издержки отношение капитала к труду:

$$\widetilde{K}/\widetilde{L} = w/r.$$

Полученное соотношение не зависит от количества выпускаемой продукции в силу того, что технология представлена однородной производственной функцией. В данном случае технология представлена производственной функцией первой степени однородности. Изобразим полученный результат графически на рис. 2.7.

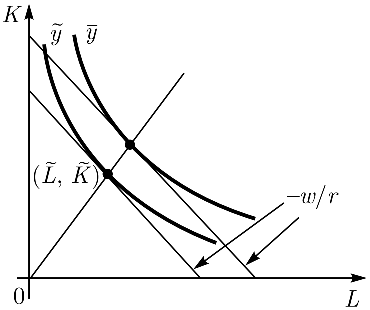

Рис. 2.7. Оптимальное соотношение факторов

Наименьших затрат при заданных ценах факторов производства и уровне выпуска фирма сможет достичь в точке, где изокоста коснется соответствующей изокванты. Следовательно, наклон изокосты в точке минимума издержек должен быть равен наклону изокванты. Так как наклон изокванты в любой точке характеризуется предельной нормой технологического замещения факторов производства, то имеем

$$MRTS_{LK}(\widetilde{L}, \widetilde{K}) = \widetilde{K}/\widetilde{L} = w/r.$$

В силу однородности производственной функции наклон любой изокванты вдоль данного луча, выходящего из начала координат, одинаков и зависит только от соотношения затрачиваемых факторов в этой точке, т. е. от наклона данного луча. Так как цены факторов остаются постоянные, то минимизирующее издержки отношение капитала к труду не зависит от количества выпускаемой продукции.

(в) Зная минимизирующее издержки отношение капитала к труду, мы сможем найти условный спрос на факторы производства. Условием является количество выпускаемой продукции, которое необходимо получить с минимальными издержками. Учитывая условия первого порядка задачи фирмы, минимизирующей издержки, выписанные в п. (б), имеем

$$\begin{cases} \widetilde{K}/\widetilde{L} = w/r, \\ y = 4\widetilde{L}^{1/2}\widetilde{K}^{1/2}, \end{cases}$$

откуда находим условный спрос на факторы:

$$\widetilde{L}\,(y, w, r) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{r}{w}}\;y, \qquad \widetilde{K}\,(y, w, r) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{w}{r}}\;y.$$

(г) Найдем теперь функцию издержек фирмы в долгосрочном периоде:

$$C\,(y, w, r) = w\,\widetilde{L}\,(y, w, r) + r\,\widetilde{K}\,(y, w, r) = \frac{1}{2}\,y\,\sqrt{wr}\,.$$

Обратим внимание на то, что издержки прямо пропорциональны выпуску в силу постоянной отдачи от масштаба данной технологии.

(д) Найдем средние и предельные издержки фирмы в долгосрочном периоде:

$$AC\,(y) = \frac{1}{2}\sqrt{wr}\,, \qquad MC\,(y) = \frac{1}{2}\sqrt{wr}\,.$$

Заметим, что средние и предельные издержки фирмы постоянны при неизменных ценах факторов производства и равны. Объясняется данный факт тем, что при постоянной отдаче от масштаба издержки фирмы линейно зависят от количества выпускаемой продукции. Изобразим полученный результат графически на рис. 2.8.

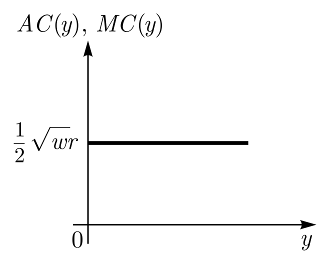

Рис. 2.8. Средние и предельные издержки

2.36. При увеличении количества факторов в четыре раза выпуск возрос только в два раза. Это дает возможность предположить, что, по крайней мере на некотором участке, технология характеризуется убывающей отдачей от масштаба. Заданная же функция издержек такова, что средние издержки $AC\,(w_1, w_2, y) = c\,(w_1, w_2, y)/y = 2w_1^{0,5}w_2^{0,5}/\sqrt{y}$ при любом уровне выпуска убывают с ростом выпуска. Это свидетельствует о том, что такая функция издержек может быть у фирмы, технология которой характеризуется возрастающей отдачей от масштаба. Следовательно, эта функция издержек не может быть функцией издержек рассматриваемой фирмы.

2.37. (а) Участок убывания кривой функции средних долгосрочных издержек ($LRATC$) при росте выпуска может отражать возрастающую отдачу от масштаба (издержки растут медленнее выпуска; для технологий, представленных однородными производственными функциями, например, для увеличения выпуска в t раз необходимо увеличить расход ресурсов менее, чем в t раз) а участок возрастания кривой средних долгосрочных издержек при росте выпуска может отражать убывающую отдачу от масштаба (издержки растут быстрее выпуска; для технологий, представленных однородными производственными функциями, например, для увеличения выпуска в t раз, необходимо увеличить расход ресурсов менее, чем в t раз).

U-образная форма кривой долгосрочных средних издержек, кроме описанных выше факторов, может быть следствием того, что технология фирмы, работающей в долгосрочном периоде, обладает убывающей отдачей от масштаба, и издержки фирмы при нулевом выпуске равны нулю, но при положительном выпуске фирма несет издержки, связанные со входом в отрасль, т. е. функция долгосрочных издержек имеет вид $LRTC\,(y) = C(y) + T,\ y > 0,\ LRTC(0) = 0$, где $T = \mathrm{const} > 0$ является величиной расходов фирмы, связанных со входом в отрасль. Тогда участок убывания средних долгосрочных издержек при малом выпуске объясняется доминирующей ролью составляющей T/y, а участок возрастания средних долгосрочных издержек при больших объемах выпускаемой продукции объясняется доминирующей ролью составляющей $C(y)/y$, которая в силу убывающей отдачи от масштаба является возрастающей функцией.

(б) Кривая долгосрочных средних издержек является огибающей кривых краткосрочных средних издержек. Каждая кривая краткосрочных средних издержек касается кривой долгосрочных средних издержек при таком уровне выпуска (или имеет с ней общие точки), при котором количество фиксированного фактора, которое используется в краткосрочном периоде, является оптимальным (минимизирующим издержки) для производства этого уровня выпуска в долгосрочном периоде. При данном количестве фиксированного фактора $SRATC(y) > LRATC(y)$ при любом другом уровне выпуска [1.6; с. 252–255].

2.38. (а) Средние переменные издержки для двухфакторной технологии в краткосрочном периоде имеют вид $AVC(w,q) \equiv \equiv VC(q)/q = w_1 x_1(q)/q$, где $x_1(q)$ — функция условного спроса на переменный фактор производства.

Нас интересует поведение кривой средних переменных издержек, следовательно, нужно определить, если это возможно, знак производной функции $AVC(w,q)$:

$$AVC'_q = \frac{qVC' - VC}{q^2} = \frac{qw_1(x_1)'_q - w_1 x_1(q)}{q^2} = \frac{w_1}{q}\left((x_1)'_q - \frac{x_1(q)}{q}\right),$$

где

$$(x_1)'_q = \frac{1}{MP_1}, \qquad \frac{x_1(q)}{q} = \frac{1}{AP_1}.$$

Следовательно, $AVC'_q = w_1/q\,(1/(MP_1) - 1/(AP_1))$.

Таким образом, на участке, где предельная и средняя производительности переменного фактора равны, средние переменные издержки постоянны, и соответствующая кривая горизонтальна в осях «выпуск — средние издержки». На участке, где предельный продукт (предельная производительность) переменного фактора превышает средний продукт этого фактора, средние переменные издержки убывают, и соответствующая кривая имеет отрицательный наклон. На участке, где предельный продукт переменного фактора меньше среднего продукта этого фактора, средние переменные издержки возрастают, и соответствующая кривая имеет положительный наклон.

(б) Заметим сразу, что в силу монотонности производственной функции и $\overline{x}_2 > 0$, имеем $f(x_1, \overline{x}_2) > 0$ для любого $x_1 > 0$.

- Если $f(x_1, \overline{x}_2)$ представляет собой линейную зависимость от переменного фактора для любого x_1 (постоянная отдача на переменный фактор), то
  1) при $f(0, \overline{x}_2) = 0$ имеем $MP_1(x_1, \overline{x}_2) = AP_1(x_1, \overline{x}_2) = = \text{const}$ для любого $x_1 > 0$;
  2) при $f(0, \overline{x}_2) > 0$ имеем $MP_1(x_1, \overline{x}_2) = \text{const} < < AP_1(x_1, \overline{x}_2)$ для любого $x_1 > 0$.

Для графического сравнения средней и предельной производительности переменного фактора вспомним, что графически тангенс угла наклона касательной к графику производственной функции $f(x_1, \overline{x}_2)$ в любой точке x_1 есть предельный продукт переменного фактора, а наклон секущей, проведенной из начала

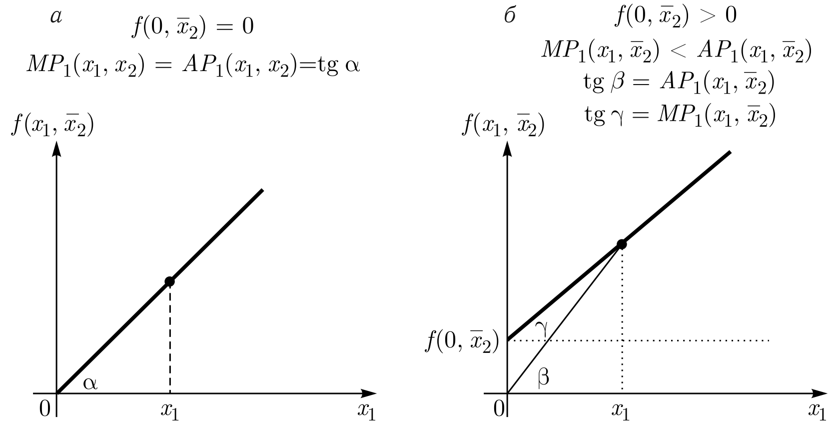

Рис. 2.9. Сравнение среднего (*а*) и предельного (*б*) продуктов переменного фактора для случая линейной зависимости от переменного фактора

координат к графику функции $f(x_1, \overline{x}_2)$ в точке x_1, есть средний продукт переменного фактора (рис. 2.9).

- Если $f(x_1, \overline{x}_2)$ строго вогнута по x_1 для любого x_1 (убывающая отдача на переменный фактор), то при $f(0, \overline{x}_2) = 0$ и $f(0, \overline{x}_2) > 0$ имеем $MP_1(x_1, \overline{x}_2) < AP_1(x_1, \overline{x}_2)$ для любого $x_1 > 0$ (рис. 2.10).

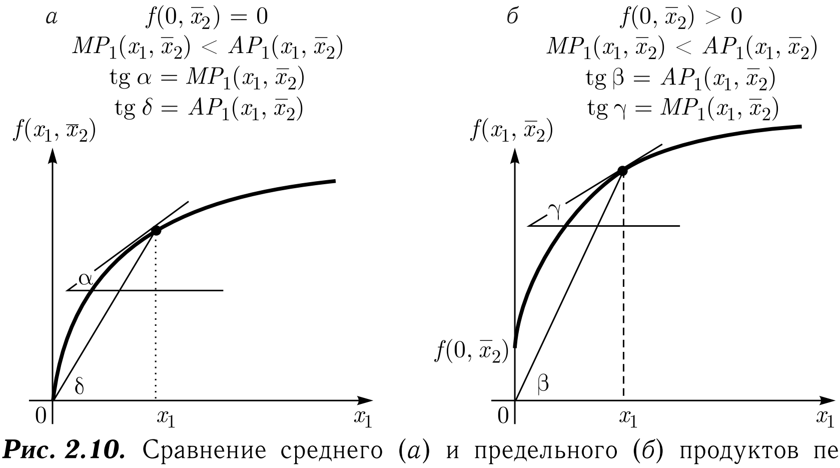

Рис. 2.10. Сравнение среднего (*а*) и предельного (*б*) продуктов переменного фактора для случая вогнутой функции по переменному фактору

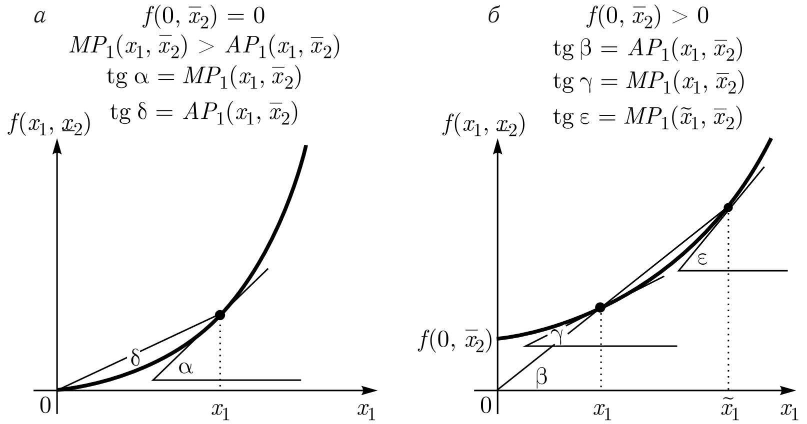

Рис. 2.11. Сравнение среднего (*а*) и предельного (*б*) продуктов переменного фактора для случая выпуклой функции по переменному фактору

- Если $f(x_1, \overline{x}_2)$ строго выпукла по x_1 для любого x_1, (возрастающая отдача на переменный фактор), то
  1) при $f(0, \overline{x}_2) = 0$ имеем $MP_1(x_1, \overline{x}_2) > AP_1(x_1, \overline{x}_2)$ для любого $x_1 > 0$ (рис. 2.11);
  2) при $f(0, \overline{x}_2) > 0$ однозначное соотношение между средней и предельной производительностью переменного фактора для произвольной технологии не определяется и будет зависеть непосредственно от конкретной функциональной зависимости, характеризующей технологический процесс.

Доказать предложенные факты аналитически можно, используя уравнение касательной к графику функции $f(x_1, \overline{x}_2)$ в точке $x_1^0 = 0$.

(в) Поведение кривой средних совокупных издержек будет определяться поведением кривой средних переменных издержек и кривой средних фиксированных издержек, поскольку $ATC(w, q) = AVC(w, q) + AFC(w, q)$.

Вне зависимости от технологии кривая средних фиксированных издержек $AFC(w, q)$ представляет собой гиперболу, поскольку $AFC(w, q) = w_2\overline{x}_2/q$, т. е. графически представлена убывающей по q функцией.

Таким образом, имеем:

- Если $f(x_1, \overline{x}_2)$ представляет собой линейную зависимость от переменного фактора (постоянная отдача на переменный фактор) для любого x_1 и $f(0, \overline{x}_2) = 0$, то $ATC(w, q)$ является убывающей функцией, как сумма постоянной и убывающей функции.

Если $f(x_1, \overline{x}_2)$ представляет собой линейную зависимость от переменного фактора (постоянная отдача на переменный фактор) для любого x_1 и $f(0, \overline{x}_2) > 0$, то функция $ATC(w, q)$ убывает до $f(0, \overline{x}_2) > 0$, поскольку переменный фактор не используется, пока $q \leqslant f(0, \overline{x}_2)$, а затем будет определяться доминированием убывающей функции $AFC(w, q)$ **или** возрастающей функции $AVC(w, q)$. Аналитически можно показать (предоставим эту возможность читателю), что при линейной зависимости функции $f(x_1, \overline{x}_2)$ от переменного фактора и $f(0, \overline{x}_2) > 0$ функция $AVC(w, q)$ является возрастающей и ограниченной сверху, а потому при $q > f(0, \overline{x}_2)$ поведение кривой $ATC(w, q)$ будет определяться доминированием функции $AFC(w, q)$, т. е. при данных условиях кривая $ATC(w, q)$ является убывающей при любых значениях объема выпускаемой продукции.

- Если $f(x_1, \overline{x}_2)$ строго вогнута по x_1 (убывающая отдача на переменный фактор) для любого x_1 и $f(0, \overline{x}_2) > 0$ или функция $ATC(w, q)$ убывает до $f(0, \overline{x}_2) > 0$, поскольку переменный фактор не используется, пока $q \leqslant f(0, \overline{x}_2)$, а затем будет определяться доминированием убывающей функции $AFC(w, q)$ **или** возрастающей функции $AVC(w, q)$. Аналитически можно показать (предоставим эту возможность читателю), что для строго вогнутой по переменному фактору функции $f(x_1, \overline{x}_2)$ и $f(0, \overline{x}_2) > 0$ функция $AVC(w, q)$ является неограниченно возрастающей, а потому при больших объемах выпускаемой продукции поведение кривой $ATC(w, q)$ будет определяться доминированием функции $AVC(w, q)$, т. е. при данных условиях кривая $ATC(w, q)$ будет иметь U-образную форму.

Поведение кривой ATC для строго вогнутой по x_1 функции $f(x_1; \overline{x}_2)$ и $f(0; \overline{x}_2) = 0$ предлагаем читателю рассмотреть самостоятельно.

- Если $f(x_1, \overline{x}_2)$ строго выпукла по x_1 (возрастающая отдача на переменный фактор) для любого x_1 и $f(0, \overline{x}_2) = 0$, то $ATC(w, q)$ является убывающей функцией, как сумма двух убывающих функций.

Если $f(x_1, \overline{x}_2)$ строго выпукла по x_1 (возрастающая отдача на переменный фактор) для любого x_1 и $f(0, \overline{x}_2) > 0$, то невозможно сделать однозначный вывод о поведении кривой $ATC(w, q)$, и зависит непосредственно от конкретной функциональной зависимости, характеризующей технологический процесс.

2.40. (а) Поскольку в краткосрочном периоде для двухфакторной технологии условный спрос на переменный фактор определяется однозначно объемом выпускаемой продукции и объемом зафиксированного фактора, имеем:
для завода А:

$$K_{\mathsf{A}} = 4, \quad L_{\mathsf{A}}(q_{\mathsf{A}}) = \left(\frac{q_{\mathsf{A}}}{2}\right)^2, \quad L_{\mathsf{A}}(10) = 25,$$

$$STC_{\mathsf{A}}(q_{\mathsf{A}}) = \frac{q_{\mathsf{A}}^2}{4} + 16, \quad STC_{\mathsf{A}}(10) = 41;$$

для завода В:

$$K_{\mathsf{B}} = 4, \quad L_{\mathsf{B}}(q_{\mathsf{B}}) = \begin{cases} 0, & q_{\mathsf{B}} \leqslant 2, \\ (q_{\mathsf{B}} - 2)^2, & q_{\mathsf{B}} > 2, \end{cases} \quad L_{\mathsf{B}}(10) = 64,$$

$$STC_{\mathsf{B}}(q_{\mathsf{B}}) = \begin{cases} 16, & q_{\mathsf{B}} \leqslant 2, \\ (q_{\mathsf{B}} - 2)^2 + 16, & q_{\mathsf{B}} > 2, \end{cases} \quad STC_{\mathsf{B}}(10) = 80.$$

(б) Неверно. Если бы весь объем, составляющий 10 ед. продукции, был выпущен на заводе А, то издержки фирмы составили бы 57. Приведем пример, когда фирма может снизить издержки, по сравнению с указанным в п. (б) распределением выпусков: пусть на заводе А будет выпущено 8 ед. продукции, а на заводе В будет выпущено 2 ед., тогда издержки на заводе А составят 32, на заводе В — 16. Совокупные издержки фирмы в этом случае снизились на 11. Таким образом, нерационально выпускать все 10 ед. продукции на заводе А.

2.42. (а) Поскольку альтернативные издержки использования помещения равны нулю, а любые формы оплаты использования этого помещения отсутствуют, все затраты фирмы на производство являются переменными. При данных затратах фирма будет максимизировать прибыль, если сможет выпускать максимально возможный выпуск. Поэтому объем производства будет являться решением следующей задачи, где учтено, что объем помещения фиксирован и равен 1:

$$\begin{cases} LR \to \max\limits_{L,R\geqslant 0}, \\ wL + qR = 32, \end{cases}$$

для которой возможно только внутреннее решение, которое будет определяться условиями первого порядка, необходимыми и достаточными (предлагаем читателям убедиться в этом самостоятельно):

$$\begin{cases} MRTS_{LR}(\widetilde{L}, \widetilde{R}) = w/q, \\ w\widetilde{L} + q\widetilde{R} = 32, \end{cases}$$

откуда $(\widetilde{L}, \widetilde{R}) = (8, 8)$ и объем выпускаемой глины $y = 8$. Покажем выбор фирмы рис. 2.12.

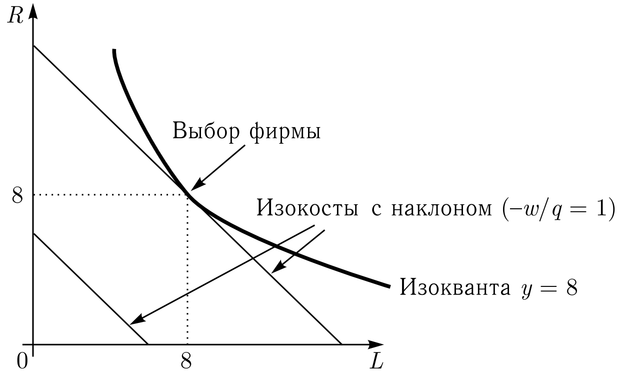

Рис. 2.12. Выбор фирмы

(б) Уравнения изокост:

$$\begin{aligned} wL + qR &= \text{const}, \quad R < 8, \\ 4wL + qR &= \text{const}, \quad R \geqslant 8. \end{aligned}$$

Представим их на рис. 2.13.

(в) Выбор фирмы после изменения цен является решением задачи:

$$\begin{cases} \begin{cases} wL + qR \to \min\limits_{R\leqslant 8}, \\ 4wL + qR \to \min\limits_{R>8}, \end{cases} \\ \sqrt{LR} = 8. \end{cases}$$

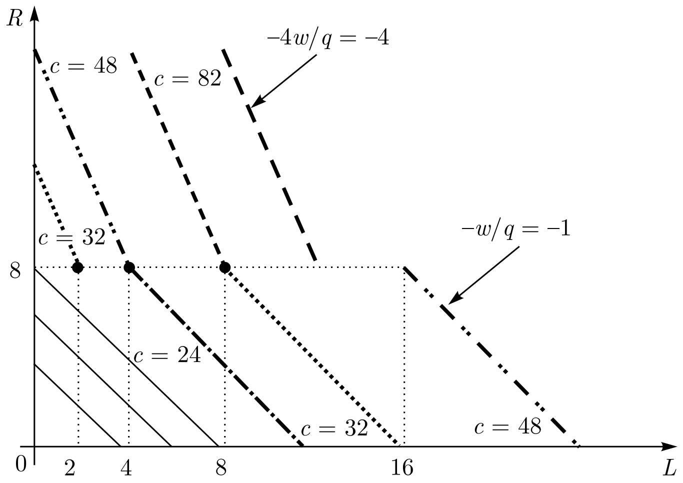

Рис. 2.13. Изокосты фирмы

Легко убедиться, что условие касания изокосты и изокванты не является решением поставленной задачи из-за отсутствия непрерывности в изокостах. В точке $(L^*, R^*) = (4, 16)$, где изокоста касается изокванты, издержки фирмы равны 64, в то время как увеличение использование труда на малую величину и снижение использование сырья на малую величину при сохранении выпуска неизменным лишь незначительно увеличат издержки фирмы по сравнению с исходной ситуацией. Минимум затрат в этом случае недостижим в силу отсутствия непрерывности и «скачка» значения издержек при использовании сырья в объеме 8 ед. Проиллюстрируем это на рис. 2.14.

2.43. (а) Представим сначала графическое решение поставленной задачи. Для этого изобразим три графика (рис. 2.15), совмещенных горизонтально, где по горизонтали будет отложен объем выпускаемой продукции (на первом, втором заводах и совокупный выпуск соответственно), а по вертикальной оси отложим величины предельных издержек. На первом и втором графиках изобразим кривые предельных издержек каждого из заводов (в данном случае они представлены прямыми линиями в силу вида функции переменных издержек), а на третьем графике изобразим кривую, соответствующую «горизонтальной сумме» кривых предельных издержек производства в городах А и В. Поскольку при положительных объемах выпуска в обоих городах

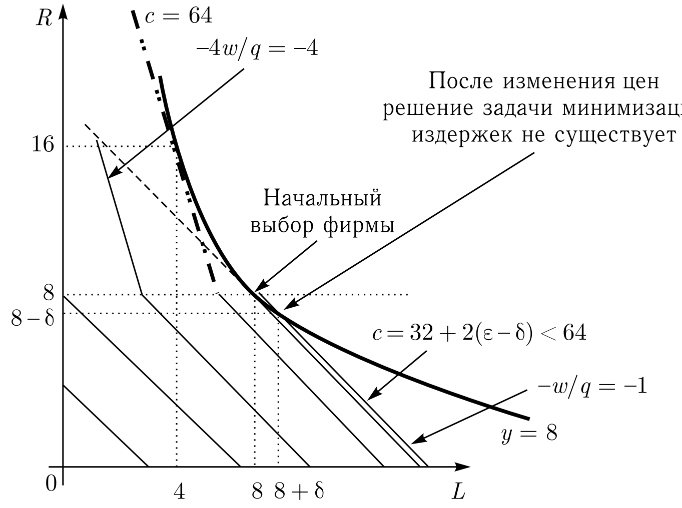

Рис. 2.14. Выбор фирмы после изменения цен

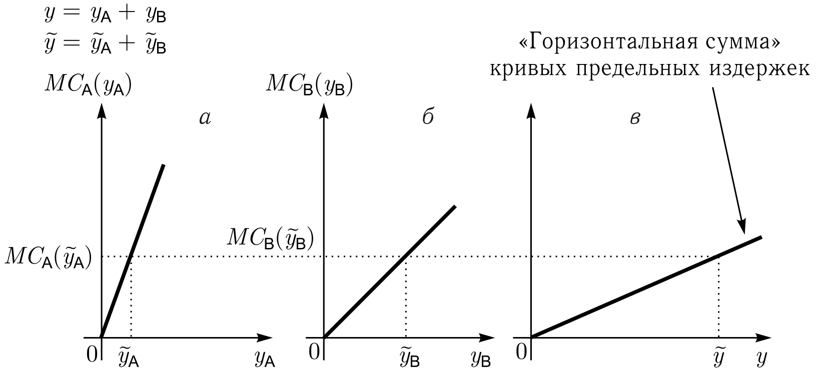

Рис. 2.15. Распределение выпуска фирмы между заводами (*а* — первого, *б* — второго, *в* — совокупный выпуск)

выпуск будет распределен таким образом, чтобы предельные издержки производства этих объемов были равны, то графически на кривой «горизонтальной суммы» предельных издержек мы находим точку, соответствующую желаемому совокупному объему выпускаемой продукции. Проведя от нее горизонтальную прямую влево до пересечения с графиками функций предельных издержек каждого города, мы находим объемы выпускаемой продукции в этих городах. Таким образом, следуя приведенному примеру графического построения, можно увидеть, что если желаемый совокупный объем выпуска фирмы составляет $\widetilde{y}$, то в первом городе объем выпуска составит $\widetilde{y}_\mathsf{A}$, а во втором городе $\widetilde{y}_\mathsf{B}$. При этом при данных объемах выпуска предельные издержки производства в городах будут равны, следовательно, в силу возрастания предельных издержек любое перераспределение выпусков приведет лишь к повышению совокупных издержек фирмы.

Используя графики, можно заметить, что в силу соотношений между параметрами α и β доля совокупного выпуска в городе B будет выше, чем доля совокупного выпуска в городе A.

Теперь найдем распределение совокупного объема выпускаемой продукции между городами A и B и функцию совокупных издержек фирмы аналитически. Для этого решим задачу минимизации издержек фирмы:

$$\begin{cases} TC_\mathsf{A}(y_\mathsf{A}) + TC_\mathsf{B}(y_\mathsf{B}) \to \min\limits_{y_\mathsf{A}, y_\mathsf{B} \geqslant 0}, \\ y_\mathsf{A} + y_\mathsf{B} = y, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha y_\mathsf{A}^2 + F_\mathsf{A} + \beta y_\mathsf{B}^2 + F_\mathsf{B} \to \min\limits_{y_\mathsf{A}, y_\mathsf{B} \geqslant 0}, \\ y_\mathsf{A} + y_\mathsf{B} = y. \end{cases}$$

Условия первого порядка поставленной задачи для внутреннего решения имеют вид:

$$\begin{cases} MC_\mathsf{A}(\widetilde{y}_\mathsf{A}) = MC_\mathsf{B}(\widetilde{y}_\mathsf{B}), \\ \widetilde{y}_\mathsf{A} + \widetilde{y}_\mathsf{B} = y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha\widetilde{y}_\mathsf{A} = 2\beta\widetilde{y}_\mathsf{B}, \\ \widetilde{y}_\mathsf{A} + \widetilde{y}_\mathsf{B} = y. \end{cases}$$

Отсюда для внутреннего решения находим

$$\widetilde{y}_\mathsf{A} = y \cdot \beta/(\alpha + \beta), \qquad \widetilde{y}_\mathsf{B} = y \cdot \alpha/(\alpha + \beta).$$

Поскольку $\beta/(\alpha + \beta) < 1$ и $\alpha/(\alpha + \beta) < 1$ для любого $\alpha, \beta > 0$, то распределение выпусков, при котором в одном из городов не выпускается продукция, не является оптимальным для фирмы. Поэтому в городе A будет выпускаться доля совокупного выпуска, равная $\beta/(\alpha + \beta)$, в городе B будет выпускаться доля совокупного выпуска, равная $\alpha/(\alpha + \beta)$, и функция совокупных издержек фирмы имеет вид $TC(y) = y^2 \cdot \alpha\beta/(\alpha + \beta) + F_\mathsf{A} + F_\mathsf{B}$.

Заметим также, что в силу $\alpha > \beta$ в городе A будет выпускаться меньший объем продукции, чем в городе B.

(б) В городе B будет выпускаться положительный объем продукции до тех пор, пока совокупные издержки фирмы при покупке лицензии и производстве в городе B будут не больше, чем при отказе производства в этом городе:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}y^2 + F_{\mathsf{A}} + F_{\mathsf{B}} + \widetilde{F} \leqslant \alpha y^2 + F_{\mathsf{A}} + F_{\mathsf{B}},$$

откуда имеем $\widetilde{F} \leqslant y^2 \cdot \alpha^2/(\alpha+\beta)$.

2.46. (а) Обратим внимание на то, что все издержки фирмы — переменные, так как при $y = 0$ имеем $TC\,(y) = 0$.

Найдем предельные и средние издержки фирмы и изобразим кривые издержек графически (рис. 2.16):

$$MC\,(y) = 2y, \qquad y \geqslant 0,$$
$$AC\,(y) = y + T/y, \quad y > 0.$$

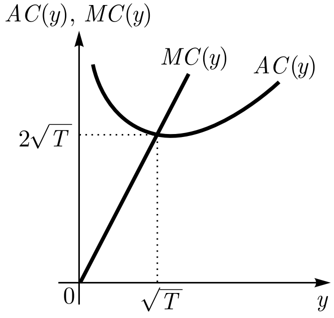

Рис. 2.16. Предельные и средние издержки фирмы

(б) Найдем предложение фирмы. Для этого решим задачу максимизации прибыли фирмы:

$$py - TC\,(y) \to \max_{y\geqslant 0}, \text{ или в данном случае: } py - y^2 - T \to \max_{y>0}.$$

Отметим, что при нулевом выпуске фирмы она получает нулевую прибыль, которая, возможно, при ненулевых ценах на продукцию фирмы не является максимальной. Поэтому будем решать задачу максимизации прибыли при положительном выпуске фирмы.

Поскольку в условиях совершенной конкуренции фирма воспринимает цену производимого продукта как заданную, то условия первого порядка имеют вид:

$$p = MC\,(y), \text{ или в нашем случае: } p = 2y.$$

Обратим внимание на то, что условия первого порядка являются необходимыми и достаточными, так как целевая функция задачи максимизации прибыли фирмы строго вогнута: $(py - y^2 - T)'' < 0$.

В долгосрочном периоде фирма будет работать на рынке совершенной конкуренции, только если цена продукта превышает средние издержки фирмы. Иначе фирма несет убытки и ей выгоднее прекратить свою деятельность, получая при этом нулевую прибыль. В данном случае фирма будет работать, только если цена продукта будет не менее $2\sqrt{T}$. При $p = 2\sqrt{T}$ фирме безразлично, выпускать $\sqrt{T}$ единиц продукта или уйти с рынка. В обоих случаях прибыль фирмы будет равна нулю. Будем считать, что, если фирме безразлично, уйти с рынка или выпускать продукцию, получая такую же прибыль, как при бездействии, то фирма работает в отрасли.

Таким образом, функция предложения фирмы имеет вид:

$$y\,(p) = \begin{cases} p/2, & p \geqslant 2\sqrt{T}\,, \\ 0, & p < 2\sqrt{T}\,. \end{cases}$$

Изобразим графически кривую предложения фирмы (рис. 2.17).

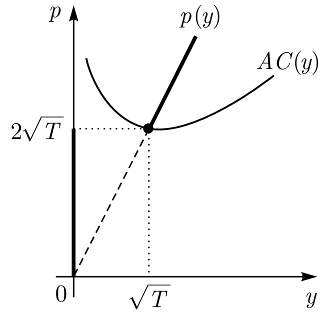

Рис. 2.17. Предложение фирмы

2.52. Заметим, что в условии краткосрочного периода предложение фирмы должно удовлетворять следующим правилам:

1) $p = MC\,(y)$;

2) при данном объеме выпускаемой продукции предельные издержки фирмы не убывают;

3) $p \geqslant \min AVC(\overline{y})$.

(a) Утверждение верно.

В точке, $y > 0$, где средние переменные издержки убывают, предельные издержки меньше средних переменных издержек. Покажем это.

Пусть при некоторых значениях объема y выпускаемой продукции $AVC\,(y)$ убывают, значит, $AVC'\,(y) = (VC\,(y)/y)' < 0$, или

$$AVC'\,(y) = \left(\frac{VC\,(y)}{y}\right)' = \frac{y \cdot VC'\,(y) - VC\,(y)}{y^2} = \\ = \frac{1}{y}\,(MC\,(y) - AVC\,(y)) < 0.$$

Следовательно, $MC\,(\overline{y}) < AVC\,(\overline{y})$.

Так как максимизирующая прибыль фирма работает в точке, где $p = MC\,(y)$ и MC не убывают, то $p < AVC\,(y)$. Таким образом, нарушается правило (3) максимизации прибыли в краткосрочном периоде $p \geqslant \min AVC(\overline{y})$, и фирма никогда не будет производить в точке, где средние переменные издержки убывают.

(б) Утверждение неверно.

Для приведения контрпримера заметим, что когда средние издержки убывают, предельные издержки меньше средних издержек (доказывается аналогично п. (а) данной задачи), однако технология производства может быть такова, что в точке $\widetilde{y}$, где предельные издержки меньше средних издержек, предельные издержки могут возрастать и быть больше средних переменных издержек. Приведем контрпример (рис. 2.18).

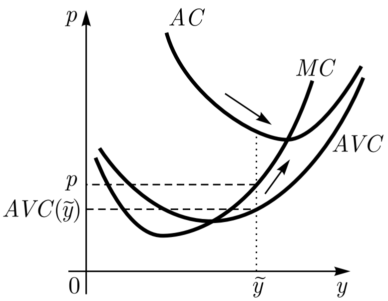

Рис. 2.18. Контрпример

В данном случае все условия максимизации прибыли в краткосрочном периоде выполнены:

1) $p = MC\,(\widetilde{y})$;

2) в точке $\widetilde{y}$ предельные издержки фирмы возрастают;

3) $p > \min AVC(y)$;

Поэтому утверждение неверно.

(в) Утверждение верно. Нарушается правило (2), предельные издержки в точке выбора фирмы, максимизирующей прибыль, должны не убывать.

2.5. Ответы и подсказки

2.1. **(а)** $MP_1 = \alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}$, $MP_2 = \beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}$. Изменение предельного продукта первого фактора при изменении объемов использования первого фактора не зависит от параметра β. Предельный продукт первого фактора растет с ростом объемов его использования при $\alpha > 1$. **(б)** $MRTS_{12}\,(x_1, x_2) = \alpha x_2/(\beta x_2)$. При любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Факторы являются замещаемыми, но не являются абсолютными заменителями. **(в)** Если $\alpha + \beta > 1$, то данная технология демонстрирует возрастающую отдачу от масштаба. Если $\alpha + \beta = 1$, то имеем постоянную отдачу, если $\alpha + \beta < 1$, то — убывающую. **(г)** Да, может, если $\alpha + \beta > 1$, $\alpha < 1$, $\beta < 1$. **2.2.** Возможные причины: менеджменту фирмы становится труднее управлять технологическим процессом при росте фирмы, увеличении количества заводов и т. п., большой штат работников может работать не так слаженно, как маленькая команда и т. д. Убывающая отдача обычно наблюдается при больших уровнях выпуска. **2.3.** *Подсказка*: воспользовавшись вогнутостью производственной функции, покажите, что не меньший объем продукции можно произвести, используя 10 ед. капитала и 24 ед. труда. Затем воспользуйтесь свойством свободы распоряжения. **2.4.** Изоквантой, соответствующей выпуску q, называется множество всех возможных комбинаций факторов производства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, таких, что q является максимально возможным объемом выпуска при использовании данной комбинации факторов. Таким образом, если технология представима производственной функцией $f(x)$, то изокванта, соответствующая выпуску q, представляет собой множество комбинаций факторов производства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q$. Не могут. *Подсказка*: предположив, что они могут пересекаться, рассмотрите точку их пересечения и воспользуйтесь определением изокванты. Принимая во внимание предпосылку о монотонности технологий, принятую в стандартном курсе микроэкономики, легко показать, что изокванты не могут иметь положительный наклон и не могут быть толстыми. **2.5.** Нет. Указанная в условии производственная функция обладает постоянной отдачей от масштаба, в то время как изокванты на рисунке не соответствуют данному свойству. Сравнив изокванты $\overline{q} = 20$ и $\overline{q} = 40$, достаточно заметить, что увеличение каждого фактора производства в два раза приводит к увеличению объема выпуска менее, чем в два раза. **2.6.** **(а)** *Подсказка*: заметьте, что $y = 3x_1$, если $3x_1 \leqslant x_2$, и $y = x_2$, если $3x_1 \geqslant x_2$, где y — объем выпускаемой продукции. **(б)** $MRTS_{12}(\widetilde{x}) = 0$, $MRTS_{12}(\overline{x}) = \infty$. Факторы являются абсолютно дополняющими друг друга. **(в)** Постоянная отдача от масштаба. **2.7.** **(а)** Предельный продукт первого фактора убывает с ростом объема использования этого фактора, а предельный продукт второго фактора возрастает с ростом объема его использования. **(б)** Данная технология не обладает ни возрастающей, ни убывающей, ни постоянной отдачей от масштаба. **(в)** Когда предельный продукт первого фактора меньше среднего продукта этого фактора, средний продукт первого фактора убывает. Если средний продукт для технологии является дифференцируемой функцией, то для любой дифференцируемой производственной функции данный результат будет справедлив. Смотри подсказку в ответе к задаче 2.8. Средний и предельный продукты первого фактора схематично изображены

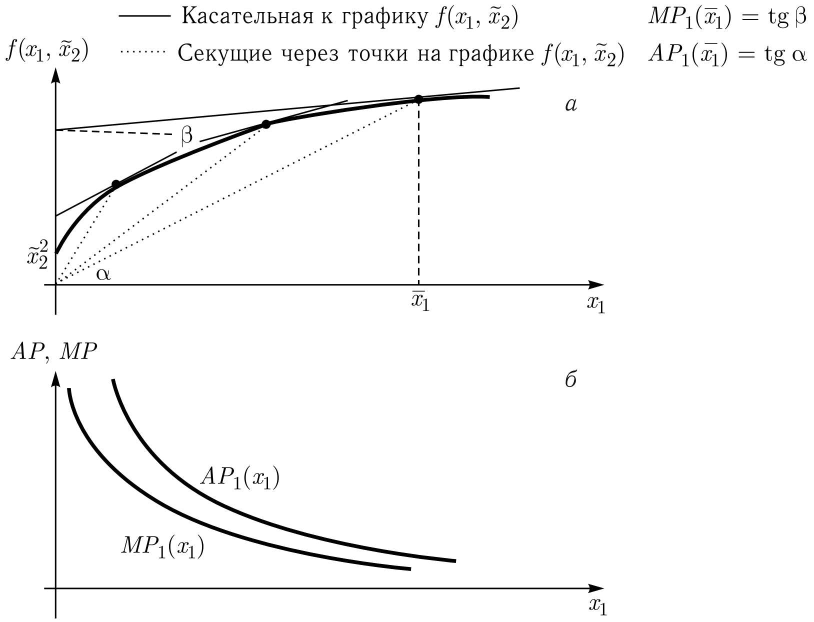

Рис. 2.19. Средний (a) и предельный ($б$) продукты первого фактора

на рис. 2.19; $MP_1(x_1) = 0{,}5 \cdot x_1^{-1/2}$, $AP_1(x_1) = x_1^{-1/2} + \tilde{x}_2^2/x_1$. **2.8. (а)** Пока предельный продукт выше среднего, средний продукт возрастает. Когда предельный продукт ниже среднего, средний продукт убывает. **(б)** *Подсказка*: продифференцируйте $AP_L \equiv f(L, K, N)/L$ по L. **(в)** «Закон» убывания предельного продукта был получен эмпирически, это свойство, присущее большинству реальных технологических процессов. «Закон» гласит, что с увеличением объема использования фактора производства предельный продукт этого фактора убывает. Для данной технологии предельный продукт труда штатной единицы возрастает. Это не означает, что эмпирический «закон» убывания предельного продукта не работает, поскольку указано, что данная производственная функция может описывать производственный процесс только за некоторый период времени. **2.9. (а)** В качестве варианта объяснения можно указать возможность неэффективной работы какого-либо звена производства. В частности, менеджеры одной из фирм могли плохо организовать производственный процесс. **(б)** Не выявляет убывающую отдачу от масштаба, поскольку как минимум один из факторов (капитал–помещение) остается фиксированным. Не выявляет убывающую производительность труда, поскольку наблюдаем увеличение не только объема труда, но и объема других факторов. **2.10. (а)** *Подсказка*: чтобы нарисовать линии одинаковой прибыли, необходимо в пространстве «фактор–выпуск» графически изобразить прямые, описываемые уравнением $\Pi = py - wx$ при различных значениях Π, где p, w — цены продукта и фактора, соответственно, Π — значение прибыли фирмы. **(б)** $x = 16$, $y = 16$, $\Pi = 800$. **(в)** $x = 16$, $y = 16$, $\Pi = 640$. **(г)** $x = 16$, $y = 16$, $\Pi = 400$. Введение процентного налога на прибыль не изменяет выбор фирмы, поскольку целевая функция умножается на положительную константу. Значение целевой функции в оптимуме при этом изменяется, прибыль, которую получает фирма, уменьшится. **2.12.** Неверно. *Подсказка*: рассмотрите приращение прибыли фирмы при увеличении объема использования труда на бесконечно малую величину при неизменных объемах потребления всех остальных факторов производства. **2.13.** При положительном объеме спроса на труд зависимость его от цены труда будет определяться условием первого порядка задачи максимизации прибыли фирмы $pMP_L = w$, где w — цена труда. В силу убывания функции предельного продукта труда кривая спроса схематично будет представлена убывающей кривой в пространстве «объем труда — цена труда». **2.15.** *Подсказка*: используйте теорию выявленной прибыли; см., например, решение задачи 2.14. **2.16.** *Подсказка*: используйте способ доказательства «от противного». **2.17. (а)** При ценах p', w' выбор y'' и x'' принес бы фирме большую прибыль, чем y' и x', поэтому нельзя утверждать, что фирма максимизировала прибыль. **(б)** Для указанных наборов выполнена слабая аксиома максимизации прибыли, поэтому нет оснований утверждать, что фирма не максимизирует прибыль. **2.18. (а)** Верно. *Подсказка*: используйте способ доказательства «от противного». **(б)** Неверно. *Подсказка*: произвольный выпуск, производимый фирмой при эффективной работе может не быть оптимальным для фирмы при данных ценах продукции и факторов производства. **2.19. а)** $y = 12 \cdot 27^{1/3} \cdot 1^{1/3} = 36 > 27$. Верно, в силу свойства свободы распоряжения. **(б)** Отношение факторов, максимизирующее прибыль фирмы $\widetilde{K}/\widetilde{L} = w/r$. **(в)** Пусть выпуск фирмы до изменения цены труда $\widetilde{y}$, а после изменения цены труда $\overline{y}$. Тогда при неизменных ценах на продукт и капитал отношение объемов выпускаемой продукции $\overline{y}/\widetilde{y} = \widetilde{w}/\overline{w}$, т. е. при субсидировании стоимости труда, указанном в условии задачи, объем выпускаемой продукции возрастет в 2 раза. **2.20.** Можно утверждать, что второй завод не максимизирует прибыль, поскольку, выпустив 3 млн ед. продукции, используя 4 млн ед. фактора (что является технологически допустимой для него комбинацией) при ценах 40 долл. за единицу продукции и 10 долл. за единицу фактора, он смог бы получить бо́льшую прибыль, чем получил в данной ситуации. Следует заметить, что оснований уличить первый завод в нерациональном поведении, исходя из условия задачи, у нас нет. Однако утверждать, что этот завод вел себя, как максимизирующая прибыль фирма, мы также не можем. **2.21. (а)** Неверно, может и не измениться. **(б)** Верно. **(в)** Неверно. Прибыль может и уменьшиться, поскольку возрастет не только выручка фирмы, но и ее издержки. **2.22.** *Подсказка*: справедливость следствия из слабой аксиомы максимизации прибыли не влечет справедливость неравенств, являющихся условием аксиомы. **2.23.** $\widetilde{L} < 15\,(P/(2W))^2$. **2.25. (1) (б)** В пространстве факторов (L, K) любая изокванта представляет прямую с наклоном (-4). Если $w/r > 4$, фирма использует для производства только капитал, таким образом, $\widetilde{K}/\widetilde{L} = \infty$. Если $w/r < 4$, фирма использует в производстве только труд, таким образом, $\widetilde{K}/\widetilde{L} = 0$. При $w/r = 4$ фирма может использовать для производства y единиц продукции труд и капитал в любой пропорции, где $4\widetilde{L} + \widetilde{K} = y$. Технология представлена однородной производственной функцией, поэтому при однозначном выводе об объемах использования факторов производства при данных ценах отношение объемов этих факторов не будет зависеть от объема выпускаемой продукции. **(в)** $\widetilde{L}\,(y, w, r) = \begin{cases} 0{,}25 \cdot y, & w/r < 4, \\ 0, & w/r > 4, \end{cases}$ $\widetilde{K}\,(y, w, r) = \begin{cases} 0, & w/r < 4, \\ y, & w/r > 4, \end{cases}$ $4\widetilde{L} + \widetilde{K} = y,\quad w/r = 4.$ **(г)** $C\,(y, w, r) = y \min\{w/4, r\}$. **(д)** $MC\,(y, w, r) = AC\,(y, w, r) = \min\{w/4, r\}$. Поскольку технология обладает постоянной отдачей от масштаба, средние и предельные издержки фирмы постоянны и равны. **(2) (б)** В пространстве факторов (L, K) любая изокванта представляет L-образную линию, угол которой лежит на луче $L = 4K$. Отношение факторов, минимизарующее издержки фирмы при положительном объеме выпускаемой продукции, не зависит от этого объема в силу однородности производственной функции и $\widetilde{K}/\widetilde{L} = 1/4$ при любых положительных ценах факторов. **(в)** $\widetilde{L}(y, w, r) = y$, $\widetilde{K}(y, w, r) = 0{,}25 \cdot y$. **(г)** $C(y, w, r) = y(w + r/4)$. **(д)** $MC(y, w, r) = AC(y, w, r) = w + r/4$. Поскольку технология обладает постоянной отдачей от масштаба, средние и предельные издержки фирмы постоянны и равны. **(З)** **(б)** В пространстве факторов (L, K) любая изокванта представляет линию, задаваемую уравнением $2\sqrt{L} + \sqrt{K} = y$. Отношение факторов, минимизарующее издержки фирмы при положительном объеме выпускаемой продукции, не зависит от этого объема в силу однородности производственной функции и $\widetilde{K}/\widetilde{L} = w^2/4r^2$ при любых положительных ценах факторов. **(в)** $\widetilde{L}(y, w, r) = \left(\dfrac{2ry}{4r + w}\right)^2$, $\widetilde{K}(y, w, r) = \left(\dfrac{wy}{4r + w}\right)^2$. **(г)** $C(y, w, r) = y^2 \dfrac{wr}{4r + w}$. **(д)** $MC(y, w, r) = 2y\dfrac{wr}{4r + w}$, $AC(y, w, r) = y\dfrac{wr}{4r + w}$. Поскольку технология обладает убывающей отдачей от масштаба и представлена однородной производственной функцией, средние издержки фирмы являются возрастающей функцией. **2.26.** **(а)** Нет, не минимизирует. *Подсказка*: рассмотрите изменение издержек фирмы при бесконечно малом увеличении использования первого фактора при неизменном объеме выпускаемой продукции. **(б)** Не останется. *Подсказка*: рассмотрите случай, когда в силу технологического процесса для минимизации издержек необходимо отказаться от использования одного из факторов производства. **2.27.** *Подсказка*: рассмотрите изменение издержек фирмы при бесконечно малом уменьшении использования труда при неизменном объеме выпускаемой продукции. **2.28.** Неверно. Контрпример: пусть технология фирмы, обладающей свободой распоряжения, представлена производственной функцией $f(L, K) = \sqrt{L} + \sqrt{K}$. В краткосрочном периоде объем капитала фиксирован на уровне $\overline{K} = 4$. Тогда при выпуске $y = 1$, отказавшись от использования труда, фирма минимизирует свои издержки, но с точки зрения приведенного определения работает неэффективно, поскольку может произвести $1 < y < 2$, не увеличивая объем использования факторов производства. **2.29.** Неверно. *Подсказка*: минимизация издержек фирмы при данном объеме выпускаемой продукции является необходимым условием максимизации прибыли, но не является достаточным условием. **2.30.** Неверно. Возрастет ровно в 2 раза. **2.31.** Завод выгоднее будет строить в том городе, где значение произведения $s^k w^k$ $(k = A, B)$ больше. **2.32. (а)** 2000, 3000 и 2600 соответственно. **(б)** Нет. В третьей ценовой ситуации фирма могла бы снизить свои издержки при выпуске данного объема продукции, если бы использовала 150 единиц второго фактора и 50 единиц первого, что является технологически допустимым для нее. **(в)** Пример технологии: $f(x_1, x_2) = A(x_1 + x_2)$, где $A = z/200$. Заметим, что при указанной в примере технологии поведение фирмы во второй ценовой ситуации также было нерационально. **2.33. (а)** Для указанных комбинаций факторов выполнена слабая аксиома минимизации издержек, поэтому нет оснований утверждать, что фирма не минимизирует издержки. **(б)** При ценах w_1'', w_2'' издержки фирмы меньше при комбинации факторов $(x_1',\ x_2')$, чем при $(x_1'',\ x_2'')$, поэтому нельзя утверждать, что фирма минимизирует издержки. **2.34. (а)** Верно. *Подсказка*: выпишите условия первого порядка, характеризующие решение задачи минимизирующей издержки фирмы; проверьте, что условия первого порядка являются необходимыми и достаточными в данной оптимизационной задаче; либо приведите графическое решение задачи минимизации издержек для данной технологии. **(б)** Неверно. *Подсказка*: обратите внимание, что данная технология обладает возрастающей отдачей от масштаба, а, следовательно, задача максимизации прибыли данной фирмы не имеет решения, максимум прибыли не достижим. **2.35.** *Подсказка*: продифференцируйте функцию $AC(y) \equiv TC(y)/y$ по y. **2.39.** Выпуски заводов будут распределены таким образом, чтобы $MC(y_1) = MC(y_2)$, $y_1 + y_2 = Y$. Если предельные издержки окажутся при данных условиях в задаче неравными, то фирма всегда сможет снизить свои затраты, перераспределив часть выпуска с завода, где предельные издержки в данной точке больше, на завод, где предельные издержки в данной точке меньше. **2.41. (а)** $TC = 400$. **(б)** Неверно. Если фирма выпускает по 20 ед. продукции на каждом из заводов, то $MC_{\mathsf{A}}(20) = 4$, $MC_{\mathsf{B}}(20) = 32$. Сократив выпуск на заводе B на ε ($\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$), и увеличив выпуск на эту же величину на заводе A, фирма неизбежно снизит свои издержки, следовательно, выпускать по 20 ед. продукции на каждом из заводов для нее нерационально. **(в)** $TC\,(y) = \begin{cases} 4y^2/5, & y \leqslant 2{,}5, \\ 4y - 5, & y > 2{,}5. \end{cases}$

2.44. **(а)** Верно. **(б)** Не останется: $y_2 = \begin{cases} 0, & y \leqslant \dfrac{F}{c_1 - c_2}, \\ y, & y > \dfrac{F}{c_1 - c_2}; \end{cases}$

$y_1 = \begin{cases} y, & y \leqslant \dfrac{F}{c_1 - c_2}, \\ 0, & y > \dfrac{F}{c_1 - c_2}. \end{cases}$ **2.45.** **(а)** $SATC\,(y) = y^2 + 6y + 30 + 8/y$, $SAVC\,(y) = y^2 + 6y + 30$, $SMC\,(y) = 3y^2 + 12y + 30$. **(б)** Фирма не будет нести убытки при цене $p \geqslant 45$, фирма будет выпускать положительный объем продукции при цене $p > 30$. **(в)** $y\,(p) = \begin{cases} 0, & p \geqslant 30, \\ \left(\sqrt{p-18} - 2\sqrt{3}\right)/\sqrt{3}\,, & p > 30. \end{cases}$

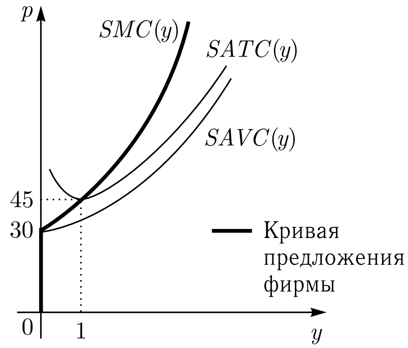

Рис. 2.20. Предложение фирмы

2.47. **(а)** $y\,(p, w_1, w_2) = \dfrac{p^2}{9w_1w_2}$. **(б)** $\pi\,(p, w_1, w_2) = \dfrac{p^2}{27w_1w_2}$.

2.48. **(а)** $MC(y) = \begin{cases} 1000, & y \leqslant 20, \\ 2000, & y > 20, \end{cases}$

$AC(y) = \begin{cases} 1000 + 10\,000/y, & 0 < y \leqslant 20, \\ 2000 + 10\,000/y, & y > 20. \end{cases}$ **(б)** $y = 20$, $\Pi = 2000$.

При данной цене фирма не будет выпускать более 20 ед. продукции, поскольку предельные издержки фирмы в этом случае будут превышать стоимость единицы продукции. Максимальную прибыль фирма сможет получить, выпуская ровно 20 ед. **(в)** Не прав, фирму не нужно закрывать. Размер лицензии, при которой фирме будет безразлично, производить продукцию или вовсе отказаться от выпуска, составляет 12 000. В этом случае прибыль фирмы будет равна нулю. При размере лицензии, превышающем 12 000, фирма откажется от производства продукции. **(г)** $y = 0$, $\Pi = 20\,000$. **2.49.** **(а)** $y(p) = \begin{cases} 0, & p \leqslant 1, \\ 10\,(p-1)\,, & p > 1. \end{cases}$

(б) $y(p) = \begin{cases} 0, & p \leqslant 2, \\ 10\,(p/2-1)\,, & 2 < p < 10, \\ 10\,(p-1)\,, & p \geqslant 10. \end{cases}$ При рыночной цене $1 < p < 10$ цель сокращения выпуска продукции данным предприятием будет достигнута. **(в)** $t = 4$. **2.50.** **(а)** Верно. *Подсказка*: рассмотрите изменение прибыли фирмы при бесконечно малом увеличении объема выпускаемой продукции. **(б)** Неверно. *Подсказка*: для приведения контрпримера заметьте, что при объеме выпускаемой продукции, где $p < AVC\,(y)$ предельные издержки производства могут убывать. Следовательно, фирма может увеличить прибыль, увеличивая объем выпускаемой продукции. **(в)** Неверно. *Подсказка*: для приведения контрпримера рассмотрите краткосрочный период. **2.51.** **(а)** $TC\,(y) = Ay$, где $A > 0$, $A = \text{const}$. *Подсказка*: технология фирмы обладает постоянной отдачей от масштаба. **(б)** $TC\,(y) = y\,(w_1/3 + w_2 + w_3/3)$. **(в)** $y\,(p) =$

$$= \begin{cases} 0, & p < w_1/3 + w_2 + w_3/3, \\ \text{любое количество товара при} & p = w_1/3 + w_2 + w_3/3, \\ \text{бесконечно много при} & p > w_1/3 + w_2 + w_3/3. \end{cases}$$

(г) Не может. *Подсказка*: технология фирмы обладает постоянной отдачей от масштаба.

Глава 3

РАВНОВЕСИЕ

3.1. Экономика обмена: ящик Эджворта, Парето-оптимальные распределения

3.1.* Рассмотрите двухтоварную экономику обмена с двумя потребителями (A и B), предпочтения которых представимы функциями полезности.

(а) Сформулируйте определения распределения и допустимого распределения.

(б) Сформулируйте определение Парето-оптимального распределения.

(в) Сформулируйте определение распределения, являющегося Парето-улучшением для некоторого допустимого распределения.

(г) Верно ли, что Парето-улучшение является Парето-оптимальным распределением?

(д) Верно ли, что Парето-улучшение не может быть Парето-оптимальным распределением?

3.2. Рассмотрите двухтоварную экономику обмена с двумя потребителями (A и B), предпочтения которых представимы дифференцируемыми функциями полезности $u^k(x_1^k, x_2^k)$, такими что $\partial u^k/\partial x_i^k > 0$ в любой точке $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$, $i = 1, 2$. Покажите, что если внутреннее распределение $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}})$ Парето-оптимально, то выполнено $MRS_{12}^{\mathsf{A}}(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}) = MRS_{12}^{\mathsf{B}}(\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}})$.

3.3.* Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями и двумя товарами. В некотором допустимом внутреннем распределении $MRS_{12}^{\mathsf{A}} = 2$, а для потребителя B выполнено $MRS_{12}^{\mathsf{B}} = 4$. Известно, что предпочтения потребителей строго монотонны. Является ли данное распределение Парето оптимальным? Если **да**, то докажите. Если **нет**, то постройте Парето улучшение.

3.4. Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями и двумя товарами. Известно, что в некотором допустимом распределении предельные нормы замещения для обоих потребителей различны. Предпочтения потребителей строго монотонны. Верно ли, что всегда такое распределение может быть улучшено по Парето? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

3.5. Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями, предпочтения которых строго монотонны. Известны начальные запасы потребителей: $\omega^{\mathsf{A}} = (9{,}5;\ 4)$, $\omega^{\mathsf{B}} = (0{,}5;\ 2)$. Известно также, что в некотором допустимом внутреннем распределении $MRS_{12}^{\mathsf{A}} = 8$ и $MRS_{12}^{\mathsf{B}} = 7$, где $MRS_{12}^{k} = \dfrac{\partial u^k / \partial x_1^k}{\partial u^k / \partial x_2^k}$, $k = \{\mathsf{A},\ \mathsf{B}\}$.

Найдите ***ошибки*** в следующих рассуждениях.

(а) $MRS_{12}^{\mathsf{A}} = 8$ означает, что без изменения уровня благосостояния потребитель A готов обменять 8 ед. второго блага на 1 ед. первого блага. Аналогично, $MRS_{12}^{\mathsf{B}} = 7$ означает, что потребитель B готов обменять единицу первого блага на 7 ед. второго без изменения полезности. Но так как в экономике только шесть единиц второго блага, то взаимовыгодный обмен невозможен, а значит, такое распределение является оптимальным по Парето.

(б) Так как $MRS_{12}^{\mathsf{A}} > MRS_{12}^{\mathsf{B}}$, то для взаимовыгодного обмена потребитель B должен был бы отдать одну единицу первого блага потребителю A, а взамен получить $MRS_{1,2}^{\mathsf{A}}$ единиц второго блага, что привело бы к тому, что благосостояние потребителя A не изменилось бы, а благосостояние B повысилось бы. Но, так как у потребителя B в начальном запасе только 0,5 первого блага, такой обмен невозможен, а значит, распределение оптимально по Парето.

Напоминаем: *в рассуждениях содержатся* ***ошибки***!

3.6. По мотивам [2.3; п. 4.42] и [2.4; гл. 28]. Пусть предпочтения потребителей A и B представимы непрерывными функциями полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\ x_2^{\mathsf{A}}\right)$ и $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}},\ x_2^{\mathsf{B}}\right)$.

(а) Предположим, что предпочтения потребителей строго монотонны (т. е. функции полезности возрастают по обеим переменным). Покажите, что любое решение каждой из следующих задач является Парето-оптимальным распределением:

$$\begin{cases} u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}, x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}} \geqslant 0}, \\ u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}},\, x_2^{\mathsf{B}}\right) \geqslant \overline{u}^{\mathsf{B}}, \\ x_1^{\mathsf{A}} + x_1^{\mathsf{B}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}, \\ x_2^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{B}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}\right) \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}, x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}} \geqslant 0}, \\ u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}}\right) \geqslant \overline{u}^{\mathsf{A}}, \\ x_1^{\mathsf{A}} + x_1^{\mathsf{B}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}, \\ x_2^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{B}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}. \end{cases}$$

(б) Покажите, что без предпосылки строгой монотонности предпочтений утверждение п. (а) перестает быть верным.

(в) Покажите, что любое Парето-оптимальное распределение является решением каждой из задач при некотором уровне $\overline{u}^{\mathsf{A}}$ и $\overline{u}^{\mathsf{B}}$ соответственно, не предполагая строгой монотонности предпочтений.

(г) Верно ли, что в общем случае (без предпосылок о монотонности предпочтений) распределение является Парето-оптимальным тогда и только тогда, когда является решением каждой из приведенных в п. (а) задач?

(д) Предположим, что функции полезности дифференцируемы. Выведите дифференциальную характеристику внутренних Парето-оптимальных распределений.

(е) Приведите пример, показывающий, что условие, полученное в п. (д), не является достаточным условием для внутреннего Парето-оптимального распределения.

3.7. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами и двумя потребителями (А и В). Верно ли, что если распределение $(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}},\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}})$ является решением задачи

$$\begin{cases} \lambda u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) + (1-\lambda)\, u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}\right) \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}, x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}} \geqslant 0}, \\ x_1^{\mathsf{A}} + x_1^{\mathsf{B}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}, \\ x_2^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{B}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}, \end{cases}$$

где $0 < \lambda < 1$, то оно оптимально по Парето?

3.8. Верно ли, что если в экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами оба потребителя имеют одинаковые предпочтения, то множество Парето-оптимальных распределений совпадает с диагональю ящика Эджворта? Если утверждение верно, то докажите его, если нет — приведите контрпример.

3.9. По мотивам [2.3; задача 4.36]. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами и двумя потребителями. Предпочтения потребителей одинаковы, строго монотонны и строго выпуклы. Запас потребителей составляет $\overline{\omega}^{\mathsf{A}} = (\omega_1^{\mathsf{A}}, \omega_2^{\mathsf{A}})$ и $\overline{\omega}^{\mathsf{B}} = (\omega_1^{\mathsf{B}}, \omega_2^{\mathsf{B}})$.

(а) Верно ли утверждение: «Распределение

$$\widetilde{x}^{\mathsf{A}} = \left(\frac{\omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}}{2}, \frac{\omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}}{2}\right), \quad \widetilde{x}^{\mathsf{B}} = \left(\frac{\omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}}{2}, \frac{\omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}}{2}\right)$$

является Парето оптимальным?» Ответ обоснуйте.

(б) Как изменится ваш ответ на п. (а), если опустить предпосылку о выпуклости предпочтений. Ответ обоснуйте.

3.10. Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями (A и B) и двумя товарами. Верно ли, что если предпочтения потребителей одинаковы, то точка первоначальных запасов будет являться Парето-оптимальным распределением? Если утверждение верно, то докажите его, если нет — приведите контрпример.

3.11. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B). Предположим, в некотором Парето-оптимальном распределении $\overline{x}$ потребитель A получает полезность $u^{\mathsf{A}}(\overline{x}) \equiv \overline{u}^{\mathsf{A}}$. Верно ли, что в другом Парето-оптимальном распределении благосостояние потребителя A может быть выше $\overline{u}^{\mathsf{A}}$?

3.12.* Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями и двумя благами. Пусть в некотором распределении, не являющимся Парето-оптимальным, полезность потребителя A составляет $\overline{u}^{\mathsf{A}}$ и полезность потребителя B составляет $\overline{u}^{\mathsf{B}}$. Существует ли Парето-оптимальное распределение, в котором достижимы уровни полезности потребителей A и B, соответственно, $\widehat{u}^{\mathsf{A}}$ и $\widehat{u}^{\mathsf{B}}$, такие что выполнено $\widehat{u}^{\mathsf{A}} < \overline{u}^{\mathsf{A}}$ или $\widehat{u}^{\mathsf{B}} < \overline{u}^{\mathsf{B}}$, или оба неравенства одновременно?

3.13. Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями и двумя благами. Пусть в некотором Парето-оптимальном распределении полезность потребителя A составляет $\overline{u}^{\mathsf{A}}$ и полезность потребителя B составляет $\overline{u}^{\mathsf{B}}$. Существует ли Парето-оптимальное распределение, в котором достижимы уровни полезности потребителей A и B, соответственно, $\widehat{u}^{\mathsf{A}}$ и $\widehat{u}^{\mathsf{B}}$, такие что выполнено $\widehat{u}^{\mathsf{A}} > \overline{u}^{\mathsf{A}}$ и $\widehat{u}^{\mathsf{B}} > \overline{u}^{\mathsf{B}}$?

3.14. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B). Предпочтения потребителя A описываются функцией полезности $u^{\mathsf{A}}(x^{\mathsf{A}}) = x_1^{\mathsf{A}} x_2^{\mathsf{A}}$, потребителя B — функцией полезности $u^{\mathsf{B}}(x^{\mathsf{B}}) = \min\left\{x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}\right\}$. Начальные запасы потребителей описываются векторами $\omega^{\mathsf{A}} = (2, 1)$ и $\omega^{\mathsf{B}} = (2, 3)$. Является ли распределение $\overline{x} = \left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}} = 2,\ \overline{x}_2^{\mathsf{A}} = 0,\ \overline{x}_1^{\mathsf{B}} = 2,\ \overline{x}_2^{\mathsf{B}} = 4\right)$ Парето-оптимальным? Если ваш ответ **нет**, то постройте Парето-улучшение. Если **да**, то докажите.

3.15. В приведенном на рис. 3.1 ящике Эджворта изображены кривые безразличия потребителей A (сплошные линии) и B (пунктирные линии), стрелками указано направление роста полезности. Будут ли распределения C и D Парето-оптимальными? Если вы считаете, что распределение Парето-оптимально, тогда объясните почему. Если вы считаете, что распределение не является Парето-оптимальным, тогда укажите Парето-улучшение.

3.16. Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями и двумя товарами. У каждого потребителя есть по единице каждого товара. На рис. 3.2 изображены типичные кривые безразличия потребителей. Отметьте точку начального запаса в ящике Эджворта и определите, является ли она Парето-оптимальной.

3.17. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B), предпочтения которых представимы функциями полезности вида $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \left(x_1^{\mathsf{A}}\right)^{1/3}\left(x_2^{\mathsf{A}}\right)^{2/3}$

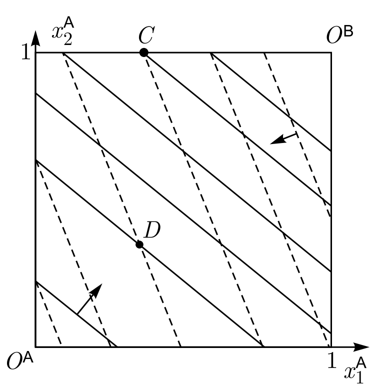

Рис. 3.1. Ящик Эджворта к задаче 3.15

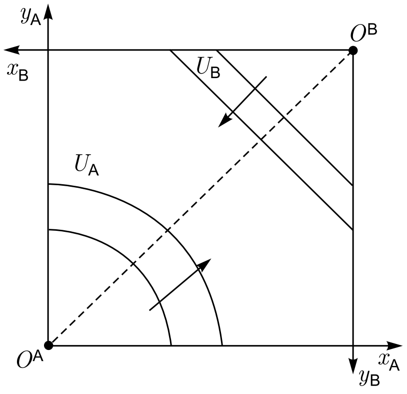

Рис. 3.2. Ящик Эджворта к задаче 3.16

и $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}},\, x_2^{\mathsf{B}}\right) = x_1^{\mathsf{B}} x_2^{\mathsf{B}}$. Первоначальные запасы потребителей заданы векторами $\omega^{\mathsf{A}} = (5,\ 3)$ и $\omega^{\mathsf{B}} = (4,\ 9)$.

(а) Является ли распределение $\overline{x} = (\overline{x}_1^{\mathsf{A}} = 0,\ \overline{x}_2^{\mathsf{A}} = 6,\ \overline{x}_1^{\mathsf{B}} = 9,\ \overline{x}_2^{\mathsf{B}} = 6)$ Парето-оптимальным? Если вы считаете, что **нет**, тогда приведите пример распределения, которое является его Парето-улучшением. Если **да**, то докажите.

(б) Найдите внутреннее Парето-оптимальное распределение $\widetilde{x}$, в котором $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 3$, или объясните, почему такого распределения не существует.

3.18. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B), имеющими функции полезности $u^{\mathsf{A}}(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ и $u^{\mathsf{B}}(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ соответственно. Пусть первоначальные запасы потребителей описываются векторами $\omega^{\mathsf{A}} = (4, 10)$ и $\omega^{\mathsf{B}} = (8, 2)$.

(а) Будет ли точка первоначального запаса Парето-оптимальной? Если вы считаете, что **нет**, тогда предложите Парето-улучшение, если вы считаете, что **да** — тогда докажите.

(б) Будет ли распределение $\overline{x} = (\overline{x}_1^{\mathsf{A}} = 11,\ \overline{x}_2^{\mathsf{A}} = 4,\ \overline{x}_1^{\mathsf{B}} = 1,\ \overline{x}_2^{\mathsf{B}} = 8)$ Парето-улучшением для точки первоначального запаса? Приведите графическую иллюстрацию.

(в) Изобразите множество Парето-оптимальных распределений в ящике Эджворта.

3.19. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B), обладающими положительными запасами благ.

(а) Пусть оба потребителя ценят только первое благо и безразличны ко второму. Изобразите множество Парето-оптимальных распределений в ящике Эджворта.

(б) Как изменится ваш ответ на п. (б), если потребитель A ценит только первое благо и безразличен ко второму, а потребитель B ценит только второе и безразличен к первому?

3.20. В экономике обмена имеются два товара (1 и 2) и два потребителя (A и B), предпочтения которых представимы функциями полезности $u^{\mathsf{A}}(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}}) = \min\{2x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}}\}$ и $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}},\, x_2^{\mathsf{B}}) = x_1^{\mathsf{B}} + x_2^{\mathsf{B}}$ соответственно. Известно, что запас каждого блага в экономике равен восьми. Проверьте, являются ли следующие распределения Парето-оптимальными:

(а) $(x_1^{\mathsf{A}} = 5,\ x_2^{\mathsf{A}} = 8,\ x_1^{\mathsf{B}} = 3,\ x_2^{\mathsf{B}} = 0)$;

(б) $(x_1^{\mathsf{A}} = 2,\ x_2^{\mathsf{A}} = 4,\ x_1^{\mathsf{B}} = 6,\ x_2^{\mathsf{B}} = 4)$;

(в) $(x_1^{\mathsf{A}} = 6,\ x_2^{\mathsf{A}} = 4,\ x_1^{\mathsf{B}} = 3,\ x_2^{\mathsf{B}} = 4)$.

3.21. Рассмотрите экономику обмена с двумя товарами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B), предпочтения которых описываются функциями полезности $u^{\mathsf{A}}(x_1^{\mathsf{A}},\ x_2^{\mathsf{A}}) = \min\{2x_1^{\mathsf{A}},\ x_2^{\mathsf{A}}\}$ и $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}},\ x_2^{\mathsf{B}}) = x_1^{\mathsf{B}} + x_2^{\mathsf{B}}$ соответственно. Известно, что в экономике имеются по четыре единицы каждого блага.

(а) Являются ли распределения $\overline{x} = (\overline{x}_1^{\mathsf{A}} = 0,\ \overline{x}_2^{\mathsf{A}} = 0,\ \overline{x}_1^{\mathsf{B}} = 4,\ \overline{x}_2^{\mathsf{B}} = 4)$ и $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 4,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 4,\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 0,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 0)$ Парето-оптимальными?

(б) Найдите множество Парето-оптимальных распределений и изобразите в ящике Эджворта.

(в) Выполните задание п. (а), если предпочтения потребителя B представимы функцией полезности $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}) = x_1^{\mathsf{B}} x_2^{\mathsf{B}}$.

3.22. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B). Пусть каждый потребитель владеет половиной каждого блага. Найдите множество Парето-оптимальных распределений и изобразите в ящике Эджворта в каждом из следующих случаев:

(а) $u^{\mathsf{A}}\left(x^{\mathsf{A}}\right) = \sqrt{x_1^{\mathsf{A}} x_2^{\mathsf{A}}}$ и $u^{\mathsf{B}}\left(x^{\mathsf{B}}\right) = (x_1^{\mathsf{B}} x_2^{\mathsf{B}})^2$;

(б) $u^{\mathsf{A}}\left(x^{\mathsf{A}}\right) = x_1^{\mathsf{A}} x_2^{\mathsf{A}}$, $u^{\mathsf{B}}\left(x^{\mathsf{B}}\right) = (x_1^{\mathsf{B}})^2 x_2^{\mathsf{B}}$.

3.2. Экономика обмена: равновесие по Вальрасу, закон Вальраса, равновесие и оптимальность

3.23.* Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B).

(а) Сформулируйте условие выполнения закона Вальраса.

(б) Сформулируйте определение равновесия.

(в) Является ли равновесное распределение допустимым?

(г) Сформулируйте первую теорему благосостояния.

(д) Сформулируйте вторую теорему благосостояния.

3.24. Рассмотрите экономику обмена с двумя товарами и тремя потребителями, A, B, C. Известно, что предпочтения каждого потребителя представимы функцией полезности $u^k(x_1^k, x_2^k)$ для $k = \{$А, В, С$\}$. Функция полезности потребителя А возрастает по первому аргументу и убывает по второму, функция полезности потребителя В возрастает по второму аргументу и убывает по первому, функция полезности агента С возрастает по обоим аргументам. Будет ли в данной экономике справедлив закон Вальраса? Если да, то докажите, если нет, то обоснуйте почему.

3.25. Рассмотрите экономику с тремя товарами и N потребителями. Предпочтения всех потребителей строго монотонны.

(а) В некотором состоянии избыточный спрос на первое благо составил $\overline{z}_1 = 7$, на второе благо $\overline{z}_2 = -5$, а на третье благо $\overline{z}_3 = 2$. Вектор цен в данном состоянии составил $\overline{p} = (2,\ 4,\ \overline{p}_3)$. Найдите $\overline{p}_3$.

(б) Экономика перешла в новое состояние $(\widetilde{x}, \widetilde{p})$, где $\widetilde{p} = (4, 3, 2)$. Избыточный спрос на первое благо в данном распределении равен 4, а избыточный спрос на третье благо равен −2. Найдите избыточный спрос на второе благо. Может ли указанное состояние $(\widetilde{x}, \widetilde{p})$ быть равновесием в данной экономике? Обоснуйте ответ.

3.26. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (А и В). Предположим известно, что оба потребителя тратят постоянную долю дохода на каждое благо при любых положительных ценах и положительном доходе: потребитель А делит свой доход между первым и вторым благами в равных долях, а доля расходов на первое благо в доходе потребителя В составляет одну треть. В экономике имеется десять единиц первого блага и две единицы второго блага, которые поровну распределены между потребителями. Найдите равновесие по Вальрасу в данной экономике.

3.27. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (А и В). Пусть предпочтения обоих потребителей таковы, что они всегда потребляют блага 1 и 2 вместе в постоянной пропорции один к одному. Предположим, в экономике имеются по две единицы каждого блага, которые поровну разделены между потребителями. Верно ли, что точка первоначального запаса является равновесной? Что можно сказать о равновесных ценах?

3.28. Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями (A и B) и двумя благами (1 и 2), проиллюстрированную на рис. 3.3.

(а) Является ли распределение $\widehat{x}$ Парето-оптимальным? Обоснуйте свой ответ.

(б) Является ли распределение $\overline{x}$ Парето-оптимальным? Обоснуйте свой ответ.

(в) Достижимо ли равновесие при ценах $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$? Обоснуйте свой ответ.

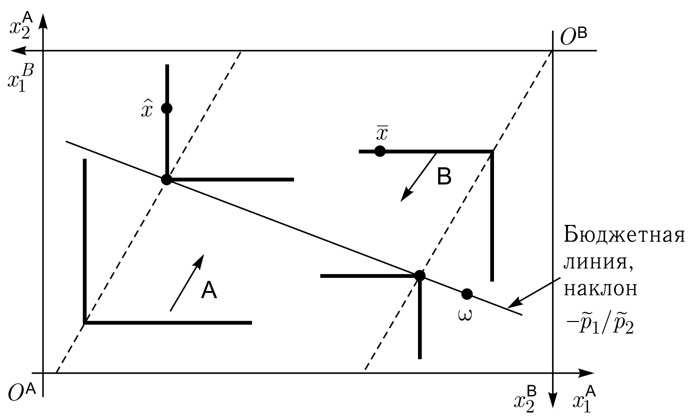

Рис. 3.3. Ящик Эджворта

3.29. Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями (A и B) и двумя товарами (1 и 2). Функции полезности потребителей имеют вид $u^{\mathsf{A}}(x^{\mathsf{A}}) = x_1^{\mathsf{A}} x_2^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}(x^{\mathsf{B}}) = x_1^{\mathsf{B}}(x_2^{\mathsf{B}})^2$, первоначальные запасы благ составляют $\omega^{\mathsf{A}} = (1,\ 5)$, $\omega^{\mathsf{B}} = (3,\ 0)$.

(а) Найдите равновесие по Вальрасу в данной экономике.

(б) Найдите множество Парето-оптимальных распределений и изобразите в ящике Эджворта. Будет ли равновесное распределение Парето-оптимально?

3.30. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B), предпочтения которых представимы одинаковыми функциями полезности вида $u^k(x^k) = x_1^k x_2^k$, где $k = \mathsf{A}, \mathsf{B}$. Пусть первоначальные запасы потребителей описываются векторами $\omega^{\mathsf{A}} = (\delta,\ 1)$ и $\omega^{\mathsf{B}} = (1,\ 1)$, где $\delta > 0$. Пронормируем цены, положив цену второго товара равной единице.

Какова равновесная цена первого блага? Как она изменится при увеличении δ? Проинтерпретируйте полученный результат.

3.31. Рассмотрите экономику обмена с двумя товарами и двумя потребителями (A и B), предпочтения которых описываются функциями полезности $u^{\mathsf{A}} = (x_1^{\mathsf{A}})^2$ и $u^{\mathsf{B}} = (x_2^{\mathsf{B}})^2$ соответственно. Вектора первоначальных запасов имеют вид: $\omega^{\mathsf{A}} = (1,\ 1)$ и $\omega^{\mathsf{B}} = (\alpha,\ 1)$, где $\alpha > 0$.

(а) Найдите равновесие по Вальрасу.

(б) Как изменится благосостояние потребителя A в равновесии при увеличении α?

3.32. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B). Пусть первоначальные запасы потребителей заданы векторами $\omega^{\mathsf{A}} = (3,\ 2)$ и $\omega^{\mathsf{B}} = (1,\ 6)$. Пусть функции полезности потребителей имеют вид $u^{\mathsf{A}}(x^{\mathsf{A}}) = 4x_1^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}(x^{\mathsf{B}}) = x_1^{\mathsf{B}} x_2^{\mathsf{B}}$.

(а) Найдите равновесие и изобразите равновесное распределение в ящике Эджворта.

(б) Предположим теперь, что экономика состоит из 10 потребителей таких же, как потребитель A и 10 потребителей таких же как потребитель B. Будут ли цены, найденные в п. (а), по-прежнему равновесными в такой экономике?

(в) Будет ли равновесное распределение, найденное в п. (а), Парето-оптимальным?

3.33.* Рассмотрите экономику с двумя товарами и двумя потребителями, предпочтения которых представимы функциями полезности $u^{\mathsf{A}}(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}) = \min\{2x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\}$ и $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}) = \left(x_2^{\mathsf{B}}\right)^2$. Запасы потребителей составляют $\omega^{\mathsf{A}} = (2, 2)$ и $\omega^{\mathsf{B}} = (4, 4)$.

(а) Изобразите в ящике Эджворта множество оптимальных по Парето распределений.

(б) Изобразите для каждого потребителя кривую цена-потребление и найдите все равновесные распределения.

3.34.* В экономике обмена имеется два товара и два потребителя (A и B), предпочтения которых представимы функциями полезности $u^{\mathsf{A}}(x^{\mathsf{A}}) = \min\{2x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\}$ и $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}) = x_1^{\mathsf{B}} + x_2^{\mathsf{B}}$ соответственно. Известно, что в экономике имеется 10 ед. первого товара и 5 ед. второго товара.

(а) Не находя множество всех оптимальных распределений, проверьте, являются ли следующие распределения оптимальными (все ответы должны быть обоснованы графически или аналитически):

(i) $\widehat{x}^{\mathsf{A}} = (10, 5), \quad \widehat{x}^{\mathsf{B}} = (0, 0);$

(ii) $\overline{x}^{\mathsf{A}} = (1, 2), \quad \overline{x}^{\mathsf{B}} = (9, 3);$

(iii) $\widetilde{x}^{\mathsf{A}} = (2, 4), \quad \widetilde{x}^{\mathsf{B}} = (8, 2).$

(iv) Верно ли, что распределение $\widehat{x}^{\mathsf{A}} = (2, 4), \quad \widehat{x}^{\mathsf{B}} = (8, 1)$ лучше по Парето, чем распределение $\breve{x}^{\mathsf{A}} = (3, 2), \quad \breve{x}^{\mathsf{B}} = (7, 3)$?

(б) Найдите и изобразите графически множество всех эффективных распределений в заданной экономике.

(в) Пусть у агента A изначально находится весь запас первого товара, а у агента B — весь запас второго товара. Изобразите кривые цена–потребление для каждого потребителя. Найдите и изобразите графически все равновесия.

3.35. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами и двумя потребителями, предпочтения которых выпуклы и представимы дифференцируемыми функциями полезности $u^k\left(x_1^k, x_2^k\right)$, такими что $\partial u^k / \partial x_i^k > 0$ в любой точке, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$, $i = 1, 2$ (таким образом, полезность возрастает по каждому благу).

(а) Покажите, что если набор $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}})$ — равновесие по Вальрасу, то внутреннее равновесное распределение $(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}})$ является оптимальным по Парето.

(б) Покажите, что если Парето-оптимально внутреннее распределение $(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}})$, то его можно реализовать как равновесное в экономике с трансфертами $T^k = p_1 \widetilde{x}_1^k + p_2 \widetilde{x}_2^k - p_1 \omega_1^k - p_2 \omega_2^k$, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$.

3.36. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B), обладающими положительными запасами благ. Предположим, что предпочтения потребителей представимы функциями полезности $u^{\mathsf{A}}(x^{\mathsf{A}}) = 10$, $u^{\mathsf{B}}(x^{\mathsf{B}}) = \left(x_1^{\mathsf{B}}\right)^2 + \left(x_2^{\mathsf{B}}\right)^2$ соответственно. Выполнены ли в данной экономике предпосылки первой и второй теорем благосостояния?

3.37. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B), обладающими положительными запасами благ. Верно ли, что если в данной экономике точка первоначальных запасов является Парето-оптимальным распределением, то это распределение будет равновесным? Если **верно**, то докажите. Если считаете, что **неверно**, то приведите контрпример.

3.38.* Рассмотрите экономику обмена с двумя благами и двумя потребителями (A и B), предпочтения которых описываются функциями полезности вида $u^{A}\left(x^{A}\right) = \left(x_1^{A}\right)^{2/3}\left(x_2^{A}\right)^{1/3}$ и $u^{B}\left(x^{B}\right) = \left(x_1^{B}\right)^{1/2}\left(x_2^{B}\right)^{1/2}$. Первоначальные запасы потребителей заданы векторами $\omega^{A} = (9, 3)$ и $\omega^{B} = (12, 5)$.

(а) Существует ли значение x_1^{A}, при котором распределение ($x_1^{A} =?$, $x_2^{A} = 6$, $x_1^{B} = 10$, $x_2^{B} = 3$) допустимо?

(б) Является ли распределение ($x_1^{A} = 10$, $x_2^{A} = 2{,}5$, $x_1^{B} = 11$, $x_2^{B} = 5,5$) оптимальным по Парето?

(в) Известно, что в некотором внутреннем оптимальном по Парето распределении $x_1^{B} = 3$. Найдите остальные компоненты распределения.

(г) Найдите множество Парето-оптимальных распределений и изобразите в ящике Эджворта.

(д) При ценах $p_1/p_2 = 2$ избыточный спрос на рынке второго блага равен 13,5. Найдите избыточный спрос на рынке первого блага.

(е) Проверьте выполнение закона Вальраса для данной экономики.

(ж) Приведите определение равновесия для данной экономики.

(з) Найдите равновесие в данной экономике. Является ли равновесное распределение Парето-оптимальным? Выполнены ли в этой экономике предпосылки первой теоремы благосостояния?

(и) Найдите и изобразите равновесное распределение в ящике Эджворда как пересечение кривых цена–потребление.

(к) Можно ли распределение $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1^{A} = 14$, $\widetilde{x}_2^{A} = 4$, $\widetilde{x}_1^{B} = 7$, $\widetilde{x}_2^{B} = 4)$ реализовать как равновесное при каких-либо ценах и трансфертах? Если вы считаете, что **можно**, то реализуйте. Найдите соответствующие цены и трансферты. Если вы полагаете, что **нельзя**, то объясните почему.

(л) Рассмотрим следующую игру с полной и совершенной информацией. Первый ход принадлежит потребителю B, предлагающему цены, по которым блага будут обмениваться. На следующем этапе потребитель A решает какие товары и в каком количестве обменять, на этом обмене (если он происходит) игра заканчивается. Будет ли финальное распределение благ оптимальным по Парето?

3.39. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B), предпочтения которых представимы функциями полезности Кобба–Дугласа вида: $u^{\mathsf{A}}(x^{\mathsf{A}}) = (x_1^{\mathsf{A}})^{1/4} \cdot (x_2^{\mathsf{A}})^{3/4}$ и $u^{\mathsf{B}}(x^{\mathsf{B}}) = (x_1^{\mathsf{B}})^{1/2} \cdot (x_2^{\mathsf{B}})^{1/2}$. Первоначальные запасы потребителей заданы векторами $\omega^{\mathsf{A}} = (4, 2)$ и $\omega^{\mathsf{B}} = (4, 4)$.

(а) Проверьте выполнение закона Вальраса в данной экономике.

(б) Найдите равновесие в данной экономике.

(в) Найдите множество Парето-оптимальных распределений и изобразите в ящике Эджворта. Является ли равновесное распределение Парето-оптимально?

(г) Рассмотрите распределение $\overline{x} = (\overline{x}_1^{\mathsf{A}} = 5,\ \overline{x}_2^{\mathsf{A}} = 5,\ \overline{x}_1^{\mathsf{B}} = 3,\ \overline{x}_2^{\mathsf{B}} = 1)$. Можно ли данное распределение реализовать как равновесное в экономике с трансфертами? Если вы считаете, что **можно**, то найдите соответствующие цены и трансферты. Если — **нельзя**, то объясните почему.

3.40. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B), предпочтения которых представимы функциями полезности вида $u^{\mathsf{A}}(x^{\mathsf{A}}) = x_1^{\mathsf{A}} x_2^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}(x^{\mathsf{B}}) = \min\{x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}/2\}$. Первоначальные запасы потребителей описываются векторами $\omega^{\mathsf{A}} = (4, 2)$ и $\omega^{\mathsf{B}} = (1, 8)$.

(а) Приведите определение равновесия по Вальрасу для данной экономики.

(б) Найдите равновесие по Вальрасу в данной экономике.

(в) Найдите множество Парето-оптимальных распределений и изобразите в ящике Эджворта.

(г) Можно ли распределение $\widehat{x} = (\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 2,\ \widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 4,\ \widehat{x}_1^{\mathsf{B}} = 3,\ \widehat{x}_2^{\mathsf{B}} = 6)$ реализовать как равновесное в экономике с трансфертами? Если вы считаете, что **можно**, то найдите соответствующие цены и трансферты. Если — **нельзя**, то объясните почему.

3.41. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B). Предпочтения потребителей представимы функциями полезности $u^k(x_1^k,\, x_2^k) = x_1^k + \sqrt{x_2^k}$, $k = \{\mathsf{A},\, \mathsf{B}\}$. Начальные запасы потребителей заданы векторами $\omega^{\mathsf{A}} = (24, 24)$ и $\omega^{\mathsf{B}} = (48, 8)$.

(а) Найдите множество Парето-оптимальных распределений.

(б)* Приведите графическую иллюстрацию к п. (а).

(в) Найдите равновесие по Вальрасу или покажите, что оно не существует.

(г) Можно ли реализовать как равновесное распределение $(x_1^{\mathsf{A}} = 1,\ x_1^{\mathsf{B}} = 71,\ x_2^{\mathsf{A}} = x_2^{\mathsf{B}} = 16)$? Если **да**, то при каких ценах? если **нет**, то почему?

3.42. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B). Предпочтения потребителей представимы функциями полезности $u^k(x_1^k,\, x_2^k) = \sqrt{x_1^k} + x_2^k$, $k = \{\mathsf{A},\, \mathsf{B}\}$. Начальные запасы потребителей заданы векторами $\omega^{\mathsf{A}} = (24, 24)$ и $\omega^{\mathsf{B}} = (48, 8)$.

(а) Найдите множество Парето-оптимальных распределений.

(б)* Приведите графическую иллюстрацию к п. (а).

(в) Найдите равновесие по Вальрасу или покажите, что его не существует.

(г) Можно ли реализовать как равновесное распределение $(x_1^{\mathsf{A}} = x_1^{\mathsf{B}} = 36,\ x_2^{\mathsf{A}} = 3,\ x_2^{\mathsf{B}} = 29)$? Если **да**, то при каких ценах? если **нет**, то почему?

3.43. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B), имеющими первоначальные запасы $\omega^{\mathsf{A}} = (2,\, 0)$ и $\omega^{\mathsf{B}} = (0,\, 2)$, соответственно. Предпочтения потребителя A описываются функцией полезности $u^{\mathsf{A}}(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}) = x_1^{\mathsf{A}} \cdot x_2^{\mathsf{A}}$. Предположим, известно, что распределение $\widetilde{x} = \left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 1,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 1,\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 1,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 1\right)$ является равновесным.

(а) Каково отношение цен в равновесии?

(б) Может ли потребитель B иметь функцию полезности $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}) = \sqrt{x_1^{\mathsf{B}}} + x_2^{\mathsf{B}}$?

(в) Предложите функцию полезности потребителя B, при которой указанное распределение достижимо как равновесное.

В пп. (г)–(д) считайте, что функция полезности потребителя B имеет вид $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}) = x_1^{\mathsf{B}} + 2x_2^{\mathsf{B}}$.

(г) Найдите равновесие в данной экономике.

(д) Можно ли распределение $\widehat{x} = (\widehat{x}_1^\mathsf{A} = 3/2,\ \widehat{x}_2^\mathsf{A} = 3/4,\ \widehat{x}_1^\mathsf{B} = 1/2,\ \widehat{x}_2^\mathsf{B} = 5/4)$ реализовать как равновесное в экономике с трансфертами? Если вы считаете, что **можно**, то найдите соответствующие цены и трансферты. Если — **нельзя**, то объясните почему.

3.44. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B), предпочтения которых описываются функциями полезности вида $u^\mathsf{A}(x^\mathsf{A}) = (x_1^\mathsf{A})^{1/2}(x_2^\mathsf{A})^{1/2}$ и $u^\mathsf{B}(x^\mathsf{B}) = (x_1^\mathsf{B})^{1/4}(x_2^\mathsf{B})^{3/4}$. Первоначальные запасы потребителей заданы векторами $\omega^\mathsf{A} = (12, 4)$ и $\omega^\mathsf{B} = (4, 4)$.

(а) Можно ли распределение $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1^\mathsf{A} = 8,\ \widetilde{x}_2^\mathsf{A} = 2,\ \widetilde{x}_1^\mathsf{B} = 8,\ \widetilde{x}_2^\mathsf{B} = 6)$ реализовать как равновесное при каких-либо ценах и трансфертах? Если вы считаете, что **можно**, то найдите соответствующие цены и трансферты. Если вы полагаете, что **нельзя**, то объясните почему.

(б) Можно ли распределение $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1^\mathsf{A} = 6,\ \widetilde{x}_2^\mathsf{A} = 6,\ \widetilde{x}_1^\mathsf{B} = 10,\ \widetilde{x}_2^\mathsf{B} = 4)$ реализовать как равновесное при каких-либо ценах и трансфертах? Если вы считаете, что **можно**, то найдите соответствующие цены и трансферты. Если вы полагаете, что **нельзя**, то объясните почему.

3.45. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B). Пусть первоначальные запасы потребителей описываются векторами $\omega^\mathsf{A} = (3, 2)$ и $\omega^\mathsf{B} = (1, 6)$. Пусть функции полезности потребителей имеют вид $u^\mathsf{A}(x^\mathsf{A}) = 4x_1^\mathsf{A} + x_2^\mathsf{A}$ и $u^\mathsf{B}(x^\mathsf{B}) = x_1^\mathsf{B}x_2^\mathsf{B}$. Можно ли распределение $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1^\mathsf{A} = 7/2,\ \widetilde{x}_2^\mathsf{A} = 6,\ \widetilde{x}_1^\mathsf{B} = 1/2,\ \widetilde{x}_2^\mathsf{B} = 2)$ реализовать как равновесное при каких-либо ценах и трансфертах? Если вы считаете, что **можно**, то найдите соответствующие цены и трансферты. Если вы полагаете, что **нельзя**, то объясните почему.

3.46.* Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями и двумя благами. Начальные запасы потребителей A и B, соответственно, $\omega^\mathsf{A} = (16, 0)$ и $\omega^\mathsf{B} = (0, 17)$. Предпочтения потребителей представимы функциями полезности $u^\mathsf{A}(x_1^\mathsf{A}, x_2^\mathsf{A}) = x_1^\mathsf{A} + 2\sqrt{x_2^\mathsf{A}}$ и $u^\mathsf{B}(x_1^\mathsf{B}, x_2^\mathsf{B}) = x_1^\mathsf{B} - \frac{1}{4}\left(x_1^\mathsf{B}\right)^2$.

(а) Изобразите в ящике Эджворта все Парето-оптимальные распределения.

(б) Найдите равновесие в данной экономике. Является ли равновесное распределение Парето-оптимальным? Как согласуется полученный результат с первой теоремой благосостояния?

(в) Можно ли распределения ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 16$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 0$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 0$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 17$), ($\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 14$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 9$, $\widehat{x}_1^{\mathsf{B}} = 2$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{B}} = 8$) и ($\overline{x}_1^{\mathsf{A}} = 15$, $\overline{x}_2^{\mathsf{A}} = 17$, $\overline{x}_1^{\mathsf{B}} = 1$, $\overline{x}_2^{\mathsf{B}} = 0$) реализовать как равновесные в экономике с трансфертами? Если вы считаете, что **можно**, то реализуйте. Если **нельзя**, то аргументировано объясните почему. Как согласуется полученный результат с теоремами благосостояния?

3.47.* Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями и двумя благами. Начальные запасы потребителей A и B, соответственно, $\omega^{\mathsf{A}} = (16,\ 4)$ и $\omega^{\mathsf{B}} = (8,\,)$. Предпочтения потребителей представимы функциями полезности $u^{\mathsf{A}}(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}) = x_1^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}) = \min\left\{x_1^{\mathsf{B}},\ \beta x_2^{\mathsf{B}}\right\}$. Рассмотрите следующую последовательную игру с полной и совершенной информацией. Первый ход принадлежит потребителю A, который предлагает цены, по которым блага будут обмениваться. На следующем, последнем, этапе потребитель B решает, какие товары и в каком количестве обменять или остаться со своим начальным запасом. Если потребителю B несколько альтернатив дают одинаковый уровень благосостояния, то он выбирает ту, при которой благосостояние потребителя A максимально (в этом случае говорят, что B беневолентен к A). На этом игра заканчивается. Произойдет ли обмен? Является ли итоговое распределение благ оптимальным по Парето? Ответьте на вопрос при **(а)** $\beta = 2$; **(б)** $\beta = 1/2$.

3.48.* Рассмотрите экономику обмена, где предпочтения всех потребителей строго монотонны. Пусть $\widetilde{x}$ — Парето-оптимальное распределение. Верно ли, что такое распределение возможно реализовать как равновесное в экономике с трансфертами? Если Ваш ответ **да**, то докажите. Если **нет**, то приведите аналитический и/или графический контрпример.

3.49.* Рассмотрите экономику обмена, где предпочтения всех потребителей строго монотонны. Пусть $\widetilde{x}$ — внутреннее Парето-оптимальное распределение. Верно ли, что такое распределение всегда можно реализовать как равновесное в экономике с трансфертами? Если Ваш ответ **да**, то докажите. Если **нет**, то приведите аналитический и/или графический контрпример.

3.50.* Рассмотрите экономику обмена, где предпочтения всех потребителей являются выпуклыми. Пусть $\widetilde{x}$ — внутреннее Парето-оптимальное распределение. Верно ли, что если предпочтения хотя бы одного потребителя не являются монотонными, то такое распределение нельзя реализовать как равновесное в экономике с трансфертами? Если Ваш ответ да, то докажите. Если нет, то приведите аналитический и/или графический контрпример.

3.51.* Рассмотрите экономику обмена, где предпочтения всех потребителей являются выпуклыми. Верно ли, что если предпочтения всех потребителей не являются монотонными, то любое равновесное распределение в такой экономике не является Парето-оптимальным? Если Ваш ответ да, то докажите. Если нет, то приведите аналитический и/или графический контрпример.

3.52. (а) Постройте в ящике Эджворта пример, где нарушена предпосылка второй теоремы благосостояния о выпуклости предпочтений, но в результате некоторое Парето-оптимальное распределение может быть реализовано как равновесное в экономике с трансфертами.

(б) Постройте в ящике Эджворта пример, где нарушена предпосылка второй теоремы благосостояния о внутреннем Парето-оптимальном распределении, но в результате данное Парето-оптимальное распределение может быть реализовано как равновесное в экономике с трансфертами.

3.53. Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями (A и B) и двумя благами (1 и 2). Рассмотрите ситуацию, изображенную на рис. 3.4.

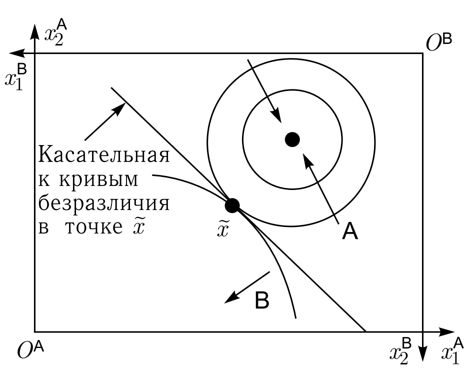

Рис. 3.4. Ящик Эджворта

(а) Можно ли распределение $\widetilde{x}$ реализовать как равновесное при каких-либо ценах и трансфертах? Обоснуйте свой ответ!

(б) Выполнены ли в данной экономике предпосылки второй теоремы благосостояния?

3.54. Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями (A и B) и двумя благами (1 и 2). Рассмотрите ситуацию, изображенную на рис. 3.5.

(а) Можно ли распределение $\widetilde{x}$ реализовать как равновесное при каких-либо ценах? Обоснуйте свой ответ!

(б) Выполнены ли в данной экономике предпосылки второй теоремы благосостояния?

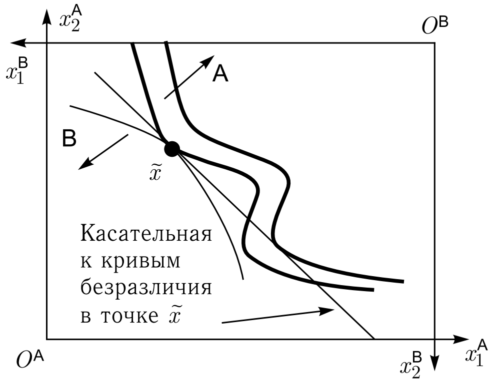

Рис. 3.5. Ящик Эджворта

3.55.* Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B). Пусть первоначальные запасы потребителей описываются векторами $\boldsymbol{\omega}^{\mathsf{A}} = (10, 3)$ и $\boldsymbol{\omega}^{\mathsf{B}} = (8, 6)$. Пусть функции полезности потребителей имеют вид $u^{\mathsf{A}}(x^{\mathsf{A}}) = x_1^{\mathsf{A}} x_2^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}(x^{\mathsf{B}}) = 3\,x_1^{\mathsf{B}} + x_2^{\mathsf{B}}$.

(а) Приведите определение равновесия по Вальрасу в данной экономике.

(б) Найдите равновесие по Вальрасу или покажите, что его не существует.

3.56. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами и двумя потребителями, начальные запасы которых заданы векторами $\boldsymbol{\omega}^{\mathsf{A}} = (5,\ 5)$, $\boldsymbol{\omega}^{\mathsf{B}} = (5, 5)$. Предпочтения потребителя A заданы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}}\right) = -\left(x_1^{\mathsf{A}} - 5\right)^2 - \left(x_2^{\mathsf{A}} - 5\right)^2$.

(а) Пусть предпочтения потребителя B заданы функцией полезности $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}\right) = -\left(x_1^{\mathsf{B}} - 5\right)^2 - \left(x_2^{\mathsf{B}} - 5\right)^2$. Найдите все равновесия по Вальрасу или покажите, что равновесия не существует.

(б) Ответьте на вопрос п. (а), если предпочтения потребителя B представимы функцией полезности $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}\right) = -\left(x_1^{\mathsf{B}} - 1\right)^2 - \left(x_2^{\mathsf{B}} - 1\right)^2$.

(в) Как изменится Ваш ответ на предыдущий пункт, если предположить возможность перераспределения дохода.

(г) Для экономики п. (б) найдите множество распределений оптимальных по Парето.

3.57. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B), которые имеют следующие первоначальные запасы: $\omega^{\mathsf{A}} = \left(\omega_1^{\mathsf{A}}, \omega_2^{\mathsf{A}}\right) = (6, 10)$ и $\omega^{\mathsf{B}} = \left(\omega_1^{\mathsf{B}}, \omega_2^{\mathsf{B}}\right) = (2, 6)$. Пусть предпочтения потребителей представимы функциями полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \min\left\{x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right\}$ и $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}\right) = \min\left\{x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}\right\}$.

(а) Найдите равновесие в данной экономике при положительных ценах либо докажите, что равновесия не существует.

(б) Как изменится Ваш ответ, если предположить, что одна из цен в равновесии может быть равна нулю?

(в)* Изобразите в ящике Эджворта кривые цена–потребление. Укажите равновесные распределения и цены, если они существуют, или же поясните со ссылкой на рисунок, почему равновесия в экономике нет.

3.58. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B), которые имеют следующие первоначальные запасы: $\omega^{\mathsf{A}} = \left(\omega_1^{\mathsf{A}}, \omega_2^{\mathsf{A}}\right) = (5, 1)$ и $\omega^{\mathsf{B}} = \left(\omega_1^{\mathsf{B}}, \omega_2^{\mathsf{B}}\right) = (1, 1)$. Пусть предпочтения потребителей представимы функциями полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \min\left\{x_1^{\mathsf{A}}, 3\,x_2^{\mathsf{A}}\right\}$ и $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}\right) = \min\left\{x_1^{\mathsf{B}}, 3\,x_2^{\mathsf{B}}\right\}$.

(а) Укажите все равновесия в данной экономике при положительных ценах или покажите, что равновесия не существует. Приведите графическую иллюстрацию в ящике Эджворта.

(б) Изобразите в ящике Эджворта кривые цена–потребление. Укажите равновесные распределения и цены, если они существуют, или же поясните со ссылкой на рисунок, почему равновесия в экономике нет.

3.59. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами и двумя потребителями, начальные запасы которых $\omega^{\mathsf{A}} = \left(\omega_1^{\mathsf{A}}, \omega_2^{\mathsf{A}}\right)$, $\omega^{\mathsf{B}} = \left(\omega_1^{\mathsf{B}}, \omega_2^{\mathsf{B}}\right)$.

(а) Покажите, что набор $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}})$, где $(\widetilde{x}_1^k, \widetilde{x}_2^k)$ — решение задачи потребителя k, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$, при ценах $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$, является равновесием по Вальрасу в рассматриваемой экономике.

(б) Пусть распределение $\omega = \left(\omega^{\mathsf{A}}, \omega^{\mathsf{B}}\right)$ Парето-оптимально. Покажите, что набор $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \omega_1^{\mathsf{A}}, \omega_1^{\mathsf{A}}, \omega_1^{\mathsf{B}}, \omega_2^{\mathsf{B}})$, где $x^k = (\omega_1^k, \omega_2^k)$, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$, есть также равновесие по Вальрасу.

(в) Предположим, предпочтения потребителей строго выпуклы. Покажите, что в экономике существует единственное равновесное распределение.

(г) Приведите пример экономики, для которой выполнено утверждение п. (в).

(д) Приведите пример ситуации, когда одна предпосылка утверждения п. (в) нарушена и точка первоначального запаса не является единственным равновесным распределением (т. е. утверждение не верно). Обоснуйте свой ответ!

3.3. Экономика с производством: Парето-оптимальные распределения

3.60.* Рассмотрите экономику с одним потребителем A, предпочтения которого представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right)$, и одной технологией, позволяющей производить второе благо из первого, $y_2 = f(x_1)$, где $f(x_1)$ — производственная функция. Начальные запасы благ в экономике $\omega^{\mathsf{A}} = \left(\omega_1^{\mathsf{A}}, \omega_2^{\mathsf{A}}\right)$.

(а) Приведите определение допустимого распределения.

(б) Приведите определение распределения оптимального по Парето.

3.61. Рассмотрите экономику с одним потребителем A и одной технологией. В экономике два потребительских блага. Технология позволяет произвести из первого блага второе согласно технологическому процессу, который может быть описан дифференцируемой возрастающей производственной функцией $y_2 = f(x_1)$. Предпочтения потребителя представимы дифференцируемой функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right)$, для которой $\partial u^{\mathsf{A}}/\partial x_i^{\mathsf{A}} > 0$, где $i = 1, 2$. Покажите, что для внутреннего[1] Парето-оптимального распределения $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1, \widehat{y}_2\right)$ выполнено $MRS^{\mathsf{A}}_{1,2}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right) = f'(\widehat{x}_1)$.

3.62.* Рассмотрите экономику с одним потребителем и одной технологией. Предпочтения потребителя представимы функцией полезности, такой, что $\partial u^{\mathsf{A}}/\partial x_i^{\mathsf{A}} > 0$, $i = 1, 2$. Технология позволяет произвести из первого блага второе. Технологический процесс задается производственной функцией $y_2 = f(x_1)$. Известно, что во внутреннем распределении $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}, \overline{x}_1, \overline{y}_2\right)$ выполнено $MRS^{\mathsf{A}}_{1,2}\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right) = 6$. Покажите, что распределение не является Парето-оптимальным, построив Парето улучшение, если **(а)** $f'(\overline{x}_1) = 9$; **(б)** $f'(\overline{x}_1) = 2$. Как изменится Ваш ответ, если предположить, что не известно, является ли рассматриваемое распределение внутренним?

3.63. Рассмотрите двухтоварную экономику с одной технологией, позволяющей произвести второе благо из первого, и одним потребителем, предпочтения которого представимы функцией полезности Кобба–Дугласа. Начальные запасы обоих благ в экономике положительны, $\omega_1^{\mathsf{A}} > 0$, $\omega_2^{\mathsf{A}} > 0$, и пусть $f(0) = 0$. Может ли в такой экономике существовать Парето-оптимальное распределение, в котором

(а) потребление хотя бы одного блага потребителем нулевое?

(б) величины затрат блага x_1 и выпуска блага y_2 равны нулю?

3.64. Рассмотрите экономику в которой предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \left(x_1^{\mathsf{A}}\right)^{1/5}\left(x_2^{\mathsf{A}}\right)^{1/5}$. Начальные запасы благ $\omega_1^{\mathsf{A}} = 12$, $\omega_2^{\mathsf{A}} = \alpha$, где $\alpha > 0$. Технология позволяет из каждой единицы первого блага произвести 3 единицы второго блага. Пусть в пунктах (а) и (б) значение параметра $\alpha = 72$.

---

[1] Обычно распределение называется *внутренним*, если в нем потребление потребителем обоих благ ненулевое. Поэтому точка, в которой $x_1^{\mathsf{A}} = \omega_1^{\mathsf{A}} > 0$, $x_2^{\mathsf{A}} = \omega_2^{\mathsf{A}} > 0$, вообще говоря, является внутренней. Однако в этом разделе будем называть все точки распределения, в которых хотя бы одна компонента равна нулю, *краевыми* или *граничными*, например, точку ($x_1^{\mathsf{A}} = \omega_1^{\mathsf{A}}$, $x_2^{\mathsf{A}} = \omega_2^{\mathsf{A}}$, $x_1 = 0$, $y_2 = 0$).

(а) Является ли распределение ($x_1^{\mathsf{A}} = 2$, $x_2^{\mathsf{A}} = 102$, $x_1 = 10$, $y_2 = 30$) допустимым?

(б) Найдите все Парето-оптимальные распределения.

(в) Найдите все значения параметра $\alpha > 0$, при которых Парето-оптимальное распределение граничное. Какое это распределение?

3.65. Пусть $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \left(x_1^{\mathsf{A}}\right)^2 + \left(x_2^{\mathsf{A}}\right)^2$. Технология позволяет из каждых двух единиц первого блага произвести одну единицу второго блага. Начальные запасы благ $\omega_1^{\mathsf{A}} = 25$, $\omega_2^{\mathsf{A}} = 0$.

(а) Рассмотрите распределение ($x_1^{\mathsf{A}} = 6$, $x_2^{\mathsf{A}} = 12$, $x_1 = 24$, $y_2 = 12$). Является ли оно Парето-оптимальным? Аргументируйте свой ответ.

(б) Рассмотрите распределение ($x_1^{\mathsf{A}} = 5$, $x_2^{\mathsf{A}} = 10$, $x_1 = 20$, $y_2 = 10$). Является ли оно Парето-оптимальным? Аргументируйте свой ответ.

3.66. Рассмотрите экономику с одним потребителем и одним производителем. Функция полезности потребителя $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \min\left\{2x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right\}$. Начальные запасы благ $\omega_1^{\mathsf{A}} = 5$, $\omega_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0$. Технология задается производственной функцией $f(x_1) = \sqrt{x_1}$.

(а) Пусть $\omega_2^{\mathsf{A}} = 0$. Найдите Парето-оптимальные распределения. Приведите графическую иллюстрацию.

(б) Существуют ли в модели значения ω_2^{A}, при которых в Парето-оптимальном распределении $x_1 = 0$ и $y_2 = 0$?

3.67. Рассмотрите экономику с одним потребителем, функция полезности которого $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \alpha x_1^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{A}}$, где параметр $\alpha > 0$. Начальные запасы благ $\omega_1^{\mathsf{A}} = 9$, $\omega_2^{\mathsf{A}} = 1$.

(а) Технология позволяет из каждых трех затраченных единиц первого блага произвести единицу второго блага. Укажите, при каких значениях $\alpha > 0$ Парето-оптимальные распределения являются угловыми/внутренними. Найдите соответствующие распределения. Приведите графические иллюстрации.

(б) Пусть $\alpha = 2$, а технология задается производственной функцией $f(x_1) = x_1^2$. Найдите все Парето-оптимальные распределения. Приведите графическую иллюстрацию.

(в) Выполните задание пункта (а), если технология может быть описана производственной функцией $f(x_1) = x_1^2$. Проиллюстрируйте свой ответ.

3.68. Рассмотрите экономику, в которой предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = x_1^{\mathsf{A}} + \alpha x_2^{\mathsf{A}}$, где параметр $\alpha > 0$. Начальные запасы благ $\omega_1^{\mathsf{A}} = 16$, $\omega_2^{\mathsf{A}} = 1$. Технология производства второго блага (y_2) задается производственной функцией $f(x_1) = 2\sqrt{x_1}$.

(а) Будет ли распределение ($\overline{x}_1^{\mathsf{A}} = 12$, $\overline{x}_2^{\mathsf{A}} = 6$, $\overline{x}_1 = 4$, $\overline{y}_2 = 4$) допустимым? Существуют ли значения параметра α, при которых распределение Парето-оптимально?

(б) Пусть $\alpha = 3$. Найдите все Парето-оптимальные распределения. Приведите графическую иллюстрацию.

(в) Пусть $\alpha = 5$. Найдите все Парето-оптимальные распределения. Приведите графическую иллюстрацию.

(г) Укажите все значения параметра $\alpha > 0$, при которых Парето-оптимальное распределение будет внутренним.

3.69. Рассмотрите экономику с одной технологией, позволяющей из каждой единицы первого блага производить четыре единицы второго, и одним потребителем, функция полезности которого

$$u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \begin{cases} x_1^{\mathsf{A}} x_2^{\mathsf{A}}, & x_1^{\mathsf{A}} x_2^{\mathsf{A}} < 2, \\ 2, & 2 \leqslant x_1^{\mathsf{A}} x_2^{\mathsf{A}} \leqslant 5, \\ x_1^{\mathsf{A}} x_2^{\mathsf{A}} - 3, & x_1^{\mathsf{A}} x_2^{\mathsf{A}} > 5. \end{cases}$$

Начальные запасы $\omega_1^{\mathsf{A}} = 2$, $\omega_2^{\mathsf{A}} = 0$. Изобразите все Парето-оптимальные распределения на рисунке. Аргументируйте свой ответ.

3.4. Экономика с производством: равновесие по Вальрасу, закон Вальраса, равновесие и оптимальность

3.70. Рассмотрите экономику с одним потребителем и одной технологией, позволяющей произвести второе благо из первого. Верно ли, что равновесное распределение будет допустимым?

3.71. Рассмотрите двухтоварную экономику с двумя потребителями A и B, предпочтения которых представимы функциями полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right)$ и $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}\right)$. В экономике также есть одна технология, позволяющая производить из первого блага второе по технологии, задаваемой производственной функцией

$y_2 = f(x_1)$. Покажите, что если предпочтения потребителей монотонны, то выполнен закон Вальраса:

$$p_1\big(x_1^{\mathsf{A}}(p_1, p_2) + x_1^{\mathsf{B}}(p_1, p_2) + x_1(p_1, p_2) - \omega_1^{\mathsf{A}}\big) + \\ + p_2\big(x_2^{\mathsf{A}}(p_1, p_2) + x_2^{\mathsf{B}}(p_1, p_2) - x_2(p_1, p_2) - \omega_2^{\mathsf{A}}\big) = 0$$

для всех цен, при которых определен спрос.

3.72.* Пусть $\big(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2\big)$ равновесие в экономике с производством (технология позволяет производить из первого блага второе) и одним потребителем A. Покажите, что распределение $\big(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2\big)$ Парето-оптимально.

Замечание: условие задачи является формулировкой первой теоремы благосостояния для экономики с одним потребителем. Обратите внимание, что, в отличие от экономики обмена, рассмотренной выше (см. решение задачи 3.23 (г)), в предпосылках теоремы отсутствует монотонность предпочтений.

3.73.* Рассмотрите экономику с одним потребителем и одним производителем. Функция полезности потребителя имеет вид: $u^{\mathsf{A}}\big(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\big) = x_1^{\mathsf{A}} x_2^{\mathsf{A}}$. Начальные запасы благ $\omega_1^{\mathsf{A}} = 3$, $\omega_2^{\mathsf{A}} = 0$. Технология задается производственной функцией $f(x_1) = 2\sqrt{x_1}$.

(а) Найдите все Парето-оптимальные распределения.

(б) Проверьте выполнение закона Вальраса в рассматриваемой экономике.

(в) Запишите определение равновесия по Вальрасу.

(г) Найдите равновесие, следуя определению равновесия.

(д) Существует ли альтернативный способ поиска равновесия?

3.74. Рассмотрите экономику с одним потребителем и одним производителем. Функция полезности потребителя $u^{\mathsf{A}}\big(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\big) = x_1^{\mathsf{A}}\big(x_2^{\mathsf{A}}\big)^2$. Начальные запасы благ $\omega_1^{\mathsf{A}} = 5$, $\omega_2^{\mathsf{A}} = 9$. Технология позволяет из каждой единицы первого блага произвести три единицы второго блага.

(а) Проверьте выполнение закона Вальраса в рассматриваемой экономике.

(б) Найдите равновесие, следуя определению равновесия. Будет ли равновесное распределение Парето-оптимальным?

(в) Предположим, правительство ввело 30% налог на прибыль фирмы. Доходы от сбора налога передаются потребителю. Не выполняя расчетов, ответьте, как изменятся равновесное распределение и цены? Зависит ли Ваш ответ от предпочтений потребителя? Технологии?

3.75. Рассмотрите экономику с одним потребителем и одним производителем. Функция полезности потребителя $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \min\left\{2x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right\}$. Начальные запасы благ $\omega_1^{\mathsf{A}} = 10$, $\omega_2^{\mathsf{A}} = 10$. Технология задается производственной функцией $f(x_1) = \sqrt{x_1}$.

(а) Проверьте выполнение закона Вальраса в рассматриваемой экономике.

(б) Найдите равновесие, следуя определению равновесия. Будет ли равновесное распределение Парето-оптимальным?

3.76. Рассмотрите экономику, в которой предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = x_2^{\mathsf{A}} - 4x_1^{\mathsf{A}}$. Начальные запасы благ $\omega_1^{\mathsf{A}} = 10$, $\omega_2^{\mathsf{A}} = 0$. Технология позволяет из каждой единицы первого блага произвести 5 ед. второго блага.

(а) Выполнен ли в рассматриваемой экономике закон Вальраса?

(б) Найдите все равновесия по Вальрасу. Приведите графические иллюстрации.

3.77.* Рассмотрите экономику с потребителем, предпочтения которого представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = x_1^{\mathsf{A}}\left(x_2^{\mathsf{A}}\right)^2$. Начальные запасы благ $\omega_1^{\mathsf{A}} = 3$, $\omega_2^{\mathsf{A}} = 1$. Производственная функция $f(x_1) = \sqrt{x_1}$. В некотором допустимом внутреннем распределении $x_1^{\mathsf{A}} = 2$. Найдите остальные компоненты распределения. Можно ли реализовать это распределение как равновесное? Если **да**, то реализуйте. Если **нет**, то объясните почему.

3.78.* Рассмотрите экономику с потребителем, предпочтения которого представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \left(x_1^{\mathsf{A}}\right)^3 x_2^{\mathsf{A}}$. Начальные запасы благ $\omega_1^{\mathsf{A}} = 24$, $\omega_2^{\mathsf{A}} = 32$. Технология позволяет из каждой единицы первого блага произвести шесть единиц второго блага. Рассмотрите распределение ($x_1^{\mathsf{A}} = 22$, $x_2^{\mathsf{A}} = 44$, $x_1 = 2$, $y_2 = 12$). Можно ли реализовать это распределение как равновесное? Если **да**, то реализуйте. Если **нет**, то объясните почему.

3.79. Предпочтения потребителей представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \left(x_1^{\mathsf{A}}\right)^2 + \left(x_2^{\mathsf{A}}\right)^2$. Для производства каждой единицы второго блага требуется затратить две единицы первого блага. Начальные запасы $\omega_1^{\mathsf{A}} = 4$, $\omega_2^{\mathsf{A}} = 3$.

(а) Найдите Парето-оптимальные распределения.

(б) Какие из распределений могут быть реализованы как равновесные? Приведите графические иллюстрации.

3.80. Можно ли распределение F на рис. 3.6 реализовать, как равновесное распределение? Если **да**, то укажите на рисунке, при каких ценах. Если **нет**, то почему? Рассуждения иллюстрируйте.

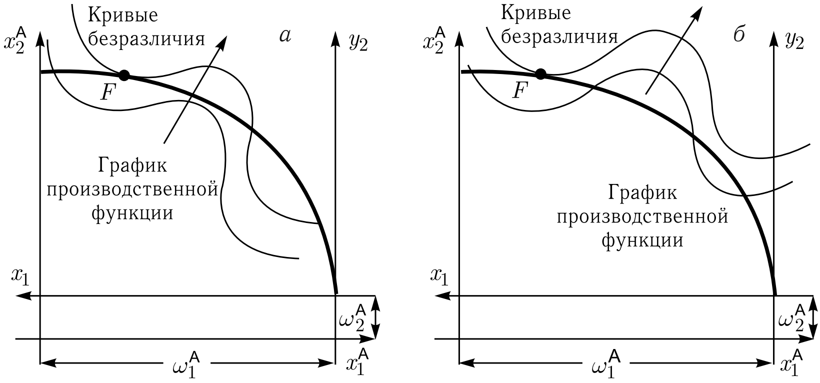

Рис. 3.6

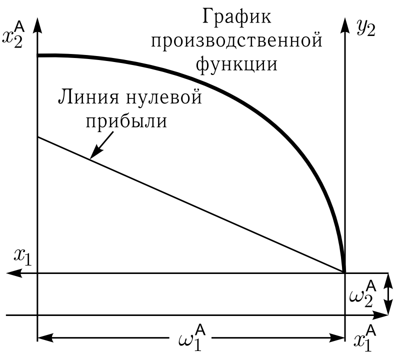

Рис. 3.7

3.81. Рассмотрите экономику с одним потребителем и одной технологией, позволяющей произвести второе благо из первого.

(а) Правительство ввело налог τ на продажу второго блага, устанавливаемого в долях от цены. Собранные от налога средства передаются потребителю. Предположим, равновесие при введенном налоге внутреннее. На рис. 3.7 изображена линия нулевой прибыли при равновесных ценах. Укажите ее наклон. Схематично изобразите равновесие на рисунке. Обоснуйте свой ответ.

(б) Как изменится благосостояние потребителя при введении налога по сравнению с равновесием без налога? Поясните, не ссылаясь на рис. 3.7, а затем проиллюстрируйте свои рассуждения графически.

3.82. Рассмотрите двухтоварные экономики, представленные в пп. (а)–(г). Для каждого случая укажите Парето-оптимальное распределение/я. Какие из найденных распределений могут быть равновесными? Какие нет? Для тех распределений, которые могут быть реализованы как равновесные, укажите равновесные цены. Аргументируйте свои ответы. Обсудите, как согласуются полученные результаты с теоремами благосостояния. Приведите графические иллюстрации.

(а) Предпочтения потребителей представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \left(x_1^{\mathsf{A}}\right)^2 + \left(x_2^{\mathsf{A}}\right)^2$. Технология позволяет из единицы первого блага произвести единицу второго. Начальные запасы $\omega_1^{\mathsf{A}} = 16$, $\omega_2^{\mathsf{A}} = 0$.

(б) Предпочтения потребителей представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \left(x_1^{\mathsf{A}}\right)^2 + \left(x_2^{\mathsf{A}}\right)^2$. Производственная функция $f(x_1) = 2\sqrt{x_1}$. Начальные запасы $\omega_1^{\mathsf{A}} = 16$, $\omega_2^{\mathsf{A}} = 0$.

(в) Функция полезности потребителя $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \left(x_1^{\mathsf{A}}\right)^2$. Производственная функция $f(x_1) = 2\sqrt{x_1}$. Начальные запасы $\omega_1^{\mathsf{A}} = 16$, $\omega_2^{\mathsf{A}} = 4$.

(г) Функция полезности потребителя $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \left(x_2^{\mathsf{A}}\right)^2$. Производственная функция $f(x_1) = 2\sqrt{x_1}$. Начальные запасы $\omega_1^{\mathsf{A}} = 16$, $\omega_2^{\mathsf{A}} = 4$.

3.83. Робинзон Крузо живет на острове, на котором растут пальмы с бананами. Затратив L часов, Робинзон сможет собрать L^2 кг бананов. Предпочтения Робинзона представимы функцией полезности $u^{\mathsf{R}}\left(l^{\mathsf{R}}, c^{\mathsf{R}}\right) = 2\,l^{\mathsf{R}} + c^{\mathsf{R}}$, где c^{R} — бананы, кг, l^{R} — время на досуг, часы (Робинзон считает, что если ничего не делать, а лежать на солнце, то иногда можно и не есть).

(а) При предположении, что на начало дня запас собранных бананов отсутствует, сколько должен работать в отведенные для бодрствования 12 часов Робинзон, чтобы его благосостояние было максимальным? Приведите графическую иллюстрацию.

(б) Волны выбросили на остров учебник по микроэкономике, из которого Робинзон узнал о концепции равновесия по Вальрасу. На основании прочитанного, Робинзон решил узнать, какими были бы равновесные цены на острове, если бы он ввел деньги. Подходящим равновесным распределением он посчитал то, которое соответствует времени на труд, найденному в п. (а). Что получилось у Робинзона? Почему? Как согласуется ваш ответ с теоремами благосостояния?

3.84.* Робинзон Крузо живет на острове, на котором растут пальмы с бананами. Затратив L часов, Робинзон сможет собрать $L/2$ кг бананов. Предпочтения Робинзона представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}(l^{\mathsf{R}}, c^{\mathsf{R}}) = (l^{\mathsf{R}})^2 + (c^{\mathsf{R}})^2$, где c^{R} — бананы, кг, l^{R} — время на досуг, часы. На сон Робинзон отводит 9 часов в сутки, а оставшееся время делит между трудом и досугом.

(а) При предположении, что на начало дня запас собранных бананов отсутствует, сколько должен работать Робинзон, чтобы его благосостояние было максимальным? Сколько будет собрано бананов и сколько времени Робинзон будет отдыхать? Приведите графическую иллюстрацию.

(б) Реализуйте полученное в (а) распределение как равновесное или покажите, что это невозможно. Аргументируйте свой ответ.

3.85. Рассмотрите экономику Робинзона Крузо. Пусть предпочтения Робинзона представимы функцией полезности вида $u(l, f) = \ln l + \ln f$, где f — количество потребляемой им рыбы (в кг), а l — свободное время (в часах). Ежедневный производственный процесс добычи рыбы Робинзоном представим функцией $y = \sqrt{L}$, где L — количество часов, которые он трудится. Ежедневно половину времени суток Робинзон распределяет между досугом и трудом.

(а) Найдите равновесие в данной экономике или объясните, почему оно не существует.

(б) Предположим теперь, что в течение L_0 часов Робинзон может смастерить сеть для ловли рыбы. В этом случае производительность его труда возрастает, и максимальный объем рыбы, который он мог бы наловить при затратах труда, превышающих L_0 часа, может быть описан функцией $f(L) = 4\sqrt{L - L_0}$. Сеть Робинзону приходится плести из тонких ветвей деревьев и кустарников, вследствие чего к окончанию каждых суток сеть приходит в негодность. Пусть $L_0 = 4$. Найдите равновесие в данном случае или объясните, почему оно не существует.

(в) Может ли рыночный механизм достичь эффективного по Парето распределения в пп. (а) или (б)? Обоснуйте.

(г) Существует ли такое значение L_0, при котором в равновесии Робинзон ежедневно будет плести сеть? Если **да**, то найдите его, если **нет**, то обоснуйте почему.

3.86. Рассмотрите экономику Робинзона Крузо, в которой производится единственное благо (C), при использовании технологии $y = f(L)$, где L — затраты труда Робинзона. Известно, что $f'(L) > 0$, $f''(L) > 0$, $\partial u(C,l)/\partial C > 0$, $\partial u(C,l)/\partial l > 0$, где l — свободное время, а предпочтения Робинзона строго выпуклы. Пусть распределение $(\widetilde{C}, \widetilde{L})$, изображенное на рисунке (см. рис. 3.8), допустимо в данной экономике.

(а) Верно ли, что это распределение является Парето эффективным в данной экономике при некоторых начальных запасах? Обоснуйте.

(б) Верно ли, что это распределение является равновесным в данной экономике при некоторых начальных запасах? Если **да**, то укажите графически равновесные цены, если **нет**, то объясните почему.

3.87. Рассмотрите экономику Робинзона Крузо, в которой производится единственное благо (C), при использовании техно-

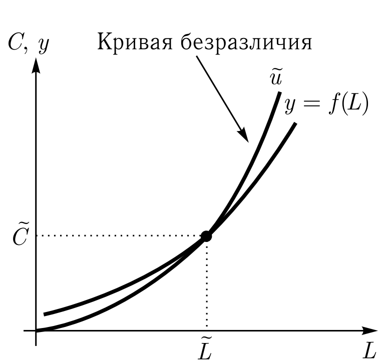

Рис. 3.8

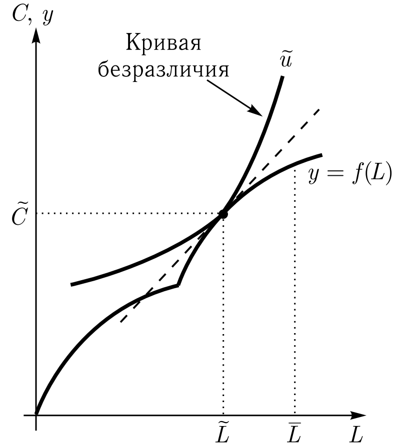

Рис. 3.9

логии $y = f(L)$, где L — затраты труда Робинзона. Известно, что $f'(L) > 0$, $\partial u(C,l)/\partial C > 0$, $\partial u(C,l)/\partial l > 0$, где l — свободное время, а предпочтения Робинзона строго выпуклы. Рассмотрите распределение $(\widetilde{C}, \widetilde{L})$, изображенное на рис. 3.9, где $\overline{L}$ — физический запас времени Робинзона.

(а) Верно ли, что это распределение является Парето-эффективным в данной экономике при некоторых начальных запасах? Обоснуйте.

(б) Верно ли, что механизм конкурентного рынка не позволит в данной экономике достичь Парето-эффективного состояния? Обоснуйте.

3.88.* Рассмотрите двухтоварную экономику с одной технологией, которая может быть описана дифференцируемой возрастающей производственной функцией, и одним потребителем, предпочтения которого представимы дифференцируемой функцией полезности, возрастающей при увеличении количества любого из благ.

(а) Предположим, правительство ввело потоварный налог на продажу второго блага. Налоговые сборы в полном объеме перечисляются потребителю. Предположим, и до введения налога и после равновесное распределение внутреннее. Увеличит ли введенная мера благосостояние потребителя? Будет ли внутреннее равновесное распределение Парето-оптимальным?

(б) Группа аналитиков при правительстве предложила следующую схему налогообложения. Потребление первого блага индивидом облагается адвалорным налогом (в долях от цены) τ_1^A, тогда как выпуск второго блага фирмой облагается адвалорным налогом τ. Все собранные средства передаются потребителю. На заседании правительства аналитики не смогли ответить на вопрос, позволит ли такая схема реализовать как равновесное внутреннее Парето-оптимальное распределение. Попробуйте ответить на этот вопрос.

(в) В результате обсуждений налоговая политика была изменена, и правительство ввело налог 20% на прибыль фирмы. Доходы от сбора налога перечисляются потребителю. Будет ли равновесное распределение после введения налога Парето-оптимальным?

3.89. Рассмотрите двухтоварную экономику с одним потребителем, благосостояние которого возрастает при увеличении потребления каждого блага, и одним производителем. Функции полезности и производственная функция дифференцируемы.

(а) Пусть правительство ввело субсидию для производства второго блага. За каждую произведенную (проданную) единицу второго блага фирма получает субсидию s. Средства для субсидии изымаются в виде подоходного налога у потребителя. Будет ли равновесное распределение, в котором все компоненты положительны, Парето-оптимальным? Аргументируйте.

(б) Пусть правительство ввело потоварную субсидию потребителю, взимая с фирмы долю от прибыли γ. За каждую купленную единицу первого блага потребитель получает субсидию s. Существуют ли такие значения γ и s, при которых равновесное распределение, в котором все компоненты положительны, было Парето-оптимальным?

(в) В правительстве обсуждается новая социальная программа «Социальная ответственность бизнеса». В соответствии с этой программой правительство выплачивает потребителю субсидию на потребление первого блага s, устанавливаемую в долях от цены. Для выплаты субсидии облагается налогом фирма. За продажу второго блага с фирмы взимается налог τ, устанавливаемый в долях от цены. Предположим, в экономике существует равновесие, в котором все компоненты положительны. Будет ли равновесное распределение Парето-оптимальным?

3.90. Рассмотрите экономику с двумя потребителями, предпочтения которых представимы функциями полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = x_1^{\mathsf{A}}\left(x_2^{\mathsf{A}}\right)^2$ и $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}\right) = \left(x_1^{\mathsf{B}}\right)^{1/3}\left(x_2^{\mathsf{B}}\right)^{2/3}$. Начальные запасы благ $\omega^{\mathsf{A}} = (1, 3)$, $\omega^{\mathsf{B}} = (2, 3)$. Технология позволяет из единицы первого произвести две единицы второго. Потребители владеют фирмой в равных долях ($\theta^{\mathsf{A}} = \theta^{\mathsf{B}} = 0,5$).

(а) Найдите множество Парето-оптимальных распределений. Приведите графическую иллюстрацию.

(б) Проверьте выполнение закона Вальраса.

(в) Будет ли равновесное распределение в рассматриваемой экономике Парето-оптимальным?

(г) Найдите равновесие по Вальрасу в рассматриваемой экономике.

(д) Реализуйте распределение, в котором $\left(x_1^{\mathsf{A}} = 7/6,\ x_2^{\mathsf{A}} = 14/3,\ x_1^{\mathsf{B}} = 5/6,\ x_2^{\mathsf{B}} = 10/3\right)$, как равновесное или докажите, что это невозможно.

3.91. Рассмотрите экономику с технологией и двумя потребителями, предпочтения которых монотонны. Начальные запасы благ $\omega^{\mathsf{A}} = (20, 12)$, $\omega^{\mathsf{B}} = (24, 16)$. Предпочтения потребителей монотонны. Доля потребителя B в прибыли фирмы составляет $\theta^{\mathsf{B}} = 1/4$. Известно, что равновесное распределение внутреннее, в равновесии фирмой затрачивается 4 ед. первого блага и выпускается 5 ед. второго блага, потребитель B потребляет 17 ед. второго блага, $MRS^{\mathsf{A}}_{1,2} = 1/4$. Найдите неизвестные компоненты равновесия или покажите, что такого равновесия не существует.

3.92. Рассмотрите экономику с двумя потребителями, предпочтения которых представимы функциями полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \sqrt{x_2^{\mathsf{A}}} + x_1^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}\right) = 2\sqrt{x_2^{\mathsf{B}}} + x_1^{\mathsf{B}}$. Начальные запасы благ $\omega^{\mathsf{A}} = (1,\ 2)$, $\omega^{\mathsf{B}} = (2,\ 2)$. Технология позволяет из единицы первого блага произвести две единицы второго блага. Доля владения фирмой потребителя A составляет $\theta^{\mathsf{A}} = 1/3$.

(а) Найдите множество внутренних Парето-оптимальных распределений. Приведите графическую иллюстрацию.

(б) Найдите равновесие и приведите графическую иллюстрацию.

(в) Реализуйте распределение ($x_1^{\mathsf{A}} = 1$, $x_2^{\mathsf{A}} = 1$, $x_1^{\mathsf{B}} = 3/2$, $x_2^{\mathsf{B}} = 4$, $x_1 = 1/2$, $y_2 = 1$) как равновесное, или докажите, что это невозможно.

3.93. Рассмотрите экономику с двумя потребителями, предпочтения которых представимы функциями полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \left(x_1^{\mathsf{A}}\right)^3 x_2^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}\right) = \left(x_1^{\mathsf{B}}\right)^{3/4} \left(x_2^{\mathsf{B}}\right)^{1/4}$. Начальные запасы благ $\omega^{\mathsf{A}} = (5, 0)$, $\omega^{\mathsf{B}} = (13, 2)$. Технология позволяет из единицы первого произвести единицу второго. Потребители владеют фирмой в равных долях ($\theta^{\mathsf{A}} = \theta^{\mathsf{B}} = 0,5$).

(а) Являются ли распределения ($x_1^{\mathsf{A}} = 0$, $x_2^{\mathsf{A}} = 0$, $x_1^{\mathsf{B}} = 16$, $x_2^{\mathsf{B}} = 4$, $x_1 = 2$, $y_2 = 2$) и ($x_1^{\mathsf{A}} = 6$, $x_2^{\mathsf{A}} = 2$, $x_1^{\mathsf{B}} = 9$, $x_2^{\mathsf{B}} = 3$, $x_1 = 3$, $y_2 = 3$) Парето-оптимальными?

(б) Можно ли распределения из п. (а) реализовать как равновесные в экономике с трансфертами? Если да, то при каких ценах?

3.94. Рассмотрите экономику с двумя товарами, двумя потребителями и одной технологией. Предпочтения потребителя A заданы следующим образом: для любых наборов x^{A}, y^{A} выполнено $x^{\mathsf{A}} \prec y^{\mathsf{A}}$ тогда и только тогда, когда $x_1^{\mathsf{A}} x_2^{\mathsf{A}} \geqslant y_1^{\mathsf{A}} y_2^{\mathsf{A}}$. Известно, что функция полезности потребителя B возрастает по первому благу и убывает по второму. В экономике есть технология, позволяющая произвести из первого блага второе, $y_2 = 2\sqrt{x_1}$. Вектора начальных запасов потребителей $\omega^{\mathsf{A}} = (13,\ 0)$, $\omega^{\mathsf{B}} = (\omega_1^{\mathsf{B}},\ 0)$, $\omega_1^{\mathsf{B}} \geqslant 0$. Доля в прибыли фирмы потребителя A составляет $\theta^{\mathsf{A}} = 3/4$.

(а) Представимы ли предпочтения потребителя A функцией полезности? Если **да**, то какой? Если **нет**, то почему?

(б) Можно ли утверждать, что равновесное распределение, в случае, если равновесие существует, Парето-оптимально? Обоснуйте свой ответ.

(в) Можно ли утверждать, что в экономике при некотором значении $\omega_1^{\mathsf{B}} \geqslant 0$ существует равновесие, в котором $x_1^{\mathsf{A}} = 8$ и $x_2^{\mathsf{A}} = 4$? Найдите все значения ω_1^{B}, а также компоненты равновесия, которые не указаны, либо объясните, какой информации не хватает.

3.5. Частичное равновесие

3.95.* Рассмотрите экономику с одним потребителем и одним производителем. Предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\ x_2^{\mathsf{A}}\right) = v\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) + x_1^{\mathsf{A}}$, где $v'\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) > 0$, $v''\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) \leqslant 0$. Технология такова, что для производства y_2 единиц второго блага требуется затратить $c(y_2)$ единиц первого, $c'(y_2) > 0$, $c''(y_2) \geqslant 0$. В экономике есть только начальный запас 1-го блага $\omega_1^{\mathsf{A}} > 0$.

(а) Запишите в заданных обозначениях дифференциальную характеристику парето-оптимального распределения, все компоненты которого положительны.

(б) При каком условии/ях в парето-оптимальном распределении не производится второе благо? Приведите графическое пояснение.

(в) На основании приведенных рассуждений объясните, почему величину $W(y_2) = v(y_2) - c(y_2)$ можно трактовать как индикатор благосостояния.

(г) Обоснуйте, почему в равновесном распределении индикатор благосостояния достигает максимального значения.

(д) Пронормируем цены таким образом, что $p_1 = 1$. По определению излишек потребителя — это $CS\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) = v\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) - p_2 x_2^{\mathsf{A}}$, а излишек производителя — $PS\left(y_2\right) = p_2 y_2 - c\left(y_2\right)$. Охарактеризуйте допустимое распределение, в котором сумма излишков потребителя и производителя максимальна (при отсутствии вмешательства государства).

(е) Изобразите на рисунке кривую спроса и предложения. Обозначьте на рисунке излишки потребителя и производителя, равновесную цену и равновесный объем потребления и выпуска второго блага.

3.96. Рассмотрите модель частичного равновесия, где действует один потребитель с функцией полезности $u(x,m) = 2\sqrt{x} + m$ и две фирмы (принадлежащие потребителю) с функциями издержек $c(q_j) = 8q_j^2$, $j = 1,\ 2$, которые производят благо x из блага m. Потребитель обладает первоначальным запасом товара m, равным $\omega_m = 2$, но не имеет запаса блага x.

(а) Выпишите задачу потребителя и найдите функцию спроса на благо x.

(б) Выпишите задачу отдельной фирмы и найдите ее предложение блага x. Каково будет совокупное предложение блага x?

(в) Найдите равновесную цену и равновесное количество блага x.

3.97 Пусть предпочтения потребителей представимы функциями $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}}\right) = \ln x_2^{\mathsf{A}} + x_1^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}},\, x_2^{\mathsf{B}}\right) = 2\ln x_2^{\mathsf{B}} + x_1^{\mathsf{B}}$.

(а) Найдите индивидуальные функции спроса. Найдите совокупный спрос на второе благо в ситуации, когда потребление обоих благ обоими потребителями положительное.

(б) Найдите функцию полезности репрезентативного потребителя. Убедитесь, что функция спроса на второе благо, порождаемая полученной полезностью, совпадает с найденной в пункте (а) (рассмотрите только случай внутреннего решения).

3.98. По мотивам [2.9]. Пусть в городе N проживают автовладельцы только двух типов: A и B. Функция спроса на бензин автовладельца типа A имеет вид: $x^{\mathsf{A}}(p) = 20 - 5\,p$ (соответственно, $x^{\mathsf{A}}(p) = 0$ при $p \geqslant 4$), а автовладельца типа B: $x^{B}(p) = 15 - 3\,p$ (соответственно, $x^{\mathsf{B}}(p) = 0$ при $p \geqslant 5$). Предположим, что в городе всего 150 жителей: 100 из них — автовладельцы типа A и 50 — автовладельцы типа B.

(а) Найдите функцию совокупного спроса на бензин всех потребителей типа A и всех потребителей типа B. Приведите графическую иллюстрацию.

(б) Найдите функцию совокупного (рыночного) спроса на бензин всех жителей города N и приведите графическую иллюстрацию.

(в) Как изменится совокупный спрос на бензин, если цена одного литра возрастет с 1 долл. до 1,1 долл.? А с 4,5 долл. до 4,6 долл.?

3.99. Пусть совокупный спрос на благо описывается функцией $x(p) = 120 - 4\,p$, а предложение функцией: $q(p) = 2\,p - 30$, где p — цена блага.

(а) Найдите равновесные цену и количество блага. Приведите графическую иллюстрацию.

(б) Предположим, правительство решило субсидировать производителей блага, выплачивая им субсидию $s = 5$ за каждую произведенную единицу блага. Найдите равновесные цену и объем потребляемой и выпускаемой продукции. Приведите графическую иллюстрацию.

(в) Как изменится ваш ответ на п. (б), если субсидию получает потребитель?

(г) Вычислите чистые потери в результате введения субсидии для пп. (б) и (в).

3.100. Пусть совокупный спрос на благо описывается функцией $x(p) = 400 - 10\,p$, а совокупное предложение — функцией $y(p) = 40 + 20\,p$. Предположим, в отрасли введен налог t на продажу каждой единицы блага (т. е. если потребитель платит цену p_d за единицу блага, то производитель получает $p_s = p_d - t$). Какова должна быть величина налога, чтобы в результате его введения равновесный объем выпуска сократился в два раза?

3.101. Пусть совокупный спрос на благо описывается функцией $x(p) = 400 - 10\,p$, а совокупное предложение — функцией $y(p) = 40 + 20\,p$. Предположим, в отрасли введена субсидия s на продажу каждой единицы блага (т. е. если потребитель платит цену p_d за единицу блага, то производитель получает $p_s = p_d + s$). Какова должна быть величина субсидии, чтобы в результате ее введения равновесный объем выпуска увеличился на 25%?

3.102. Рассмотрите рынок хлеба, функция спроса на который имеет вид $Q^D(P) = 30 - 6\,P$, а предложение хлеба $Q^S(P) = 10 + 4\,P$. Если государство установит ценовой потолок в размере $\overline{p} = 1$, то каковы будут потери общества?

3.103. Спрос на сигареты описывается функцией $Q^D(P) = 30 - 3\,P$, а предложение — функцией $Q^S(P) = 6\,P$. Правительство планирует ввести потоварный налог на сигареты и взимать его с потребителей. Определите, при какой минимальной ставке налога в равновесии сигареты не будут продаваться и покупаться.

3.104. По мотивам [2.4]. Рассмотрите конкурентную отрасль, в которой фирмы производит выпуск y в соответствии с технологией, описываемой функцией издержек $c(y)$. Будем считать, что функция издержек является возрастающей и строго выпуклой. Продукция, производимая отраслью, делится на две группы: качественную и бракованную. Доля качественной продукции равна α; товары этой группы продаются на конкурентном рынке по цене p. Бракованная продукция не подлежит продаже.

(а) Как изменится прибыль и выпуск фирмы при малом увеличении доли качественной продукции α?

(б) Предположим, что в отрасли N таких фирм. Пусть $x(p)$ — функция совокупного спроса на продукции отрасли, которая является убывающей. Как изменится равновесная цена p при малом увеличении α?

3.105. Рассмотрите рынок совершенной конкуренции в краткосрочном периоде, где действуют N одинаковых фирм. Пусть спрос на продукцию отрасли $Q\,(p)$, где $Q'\,(p) < 0$, а предложение каждой фирмы имеет вид: $q\,(p) = \begin{cases} bp - a, & p \geqslant a/b, \\ 0, & p < a/b. \end{cases}$

(а) Изобразите схематично графически равновесие в отрасли.

(б) Изобразите схематично графически, как изменится равновесие в отрасли, если для каждой фирмы будет введен потоварный налог в размере t на каждую единицу проданной продукции. Обоснуйте.

(в) Изобразите графически изменение излишка потребителей при введении описанного в п. (б) налога, если таковое имеется.

(г) Изобразите графически, какую максимальную сумму в госбюджет готовы заплатить производители (в целом), чтобы избежать введения указанного налога.

(д) Приведите пример любой другой политики правительства вместо введения потоварного налога, которая могла бы привести к такому же изменению равновесного объема производства, как и введение описанного в п. (б) налога.

3.106. Рассмотрите рынок некоторой алкогольной продукции, функционирующий в условиях совершенной конкуренции. Известно, что объем спроса на эту продукцию снижается с ростом ее цены, а объем предложения возрастает с ростом цены. Может ли политика государства, направленная на снижение потребления алкогольной продукции и предполагающая квотирование объемов ее производства в отрасли, улучшить положение ее потребителей? Улучшить положение ее производителей? Обоснуйте.

3.107. Аналитические исследования показали, что за последние полгода в городе M спрос на гречку возрос, а ее предложение сократилось. При этом цена гречки возросла примерно в 3 раза и примерно в 2 раза увеличился объем ее потребления населением города M. В терминах модели частичного равновесия проиллюстрируйте графически изменения на рынке гречки в городе M и проанализируйте, могут ли подобные изменения привести к ухудшению положения производителей гречки.

3.108. Верно ли, что введение потоварного налога для производителей на рынке совершенной конкуренции неизбежно ухудшит их положение? Если да, то докажите, если нет, то приведите пример.

3.109. Верно ли, что снижение спроса и предложения на рынке совершенной конкуренции некоторого товара неизбежно приведет к увеличению цены этого товара?

3.110. Рассмотрите рынок молока, функционирующий в условиях совершенной конкуренции. Предположим, что правительство планирует снизить цену молока для потребителей и рассматривает различные меры, направленные на снижение цены этого товара. Верно ли, что при введении ценового потолка положение потребителей неизбежно улучшится?

3.111. Предположим, что на рынке некоторой алкогольной продукции, функционирующем в условиях совершенной конкуренции, введено квотирование производства этого товара, приводящее к росту его цены. Верно ли, что данная политика неизбежно ухудшит положение производителей?

3.112. Рассмотрите рынок совершенной конкуренции некоторого товара. Предположим, правительство планирует снизить его потребление, для чего рассматривает возможность установления минимальной цены, ниже которой данный товар не может продаваться. Пусть спрос на этот товар обладает постоянной ценовой эластичностью и является убывающей функцией, а отраслевое предложение этого товара является возрастающей функцией.

(а) Как предлагаемая политика отразится на благосостоянии потребителей, производителей, обществе в целом? Приведите графический анализ.

(б) Приведите пример государственной политики, которая могла бы привести к такому же изменению объема продаж, как и описанная выше. Сравните изменения благосостояния потребителей, производителей, общества в целом при замене политики установления минимальной цены предлагаемой вами политикой, приведя графический анализ.

3.113. В городе N жители очень обеспокоены возросшим количеством игровых автоматов. Городские власти планируют принять меры по сокращению их количества. В связи с этим муниципалитет решил ввести налог для производителей игровых автоматов по ставке t на каждую единицу продукции. Функция предложения игровых автоматов в городе имеет вид: $q^S(p) = 4p - 20$, а функция спроса на игровые автоматы: $q^D(p) = 40 - 2p$. Предполагая, что рынок игровых автоматов является совершенно конкурентным:

(а) найдите, каков должен быть размер налога t, чтобы власти могли сократить количество игровых автоматов в городе в два раза? Проиллюстрируйте равновесия до и после введения налога графически на одном рисунке.

(б) найдите и проиллюстрируйте на том же графике изменения излишков потребителей и производителей игровых автоматов, а также доходы правительства и чистые потери общества в целом, связанные с введением налога.

3.114. Рассмотрите рынок совершенной конкуренции некоторого товара. Верно ли, что при введении для производителей потоварного налога на продажу этого товара налоговое бремя в полном объеме неизбежно будут нести производители?

3.115.* Рассмотрите квазилинейную экономику, где функции полезности каждого агента имеют вид $u(x, m) = v(x) + m$, где x — товар, производимый в отрасли, а m — агрегированное благо. Пусть совокупный спрос на товар x описывается функцией $x^D(p) = 400 - 10p$, а совокупное предложение — функцией $x^S(p) = 20p - 20$. Известно, что $v(0) = 0$ и $c(0) = 0$, где $c(x)$ — функция издержек каждой фирмы, работающей в отрасли. Предположим, в отрасли введен налог t на продажу каждой единицы блага.

(а) Какова должна быть величина налога, чтобы в результате его введения равновесный объем выпуска сократился в тринадцать раз?

(б) Вычислите по определению излишек потребителя и излишек производителя до и после введения налога, налоговые сборы, а затем, воспользовавшись проделанными вычислениями, вычислите чистые потери при найденном налоге.

(в) Изобразите ситуацию графически. На рисунке укажите чистые потери. Убедитесь, что вычисления, опирающиеся на рисунок, дают тот же ответ, что в п. (б).

(г) Предположим теперь, что целью введения потоварного налога является получение наибольших налоговых сборов в данной отрасли. Найдите такую ставку t^*, которая будет соответствовать поставленной цели, и определите объем налоговых поступлений при этой ставке.

(д) Предположим теперь, что вместо потоварного налогообложения вводится адвалорный акциз на выручку отрасли по ставке τ $(0 < \tau < 1)$. Найдите максимальный объем налоговых поступлений в этом случае, сравните полученный результат с найденным в п. (г) объемом и объясните полученное соотношение.

3.116.* Рассмотрите рынок клубники, функционирующий в условиях совершенной конкуренции.

(а) Предположим, что российский импорт клубники — незначительная часть ее мирового производства и что цена клубники в России в автаркии выше, чем мировая цена. Изобразите равновесие на российском рынке клубники в условиях свободной торговли. Составьте таблицу, в которой укажите излишек потребителей, излишек производителей и общий излишек.

(б) Предположим, что изменения в атмосферном слое Земли привели к необыкновенно холодному лету в Европе; бóльшая часть урожая клубники уничтожена. Как это отразится на мировой цене клубники? Используя график и таблицу из ответа (а), покажите его (изменения течения) влияние на излишек потребителей, излишек производителей и общий излишек в России. Кто выигрывает, а кто проигрывает? Извлекает ли Россия больше выгод, нежели убытков?

(в) Предположим, что отечественные производители клубники пролоббировали введение налога на импорт в ситуации, когда мировая цена на клубнику ниже внутренней цены в России в отсутствие торговли. Кто выиграет от введения этой меры, а кто проиграет? Изобразите ситуацию графически.

3.117.* По мотивам заданий LSE [2.7]. Рассмотрите рынок совершенной конкуренции товара y. Все фирмы, входящие на рынок рассматриваемого продукта, имеют одинаковые технологии, причем долгосрочные функции издержек имеют вид $TC(y) = \begin{cases} g(y) + F, & y > 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$ где $F > 0$, $g(y) > 0$, $g(0) = 0$, $g'(y) > 0$, $g''(y) > 0$, $\big(g(y)/y\big)'' > 0$ для любого $y > 0$ и функция $\big(g(y)/y\big)$ неограниченно возрастает. Известно также, что функция совокупного спроса на данный товар непрерывна и монотонно убывает, кроме того, вход в данную отрасль свободен.

(а) Предположим, правительство ввело потоварный налог t на каждую проданную производителем единицу продукции. Как данная политика отразится на количестве фирм, работающих в отрасли и объеме выпускаемой каждой фирмой продукции? Проиллюстрируйте решение графически.

(б) Предположим, вместо потоварного налога правительство ввело аккордный налог T для каждой фирмы, работающей в отрасли. Как данная политика отразится на количестве фирм, работающих в отрасли и объеме выпускаемой каждой фирмой продукции? Проиллюстрируйте решение графически.

3.118. Функция долгосрочных средних издержек типичной фирмы, производящей некоторый товар, имеет вид

$$LAC(q) = \begin{cases} 100 - 20\,q + 4\,q^2, & q > 0, \\ 0, & q = 0. \end{cases}$$

Если функция обратного спроса на данный товар имеет вид $P(Q) = 100 - 0{,}1\,Q$, сколько типичных фирм будет в отрасли при долгосрочном равновесии?

3.119. Рассмотрим рынок совершенной конкуренции, на котором действуют 200 фирм типа A и 100 фирм типа B. Технология производства фирмы типа A представлена производственной функцией $y^{\mathsf{A}}(L,\ K) = L^{1/4}K^{1/4}$, а технологический процесс фирмы B может быть описан производственной функцией вида $y^{\mathsf{B}}(L,\ K) = \sqrt{L} + \sqrt{K}$, где L — объем используемого труда, а K — объем капитала. Факторы производства все фирмы приобретают на рынке совершенной конкуренции по цене $w = r = 1$, где w, r — цена труда и капитала, соответственно. Спрос на товар y предъявляется домохозяйством, предпочтения которого могут быть описаны функцией полезности $u\,(y,\ x) = 200\sqrt{15\,y} + x$, где x — агрегированное благо, цена которого равна 1. Известно, что доход домохозяйства таков, что оно потребляет агрегированное благо в положительном объеме.

(а) Найдите предложение фирмы типа A и изобразите кривую предложения графически.

(б) Найдите предложение фирмы типа B и изобразите кривую предложения графически.

(в) Найдите совокупное предложение товара y отраслью.

(г) Найдите спрос домохозяйства на товар y и проиллюстрируйте кривую спроса графически.

(д) Найдите равновесие на рынке товара y и изобразите решение графически.

(е) Пусть каждая фирма, функционирующая в отрасли, использует труд миграционных рабочих. Для стимулирования найма отечественной рабочей силы правительство вводит налог на использование в производстве труда миграционных рабочих. Объясните и проиллюстрируйте графически, как может измениться равновесие на рынке товара y, если будет введен описанный налог.

(ж) Предположим теперь, что из соображений экологической безопасности использование технологического процесса типа A было запрещено правительством. Любая фирма, владеющая технологией типа B, может реализовывать свой товар на совершенно конкурентном рынке товара y, купив государственную лицензию на его производство в размере 8. Найдите предложение каждой фирмы в этих условиях при $w = r = 1$ и изобразите кривую предложения графически.

(з) Найдите равновесие на рынке товара y в условиях п. (ж).

3.6. Решения задач

3.1. (а) Распределением в двухтоварной экономике с двумя потребителями, A и B будем называть набор $\widetilde{x} = \left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$. Допустимым распределением будем называть распределение $\widetilde{x} = \left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$, такое, что $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = \omega_1$ и $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = \omega_2$, где ω_i — совокупные запасы блага i, $i = 1, 2$.

(б) Допустимое распределение $\widetilde{x} = \left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$ называется Парето-оптимальным, если не найдется другого допустимого распределения $\widehat{x} = \left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$, такого, что $u^{\mathsf{A}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right) \geqslant u^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ и $u^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{B}}\right) \geqslant u^{\mathsf{B}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$ и хотя бы одно из неравенств выполнено как строгое. Другими словами, допустимое распределение *Парето-оптимально*, если нельзя допустимым образом увеличить благосостояние хотя бы одного из потребителей, не уменьшая благосостояния другого.

(в) Определение Парето-улучшения содержится в определении Парето-оптимального распределения. Допустимое распределение $\widehat{x} = \left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$ называется *Парето-улучшением* для допустимого распределения $\widetilde{x} = \left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$, если $u^{\mathsf{A}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right) \geqslant u^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ и $u^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{B}}\right) \geqslant u^{\mathsf{B}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$ и хотя бы одно из неравенств выполнено как строгое.

(г) Парето-улучшение может не быть Парето-оптимальным распределением. Рассмотрим следующий графический пример на рис. 3.10.

Допустимое распределение C не является Парето-оптимальным, поскольку в допустимом распределение D благосостояние обоих потребителей выше, чем в C. Таким образом, распределение D является для C Парето-улучшением. Однако само распределение D не является Парето-оптимальным, поскольку

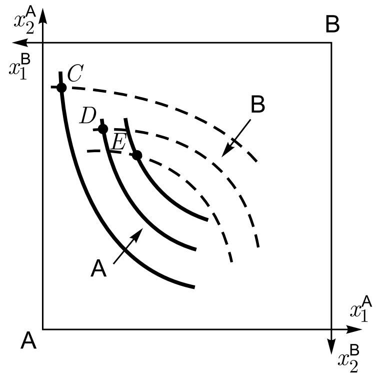

Рис. 3.10. Парето-улучшение может не быть Парето-оптимальным распределением

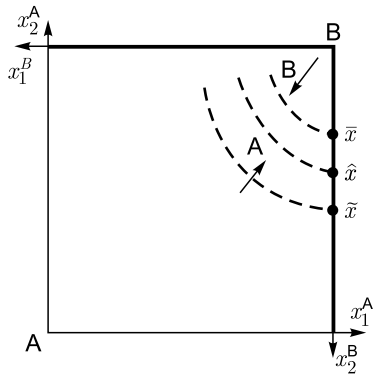

Рис. 3.11. Парето-улучшение $\widehat{x}$ для распределения $\widetilde{x}$ не является Парето-оптимальным распределением

существует допустимое распределение E, в котором благосостояние обоих потребителей выше, чем в D.

Приведем, также, аналитический пример. Пусть предпочтения потребителей представимы одинаковыми функциями полезности $u^k\left(x_1^k,\, x_2^k\right) = x_1^k x_2^k$, $k = \{\mathsf{A},\, \mathsf{B}\}$. Совокупные запасы каждого блага равны десяти. Допустимое распределение $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 10,$ $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 5,\, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 0,\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 5)$ не является Парето-оптимальным, так как существует другое допустимое распределение $\widehat{x} = (\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 10,\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 6,\, \widehat{x}_1^{\mathsf{B}} = 0,\, \widehat{x}_2^{\mathsf{B}} = 4)$, такое, что $u^{\mathsf{A}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right) = 60 > u^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right) = 50$ и $u^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{B}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{B}}\right) = u^{\mathsf{B}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}},\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}\right) = 0$. Таким образом, распределение $\widehat{x}$ является Парето-улучшением для распределения $\widetilde{x}$. Однако распределение $\widehat{x}$ не является Парето-оптимальным, так как существует допустимое распределение $\overline{x} = (\overline{x}_1^{\mathsf{A}} = 10,\, \overline{x}_2^{\mathsf{A}} = 7,$ $\overline{x}_1^{\mathsf{B}} = 0,\, \overline{x}_2^{\mathsf{B}} = 3)$, такое, что $u^{\mathsf{A}}\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right) = 70 > u^{\mathsf{A}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right) = 60$ и $u^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{B}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{B}}\right) = u^{\mathsf{B}}\left(\overline{x}_1^{\mathsf{B}},\, \overline{x}_2^{\mathsf{B}}\right) = 0$. На рис. 3.11 приведена схематичная графическая иллюстрация к аналитическому примеру. Для потребителя B кривая безразличия, соответствующая уровню полезности ноль, имеет вид, отличный от вида кривых безразличия, соответствующих положительному значению полезности.

(д) Парето-улучшение может быть Парето-оптимальным распределением. На рис. 3.12 приведен графический пример.

Допустимое распределение C не является Парето-оптимальным, так как существует допустимое распределение D, в котором благосостояние обоих потребителей выше, чем в точке C. Это означает, что распределение D является Парето-улучшением для C. Убедиться в этом можно самостоятельно, заштриховав, сначала, все допустимые распределения, в которых благосостояние потребителя A выше, чем в D, и все допустимые распределения в которых благосостояние потребителя B не ниже, чем в D, убедимся, что не существует допустимых распределений, в которых одновременно благосостояние A выше, чем в D, и у B не ниже, чем в D. Аналогичным образом можно показать, что не существует допустимых распределений, в которых благосостояние A не меньше, чем в D, а у B выше, чем в D. Таким образом, распределение D является Парето-оптимальным, поскольку не существует допустимого распределения, в котором благосостояние хотя бы одного из потребителей выше, а другого не меньше, чем в D.

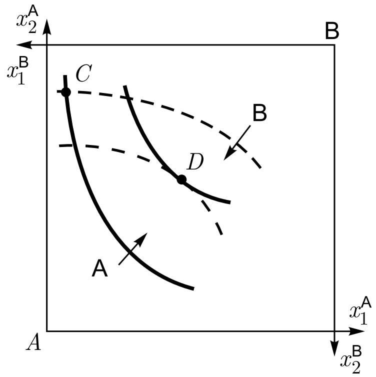

Рис. 3.12. Парето-улучшение может быть Парето-оптимальным распределением

Приведем аналитический пример. Пусть, как в п. (г), предпочтения потребителей представимы одинаковыми функциями полезности $u^k\left(x_1^k, x_2^k\right) = x_1^k x_2^k$, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$. Совокупные запасы каждого блага равны десяти. Допустимое распределение $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 10,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 5,\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 0,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 5)$ не является Парето-оптимальным, так как существует другое допустимое распределение $\breve{x} = (\breve{x}_1^{\mathsf{A}} = 10,\ \breve{x}_2^{\mathsf{A}} = 10,\ \breve{x}_1^{\mathsf{B}} = 0,\ \breve{x}_2^{\mathsf{B}} = 0)$, такое, что $u^{\mathsf{A}}\left(\breve{x}_1^{\mathsf{A}}, \breve{x}_2^{\mathsf{A}}\right) = 100 > u^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right) = 50$ и $u^{\mathsf{B}}\left(\breve{x}_1^{\mathsf{B}}, \breve{x}_2^{\mathsf{B}}\right) = u^{\mathsf{B}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}\right) = 0$. Распределение $\breve{x}$ является Парето-оптимальным, поскольку благосостояние A улучшить допустимым образом невозможно (у него весь запас обоих благ в экономике), а благосостояние потребителя B невозможно увеличить, не отняв какого-то количества обоих благ у потребителя A, что приведет к уменьшению благосостояния последнего.

3.3. Так как распределение внутреннее, то можем отнять у потребителя A одну малую единицу первого блага. Передадим отнятую малую единицу потребителю B. Благосостояние потребителя B не изменилось бы, если бы в обмен на одну малую единицу первого блага у него отняли бы четыре малых единицы второго (заметим, что мы можем у B отнять второе благо, поскольку по условию рассматриваемое распределение внутреннее). Отнимем у него три малых единицы второго блага. Так как по условию предпочтения потребителя B строго монотонны, то его благосостояние возрастет. Передадим отнятые три малых единицы второго блага потребителю A. Его благосостояние не изменилось бы, если бы в обмен на одну малую единицу первого блага он получил бы две малых единицы второго блага. Получив же три малых единицы второго блага, потребитель A увеличит свое благосостояние. Таким образом, получили допустимое распределение, в котором благосостояние обоих потребителей возросло.

3.12. Если бы $\widehat{u}^{\mathsf{A}} < \overline{u}^{\mathsf{A}}$ и $\widehat{u}^{\mathsf{B}} < \overline{u}^{\mathsf{B}}$, то распределение, в котором достигаются уровни полезности $\widehat{u}^{\mathsf{A}}$ и $\widehat{u}^{\mathsf{B}}$, не являлось бы оптимальным по Парето. Однако существует оптимальное по Парето распределение, для которого выполнено одно из неравенств, $\widehat{u}^{\mathsf{A}} < \overline{u}^{\mathsf{A}}$ или $\widehat{u}^{\mathsf{B}} < \overline{u}^{\mathsf{B}}$.

Приведем графический пример на рис. 3.13. Распределение D Парето-оптимально, а распределение C — нет. Однако уровень полезности потребителя B в распределении C, $\overline{u}^{\mathsf{B}}$, выше, чем в распределении D, $\widehat{u}^{\mathsf{B}}$.

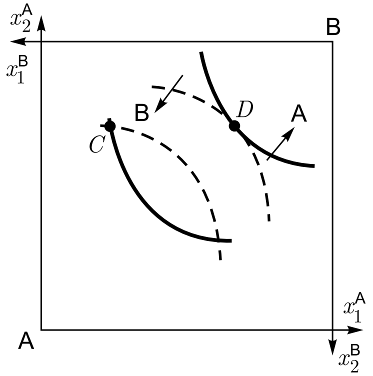

Рис. 3.13. В оптимальном по Парето распределении D благосостояние потребителя B ниже, чем в C

Теперь приведем аналитический пример. Пусть в экономике предпочтения потребителей представимы функциями полезности $u^{\mathsf{A}}(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}) = x_1^{\mathsf{A}} x_2^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}) = x_1^{\mathsf{B}} x_2^{\mathsf{B}}$. В экономике имеется по пять единиц каждого блага. Внутреннее допустимое распределение ($x_1^{\mathsf{A}} = 4$, $x_2^{\mathsf{A}} = 3$, $x_1^{\mathsf{B}} = 1$, $x_2^{\mathsf{B}} = 2$) не удовлетворяет необходимому условию для внутренних Парето-оптимальных распределений ($MRS_{12}^{\mathsf{A}} = MRS_{12}^{\mathsf{B}}$), а значит, не является Парето-оптимальным. Предпочтения, представимые функцией Кобба–Дугласа, являются выпуклыми (множества $\left\{x^k : u^k\left(x^k\right) \geqslant \widetilde{u}^k\right\}$, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$, выпуклы) и строго монотонными на внутренних наборах (если одна координата набора больше нуля, то увеличение другой координаты ведет к росту полезности). А это означает, что дифференциальная характеристика внутренних Парето-оптимальных распределений $MRS_{12}^{\mathsf{A}} = MRS_{12}^{\mathsf{B}}$ является не только необходимым условием, но и достаточным. Следовательно, внутреннее допустимое распределение ($x_1^{\mathsf{A}} = 1$, $x_2^{\mathsf{A}} = 1$, $x_1^{\mathsf{B}} = 4$, $x_2^{\mathsf{B}} = 4$), удовлетворяющее этому условию, является Парето-оптимальным. Заметим, что уровень полезности, достижимый в Парето-оптимальном распределении $u^{\mathsf{A}}(1, 1) = 1$ (а значит, $\widehat{u}^{\mathsf{A}} = 1$) меньше полезности, достижимой потретителем A в точке ($x_1^{\mathsf{A}} = 4$, $x_2^{\mathsf{A}} = 3$), а именно: $u^{\mathsf{A}}(4, 3) = 12$ (следовательно, $\overline{u}^{\mathsf{A}} = 12$).

3.23. **(а)** Определим избыточный спрос на первое и второе блага, соответственно, следующим образом:

$$z_1(p_1, p_2) = x_1^{\mathsf{A}}(p_1, p_2) + x_1^{\mathsf{B}}(p_1, p_2) - \omega_1^{\mathsf{A}} - \omega_1^{\mathsf{B}},$$
$$z_2(p_1, p_2) = x_2^{\mathsf{A}}(p_1, p_2) + x_2^{\mathsf{B}}(p_1, p_2) - \omega_2^{\mathsf{A}} - \omega_2^{\mathsf{B}},$$

где $x_1^k(p_1, p_2)$, $x_2^k(p_1, p_2)$ — решение задачи максимизации полезности потребителя k, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$.

Если предпочтения монотонны, то при любых ценах, при которых определен избыточный спрос, выполнен закон Вальраса: $p_1 z_1(p_1, p_2) + p_2 z_2(p_1, p_2) = 0$.

Под свойством монотонности здесь понимается следующее: если потребитель увеличит потребление обоих благ, то благосостояние потребителя увеличится. Закон Вальраса выполнен и при другом свойстве: если предпочтения потребителя таковы, что для любого набора в любой его окрестности найдется лучший набор (свойство локальной ненасыщаемости).

(б) Равновесие по Вальрасу — это набор $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}})$, такой, что

1) набор $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ является решением задачи потребителя A:

$$\begin{cases} u^{\mathsf{A}}(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}) \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}} \geqslant 0, x_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ p_1 x_1^{\mathsf{A}} + p_2 x_2^{\mathsf{A}} \leqslant p_1 \omega_1^{\mathsf{A}} + p_2 \omega_2^{\mathsf{A}}, \end{cases}$$

при равновесных ценах $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$;

2) набор $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$ является решением задачи потребителя B:

$$\begin{cases} u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}},\, x_2^{\mathsf{B}}\right) \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{B}} \geqslant 0, x_2^{\mathsf{B}} \geqslant 0}, \\ p_1 x_1^{\mathsf{B}} + p_2 x_2^{\mathsf{B}} \leqslant p_1 \omega_1^{\mathsf{B}} + p_2 \omega_2^{\mathsf{B}}, \end{cases}$$

при равновесных ценах $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$;

3) все рынки уравновешены:

$$\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}; \qquad \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}.$$

(в) Равновесное распределение является допустимым, поскольку условие 3) определения равновесия совпадает с условием допустимости (см. задачу 3.1).

(г) Пусть предпочтения потребителей монотонны. Если набор $(\widetilde{p}_1,\, \widetilde{p}_2,\, \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}},\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}})$ — равновесие, то равновесное распределение $(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}},\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}})$ является Парето-оптимальным.

Заметим, что вывод теоремы верен и при более слабом свойстве локальной ненасыщаемости (т. е. если предпочтения потребителя таковы, что для любого набора в любой его окрестности найдется лучший набор).

(д) Существуют различные формулировки второй теоремы благосостояния. В задачнике будем придерживаться следующей формулировки.

Пусть предпочтения потребителей монотонны и выпуклы. Тогда внутреннее равновесное распределение $(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}},\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}})$ *можно реализовать как равновесное в экономике с трансфертами* $T^k = p_1 x_1^k + p_2 x_2^k - p_1 \omega_1^k - p_2 \omega_2^k$, $k = \{\mathsf{A},\, \mathsf{B}\}$.

3.33. (а) Найдем множество Парето-оптимальных распределений графически.

Сначала изобразим в ящике Эджворта любое распределение и множество наборов, которые не хуже, чем рассматриваемый набор для каждого потребителя. Для этого изобразим кривые безразличия, на которых лежит данный набор (рис. 3.14).

Построим Парето-улучшение для данного распределения: не изменяя благосостояние агента B, повысим благосостояние агента A. Таким образом, можно получить некоторые Парето-оптимальные распределения (рис. 3.15).

Найдем теперь множество всех Парето-оптимальных распределений (рис. 3.16).

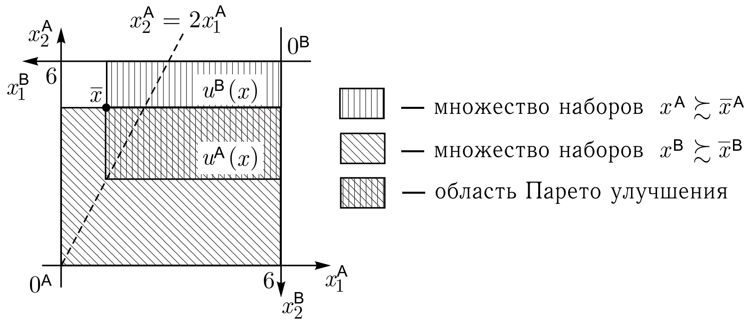

Рис. 3.14. Распределение $\overline{x}$ не является оптимальным по Парето

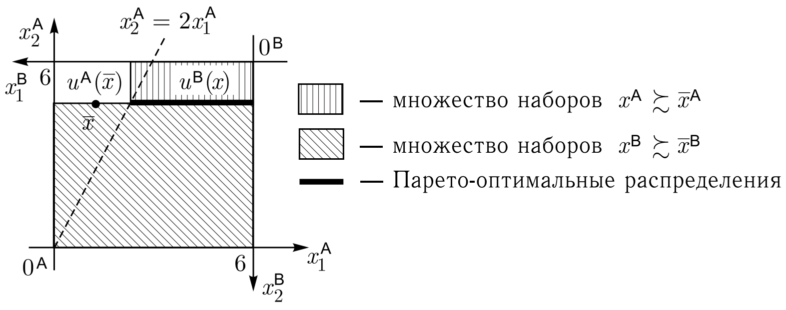

Рис. 3.15. Парето-оптимальные распределения

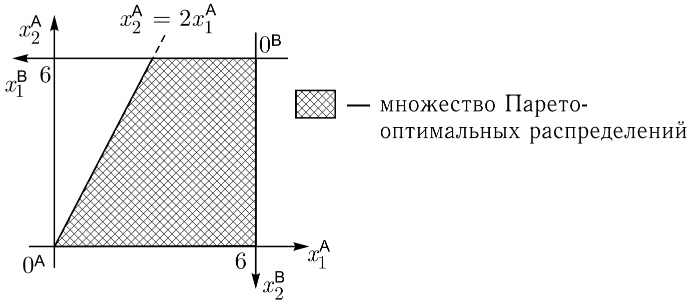

Рис. 3.16. Множество всех оптимальных по Парето-распределений

В любом распределении, находящемся в закрашенной области, невозможно повысить благосостояние ни одного из агентов, не снижая благосостояние другого. Следовательно, все распределения из закрашенной области являются Парето-оптимальными.

(б) Кривая цена–потребление представляет собой совокупность оптимальных наборов потребителя при различных относительных ценах. Так как в данной экономике потребитель имеет неизменный начальный запас, то стоимость начального запаса будет меняться с изменением относительных цен. Изобразим графически на одном рисунке в ящике Эджворта кривые цена–потребление для потребителей A и B (см. рис. 3.17).

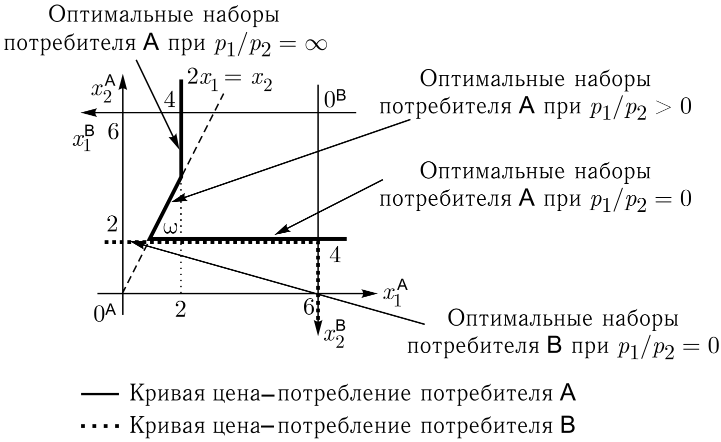

Рис. 3.17. Кривые цена–потребление для обоих потребителей

Равновесные распределения могут быть только в точках, где кривые цена–потребление для агентов пересекаются, поскольку в этом случае данные распределения являются решением задачи каждого потребителя при некоторых ценах (по определению кривой цена–потребление). Найдем цены, при которых в указанных точках будет решена задача максимизации полезности каждого агента. Находим, что в данном случае распределения $\{(x_1^A, x_2^A) = (6 - a, 2), (x_1^B, x_2^B) = (a, 4)\}$, $a \in [0, 5]$, являются равновесными при ценах $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 0$.

Заметим, что в п. (а) было получено множество Парето-оптимальных распределений для данной экономики. Равновесные распределения, полученные в этой экономике, являются Парето-оптимальными, что согласуется с первой теоремой благосостояния.

3.34. (а) Ответы на задания пункта основаны на графическом анализе (см. рис. 3.18).

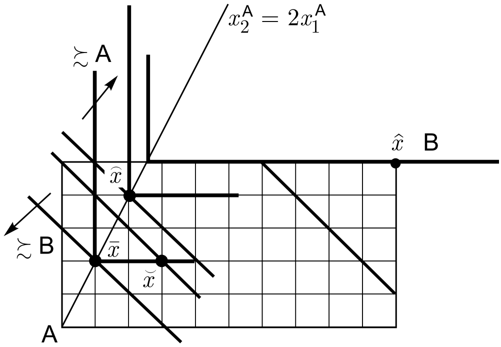

Рис. 3.18

(i) Распределение не оптимально по Парето, так как можно улучшить положение B, не ухудшая положения A, забирая у A некоторое (до 7,5) количество первого товара и отдавая его агенту B.

(ii) Распределение оптимально по Парето, поскольку множество не худших наборов для A и множество лучших для B не пересекаются, как и множества наборов, лучших для A и не худших для B.

(iii) Заметим, что в распределении выполнено неравенство $x_2^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{B}} > 5$, т. е. оно недопустимо и, следовательно, не может быть оптимальным по Парето.

(iv) Нет, неверно, поскольку в распределении $\widehat{x}$ положение агента B хуже, чем в распределении $\breve{x}$: $u^{\mathsf{B}}(8,1) = 9 < u^{\mathsf{B}}(7,3) = 10$.

Можно привести и графическое пояснение, что распределение $\widehat{x}^{\mathsf{A}} = (2,4)$, $\widehat{x}^{\mathsf{B}} = (8,1)$ не лежит в области Парето-улучшения для распределения $\breve{x}^{\mathsf{A}} = (3,2)$, $\breve{x}^{\mathsf{B}} = (7,3)$.

(б) Множество оптимальных по Парето распределений изображено на рис. 3.19.

(в) Точка начальных запасов не может быть равновесием, поскольку выбиралась бы различными агентами при различных ценах. На рис. 3.20 графически изображено равновесие. Указаны цены и распределение: $p_1^*/p_2^* = 2/3$, $x^{*\mathsf{A}} = (2{,}5;\ 5)$, $x^{*\mathsf{B}} = (7{,}5;\ 0)$.

3.38. (а) В допустимом распределении $x_1^{\mathsf{A}} + x_1^{\mathsf{B}} = \omega_1$ и $x_2^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{B}} = \omega_2$. Первое условие выполнено при $x_1^{\mathsf{A}} = 11$, однако второе условие для заданных значений не выполнено и, следо-

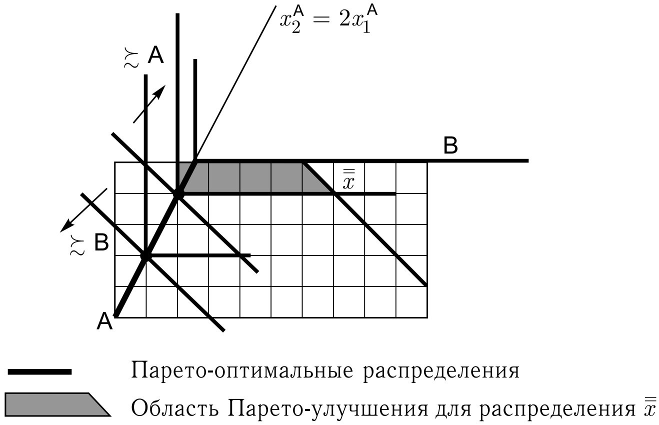

Рис. 3.19. Множество оптимальных по Парето (эффективных) распределений

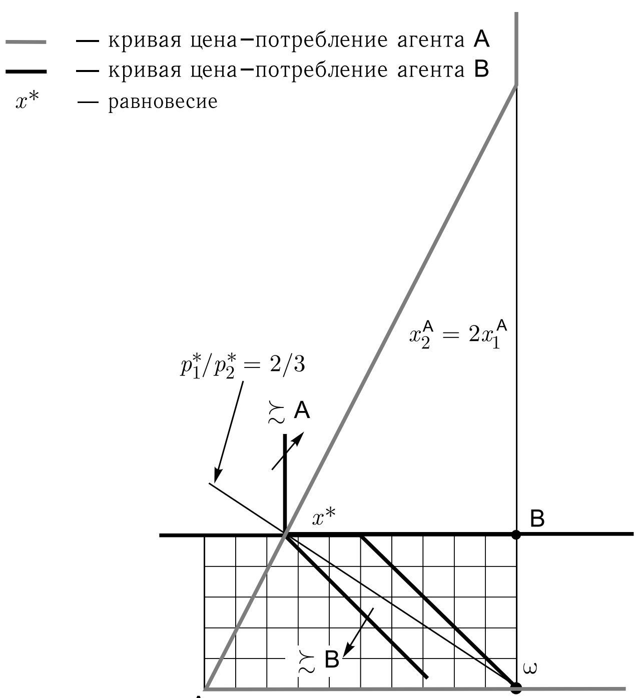

Рис. 3.20. Равновесное распределение соответствует точке пересечения кривых цена–потребление

вательно, не существует значений x_1^{A}, при которых указанное распределение допустимо.

(б) Заданное распределение допустимо. Дифференциальная характеристика внутренних оптимальных по Парето распределений $MRS_{12}^{\mathsf{A}} = MRS_{12}^{\mathsf{B}}$. Так как предпочтения, представимые функциями полезности Кобба–Дугласа, выпуклы и строго монотонны на внутренних наборах, то это условие является не только необходимым для оптимальных по Парето распределений, но и достаточным. Подставив компоненты распределения в условие $2\,x_2^{\mathsf{A}}/x_1^{\mathsf{A}} = x_2^{\mathsf{B}}/x_1^{\mathsf{B}}$, убедимся, что распределение оптимально по Парето.

(в) В рассматриваемой задаче достаточное условие для внутренних оптимальных по Парето распределений $MRS_{12}^{\mathsf{A}} = MRS_{12}^{\mathsf{B}}$. Для заданных предпочтений это означает $2x_2^{\mathsf{A}}/x_1^{\mathsf{A}} = x_2^{\mathsf{B}}/x_1^{\mathsf{B}}$. Так как оптимальное по Парето распределение допустимо, то $x_1^{\mathsf{A}} + x_1^{\mathsf{B}} = 21$ и $x_2^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{B}} = 8$. Из системы трех уравнений с тремя неизвестными найдем недостающие компоненты внутреннего оптимального по Парето распределения $x_1^{\mathsf{A}} = 18$, $x_2^{\mathsf{A}} = 6$, $x_2^{\mathsf{B}} = 2$.

(г) Начнем с рассмотрения внутренних Парето-оптимальных распределений. По определению Парето оптимальные распределения должны быть допустимыми: $x_1^{\mathsf{A}} + x_1^{\mathsf{B}} = 21$, $x_2^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{B}} = 8$.

Кроме того, если функции полезности дифференцируемы, для внутренних точек должно быть выполнено условие: $MRS_{12}^{\mathsf{A}} = MRS_{12}^{\mathsf{B}}$. В данном случае

$$MRS_{12}^{\mathsf{A}} = \frac{\partial u^{\mathsf{A}}/\partial x_1^{\mathsf{A}}}{\partial u^{\mathsf{A}}/\partial x_2^{\mathsf{A}}} = \frac{2x_2^{\mathsf{A}}}{x_1^{\mathsf{A}}}, \qquad MRS_{12}^{\mathsf{B}} = \frac{\partial u^{\mathsf{B}}/\partial x_1^{\mathsf{B}}}{\partial u^{\mathsf{B}}/\partial x_2^{\mathsf{B}}} = \frac{x_2^{\mathsf{B}}}{x_1^{\mathsf{B}}}.$$

В случае выпуклых и строго монотонных предпочтений это условие является необходимым и достаточным. В данной задаче предпочтения потребителей, описываемые функциями полезности Кобба–Дугласа, являются выпуклыми и строго монотонными на внутренних наборах. Таким образом, для того, чтобы найти внутренние Парето-оптимальные распределения, нам нужно решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_2^{\mathsf{A}}/x_1^{\mathsf{A}} = x_2^{\mathsf{B}}/x_1^{\mathsf{B}}, \\ x_1^{\mathsf{A}} + x_1^{\mathsf{B}} = 2, \\ x_2^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{B}} = 8. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Выразим из условий допустимости (т. е. из второго и третьего уравнений системы (3.1)) $x_1^{\mathsf{B}} = 21 - x_1^{\mathsf{A}}$ и $x_2^{\mathsf{B}} = 8 - x_2^{\mathsf{A}}$ и подставим в условие равенства предельных норм замещения (т. е. в первое уравнение системы). В итоге получим следующее уравнение контрактной кривой, описывающей внутренние Парето-оптимальные распределения:

$$x_2^{\mathsf{A}} = 8\,x_1^{\mathsf{A}}/(42 - x_1^{\mathsf{A}}), \quad \text{где } 0 < x_1^{\mathsf{A}} < 21. \tag{3.2}$$

Будут ли в данной экономике граничные Парето-оптимальные распределения? Рассмотрим распределение

$$\left(x_1^{\mathsf{A}} = 0,\, 0 < x_2^{\mathsf{A}} < \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}},\, x_1^{\mathsf{B}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}},\, x_2^{\mathsf{B}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}} - x_2^{\mathsf{A}}\right).$$

Это распределение допустимо. Полезности потребителей при таком распределении:

$$u^{\mathsf{A}}\left(0,\, x_2^{\mathsf{A}}\right) = 0,$$

$$u^{\mathsf{B}}\left(\omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}},\, \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}} - x_2^{\mathsf{A}}\right) = \left(\omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}\right)^{1/2}\left(\omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}} - x_2^{\mathsf{A}}\right)^{1/2}.$$

Рассматриваемое распределение не Парето-оптимально, поскольку существует допустимое распределение

$$\left(x_1^{\mathsf{A}} = 0, x_2^{\mathsf{A}} = 0,\, x_1^{\mathsf{B}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}},\, x_2^{\mathsf{B}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}\right),$$

в котором полезность потребителя A не меньше $u^{\mathsf{A}}(0,\, 0) = 0$, а полезность потребителя B выше:

$$u^{\mathsf{B}}\left(\omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}},\, \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}\right) =$$
$$= \left(\omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}\right)^{1/2}\left(\omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}\right)^{1/2} > \left(\omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}\right)^{1/2}\left(\omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}} - x_2^{\mathsf{A}}\right)^{1/2},$$

чем в рассматриваемом.

Аналогичным образом, в экономике, в которой предпочтения потребителей представимы функциями полезности Кобба–Дугласа, можно построить Парето-улучшения для всех распределений, в которых хотя бы у одного из потребителей в наборе в положительном количестве только одно благо.

Рассмотрим распределение, в котором один из потребителей обладает совокупными запасами обоих благ, а у другого потребителя, соответственно, оба блага в нулевом количестве: $\left(x_1^{\mathsf{A}} = 0,\, x_2^{\mathsf{A}} = 0,\, x_1^{\mathsf{B}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}},\, x_2^{\mathsf{B}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}\right)$. Это распределение допустимо. Возможно ли построить для него Парето-улучшение, а значит, увеличить благосостояние одного из потребителей, не уменьшив благосостояние другого, распоряжаясь имеющимися в экономике благами? Увеличить благосостояние B невозможно, так как у него в этом распределении имеются совокупные запасы обоих благ. Увеличить благосостояние A возможно, только уменьшая благосостояние потребителя B. А это означает, что построить Парето-улучшение невозможно, т. е. рассматриваемое распределение Парето-оптимально.

Аналогичные рассуждения можно провести для распределения $\left(x_1^{\mathsf{A}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}},\ x_2^{\mathsf{A}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}},\ x_1^{\mathsf{B}} = 0,\ x_2^{\mathsf{B}} = 0\right)$. Поэтому граничными Парето-оптимальными точками будут только две точки: $(x_1^{\mathsf{A}} = 0,\ x_2^{\mathsf{A}} = 0,\ x_1^{\mathsf{B}} = 21,\ x_2^{\mathsf{B}} = 8)$ (точка начала координат потребителя A, O^{A}) и $(x_1^{\mathsf{A}} = 21,\ x_2^{\mathsf{A}} = 8,\ x_1^{\mathsf{B}} = x_2^{\mathsf{B}} = 0)$ (точка начала координат потребителя B, O^{B}).

Заметим, что эти две точки описываются той же зависимостью, что и внутренние Парето-оптимальные распределения. Действительно, подставляя $x_1^{\mathsf{A}} = 0$ в (3.2) получим $x_2^{\mathsf{A}} = 0$; аналогично, при $x_1^{\mathsf{A}} = 21$ получаем $x_2^{\mathsf{A}} = 8$.

Таким образом, множество Парето-оптимальных распределений (контрактная кривая) имеет вид:

$$x_2^{\mathsf{A}} = 8x_1^{\mathsf{A}}/(42 - x_1^{\mathsf{A}}), \qquad \text{где } 0 \leqslant x_1^{\mathsf{A}} \leqslant 21. \tag{3.3}$$

Поскольку контрактная кривая (3.3) не является линейной, для графической иллюстрации множества Парето-оптимальных распределений в ящике Эджворта не корректно использовать построение по точкам — необходимо исследовать поведение функции $x_2^{\mathsf{A}}(x_1^{\mathsf{A}}) = 8x_1^{\mathsf{A}}/(42 - x_1^{\mathsf{A}})$ в допустимом интервале.

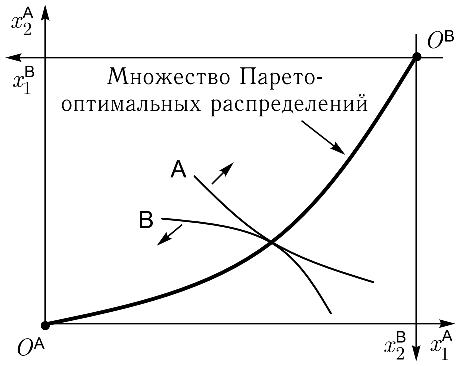

Рис. 3.21. Множество Парето-оптимальных распределений

Итак, проанализируем, является ли функция (3.3) возрастающей или убывающей, вычислив ее первую производную: $\dfrac{dx_2^{\mathsf{A}}}{dx_1^{\mathsf{A}}} = \dfrac{8(42 - x_1^{\mathsf{A}}) + 8x_1^{\mathsf{A}}}{(42 - x_1^{\mathsf{A}})^2} = \dfrac{336}{(42 - x_1^{\mathsf{A}})^2} > 0$. Поскольку первая производная положительна, следовательно, данная функция является возрастающей. Теперь исследуем знак второй производной: $\dfrac{d^2x_2^{\mathsf{A}}}{d(x_1^{\mathsf{A}})^2} = \dfrac{2 \cdot 336}{(42 - x_1^{\mathsf{A}})^3} > 0$; так как вторая производная положительна, то данная функция является выпуклой.

(д) Так как предпочтения обоих потребителей монотонны, то в экономике выполнен закон Вальраса. Закон Вальраса звучит так: стоимость совокупного избыточного спроса равна нулю при любых ценах, при которых определен избыточный спрос, т. е. $p_1z_1(p_1, p_2) + p_2z_2(p_1, p_2) = 0$ при любых ценах, при которых определен избыточный спрос, где $z_i(p_1, p_2) = x_i^{\mathsf{A}}(p_1, p_2) + x_i^{\mathsf{B}}(p_1, p_2) - \omega_i^{\mathsf{A}} - \omega_i^{\mathsf{B}}$ — функция совокупного избыточного спроса на благо i, $i = 1, 2$.

Воспользовавшись законом Вальраса, $p_1z_1 + 13{,}5\,p_2 = 0$, найдем $z_1 = -6{,}75$.

Кроме того, избыточный спрос можно вычислить по формуле $z_2\,(p_1,\, p_2) = x_2^{\mathsf{A}}\,(p_1,\, p_2) + x_2^{\mathsf{B}}\,(p_1,\, p_2) - \omega_2^{\mathsf{A}} - \omega_2^{\mathsf{B}}$.

(е) В п. (д) приведена формулировка закона Вальраса: *стоимость совокупного избыточного спроса равна нулю при любых ценах, при которых определен избыточный спрос.* Если предпочтения потребителей монотонны (см. задачу 3.23), то закон Вальраса выполнен. Поскольку в данном случае предпочтения потребителей описываются функциями полезности Кобба–Дугласа, а значит, являются монотонными (при одновременном увеличении в наборе обоих благ полезность увеличивается), то закон Вальраса в данной экономике должен быть выполнен. Убедимся в этом. Решим задачи потребителей, чтобы найти функции спроса обоих потребителей на каждое благо.

$$\text{Задача потребителя } \mathsf{A}\text{:}\quad \begin{cases} \left(x_1^{\mathsf{A}}\right)^{2/3} \cdot \left(x_2^{\mathsf{A}}\right)^{1/3} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}} \geqslant 0,\, x_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ p_1x_1^{\mathsf{A}} + p_2x_2^{\mathsf{A}} \leqslant 9\,p_1 + 3\,p_2. \end{cases}$$

Воспользовавшись известной формулой спроса для функции полезности вида Кобба–Дугласа, получим функции спроса потребителя A:

$$x_1^{\mathsf{A}}(p_1,\,p_2) = \frac{2\,m^{\mathsf{A}}}{3\,p_1} = \frac{2(9\,p_1+3\,p_2)}{3\,p_1} = \frac{18\,p_1+6\,p_2}{3\,p_1} = 6+2\frac{p_2}{p_1},$$

$$x_2^{\mathsf{A}}(p_1,\,p_2) = \frac{m^{\mathsf{A}}}{3\,p_2} = \frac{9\,p_1+3\,p_2}{3\,p_2} = 1+3\frac{p_1}{p_2}.$$

Задача потребителя B: $\begin{cases} \left(x_1^{\mathsf{B}}\right)^{1/2}\cdot\left(x_2^{\mathsf{B}}\right)^{1/2} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{B}}\geqslant 0,\,x_2^{\mathsf{B}}\geqslant 0}, \\ p_1x_1^{\mathsf{B}}+p_2x_2^{\mathsf{B}} = 12\,p_1+5\,p_2. \end{cases}$

Функции спроса потребителя B:

$$x_1^{\mathsf{B}}(p_1,\,p_2) = \frac{m^{\mathsf{B}}}{2\,p_1} = \frac{12\,p_1+5\,p_2}{2\,p_1} = 6+\frac{5}{2}\cdot\frac{p_2}{p_1},$$

$$x_2^{\mathsf{B}}(p_1,\,p_2) = \frac{m^{\mathsf{B}}}{2\,p_2} = \frac{12\,p_1+5\,p_2}{2\,p_2} = \frac{5}{2}+6\frac{p_1}{p_2}.$$

Следует заметить, что спрос потребителей на каждое благо, а значит, и избыточный спрос в рассматриваемой экономике определен только для положительных цен.

Теперь найдем избыточный спрос на каждое благо:

$$z_1(p_1,\,p_2) = x_1^{\mathsf{A}}(p_1,\,p_2)+x_1^{\mathsf{B}}(p_1,\,p_2)-\omega_1^{\mathsf{A}}-\omega_1^{\mathsf{B}} = \\ = 6+2\frac{p_2}{p_1}+6+\frac{5}{2}\cdot\frac{p_2}{p_1}-21 = \frac{9}{2}\cdot\frac{p_2}{p_1}-9,$$

$$z_2(p_1,\,p_2) = x_2^{\mathsf{A}}(p_1,\,p_2)+x_2^{\mathsf{B}}(p_1,\,p_2)-\omega_2^{\mathsf{A}}-\omega_2^{\mathsf{B}} = \\ = 1+3\frac{p_1}{p_2}+\frac{5}{2}+6\frac{p_1}{p_2}-8 = 9\frac{p_1}{p_2}-\frac{9}{2}.$$

Вычислим стоимость совокупного избыточного спроса:

$$p_1z_1(p_1,\,p_2)+p_2z_2(p_1,\,p_2) = \\ = p_1\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{p_2}{p_1}-9\right)+p_2\left(9\frac{p_1}{p_2}-\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2}p_2-9\,p_1+9\,p_1-\frac{9}{2}p_2 = 0$$

для всех цен, при которых определен избыточный спрос. Следовательно, как мы и ожидали, закон Вальраса в данной экономике выполнен.

(ж) Приведем определение равновесия по Вальрасу для рассматриваемой экономики:

Набор $(\widetilde{p}_1,\ \widetilde{p}_2,\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}},\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}},\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}},\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}})$ является равновесием по Вальрасу в данной экономике, если

1) набор $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}},\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ является решением задачи потребителя A:

$$\begin{cases} (x_1^{\mathsf{A}})^{2/3}\cdot(x_2^{\mathsf{A}})^{1/3}\to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}}\geqslant 0,x_2^{\mathsf{A}}\geqslant 0}, \\ p_1x_1^{\mathsf{A}}+p_2x_2^{\mathsf{A}}\leqslant 9\,p_1+3\,p_2, \end{cases}$$

при равновесных ценах $(\widetilde{p}_1,\ \widetilde{p}_2)$;

2) набор $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}},\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$ является решением задачи потребителя B:

$$\begin{cases} \left(x_1^{\mathsf{B}}\right)^{1/2}\cdot\left(x_2^{\mathsf{B}}\right)^{1/2}\to \max\limits_{x_1^{\mathsf{B}}\geqslant 0,x_2^{\mathsf{B}}\geqslant 0}, \\ p_1x_1^{\mathsf{B}}+p_2x_2^{\mathsf{B}}\leqslant 12\,p_1+5\,p_2, \end{cases}$$

при равновесных ценах $(\widetilde{p}_1,\widetilde{p}_2)$;

3) все рынки уравновешены:

$$\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}+\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}=21,\qquad \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}+\widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}=8.$$

Замечание. Пункт 1) определения равновесия может быть записан следующим образом. Набор $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}},\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ является решением задачи потребителя A:

$$\begin{cases} (x_1^{\mathsf{A}})^{2/3}\cdot(x_2^{\mathsf{A}})^{1/3}\to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}}\geqslant 0,x_2^{\mathsf{A}}\geqslant 0}, \\ \widetilde{p}_1x_1^{\mathsf{A}}+\widetilde{p}_2x_2^{\mathsf{A}}\leqslant 9\,\widetilde{p}_1+3\,\widetilde{p}_2. \end{cases}$$

Главное, чтобы из определения было понятно, что потребитель решает задачу при равновесных ценах. Аналогичное замечание верно и для п. 2).

(з) Следуя определению, найдем равновесие по Вальрасу, уравновесив рынок первого блага (как следствие закона Вальраса, цены, уравновешивающие спрос и предложение на рынке первого блага, автоматически приведут в равновесие и второй рынок):

$$x_1^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{p}_1,\widetilde{p}_2\right)+x_1^{\mathsf{B}}\left(\widetilde{p}_1,\widetilde{p}_2\right)=21,\ \text{ т. е. }\ \underbrace{6+\frac{2\,\widetilde{p}_2}{\widetilde{p}_1}}_{x_1^{\mathsf{A}}}+\underbrace{6+\frac{5}{2}\cdot\frac{\widetilde{p}_2}{\widetilde{p}_1}}_{x_2^{\mathsf{B}}}=21,$$

откуда находим $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1=2$. Теперь, подставляя равновесные цены в функции спроса потребителей, найдем объемы спроса на оба блага для каждого потребителя в равновесии:

$$\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 6 + 2\frac{\widetilde{p}_2}{\widetilde{p}_1} = 6 + 2 \cdot 2 = 10, \quad \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 6 + \frac{5}{2} \cdot \frac{\widetilde{p}_2}{\widetilde{p}_1} = 6 + \frac{5}{2} \cdot 2 = 11,$$

$$\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 3\frac{\widetilde{p}_1}{\widetilde{p}_2} + 1 = 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2{,}5, \quad \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 6\frac{\widetilde{p}_1}{\widetilde{p}_2} + \frac{5}{2} = 5 \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 5{,}5.$$

Замечание. Найдя объем спроса потребителя A на первое благо, объем спроса потребителя B на первое благо можно найти из условия сбалансированности рынка первого блага, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}} = 21$. Аналогичным образом можно найти объем спроса потребителя B на второе благо из условия $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}} = 8$.

Таким образом, равновесие в данной экономике будет следующим: $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 2$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 10$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 2{,}5$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 11$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 5{,}5$.

(и) Выведем уравнение кривых цена–потребление. Решение задачи потребителя A,

$$\begin{cases} (x_1^{\mathsf{A}})^{2/3} \cdot (x_2^{\mathsf{A}})^{1/3} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}} \geqslant 0, x_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ p_1 x_1^{\mathsf{A}} + p_2 x_2^{\mathsf{A}} = 9\,p_1 + 3\,p_2, \end{cases}$$

при положительных ценах, записывается следующим образом:

$$x_1^{\mathsf{A}}\,(p_1,\,p_2) = \frac{6\,p_1 + 2\,p_2}{p_1} \equiv 6 + 2\frac{p_2}{p_1},$$

$$x_2^{\mathsf{A}}\,(p_1,\,p_2) = \frac{3\,p_1 + p_2}{p_2} \equiv 3\frac{p_1}{p_2} + 1.$$

Выразив отношение цен $\dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{x_1^{\mathsf{A}} - 6}{2}$ из выражения для спроса на первое благо и подставив в функцию спроса на второе благо, получим уравнение кривой цена–потребление потребителя A: $x_2^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}\right) = \dfrac{x_1^{\mathsf{A}}}{x_1^{\mathsf{A}} - 6}$. Заметим, что только при $x_1^{\mathsf{A}} > 6$ значения x_2^{A} положительные. Исследование функции показывает, что функция убывает $\left(\left(x_2^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}\right)\right)' = -\dfrac{6}{(x_1^{\mathsf{A}} - 6)^2} < 0\right)$ и при $x_1^{\mathsf{A}} > 6$ выпукла $\left(\left(x_2^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}\right)\right)'' = \dfrac{12}{(x_1^{\mathsf{A}} - 6)^3} > 0\right)$.

Аналогично можно вывести уравнение кривой цена потребление для потребителя B: $x_2^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}}\right) = \dfrac{5\,x_1^{\mathsf{B}}}{2(x_1^{\mathsf{B}} - 6)}$.

В точке пересечения $\dfrac{x_1^{\mathsf{A}}}{x_1^{\mathsf{A}}-6} = 8 - \dfrac{5\,x_1^{\mathsf{B}}}{2(x_1^{\mathsf{B}}-6)}$. Воспользовавшись условием допустимости $x_1^{\mathsf{B}} = 21 - x_1^{\mathsf{A}}$, получим уравнение $\dfrac{x_1^{\mathsf{A}}}{x_1^{\mathsf{A}}-6} = 8 - \dfrac{5(21-x_1^{\mathsf{A}})}{2(15-x_1^{\mathsf{A}})}$. Уравнению удовлетворяют два корня: $x_1^{\mathsf{A}} = 10$ и $x_1^{\mathsf{A}} = 9$. Подставив полученные корни в уравнение кривой цена–потребление для A, получим $x_2^{\mathsf{A}} = 2{,}5$ и $x_2^{\mathsf{A}} = 3$ соответственно. Из условий допустимости найдем $x_1^{\mathsf{B}} = 11$, $x_2^{\mathsf{B}} = 5{,}5$ при $x_1^{\mathsf{A}} = 10$ и $x_2^{\mathsf{A}} = 2{,}5$, а также $x_1^{\mathsf{B}} = 12$, $x_2^{\mathsf{B}} = 5$ при $x_1^{\mathsf{A}} = 9$ и $x_2^{\mathsf{A}} = 3$.

Как видим, распределение ($x_1^{\mathsf{A}} = 9$, $x_2^{\mathsf{A}} = 3$, $x_1^{\mathsf{B}} = 12$, $x_2^{\mathsf{B}} = 5$) — это точка начальных запасов. Однако является ли это распределение равновесным? В равновесии набор $x_1^{\mathsf{A}} = 9$, $x_2^{\mathsf{A}} = 3$ и набор $x_1^{\mathsf{B}} = 12$, $x_2^{\mathsf{B}} = 5$ должны быть выбраны потребителями A и B соответственно, при одинаковых ценах. Во внутреннем решении задачи потребителя $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$ выполнено условие $MRS_{12}^{k} = p_1/p_2$. Однако в точке начальных запасов $MRS_{12}^{\mathsf{A}} \neq MRS_{12}^{\mathsf{B}}$. Таким образом, точка начальных запасов не является равновесным распределением.

В другом найденном распределении, ($x_1^{\mathsf{A}} = 10$, $x_2^{\mathsf{A}} = 2{,}5$, $x_1^{\mathsf{B}} = 11$, $x_2^{\mathsf{B}} = 5{,}5$), имеем $MRS_{12}^{\mathsf{A}} = MRS_{12}^{\mathsf{B}} = 1/2$. Так как предпочтения, представимые функциями Кобба–Дугласа, выпуклы и строго монотонны на внутренних наборах, то условие $MRS_{12}^{k} = p_1/p_2$, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$, является не только необходимым, но и достаточным для внутренних решений.

Таким образом, распределение ($x_1^{\mathsf{A}} = 10$, $x_2^{\mathsf{A}} = 2{,}5$, $x_1^{\mathsf{B}} = 11$, $x_2^{\mathsf{B}} = 5{,}5$) — равновесное при ценах $p_1/p_2 = 1/2$.

Изобразим пересечение кривых цена–потребление в ящике Эджворта (см. рис. 3.22).

Кривая цена–потребление — это множество наборов, соответствующих оптимальным точкам при всех возможных отношениях цен. Таким образом, пересечение бюджетной линии и кривой цена–потребление — это точка оптимального выбора. В этой точке бюджетная линия является касательной кривой безразличия для функции Кобба–Дугласа. Равновесные наборы являются решением задач потребителей при равновесных ценах. Таким образом, в равновесном распределении кривые безразличия потребителей соприкасаются, как показано на рис. 3.23.

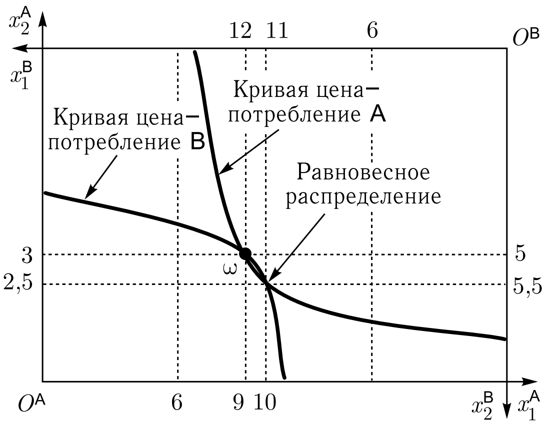

Рис. 3.22. Равновесное распределение соответствует точке пересечения кривых цена–потребление

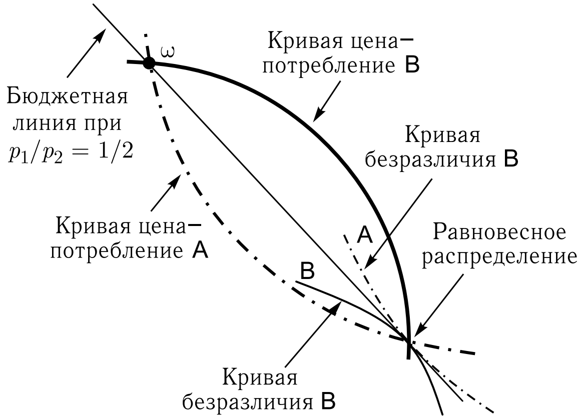

Рис. 3.23. Равновесное распределение соответствует точке пересечения кривых цена–потребление, где кривые безразличия потребителей касаются

В точке начальных запасов кривые цена–потребление пересекаются, но эта точка является оптимальным выбором потребителей при разных ценах.

(к) 1-*й вариант решения.*

Заметим, что в рассматриваемом распределении выполнены условия сбалансированности рынков: $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 21$ и $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 8$.

Так как предпочтения потребителя A выпуклы и строго монотонны на внутренних наборах, функция полезности дифференцируема, то внутреннее решение задачи потребителя А удовлетворяет следующим достаточным условиям:

$$\begin{cases} MRS^{\mathsf{A}}_{1,2} = p_1/p_2, \\ p_1 x_1^{\mathsf{A}} + p_2 x_2^{\mathsf{A}} = 9\,p_1 + 3\,p_2 + T^{\mathsf{A}}. \end{cases}$$

Аналогично, так как предпочтения В выпуклы и строго монотонны на внутренних наборах, функция полезности дифференцируема, то внутреннее решение задачи потребителя В удовлетворяет достаточным условиям:

$$\begin{cases} MRS^{\mathsf{B}}_{1,2} = p_1/p_2, \\ p_1 x_1^{\mathsf{B}} + p_2 x_2^{\mathsf{B}} = 12\,p_1 + 5\,p_2 + T^{\mathsf{B}}. \end{cases}$$

Вычислим предельные нормы замещения потребителей в точке $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 14,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 4,\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 7,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 4)$:

$$MRS^{\mathsf{A}}_{12}(\widetilde{x}) = 2\,\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}/\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 2 \cdot 4/14 = 4/7,$$

$$MRS^{\mathsf{B}}_{12}(\widetilde{x}) = \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}/\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 4/7,$$

т. е. в данной точке потребители имеют одинаковые предельные нормы замещения. Следовательно, в качестве равновесного отношения цен можно выбрать $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 4/7$. Положим $\widetilde{p}_1 = 4$, тогда $\widetilde{p}_2 = 7$. При таких ценах для приобретения набора $\widetilde{x}^{\mathsf{A}} = (14,\ 4)$ потребителю А потребуется доход, равный $\widetilde{p}_1\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 4 \cdot 14 + 7 \cdot 4 = 84$, тогда как доход потребителя А при данных ценах, равный стоимости первоначального запаса, составляет $\widetilde{\omega}_1^{\mathsf{A}}\widetilde{p}_1 + \widetilde{\omega}_2^{\mathsf{A}}\widetilde{p}_2 = 9 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 57$. Таким образом, трансферт потребителю А составит $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} = 27$.

Замечание. Нормировку можно не вводить. Уравнение бюджетной линии $p_1 x_1^{\mathsf{A}} + p_2 x_2^{\mathsf{A}} = 9\,p_1 + 3\,p_2 + T^{\mathsf{A}}$ разделим на p_2, откуда, подставив $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 4/7$ и $\widetilde{x}^{\mathsf{A}} = (14, 4)$, найдем $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} = 27\,\widetilde{p}_2/7$.

Аналогично найдем трансферт для потребителя В:

$$\widetilde{T}^{\mathsf{B}} = \widetilde{p}_1\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} + \widetilde{p}_2\widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} - (\widetilde{p}_1\widetilde{\omega}_1^{\mathsf{B}} + \widetilde{p}_2\widetilde{\omega}_2^{\mathsf{B}}) = \\ = 4 \cdot 7 + 7 \cdot 4 - (4 \cdot 12 + 7 \cdot 5) = -27.$$

Замечание. Без введения нормировки трансферт для В составит $\widetilde{T}^{\mathsf{B}} = -27\,\widetilde{p}_2/7$.

Следовательно, распределение $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 14,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 4,\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 7,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 4)$, цены $\widetilde{p}_1 = 4$, $\widetilde{p}_2 = 7$ и трансферты $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} = 27$, $\widetilde{T}^{\mathsf{B}} = -27$

составляют равновесие с трансфертами, поскольку удовлетворяют всем его условиям: 1) набор $\widetilde{x}^{\mathsf{A}} = (14,\, 4)$ является решением задачи потребителя A при ценах $\widetilde{p}_1 = 4$, $\widetilde{p}_2 = 7$ и трансферте $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} = 27$; 2) набор $\widetilde{x}^{\mathsf{B}} = (7,\, 4)$ является решением задачи потребителя B при ценах $\widetilde{p}_1 = 4$, $\widetilde{p}_2 = 7$ и трансферте $\widetilde{T}^{\mathsf{B}} = -27$; 3) рынки уравновешены: $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 21$ и $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 8$; 4) выполнен финансовый баланс: $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} + \widetilde{T}^{\mathsf{B}} = 0$.

Заметим, что тот факт, что нам удалось реализовать распределение $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 14,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 4,\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 7,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 4)$ как равновесное, обусловлен выполнением всех предпосылок второй теоремы благосостояния: данное распределение является внутренним Парето-оптимальным распределением, а предпочтения потребителей выпуклы и монотонны.

2-й вариант решения.

По определению равновесия с трансфертами набор $\widetilde{x}^{\mathsf{A}} = (14,\, 4)$ должен являться решением задачи потребителя A при некоторых ценах $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$ и трансферте $\widetilde{T}^{\mathsf{A}}$, т. е. при данных ценах и трансферте набор должен удовлетворять функциям спроса, полученным в п. (а):

$$x_1^{\mathsf{A}}(p_1,\, p_2) = \frac{2\,m^{\mathsf{A}}}{3\,p_1} = \frac{2(9\,p_1 + 3\,p_2 + T^{\mathsf{A}})}{3\,p_1},$$

$$x_2^{\mathsf{A}}(p_1,\, p_2) = \frac{m^{\mathsf{A}}}{3\,p_2} = \frac{9\,p_1 + 3\,p_2 + T^{\mathsf{A}}}{3\,p_2}.$$

Подставив $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 14$ и $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 4$, получим следующие соотношения:

$$14 = 2(9\,\widetilde{p}_1 + 3\,\widetilde{p}_2 + \widetilde{T}^{\mathsf{A}})/(3\,\widetilde{p}_1), \tag{3.4}$$

$$4 = (9\,\widetilde{p}_1 + 3\,\widetilde{p}_2 + \widetilde{T}^{\mathsf{A}})/(3\,\widetilde{p}_2). \tag{3.5}$$

Теперь разделим (3.4) на (3.5):

$$\frac{14}{4} = \frac{2(9\,\widetilde{p}_1 + 3\,\widetilde{p}_2 + \widetilde{T}^{\mathsf{A}})/(3\,\widetilde{p}_1)}{(9\,\widetilde{p}_1 + 3\,\widetilde{p}_2 + \widetilde{T}^{\mathsf{A}})/(3\,\widetilde{p}_2)},$$

откуда получаем $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 7/4$. Введем нормировку: $\widetilde{p}_1 = 4$, тогда $\widetilde{p}_2 = 7$. При таких ценах трансферт потребителя A составляет (из (3.4)) $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} = 21\,\widetilde{p}_1 - 9\,\widetilde{p}_1 - 3\,\widetilde{p}_2 = 27$. Убедимся, что и из соотношения (3.5) получаем тот же трансферт потребителя: $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} = 27$.

Таким образом, набор $\widetilde{x}^{\mathsf{A}} = (14, 4)$ является решением задачи потребителя A при ценах $\widetilde{p}_1 = 4$, $\widetilde{p}_2 = 7$ и трансферте $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} = 27$.

Рассмотрим задачу потребителя B: набор $\widetilde{x}^{\mathsf{B}} = (7, 4)$ должен являться решением задачи потребителя B при некоторых ценах $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$ и трансферте $\widetilde{T}^{\mathsf{B}}$, т. е. при данных ценах и трансферте должен удовлетворять функциям спроса, полученным в п. (а):

$$x_1^{\mathsf{B}}(p_1, p_2) = \frac{m^{\mathsf{B}}}{2\,p_1} = \frac{12\,p_1 + 5\,p_2 + T^{\mathsf{B}}}{2\,p_1},$$
$$x_2^{\mathsf{B}}(p_1, p_2) = \frac{m^{\mathsf{B}}}{2\,p_2} = \frac{12\,p_1 + 5\,p_2 + T^{\mathsf{B}}}{2\,p_2}.$$

Подставив $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 7$ и $\widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 4$, получим следующие соотношения:

$$7 = (21\,\widetilde{p}_1 + 5\,\widetilde{p}_2 + \widetilde{T}^{\mathsf{B}})/(2\,\widetilde{p}_1), \tag{3.6}$$
$$4 = (12\,\widetilde{p}_1 + 5\,\widetilde{p}_2 + \widetilde{T}^{\mathsf{B}})/(2\,\widetilde{p}_2). \tag{3.7}$$

Теперь разделим (3.6) на (3.7):

$$\frac{7}{4} = \frac{(21\,\widetilde{p}_1 + 5\,\widetilde{p}_2 + \widetilde{T}^{\mathsf{B}})/(2\,\widetilde{p}_1)}{(12\,\widetilde{p}_1 + 5\,\widetilde{p}_2 + \widetilde{T}^{\mathsf{B}})/(2\,\widetilde{p}_2)},$$

откуда получаем $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 7/4$, что согласуется с результатом, полученным выше при анализе решения задачи потребителя A. При таких ценах трансферт потребителя B составляет (из (3.6)) $\widetilde{T}^{\mathsf{B}} = 14\,\widetilde{p}_1 - 12\,\widetilde{p}_1 - 5\,\widetilde{p}_2 = 2\,\widetilde{p}_1 - 5\,\widetilde{p}_2 = -27$. При таком значении трансферта соотношение (3.7) выполнено.

Таким образом, распределение $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 14,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 4,\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 7,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 4)$ можно реализовать как равновесное при ценах $\widetilde{p}_1 = 4$, $\widetilde{p}_2 = 7$ и трансфертах $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} = 27$, $\widetilde{T}^{\mathsf{B}} = -27$. Действительно, 1) набор $\widetilde{x}^{\mathsf{A}} = (14, 4)$ является решением задачи потребителя A при ценах $\widetilde{p}_1 = 4$, $\widetilde{p}_2 = 7$ и трансферте $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} = 27$; 2) набор $\widetilde{x}^{\mathsf{B}} = (7, 4)$ является решением задачи потребителя B при ценах $\widetilde{p}_1 = 4$, $\widetilde{p}_2 = 7$ и трансферте $\widetilde{T}^{\mathsf{B}} = -27$; 3) рынки уравновешены: $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 21$ и $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 8$; 4) выполнен финансовый баланс: $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} + \widetilde{T}^{\mathsf{B}} = 0$.

Замечание. Для решения задачи нет необходимости вводить нормировку цен. Из (3.4) имеем $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} = 12\,\widetilde{p}_1 - 3\,\widetilde{p}_2$, откуда с учетом соотношения цен $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 7/4$ получим $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} = 12\,\widetilde{p}_1 - 3\,\widetilde{p}_2 = 27/4\,\widetilde{p}_1 = 27/7\,\widetilde{p}_2$. Из соотношения (3.5) $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} = 9\,\widetilde{p}_2 - 9\,\widetilde{p}_1$ и при $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 7/4$ получаем тот же самый результат: $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} = (27/4)\,\widetilde{p}_1 = (27/7)\,\widetilde{p}_2$.

Аналогично находится трансферт для потребителя B. Выражение (3.6) может быть представлено в виде $7 = 6 + 5/2 \times \times \widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 + \widetilde{T}^{\mathsf{B}}/(2\widetilde{p}_1)$, откуда с учетом $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 7/4$ получаем $T^{\mathsf{B}} = -(27/4)\widetilde{p}_1$ или $T^{\mathsf{B}} = -(27/7)\widetilde{p}_2$. Из соотношения (3.7) находим $T^{\mathsf{B}} = 3\widetilde{p}_2 - 12\widetilde{p}_1$, откуда следует $T^{\mathsf{B}} = -(27/4)\widetilde{p}_1 = -(27/7)\widetilde{p}_2$, что согласуется с результатом полученным из выражения (3.6).

(л) В рассматриваемой игре последний ход принадлежит потребителю A, который решает задачу максимизации полезности при предложенных ценах. Решение задачи потребителя A при положительных ценах записываются следующим образом: $x_1^{\mathsf{A}}(p_1, p_2) = (6p_1 + 2p_2)/p_1$, $x_2^{\mathsf{A}}(p_1, p_2) = (3p_1 + p_2)/p_2$. Тогда потребление благ индивидом B составит $x_1^{\mathsf{B}} = 21 - (6p_1 + 2p_2)/p_1 = (15p_1 - 2p_2)/p_1$, $x_2^{\mathsf{B}} = 8 - (3p_1 + p_2)/p_2 = (7p_2 - 3p_1)/p_2$, а полезность потребителя B, соответственно, примет значение $\big((15p_1 - 2p_2)/p_1\big)^{1/2}\big((7p_2 - 3p_1)/p_2\big)^{1/2}$. Обозначим $t = p_1/p_2$. Тогда, чтобы выбрать цены, максимизирующие его полезность, потребитель B должен решить задачу $(15 - 2/t)^{1/2}(7 - 3t)^{1/2} \to \max\limits_{t \geqslant 0}$. Поскольку значение объема потребления агентами не может быть отрицательной и нулевой величиной, а положительное монотонное преобразование не изменяет ранжирование наборов, то логарифмирование целевой функции не изменит решения поставленной задачи максимизации, т. е. задача сведется к следующей: $\ln\big((15t - 2)/t\big) + \ln(7 - 3t) \to \max\limits_{t \geqslant 0}$. Первая производная вогнутой целевой функции будет равна нулю при положительном $t = \sqrt{14/45}$, т. е. предлагаемые цены $p_1/p_2 = \sqrt{14/45}$. Соответствующие распределения можно получить, подставляя цены в функцию спроса для агента A, а затем воспользовавшись условиями допустимости распределения.

Приведем графическую иллюстрацию. Как уже было сказано в решении к п. (и), кривая цена–потребление A — это множество наборов, соответствующих оптимальным точкам при всех возможных ценах. Потребитель B выберет такие цены, при которых его собственное благосостояние будет максимальным из возможных. Максимальное благосостояние, с учетом выбора потребителя A, потребитель B сможет достичь в точке, где его кривая безразличия касается кривой цена–потребления потребителя A (см. рис. 3.24).

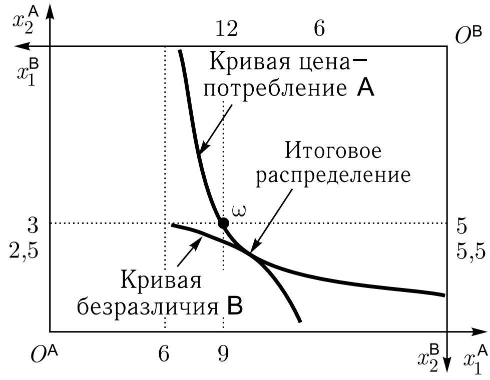

Рис. 3.24. Потребитель В выберет точку, в которой кривая безразличия В касается кривой цена–потребление А

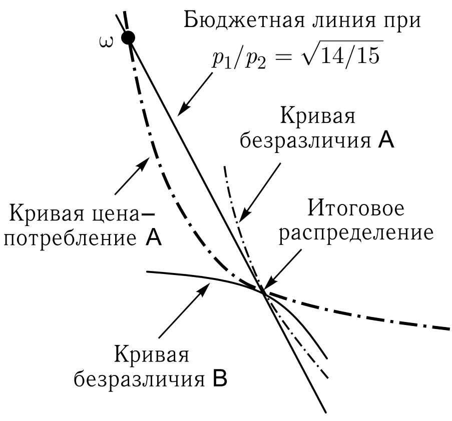

Рис. 3.25. Распределение в п. (л) не является оптимальным по Парето

Точку, в которой кривая безразличия В касается кривой цена–потребления А, потребитель А выберет при ценах $p_1/p_2 = \sqrt{14/45}$ (кривая безразличия А касается бюджетной линии в точке на кривой цена–потребления, являющейся точкой пересечения бюджетной линии и кривой цена–потребление). Однако в этой точке кривая безразличия В не касается бюджетной линии и пересекает кривую безразличия потребителя А. Таким образом, итоговое распределение не является оптимальным по Парето (см. рис. 3.25). Заметим, что не всегда такая схема приводит к неоптимальному по Парето распределению (см. задачу 3.47).

3.41. (б)

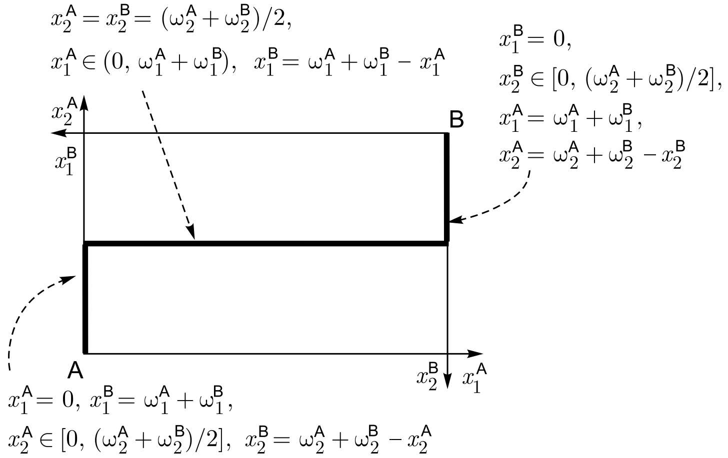

Рис. 3.26. Множество Парето-оптимальных распределений

3.42. (б)

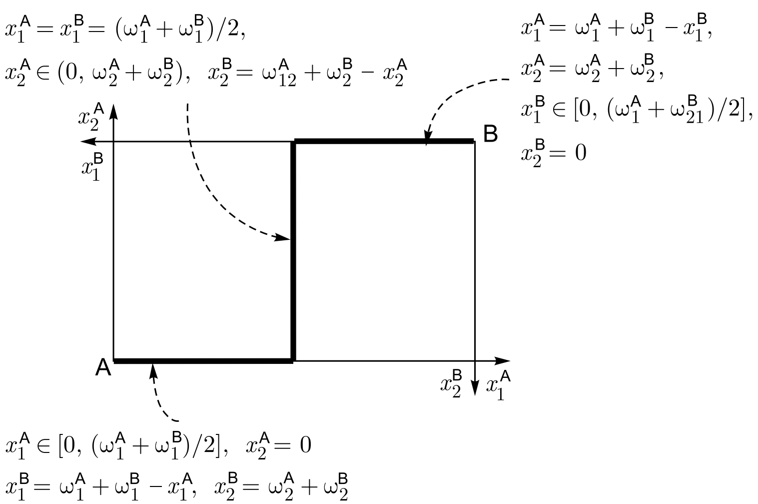

Рис. 3.27. Множество Парето-оптимальных распределений

3.46. (а) Уравнение произвольной кривой безразличия потребителя A записывается, как $x_1^{\mathsf{A}} + 2\sqrt{x_2^{\mathsf{A}}} = \overline{u}^{\mathsf{A}}$. Типичные кривые безразличия изображены на рис. 3.28.

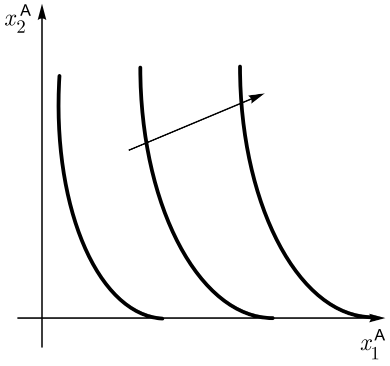

Рис. 3.28. Кривые безразличия потребителя A

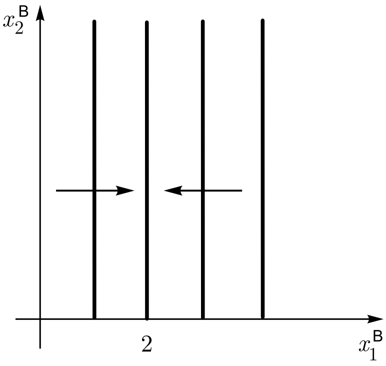

Рис. 3.29. Кривые безразличия потребителя B

Уравнение кривой безразличия потребителя B задается как $x_1^{\mathsf{B}} - \dfrac{1}{4}(x_1^{\mathsf{B}})^2 = \overline{u}^{\mathsf{B}}$. Заметим, что полезность потребителя B не зависит от потребления второго блага. Это означает, что кривые безразличия — вертикальные линии. Кроме того, поскольку $\partial u^{\mathsf{B}}/\partial x_1^{\mathsf{B}} > 0$ на участке $x_1^{\mathsf{B}} \in (0,\,2)$, $\partial u^{\mathsf{B}}/\partial x_1^{\mathsf{B}} = 0$ и $\partial^2 u^{\mathsf{B}}/\partial (x_1^{\mathsf{B}})^2 = -1/2 < 0$ при $x_1^{\mathsf{B}} = 2$ и $\partial u^{\mathsf{B}}/\partial x_1^{\mathsf{B}} < 0$ при $x_1^{\mathsf{B}} > 2$, то полезность возрастает на участке, где $x_1^{\mathsf{B}} \in (0,\,2)$, достигает максимума при $x_1^{\mathsf{B}} = 2$ и убывает с ростом x_1^{B}. Кривые безразличия потребителя B изображены на рис. 3.29.

Таким образом, анализируя предпочтения потребителей, можно сделать несколько выводов относительно Парето-оптимальных распределений.

Во-первых, в Парето-оптимальных распределениях весь запас второго блага достается потребителю A. Действительно, для любого допустимого распределения, в котором потребление второго блага индивидом B ненулевое, можно построить Парето-улучшение, уменьшив в наборе B количество второго блага (полезность B не изменится) и передав его потребителю A (полезность A возрастет).

Во-вторых, в Парето-оптимальных распределениях у потребителя B не может быть больше двух единиц первого блага. Если в потребительском наборе B больше двух единиц первого блага, то потребитель B может передать A разницу между имеющимся у него количеством первого блага и двумя единицами, что приведет к росту полезности обоих потребителей.

Покажем, что распределения $(14 \leqslant \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} \leqslant 16,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 17,\ 0 \leqslant \leqslant \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} \leqslant 2,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 0)$, такие что $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 16$, являются Парето-оптимальными. Заданные распределения являются допустимыми. В этих распределениях индивид A потребляет весь имеющийся в экономике запас второго блага. Следовательно, увеличение благосостояния возможно только при увеличении потребления первого блага. Но это либо приведет к уменьшению благосостояния потребителя B (если $0 < \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} \leqslant 2$), либо, если $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 0$, то это невозможно, так как A потребляет весь запас первого блага. Если $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 2$, то B достигает максимального возможного для него уровня благосостояния, а значит, невозможно увеличить его полезность. Если $0 \leqslant \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} < 2$, то увеличить благосостояние B возможно только путем увеличения потребления первого блага, но это приведет к уменьшению благосостояния потребителя A. Таким образом, заданные распределения допустимы, и для каждого из них не существует допустимого распределения, в котором благосостояние хотя бы одного из потребителей было бы выше, а другого не ниже, чем в рассматриваемом распределении. Следовательно, эти распределения Парето-оптимальны. Множество Парето-оптимальных распределений изображено на рис. 3.30.

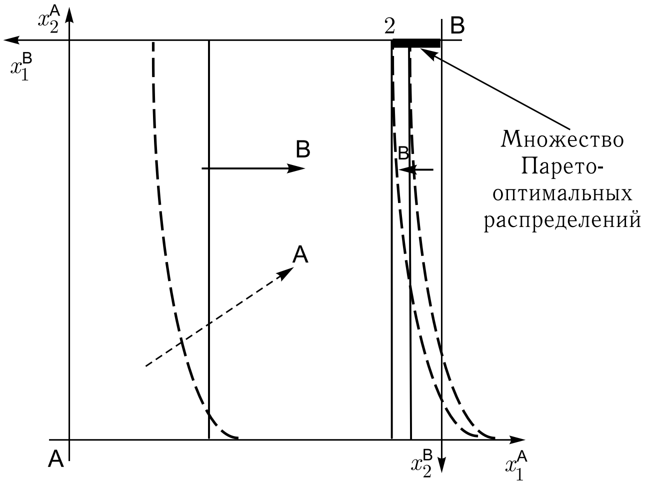

Рис. 3.30. Множество Парето-оптимальных распределений

(б) Для того чтобы найти равновесие, решим задачи потребителей.

Задача потребителя A записывается следующим образом:

$$\begin{cases} x_1^{\mathsf{A}} + 2\sqrt{x_2^{\mathsf{A}}} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ p_1 x_1^{\mathsf{A}} + p_2 x_2^{\mathsf{A}} \leqslant 16\, p_1. \end{cases}$$

Оставляем читателям в качестве упражнения показать, что в решении не может быть $x_2^{\mathsf{A}} = 0$. Поскольку предпочтения A выпуклые и строго монотонные, то условие $MRS_{12}^{\mathsf{A}} = p_1/p_2$ для внутреннего решения является не только необходимым, но и достаточным. Кроме того, так как предпочтения строго монотонные, то решение (не обязательно внутреннее) должно удовлетворять бюджетному ограничению как равенству: $p_1 x_1^{\mathsf{A}} + p_2 x_2^{\mathsf{A}} = 16\, p_1$. Вычислим предельную норму замещения: $MRS_{12}^{\mathsf{A}} = \sqrt{x_2^{\mathsf{A}}}$. Тогда из равенства предельной нормы замещения отношению цен, получим, что во внутреннем решении $x_2^{\mathsf{A}} = p_1^2/p_2^2$. Максимальное количество второго блага, которое может себе позволить потребитель, равно величине дохода, деленной на цену второго блага. Тогда для того, чтобы решение было внутренним, должно быть выполнено $x_2^{\mathsf{A}} = p_1^2/p_2^2 < 16\, p_1/p_2$, откуда $p_1/p_2 < 16$. Подставляя $x_2^{\mathsf{A}} = p_1^2/p_2^2$ в бюджетное ограничение, получим $p_1 x_1^{\mathsf{A}} + p_1^2/p_2 = 16\, p_1$, откуда найдем, что во внутреннем решении $x_1^{\mathsf{A}} = (16\, p_1 - p_1^2/p_2)/p_1$. Если же $p_1^2/p_2 \geqslant 16\, p_1$, а значит, $p_1/p_2 \geqslant 16$, то решение будет граничным, как показано на рис. 3.31.

Таким образом, спрос потребителя A задается следующим образом:

$$x_1^{\mathsf{A}}(p_1,\, p_2) = \begin{cases} 16 - p_1/p_2, & p_1/p_2 < 16, \\ 0, & p_1/p_2 \geqslant 16; \end{cases}$$

$$x_2^{\mathsf{A}}(p_1,\, p_2) = \begin{cases} p_1^2/p_2^2, & p_1/p_2 < 16, \\ 16\, p_1/p_2, & p_1/p_2 \geqslant 16. \end{cases}$$

Заметим также, что при нулевой цене как первого, так и второго товаров задача потребителя A не имеет решения, поскольку предпочтения этого потребителя строго монотонны. При этих ценах спрос на оба товара со стороны потребителя A был бы бесконечно большим, а следовательно, уравновешенность рынков при нулевой цене любого блага не могла бы быть реализована в силу ограниченности запасов товаров в экономике. Поэтому

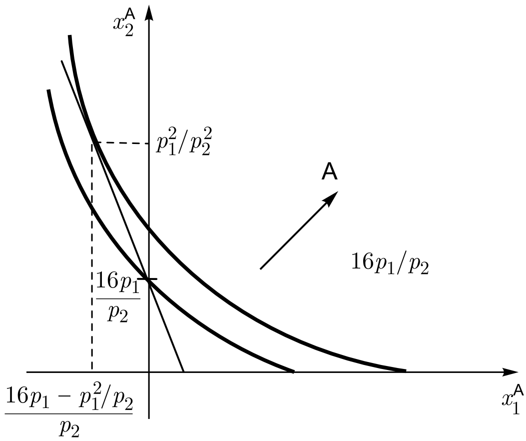

Рис. 3.31. При $p_1^2/p_2 \geqslant 16\,p_1$ максимальное значение полезности потребителя A достигается в точке $(0,\ 16\,p_1/p_2)$

далее при поиске равновесия мы исключим нулевые цены из рассмотрения, несмотря на то, что при нулевой цене как первого, так и второго товаров задача потребителя B имеет решение.

Решим задачу потребителя B: $\begin{cases} x_1^{\mathsf{B}} - \left(x_1^{\mathsf{B}}\right)^2/4 \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{B}},\, x_2^{\mathsf{B}} \geqslant 0}, \\ p_1 x_1^{\mathsf{B}} + p_2 x_2^{\mathsf{B}} \leqslant 17\,p_2. \end{cases}$

Максимальную полезность потребитель B достигает на наборах $\left(2,\ x_2^{\mathsf{B}}\right)$ для любого неотрицательного значения x_2^{B}. Следовательно, потребитель B купит две единицы первого блага, если $2 \leqslant 17\,p_2/p_1$, так как $17\,p_2/p_1$ — это максимальное количество первого блага, которое может позволить себе потребитель. Тогда x_2^{B} можно найти из бюджетного ограничения: $2\,p_1 + p_2 x_2^{\mathsf{B}} \leqslant 17\,p_2$, откуда $x_2^{\mathsf{B}} \in [0,\ (17 - 2\,p_1/p_2)]$. Если $2 > 17\,p_2/p_1$, то потребитель B купит столько первого блага, насколько хватит его дохода, а второе благо покупать не будет. Таким образом, функция спроса потребителя B:

$$x_1^{\mathsf{B}}(p_1,\ p_2) = \begin{cases} 2, & p_2/p_1 \geqslant 2/17, \\ 17\,p_2/p_1, & p_2/p_1 < 2/17; \end{cases}$$

$$x_2^{\mathsf{B}}(p_1,\ p_2) = \begin{cases} \left[0,\ (17 - 2\,p_1/p_2)\right], & p_2/p_1 \geqslant 2/17, \\ 0, & p_2/p_1 < 2/17, \\ \text{любое количество}, & p_2/p_1 = 0, \\ \left[0,\ 17\,p_2/p_2\right], & p_1/p_2 = 0. \end{cases}$$

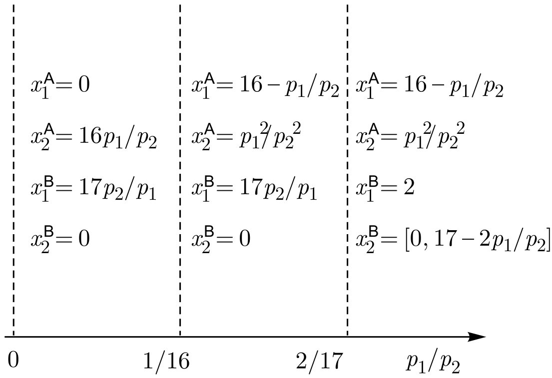

Рис. 3.32. Решения задач потребителей в различных интервалах цен

На рис. 3.32 указаны решения задач потребителей в различных интервалах цен.

Рассмотрим $p_2/p_1 \geqslant 2/17$. Условие сбалансированности рынка первого блага $\underbrace{16 - p_1/p_2}_{x_1^A} + \underbrace{2}_{x_1^B} = \underbrace{16}_{\omega_1^A + \omega_1^B}$ выполнено при отношении цен $p_2/p_1 = 1/2 \geqslant 2/17$. В этой задаче необходимо проверить уравновешенность обоих рынков, так как предпочтения потребителя B не являются монотонными, поэтому нет гарантии выполнения закона Вальраса, и его выполнение не было проверено выше. Проверим, уравновешен ли при этих ценах рынок второго блага. Объем спроса потребителя A на второе благо при ценах $p_2/p_1 = 1/2$ составляет $x_2^A = 4$. Для того чтобы было выполнено условие сбалансированности $x_2^A + x_2^B = 17$, объем спроса на второе благо потребителя B должен быть $x_2^B = 13$. При найденных ценах в решении задачи потребителя B выполнено $x_2^B \in [0, 13]$. Таким образом, набор ($x_1^B = 2$, $x_2^B = 13$) принадлежит множеству решений задачи потребителя B при найденных ценах.

Следовательно, равновесием является набор ($\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 1/2$, $\widetilde{x}_1^A = 14$, $\widetilde{x}_2^A = 4$, $\widetilde{x}_1^B = 2$, $\widetilde{x}_2^B = 13$).

Рассмотрим интервал отношения цен $p_2/p_1 \in (1/16, 2/17)$. Из условия сбалансированности рынка первого блага:

$$\underbrace{16 - p_1/p_2}_{x_1^A} + \underbrace{17p_2/p_1}_{x_1^B} = 16,$$

найдем $p_2/p_1 = 1/\sqrt{17}$. Однако найденное отношение цен не принадлежит интервалу $(1/16,\ 2/17)$. Таким образом, не существует равновесия при $p_2/p_1 \in (1/16, 2/17)$.

Осталось рассмотреть интервал отношения цен $p_2/p_1 \in \in (0,\ 1/16]$. В этом случае условие сбалансированности рынка первого блага записывается как $\underbrace{0}_{x_1^{\mathsf{A}}} + \underbrace{17p_2/p_1}_{x_1^{\mathsf{B}}} = 16$, откуда $p_2/p_1 = 16/17 \notin (0, 1/16]$. Следовательно, при $p_2/p_1 \in (0,\ 1/16]$ равновесие в задаче не существует.

Подводя итог, можем сказать, что в экономике существует единственное равновесие ($\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 1/2$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 14$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 4$, $x_1^{\mathsf{B}} = 2$, $x_2^{\mathsf{B}} = 13$).

Равновесное распределение ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 14$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 4$, $x_1^{\mathsf{B}} = 2$, $x_2^{\mathsf{B}} = 13$) не является Парето-оптимальным, так как для него существуют Парето-улучшения. Например, в допустимом распределении ($\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 14$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 17$, $\widehat{x}_1^{\mathsf{B}} = 2$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{B}} = 0$) полезность потребителя A выше, чем в равновесном: $u^{\mathsf{A}}(14,\ 4) = \sqrt{4} + 14 > > u^{\mathsf{A}}(14,\ 17) = \sqrt{17} + 14$, а полезность потребителя B — такая же $u^{\mathsf{B}}(2,\ 13) = u^{\mathsf{B}}(2,\ 0) = 1$.

Одним из наиболее известных утверждений в микроэкономике является первая теорема благосостояния, в соответствии с которой равновесное распределение является Парето-оптимальным при довольно слабых предпосылках. В задачнике рассматривается формулировка, в которой требуется монотонность предпочтений. Однако предпочтения потребителя B не являются монотонными. В этом случае невозможно сослаться на первую теорему благосостояния — равновесное распределение может оказаться как Парето-оптимальным, так и не Парето-оптимальным.

(в) Распределения ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 16$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 0$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 0$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 17$) и ($\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 14$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 9$, $\widehat{x}_1^{\mathsf{B}} = 2$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{B}} = 8$) не являются Парето-оптимальными (см. п. (а)). Однако нельзя сослаться на первую теорему благосостояния, чтобы отклонить возможность реализации этих распределений как равновесных, поскольку предпочтения потребителя B не являются монотонными. Как было показано в п. (а), распределение ($\overline{x}_1^{\mathsf{A}} = 15$, $\overline{x}_2^{\mathsf{A}} = 17$, $\overline{x}_1^{\mathsf{B}} = 1$, $\overline{x}_2^{\mathsf{B}} = 0$) Парето-оптимально, но в экономике нарушены предпосылки второй теоремы благосостояния о монотонности предпочтений потребителя B, поэтому Парето-оптимальное распределение — граничное. Это означает, что нет никаких гарантий относительно реализации этого распределения как равновесного.

Рассмотрим первое из заданных распределений. Не существует положительных цен, при которых потребитель A при положительном доходе выберет набор, в котором отсутствует второе благо, а значит, и набор ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 16$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 0$). Если доход потребителя A — нулевой, то он, при положительных ценах, не сможет приобрести набор, в котором содержится положительное количество первого блага. Таким образом, соответствующее распределение нельзя реализовать как равновесное.

Попытаемся реализовать распределение ($\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 14$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 9$, $\widehat{x}_1^{\mathsf{B}} = 2$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{B}} = 8$) как равновесное. Рассмотрим задачу потребителя A: $\begin{cases} x_1^{\mathsf{A}} + 2\sqrt{x_2^{\mathsf{A}}} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ p_1 x_1^{\mathsf{A}} + p_2 x_2^{\mathsf{A}} \leqslant 16\,p_1 + T^{\mathsf{A}}. \end{cases}$ Внутреннее решение этой задачи удовлетворяет условию $MRS_{12}^{\mathsf{A}} = p_1/p_2$, которое в рассматриваемой задаче является не только необходимым, но и достаточным, и $x_2^{\mathsf{A}} = p_1^2/p_2^2$. В заданном распределении $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 9$. Такой выбор потребитель A будет делать при ценах $\widehat{p}_1/\widehat{p}_2 = 3$. Из бюджетного ограничения, выполненного в решении как равенство, в силу монотонности предпочтений найдем $x_1^{\mathsf{A}} = (16\,p_1 + T^{\mathsf{A}} - p_1^2/p_2)/p_1$. Подставив $\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 14$, найдем $T^{\mathsf{A}} = \widehat{p}_1$ при $\widehat{p}_1/\widehat{p}_2 = 3$. Следовательно, набор ($\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 14$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} =9$) является решением задачи потребителя A при ценах $\widehat{p}_1/\widehat{p}_2 = 3$ и трансферте $T^{\mathsf{A}} = \widehat{p}_1$.

Заметим, что для того, чтобы было выполнено $T^{\mathsf{A}} + T^{\mathsf{B}} = 0$, трансферт потребителю B должен составить $T^{\mathsf{B}} = -\widehat{p}_1$.

Рассмотрим решение задачи потребителя B:

$$\begin{cases} x_1^{\mathsf{B}} - 0{,}25\left(x_1^{\mathsf{B}}\right)^2 \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{B}},\, x_2^{\mathsf{B}} \geqslant 0}, \\ p_1 x_1^{\mathsf{B}} + p_2 x_2^{\mathsf{B}} \leqslant 17\,p_2 + T^{\mathsf{B}}. \end{cases}$$

Для того чтобы потребитель мог позволить купить $\widehat{x}_1^{\mathsf{B}} = 2$, должно быть выполнено условие $2\,p_1 \leqslant 17\,p_2 + T^{\mathsf{B}}$. При $T^{\mathsf{B}} = -\widehat{p}_1$ и $\widehat{p}_1/\widehat{p}_2 = 3$ это условие выполнено. Оставшийся от покупки первого блага доход потребитель B может потратить на покупку второго блага, что означает $x_2^{\mathsf{B}} \in \left[0,\, (17\,p_2 + T^{\mathsf{B}} - 2\,p_1)/p_2\right]$. При $T^{\mathsf{B}} = -\widehat{p}_1$ и $\widehat{p}_1/\widehat{p}_2 = 3$ выполнено $(17\,p_2 + T^{\mathsf{B}} - 2\,p_1)/p_2 = 8$. Следовательно, набор ($\widehat{x}_1^{\mathsf{B}} = 2$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{B}} = 8$) является решением задачи потребителя B при $T^{\mathsf{B}} = -\widehat{p}_1$ и $\widehat{p}_1/\widehat{p}_2 = 3$.

Для заданного распределения выполнены условия сбалансированности рынков: $x_1^{\mathsf{A}} + x_1^{\mathsf{B}} = 16$ и $x_2^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{B}} = 17$.

Таким образом, распределение ($\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 14$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 9$, $\widehat{x}_1^{\mathsf{B}} = 2$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{B}} = 8$) является равновесным при ценах $\widehat{p}_1/\widehat{p}_2 = 3$ и трансфертах $T^{\mathsf{A}} = \widehat{p}_1$ и $T^{\mathsf{B}} = -\widehat{p}_1$.

Перейдем к анализу распределения ($\overline{x}_1^{\mathsf{A}} = 15$, $\overline{x}_2^{\mathsf{A}} = 17$, $\overline{x}_1^{\mathsf{B}} = 1$, $\overline{x}_2^{\mathsf{B}} = 0$). Как было показано в п. (б) (и этот факт уже использовался выше в п. (в)), $x_2^{\mathsf{A}} = p_1^2/p_2^2$ во внутреннем решении задачи потребителя A. При $\overline{x}_2^{\mathsf{A}} = 17$ найдем $\overline{p}_1/\overline{p}_2 = \sqrt{17}$. Количество первого блага, потребляемого A, находится из условия $x_1^{\mathsf{A}} = (16\,p_1 + T^{\mathsf{A}} - 17\,p_2)/p_1$. При $\overline{p}_1/\overline{p}_2 = \sqrt{17}$ выбор потребителя A составляет $\overline{x}_1^{\mathsf{A}} = 15$ при трансферте $T^{\mathsf{A}} = (\sqrt{17} - 1)\overline{p}_1$. Таким образом, набор ($\overline{x}_1^{\mathsf{A}} = 15$, $\overline{x}_2^{\mathsf{A}} = 17$) является решением задачи потребителя A при $\overline{p}_1/\overline{p}_2 = \sqrt{17}$ и $T^{\mathsf{A}} = (\sqrt{17} - 1)p_1$.

Для того чтобы было выполнено условие $T^{\mathsf{A}} + T^{\mathsf{B}} = 0$, трансферт потребителю B должен составить $T^{\mathsf{B}} = (1 - \sqrt{17})\overline{p}_1$.

Потребитель B выбирает $\overline{x}_1^{\mathsf{B}} = 1$ в случае, если его доход позволяет купить ровно одну единицу первого блага (если бы доход был больше, то потребитель B выбрал бы бóльшее количество первого блага). При $T^{\mathsf{B}} = (1 - \sqrt{17})\overline{p}_1$ и $\overline{p}_1/\overline{p}_2 = \sqrt{17}$ количество первого блага, которое может купить потребитель B, составляет $(17\,\overline{p}_2 + T^{\mathsf{B}})/\overline{p}_1 = 1$, при этом выбор второго блага $\overline{x}_2^{\mathsf{B}} = 0$. Это означает, что набор ($\overline{x}_1^{\mathsf{B}} = 1$, $\overline{x}_2^{\mathsf{B}} = 0$) является решением задачи потребителя B при $T^{\mathsf{B}} = (1 - \sqrt{17})\overline{p}_1$ и $\overline{p}_1/\overline{p}_2 = \sqrt{17}$.

Осталось убедиться в выполнении условий сбалансированности рынков: $x_1^{\mathsf{A}} + x_1^{\mathsf{B}} = 16$ и $x_2^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{B}} = 17$.

Итак, распределение ($\overline{x}_1^{\mathsf{A}} = 15$, $\overline{x}_2^{\mathsf{A}} = 17$, $\overline{x}_1^{\mathsf{B}} = 1$, $\overline{x}_2^{\mathsf{B}} = 0$) может быть реализовано как равновесное при $\overline{p}_1/\overline{p}_2 = \sqrt{17}$, $T^{\mathsf{A}} = (\sqrt{17} - 1)\overline{p}_1$ и $T^{\mathsf{B}} = (1 - \sqrt{17})\overline{p}_1$.

3.47. а) В рассматриваемой игре последний ход принадлежит потребителю B, который решает задачу максимизации полезности при предложенных ценах:
$$\begin{cases} u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}},\, x_2^{\mathsf{B}}\right) \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{B}} \geqslant}, \\ p_1 x_1^{\mathsf{B}} + p_2 x_2^{\mathsf{B}} \leqslant p_1 \omega_1^{\mathsf{B}} + p_2 \omega_2^{\mathsf{B}}. \end{cases}$$

Решение этой задачи при $p_1,\, p_2 > 0$ записываются следующим образом: $x_1^{\mathsf{B}}(p_1,\, p_2) = \beta \dfrac{8\,p_1 + 4\,p_2}{\beta\,p_1 + p_2}$, $x_2^{\mathsf{B}}(p_1,\, p_2) = \dfrac{8\,p_1 + 4\,p_2}{\beta\,p_1 + p_2}$. При

$\beta = 2$ выбор потребителя B не зависит от цен: $x_1^{\mathsf{B}} = 8$, $x_2^{\mathsf{B}} = 4$. Таким образом, какие бы цены не предложил потребитель A, его потребление составит $x_1^{\mathsf{A}} = 16$, $x_2^{\mathsf{A}} = 4$, а полезность соответственно $u^{\mathsf{A}}(16, 4) = 20$.

При $p_1 = 0$, $p_2 > 0$ решение задачи потребителя B — это $x_1^{\mathsf{B}} \in [8, \infty)$, $x_2^{\mathsf{B}} = 4$. Так как, по предположению, потребитель B выбирает наиболее предпочтительный для потребителя A исход, то ответ совпадает со случаем положительных цен.

Аналогично, при $p_1 > 0$, $p_2 = 0$ решение задачи потребителя B — это $x_1^{\mathsf{B}} = 8$, $x_2^{\mathsf{B}} \in [4, \infty)$, и при беневолентном поведении потребителя B его выбор $x_1^{\mathsf{B}} = 8$, $x_2^{\mathsf{B}} = 4$.

Кривая цена–потребление — это множество наборов, соответствующих оптимальным точкам при всех возможных ценах. Пересечение бюджетной линии и кривой цена–потребление потребителем B соответствует точке оптимального выбора. Таким образом, если индивид A ищет цены, при которых благосостояние A было бы максимальным из возможных, A должен найти точку на кривой цена–потребление потребителя B, в которой полезность A была бы максимальной. При каких ценах B выберет эту точку? Чтобы ответить на этот вопрос, в общем случае нужно провести бюджетную линию через найденную точку и точку начальных запасов. Именно при соответствующих ценах B предпочтет выбрать желаемое потребителем A распределение (см. рис. 3.33). В рассматриваемой задаче точка начальных запасов совпадает с оптимальной для A. В итоге, какие бы цены A

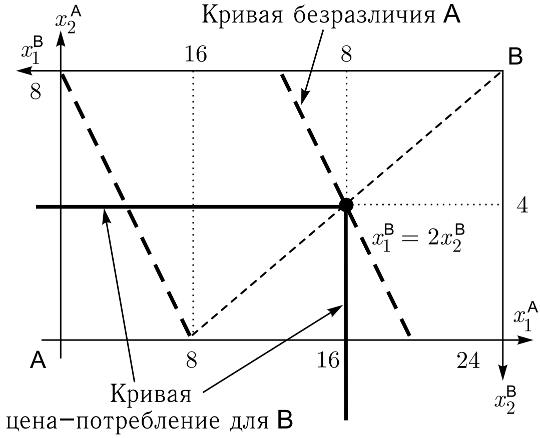

Рис. 3.33. Монополия в ящике Эджворта

не предложил, B выберет точку, в которой благосостояние A максимально.

Заметим, что в рассматриваемом случае финальное распределение благ оптимально по Парето, в отличие от финального распределения в п. (л) задачи 3.38.

(б) При $\beta = 1/2$ получим $x_1^{\mathsf{B}}(p_1, p_2) = \dfrac{8p_1 + 4p_2}{p_1 + 2p_2}$, $x_2^{\mathsf{B}}(p_1, p_2) = \dfrac{16p_1 + 8p_2}{p_1 + 2p_2}$. Тогда потребление благ индивидом A составит

$$x_1^{\mathsf{A}} = 24 - \frac{8p_1 + 4p_2}{p_1 + 2p_2}, \quad x_2^{\mathsf{A}} = 8 - \frac{16p_1 + 8p_2}{p_1 + 2p_2},$$

а полезность, соответственно, примет значение

$$24 - \frac{8p_1 + 4p_2}{p_1 + 2p_2} + 8 - \frac{16p_1 + 8p_2}{p_1 + 2p_2} = \frac{8p_1/p_2 + 52}{p_1/p_2 + 2}.$$

Обозначим $p_1/p_2 = t$. Тогда, чтобы выбрать цены, максимизирующие его полезность, потребитель A должен решить задачу $\dfrac{8t + 52}{t + 2} \to \max\limits_{t \geqslant 0}$. Однако максимизируемая функция убывает (первая производная равна $-36/(t+2)^2 < 0$). Это означает, что при положительных ценах не достигается максимум.

Изобразим ситуацию графически (см. рис. 3.34).

Финальное распределение будет достигнуто при ценах $p_1 = 0$, $p_2 > 0$. Оно является оптимальным по Парето, как и в п. (а). Отметим, что в п. (л) задачи 3.38 в аналогичной ситуации, но при других функциях полезности, финальное распределение не является оптимальным по Парето.

3.48. В формулировке задачи не указано, что $\widetilde{x}$ — внутреннее Парето-оптимальное распределение и что предпочтения выпуклые. Это дает основание предполагать, что утверждение может быть неверно.

Действительно, рассмотрим экономику обмена, в которой начальные запасы обоих благ одинаковы и равны 10. Предпочтения потребителей A и B представимы функциями полезности $u^{\mathsf{A}}(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}) = \sqrt{x_1^{\mathsf{A}}} + \sqrt{x_2^{\mathsf{A}}}$ и $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}) = x_1^{\mathsf{B}}$. Предпочтения, представимые указанными функциями полезности, являются монотонными, так как увеличение потребления обоих благ ведет к росту полезности. Предпочтения также являются выпуклыми (но не строго выпуклыми для агента B). Распределе-

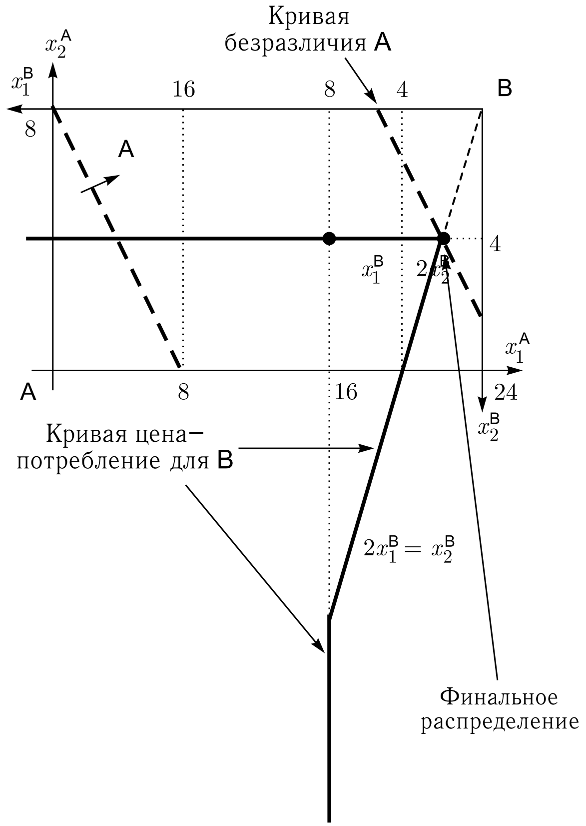

Рис. 3.34. Монополия в ящике Эджворта приводит к оптимальному по Парето распределению

ние $\left\{x^A = (0,\, 10)\,,\, x^B = (10,\, 0)\right\}$ является Парето-оптимальным (невозможно увеличить допустимым образом благосостояние хотя бы одного из потребителей, не уменьшая благосостояние другого). Однако это распределение невозможно реализовать как равновесное, поскольку ни при каких ценах агент A не выберет набор, содержащий нулевое количество любого товара. Убедитесь в этом самостоятельно, вычислив полезность при нулевом количестве одного из товаров и при предположении, что оба блага покупаются в ненулевом количестве. В последнем случае при любых положительных ценах и доходе найдется набор, в котором полезность выше. Если цена какого либо блага равна нулю, то потребитель A предъявляет неограниченный спрос на это благо.

3.49. Утверждение неверно. На рис. 3.35 изображены кривые безразличия для строго монотонных предпочтений, а также показано, что внутреннее Парето-оптимальное распределение $\widetilde{x} = \left(\widetilde{x}^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}^{\mathsf{B}}\right)$ не является равновесным, поскольку если набор $\widetilde{x}^{\mathsf{B}}$ является решением задачи потребителя B, то при соответствующих ценах и доходе потребитель A выберет не $\widetilde{x}^{\mathsf{A}}$, а $\widehat{x}^{\mathsf{A}}$.

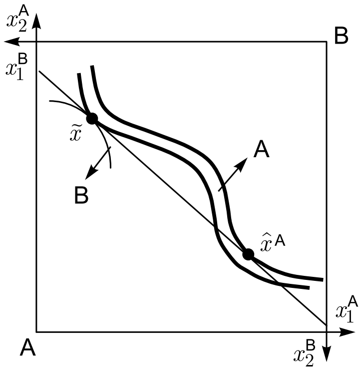

Рис. 3.35. Графический пример, демонстрирующий, что внутреннее Парето-оптимальное распределение не всегда можно реализовать как равновесное

Отметим, что предпочтения потребителя B не являются выпуклыми, тогда как выпуклость предпочтений является одной из предпосылок второй теоремы благосостояния (см. решение задачи 3.23 (д)).

3.50. Утверждение неверно. Монотонность предпочтений является одной из предпосылок второй теоремы благосостояния в формулировке, используемой в задачнике (см. решение задачи 3.23 (д)). Однако нарушение предпосылок второй теоремы благосостояния не означает, что оптимальное по Парето распределение невозможно реализовать как равновесное. Контрпример может быть следующим. Начальные запасы каждого блага в экономике равны 10. Пусть предпочтения потребителя A представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = -\left(x_1^{\mathsf{A}} - 3\right)^2 - \left(x_2^{\mathsf{A}} - 6\right)^2$. Предпочтения A являются строго выпуклыми, но не являются монотонными (увеличение потребления потребителем обоих благ не ведет к увеличению полезности при $x_1^{\mathsf{A}} = 3$, $x_2^{\mathsf{A}} = 6$). Предпочтения потребителя B представимы функцией полезности $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}\right) = x_1^{\mathsf{B}} + x_2^{\mathsf{B}}$. Предпочтения B являются строго монотонными (увеличение потребления обоих благ всегда ведет к росту полезности) и выпуклыми (но не строго выпуклыми). Распределение ($\overline{x}_1^{\mathsf{A}} = 3$, $\overline{x}_2^{\mathsf{A}} = 6$, $\overline{x}_1^{\mathsf{B}} = 7$, $\overline{x}_2^{\mathsf{B}} = 4$) является Парето-оптимальным. Потребитель A достиг максимальной полезности в этом распределении, поэтому его благосостояние увеличить невозможно. Увеличить благосостояние потребителя B допустимым образом можно, только отняв

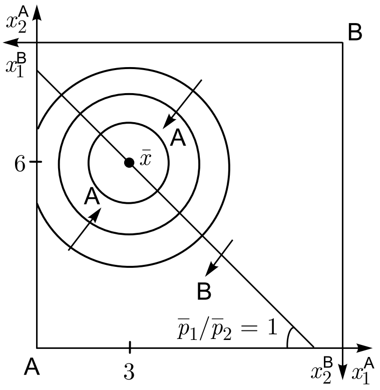

Рис. 3.36. Нарушение предпосылок второй теоремы благосостояния не означает, что Парето-оптимальное распределение невозможно реализовать как равновесное

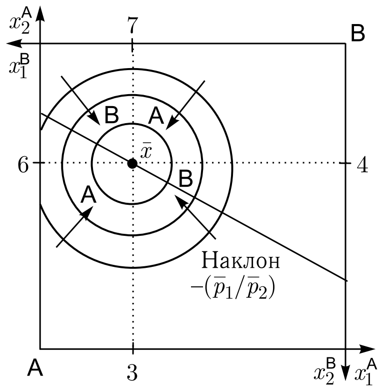

Рис. 3.37. Равновесное распределение является Парето-оптимальным при нарушении предпосылки монотонности предпочтений

хотя бы некоторое количество одного из благ у A, что приведет к уменьшению благосостояния последнего. Указанное распределение реализуемо как равновесное в экономике с трансфертами при ценах $\overline{p}_1/\overline{p}_2 = 1$ и доходах потребителей $m^{\mathsf{A}} = 3\,\overline{p}_1 + 6\,\overline{p}_2$ и $m^{\mathsf{B}} = 7\,\overline{p}_1 + 4\,\overline{p}_2$ (см. рис. 3.36).

3.51. Утверждение неверно. Согласно первой теореме благосостояния в формулировке, принятой в этом задачнике (см. решение задачи 3.23 (г)), если предпочтения всех потребителей монотонны, то равновесное распределение оптимально по Парето. Однако нарушение предпосылки не означает, что неверен и результат. Пусть в экономике, в которой есть по 10 ед. каждого блага, предпочтения потребителя A представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = -\left(x_1^{\mathsf{A}} - 3\right)^2 - \left(x_2^{\mathsf{A}} - 6\right)^2$, а предпочтения потребителя B представимы функцией полезности $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}\right) = -\left(x_1^{\mathsf{B}} - 7\right)^2 - \left(x_2^{\mathsf{B}} - 4\right)^2$. Предпочтения обоих потребителей не удовлетворяют свойству монотонности и удовлетворяют свойству выпуклости. Распределение ($\overline{x}_1^{\mathsf{A}} = 3$, $\overline{x}_2^{\mathsf{A}} = 6$, $\overline{x}_1^{\mathsf{B}} = 7$, $\overline{x}_2^{\mathsf{B}} = 4$) является Парето-оптимальным, поскольку оба потребителя достигают максимального благосостояния, а значит, увеличить чье-либо благосостояние невозможно. Это распределение может быть реализовано как равновесное при любых ценах и доходах потребителей $m^{\mathsf{A}} = 3\,\overline{p}_1 + 6\,\overline{p}_2$ и $m^{\mathsf{B}} = 7\,\overline{p}_1 + 4\,\overline{p}_2$ (см. рис. 3.37).

В качестве другого примера можно рассмотреть распределение, являющееся точкой касания толстых кривых безразличия (см. рис. 3.38). Присутствие таких кривых безразличия говорит о том, что предпочтения потребителей не являются монотонными. Читателям предоставляется возможность самостоятельно задать вид функций и найти соответствующее распределение аналитически.

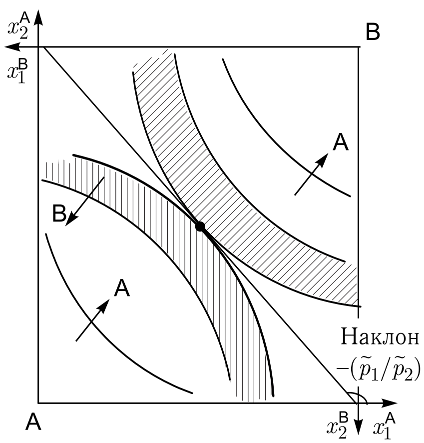

Рис. 3.38. Предпочтения не удовлетворяют свойству монотонности, однако равновесное распределение Парето-оптимально

3.55. (а) Набор $(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}, \widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$ называется *равновесием по Вальрасу*, если:

(1) $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ — решение задачи потребителя A при равновесных ценах $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$:

$$\begin{cases} x_1^{\mathsf{A}} x_2^{\mathsf{A}} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ p_1 x_1^{\mathsf{A}} + p_2 x_2^{\mathsf{A}} \leqslant 10\,p_1 + 3\,p_2; \end{cases}$$

(2) $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$ — решение задачи потребителя B при равновесных ценах $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$:

$$\begin{cases} 3x_1^{\mathsf{B}} + x_2^{\mathsf{B}} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{B}},\, x_2^{\mathsf{B}} \geqslant 0}, \\ p_1 x_1^{\mathsf{B}} + p_2 x_2^{\mathsf{B}} \leqslant 8\,p_1 + 6\,p_2; \end{cases}$$

(3) рынки уравновешены: $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 18$ и $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 9$.

Заметим, что если равновесие в данной экономике существует, то только при положительных ценах. Действительно, если цена одного из благ равна нулю (по предпосылкам модели обе цены не могут быть равны нулю одновременно), то увеличение потребления этого блага не нарушит бюджетного ограничения. Однако поскольку предпочтения потребителя B строго монотонны, то увеличение хотя бы одного блага в наборе потребителя B приводит к росту его полезности. Таким образом, если цена одного из благ будет равна нулю, то спрос на него со стороны потребителя B будет неограничен, другими словами, решение задачи потребителя B не существует.

(б) Вспоминая из теории потребителя вид функций спроса в случаях, когда предпочтения описываются функцией полезности Кобба–Дугласа (для потребителя A) и когда блага являются субститутами (для потребителя B), запишем решения задач потребителей при ценах $\widetilde{p}_1 > 0,\ \widetilde{p}_2 > 0$.

Решение задачи потребителя A:

$$x_1^{\mathsf{A}}(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, 10\,\widetilde{p}_1 + 3\,\widetilde{p}_2) = \frac{10\,\widetilde{p}_1 + 3\,\widetilde{p}_2}{2\,\widetilde{p}_1} = 5 + \frac{3\,\widetilde{p}_2}{2\,\widetilde{p}_1},$$

$$x_2^{\mathsf{A}}(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, 10\,\widetilde{p}_1 + 3\,\widetilde{p}_2) = \frac{10\,\widetilde{p}_1 + 3\,\widetilde{p}_2}{2\,\widetilde{p}_2} = 5\frac{\widetilde{p}_1}{\widetilde{p}_2} + \frac{3}{2}.$$

Решение задачи потребителя B:

$$x_1^{\mathsf{B}}(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, 8\,\widetilde{p}_1 + 6\,\widetilde{p}_2) = \begin{cases} 0, & \widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 > 3, \\ \dfrac{8\,\widetilde{p}_1 + 6\,\widetilde{p}_2}{\widetilde{p}_1}, & \widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 < 3, \\ [0,\ 10]\,, & \widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 3, \end{cases}$$

$$x_2^{\mathsf{B}}(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, 8\,\widetilde{p}_1 + 6\,\widetilde{p}_2) = \begin{cases} 0, & \widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 < 3, \\ \dfrac{8\,\widetilde{p}_1 + 6\,\widetilde{p}_2}{\widetilde{p}_2}, & \widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 > 3, \\ 30 - 3x_1^{\mathsf{B}} & \widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 3. \end{cases}$$

Если $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 3$, то потребитель A предъявляет спрос на второе благо в объеме $x_2^{\mathsf{A}} = (10\,\widetilde{p}_1 + 3\,\widetilde{p}_2)/2\widetilde{p}_2 = 5\,\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 + 3/2 = 5 \cdot 3 + 3/2 = 16{,}5$, что превышает совокупный запас второго блага, равный $\omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}} = 3 + 6 = 9$. Таким образом, при данных ценах равновесие в экономике не существует.

Если $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 > 3$, то спрос потребителя B на второе благо превышает начальный запас этого блага в экономике: $x_2^{\mathsf{B}} = (8\widetilde{p}_1 + 6\,\widetilde{p}_2)/\widetilde{p}_2 = 8\,\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 + 6 > 9$ при $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 > 3$, т. е. при ценах $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 > 3$ равновесия в рассматриваемой экономике нет.

Аналогично, если $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 < 3$, то объем спроса потребителя B на второе благо равен нулю. Чтобы рынок второго блага был уравновешен $x_2^{\mathsf{A}} = (10\,\widetilde{p}_1 + 3\,\widetilde{p}_2)/2\,\widetilde{p}_2 = 9$, откуда найдем $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 3/2$. Так как предпочтения потребителей монотонны, то в экономике выполнен закон Вальраса (см. решение задачи 3.23). В силу выполнения закона Вальраса, если уравновешен рынок одного блага (в нашем случае второго), то автоматически уравновешен и рынок другого блага (первого). При равновесных ценах $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 3/2$ равновесное распределение ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 6$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 9$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 12$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 0$).

3.60. (а) Распределение $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2\right)$ называется допустимым, если выполнены условия: $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1 = \omega_1^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \widetilde{y}_2$, $\widetilde{y}_2 = f\left(\widetilde{x}_1\right)$.

(б) *Допустимое распределение* (состояние экономики) $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2\right)$ называется *Парето-оптимальным*, если не существует другого допустимого распределения $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}, \overline{x}_1, \overline{y}_2\right)$, такого что $u^{\mathsf{A}}\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right) > u^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$.

3.62. (а) Поскольку распределение внутреннее, то можно как уменьшить, так и увеличить потребление благ, изменив соответствующим образом затраты фактора и выпуск. В рассматриваемом распределении $MRS_{12}^{\mathsf{A}}\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right) < f'\left(\overline{x}_1\right)$. Если потребитель откажется от малой единицы первого блага, то, чтобы его полезность не уменьшилась, необходимо увеличить потребление второго блага на $MRS_{12}^{\mathsf{A}}\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right) = 6$ малых единиц. Увеличение же использования первого блага в производстве приведет к увеличению выпуска второго блага на $f'\left(\widehat{x}_1\right) = 9$ малых единиц. Таким образом, отняв у потребителя малую единицу первого блага, можно увеличить потребление второго на 9 малых единиц второго блага. Это приведет к увеличению полезности потребителя, так как $\partial u^{\mathsf{A}}/\partial x_i^{\mathsf{A}} > 0$, и чтобы компенсировать потерю малой единицы первого блага, было достаточно увеличить потребление второго блага на 6 малых единиц. Если распределение не является внутренним, то, возможно, оно является оптимальным по Парето. Например, в задаче 3.68 (в).

(б) Так как распределение внутреннее, то можно как уменьшить, так и увеличить потребление благ, изменив соответствующим образом затраты фактора и выпуск (как и в предыдущем пункте). В рассматриваемом распределении $MRS_{12}^{\mathsf{A}}\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right) > f'\left(\overline{x}_1\right)$. Уменьшение использования первого блага в производстве на малую единицу приведет к уменьшению выпуска второго блага на $f'\left(\overline{x}_1\right) = 2$ малые единицы. При увеличении потребления первого блага на малую единицу благосостояние потребителя не изменится при уменьшении потребления второго блага на $MRS_{12}^{\mathsf{A}}\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right) = 6$ малых единиц. Но так как потребителю придется отказаться только от 2 малых единиц, то его благосостояние увеличится, а значит, новое распределение является Парето-улучшением. Если распределение не является внутренним, то, возможно, оно является оптимальным по Парето. Например, в задаче 3.64 (в).

3.72. Пусть $\left(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2\right)$ — равновесие и пусть состояние экономики $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2\right)$ не является Парето-оптимальным. Заметим, что распределение $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2\right)$ является допустимым, так как в равновесии выполнены условия $x_1^{\mathsf{A}} + x_1 = \omega_1^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \widetilde{y}_2$, И так как решение задачи фирмы удовлетворяет ограничению этой задачи, то $\widetilde{y}_2 = f\left(\widetilde{x}_1\right)$.

Тогда то, что распределение $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2\right)$ не является Парето-оптимальным, означает, что существует допустимое состояние экономики $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}, \overline{x}_1, \overline{y}_2\right)$, отличное от $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2\right)$, такое, что $u^{\mathsf{A}}\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right) > u^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$. Так как $u^{\mathsf{A}}\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right) > u^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ и при равновесных ценах потребитель выбрал $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$, то потребителю не хватило дохода, чтобы приобрести набор $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$, т. е. $\widetilde{p}_1\overline{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2\overline{x}_2^{\mathsf{A}} > \widetilde{p}_1\omega_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2\omega_2^{\mathsf{A}} + \Big(\underbrace{\widetilde{p}_2\widetilde{y}_2 - \widetilde{p}_1\widetilde{x}_1}_{\pi(p,\, p_2)}\Big)$.
Так как в равновесии производитель максимизирует прибыль при равновесных ценах и $(\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2)$ — выбор производителя, то $\widetilde{p}_2\widetilde{y}_2 - \widetilde{p}_1\widetilde{x}_1 \geqslant \widetilde{p}_2\overline{y}_2 - \widetilde{p}_1\overline{x}_1$. Тогда

$$\widetilde{p}_1\overline{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2\overline{x}_2^{\mathsf{A}} > \widetilde{p}_1\omega_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2\omega_2^{\mathsf{A}} + (\widetilde{p}_2\widetilde{y}_2 - \widetilde{p}_1\widetilde{x}_1) \geqslant \\ \geqslant \widetilde{p}_1\omega_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2\omega_2^{\mathsf{A}} + (\widetilde{p}_2\overline{y}_2 - \widetilde{p}_1\overline{x}_1),$$

откуда

$$\widetilde{p}_1\overline{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2\overline{x}_2^{\mathsf{A}} > \widetilde{p}_1\omega_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2\omega_2^{\mathsf{A}} + (\widetilde{p}_2\overline{y}_2 - \widetilde{p}_1\overline{x}_1).$$

С другой стороны, поскольку $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}, \overline{x}_1, \overline{y}_2\right)$ — допустимое состояние экономики, то $\overline{x}_1^{\mathsf{A}} + \overline{x}_1 = \omega_1^{\mathsf{A}}$ и $\overline{x}_2^{\mathsf{A}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \overline{y}_2$. Домножим каждое условие на соответствующую цену, получим $\widetilde{p}_1\overline{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_1\overline{x}_1 = \widetilde{p}_1\omega_1^{\mathsf{A}}$ и $\widetilde{p}_2\overline{x}_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{p}_2\omega_2^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2\overline{y}_2$. Просуммировав условия, получим $\widetilde{p}_1\overline{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2\overline{x}_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{p}_1\omega_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2\omega_2^{\mathsf{A}} + (\widetilde{p}_2\overline{y}_2 - \widetilde{p}_1\overline{x}_1)$. Пришли к противоречию. Значит, предположение о том, что $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}, \overline{x}_1, \overline{y}_2\right)$ — Парето-улучшение, оказалось неверным. $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2\right)$ — Парето-оптимальное распределение.

3.73. (а) Ни одно из граничных распределений не будет Парето-оптимальным. Необходимое условие для внутренних Парето-оптимальных распределений $\dfrac{\partial u\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)}{\partial x_1^{\mathsf{A}}} \bigg/ \dfrac{\partial u\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)}{\partial x_2^{\mathsf{A}}} = f'\left(\widehat{x}_1\right)$. Заметим, что предпочтения, представимые функцией полезности Кобба–Дугласа, выпуклы и строго монотонны на внутренних наборах, производственная функция $f\left(x_1\right) = 2\sqrt{x_1}$ вогнута, а это означает, что равенство предельной нормы замещения предельному продукту — не только необходимое условие Парето-оптимальности для внутренних распределений, но и достаточное. Предельная норма замещения $MRS_{12}^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}}\right) = x_2^{\mathsf{A}}/x_1^{\mathsf{A}}$ и предельный продукт $f'\left(x_1\right) = 1/\sqrt{x_1}$. Тогда $x_2^{\mathsf{A}}/x_1^{\mathsf{A}} = 1/\sqrt{x_1}$. Парето-оптимальное распределение допустимо, а это значит, что $x_1^{\mathsf{A}} = \omega_1^{\mathsf{A}} - x_1$ и $x_2^{\mathsf{A}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + x_2 = \omega_2^{\mathsf{A}} + 2\sqrt{x_1}$. Таким образом, выразив x_1^{A} и x_2^{A} через x_1, подставим полученные выражения $(\omega_2^{\mathsf{A}} + 2\sqrt{x_1}\,)\big/(\omega_1^{\mathsf{A}} - x_1) = 1/\sqrt{x_1}$. Так как по условию $\omega_1^{\mathsf{A}} = 3$ и $\omega_2^{\mathsf{A}} = 0$, то $(2\sqrt{x_1}\,)\big/(3 - x_1) = 1/\sqrt{x_1}$, откуда $x_1 = 1$. Тогда $x_1^{\mathsf{A}} = 2$, $x_2^{\mathsf{A}} = 2$, $y_2 = 2$.

(б) Закон Вальраса состоит в следующем: стоимость совокупного избыточного спроса равна нулю при всех ценах, при которых избыточный спрос определен:

$$p_1 \underbrace{\left(x_1^{\mathsf{A}}\left(p_1,\, p_2\right) + x_1\left(p_1,\, p_2\right) - \omega_1^{\mathsf{A}}\right)}_{z_1(p_1,\, p_2)} + {} \\ + p_1 \underbrace{\left(x_2^{\mathsf{A}}\left(p_1,\, p_2\right) - y_2\left(p_1,\, p_2\right) - \omega_2^{\mathsf{A}}\right)}_{z_2(p_1,\, p_2)} = 0.$$

Для проверки выполнения закона Вальраса найдем функции спроса потребителя, спрос и предложение фирмы при произвольных ценах.

Поскольку прибыль фирмы входит в доход потребителя, то начнем с решения задачи фирмы: $\begin{cases} p_2 y_2 - p_1 x_1 \to \max\limits_{x_1,\, x_2 \geqslant 0}, \\ y_2 = 2\sqrt{x_1}\,, \end{cases}$ которая может быть преобразована к виду $2p_2\sqrt{x_1} - p_1 x_1 \to \max\limits_{x_1 \geqslant 0}$. Покажем, что в решении задачи фирмы $x_1 > 0$. Если $x_1 = 0$, то прибыль фирмы составит ноль. Если же $x_1 = \varepsilon > 0$, то прибыль фирмы составит $2p_2\sqrt{\varepsilon} - p_1\varepsilon$. Существуют ли такие значения ε, при которых фирме выгодней затрачивать ненулевое количество ресурса и производить ненулевой выпуск? Ответ **да**, если выполнено $2\,p_2\sqrt{\varepsilon} - p_1\varepsilon > 0$. Указанное неравенство выполнено при $\varepsilon < 4\,(p_2/p_1)^2$. Такая величина ε существует при любых положительных ценах. Условие первого порядка для внутреннего решения: $p_2/\sqrt{x_1} - p_1 = 0$, откуда $x_1\,(p_1,\, p_2) = p_2^2/p_1^2$. Тогда предложение фирмы $y_2\,(p_1,\, p_2) = 2\,p_2/p_1$ и функция прибыли $\pi\,(p_1,\, p_2) = p_2^2/p_1$.

Теперь рассмотрим задачу потребителя. Функции спроса потребителя являются решением задачи максимизации полезности:

$$\begin{cases} x_1^{\mathsf{A}} x_2^{\mathsf{A}} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ p_1 x_1^{\mathsf{A}} + p_2 x_2^{\mathsf{A}} \leqslant p_1 \omega_1^{\mathsf{A}} + p_2 \omega_2^{\mathsf{A}} + \underbrace{p_2^2/p_1}_{\pi(p_1,\, p_2)}, \end{cases}$$

то есть

$$x_1^{\mathsf{A}}\,(p_1,\, p_2) = \frac{p_1\omega_1^{\mathsf{A}} + p_2\omega_2^{\mathsf{A}} + p_2^2/p_1}{2\,p_1} = \frac{1}{2}\left(\omega_1^{\mathsf{A}} + \frac{p_2}{p_1}\omega_2^{\mathsf{A}} + \frac{p_2^2}{p_1^2}\right),$$

$$x_2^{\mathsf{A}}\,(p_1,\, p_2) = \frac{p_1\omega_1^{\mathsf{A}} + p_2\omega_2^{\mathsf{A}} + p_2^2/p_1}{2\,p_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{p_2}\omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{A}} + \frac{p_2}{p_1}\right).$$

Требуется убедиться, что стоимость избыточного спроса равна нулю:

$$p_1\left(\frac{1}{2}\left(\omega_1^{\mathsf{A}} + \frac{p_2}{p_1}\omega_2^{\mathsf{A}} + \frac{p_2^2}{p_1^2}\right) + \frac{p_2^2}{p_1^2} - \omega_1^{\mathsf{A}}\right) + \\ + p_2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{p_2}\omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{A}} + \frac{p_2}{p_1}\right) - 2\frac{p_2}{p_1} - \omega_2^{\mathsf{A}}\right) = 0.$$

Это выполнено при всех положительных ценах.

(в) Равновесие по Вальрасу в экономике с одним потребителем и одной фирмой — это набор $\left(\widetilde{p}_1,\, \widetilde{p}_2,\, \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_1,\, \widetilde{y}_2\right)$, где

(1) набор $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ является решением задачи потребителя A:

$$\begin{cases} u\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}}\right) \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ \widetilde{p}_1 x_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 x_2^{\mathsf{A}} \leqslant \widetilde{p}_1 \omega_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 \omega_2^{\mathsf{A}} + \pi\,(\widetilde{p}_1,\, \widetilde{p}_2)\,; \end{cases}$$

(2) набор $(\widetilde{x}_1,\, \widetilde{y}_2)$ является решением задачи фирмы:

$$\begin{cases} \widetilde{p}_2 y_2 - \widetilde{p}_1 x_1 \to \max\limits_{x_1,\, y_2 \geqslant 0}, \\ y_2 = f\,(x_1)\,; \end{cases}$$

(3) рынки сбалансированы:

$$\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1 = \omega_1^{\mathsf{A}}, \qquad \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{y}_2 + \omega_2^{\mathsf{A}}.$$

(г) Так как в экономике выполнен закон Вальраса, достаточно уравновесить один рынок. Поскольку начальный запас второго блага равен нулю, то удобно уравновешивать рынок второго блага: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p_1}{p_2}\omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{A}} + p_2/p_1\right) = 2\,\dfrac{p_2}{p_1}$. Отсюда найдем $\dfrac{p_2}{p_1} = 1$. Подставив отношение цен в функции спроса потребителя, функцию спроса и функцию предложения фирмы, получим $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 2$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 2$, $\widetilde{x}_1 = 1$, $\widetilde{y}_2 = 2$.

(д) В рассматриваемой экономике имеется единственное Парето-оптимальное распределение. Согласно первой теореме благосостояния равновесным в экономике с одним потребителем может быть только Парето-оптимальное распределение. Таким образом, альтернативный способ поиска равновесия — реализация Парето-оптимального распределения как равновесного. Если это **удастся**, то равновесие найдено. Если **нет**, то равновесие в рассматриваемой экономике не существует.

3.77. Воспользовавшись условиями допустимости, найдем $(x_1^{\mathsf{A}} = 2,\ x_2^{\mathsf{A}} = 2,\ x_1 = 1,\ y_2 = 1)$.

Теперь реализуем найденное распределение как равновесное. Поскольку прибыль фирмы входит в доход потребителя, то начнем с решения задачи фирмы: $\begin{cases} p_2 y_2 - p_1 x_1 \to \max\limits_{x_1,\, y_2 \geqslant 0}, \\ y_2 = \sqrt{x_1}\,, \end{cases}$ которая может быть преобразована к виду $p_2\sqrt{x_1} - p_1 x_1 \to \max\limits_{x_1 \geqslant 0}$. Тогда спрос фирмы $x_1(p_1, p_2) = (p_2/(2\,p_1))^2$, предложение фирмы $y_2(p_1, p_2) = p_2/(2\,p_1)$ и функция прибыли $\pi(p_1, p_2) = p_2^2/(4\,p_1)$. Тогда, так как при равновесных ценах фирма выбирает $\widetilde{y}_2 = 1$, то из $1 = p_2/(2\,p_1)$ найдем $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 2$. Подставив это соотношение цен в функцию $x_1(p_1, p_2) = p_2^2/(4\,p_1^2)$, получим $\widetilde{x}_1 = 1$. Таким образом, набор $\widetilde{x}_1 = 1$, $\widetilde{y}_2 = 1$ является решением задачи фирмы при $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 2$.

Теперь рассмотрим задачу потребителя. Обозначим $p_2^2/(4p_1) = \pi(p_1, p_2)$. Функции спроса потребителя являются решением задачи максимизации полезности:

$$\begin{cases} x_1^{\mathsf{A}}\left(x_2^{\mathsf{A}}\right)^2 \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}}\geqslant 0}, \\ p_1 x_1^{\mathsf{A}} + p_2 x_2^{\mathsf{A}} \leqslant p_1\omega_1^{\mathsf{A}} + p_2\omega_2^{\mathsf{A}} + \underbrace{p_2^2/(4\,p_1)}_{\pi(p_1,\,p_2)}, \end{cases}$$

то есть

$$x_1^{\mathsf{A}}(p_1,\, p_2) = \frac{p_1\omega_1^{\mathsf{A}} + p_2\omega_2^{\mathsf{A}} + p_2^2/(4\,p_1)}{3\,p_1} = \frac{1}{3}\left(\omega_1^{\mathsf{A}} + \frac{p_2}{p_1}\omega_2^{\mathsf{A}} + \frac{p_2^2}{4\,p_1^2}\right),$$

$$x_2^{\mathsf{A}}(p_1,\, p_2) = 2\frac{p_1\omega_1^{\mathsf{A}} + p_2\omega_2^{\mathsf{A}} + p_2^2/(4\,p_1)}{3\,p_2} = \frac{2}{3}\left(\frac{p_1}{p_2}\omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{A}} + \frac{p_2}{4\,p_1}\right).$$

Подставив в функции спроса потребителя найденное соотношение цен $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 2$, найдем $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 2$. То есть, набор $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 2$ является решением задачи потребителя при $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 2$.

Рассматриваемое распределение удовлетворяет условиям $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1 = \omega_1^{\mathsf{A}}$ и $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \widetilde{y}_2$, а значит, условия сбалансированности рынков выполнены.

Таким образом, набор ($\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 2$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 2$, $\widetilde{x}_1 = \widetilde{y}_2 = 1$) удовлетворяет всем условиям равновесия.

Обсудим полученный результат. По первой теореме благосостояния равновесным может быть только Парето-оптимальное распределение. Это означает, что если удалось реализовать заданное распределение, как равновесное, то оно Парето-оптимально. Поскольку $0 < x_1^{\mathsf{A}} < \omega_1^{\mathsf{A}}$, $0 < x_2^{\mathsf{A}} < \omega_2^{\mathsf{A}}$, то заданное распределение внутреннее. По второй теореме благосостояния, если предпочтения потребителя выпуклы и монотонны, производственная функция вогнута, то внутреннее Парето-оптимальное распределение может быть реализовано, как равновесное.

3.78. Рассмотрим задачу фирмы: $\begin{cases} p_2 y_2 - p_1 x_1 \to \max\limits_{x_1,\, y_2\geqslant 0}, \\ y_2 = 6x_1. \end{cases}$

Исходная задача преобразовывается к следующему виду: $x_1(6\,p_2 - p_1) \to \max\limits_{x_1\geqslant 0}$. Решение задачи не определено при $6\,p_2 > p_1$, так как в этом случае увеличение x_1 приводит к увеличению прибыли. Таким образом, решение задачи фирмы $x_1(p_1,\, p_2) = \dfrac{y_2(p_1,\, p_2)}{6} = \begin{cases} 0, & 6\,p_2 < p_1, \\ [0,\, \infty), & 6\,p_2 = p_1. \end{cases}$ Прибыль фирмы равна нулю. В заданном распределении $\widetilde{x}_1 > 0$, $\widetilde{x}_2 > 0$. Поэтому набор $\widetilde{x}_1 = 2$, $\widetilde{y}_2 = 12$ является решением задачи только при соотношении цен $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 6$.

Рассмотрим задачу потребителя.

Функции спроса потребителя являются решением задачи

$$\begin{cases} \left(x_1^{\mathsf{A}}\right)^3 x_2^{\mathsf{A}} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ p_1 x_1^{\mathsf{A}} + p_2 x_2^{\mathsf{A}} \leqslant p_1 \omega_1^{\mathsf{A}} + p_2 \omega_1^{\mathsf{A}} + \underbrace{\pi\,(p_1,\, p_2)}_{0}: \end{cases}$$

$$x_1^{\mathsf{A}}\,(p_1,\, p_2) = 3\,\frac{p_1\omega_1^{\mathsf{A}} + p_2\omega_2^{\mathsf{A}}}{4\,p_1} = \frac{3}{4}\left(\omega_1^{\mathsf{A}} + \frac{p_2}{p_1}\omega_2^{\mathsf{A}}\right),$$

$$x_2^{\mathsf{A}}\,(p_1,\, p_2) = \frac{1}{4}\,\frac{p_1\omega_1^{\mathsf{A}} + p_2\omega_2^{\mathsf{A}}}{3\,p_2} = \frac{1}{4}\left(\frac{p_1}{p_2}\omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{A}}\right).$$

Подставив в функции спроса потребителя найденное соотношение цен $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 6$, найдем $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 22$ и $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 44$. Это означает, что набор $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 22$ и $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 44$ является решением задачи потребителя при $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 6$.

Рассматриваемое распределение удовлетворяет условиям $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1 = \omega_1^{\mathsf{A}}$ и $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \widetilde{y}_2$, а значит, условия сбалансированности рынков выполнены.

Таким образом, набор ($\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 6$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 22$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 44$, $\widetilde{x}_1 = 2$, $\widetilde{y}_2 = 12$) является равновесием.

Заданное распределение является внутренним Парето-оптимальным. В рассматриваемой задаче выполнены все предпосылки второй теоремы благосостояния, следовательно, полученный результат закономерен.

3.84. (а) Предпочтения Робинзона не являются выпуклыми, поэтому условие $MRS_{lc}^{\mathsf{R}} = f'(L)$ является только необходимым для Парето-оптимального распределения, все компоненты которого положительны. Для рассматриваемой экономики это условие записывается как $l^{\mathsf{R}}/c^{\mathsf{R}} = 1/2$. Так как Парето-оптимальное распределение допустимо, то $l^{\mathsf{R}} + L = 15$, $c^{\mathsf{R}} = c$, $c = L/2$, где c — количество собранных бананов, тогда как c^{R} — количество съеденных бананов. Выразив l^{R} и c^{R} через L, получим уравнение $\dfrac{15 - L}{L/2} = \dfrac{1}{2}$, откуда $L = 12$, а следовательно, $l^{\mathsf{R}} = 3$, $c^{\mathsf{R}} = c = 6$. Полезность в таком распределение $u^{\mathsf{R}}\,(3,\, 6) = 45$.

Полезность потребителя в граничных точках ($c^{\mathsf{R}} = c = 7{,}5$, $l^{\mathsf{R}} = 0$, $L = 15$) и ($c^{\mathsf{R}} = c = 0$, $l^{\mathsf{R}} = 15$, $L = 0$) соответственно равна $u^{\mathsf{R}}(0,\,7{,}5) = 56{,}25$ и $u^{\mathsf{R}}(15,\,0) = 225$. Таким образом, Парето-оптимальным является граничное распределение ($c^{\mathsf{R}} = c = 0$, $l^{\mathsf{R}} = 15$, $L = 0$) (см. рис. 3.39).

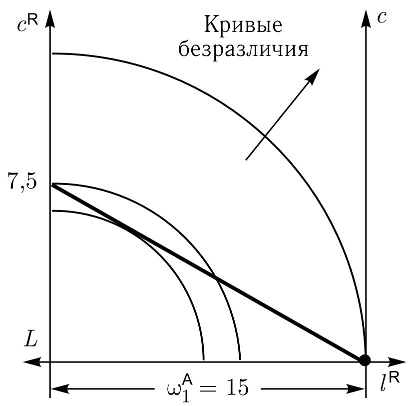

Рис. 3.39. Парето-оптимальным является распределение ($c^{\mathsf{R}} = c = 0$, $l^{\mathsf{R}} = 15$, $L = 0$)

(б) Нарушены следующие предпосылки второй теоремы благосостояния: предпосылка о выпуклости предпочтений, предпосылка о внутренности Парето-оптимального распределения. Таким образом, нет никакой гарантии, что найденное Парето-оптимальное распределение реализуемо как равновесное, однако нельзя утверждать, что оно не может быть реализуемо.

Существуют ли такие цены, что набор ($c = 0$, $L = 0$) является решением задачи фирмы? Решение задачи фирмы $\begin{cases} p_c c - p_L L \to \max\limits_{c,\,L\geqslant 0}, \\ c = L/2, \end{cases}$ существует только при ценах $p_c \leqslant 2p_L$ и может быть записано следующим образом: $c(p_c,\,p_L) = \dfrac{L(p_c,\,p_L)}{2} = \begin{cases} 0, & p_c < 2p_L, \\ [0,\,\infty), & p_c = 2p_L. \end{cases}$ Заметим, что прибыль в любом решении равна нулю (это важно, так как прибыль входит в доход потребителя). Набор ($c = 0$, $L = 0$) фирма выберет и при $p_L/p_c = 1/2$, и при $p_L/p_c > 1/2$, где p_L — цена труда (досуга), p_c — цена бананов.

Является ли набор ($c^{\mathsf{R}} = 0$, $l^{\mathsf{R}} = 15$) решением задачи Робинзона $\begin{cases} \left(l^{\mathsf{R}}\right)^2 + \left(c^{\mathsf{R}}\right)^2 \to \max\limits_{l^{\mathsf{R}},\,c^{\mathsf{R}}\geqslant 0}, \\ p_L l^{\mathsf{R}} + p_c c^{\mathsf{R}} \leqslant p_L\overline{L} + \underbrace{\pi(p_c,\,p_L)}_{=0}, \end{cases}$ где $\overline{L} = 15$ при ценах $p_L/p_c = 1/2$ или $p_L/p_c > 1/2$?

Рассмотрим сначала случай $p_L/p_c > 1/2$. Робинзон выберет набор, в котором отсутствуют бананы, если $p_L \leqslant p_c$. Следовательно, при $1 \geqslant p_L/p_c > 1/2$ оптимальный выбор Робинзона — это ($c^{\mathsf{R}} = 0$, $l^{\mathsf{R}} = 15$). Аналогичные рассуждения верны и для случая $p_L/p_c = 1/2$. На бананы Робинзон тратит весь доход, а значит, $L = (p_L\overline{L})/p_L = 15$. Следовательно, Робинзон выберет ($c^{\mathsf{R}} = 0$, $l^{\mathsf{R}} = 15$) при $1 \geqslant p_L/p_c \geqslant 1/2$.

Последнее условие — сбалансированность рынков — выполнено. Во-первых, это можно проверить, подставив значения распределения в условия сбалансированности $l^{\mathsf{R}} + L = 15$, $c^{\mathsf{R}} = c$. Во-вторых, так как рассматриваемое распределение Парето-оптимально, то оно допустимо, а значит, для него выполнены соответствующие условия.

Итак, распределение ($c^{\mathsf{R}} = c = 0$, $l^{\mathsf{R}} = 15$, $L = 0$) является равновесным при ценах $1 \geqslant p_L/p_c \geqslant 1/2$.

3.88. (а) По условию все компоненты равновесного распределения положительны. Внутреннее решение задачи потребителя удовлетворяет условию $MRS_{12}^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = p_1/p_2$. Внутреннее решение задачи производителя удовлетворяет условию $f'(x_1) = p_1/(p_2 - t)$. Это означает, что в равновесном распределении не выполнено условие равенства предельной полезности предельному продукту. В рассматриваемой экономике это условие является необходимым для внутреннего Парето-оптимального распределения (см. задачу 3.61). Следовательно, равновесное распределение не является Парето-оптимальным. В экономике с одним потребителем в Парето-оптимальном распределении благосостояние потребителя максимально. Следовательно, введенная налоговая политика ухудшит благосостояние потребителя.

(б) Внутреннее решение задачи потребителя удовлетворяет условию $MRS_{12}^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = (p_1(1 + \tau_1^{\mathsf{A}}))/p_2$. Внутреннее решение задачи производителя удовлетворяет условию $f'(x_1) = p_1/(p_2(1 - \tau))$. Чтобы было выполнено условие $MRS_{12}^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = f'(x_1)$, являющееся необходимым условием для Парето-оптимального распределения, в котором все компоненты положительны, требуется, чтобы $1 + \tau_1^{\mathsf{A}} = 1/(1 - \tau)$ или $\tau_1^{\mathsf{A}} = \tau/(1 - \tau)$. В условии не сказано, являются ли предпочтения выпуклыми. А условие равенства предельной нормы замещения предельному продукту без этого условия является только необходимым (см. задачу 3.65 (б)). Поэтому нет гарантии, что распределение, удовлетворяющее этому условию, является оптимальным по Парето.

(в) Задача фирмы при введенном налоге:

$$\begin{cases} 0{,}80\,(p_2y_2 - p_1x_1) \to \max\limits_{x_1,\, y_2 \geqslant 0}, \\ y_2 = f\,(x_1). \end{cases}$$

Ее решение не изменится по сравнению с ситуацией без налогов. Так как в экономике потребитель — единственный, то именно он владеет фирмой, а следовательно, он получает 80% прибыли фирмы как владелец и 20% как потребитель. Таким образом, рынки будут уравновешены при тех же ценах, что и в равновесии без вмешательства государства. Равновесное распределение останется прежним. Следовательно, по первой теореме благосостояния экономика находится в Парето-оптимальном состоянии при указанной налоговой политике.

3.95. (а) Дифференциальная характеристика Парето-оптимального распределения, все компоненты которого положительны, $MRS_{12}^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}}\right) = f'\,(x_1)$. Для заданной функции $MRS_{12}^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}}\right) = 1/(v'(x_1^{\mathsf{A}}))$. Функция $c\,(y_2)$ является обратной к функции $f\,(x_1)$. Это означает, что производные функций соотносятся следующим образом: $f'\,(x_1) = 1/(c'\,(y_2))$. Таким образом, дифференциальная характеристика $v'\left(x_1^{\mathsf{A}}\right) = c'\,(y_2)$.

(б) В общем виде условие записывается как $MRS_{12}^{\mathsf{A}}(\omega_1^{\mathsf{A}}, 0) \geqslant$ $\geqslant f'\,(0)$. В обозначениях задачи $v'\,(0) \leqslant c'\,(0)$.

(в) В допустимых распределениях выполнено условие $x_2^{\mathsf{A}} =$ $= \omega_2^{\mathsf{A}} + y_2$. Так как в рассматриваемой экономике отсутствует начальный запас второго блага, то $x_2^{\mathsf{A}} = y_2$. Найдем максимум функции $W\,(y_2) = v\,(y_2) - c\,(y_2)$, т. е. решим задачу $v\,(y_2) - c\,(y_2) \to \max\limits_{y_2 \geqslant 0}$. Условие первого порядка записывается как $v'\,(y_2) - c'\,(y_2) \leqslant 0$ и $v'\,(y_2) - c'\,(y_2) = 0$, если $y_2 > 0$. Заметим, что функция $W\,(y_2)$ вогнута, поскольку, с учетом заданных условий, выполнено $W''\,(y_2) = v''\,(y_2) - c''\,(y_2) \leqslant 0$. Следовательно, условие первого порядка является не только необходимым, но и достаточным. Ноль удовлетворяет условию первого порядка, если $v'\,(0) \leqslant c'\,(0)$. Таким образом, если $v'\,(0) \leqslant c'\,(0)$, функция $W\,(y_2)$ достигает максимум при $y_2 = 0$ и это значение, как следует из п. (б), соответствует Парето-оптимальному распределению. Если $v'\,(0) > c'\,(0)$, то функция $W\,(y_2)$ достигает максимума при $y_2 > 0$. В этом случае условие первого порядка записывается как равенство, а значит, $v'\,(y_2) = c'\,(y_2)$. Следовательно, функция

$W(y_2)$ достигает максимального значения в точке, соответствующей Парето-оптимальному распределению. Поскольку в экономике — один потребитель, то в Парето-оптимальном распределении благосостояние потребителя максимально. Таким образом, если функция $W(y_2)$ не достигает максимального значения, то соответствующее распределение не является Парето-оптимальным. Обозначим $\widetilde{y}_2$ выпуск второго блага в Парето-оптимальном распределении, а $\widehat{y}_2$ — выпуск в распределении, не являющемся Парето-оптимальным, тогда назовем чистыми потерями (*deadweight losses* — дословно: потери мертвого груза) величину $DWL = W(\widetilde{y}_2) - W(\widehat{y}_2)$.

(г) Функция полезности возрастает по обеим переменным, а значит, выполнены условия первой теоремы благосостояния. Поэтому равновесное распределение оптимально по Парето. Следовательно, в этом распределении индикатор благосостояния достигает максимального значения. Заметим, что задача на поиск Парето-оптимальных распределений сводится к задаче максимизации общественного благосостояния.

(д) Так как в рассматриваемой экономике отсутствует начальный запас второго блага, то $x_2^{\mathsf{A}} = y_2$. Поэтому можем записать излишек потребителя как $CS(y_2) = v(y_2) - p_2 y_2$. Таким образом, сумма излишков — это индикатор благосостояния, который, как следует из п. (в), достигает максимального значения в Парето-оптимальном распределении.

(е) Обратная функция спроса: $p_2/p_1 = v'(y_2)$, или, при введенной нормировке $p_1 = 1$, $p_2 = v'(y_2)$. Обратная функция предложения: $p_2 = c'(y_2)$. Пересечение кривых соответствует равновесной цене $\widetilde{p}_2$ и равновесному объему выпуска (и потребления) второго блага $\widetilde{y}_2$. Излишек производителя может быть представлен в виде интеграла $PS(\widetilde{y}_2) = \int\limits_0^{\widetilde{y}_2} (p_2 - c'(y_2))\, dy_2 - c(0)$. Он равен, с точностью до константы $c(0)$, площади фигуры, образуемой кривой предложения, осью ординат и горизонтальной прямой, проходящей через точку $(\widetilde{p}_2, \widetilde{y}_2)$. Аналогично, излишек потребителя может быть представлен в виде $CS(\widetilde{y}_2) = \int\limits_0^{\widetilde{y}_2} (v'(y_2) - p_2)\, dy_2 + v(0)$. На соответствующем рисунке излишек потребителя — это, с точностью до константы $v(0)$, площадь фигуры, образуемой пересечением кривой спроса, осью ординат и горизонтальной прямой, проходящей через точку $(\widetilde{p}_2, \widetilde{y}_2)$.

3.115. (а) Равновесная цена $\widetilde{p} = 14$ находится из условия равенства спроса предложению, $x^D(p) = x^S(p)$. Подставив найденную цену в функцию спроса или в функцию предложения, получим, что равновесный объем выпуска и, соответственно, потребления блага x составит $\widetilde{x}^S = \widetilde{x}^D = 260$.

При введении налога на продажу функция предложения записывается следующим образом: $x^S(p) = 20(p - t) - 20$ (при введении налога на продажу, кривая предложения сдвигается вверх на t). Найдем равновесные цены и равновесный объем блага x таким же образом, как до введения налога $\widehat{p} = (420 + 20t)/30$, $\widehat{x}^D = 400 - (420 + 20t)/3$. Так как по условию выпуск сократился в полтора раза, то $\widehat{x}^S = \widehat{x}^D = 20$, откуда $t = 36$. Тогда цена для потребителя равна $\widehat{p} = 38$, тогда как для производителя $\widehat{p} - t = 2$.

(б) Воспользовавшись заданной функцией спроса, выразим обратную функция спроса $p = 40 - x^D/10$, где $v'\left(x^D\right) = 40 - x^D/10$, так как во внутреннем решении задачи потребителя $p = v'\left(x^D\right)$. Таким образом, с учетом $v(0) = 0$ имеем $v\left(x^D\right) = 40x^D - \left(x^D\right)^2/20$. Тогда $CS\left(x^D\right) = 40x^D - \left(x^D\right)^2/20 - px^D$. Вычислим $CS(260) = 3380$, $CS(20) = 20$.

Из функции предложения выразим обратную функцию $p = x^S/20 + 1$. Тогда $c'\left(x^S\right) = x^S/20 + 1$, поскольку во внутреннем решении задачи фирмы $p = c'\left(x^S\right)$. Учитывая, что $c(0) = 0$, получим $c\left(x^S\right) = \left(x^S\right)^2/40 + x^S$. Теперь запишем выражение для излишка производителя: $PS\left(x^S\right) = px^S - \left(\left(x^S\right)^2/40 + x^S\right)$. Тогда $PS(260) = 1690$, $PS(20) = 10$.

Налоговые сборы: произведение $t = 36$ на объем продаж $\widehat{x}^S = \widehat{x}^D = 20$ — составляют 720.

Таким образом, общественное благосостояние до ввода налога составляло 5070, а после 570. Разницу между этими величинами, 4320, называют чистыми потерями (DWL — дословный перевод: потери мертвого груза).

(в) Графическое решение представлено на рис. 3.40, где безвозвратные потери представлены заштрихованной областью.

(г) $t^* = 19{,}5$; $GR = 2535$.

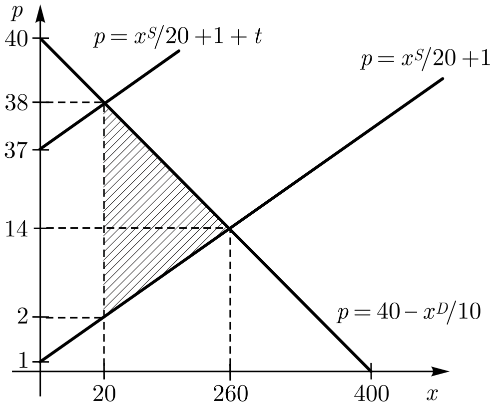

Рис. 3.40. Графическое представление равновесия в отрасли до и после введения потоварного налога

(д) $GR = 2535$. В данном случае любой из видов указанных налогов изменяет лишь цену каждой единицы товара, поэтому максимальная сумма налоговых поступлений не должна зависеть от того, была ли цена изменена количественно или пропорционально, а следовательно, налоговые поступления в пп. (г) и (д) должны быть одинаковы.

3.116. (а) На рис. 3.41 изображена иллюстрация для российского рынка, а табл. 3.1 демонстрирует соответствующие излишки и изменения.

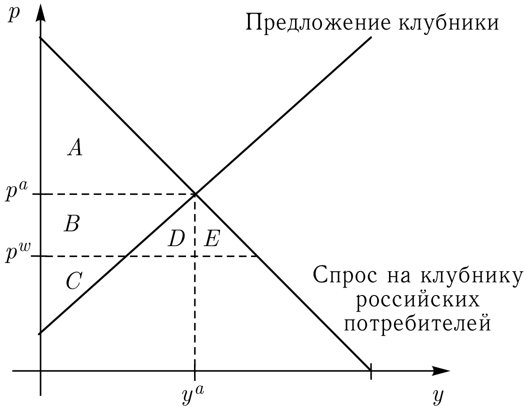

Рис. 3.41. p^a — цена на российском рынке до разрешения торговли, p^w — мировая цена; A, B, C, D, E — площади

Таблица 3.1

	В отсутствии торговли	В условиях международной торговли	Изменение
Излишек потребителя	A	$A+B+D+E$	$B+D+E$
Излишек производителя	$B+C$	C	$-B$
Общий излишек	$A+B+C$	$A+B+C+D+E$	$D+E$

(б) На рис. 3.42 изображен мировой рынок. Падение урожая в Европе приводит к сдвигу кривой мирового предложения вверх. Следовательно, это приводит к росту мировой цены ($p^{w\,\mathrm{new}}$).

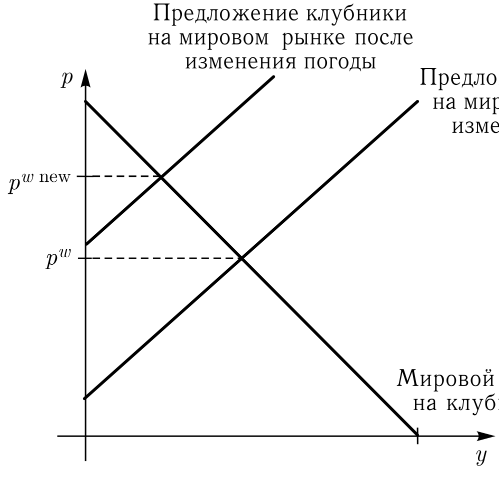

Рис. 3.42

Предположим, новая мировая цена будет все еще ниже цены автаркии в России; равновесие в этом случае проиллюстрировано на рис. 3.43, а соответствующие излишки и их изменения представлены в табл. 3.2.

Таким образом, Россия выигрывает от торговли, но проигрывает от изменений, повлекших за собой падение урожая винограда.

На рис. 3.44 приведена иллюстрация для случая, когда новая мировая цена выше цены автаркии в России, а соответствующие излишки и их изменение представлены в табл. 3.3.

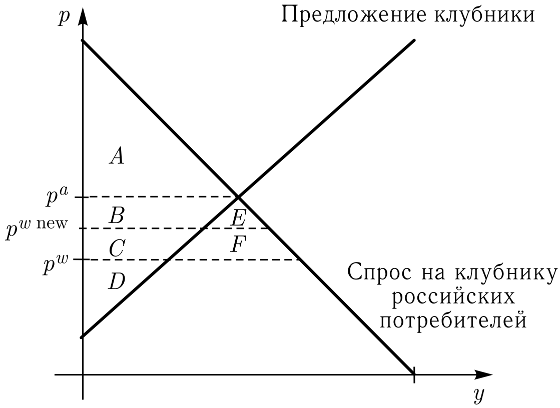

Рис. 3.43

Таблица 3.2

	До разрешения международной торговли	После введения торговли, до изменения Гольфстрима	После введения торговли, после изменения Гольфстрима
Излишек потребителя	A	$A+B+C+E+F$	$A+B+E$
Излишек производителя	$B+C+D$	D	$C+D$
Общественное благосостояние	$A+B+C+D$	$A+B+C+D+E+F$	$A+B+C+D+E$

Таблица 3.3

	До разрешения международной торговли	После введения торговли, до изменения Гольфстрима	После введения торговли, после изменения Гольфстрима
Излишек потребителя	$A+B$	$A+B+C+F$	A
Излишек производителя	$C+D$	D	$B+C+D+E$
Общественное благосостояние	$A+B+C+D$	$A+B+C+D+F$	$A+B+C+D+E$

В этом случае Россия выигрывает от торговли. Но нет однозначного ответа, как повлияли изменения на мировом рынке клубники на благосостояние России. Если площадь фигуры E меньше, чем площадь фигуры F, то Россия проиграла от изменений. К этому случаю можно отнести ситуацию, когда $p^{w\,\mathrm{new}} = p^a$. Если же площадь фигуры E больше, чем площадь фигуры F, то Россия выиграла от изменения на мировом рынке клубники.

(в) На рис. 3.45 изображена ситуация, когда государство ввело тариф t на импорт вина в Россию, а соответствующие излишки и их изменение представлены в табл. 3.4.

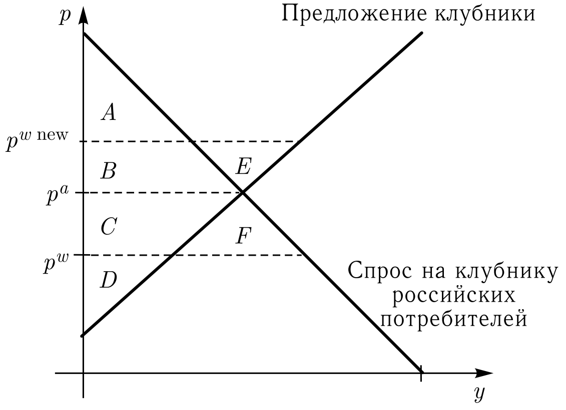

Рис. 3.44

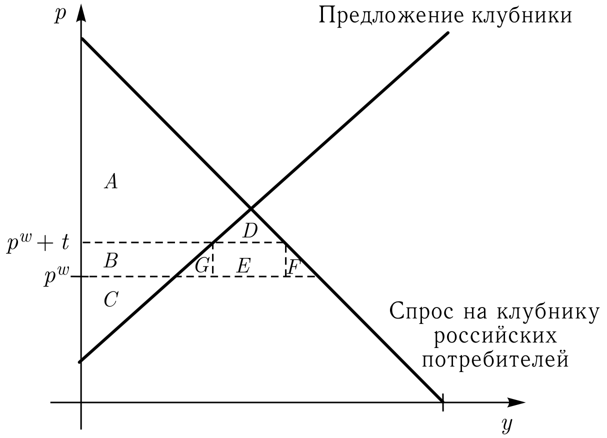

Рис. 3.45

Таблица 3.4

	До введения тарифа	После введения тарифа	Изменения
Излишек потребителя	$A+B+D+E+F+G$	$A+D$	$-(B+E+F+G)$
Излишек производителя	C	$B+C$	$+B$
Доход государства	—	E	$+E$
Общественное благосостояние	$A+B+C+D$	$A+B+C+D+E$	$-(F+G)$

3.117. В рамках модели долгосрочного равновесия в условиях совершенной конкуренции будем полагать, что каждая типичная фирма в конкурентной отрасли производит такой уровень выпуска, при котором долгосрочные средние издержки минимальны. При этом уровне выпуска кривая предельных издержек фирмы пересекает кривую средних издержек этой фирмы. Прибыль фирмы в этом случае в долгосрочном периоде равна нулю.

Заметим, что условие первого порядка задачи максимизации прибыли каждой фирмы является необходимым и достаточным в силу условия $g''(y) > 0$.

Определим вид кривых средних и предельных издержек, соответствующих данному условию задачи:

- из условия $g''(y) > 0$ следует, что предельные издержки фирмы возрастают с ростом выпуска при любых его объемах;
- из условия $\big(g(y)/y\big)'' > 0$ следует, что средние издержки фирмы являются функцией выпуклой, так как $AC(y) = g(y)/y - F/y$, причем $AC''(y) = \big(g(y)/y\big)'' + 2F/y^3 > 0$;
- из условия неограниченного возрастания функции $\big(g(y)/y\big)$ и выпуклости функции средних издержек, установленной выше, следует, что кривая средних издержек фирмы имеет U-образную форму. Причем точка минимума функции средних издержек достигается при положительном объеме выпускаемой продукции и определяется соотношением $\big(g(y)/y\big)' = F/y^2$.

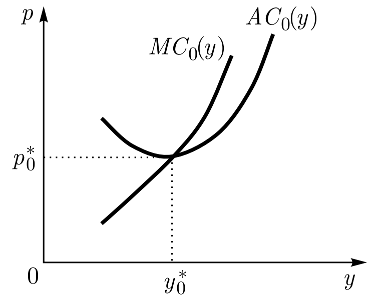

Рис. 3.46. Равновесный выпуск типичной фирмы в долгосрочном периоде; $MC_0(y)$ — предельные издержки типичной фирмы, $AC_0(y)$ — средние издержки типичной фирмы, p_0^* — равновесная цена в долгосрочном периоде, y_0^* — равновесный выпуск типичной фирмы

На рис. 3.46 изобразим графически кривые средних и предельных издержек репрезентативной фирмы и укажем равновесную цену и равновесный выпуск каждой типичной фирмы до вмешательства правительства.

Пусть y — выпуск продукции типичной фирмы.

(а) Если правительство ввело налог t на каждую единицу выпуска, то кривая предельных издержек репрезентативной фирмы сдвинется вверх на величину t. Кривая средних издержек фирмы также сдвинется вверх на величину t. Покажем это:

$$TC_t(y) = TC_0(y) + ty,$$
$$AC_t(y) = AC_0(y) + t,$$
$$MC_t(y) = MC_0(y) + t.$$

При введении потоварного налога кривая предельных издержек фирмы пересечет кривую средних переменных издержек фирмы в точке, где значение предельных издержек на t больше, чем в случае без вмешательства правительства, а выпуск фирмы остается на том же уровне (так как смещение кривых средних и предельных издержек происходит только вверх параллельно). Таким образом, с введением потоварного налога равновесная цена возрастет на величину потоварного налога, т. е. $p_t^* = p_0^* + t$. Равновесный выпуск каждой типичной фирмы, работающей в отрасли, останется на том же уровне, что и до введения потоварного налога, т. е. $y_t^* = y_0^*$. На рис. 3.47 изобразим графически кривые средних и предельных издержек при введении потоварного налога.

Рассмотрим теперь, как введение потоварного налога отразится на количестве фирм, работающих в отрасли. Поскольку объем спроса на продукт отрасли падает с ростом цены на этот продукт, то при росте равновесной цены продукта равновесный выпуск

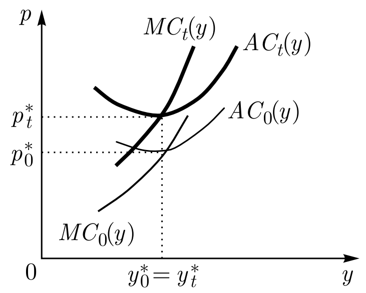

Рис. 3.47. Равновесный выпуск типичной фирмы в долгосрочном периоде при введении потоварного налога; $MC_t(y)$ — предельные издержки типичной фирмы после введения потоварного налога, $MC_t(y) = MC_0(y) + t$; $AC_t(y)$ — средние издержки типичной фирмы после введения потоварного налога, $AC_t(y) = AC_0(y) + t$; p_t^* — равновесная цена в долгосрочном периоде при введении потоварного налога, $p_t^* = p_0^* + t$; y_t^* — равновесный выпуск типичной фирмы при введении потоварного налога, $y_t^* = y_0^*$

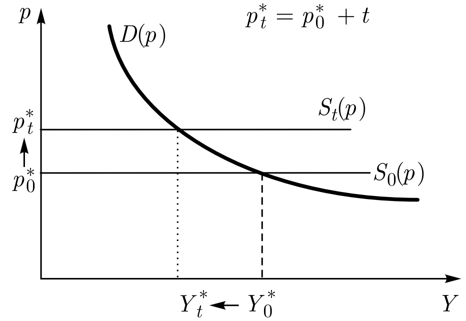

Рис. 3.48. Равновесие в долгосрочном периоде при введении потоварного налога; $D(p)$ — совокупный спрос на продукт отрасли; $S_0(p)$ — долгосрочное предложение отрасли до введения потоварного налога; $S_t(p)$ — долгосрочное предложение отрасли после введения потоварного налога; Y_0^* — равновесный выпуск отрасли до введения потоварного налога; Y_t^* — равновесный выпуск отрасли после введения потоварного налога

отрасли снизится по сравнению с выпуском отрасли до введения потоварного налога. Так как выпуск каждой репрезентативной фирмы, работающей в отрасли, не изменился с введением потоварного налога, то количество фирм в отрасли уменьшится по сравнению с ситуацией до введения потоварного налога. Продемонстрируем наши рассуждения графически на рис. 3.48.

Заметим, что равновесная цена повышается в силу снижения предложения отрасли, вызванного введением потоварного налога, а равновесный выпуск отрасли снижается: $p\uparrow \Rightarrow\ Y\downarrow$. При этом количество фирм в отрасли сокращается, так как выпуск одной фирмы остается неизменным, а выпуск отрасли сокращается: $n = \left(\dfrac{Y\downarrow}{y\ =}\right)\downarrow$, где Y — совокупный выпуск отрасли, y — выпуск типичной фирмы, p — равновесная цена в отрасли, n — количество фирм в отрасли.

Таким образом,

- равновесная цена возрастет на величину введенного потоварного налога;
- равновесный выпуск каждой фирмы при введении потоварного налога не изменится;
- количество фирм, работающих в отрасли, сократится.

(б) Предположим теперь, что правительство отменило потоварный налог и ввело для каждой фирмы, работающей в отрасли, аккордный налог, который не зависит от выпуска фирмы. Пусть величина налога равна T.

Рассмотрим, как это повлияет на кривые средних и предельных издержек. Прежде всего, заметим, что аккордный налог платит фирма, только если она работает в отрасли, а это означает, что данный налог вносит изменения в средние издержки фирмы, хотя налог и не зависит от объема выпуска фирмы. Обратим также внимание на то, что предельные издержки фирмы при введении аккордного налога не изменятся, т. е. при введении аккордного налога кривая предельных издержек типичной фирмы не меняется по сравнению с изначальной ситуацией:

$$\begin{aligned} TC_T(y) &= TC_0(y) + T,\\ AC_T(y) &= AC_0(y) + T/y,\\ MC_T(y) &= MC_0(y). \end{aligned}$$

Заметим, что введение аккордного налога сдвигает кривую средних издержек не только вверх, но и вправо, поскольку в этом случае минимальное значение средних издержек может быть достигнуто только при большем уровне выпуска. Вспомним также, что кривая предельных издержек фирмы пересекает кривую средних издержек фирмы в минимуме средних издержек. Следовательно, кривая AC сдвинется вверх не параллельно (большее смещение произойдет при меньшем выпуске). Изобразим изме-

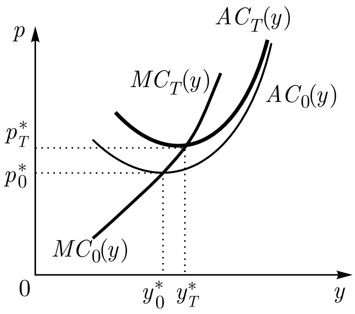

Рис. 3.49. Изменение поведения кривых средних и предельных издержек при введении аккордного налога: $MC_T(y)$ — предельные издержки типичной фирмы после введения аккордного налога, $MC_T(y) = MC_0(y)$; $AC_T(y)$ — средние издержки типичной фирмы после введения аккордного налога; p_T^* — равновесная цена в долгосрочном периоде при введении аккордного налога, $p_T^* > p_0^*$; y_T^* — равновесный выпуск типичной фирмы при введении аккордного налога, $y_T^* > y_0^*$

нения в расположении кривых средних и предельных издержек фирмы при введении аккордного налога графически на рис. 3.49.

Так как равновесная цена продукта отрасли возрастет, то выпуск отрасли сократится. Поскольку выпуск каждой фирмы возрастает при введении аккордного налога, то количество фирм в отрасли сократится:

$$p\uparrow \Rightarrow\ Y\downarrow, \qquad y\uparrow, \qquad n = \left(\frac{Y\downarrow}{y\ \uparrow}\right)\downarrow,$$

где Y — совокупный выпуск отрасли, y — выпуск типичной фирмы, p — равновесная цена в отрасли, n — количество фирм в отрасли.

Таким образом,

- равновесная цена на продукт отрасли возрастет;
- выпуск каждой фирмы, работающей в отрасли, возрастет;
- количество фирм, работающих в отрасли, сократится.

3.7. Ответы и подсказки

3.2. *Подсказка*: предположим $MRS_{12}^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right) < MRS_{12}^{\mathsf{B}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$. Тогда отнимем у A малую единицу первого блага и передадим ее потребителю B (поскольку распределение внутреннее, это возможно). Благосостояние B не изменится, если отнять у него $MRS^{\mathsf{B}}_{12}\left(\widetilde{x}^{\mathsf{B}}_1, \widetilde{x}^{\mathsf{B}}_2\right)$ малых единиц второго блага. Передадим $MRS^{\mathsf{B}}_{1,2}\left(\widetilde{x}^{\mathsf{B}}_1, \widetilde{x}^{\mathsf{B}}_2\right)$ малых единиц второго блага потребителю A, что приведет к росту его благосостояния в силу строгой монотонности предпочтений. Таким образом, распределение, в котором предельная норма замещения потребителя A меньше, чем потребителя B, не может быть оптимальным по Парето. Далее предположим, что во внутреннем Парето-оптимальном распределении $MRS^{\mathsf{A}}_{12}\left(\widetilde{x}^{\mathsf{A}}_1, \widetilde{x}^{\mathsf{A}}_2\right) > MRS^{\mathsf{B}}_{12}\left(\widetilde{x}^{\mathsf{B}}_1, \widetilde{x}^{\mathsf{B}}_2\right)$ и снова придем к противоречию. **3.4.** Нет. В граничном Парето-оптимальном распределении предельные нормы замещения потребителей могут различаться. Например, для экономики, в которой $u^{\mathsf{A}}\left(x^{\mathsf{A}}_1, x^{\mathsf{A}}_2\right) = x^{\mathsf{A}}_1 + x^{\mathsf{A}}_2$, $u^{\mathsf{B}}\left(x^{\mathsf{B}}_1, x^{\mathsf{B}}_2\right) = 2x^{\mathsf{B}}_1 + x^{\mathsf{B}}_2$ и $\omega_1 = \omega_2 = 10$, распределение ($x^{\mathsf{A}}_1 = 0$, $x^{\mathsf{A}}_2 = 5$, $x^{\mathsf{B}}_1 = 10$, $x^{\mathsf{B}}_2 = 5$) является оптимальным по Парето, однако $MRS^{\mathsf{A}}_{12}(0, 5) = 1 < MRS^{\mathsf{B}}_{12}(10, 5) = 2$. **3.5. (а)** В самом понятии «предельная норма замещения» подчеркивается, что речь идет о «предельных», т. е. малых величинах. По условию рассматриваемое распределение — допустимое и внутреннее, значит, в наборе у каждого потребителя есть положительное количество каждого блага. Если для построения улучшения по Парето потребителю A требуется отдать семь малых единиц второго блага, то это осуществимо, даже если в заданном распределении количество второго блага у него, скажем, 10^{-10}. **(б)** Во-первых, при построении улучшения по Парето индивидуальные начальные запасы благ не имеют значения. Только координаты распределения. Во-вторых, как и в п. (а), речь идет о малых величинах. Таким образом, поскольку распределение по условию внутреннее, потребитель B может передать A малую единицу первого блага. **3.6. (а)** *Подсказка*: рассмотрим, например, первую из задач. Распределение, являющееся решением задачи, допустимо, а значит, если оно не Парето-оптимально, то нашлось другое допустимое распределение, в котором благосостояние одного из потребителей не меньше, чем в решении, а другого выше. Если выше благосостояние потребителя A, то это означает, что нашлось распределение, удовлетворяющее ограничениям задачи, в котором значение целевой функции (полезность A) выше, чем в предполагаемом решении. Пришли к противоречию. Если предположить, что выше благосостояние потребителя B, то, воспользовавшись строгой монотонностью предпочтений потребителя A и непрерывностью функции полезности B, можно построить распределение, удовлетворяющее ограничениям задачи, в котором опять же значение целевой функции выше, чем в предполагаемом решении. Аналогичным образом анализируется вторая задача. **(б)** Рассмотрите экономику обмена, в которой предпочтения потребителей представимы функциями полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = x_2^{\mathsf{A}}$, $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}\right) = x_1^{\mathsf{B}}$. Начальные запасы каждого блага в экономике составляют, например, десять единиц. Тогда при $\overline{u}^{\mathsf{B}} = 5$ решением первой из задач является множество наборов ($0 \leqslant x_1^{\mathsf{A}} < 5$, $x_2^{\mathsf{A}} = 10$, $5 \leqslant x_1^{\mathsf{B}} \leqslant 10$, $x_2^{\mathsf{B}} = 0$), тогда как среди множества решений Парето-оптимальное распределение единственно: ($x_1^{\mathsf{A}} = 0$, $x_2^{\mathsf{A}} = 10$, $x_1^{\mathsf{B}} = 10$, $x_2^{\mathsf{B}} = 0$). **(в)** *Подсказка*: парето-оптимальное распределение $\widetilde{x} = \left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$ является решением каждой из задач при $\overline{u}^k = u^k\left(\widetilde{x}_1^k, \widetilde{x}_2^k\right)$, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$. При таком выборе $\overline{u}^k$ распределение $\widetilde{x}$ удовлетворяет всем ограничениям каждой из задач и невозможно найти распределение, которое бы также удовлетворяло ограничениям задач, а значение целевой функции было бы больше, так как это противоречило бы Парето-оптимальности распределения $\widetilde{x}$. **(г)** Да. **(д)** Если распределение $\widetilde{x}$ является внутренним решением любой из задач, то $MRS_{12}^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right) = MRS_{12}^{\mathsf{B}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$. *Подсказка*: воспользуйтесь для решения задачи теоремой Куна–Таккера. **(е)** *Подсказка*: рассмотрите экономику обмена, в которой предпочтения хотя бы одного из потребителей не удовлетворяют свойству выпуклости. Например, пусть предпочтения потребителя A представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = x_1^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{A}}$, а потребителя B — функцией $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}\right) = \left(x_1^{\mathsf{B}}\right)^2 + \left(x_2^{\mathsf{B}}\right)^2$ (предпочтения не являются выпуклыми). И пусть, для определенности, каждого блага в экономике имеется по 10 ед. Распределение ($x_1^{\mathsf{A}} = 5$, $x_2^{\mathsf{A}} = 5$, $x_1^{\mathsf{B}} = 5$, $x_2^{\mathsf{B}} = 5$) удовлетворяет $MRS_{12}^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right) = MRS_{12}^{\mathsf{B}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$. Однако для такого распределения существует улучшение по Парето — допустимое распределение ($x_1^{\mathsf{A}} = 0$, $x_2^{\mathsf{A}} = 10$, $x_1^{\mathsf{B}} = 10$, $x_2^{\mathsf{B}} = 0$), в котором благосостояние потребителя A не изменилось, а благосостояние B выше. **3.7.** Утверждение верно. Для доказательства предположите обратное. **3.8.** Утверждение неверно. *Подсказка*: в качестве примера можно рассмотреть ситуацию, когда оба потребителя имеют одинаковые предпочтения и считают блага совершенными субститутами. **3.9. (а)** Верно. **(б)** В качестве контрпримера можно рассмотреть экономику, в которой имеется по 10 ед. каждого блага, а предпочтения представимы функциями полезности $u^k\left(x_1^k,\, x_2^k\right) = \left(x_1^k\right)^2 + \left(x_2^k\right)^2$, $k = \{\mathsf{A},\, \mathsf{B}\}$. **3.10.** Утверждение неверно. *Подсказка*: для контрпримера рассмотрите такой случай, когда во внутренней точке первоначальных запасов наклоны кривых безразличия потребителей будут различными. **3.11.** Утверждение верно. *Подсказка*: в качестве примера можно рассмотреть экономику обмена, где оба потребителя имеют одинаковые предпочтения, описываемые функцией полезности Кобба–Дугласа. В этом случае множество Парето-оптимальных распределений совпадает с диагональю ящика Эджворта. Тогда можно, например, сопоставить уровень полезности потребителя A во внутренней Парето-оптимальной точке и в точке начала координат потребителя B, $(x_1^{\mathsf{A}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}},\ x_2^{\mathsf{A}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}})$, которая также является Парето-оптимальной. **3.13.** Нет. **3.14.** Распределение $\overline{x}$ не является Парето-оптимальным. Пример Парето-улучшения — распределение, где каждый потребитель получает по две единицы каждого блага. **3.15.** Распределение D не является Парето-оптимальным. Парето-улучшением для него является любой набор из области, расположенной выше точки D, ограниченной кривыми безразличия потребителя A и B, проходящими через эту точку, и «стенками» ящика Эджворта. Распределение C является Парето-оптимальным: множество наборов, которые не хуже набора C для одного потребителя, не пересекается с множеством наборов, которые лучше набора C для другого потребителя. **3.16.** Точка первоначального запаса лежит на диагонали в центре ящика Эджворта и не является Парето-оптимальной. **3.17. (а)** Распределение $\overline{x}$ не является Парето-оптимальным. Пример Парето-улучшения — распределение $\overline{\overline{x}} = (\overline{\overline{x}}_1^{\mathsf{A}} = 0,\, \overline{\overline{x}}_2^{\mathsf{A}} = 5,\, \overline{\overline{x}}_1^{\mathsf{B}} = 9,\ \overline{\overline{x}}_2^{\mathsf{B}} = 7)$. **(б)** Равенство предельных норм замещения характеризует Парето-оптимум, поскольку распределение внутреннее, предпочтения потребителей выпуклы, строго монотонны на внутренних наборах и функции полезности дифференцируемы. Из условий допустимости и равенства предельных норм замещения находим $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 3,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 6,\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 6,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 6)$. Распределение $\widetilde{x}$ является Парето-оптимальным. **3.18. (а)** Точка первоначального запаса не является Парето-оптимальной.

Например, распределение $\widehat{x} = \{\widehat{x}^{\mathsf{A}} = (4,\ 5), \widehat{x}^{\mathsf{B}} = (8,\ 7)\}$ является Парето-улучшением для точки первоначального запаса. **(б)** Данное распределение не будет Парето-улучшением для точки первоначального запаса, поскольку положение потребителя B ухудшится: $u^{\mathsf{B}}(\overline{x}^{\mathsf{B}}) = \min\{1,\ 8\} = 1 < u^{\mathsf{B}}(\omega^{\mathsf{B}}) = \min\{8,\ 2\} = 2$. **(в)** Множество Парето-оптимальных распределений совпадает с диагональю ящика Эджворта: $x_2^{\mathsf{A}} = x_1^{\mathsf{A}}$, где $0 \leqslant x_1^{\mathsf{A}} \leqslant 12$. **3.19. (а)** Множество Парето-оптимальных распределений — весь ящик Эджворта. **(б)** Множество Парето-оптимальных распределений состоит только из одной точки $(x_1^{\mathsf{A}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}},\ x_2^{\mathsf{A}} = 0)$. **3.20. (а)** Нет. **(б)** Да. **(в)** Нет. **3.21. (а)** Распределение $\overline{x}$ Парето-оптимально, распределение $\widetilde{x}$ не является Парето-оптимальным. **(б)** $y^{\mathsf{A}} = 2x^{\mathsf{A}}$ при $0 \leqslant x^{\mathsf{A}} \leqslant 2$. **(в)** Оба распределения оптимальны по Парето. **3.22. (а)** Множество Парето-оптимальных распределений: $x_2^{\mathsf{A}} = x_1^{\mathsf{A}}$, где $0 \leqslant x_1^{\mathsf{A}} \leqslant 1$, т. е. контрактная кривая совпадает с диагональю ящика Эджворта. **(б)** Множество Парето-оптимальных распределений: $x_2^{\mathsf{A}} = 2x_1^{\mathsf{A}}/(1 + x_1^{\mathsf{A}})$, где $0 \leqslant x_1^{\mathsf{A}} \leqslant 1$. Контрактная кривая является возрастающей и строго вогнутой (т. е. лежит выше диагонали ящика Эджворта, где начало координат потребителя A — нижний левый угол). **3.24.** Закон Вальраса выполнен. *Подсказка*: для всех потребителей решение задачи максимизации полезности удовлетворяет ограничению как равенству. **3.25. (а)** $p_3 = 3$. **(б)** Избыточный спрос на второе благо равен (–4). Указанное распределение не может быть равновесным, поскольку избыточный спрос на каждое благо в равновесии должен быть равен нулю. **3.26.** Равновесие: $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 1/7$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 6$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 6/7$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 4$, $x_2^{\mathsf{B}} = 8/7$. **3.27.** Утверждение верно, точка первоначального запаса является равновесной при любых положительных ценах. **3.28. (а)** Данное распределение не является Парето-оптимальным. **(б)** Данное распределение является Парето-оптимальным. **(в)** Нет, данная ситуация не будет равновесной, поскольку не выполнены условия сбалансированности рынков. **3.29. (а)** $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 1$, $\widetilde{x}^{\mathsf{A}} = (3,\ 3)$, $\widetilde{x}^{\mathsf{B}} = (1,\ 2)$. **(б)** $x_2^{\mathsf{A}} = 5x_1^{\mathsf{A}}/(8 - x_1^{\mathsf{A}})$, где $0 \leqslant x_1^{\mathsf{A}} \leqslant 4$. Равновесное распределение Парето-оптимально. **3.30.** Равновесная цена первого блага равна $\widetilde{p}_1 = 2/(\delta + 1)$, т. е. равновесная цена первого блага тем ниже, чем больше этого блага в экономике. **3.31. (а)** $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = \alpha$, $\widetilde{x}^{\mathsf{A}} = (1 + \alpha,\ 0)$, $\widetilde{x}^{\mathsf{B}} = (0,\ 2)$. **(б)** Возрастет.

3.32. **(а)** $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 4$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 11/4$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 3$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 5/4$, $x_2^{\mathsf{B}} = 5$. Равновесное распределение в ящике Эджворта характеризуется касанием кривых безразличия потребителей A и B, причем бюджетная линия совпадает с данной кривой безразличия потребителя A. **(б)** Увеличение числа потребителей типа A в 10 раз и увеличение числа потребителей типа B в такой же пропорции никак не изменит условия сбалансированности рынков обоих благ, а значит, никак не повлияет на равновесные цены (отношение цен). **(в)** Равновесное распределение Парето-оптимально в силу первой теоремы благосостояния. **3.35.** *Подсказка*: в задании требуется доказать первую (п. (а)) и вторую (п. (б)) теоремы благосостояния. Дифференцируемость функций полезности, наряду с выпуклостью и строгой монотонностью предпочтений (последнее следует из $\partial u^k/\partial x_i^k > 0$ в любой точке, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$, $i = 1, 2$), дает возможность воспользоваться дифференциальными характеристиками внутренних решений задач потребителей и дифференциальной характеристикой внутреннего Парето-оптимального распределения. Строгая монотонность предпочтений гарантирует, что в решении бюджетные ограничения задач потребителей выполнены как равенства. **3.36.** Поскольку предпочтения потребителя A не являются монотонными, то предпосылки первой теоремы благосостояния не выполнены. Поскольку предпочтения потребителя A не являются монотонными, а предпочтения B не являются выпуклыми, то предпосылки второй теоремы благосостояния не выполнены. **3.37.** Утверждение неверно. *Подсказка*: рассмотрите случай, когда предпочтения одного из потребителей не являются выпуклыми (см. рис. 3.4). **3.39.** **(а)** *Подсказка*: для того чтобы проверить выполнение закона Вальраса, вычислите спрос каждого потребителя на оба блага, затем найдите избыточный спрос на каждое благо, $z_i(p_1, p_2) = x_i^{\mathsf{A}} + x_i^{\mathsf{B}} - (\omega_i^{\mathsf{A}} + \omega_i^{\mathsf{B}})$, $i = 1, 2$, затем вычислите стоимость совокупного избыточного спроса $p_1 z_1(p_1, p_2) + p_2 z_2(p_1, p_2)$ и убедитесь, что эта величина равна нулю при любых ценах, при которых определен избыточный спрос. **(б)** $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 1/2$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 2$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 3$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 6$, $x_2^{\mathsf{B}} = 3$. **(в)** $x_2^{\mathsf{A}} = 9x_1^{\mathsf{A}}/(4 + x_1^{\mathsf{A}})$ при $0 \leqslant x_1^{\mathsf{A}} \leqslant 8$. Равновесное распределение Парето-оптимально. **(г)** Данное распределение можно реализовать как равновесное при ценах $\widetilde{p}_1 = 1$, $\widetilde{p}_2 = 3$ и трансфертах $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} = 10$, $\widetilde{T}^{\mathsf{B}} = -10$. **3.40.** **(а)** Определение равновесия по Вальрасу: набор $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}})$ является равновесием по Вальрасу, если 1) $(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}})$ является решением задачи потребителя A: $\begin{cases} (x_1^{\mathsf{A}})^{1/4}(x_2^{\mathsf{A}})^{3/4} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}} \geqslant 0, x_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ \widetilde{p}_1 x_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 x_2^{\mathsf{A}} \leqslant 4\,\widetilde{p}_1 + 2\,\widetilde{p}_2; \end{cases}$ 2) $(\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}})$ является решением задачи потребителя B: $\begin{cases} \min\{x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}/2\} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{B}} \geqslant 0, x_2^{\mathsf{B}} \geqslant 0}, \\ \widetilde{p}_1 x_1^{\mathsf{B}} + \widetilde{p}_2 x_2^{\mathsf{B}} \leqslant 1\,\widetilde{p}_1 + 8\,\widetilde{p}_2; \end{cases}$ 3) все рынки уравновешены: $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 5$; $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 10$. **(б)** Равновесие: $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 2$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 2{,}5$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 5$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 2{,}5$, $x_2^{\mathsf{B}} = 5$. **(в)** Множество Парето-оптимальных распределений совпадает с диагональю ящика Эджворта: $x_2^{\mathsf{A}} = 2x_1^{\mathsf{A}}$, где $0 \leqslant x_1^{\mathsf{A}} \leqslant 5$. **(г)** Данное распределение можно реализовать как равновесное при ценах $\widetilde{p}_1 = 2$, $\widetilde{p}_2 = 1$ и трансфертах $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} = -2$, $\widetilde{T}^{\mathsf{B}} = 2$. **3.41. (а)** Множество Парето-оптимальных распределений можно разделить на три участка: 1) $x_2^{\mathsf{A}} = x_2^{\mathsf{B}} = (\omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}})/2$, $x_1^{\mathsf{A}} \in \big(0,\, \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}\big)$, $x_1^{\mathsf{B}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}} - x_1^{\mathsf{A}}$; 2) $x_1^{\mathsf{A}} = 0$, $x_1^{\mathsf{B}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}$, $x_2^{\mathsf{A}} \in \big[0,\, (\omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}})/2\big]$, $x_2^{\mathsf{B}} \in \big[(\omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}})/2,\, \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}\big]$, $x_2^{\mathsf{B}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}} - x_2^{\mathsf{A}}$; 3) $x_1^{\mathsf{B}} = 0$, $x_2^{\mathsf{B}} \in \big[0,\, (\omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}})/2\big]$, $x_1^{\mathsf{A}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}$, $x_2^{\mathsf{A}} \in \big[(\omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}})/2,\, \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}\big]$, $x_2^{\mathsf{A}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}} - x_2^{\mathsf{B}}$. **(в)** $p_1/p_2 = 8$, $x_1^{\mathsf{A}} = 25$, $x_1^{\mathsf{B}} = 47$, $x_2^{\mathsf{A}} = x_2^{\mathsf{B}} = 16$. **(г)** Да, $p_1/p_2 = 8$. **3.42. (а)** Множество Парето-оптимальных распределений можно разделить на три участка: 1) $x_1^{\mathsf{A}} = x_1^{\mathsf{B}} = (\omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}})/2$, $x_2^{\mathsf{A}} \in \big(0,\, \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}\big)$, $x_2^{\mathsf{B}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}} - x_2^{\mathsf{A}}$; 2) $x_1^{\mathsf{A}} \in \big[(\omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}})/2,\, \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}\big]$, $x_2^{\mathsf{A}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}$, $x_1^{\mathsf{B}} \in \big[0,\, (\omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}})/2\big]$, $x_2^{\mathsf{B}} = 0$, $x_1^{\mathsf{A}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}} - x_1^{\mathsf{B}}$; 3) $x_1^{\mathsf{A}} \in \big[0,\, (\omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}})/2\big]$, $x_2^{\mathsf{A}} = 0$, $x_1^{\mathsf{B}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}} - x_1^{\mathsf{A}}$, $x_2^{\mathsf{B}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}$. **(в)** $p_2/p_1 = 12$, $x_1^{\mathsf{A}} = x_1^{\mathsf{B}} = 36$, $x_2^{\mathsf{A}} = 23$, $x_2^{\mathsf{B}} = 9$. **(г)** Да, $p_2/p_1 = 12$. **3.43. (а)** Равновесное отношение цен: $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 1$. **(б)** Потребитель B не может иметь данную функцию полезности. **(в)** Предпочтения потребителя B могут описываться, например, функцией полезности $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}) = x_1^{\mathsf{B}} \cdot x_2^{\mathsf{B}}$, однако это не единственно возможный вариант. **(г)** $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 1/2$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 1$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 1/2$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 1$, $x_2^{\mathsf{B}} = 3/2$. **(д)** Данное распределение можно реализовать как равновесное при ценах $\widehat{p}_1 = 1$, $\widehat{p}_2 = 2$ и трансфертах $\widehat{T}^{\mathsf{A}} = 1$, $\widehat{T}^{\mathsf{B}} = -1$. **3.44. (а)** Данное распределение можно реализовать как равновесное при ценах $\widetilde{p}_1 = 1$, $\widetilde{p}_2 = 4$ и трансфертах $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} = -12$, $\widetilde{T}^{\mathsf{B}} = 12$. **(б)** Данное распределение нельзя реализовать как равновесное, поскольку указанная точка не является допустимой, и, следовательно, она не может являться равновесием по Вальрасу (ни при каких ценах). **3.45.** Данное распределение можно реализовать как равновесное при ценах $\widetilde{p}_1 = 4$, $\widetilde{p}_2 = 1$ и трансфертах $\widetilde{T}^{\mathsf{A}} = 6$, $\widetilde{T}^{\mathsf{B}} = -6$. **3.52.** **(а)** В качестве примера можно рассмотреть пример в решении задачи 3.49. (б) Рассмотрите функции полезностей $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) = x_1^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}}\right) = x_1^{\mathsf{B}} + x_2^{\mathsf{B}}$. Множество Парето-оптимальных распределений — это все допустимые распределения, в том числе граничные. Реализация возможна при ценах $p_1/p_2 = 1$. **3.53.** **(а)** Распределение $\widetilde{x}$ можно реализовать как равновесное. **(б)** В данном случае не выполнена предпосылка второй теоремы благосостояния о монотонности предпочтений — предпочтения потребителя A не являются таковыми. **3.54.** **(а)** Распределение $\widetilde{x}$ нельзя реализовать как равновесное ни при каких ценах. **(б)** Не выполнена предпосылка о выпуклости предпочтений — предпочтения потребителя A не являются таковыми. **3.56.** **(а)** Равновесное распределение $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 5,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 5,\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 5,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 5)$ единственно при любых ценах. **(б)** При любых ценах в заданной экономике оптимальный выбор A набор $(1, 1)$, а оптимальный выбор B набор $(5, 5)$. Рынки не сбалансированы, а значит, равновесия по Вальрасу в задаче не существует. **(в)** При любом распределении дохода рынки не сбалансированы. Равновесие не существует. **(г)** $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} \in [1,\ 5]$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{x}_i^{\mathsf{B}} = 10 - \widetilde{x}_i^{\mathsf{A}}$, $i = 1, 2$. **3.57.** **(а)** Совокупный спрос на первое благо составляет $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = \dfrac{8\,\widetilde{p}_1 + 16\,\widetilde{p}_2}{\widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2} = 8 + \dfrac{8\,\widetilde{p}_2}{\widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2} > 8 = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}$ при $\widetilde{p}_1 > 0$, $\widetilde{p}_2 > 0$. Таким образом, при положительных ценах рынок первого блага не будет сбалансирован, т. е. равновесие при положительных ценах не существует. **(б)** При $p_2 = 0$ совокупный спрос на первое благо составит 8. Спрос A на второе благо: $x_2^{\mathsf{A}}\,(p_1 > 0,\, p_2 = 0) \in [6,\ \infty)$. Спрос B на второе благо: $x_2^{\mathsf{B}}\,(p_1 > 0,\, p_2 = 0) \in [2,\ \infty)$. При рассматриваемом в задачнике определении равновесия равновесные распределения $(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 6$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} \in [6, 14]$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 2$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 16 - \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}})$. **(в)** Рис. 3.50. Кривые цена–потребление потребителей пересекаются при $p_2 = 0$, $p_1 > 0$. Множество равновесных распределений $(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 6,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} \in [6,\ 14]$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 2,\ \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 16 - \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}})$. **3.58.** **(а)** Совокупный спрос на первое

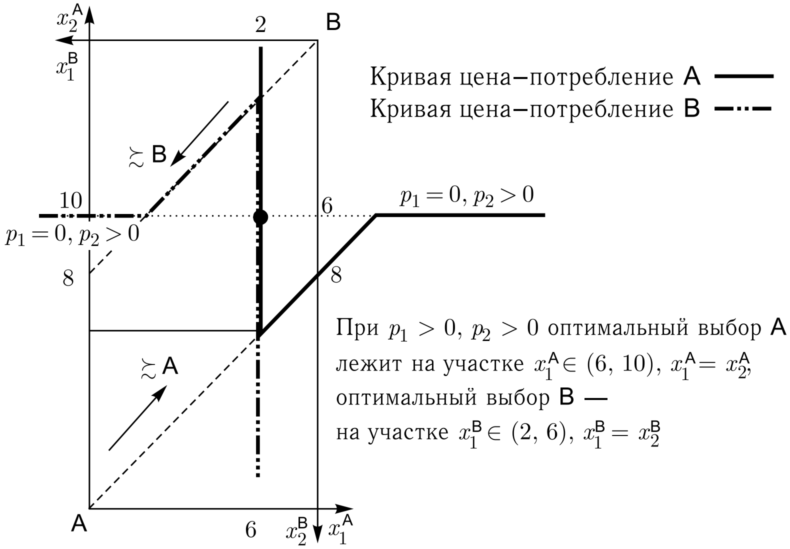

Рис. 3.50

благо составляет $x_1^{\mathsf{A}}(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2) + x_1^{\mathsf{B}}(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2) = \dfrac{6(3\widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2)}{3\widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2} = 6$, т. е. он равен совокупному запасу первого блага при любых положительных ценах $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 > 0$, а также при $p_1 = 0$, $p_2 > 0$ и при $p_1 = 0$, $p_2 > 0$. Так как предпочтения монотонны, то в экономике выполнен закон Вальраса, а значит, второй рынок также уравновешен. Таким образом, все распределения, лежащие на диагонали ящика Эджворта $x_2^{\mathsf{A}} = x_1^{\mathsf{A}}/3$ от точки ($x_1^{\mathsf{A}} = 3$, $x_2^{\mathsf{A}} = 1$) до точки ($x_1^{\mathsf{B}} = 1$, $x_2^{\mathsf{B}} = 1/3$), являются равновесными. Заметим, что для каждого равновесного распределения равновесные цены единственны. **(б)** Пересечение кривых цена–потребление при одинаковых относительных ценах — равновесные распределения. На рис. 3.51 видно, что каждому отношению цен $p_1/p_2 > 0$ соответствует единственное равновесное распределение из множества ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} \in (3, 5)$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}/3$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 6 - \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 2 - \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}$). При $p_1 = 0$, $p_2 > 0$ равновесное распределение ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 3$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 1$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 3$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 1$). При $p_1 > 0$, $p_2 = 0$ равновесное распределение ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 5$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 5/3$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 1$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 1/3$). Пересечению кривых цена–потребление в точке начальных запасов соответствуют разные цены, соответственно, точка начальных запасов не является равновесным распределением. **3.59.** *Подсказки.* **(а)** Воспользуй-

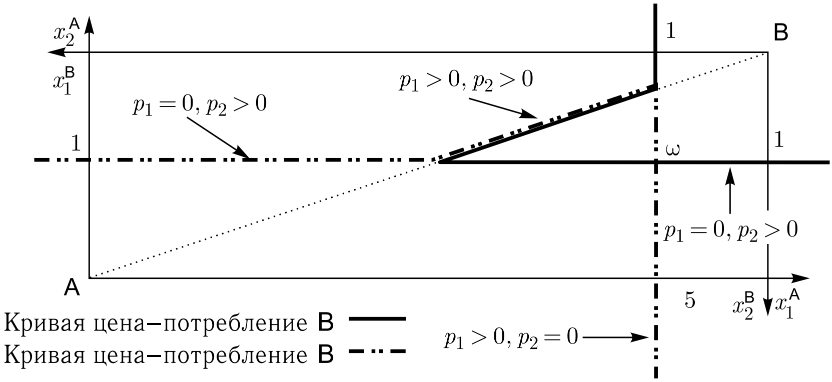

Рис. 3.51

тесь определением равновесия по Вальрасу (см. задачу 3.23). **(б)** При ценах $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$ набор (ω_1^k, ω_2^k) является решением задачи потребителя k. **(в)** Предположите, что в экономике существуют два равновесных распределения. Использование предпосылки строгой выпуклости приведет к противоречию. **(г)** Рассмотрите случай, когда для обоих потребителей существуют точки насыщения, и эти точки насыщения в ящике Эджворта совпадают, причем точка насыщения и является точкой первоначального запаса. **(д)** Рассмотрите случай, когда для обоих потребителей блага являются совершенными субститутами в одинаковой пропорции. В этом случае не выполнена предпосылка о строгой выпуклости предпочтений. **3.61.** *Подсказка*: для доказательства используйте метод от противного. Предположите, что $MRS_{12}^A\left(\widehat{x}_1^A, \widehat{x}_2^A\right) < f'\left(\widehat{x}_1\right)$, а затем $MRS_{12}^A\left(\widehat{x}_1^A, \widehat{x}_2^A\right) > f'\left(\widehat{x}_1\right)$. **3.63. (а)** Распределение в котором потребление первого благо и/или второго ($x_1^A = 0$ и/или $x_2^A = 0$), не является Парето-оптимальным. **(б)** Распределение, в котором потребитель потребляет свой начальный запас, а затраты первого блага и, соответственно, выпуск второго — нулевые (т. е. $(x_1^A = \omega_1^A,\ x_2^A = \omega_2^A,\ x_1 = y_2 = 0)$) может быть Парето-оптимальным. **3.64. (а)** Заданное распределение допустимо. **(б)** $(x_1^A = 12,\ x_2^A = 72,\ x_1 = 0,\ y_2 = 0)$. **(в)** $\alpha \geqslant 36$. **3.65. (а)** Данное распределение не является допустимым, а, следовательно, не может быть Парето-оптимальным. **(б)** Нет. **3.66. (а)** $(\widehat{x}_1^A = 1,\ \widehat{x}_2^A = 2,\ \widehat{x}_1 = 4,\ \widehat{y}_2 = 2)$. **(б)** $\omega_2^A = 10$. **3.67. (а)** (1) Если $1/3 > \alpha > 0$, то Парето-оптимальное распределение

($\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 0$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 4$, $\widehat{x}_1 = 9$, $\widehat{y}_2 = 3$); (2) если $\alpha > 1/3$, то Парето-оптимальное распределение ($\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 9$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 1$, $\widehat{x}_1 = 0$, $\widehat{y}_2 = 0$); (3) если $\alpha = 1/3$, то в рассматриваемой экономике существует множество Парето-оптимальных распределений: $\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} \in [0, 9]$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 1 + (9 - \widehat{x}_1^{\mathsf{A}})/3$ (таким образом, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} \in [1, 4]$), $\widehat{x}_1 = 9 - \widehat{x}_1^{\mathsf{A}}$, $\widehat{y}_2 = (9 - \widehat{x}_1^{\mathsf{A}})/3$. **(б)** ($\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 0$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 82$, $\widehat{x}_1 = 9$, $\widehat{y}_2 = 81$). **(в)** Если $\alpha > 9$, то ($\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 9$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 1$, $\widehat{x}_1 = 0$, $\widehat{y}_2 = 0$). Если $\alpha = 9$, то в экономике — два Парето-оптимальных распределения: ($\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 9$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 1$, $\widehat{x}_1 = 0$, $\widehat{y}_2 = 0$) и ($\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 0$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 82$, $\widehat{x}_1 = 9$, $\widehat{y}_2 = 81$). Если $0 < \alpha < 9$, то ($\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 0$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 82$, $\widehat{x}_1 = 9$, $\widehat{y}_2 = 81$). **3.68. (а)** Данное распределение не является допустимым. Поскольку Парето-оптимальное распределение должно быть допустимо, не существует значений параметра α, при которых распределение является Парето-оптимальным. **(б)** ($\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 7$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 7$, $\widehat{x}_1 = 9$, $\widehat{y}_2 = 6$). **(в)** ($\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 0$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 9$, $\widehat{x}_1 = 16$, $\widehat{y}_2 = 8$). **(г)** При $0 < \alpha < 4$ в рассматриваемой задаче существует внутреннее Парето-оптимальное распределение, в котором $x_1 = \alpha^2$, $y_2 = 2\alpha$, $x_1^{\mathsf{A}} = 16 - \alpha^2$, $x_2^{\mathsf{A}} = 1 + 2\alpha$. **3.69.** $\left(x_1^{\mathsf{A}} \in \left[1 - 1/\sqrt{2}\,, 1 + 1/\sqrt{2}\,\right], x_2^{\mathsf{A}} = 4\left(2 - x_1^{\mathsf{A}}\right), x_1 = 2 - x_1^{\mathsf{A}}, y_2 = 4\left(2 - x_1^{\mathsf{A}}\right)\right)$. **3.70.** Утверждение верно. **3.71.** *Подсказка*: воспользуйтесь тем, что бюджетное ограничение задачи потребителя в решении выполнено как равенство. **3.74. (а)** Закон Вальраса выполнен при $3p_2 \leqslant p_1$. **(б)** ($p_1/p_2 = 3$, $x_1^{\mathsf{A}} = 8/3$, $x_2^{\mathsf{A}} = 16$, $x_1 = 7/3$, $y_2 = 7$). **(в)** Ни равновесные цены, ни равновесное распределение не изменятся. **3.75. (а)** Закон Вальраса выполнен как равенство. **(б)** ($\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 4$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 6$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 12$, $\widetilde{x}_1 = 4$, $\widetilde{y}_2 = 2$). **3.76. (а)** Предпочтения не являются монотонными, а значит, невозможно сослаться на результат соответствующего утверждения. Проверка закона показывает, что он выполнен. **(б)** Решение задачи фирмы существует при ценах $5p_2 \leqslant p_1$. Равновесие существует только при ценах $5\widetilde{p}_2 = \widetilde{p}_1$. Равновесное распределение ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 0$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 50$, $\widetilde{x}_1 = 10$, $\widetilde{x}_2 = 50$). **3.79. (а)** В экономике — два Парето-оптимальных распределения. Оба лежат на границе: ($x_1^{\mathsf{A}} = 0$, $x_2^{\mathsf{A}} = 5$, $x_1 = 4$, $y_2 = 2$) и ($x_1^{\mathsf{A}} = 4$, $x_2^{\mathsf{A}} = 3$, $x_1 = 0$, $y_2 = 0$). **(б)** Ни одно из найденных в п. (а) распределений не может быть равновесным. **3.80.** Распределение на обоих рисунках невозможно реализовать как равновесное. **3.81. (а)** Наклон изопрофиты в пространстве (x_1, y_2) равен $p_1/(p_2\,(1 - \tau))$, в пространстве $(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}})$ соответственно $\left(-p_1/(p_2(1-\tau))\right)$. **(б)** Благосостояние потребителя уменьшится. **3.82. (а)** Парето-оптимальные распределения ($x_1^{\mathsf{A}}=16$, $x_2^{\mathsf{A}}=0$, $x_1=0$, $y_2=0$) и ($x_1^{\mathsf{A}}=0$, $x_2^{\mathsf{A}}=16$, $x_1=16$, $y_2=16$). Оба распределения могут быть реализованы как равновесные при ценах $p_1/p_2=1$. **(б)** Парето-оптимальное распределение ($x_1^{\mathsf{A}}=16$, $x_2^{\mathsf{A}}=0$, $x_1=0$, $y_2=0$). Это распределение нереализуемо как равновесное. **(в)** При условиях допустимости $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}+\widetilde{x}_1=\omega_1^{\mathsf{A}}$ и $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}=\omega_2^{\mathsf{A}}+\widetilde{y}_2$ Парето-оптимальное распределение ($x_1^{\mathsf{A}}=16$, $x_2^{\mathsf{A}}=4$, $x_1=0$, $y_2=0$). Его невозможно реализовать как равновесное при $p_1, p_2>0$. **(г)** Парето-оптимальное распределение ($x_1^{\mathsf{A}}=0$, $x_2^{\mathsf{A}}=12$, $x_1=16$, $y_2=8$). Распределение реализуемо как равновесное при ценах $p_2/p_1=4$. **3.83. (а)** Производственная функция не является вогнутой, поэтому условие $MRS_{l,c}^{\mathsf{R}}=f'(L)$ является только необходимым для Парето-оптимального распределения, все компоненты которого положительны. Распределение ($c^{\mathsf{R}}=c=1$, $l^{\mathsf{R}}=11$, $L=1$), удовлетворяющее $MRS_{l,c}^{\mathsf{R}}=f'(L)$, не является Парето-оптимальным, так как в граничном распределении, в котором Робинзон все время бодрствования тратит на сбор бананов, его полезность выше: $u^{\mathsf{R}}(11,1)=23<u^{\mathsf{R}}(0,144)=144$. Таким образом, Парето-оптимальное распределение — это ($c^{\mathsf{R}}=c=144$, $l^{\mathsf{R}}=0$, $L=12$). **(б)** При заданной технологии задача максимизации прибыли фирмы при положительных ценах не имеет решения. Поэтому распределение, найденное в п. (а), не может быть реализовано как равновесное. Нарушены следующие предпосылки второй теоремы благосостояния: предпосылка о выпуклости технологии (вогнутости производственной функции), предпосылка о внутренности Парето-оптимального распределения. Таким образом, нет никакой гарантии, что Парето-оптимальное распределение реализуемо как равновесное. **3.85. (а)** Равновесие существует, его параметры $\widetilde{L}=4$, $\widetilde{l}=8$, $\widetilde{f}=2$, $\widetilde{w}/\widetilde{p}=1/4$, где w — цена труда, а p — цена рыбы. **(б)** Равновесие не существует. Отсутствие выпуклости технологического процесса, описываемого производственной функцией $y(L)=\begin{cases}4\sqrt{L-4}, & L>4,\\ \sqrt{L}, & L\leqslant 4,\end{cases}$ не позволяет достичь равновесного распределения в данной экономике. **(в)** В п. (а) да, равновесное распределение является Парето эффективным. В п. (б) нет, Парето эффективное распределение не может быть достигнуто рыночным механизмом, поскольку равновесие при приведенных условиях не существует. **3.86. (а)** Нет. Контрпример, где $\overline{L}$ — физический запас времени Робинзона представлен на рис. 3.52. **(б)** Нет. *Подсказка*: максимизирует ли фирма прибыль в данном распределении? **3.87. (а)** Да. **(б)** Да. *Подсказка*: существует ли равновесие в данной экономике?

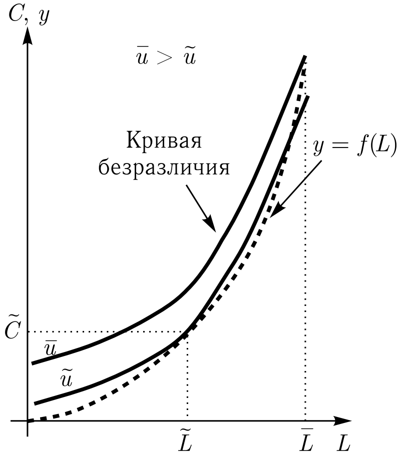

Рис. 3.52. Контрпример к задаче 3.86

3.89. (а) Нет. **(б)** Нет. **(в)** Равновесное распределение может быть Парето-оптимальным при $1 - s = 1/(1+\tau)$. **3.90. (а)** Множество Парето-оптимальных распределений: $x_1^{\mathsf{A}} + x_1^{\mathsf{B}} = 2$, $x_2^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{B}} = 8$, $x_2^{\mathsf{A}} = 4x_1^{\mathsf{A}}$, $x_1 = 1$, $y_2 = 2$. **(б)** Закон Вальраса выполнен. **(в)** Равновесное распределение Парето-оптимально. **(г)** $(p_1/p_2 = 2,\ x_1^{\mathsf{A}} = 5/6,\ x_2^{\mathsf{A}} = 10/3,\ x_1^{\mathsf{B}} = 7/6,\ x_2^{\mathsf{B}} = 14/3,\ x_1 = 1,\ y_2 = 2)$. **(д)** В допустимом распределении, в котором $\bigl(x_1^{\mathsf{A}} = 7/6, x_2^{\mathsf{A}} = 14/3, x_1^{\mathsf{B}} = 5/6, x_2^{\mathsf{B}} = 10/3\bigr)$, остальные компоненты $x_1 = 1$, $y_2 = 2$. Заданное распределение реализуемо как равновесное при ценах $p_1/p_2 = 2$ и трансфертах $T^{\mathsf{A}} = 2p_2$ и $T^{\mathsf{B}} = -2p_2$. **3.91.** $p_2/p_1 = 4$, $x_1^{\mathsf{B}} = 24$, $x_1^{\mathsf{A}} = 16$, $x_2^{\mathsf{A}} = 16$. **3.92. (а)** $(x_1^{\mathsf{A}} + x_1^{\mathsf{B}} = 2{,}5,\ x_2^{\mathsf{A}} = 1,\ x_2^{\mathsf{B}} = 4,\ x_1 = 1/2,\ y_2 = 1)$. **(б)** $(x_1^{\mathsf{A}} = 3/2, x_2^{\mathsf{A}} = 1, x_1^{\mathsf{B}} = 1, x_2^{\mathsf{B}} = 4, x_1 = 1/2, y_2 = 1, p_1/p_2 = 2)$. **(в)** Заданное распределение реализуемо как равновесное при ценах $p_1/p_2 = 2$ и трансфертах $T^{\mathsf{A}} = -p_2$ и $T^{\mathsf{B}} = p_2$. **3.93. (а)** Распределение $(x_1^{\mathsf{A}} = 0,\ x_2^{\mathsf{A}} = 0,\ x_1^{\mathsf{B}} = 16,\ x_2^{\mathsf{B}} = 4,\ x_1 = 2,\ y_2 = 2)$ не является Парето-оптимальным, а распределение $(x_1^{\mathsf{A}} = 6, x_2^{\mathsf{A}} = 2, x_1^{\mathsf{B}} = 9,\ x_2^{\mathsf{B}} = 3,\ x_1 = 3,\ y_2 = 3)$ Парето-оптимально. **(б)** Первое распределение невозможно реализовать как равновесное в силу первой теоремы благосостояния, согласно которой, если предпочтения потребителей монотонны и выпуклы, то равновесное распределение Парето-оптимально. Следовательно, кандидатом на равновесное распределение может быть только Парето-оптимальное распределение. Второе распределение реализуемо как равновесное, так как выполнены все предпосылки второй теоремы благосостояния: распределение является внутренним Парето-оптимальным распределением, предпочтения потребителей монотонны, производственная функция вогнута. **3.94. (а)** По определению, функция полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x^{\mathsf{A}}\right)$ представляет предпочтения, если выполнено $x^{\mathsf{A}} \succsim y^{\mathsf{A}}$ тогда и только тогда, когда $u^{\mathsf{A}}\left(x^{\mathsf{A}}\right) \geqslant u^{\mathsf{A}}\left(y^{\mathsf{A}}\right)$. Для заданных предпочтений функция полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x^{\mathsf{A}}\right) = x_1^{\mathsf{A}} x_2^{\mathsf{A}}$. **(б)** *Подсказка*: в рассматриваемой экономике два потребителя. В задачнике принята формулировка первой теоремы благосостояния, в которой предпосылкой является монотонность (см., например, формулировку для экономики обмена в решении задачи 3.23 (г)). Однако верна и формулировка с менее жестким требованием — достаточно, чтобы у всех потребителей предпочтения были таковы, что в любой окрестности любого набора нашелся бы лучший набор (это свойство называется локальной ненасыщаемостью). При выполнении этого свойства для всех предпочтений можно доказать результат первой теоремы благосостояния — любое равновесное распределение является оптимальным по Парето. Чтобы доказать это утверждение, необходимо предположить, что равновесное распределение не является оптимальным по Парето и прийти к противоречию. **(в)** *Подсказки*. Если цена первого блага равна нулю, то спрос фирмы на первое благо неограничен. Если цена второго блага равна нулю, то фирма не выпускает второе благо; соответственно, в равновесии невозможно $x_2^{\mathsf{A}} = 4$. Поэтому если равновесие существует, то только при положительных ценах. Потребитель A выберет набор $x_1^{\mathsf{A}} = 8$ и $x_2^{\mathsf{A}} = 4$ при ценах $p_1/p_2 = 1/2$. Потребитель B покупает только первое благо и тратит на него весь доход. В равновесии рынки должны быть сбалансированы. Таким образом, при любом значении $\omega_1^{\mathsf{B}} \geqslant 0$ в экономике существует равновесие ($x_1^{\mathsf{A}} = 8$, $x_2^{\mathsf{A}} = 4$, $x_1^{\mathsf{B}} = \omega_1^{\mathsf{B}} + 1$, $x_2^{\mathsf{B}} = 0$, $x_1 = 4$, $y_2 = 4$, $p_1/p_2 = 1/2$). **3.96. (а)** Функция спроса: $x(p) = 1/p^2$. **(б)** Индивидуальное предложение: $q_j(p) = p/16$. Совокупное предложение: $q(p) = q_1(p) + q_2(p) = p/8$. **(в)** Из $x(\widetilde{p}) = q(\widetilde{p})$ находим $\widetilde{p} = 2$, соответственно, $x(\widetilde{p}) = q(\widetilde{p}) = 1/4$. **3.97. (а)** Функции спроса потребителей A и B:

$$x_1^{\mathsf{A}}\left(p_1, p_2, m^{\mathsf{A}}\right) = \begin{cases} m^{\mathsf{A}}/p_1 - 1, & m^{\mathsf{A}} > p_1, \\ 0, & m^{\mathsf{A}} \leqslant p_1, \end{cases}$$

$$x_2^{\mathsf{A}}\left(p_1,p_2,m^{\mathsf{A}}\right)=\begin{cases} p_1/p_2, & m^{\mathsf{A}}>p_1,\\ m^{\mathsf{A}}/p_2, & m^{\mathsf{A}}\leqslant p_1,\end{cases}$$

где m^{A} — доход потребителя A;

$$x_1^{\mathsf{B}}\left(p_1,p_2,m^{\mathsf{B}}\right)=\begin{cases} m^{\mathsf{B}}/p_1-2, & m^{\mathsf{B}}>2p_1,\\ 0, & m^{\mathsf{B}}\leqslant 2p_1,\end{cases}$$

$$x_2^{\mathsf{B}}\left(p_1,p_2,m^{\mathsf{B}}\right)=\begin{cases} 2p_1/p_2, & m^{\mathsf{B}}>2p_1,\\ m^{\mathsf{B}}/p_2, & m^{\mathsf{B}}\leqslant 2p_1,\end{cases}$$

где m^{B} — доход потребителя B. Совокупный спрос на второе благо $x_{2\sum}(p_1,p_2)=3p_1/p_2$. **(б)** Функция полезности репрезентативного потребителя $u(x_1,x_2)=\ln\big((1/3)x_2\big)+ 2\ln\big((2/3)x_2\big)+x_1$. Спрос на второе благо (для внутреннего решения) $x_2=3p_1/p_2$. **3.98. (а)** Совокупный спрос потребителей типа A: $100\,x^{\mathsf{A}}(p)=100\,(20-5p)=2000-500p$ при $p<4$ и 0 при $p\geqslant 4$. Совокупный спрос потребителей типа B: $50\,x^{B}(p)=50\,(15-3p)=750-150p$ при $p<5$ и 0 при $p\geqslant 5$. **(б)** Функция совокупного спроса: $x(p)=\begin{cases} 2750-650p, & p<4,\\ 750-150p, & 4\leqslant p<5,\\ 0, & p\geqslant 5.\end{cases}$ **(в)** Если цена возрастет с 1 долл. до 1,1 долл., то спрос упадет на 65 ед. Если цена возрастет с 4,5 до 4,6 долл., то спрос упадет на 15 ед. **3.99. (а)** $\widetilde{p}=25$, $x(\widetilde{p})=q(\widetilde{p})=20$. **(б)** Введем обозначения: пусть p_d — это цена, которую платит за единицу блага потребитель, а p_s — это цена, которую получает за единицу блага производитель. Тогда равновесную цену находим из системы $\begin{cases} 120-4p_d=2p_s-30,\\ p_s=5+p_d,\end{cases}$ откуда $p_d=70/3$, равновесный объем $q=80/3$. **(в)** Цены для покупателя и продавца те же, что и в п. (б). Равновесная цена $p_s=85/3$, равновесный объем тот же, что и в п. (б) $q=80/3$. **(г)** В обоих пунктах безвозвратные потери составляют $50/3$. **3.100.** $t=21$. **3.101.** $s=10{,}5$. **3.102.** $10/3$. **3.103.** 10. **3.104. (а)** Из задачи фирмы: $p\alpha y-c(y)\to\max\limits_{y\geqslant 0}$ получаем условие первого порядка для внутреннего решения $p\alpha=c'(y)$. Дифференцируем прибыль по α, считая, что $y=y(\alpha)$ и удовлетворяет условию первого порядка: $\pi'_\alpha=py(\alpha)+y'(\alpha)\,(p\alpha-c'(y(\alpha)))=py(\alpha)>0$. Дифференцируя условие первого порядка по α, считая, что $y=y(\alpha)$, получаем: $p - c''(y(\alpha))y'(\alpha) = 0$, откуда $y'(\alpha) = p/c''(y(\alpha)) > 0$ в силу строгой выпуклости функции издержек. **(б)** Имеем два условия: равенство совокупного спроса совокупному предложению $x(p(\alpha)) = Ny(\alpha)\alpha$ и условие первого порядка, характеризующее предложение отдельной фирмы: $p(\alpha)\alpha = c'(y(\alpha))$. Тогда, дифференцируя каждое условие по α и преобразуя, получим

$$p'(\alpha) = N\Big(y(\alpha) + \frac{\alpha p(\alpha)}{c''(y(\alpha))}\Big)\Big/\Big(x'(p(\alpha)) - \frac{N\alpha}{c''(y(\alpha))}\Big) < 0.$$

3.105. (г) Сумма равна изменению излишка производителей. **(д)** Квотирование выпуска продукции, введение потоварного налога на потребление товара. **3.106.** Улучшить положение потребителей не может, поскольку сокращение объема продаж увеличит цену готовой продукции, вследствие чего излишек потребителя сократится. Улучшить положение производителей может, поскольку сокращение производства может с избытком компенсироваться увеличением цены товара. Достаточно привести графический пример. **3.107.** Могут. Достаточно привести графический пример, где излишек производителей сократился. **3.108.** Неверно, если кривая предложения горизонтальна (расположена вдоль оси выпусков), то все налоговое бремя перекладывается на потребителей, в результате чего положение производителей не меняется, излишек производителей так и остается нулевым. **3.109.** Неверно. Достаточно привести графический пример. **3.110.** Неверно. Положение потребителей может и ухудшиться. Приведем графический контрпример на рис. 3.53, где часть потребительского излишка, потерянного потребителями (S_{ADC}), может превышать вновь при-

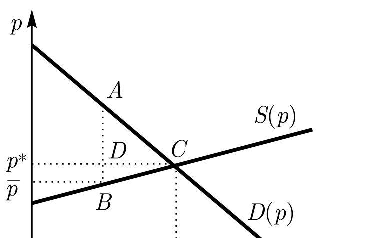

Рис. 3.53. Равновесие на рынке после введения ценового потолка

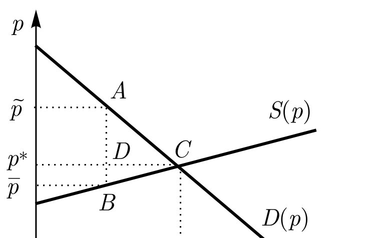

Рис. 3.54. Равновесие на рынке после установления квоты на выпуск продукции

обретенный излишек $(S_{p^*DB\overline{p}})$ вследствие действия политики введения ценового потолка. **3.111.** Неверно. Положение производителей может и улучшиться. Графический контрпример продемонстрирован на рис. 3.54, где увеличение излишка производителей при введении квоты $\left(S_{\widetilde{p}ADp^*}\right)$ может с избытком компенсировать их потери (S_{BDC}). **3.112. (а)** Благосостояние потребителей сократится. Благосостояние производителей может измениться в любую сторону. Благосостояние общества сократится, вследствие чего будут иметь место безвозвратные потери. **(б)** Налогообложение производителей, квотирование производства, налогообложение потребителей. **3.113. (а)** $t = 7{,}5$. **(б)** $\Delta CS = 75$, $\Delta PS = 37{,}5$, $GR = 75$, $DWL = 37{,}5$. **3.114.** Неверно. Налоговое бремя может быть разделено между производителями и потребителями, или полностью переложено на потребителей. Необходимо графически изобразить соответствующие случаи. **3.118.** 160. **3.119. (а)** $y^{\mathsf{A}}(p) = p/4$. **(б)** $y^{\mathsf{B}}(p) = p$. **(в)** $S(p) = 150\,p$. **(г)** $D(p) = 15 \cdot 10^4/p^2$. **(д)** $\widetilde{p} = 10$, $\widetilde{y} = 1500$, $\widetilde{y}^{\mathsf{A}} = 2{,}5$, $\widetilde{y}^{\mathsf{B}} = 10$. **(е)** Поскольку, как правило, труд отечественных работников обходится фирме дороже, чем труд миграционных рабочих, то для фирмы ставка заработной платы возрастет с введением налога, даже если теперь фирма будет лишь частично использовать труд миграционных рабочих, привлекая к производству товара отечественных. Кривая предложения каждой фирмы при этом сдвинется вверх (вдоль оси цен), что приведет к сокращению предложения товара (сдвигу кривой совокупного предложения вверх или увеличению ее наклона, в зависимости от вида вводимого налога) и, как следствие, к увеличению равновесной цены и сокращению объема производства этого товара. **(ж)** $y^{\mathsf{B}}(p) = \begin{cases} 0, & p < 4, \\ p, & p \geqslant 4. \end{cases}$ **(з)** $\overline{p} \approx 4{,}00043$, $\overline{n} = 2343$, $\overline{y} \approx 9372$.

Глава 4

ПРОВАЛЫ РЫНКА

4.1. Экономика с внешними эффектами (экстерналиями)

4.1.* Рассмотрите экономику с одним репрезентативным потребителем и одной технологией. Предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}, x_1\right) = v\left(x_2^{\mathsf{A}}, x_1\right) + x_1^{\mathsf{A}}$, где $v\left(x_2^{\mathsf{A}}, x_1\right)$ — дважды дифференцируемая вогнутая функция, причем $\partial v / \partial x_1 < 0$. Потребитель обладает положительным запасом только первого блага ($\omega_1^{\mathsf{A}} > 0$, $\omega_2^{\mathsf{A}} = 0$). Технология позволяет производить из первого блага второе. Технологический процесс задается производственной функцией $y_2 = f\left(x_1\right)$. Выпуск возрастает при увеличении использования фактора производства $f'\left(x_1\right) > 0$, однако каждая следующая единица используемого ресурса увеличивает выпуск на меньшую величину, чем предыдущая: $f''\left(x_1\right) < 0$. Кроме того, $f\left(0\right) = 0$.

(а) Охарактеризуйте тип воздействия.

(б) Выведите дифференциальную характеристику внутренних Парето-оптимальных распределений.

(в) Будет ли внутреннее равновесное распределение, в котором выпуск и, соответственно, затраты фактора ненулевые, Парето-оптимальным?

(г) Пусть функция полезности может быть представлена в виде $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}, x_1\right) = v_2\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) - v_1\left(x_1\right) + x_1^{\mathsf{A}}$. В обозначениях условия задачи $v\left(x_2^{\mathsf{A}}, x_1\right) = v_2\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) - v_1\left(x_1\right)$. Предположим, что $v_2(0) = v_1(0) = 0$. Запишите дифференциальные характеристики внутреннего оптимального по Парето и равновесного распределений. Изобразите графики функций предельной частной выгоды, предельных частных издержек, предельных общественных издержек. Укажите на рисунке чистые потери (DWL — dead weight lost).

(д) Реализуемо ли внутреннее Парето-оптимальное распределение как равновесное в экономике с квотами на экстерналии?

(е) Реализуемо ли внутреннее Парето-оптимальное распределение как равновесное в экономике с налогами (Пигу) на экстерналии?

(ж) Реализуемо ли внутреннее Парето-оптимальное распределение как равновесное в экономике с торговлей экстерналиями?

4.2.* Рассмотрите экономику с одним репрезентативным потребителем и одной технологией. Предпочтения потребителя представимы дважды дифференцируемой функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}, x_1\right)$, для которой выполнено $\partial u^{\mathsf{A}}/\partial x_1^{\mathsf{A}} > 0$, $\partial u^{\mathsf{A}}/\partial x_2^{\mathsf{A}} > 0$. Потребитель обладает начальным запасом благ $\omega_1^{\mathsf{A}} > 0$, $\omega_2^{\mathsf{A}} > 0$. Технология позволяет производить из первого блага второе. Технологический процесс задается производственной функцией $y_2 = f(x_1)$, такой, что $f'(x_1) > 0$, $f''(x_1) < 0$.

(а) Выведите дифференциальную характеристику внутреннего Парето-оптимального распределения.

(б) В допустимом распределении $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2\right)$, все компоненты которого положительны, выполнено

$$MRS^{\mathsf{A}}_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1\right) = 3, \quad MRS^{\mathsf{A}}_{x_1,\, x_2^{\mathsf{A}}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1\right) = -6$$

и $f'(\widetilde{x}_1) = 3$. Может ли это распределение быть равновесным? Если **да**, то укажите при каких ценах. Если **нет**, то объясните почему.

(в) Является ли распределение в п. (б) Парето-оптимальным? Если **да**, то объясните почему. Если **нет**, то постройте Парето-улучшение.

4.3. Рассмотрите экономику с одним репрезентативным потребителем и одной технологией. Предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}, x_1\right) = 2\sqrt{x_2^{\mathsf{A}}}\, x_1 + x_1^{\mathsf{A}}$. Потребитель обладает положительным запасом только первого блага $\omega_1^{\mathsf{A}} = 1$. Технология позволяет производить из первого блага второе. Технологический процесс задается производственной функцией $f(x_1) = \sqrt{x_1}$.

(а) Охарактеризуйте тип внешнего воздействия.

(б) Найдите внутреннее оптимальное по Парето распределение.

(в) Найдите внутреннее равновесное распределение или покажите, что оно не существует.

(г) Реализуемо ли найденное в п. (б) распределение как равновесное в экономике с квотами? В экономике с налогами? С торговлей экстерналиями? Если **да**, то реализуйте, если **нет**, то объясните почему.

4.4.* Предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}},\, y_2\right) = \ln x_2^{\mathsf{A}} + \ln y_2 + x_1^{\mathsf{A}}$. Производственная функция технологии, позволяющей производить второе благо из первого, $f\left(x_1\right) = 2\sqrt{x_1}$. Потребитель владеет начальным запасом только первого блага $\omega_1^{\mathsf{A}} = 10$.

(а) Найдите все внутренние оптимальные по Парето распределения.

(б) Найдите все внутренние равновесия в экономике. Прокомментируйте, почему равновесное распределение не является оптимальным по Парето.

(в) Приведите графическую иллюстрацию, на которой изобразите чистые потери (DWL).

(г) Реализуйте внутреннее оптимальное по Парето распределение как равновесное в экономике с налогом/субсидией на экстерналии. Приведите графическую иллюстрацию.

4.5.* **Упрощенная версия [2.6; задача 4, с. 266].** Рассмотрите экономику с одним потребителем и одной фирмой. Предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u^{\mathsf{A}}(l^{\mathsf{A}},\, x^{\mathsf{A}})$, где x^{A} — количество потребительского блага, l^{A} — время, которое потребитель тратит на досуг. Потребитель обладает запасом времени $\overline{\overline{L}}^{\mathsf{A}}$. Запас времени $\overline{\overline{L}}^{\mathsf{A}}$ потребитель A распределяет между работой L^{A} и досугом l^{A}. При наличии загрязнения окружающей среды потребитель вынужден тратить $S\left(Q\right)$ времени на лечение, где Q — состояние окружающей среды, $S'\left(Q\right) > 0$ и $S''\left(Q\right) > 0$. В экономике действует фирма, которая с помощью труда производит потребительское благо x по технологии, производственная функция для которой $x = f\left(L\right)$, $f\left(0\right) = 0$. Выпуск блага x связан с загрязнением окружающей среды следующим образом: $Q = x$. Все функции дифференцируемы, $\partial u^{\mathsf{A}}/\partial x^{\mathsf{A}} > 0$, $\partial u^{\mathsf{A}}/\partial l^{\mathsf{A}} > 0$, $f'\left(L\right) > 0$, и функции $u^{\mathsf{A}}(l^{\mathsf{A}},\, x^{\mathsf{A}})$ и $f\left(L\right)$ — вогнуты.

Считайте, что ***все*** *балансовые ограничения допустимости выполнены как равенства.*

(а) Приведите определение равновесия для рассматриваемой экономики.

(б) Будет ли внутреннее равновесное распределение Парето-оптимальным?

(в) Может ли произвольное внутреннее Парето-оптимальное распределение быть реализовано как равновесное в экономике при наличии квот? Если вы считаете, что **может**, то реализуйте, если считаете, что **не может**, то докажите, что это действительно так.

(г) Может ли внутреннее Парето–оптимальное распределение быть реализовано как равновесное в экономике при наличии налогов на экстерналии? Если вы считаете, что **может**, то реализуйте, если считаете, что **не может**, то докажите, что это действительно так.

(д) Может ли внутреннее Парето–оптимальное распределение быть реализовано как равновесное в экономике с торговлей экстерналиями? Если вы считаете, что **может**, то реализуйте, если считаете, что **не может**, то докажите, что это действительно так.

4.6.* Рассмотрите экономику с одним репрезентативным потребителем и одной технологией. Предпочтения потребителя строго монотонны и представимы дважды дифференцируемой вогнутой функцией полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}},\, x_1\right)$. Потребитель обладает положительным начальным запасом обоих благ. Технология позволяет производить из первого блага второе. Однако потребление потребителем первого блага оказывает негативное воздействие на производство и, таким образом, технологический процесс задается вогнутой дифференцируемой производственной функцией $y_2 = f\left(x_1,\, x_1^{\mathsf{A}}\right)$, такой, что $\partial f\,(x_1)/\partial x_1 > 0$, $\partial^2 f\,(x_1)/\partial x_1^2 < 0$. Реализуемо ли Парето-оптимальное распределение, в котором все компоненты положительны, как равновесное?

4.7. Рассмотрите экономику с двумя благами и двумя потребителями, предпочтения которых представимы функциями полезности $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}}\right) = v^{\mathsf{A}}\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) + x_1^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}},\, x_2^{\mathsf{B}},\, x_2^{\mathsf{A}}\right) = v^{\mathsf{B}}\left(x_2^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{B}}\right) + x_1^{\mathsf{B}}$, такими, что $\left(v^{\mathsf{A}}\left(x_2^{\mathsf{A}}\right)\right)' > 0$, $\left(v^{\mathsf{A}}\left(x_2^{\mathsf{A}}\right)\right)'' < 0$,

$v^{\mathsf{B}}\left(x_2^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{A}}\right)$ дифференцируема и вогнута, $\partial v^{\mathsf{B}}/\partial x_2^{\mathsf{B}} > 0$, $\partial v^{\mathsf{B}}/\partial x_2^{\mathsf{A}} > 0$. Потребители владеют положительными запасами обоих благ: $\omega^{\mathsf{A}} = \left(\omega_1^{\mathsf{A}}, \omega_2^{\mathsf{A}}\right)$ и $\omega^{\mathsf{B}} = \left(\omega_1^{\mathsf{B}}, \omega_2^{\mathsf{B}}\right)$.

(а) Охарактеризуйте тип внешнего воздействия.

(б)* Выведите дифференциальную характеристику внутренних оптимальных по Парето распределений.

(в) Выведите дифференциальную характеристику равновесных распределений. Убедитесь, что внутреннее равновесное распределение не является оптимальным по Парето.

(г) Если возможно, то реализуйте внутреннее оптимальное по Парето распределение как равновесное в экономике с квотами на экстерналии, налогами на экстерналии, торговлей экстерналиями или объясните, почему оно не реализуемо.

4.8.* По мотивам [2.7]. На рисунках в терминах частного равновесия представлены кривые, демонстрирующие равновесное и Парето-эффективное распределение при наличии экстерналий.

(а) Подпишите кривые, используемые для графической иллюстрации, и объясните, что они означают.

(б) Как вы полагаете, какая (положительная/отрицательная) экстерналия (в производстве/потреблении) имеет место в данной ситуации? Объясните.

(в) Укажите на данном графике равновесный и Парето-эффективный объемы потребления.

(г) Изобразите графически безвозвратные потери, связанные с наличием экстерналии.

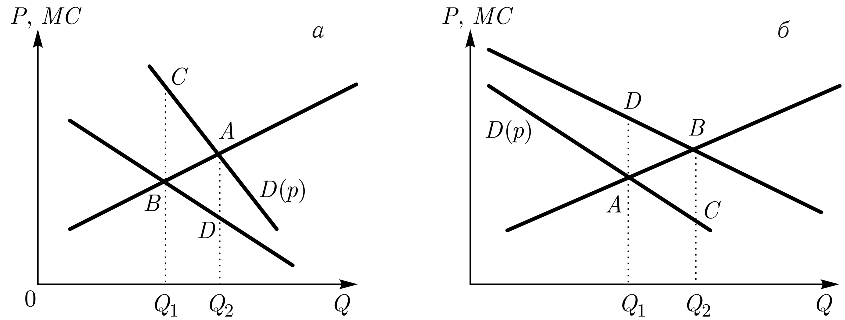

Рис. 4.1

(д) Укажите и проиллюстрируйте графически налоговую политику (или политику субсидирования), которая могла бы привести к эффективному распределению в данной экономике.

4.9.* В долинном районе Германии энергетическая компания использует для производства электроэнергии ветряные электрогенераторы («ветряки»). Известно, что издержки компании могут быть представлены функцией $TC_{Э}(y) = 100\,y + 2{,}5\,y^2 + 100$, где y — количество используемых ветряков. Спрос на электроэнергию в этом районе устроен так, что при использовании ветряков граждане готовы платить цену $700 - y$ за дополнительную (малую) единицу в расчете на один ветряк. Государство заставляет энергетическую компанию устанавливать цену на уровне ее предельных издержек. Поблизости от ветряков расположены фермерские поля, засаженные садовой клубникой (x). Издержки фермеров, выращивающих клубнику, составляют $TC_K(y) = \operatorname{sgn} x \cdot \left(200\,x - 1{,}5\,y^2 + 100\,000\right)$, где $\operatorname{sgn} x = 1$ при положительном x, а иначе $\operatorname{sgn} x = 0$.

(а) Опишите внешний эффект, имеющий место в данной экономике, и укажите возможные причины его проявления.

(б) Найдите равновесное количество используемых компанией ветряков для случая, когда все участники ведут себя индивидуально рационально и не вступают во взаимодействия.

(в) Найдите эффективное количество ветряков. Сравните найденное значение со значением, полученным в п. (б), и объясните полученный результат.

(г) Найдите величину налога/субсидии, которая стимулировала бы энергетическую компанию использовать эффективное количество ветряков. Изобразите решение графически.

4.10.* По материалам: http://elsa.berkeley.edu/users/webfac/dellavigna/e101a s09/e101a.shtml. Рассмотрите два завода, расположенных на берегу реки. Первый завод производит сталь и при этом выбрасывает в реку отходы x, которые влияют на вторую фирму — рыбохозяйство, расположенную внизу по реке (рыбохозяйство производит рыбу f при данном уровне загрязнения $X = x$). Обе фирмы являются конкурентными и принимают цены p_s (цена стали) и p_f (цена рыбы) как заданные. Функции издержек фирм имеют вид: $C(s, x) = s^2(\theta - x)^2 + s^2$, $C(d, x) = f^2x^2$, где $\theta > 0$ — параметр модели.

(а) Найдите, какое количество стали, рыбы и загрязнения будет произведено, если фирма, производящая сталь, принимает во внимание только свои частные издержки (т. е. отсутствует государственное вмешательство, и фирмы действуют независимо). Считайте, что решение во всех задачах внутреннее.

(б) Найдите, какое количество стали, рыбы и загрязнения будет произведено, если будет осуществлена интернализация загрязнения (т. е. превращение внешних влияний во внутрифирменные влияния, что ведет к выбору Парето-оптимального уровня производства стали, рыбы и загрязнения). Как соотносится полученный уровень загрязнения с найденным в п. (а)?

(в) Можно ли достичь общественно оптимального уровня производства с помощью налога на загрязнение t? Каким должен быть этот налог? В чем трудность реализации такого налогообложения?

(г) Пусть правительство предоставляет фирме, производящей сталь, право производить загрязнение до уровня, не превышающего некоторую величину $\overline{x}$, и пусть рыбохозяйство согласно платить за снижение уровня загрязнения. Каким будет в этом случае уровень загрязнения?

4.11. По мотивам [2.3]. На кафедре м-го анализа каждый из $N > 1$ преподавателей заинтересован в том, чтобы студенты из групп, в которых он преподает, получили как можно более высокие оценки. Для повышения успеваемости преподаватели назначают консультации студентам в преподавательской комнате кафедры. Количество студентов, которое приглашает преподаватель k, обозначим m^k, а суммарное количество студентов, пришедших на кафедру за консультацией, обозначим $M = \sum_{k=1}^{N} m^k$. Увеличение оценки каждого студента, пришедшего на консультацию, зависит от общего числа студентов, присутствующих на кафедре, так как помещение маленькое и студенты и преподаватели могут мешать друг другу. Обозначим повышение оценки каждого студента $y(M)$. Тогда суммарное увеличение оценки в группе преподавателя k составит $m^k y(M)$. Проведение консультации для одного студента приводит к затратам преподавателя, эквивалентным уменьшению оценки на c единиц. В итоге общее увеличение оценки $g(M) = M \cdot y(M)$, где $g(0) = 0$, $g'(M) > 0$, $g''(M) < 0$. Преподаватели принимают решение о количестве студентов, приглашаемых на консультацию, одновременно и независимо, что в итоге приводит к тому, что одновременно на кафедре присутствуют $\widetilde{M}$ студентов. Покажите, что если решение о количестве студентов, пришедших на консультации к своим преподавателям, будет приниматься централизовано заведующим кафедры, заинтересованным в улучшении успеваемости всех студентов, то студентов на консультации будет меньше, чем $\widetilde{M}$. Заинтересованы ли в такой централизации полномочий преподаватели кафедры?

4.2. Экономика с общественными благами. Парето-оптимальные распределения

4.12. Рассмотрите экономику с двумя благами (частным и общественным) и тремя потребителями (A, B и C). Потребители владеют начальным запасом частного блага $\omega_1^{\mathsf{A}} = 50$, $\omega_1^{\mathsf{B}} = 30$ и $\omega_1^{C} = 20$, и не владеют запасами общественного блага. В экономике есть технология, позволяющая производить общественного благо y_2 из частного, затратив $x_1 = (y_2)^{3/2}$ ед. частного блага. Существуют ли значения $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}$ такие, что распределение ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} =?$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 13$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{C}} = 38$, $\widetilde{x}_2 = 16$, $\widetilde{x}_1 = 2$, $\widetilde{y}_2 = 16$) допустимо (здесь x_1^k — потребление частного блага потребителем k, x_2 — потребление общественного блага)?

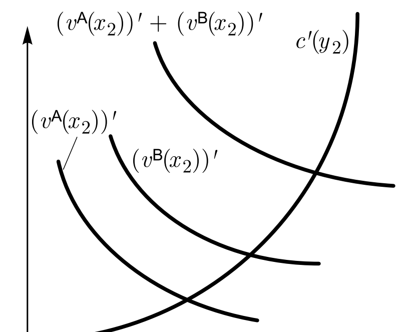

Рис. 4.2

4.13. Рассмотрите экономику с двумя потребителями, в которой одно благо общественное, а другое — частное. Предпочтения потребителей представимы квазилинейными функциями полезности. Укажите на рис. 4.2 объем(ы) общественного блага потребляемого в Парето-оптимальном распределении.

4.14. Рассмотрите экономику с двумя благами (общественным и частным) и двумя потребителями (A и B), предпочтения которых представимы функциями полезности вида $u^k\left(x_1^k, x_2\right)$, такими, что $\partial u^k/\partial x_1^k > 0$, $\partial u^k/\partial x_2 > 0$, где x_1^k — потребление частного блага потребителем k, x_2 — потребление общественного блага. В экономике есть технология, согласно которой, чтобы произвести y_2 единиц общественного блага требуется затратить $c\,(y_2)$ частного блага. Покажите, что во внутреннем Парето-оптимальном распределении $(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2)$ выполнено уравнение Самуэльсона: $MRS_{21}^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2\right) + MRS_{21}^{\mathsf{B}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2\right) = c'\,(\widetilde{y}_2)$.

4.15.* Рассмотрите экономику с двумя благами (общественным и частным) и двумя потребителями (А и В), предпочтения которых представимы функциями полезности, такими, что $\partial u^k/\partial x_1^k > 0$, $\partial u^k/\partial x_2 > 0$, где x_1^k — потребление частного блага потребителем k, x_2 — потребление общественного блага. Потребители владеют начальным запасом частного блага. Технология позволяет произвести из первого блага второе. Технологический процесс описывается возрастающей производственной функцией $y_2 = f\,(x_1)$. В некотором внутреннем распределении $(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2, \widehat{x}_1, \widehat{y}_2)$ выполнено $MRS_{21}^{\mathsf{A}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2\right) = 3$, $f'\,(\widehat{x}_1) = 1/7$. Покажите, что распределение не является Парето-оптимальным, построив Парето-улучшение, если **(а)** $MRS_{21}^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2\right) = 3$, **(б)** $MRS_{21}^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2\right) = 7$.

4.16. Рассмотрите двухтоварную экономику, где одно из благ является частным, а другое общественным. Все сто потребителей в данной экономике имеют квазилинейные предпочтения. Пусть в некотором внутреннем распределении для каждого из пятидесяти потребителей $MRS_{G,x^k}^k = 1$, где $k = 1, \ldots, 50$, а для каждого из оставшихся потребителей $MRS_{G,x^k}^k = 3$, где $k = 51, \ldots, 100$. Предельные издержки производства общественного товара из частного блага постоянны и равны 150. Как вы полагаете, является ли данное распределение ресурсов Парето-эффективным? Если да, то докажите, если нет, то постройте Парето-улучшение. Считайте, что каждое благо в данной экономике бесконечно делимое.

Отвечая на поставленный вопрос задачи, студенты привели следующие решения. Найдите все ошибки, если таковые есть, в решениях студентов.

(а) Воспользуемся уравнением Самуэльсона (необходимым условием для внутреннего Парето-оптимального распределения в экономике с общественными благами): $\sum\limits_{k=1}^{100} MRS_{G,\,x^k}^k = 200 >$ $> MC = 150$, следовательно, данное распределение не является Парето-оптимальным. Для производства дополнительной единицы общественного блага в данном распределении потребители готовы пожертвовать всего 200 ед. частного блага, требуется всего 150 ед., остается 50 ед. частного товара, которые можно использовать для производства общественного блага. Поскольку предпочтения всех потребителей строго монотонны, указанное перераспределение ресурсов повысит их благосостояние.

(б) Воспользуемся уравнением Самуэльсона: $\sum\limits_{k=1}^{100} MRS_{G,\,x^k}^k =$ $= 200 > MC = 150$, следовательно, данное распределение не является Парето-оптимальным. Построим Парето-улучшение: заберем у одного из потребителей первой группы $\varepsilon_x > 0$ $(\varepsilon_x \to 0)$ частного блага и отдадим его одному из потребителей второй группы. Взамен полученного частного блага второй потребитель готов отдать $3\,\varepsilon_x$ единиц общественного блага первому агенту, не ухудшая своего положения. Поскольку первый агент взамен ε_x единиц частного блага получил $3\,\varepsilon_x$ единиц общественного товара, а готов был получить лишь ε_x единиц этого блага, то, учитывая строгую монотонность предпочтений потребителей, положение его улучшилось, в то время, как положение второго агента не изменилось. Таким образом, перераспределяя указанным образом ресурсы в экономике, мы добились улучшения благосостояния одного агента без ухудшения положения всех остальных, т. е. построили Парето-улучшение.

Напоминаем, что в задаче требуется найти все ошибки, если таковые есть, в решениях студентов.

4.17. Рассмотрите экономику, в которой предпочтения потребителей представлены функциями полезности $u^{\mathsf{A}}(x_1^{\mathsf{A}}, x_2) =$ $= x_1^{\mathsf{A}}\,(x_2)^2$ и $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}}, x_2) = x_1^{\mathsf{B}}\,(x_2)^2$, где x_2 — количество потребляемого общественного блага, а x_1^k — потребление частного блага k-м потребителем, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$. В экономике есть одна технология, производящая общественное благо из частного, производственная функция которой может быть записана следующим образом: $f(x_1) = \sqrt{x_1}$. Начального запаса общественного блага в экономике нет. Начальные запасы частного блага $\omega_1^{\mathsf{A}} = 6$,

$\omega_1^{\mathsf{B}} = 2$. Найдите все внутренние Парето-оптимальные распределения.

4.18. По мотивам [2.3]. Рассмотрите экономику с двумя благами (общественным и частным) и двумя потребителями (А и В), предпочтения которых представимы функциями полезности вида $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2\right) = \lambda v\left(x_2\right) + x_1^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}}, x_2\right) = \mu v\left(x_2\right) + x_1^{\mathsf{B}}$, где $\lambda, \mu > 0$, $v'(x) > 0$, $v''(x) < 0$. Чтобы произвести y_2 единиц общественного блага, требуется затратить $c\left(y_2\right) = 4\,y_2$ частного блага. При $\lambda = \widetilde{\lambda}$ и $\mu = \widetilde{\mu}$ во внутреннем Парето-оптимальном распределении уровень потребления общественного блага равен $\widetilde{x}_2 > 0$. А при $\lambda = \widetilde{\lambda}/\delta$ и $\mu = \widetilde{\mu}/\delta$, $\delta > 1$ в Парето-оптимальном распределении уровень общественного блага равен $\overline{x}_2 > 0$. Можно ли утверждать, что $\overline{x}_2 > \widetilde{x}_2$ или $\overline{x}_2 < \widetilde{x}_2$? Обоснуйте свой ответ.

4.19. По мотивам [2.3]. Рассмотрите экономику с двумя благами и двумя потребителями (А и В), предпочтения которых представимы квазилинейными функциями полезности: $u^k\left(x_1^k, x_2\right) = v^k\left(x_2\right) + x_1^k$, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$. $\left(v^k\left(x_2\right)\right)' > 0$, $\left(v^k\left(x_2\right)\right)'' < 0$. Потребители обладают положительными начальными запасами частного блага. Чтобы произвести y_2 единиц общественного блага, требуется затратить $c\left(y_2\right) = \delta\,y_2$ частного блага, где $\delta > 0$. При $\delta = \widetilde{\delta}$ в Парето-оптимуме производство общественного блага составит $x_2 = \widetilde{x}_2 > 0$, а при $\delta = \widetilde{\delta}/\lambda$, $\lambda > 0$, потребление общественного блага составит $x_2 = \widehat{x}_2 > 0$. Если $\widehat{x}_2 < \widetilde{x}_2$, то можно ли утверждать, что $\lambda > 1$ или $\lambda < 1$?

4.20. Рассмотрите экономику, в которой предпочтения трех потребителей представимы функцией полезности Кобба–Дугласа $u^k\left(x_1^k, x_2\right) = \sqrt{x_1^k x_2}$, где x_2 — количество потребляемого общественного блага, x_1^k — потребление частного блага k-м потребителем, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\}$. В экономике есть одна технология, позволяющая из единицы частного блага произвести единицу общественного. Начального запаса общественного блага в экономике нет. Начальные запасы частного блага $\omega_1^k = 100$, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\}$.

(а) Является ли распределение ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 140$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 90$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{C}} = 70$, $\widetilde{x}_2 = 0$, $\widetilde{x}_1 = 0$, $\widetilde{y}_2 = 0$) Парето-оптимальным?

(б) Является ли распределение ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 0$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 0$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{C}} = 290$, $\widetilde{x}_2 = 10$, $\widetilde{x}_1 = 10$, $\widetilde{y}_2 = 10$) Парето-оптимальным?

4.21.* Рассмотрите экономику с потребителями A и B, для которых $MRS_{21}^{\mathsf{A}} = 9 - x_2$ и $MRS_{21}^{\mathsf{B}} = 7 - x_2$ соответственно. Потребители владеют начальным запасом частного блага $\omega_1^k = 50$, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$. Чтобы произвести y_2 единиц общественного блага, требуется затратить $x_1 = (y_2)^2$ единиц частного. Найдите внутренние Парето-оптимальные распределения.

4.22. По мотивам [2.4]. Вдоль дороги, соединяющей два крупных города, расположено село. В темное время суток при интенсивном движении транспорта жителям села трудно переходить на другую сторону дороги. Сельсовет принял решение поставить вдоль дороги на территории деревни фонари. Объясните, какой информацией должен обладать сельсовет, чтобы установить Парето-эффективное количество фонарей. Укажите, как именно нужно воспользоваться этой информацией, чтобы рассчитать эффективное количество фонарей.

4.3. Равновесие с добровольным финансированием

4.23. Является ли равновесное распределение в равновесии с добровольным финансированием допустимым?

4.24. Рассмотрите экономику задачи 4.13. Укажите на рис. 4.2 объем(ы) общественного блага, потребляемого в равновесии с добровольным финансированием.

4.25.* Рассмотрите экономику, в которой два потребителя имеют квазилинейные функции полезности вида $u^{\mathsf{A}}(x_1^{\mathsf{A}}, x_2) = 4\ln x_2 + x_1^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{A}}, x_2) = 8\ln x_2 + x_1^{\mathsf{B}}$, где x_2 — количество потребляемого общественного блага, а x_1^k — потребление частного блага k-м потребителем, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$. В экономике есть одна фирма, производящая общественное благо из частного, производственная функция которой может быть записана следующим образом: $f(x_1) = \sqrt{x_1}$. Начального запаса общественного блага в экономике нет. Начальные запасы частного блага $\omega_1^{\mathsf{A}} = 120$, $\omega_1^{\mathsf{B}} = 20$. Доля потребителя A в прибыли фирмы $\theta^{\mathsf{A}} = 3/4$.

(а) Запишите определение равновесия с добровольным финансированием.

(б) Выведите условие первого порядка для задачи фирмы.

(в) Выведите условия первого порядка для задач потребителей.

(г) Кто из потребителей будет финансировать покупку общественного блага? Докажите свое утверждение.

(д) Найдите равновесие с добровольным финансированием.

(е) Будет ли найденное равновесное распределение Парето-оптимальным? Аргументируйте. Найдите множество внутренних Парето-оптимальных распределений, чтобы проверить свой ответ.

4.26. Рассмотрите экономику с двумя благами (частным и общественным), двумя потребителями (A и B) и одной технологией, позволяющей произвести из первого (частного) блага общественное (второе) благо. Предпочтения потребителей строго монотонны и представимы дифференцируемыми функциями полезности $u^k\left(x_1^k, x_2\right)$, где x_2 — количество потребляемого общественного блага, а x_1^k — потребление частного блага k-м потребителем, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$. Потребители владеют начальным запасом частного блага и не владеют общественным. Технология может быть задана дифференцируемой возрастающей производственной функцией $y_2 = f\left(x_1\right)$.

(а) Выведите условие первого порядка для задач потребителей в равновесии с добровольным финансированием в предположении, что частное благо потребляется в положительном количестве.

(б) Выведите дифференциальную характеристику равновесного распределения в равновесии с добровольным финансированием, в котором общественное благо потребляется в положительном количестве.

4.27. Рассмотрите экономику задачи 4.26. В некотором допустимом состоянии экономики, в котором все компоненты положительны, выполнено

(а)* $MRS_{21}^{\mathsf{A}} = 2,\ MRS_{21}^{\mathsf{B}} = 6$ и $c'\left(y_2\right) = 12$;

(б) $MRS_{21}^{\mathsf{A}} = 4,\ MRS_{21}^{\mathsf{B}} = 5$ и $c'\left(y_2\right) = 5$.

Может ли указанное распределение быть равновесным в равновесии с добровольным финансированием? Если считаете, что **да**, то укажите при каких ценах. Если **нет**, то объясните почему.

4.28. **По мотивам [2.3]**. Рассмотрите экономику, в которой три потребителя имеют квазилинейные функции полезности $u^k(x_1^k, x_2) = v^k\left(x_2\right) + x_1^k$, где x_2 — количество потребляемого общественного блага, а x_1^k — потребление частного блага k-м потребителем, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\}$, $\left(v^k(x_2)\right)' > 0$, $\left(v^k(x_2)\right)'' < 0$ и $\left(v^{\mathsf{A}}(x_2)\right)' > \left(v^{\mathsf{B}}(x_2)\right)' > \left(v^{C}(x_2)\right)'$. В экономике есть одна фирма, которая производит общественное благо из частного. Для производства y_2 единиц общественного блага требуется затратить $c(y_2)$ единиц частного, где $c'(y_2) > 0$, $c''(y_2) > 0$. Начального запаса общественного блага в экономике нет. Начальные запасы частного блага $\omega_1^k > 0$, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\}$. В экономике существует равновесие с добровольным финансированием, равновесное распределение в котором внутреннее.

(а) Кто из потребителей будет финансировать покупку общественного блага?

(б) Будет ли в этом равновесии перепроизводство или недопроизводство общественного блага по сравнению с Парето-оптимумом?

4.29. По мотивам [2.3]. Рассмотрите экономику с двумя благами (частным и общественным), тремя потребителями (A, B и C) и одной технологией, позволяющей произвести из первого (частного) блага общественное (второе) благо. Предпочтения потребителей представимы дифференцируемыми функциями полезности $u^k\left(x_1^k, x_2\right)$, где x_2 — количество потребляемого общественного блага, а x_1^k — потребление частного блага k-м потребителем, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\}$. Потребители владеют начальным запасом частного блага и не владеют общественным. Технология может быть задана дифференцируемой возрастающей производственной функцией $y_2 = f(x_1)$.

Пусть набор $\left(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{t}^{\mathsf{A}}, \widetilde{t}^{\mathsf{B}}, \widetilde{t}^{\mathsf{C}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{C}}, \widetilde{x}_2, \widetilde{y}_2, \widetilde{x}_1\right)$, где t^k — добровольный взнос на финансирование покупки общественного блага потребителя k, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\}$, — равновесие с добровольным финансированием, такое, что все потребители потребляют блага в положительных количествах.

Пусть, кроме того, для частного блага выполнено $\partial u^k\left(\widetilde{x}_1^k, \widetilde{x}_2\right)/\partial x_1^k > 0$ и $f'(\widetilde{x}_1) > 0$ в равновесии существует потребитель k_1 с положительным взносом на покупку общественного блага все предельные полезности по общественному благу неотрицательны для всех потребителей $\partial u^k\left(\widetilde{x}_1^k, \widetilde{x}_2\right)/\partial x_1^k \geqslant 0$, причем хотя бы для одного потребителя k_2, $k_2 \neq k_1$, неравенство строгое.

Покажите, что в равновесное распределение в равновесии с добровольным финансированием не Парето-оптимально.

4.30. По мотивам [2.3]. Пусть в экономике имеются два потребителя с функциями полезности $u^{\mathsf{A}}(x_1^{\mathsf{A}}, x_2) = \min\{x_1^{\mathsf{A}}, x_2\}$ и $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}}, x_2) = \min\{x_1^{\mathsf{B}}, x_2\}$, где x_2 — количество потребляемого общественного блага, x_1^k — потребление частного блага k-м индивидуумом, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$. Производство представлено одной фирмой, принадлежащей потребителям в равных долях, технология которой позволяет произвести из единицы частного блага единицу общественного. Потребители имеют только запасы частного блага в размере $\omega_1^{\mathsf{A}} = 20$ и $\omega_1^{\mathsf{B}} = 80$.

(а) Охарактеризуйте Парето-оптимальные распределения.

(б) Найдите равновесие с добровольным финансированием. Является ли равновесное распределение Парето-оптимальным?

(в) Прокомментируйте полученный результат. Как он соотносится с теоремой о неоптимальности (см. задачу 4.29).

4.31. Рассмотрите экономику, в которой два потребителя имеют квазилинейные функции полезности вида $u^{\mathsf{A}}(x_1^{\mathsf{A}}, x_2) = 8\sqrt{x_2} + x_1^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}}, x_2) = 4\sqrt{x_2} + x_1^{\mathsf{B}}$, где x_2 — количество потребляемого общественного блага, а x_1^k — потребление частного блага k-м потребителем, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$. Технология позволяет произвести единицу общественного (второго) блага (y_2) из двух единиц частного (первого) блага (x_1). Начального запаса общественного блага в экономике нет. Начальные запасы частного блага $\omega_1^{\mathsf{A}} = \omega_1^{\mathsf{B}} = 10$.

Потребители владеют фирмой в равных долях.

(а) Существуют ли значения неизвестного параметра такие, что распределение $(x_1^{\mathsf{A}} = 6,\ x_1^{\mathsf{B}} = 12,\ x_2 = 4,\ y_2 =?,\ x_1 = 2)$ является допустимым?

(б) Найдите множество внутренних Парето-оптимальных распределений.

(в) Найдите равновесие с добровольным финансированием.

(г) Является ли равновесное распределение, найденное в п. (в), Парето-оптимальным?

В следующих пп. ((д), (е)) считайте, что оба блага в заданной экономике частные.

(д) Найдите равновесие по Вальрасу.

(е) Будет ли равновесное распределение в п. (д) Парето-оптимальным?

4.32. Рассмотрите экономику, в которой два потребителя имеют квазилинейные функции полезности вида $u^{\mathsf{A}}(x_1^{\mathsf{A}}, x_2) = \ln(x_2 + 2) + x_1^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}}, x_2) = 2\ln(x_2 + 2) + x_1^{\mathsf{B}}$, где x_2 — количество потребляемого общественного блага, а x_1^k — потребление частного блага k-м потребителем, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$. В экономике есть одна фирма, которая производит общественное благо из частного. Для производства y_2 ед. общественного блага требуется затратить $c(y_2) = 4(y_2 + 2)^2$ ед. частного. Начального запаса общественного блага в экономике нет. Начальные запасы частного блага $\omega_1^{\mathsf{A}} = 10$, $\omega_1^{\mathsf{B}} = 20$. Фирмой потребители владеют в равных долях.

(а) Укажите диапазон равновесных цен в равновесиях с добровольным финансированием, в которых общественное благо не потребляется и не производится.

(б) Существуют ли равновесия с добровольным финансированием, в которых общественное благо потребляется в положительном количестве?

4.33. Рассмотрите экономику, в которой два потребителя имеют квазилинейные функции полезности вида $u^{\mathsf{A}}(x_1^{\mathsf{A}}, x_2) = 3\sqrt{x_2} + x_1^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}}, x_2) = 2\sqrt{x_2} + x_1^{\mathsf{B}}$, где x_2 — количество потребляемого общественного блага, а x_1^k — потребление частного блага k-м потребителем, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$. В экономике есть одна фирма, которая производит общественное благо из частного. Для производства y_2 ед. общественного блага требуется затратить $c(y_2) = (y_2)^{3/2}$ ед. частного. Начального запаса общественного блага в экономике нет. Начальные запасы частного блага $\omega_1^{\mathsf{A}} = 80{,}5$ и $\omega_1^{\mathsf{B}} = 100{,}5$. Фирмой полностью владеет потребитель B.

Существуют ли цены, при которых набор ($\widetilde{x}_2 = \widetilde{y}_2 = 1$, $\widetilde{x}_1 = 1$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 79$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 101$, $\widetilde{t}^{\mathsf{A}} = 3/2$, $\widetilde{t}^{\mathsf{B}} = 0$), где t^k — добровольный взнос потребителя k, является равновесным в равновесии с добровольным финансированием? Если **да**, то найдите их, если **нет**, то объясните почему.

4.34. Рассмотрите экономику, в которой два потребителя имеют квазилинейные функции полезности вида $u^{\mathsf{A}}(x_1^{\mathsf{A}}, x_2) = \alpha\sqrt{x_2} + x_1^{\mathsf{A}}$, где $\alpha > 0$, и $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}}, x_2) = 12\sqrt{x_2} + x_1^{\mathsf{B}}$, где x_2 —

количество потребляемого общественного блага, а x_1^k — потребление частного блага k-м потребителем, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$. В экономике есть одна фирма, которая производит общественное благо (y_2) из частного. Производственная функция $f(x_1) = x_1^{2/3}$. Начального запаса общественного блага в экономике нет. Начальные запасы частного блага $\omega_1^{\mathsf{A}} = 30$ и $\omega_1^{\mathsf{B}} = 40$. Фирмой владеет потребитель A.

(а) При каких значениях параметра α покупку общественного блага в равновесии с добровольным финансированием финансирует только потребитель B? Найдите это равновесие/равновесия.

(б) Существуют ли такие значения α, при которых оба потребителя финансируют покупку общественного блага в равновесии с добровольным финансированием? Если **да**, то найдите это равновесие/равновесия. Если ответ **нет**, то объясните почему.

4.35. **По мотивам [2.1]**. В экономике три потребителя имеют одинаковые предпочтения, представимые функциями полезности Кобба–Дугласа: $u^k(x_1^k, x_2) = \left(x_1^k\right)^{\alpha} (x_2)^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, где x_2 — количество потребляемого общественного блага, а x_1^k —потребление частного блага k-м потребителем, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\}$. У потребителей нет запаса общественного блага, а совокупный запас частного блага, равный ω, распределен поровну между K потребителями, причем $K \leqslant 3$. В экономике есть фирма, которая позволяет из единицы частного блага (x_1 — затраченное частное благо) произвести единицу общественного блага (y_2 — произведенное общественное благо). Потребители владеют фирмой в равных долях. Какое количество общественного блага производится в равновесии с добровольным финансированием? Как это количество меняется с увеличением K?

4.36. **По мотивам [2.1]**. В экономике два потребителя, предпочтения которых одинаковы и представимы функциями полезности Кобба–Дугласа: $u^k(x_1^k, x_2) = \left(x_1^k\right)^{\alpha} (x_2)^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, где x_2 — количество потребляемого общественного блага, а x_1^k — потребление частного блага k-м потребителем, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$. Потребители владеют начальным запасом первого блага $\omega_1^{\mathsf{A}} > 0$, $\omega_1^{\mathsf{B}} > 0$. В экономике есть фирма, которая позволяет из единицы частного блага произвести единицу общественного блага. Потребители владеют фирмой в равных долях. При каком значении параметров финансировать покупку общественного блага будет только потребитель B?

4.37. Рассмотрите экономику с двумя благами и двумя потребителями с функциями полезности вида: $u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2\right) = x_1^{\mathsf{A}}\left(x_2\right)^{10}$ и $u^{\mathsf{B}}\left(x_1^{\mathsf{B}},\, x_2\right) = \left(x_1^{\mathsf{B}}\right)^{9/10} x_2$, где x_2 — потребление общественного блага, а x_1^k — потребление частного блага потребителем k. Потребители обладают начальными запасами частного блага $\omega_1^{\mathsf{A}} = 6$ и $\omega_1^{\mathsf{B}} =?$, но не владеют запасом общественного блага. Технология характеризуется постоянной отдачей от масштаба.

(а) Пусть $\omega_1^{\mathsf{B}} = 54$. Известно, что в равновесии с добровольным финансированием цена общественного блага $\widetilde{p}_2 = 9$ и цена частного блага $\widetilde{p}_1 = 3$. Найдите все компоненты равновесия, которые возможно.

(б) Найдите все такие значения ω_1^{B}, что покупку общественного блага финансирует только потребитель B?

4.38. Рассмотрите экономику с двумя благами (общественным и частным) и двумя потребителями. Предпочтения потребителей представимы функциями полезности: $u^k\left(x_1^k,\, x_2\right) = x_1^k + 3x_2$, где k — индекс потребителя, $k = \{\mathsf{A},\, \mathsf{B}\}$. Каждый потребитель владеет положительным запасом частного блага в размере $\omega_1^k > 0$. Кроме того, потребители в равных долях владеют фирмой, производящей общественное благо из частного. Технология позволяет из единицы частного производить единицу общественного. Найдите равновесие с добровольным финансированием.

4.39. Рассмотрите экономику задачи 4.21. Фирма принадлежит потребителю B. Найдите равновесие с добровольным финансированием.

4.40. Издержки очистки от мусора лесопарковой территории, расположенной между районами «Ясенево» и «Бутово», составляют $TC(x) = x^2$, где x — площадь очищаемой территории (в га). Проведенные исследования выявили, что предпочтения всех жителей района «Ясенево» могут быть описаны функцией полезности вида $u^{\text{Я}}\left(x, m^{\text{Я}}\right) = 20\sqrt{x} + m^{\text{Я}}$, а предпочтения всех жителей района «Бутово» могут быть представлены функцией полезности вида $u^{\text{Б}}\left(x, m^{\text{Б}}\right) = 12\sqrt{x} + m^{\text{Б}}$, где $m^{\text{Я}}$ и $m^{\text{Б}}$ — потребление агрегированного блага всеми жителями соответствующих районов.

(а) Найдите Парето-эффективную площадь очищаемой от мусора территории. Изобразите решение графически.

(б) Если бы решение о размере площади очищаемой территории принималось на основе добровольного финансирования жителями районов, то как вы полагаете, какая площадь лесопарковой зоны была бы очищена от мусора и какую долю внесли бы жители каждого из районов в финансирование очистки?

4.41. По мотивам [2.3]. В поселке таунхаусов соседи дома, содержащего три квартиры, где живут семьи Ивановых, Петровых и Сидоровых, размышляют об оборудовании в их совместном дворике перед домом альпийской горки. Рассматриваются два варианта альпийской горки: с фонтаном и без. Оборудование альпийской горки с фонтаном обойдется соседям в 70 000 руб., а без фонтана — в 45 000 руб. Известно, что предпочтения Ивановых, Петровых и Сидоровых могут быть представлены квазилинейными функциями полезности. Каждая семья определила, какую максимальную сумму денег она готова заплатить за обустройство горки. Эти данные представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Семьи	Максимальная сумма, которую семья готова заплатить за горку без фонтана	Максимальная сумма, которую семья готова заплатить за горку с фонтаном
Ивановы	20 000	25 000
Петровы	15 000	20 000
Сидоровы	20 000	30 000

(а) Какой вариант альпийской горки является Парето-оптимальным?

(б) Если обустройство горки будет осуществляться на основе добровольного финансирования, то будет ли она приобретена, и если да, то какая?

4.4. Равновесие по Линдалю

4.42. Является ли равновесное распределение в равновесии Линдаля допустимым?

4.43. Рассмотрите экономику задачи 4.13. Укажите на рис. 4.2 равновесное по Линдалю количество общественного блага, производимое фирмой.

4.44. Рассмотрите экономику с общественным благом. Потребители владеют начальным запасом только частного блага $\omega_1 = 64$. Известно, что во всех внутренних распределениях, удовлетворяющих уравнению Самуэльсона, количество производимого общественного блага составляет 4 ед. Что можно сказать о том, какое количество общественного блага будут потреблять потребители во внутреннем равновесном распределении по Линдалю (если равновесие существует)?

4.45.* Рассмотрите экономику с двумя благами (частным благом и общественным благом) и двумя потребителями, которые обладают разными запасами частного блага, $\omega_1^{\mathsf{A}} = 20$ и $\omega_1^{\mathsf{B}} = 80$, но одинаковыми функциями полезности: $u^k(x_1^k, x_2) = x_1^k x_2$. Потребители в равных долях владеют фирмой, производящей из единицы частного блага единицу общественного.

(а) Запишите определение равновесия по Линдалю.

(б) Найдите равновесие по Линдалю.

4.46. Пусть предпочтения выпуклы и строго монотонны, производственная функция вогнута. Покажите, что в экономике задачи 4.14 внутреннее равновесное распределение в равновесии Линдаля является Парето-оптимальным.

4.47. Рассмотрите экономику задачи 4.21. Потребители владеют фирмой в равных долях. Найдите равновесие по Линдалю.

4.48. Рассмотрите экономику, в которой два потребителя имеют квазилинейные функции полезности вида $u^{\mathsf{A}}(x_1^{\mathsf{A}}, x_2) = 8\sqrt{x_2} + x_1^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}(x_1^{\mathsf{B}}, x_2) = 4\sqrt{x_2} + x_1^{\mathsf{B}}$, где x_2 — количество потребляемого общественного блага, а x_1^k — потребление частного блага k-м потребителем, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$. В экономике есть одна фирма, которая производит общественное благо из частного. Для производства y_2 ед. общественного блага требуется затратить $c\,(y_2) = (y_2)^{3/2}$ ед. частного. Начального запаса общественного блага в экономике нет. Начальные запасы частного блага $\omega_1^{\mathsf{A}} = \omega_1^{\mathsf{B}} = 10$. Фирмой полностью владеет потребитель B.

(а) Найдите равновесие по Линдалю.

(б) Рассмотрите распределение ($\widetilde{x}_2 = \widetilde{y}_2 = 4$, $\widetilde{x}_1 = 8$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 5$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 7$). Если **возможно**, реализуйте его как равновесное по Линдалю в экономике с трансфертами. Если **нет**, то объясните, почему.

4.49. Рассмотрите экономику с двумя благами (общественным и частным) и с тремя потребителями (A, B и C), функции полезности которых строго монотонны по обоим благам. Потребители A и B в равных долях владеют фирмой, технология которой позволяет произвести y_2 ед. общественного блага, используя $c(y_2) = y_2^2$ ед. частного. Потребители владеют начальными запасами частного блага $\omega_1^{\mathsf{A}} = 10$, $\omega_1^{\mathsf{B}} = 20$ и $\omega_1^{\mathsf{C}} = 30$. Начальных запасов общественного блага в экономике нет. Известно, что во внутреннем равновесии Линдаля цены частного и общественного благ равны, соответственно, $\widetilde{p}_1 = 2$ и $\widetilde{p}_2 = 8$. Цены Линдаля для потребителей B и C равны, соответственно, $\widetilde{q}^{\mathsf{B}} = 2$ и $\widetilde{q}^{\mathsf{C}} = 4$. Определите недостающие параметры равновесия Линдаля, которые возможны, используя имеющуюся информацию.

4.50. Жители небольшого поселка решили украсить улицы новогодними гирляндами. Всех жителей поселка можно разделить на две группы: A и B. Предпочтения каждой группы могут быть описаны следующими функциями полезности: $u^{\mathsf{A}}(x, y^{\mathsf{A}}) = xy^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}(x, y^{\mathsf{B}}) = xy^{\mathsf{B}}$, где x — количество метров гирлянд, а y^{A}, y^{B} — количество агрегированного блага. Цена одного метра гирлянды равна 2 д. е., а цена агрегированного блага равна 1 д. е. Доход группы A равен 10 000 д. е., а доход группы B равен 8000 д. е.

(а) Предположим, каждая группа независимо выбирает свой вклад, t^{A} и t^{B} соответственно, в финансирование покупки новогодних гирлянд. Сколько метров гирлянд будет закуплено каждой группой потребителей?

(б) Является ли количество метров гирлянд, полученное в п. (а), Парето-оптимальным? Аргументируйте свой ответ.

(в) Предложите способ финансирования покупки гирлянд, который приведет к Парето-оптимальному распределению в равновесии, где каждая группа будет принимать решение о покупке гирлянд независимо. Продемонстрируйте, как этот способ решит проблему неэффективности в данной экономике.

4.5. Решения задач

4.1. (а) Как видно из записи, полезность потребителя зависит не только от количества потребляемых им благ (x_1^{A} и x_2^{A}), но и от количества используемого фактора производства (первого блага) фирмой. Таким образом, имеет место внешний эффект со стороны производства на потребителя. Поскольку по условию $\partial v/\partial x_1 < 0$, что означает уменьшение полезности при увеличении использования фактора производства, то воздействие на потребителя отрицательное.

(б) В экономике с одним потребителем и одним производителем допустимое распределение $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1, \widehat{y}_2\right)$ называется Парето-оптимальным, если не существует другого допустимого распределения $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}, \overline{x}_1, \overline{y}_2\right)$, такого, что $u^{\mathsf{A}}\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}, \overline{x}_1\right) > u^{\mathsf{A}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1\right)$.

Другими словами, в экономике с одним потребителем Парето-оптимальное распределение — это допустимое распределение, в котором благосостояние потребителя максимально (на множестве допустимых распределений).

Запишем задачу поиска Парето-оптимальных распределений:

$$\begin{cases} v\left(x_2^{\mathsf{A}}, x_1\right) + x_1^{\mathsf{A}} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}, x_1, y_2 \geqslant 0}, \\ x_1^{\mathsf{A}} + x_1 = \omega_1^{\mathsf{A}}, \\ x_2^{\mathsf{A}} = y_2 + \underbrace{\omega_2^{\mathsf{A}}}_{=0}, \\ y_2 = f\left(x_1\right). \end{cases}$$

Упростив задачу, получим: $v\left(f\left(x_1\right), x_1\right) + \omega_1^{\mathsf{A}} - x_1 \to \max\limits_{0 \leqslant x_1 \leqslant \omega_1^{\mathsf{A}}}$.

Условие первого порядка для внутреннего решения: $\dfrac{\partial v}{\partial x_2^{\mathsf{A}}} f'\left(x_1\right) + \dfrac{\partial v}{\partial x_1} - 1 = 0$.

Таким образом, если внутренне распределение $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1, \widehat{y}_2\right)$ Парето-оптимально, то оно удовлетворяет условию

$$\frac{\partial v\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1\right)}{\partial x_2^{\mathsf{A}}} = \frac{1}{f'\left(\widehat{x}_1\right)}\left(1 - \frac{\partial v\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1\right)}{\partial x_1}\right)$$

или, так как $\dfrac{1}{f'\left(\widehat{x}_1\right)} = c'\left(\widehat{y}_2\right)$, где $c\left(y_2\right)$ — количество первого блага, необходимое для выпуска y_2 ед. второго блага, в другой записи:

$$\frac{\partial v\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1\right)}{\partial x_2^{\mathsf{A}}} = c'\left(\widehat{y}_2\right)\left(1 - \frac{\partial v\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1\right)}{\partial x_1}\right). \tag{4.1}$$

Заметим, что при заданных свойствах производственной функции для функции $c\left(y_2\right)$ выполнено $c'\left(y_2\right) > 0$ и $c''\left(y_2\right) > 0$ (таким образом, $c(y_2)$ — выпуклая функция). Так как $v\left(x_2^{\mathsf{A}}, x_1\right)$ и $f(x_1)$ вогнуты, то условие первого порядка не только необходимо, но и достаточно.

Так как $\partial v/\partial x_1 < 0$ (внешний эффект отрицателен), то

$$\left(1 - \frac{\partial v(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1)}{\partial x_1}\right) > 1, \text{ следовательно, } \frac{\partial v\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1\right)}{\partial x_2^{\mathsf{A}}} > c'\left(\widehat{y}_2\right).$$

(в) Набор $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2, \widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2\right)$ называется равновесием в экономике с экстерналиями, если

(1) $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ — решение задачи потребителя при равновесных ценах $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$ и объеме затрачиваемого в производстве фактора $\widetilde{x}_1$:

$$\begin{cases} v\left(x_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1\right) + x_1^{\mathsf{A}} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ \widetilde{p}_1 x_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 x_2^{\mathsf{A}} \leqslant \widetilde{p}_1 \omega_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 \underbrace{\omega_2^{\mathsf{A}}}_{=0} + \pi\left(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2\right); \end{cases}$$

(2) $(\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2)$ — решение задачи фирмы при равновесных ценах $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$:

$$\begin{cases} \widetilde{p}_2 y_2 - \widetilde{p}_1 x_1 \to \max\limits_{x_1, y_2 \geqslant 0}, \\ x_1 = c(y_2); \end{cases}$$

(3) $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1 = \omega_1^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{y}_2 + \omega_2^{\mathsf{A}}$. Так как в задаче речь идет о внутреннем равновесном распределении[1], то $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} > 0$. Внутреннее решение задачи потребителя удовлетворяет условию $MRS_{21}^{\mathsf{A}} = \widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1$, что для рассматриваемой функции полезности означает $\partial v\left(\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1\right)/\partial x_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1$.

Решение задачи фирмы, такое, что y_2 и $x_1 > 0$ удовлетворяют условию первого порядка задачи фирмы: $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = c'\left(\widetilde{y}_2\right)$.

Таким образом, в равновесии в экономике с экстерналиями выполнено условие $\partial v\left(\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1\right)/\partial x_2^{\mathsf{A}} = c'\left(\widetilde{y}_2\right)$.

Поскольку при наличии внешнего эффекта в Парето-оптимальном распределении $\partial v\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1\right)/\partial x_2^{\mathsf{A}} > c'\left(\widehat{y}_2\right)$, равновесное распределение не Парето-оптимально.

[1] Внутренним распределением называется распределение, в котором потребление всех благ каждым потребителем ненулевое. В гл. 3 внутренними распределениями назывались распределения, в которых все компоненты были положительными. В рассматриваемой же задаче не требуется расширения этого понятия, так как при нулевом запасе второго блага и условии $f(0) = 0$ положительное потребление второго блага возможно только при $\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2 > 0$.

(г) Так как по условию $\partial v / \partial x_1 < 0$, то $v_1'(x_1) > 0$ (это условие, показывающее, что внешний эффект оказывает отрицательное воздействие на потребителя). Кроме того, чтобы гарантировать свойства $v\left(x_2^{\mathsf{A}}, x_1\right)$, предположим, что $v_2'\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) > 0$, $v_2''\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) \leqslant 0$ (функция $v_2\left(x_2^{\mathsf{A}}\right)$ вогнутая) и $v_1''(x_1) \geqslant 0$ (функция $v_1(x_1)$ выпуклая). Задача на поиск Парето-оптимального распределения сводится к виду:

$$v_2(y_2) - v_1\Big(\underbrace{c(y_2)}_{x_1}\Big) + \underbrace{\omega_1^{\mathsf{A}} - c(y_2)}_{x_1^{\mathsf{A}}} \to \max_{0 \leqslant y_2 \leqslant f(\omega_1^{\mathsf{A}})}.$$

В оптимальном по Парето распределении благосостояние единственного потребителя достигает максимального значения для рассматриваемой экономики. Таким образом, индикатор общественного благосостояния может быть записан как

$$W(y_2) = v_2(y_2) - v_1\Big(\underbrace{c(y_2)}_{x_1}\Big) - c(y_2).$$

Функция $v_2(y_2)$ может трактоваться как частный выигрыш (выгоды) от потребления y_2, $c(y_2)$ — как частные издержки, связанные с производством y_2, $c(y_2) + v_1(c(y_2))$ — как общественные издержки, связанные с экстерналиями.

Дифференциальная характеристика внутренних оптимальных по Парето распределений:

$$v_2'(\widehat{y}_2) = c'(\widehat{y}_2)\Big(1 + v_1'\Big(\underbrace{c(\widehat{y}_2)}_{x_1}\Big)\Big),$$

или

$$v_2'(\widehat{y}_2) = c'(\widehat{y}_2) + c'(\widehat{y}_2)\, v_1'\Big(\underbrace{c(\widehat{y}_2)}_{x_1}\Big).$$

Таким образом, в оптимальном по Парето распределении предельная частная выгода $(v_2'(\widehat{y}_2))$ равна общественным предельным издержкам, которые равны сумме предельных частных издержек $(c'(\widehat{y}_2))$, и предельных издержек, связанных с внешним эффектом $\left(c'(\widehat{y}_2)\, v_1'(c(\widehat{y}_2))\right)$.

Дифференциальная характеристика внутреннего равновесного распределения: $v_2'(\underbrace{\,\widetilde{y}_2\,}_{=x_2^{\mathsf{A}}}) = c'(\widetilde{y}_2)$.

В оптимальном по Парето распределении $v_2'(\widehat{y}_2) > c'(\widehat{y}_2)$, или $v_2'(\widehat{y}_2) - c'(\widehat{y}_2) > 0$. В равновесном распределении имеем $v_2'(\widetilde{y}_2) - c'(\widetilde{y}_2) = 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(y_2) = v_2'(y_2) - c'(y_2)$. Для функции $\varphi(y_2)$ выполнено $\varphi(\widehat{y}_2) > \varphi(\widetilde{y}_2)$. Заметим, что так как по условию производственная функция вогнута ($f''(x_1) < 0$), то функция издержек выпукла ($c''(y_2) > 0$). Тогда

$$\varphi'(y_2) = \underbrace{v_2''(y_2)}_{<0} - \underbrace{c''(y_2)}_{>0} < 0,$$

что означает, что функция $\varphi(y_2)$ убывает. Тогда из $\varphi(\widehat{y}_2) > \varphi(\widetilde{y}_2)$ следует $\widehat{y}_2 < \widetilde{y}_2$. Таким образом, в равновесии производится больший объем второго блага, так как фирма, максимизируя прибыль, не берет во внимание издержки, связанные с внешними эффектами.

Приведем схематичную иллюстрацию на рис. 4.3.

На рис. 4.3 заштрихованы чистые потери (DWL — dead weight lost). В равновесии производится $\widetilde{y}_2$. В заштрихованной области частная предельная выгода меньше, чем общественные предельные издержки.

Распишем более подробно. Так как, при предпосылке $v_2(0) = 0$, выполнено $v_2(\widehat{y}_2) = \int\limits_0^{\widehat{y}_2} v_2'(y_2)\,dy_2$, то в оптимальном по Парето распределении выгода $v_2(\widehat{y}_2)$ — это величина, равная площади под кривой $v_2'(y_2)$, а значит, сумме площадей фигур $A + B + C + D + E$ на рис. 4.4.

Так как при $c(0) = 0$ и $v_1(0) = 0$ выполнено

$$c(\widehat{y}_2) + v_1(c(\widehat{y}_2)) = \int\limits_0^{\widehat{y}_2} \left(c'(y_2) + c'(y_2)\, v_1'(c(y_2))\right) dy_2,$$

то общественные издержки $c(\widehat{y}_2) + v_1(c(\widehat{y}_2))$ — это величина, равная площади под кривой $c'(y_2) + c'(y_2)\, v_1'(c(y_2))$, т. е. сумме площадей фигур $C + D + E$. В итоге, значение индикатора благосостояния $W(\widehat{y}_2)$ равна сумме площадей фигур $A + B$. Напомним, что в оптимальном по Парето распределении индикатор благосостояния достигает максимального значения.

Рассуждая аналогичным образом, получим, что выгода в равновесном распределении (соответствующем величине $\widetilde{y}_2$) равна сумме площадей фигур $A + B + C + D + E + G + H + I$ (площадь под кривой $v_2'(y_2)$), а общественные издержки в равно-

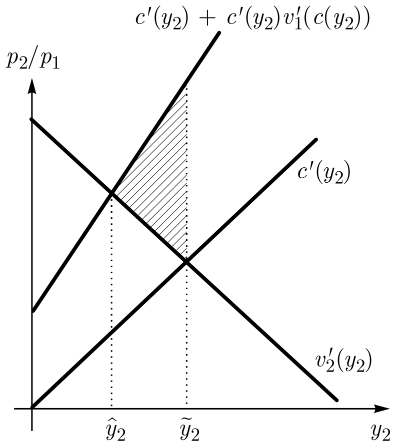

Рис. 4.3. Отрицательные внешние эффекты приводят к чистым потерям (DWL)

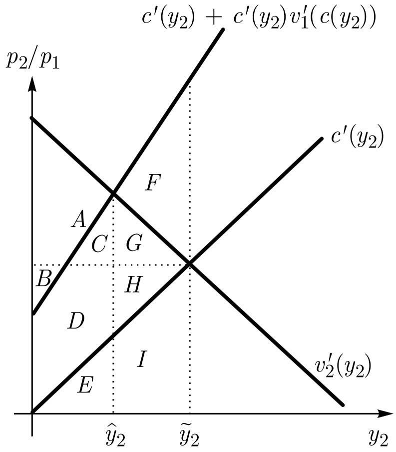

Рис. 4.4. Чистые потери — разница значений индикатора благосостояния при оптимальном распределении и при равновесном распределении

весии — это величина, равная сумме площадей $C + D + E + \mathrm{F} + G + H + I$. Тогда значение индикатора благосостояния в равновесном распределении $W(\widetilde{y}_2)$ равно $A + B - F$. Таким образом, чистые потери в равновесии равны величине площади фигуры F на рис. 4.4 (на рис. 4.3 эта область заштрихована).

(д) Так как источник внешнего эффекта — фирма, а внешний эффект связан с использованием первого блага в качестве фактора производства, то квота вводится на количество используемого фактора.

Набор $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2, \widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2\right)$ называется равновесием с квотами на экстерналии, если

(1) $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ — решение задачи потребителя при равновесных ценах $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$, объеме затрачиваемого в производстве фактора $\widetilde{x}_1$:

$$\begin{cases} v\left(x_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1\right) + x_1^{\mathsf{A}} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ \widetilde{p}_1 x_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 x_2^{\mathsf{A}} \leqslant \widetilde{p}_1 \omega_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 \underbrace{\omega_2^{\mathsf{A}}}_{=0} + \pi\left(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2\right); \end{cases}$$

(2) $(\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2)$ — решение задачи фирмы при равновесных ценах $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$ и квоте $x_1 = \widetilde{x}_1$:

$$\begin{cases} \widetilde{p}_2 y_2 - \widetilde{p}_1 x_1 \to \max\limits_{x_1, y_2 \geqslant 0}, \\ x_1 = c(y_2), \\ x_1 = \widetilde{x}_1; \end{cases}$$

(3) $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1 = \omega_1^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{y}_2 + \omega_2^{\mathsf{A}}$.

Покажем, что существуют цены, при которых внутреннее Парето-оптимальное распределение $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1, \widehat{y}_2\right)$ реализуемо как равновесное.

Для Парето-оптимального распределения $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1, \widehat{y}_2\right)$ выполнены условия допустимости, а значит, условия уравновешенности рынков (которые совпадают с двумя из трех условий допустимости) выполнены: $\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} + \widehat{x}_1 = \omega_1^{\mathsf{A}}$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = \widehat{y}_2 + \omega_2^{\mathsf{A}}$.

Рассмотрим задачу фирмы. Так как $x_1 = \widehat{x}_1$, то фирма фактически выбирает только одну переменную y_2. Значение y_2 может быть найдено из ограничения задачи фирмы. Так как в Парето-оптимальном распределении $\widehat{x}_1 = c(\widehat{y}_2)$ в силу допустимости Парето-оптимального распределения, то при любых положительных ценах $(\widehat{x}_1, \widehat{y}_2)$ — решение задачи фирмы.

Покажем, что существуют цены такие, что набор $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ — решение задачи потребителя.

Во-первых, заметим, что полезность возрастает по каждому благу, а значит, предпочтения строго монотонны. В этом случае решение задачи потребителя должно удовлетворять уравнению бюджетной линии. Заметим, что при любых ценах набор $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ удовлетворяет уравнению бюджетной линии:

$$\widetilde{p}_1 \widehat{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 \widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{p}_1 \omega_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 \underbrace{\omega_2^{\mathsf{A}}}_{=0} + \underbrace{\widetilde{p}_2 \widehat{y}_2 - \widetilde{p}_1 \widehat{x}_1}_{\pi},$$

так как после преобразования получим

$$\widetilde{p}_1 \underbrace{\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} + \widehat{x}_1 - \omega_1^{\mathsf{A}}\right)}_{=0} + \widetilde{p}_2 \underbrace{\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} - \widehat{y}_2\right)}_{=0} = 0.$$

Во-вторых, так как функция $v(\cdot)$ вогнутая, то, значит, вогнута и функция полезности потребителя (что означает, что предпочтения выпуклы), функция полезности растет с ростом потребления каждого блага (предпочтения строго монотонны). Поэтому условие $MRS_{21}^{\mathsf{A}} = \widetilde{p}_2 / \widetilde{p}_1$ является не только необходимым, но и достаточным для внутреннего решения: $\partial v\left(x_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_1\right)/\partial x_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1$. При ценах

$$\widetilde{p}_1 = 1, \quad \widetilde{p}_2 = \underbrace{\frac{\partial v\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_1\right)}{\partial x_2^{\mathsf{A}}}}_{=c'(\widehat{y}_2)\left(1-\frac{\partial v\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_1\right)}{\partial x_1}\right)}$$

набор $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ удовлетворяет этому условию.

Следовательно, $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ — решение задачи потребителя при ценах $\widetilde{p}_2 = \partial v\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_1\right)/\partial x_2^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{p}_1 = 1$.

Таким образом, получили набор $(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1, \widehat{y}_2, \widetilde{p}_1 = 1,\ \widetilde{p}_2 = \partial v\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1\right)/\partial x_2^{\mathsf{A}})$ — равновесие в экономике с квотами на экстерналии.

(е) Набор $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_1,\, \widetilde{y}_2,\, \widetilde{p}_1,\, \widetilde{p}_2\right)$ называется равновесием с налогом t в экономике с экстерналиями, если

(1) $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ — решение задачи потребителя при равновесных ценах $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$, объеме затрачиваемого в производстве фактора $\widetilde{x}_1$:

$$\begin{cases} v\left(x_2^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_1\right) + x_1^{\mathsf{A}} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ \widetilde{p}_1 x_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 x_2^{\mathsf{A}} \leqslant \widetilde{p}_1 \omega_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 \underbrace{\omega_2^{\mathsf{A}}}_{=0} + \pi\left(\widetilde{p}_1,\, \widetilde{p}_2,\, t\right) + t\widetilde{x}_1; \end{cases}$$

(2) $(\widetilde{x}_1,\, \widetilde{y}_2)$ — решение задачи фирмы при равновесных ценах $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$ и налоге t:

$$\begin{cases} \widetilde{p}_2 y_2 - \left(\widetilde{p}_1 + t\right) x_1 \to \max\limits_{x_1,\, y_2 \geqslant 0}, \\ x_1 = c\left(y_2\right); \end{cases}$$

(3) $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1 = \omega_1^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{y}_2 + \omega_2^{\mathsf{A}}$.

Покажем, что существуют цены и налог, при которых внутреннее Парето-оптимальное распределение реализуемо как равновесное.

Для Парето-оптимального распределения $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_1,\, \widehat{y}_2\right)$ выполнены условия допустимости, а значит, условия уравновешенности рынков (которые совпадают с двумя из трех условий допустимости) выполнены. Покажем, что существуют цены и налог такие, что $(\widehat{x}_1,\, \widehat{y}_2)$ — решение задачи фирмы. Парето-оптимальное распределение удовлетворяет ограничению задачи $\widehat{x}_1 = c\left(\widehat{y}_2\right)$, так как это — одно из трех условий допустимости.

Так как $c(y_2)$ — выпуклая функция (это следует из того, что $f(x_1)$ вогнутая), то условие первого порядка задачи фирмы не только необходимо, но и достаточно: $p_2/(p_1+t) = c'(y_2)$ для $y_2 > 0$.

Пусть $\widetilde{p}_2 = \partial v(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1)/\partial x_2^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{p}_1 = 1$ и $t = -\partial v(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1)/\partial x_1$. Из дифференциальной характеристики внутренних Парето-оптимальных распределений следует, что при таких ценах и налоге Парето-оптимальное распределение удовлетворяет условию первого порядка задачи фирмы. А значит, $(\widehat{x}_1, \widehat{y}_2)$ — решение задачи фирмы при $\widetilde{p}_2 = \partial v(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1)/\partial x_2^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{p}_1 = 1$ и $t = -\partial v(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1)/\partial x_1$.

Покажем, что при указанных ценах набор $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ — решение задачи потребителя.

Во-первых, так как предпочтения потребителя строго монотонны (при увеличении в наборе каждого блага полезность потребителя возрастает), то решение удовлетворяет бюджетному ограничению как равенству. При любых ценах набор $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ удовлетворяет уравнению бюджетной линии:

$$\widetilde{p}_1\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{p}_1\omega_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2\underbrace{\omega_2^{\mathsf{A}}}_{=0} + \underbrace{\widetilde{p}_2\widehat{y}_2 - (\widetilde{p}_1 + t)\,\widehat{x}_1}_{\pi} + t\widehat{x}_1,$$

так как после преобразования получим

$$\widetilde{p}_1\underbrace{\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} + \widehat{x}_1 - \omega_1^{\mathsf{A}}\right)}_{=0} + \widetilde{p}_2\underbrace{\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} - \widehat{y}_2\right)}_{=0} = 0.$$

Во-вторых, так как функция $v(\cdot)$ — вогнутая, то вогнута и функция полезности (а значит, предпочтения выпуклы). Для строго монотонных выпуклых предпочтений условие $MRS_{21}^{\mathsf{A}} = \widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1$ является не только необходимым, но и достаточным для внутреннего решения: $\partial v(x_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1)/\partial x_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1$. При выбранных ценах $\partial v(x_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1)/\partial x_2^{\mathsf{A}} = \partial v(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1)/\partial x_2^{\mathsf{A}}$. Набор $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ удовлетворяет этому условию. Следовательно, $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ — решение задачи потребителя при ценах $\widetilde{p}_2 = \partial v(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1)/\partial x_2^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{p}_1 = 1$ и налоге $t = -\partial v(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1)/\partial x_1$.

Таким образом, получили набор $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1, \widehat{y}_2, \widetilde{p}_1 = 1, \widetilde{p}_2 = \partial v(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1)/\partial x_2^{\mathsf{A}}\right)$ — равновесие в экономике с налогом $t = -\partial v(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1)/\partial x_1$.

(ж) Набор $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1, \widetilde{y}_2, \widetilde{x}_{1,A}, \widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{q}\right)$ называется равновесием с торговлей экстерналиями, если

(1) $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_{1,A}\right)$ — решение задачи потребителя при равновесных ценах $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$, $\widetilde{q}$:

$$\begin{cases} v\left(x_2^{\mathsf{A}},\, x_{1,A}\right) + x_1^{\mathsf{A}} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}},\, x_{1,A} \geqslant 0}, \\ \widetilde{p}_1 x_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 x_2^{\mathsf{A}} - \widetilde{q}\, x_{1,A} \leqslant \widetilde{p}_1 \omega_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 \underbrace{\omega_2^{\mathsf{A}}}_{=0} + \pi\left(\widetilde{p}_1,\, \widetilde{p}_2\right); \end{cases}$$

(2) $(\widetilde{x}_1,\, \widetilde{y}_2)$ — решение задачи фирмы при равновесных ценах $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$, $\widetilde{q}$:

$$\begin{cases} \widetilde{p}_2 y_2 - (\widetilde{p}_1 + \widetilde{q})\, x_1 \to \max\limits_{x_1,\, y_2 \geqslant 0}, \\ x_1 = c\,(y_2); \end{cases}$$

(3) $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1 = \omega_1^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{y}_2 + \omega_2^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{x}_{1,A} = \widetilde{x}_1$.

Покажем, что существуют цены, при которых внутреннее Парето-оптимальное распределение $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_1,\, \widehat{y}_2\right)$ реализуемо как равновесное.

Для Парето-оптимального распределения $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_1,\, \widehat{y}_2\right)$ выполнены условия допустимости, а значит, условия уравновешенности рынков по первому и второму благам (которые совпадают с двумя из трех условий допустимости) выполнены. Выполнен должен быть и баланс по экстерналиям, так как выбор потребителя должен быть равен $\widehat{x}_1$.

Покажем, что существуют цены такие, что $(\widehat{x}_1,\, \widehat{y}_2)$ — решение задачи фирмы. Парето-оптимальное распределение удовлетворяет ограничению задачи $\widehat{x}_1 = c\,(\widehat{y}_2)$.

Так как $c\,(y_2)$ — выпуклая, то функция прибыли вогнутая, а значит, условие первого порядка задачи фирмы не только необходимо, но и достаточно: $p_2/(p_1 + q) = c'\,(y_2)$ для $y_2 > 0$.

Пусть $\widetilde{p}_2 = \partial v\,(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_1)/\partial x_2^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{p}_1 = 1$ и $q = -\partial v\,(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_1)/\partial x_1$. Из дифференциальной характеристики внутренних Парето-оптимальных распределений следует, что при таких ценах внутреннее Парето-оптимальное распределение удовлетворяет условию первого порядка задачи фирмы. А значит, $(\widehat{x}_1,\, \widehat{y}_2)$ — решение задачи фирмы при $\widetilde{p}_2 = \partial v\,(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_1)/\partial x_2^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{p}_1 = 1$ и $q = -\partial v\,(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_1)/\partial x_1$.

Покажем, что при указанных ценах набор $(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, x_{1,A} = \widehat{x}_1)$ — решение задачи потребителя.

Так как предпочтения потребителя строго монотонны (при увеличении в наборе хотя бы одного блага полезность потребителя возрастает), то решение удовлетворяет бюджетному ограничению как равенству. При любых ценах набор $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, x_{1,A} = \widehat{x}_1\right)$ удовлетворяет уравнению бюджетной линии:

$$\widetilde{p}_1\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} - q\widehat{x}_1 = \widetilde{p}_1\omega_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 \underbrace{\omega_2^{\mathsf{A}}}_{=0} + \underbrace{\widetilde{p}_2\widehat{y}_2 - (\widetilde{p}_1 + q)\,\widehat{x}_1}_{\pi},$$

что становится понятным после преобразования

$$\widetilde{p}\,\underbrace{{}_1\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} + \widehat{x}_1 - \omega_1^{\mathsf{A}}\right)}_{=0} + \widetilde{p}_2 \underbrace{\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} - \widehat{y}_2\right)}_{=0} = 0.$$

Выразив x_1^{A} из уравнения бюджетной линии и подставив в целевую функцию, получим

$$v\left(x_2^{\mathsf{A}}, x_{1,A}\right) + \frac{q x_{1,A} - p_2 x_2^{\mathsf{A}} + p_1\omega_1^{\mathsf{A}} + p_2 \underbrace{\omega_2^{\mathsf{A}}}_{=0} + \pi\,(p_1, p_2)}{p_1} \to \max_{x_2^{\mathsf{A}}, x_{1,A} \geqslant 0}.$$

Тогда условия первого порядка для внутреннего решения: $\partial v\,(x_2^{\mathsf{A}},\, x_{1,A})/\partial x_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1$ и $\partial v\,(x_1^{\mathsf{A}},\, x_{1,A})/\partial x_{1,A} = -\widetilde{q}/\widetilde{p}_1$. Так как функция $v\,(\cdot)$ — вогнутая, то условия первого порядка задачи потребителя являются не только необходимыми, но и достаточными. При выбранных ценах получим следующие выражения: $\partial v\,(x_2^{\mathsf{A}},\, x_{1,A})/\partial x_2^{\mathsf{A}} = \partial v\,(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_1)/\partial x_2^{\mathsf{A}}$ и $\partial v\,(x_2^{\mathsf{A}},\, x_{1,A})/\partial x_{1,A} = \partial v\,(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_1)/\partial x_1$. Тогда набор $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, x_{1,A} = \widehat{x}_1\right)$ удовлетворяет условиям первого порядка, а значит, является решением задачи потребителя при ценах $\widetilde{p}_2 = \partial v\,(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_1)/\partial x_2^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{p}_1 = 1$ и $q = -\partial v\,(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_1)/\partial x_1$.

Таким образом, набор $(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1, \widehat{y}_2, x_{1,A} = \widehat{x}_1,\ \ \widetilde{q} = = \partial v\,(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1)/\partial x_1 \widetilde{p}_1 = 1,\ \widetilde{p}_2 = \partial v\,(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1)/\partial x_2^{\mathsf{A}})$ — равновесие в экономике с торговлей экстерналиями.

4.2. (a) В рассматриваемой экономике с одним потребителем Парето-оптимальное распределение — это допустимое распределение, в котором благосостояние потребителя максимально. Таким образом, Парето-оптимальное распределение является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}},\, x_1\right) \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}},\, y_2,\, x_1 \geqslant 0}, \\ x_1^{\mathsf{A}} + x_1 = \omega_1^{\mathsf{A}}, \\ x_2 = y_2 + \omega_2^{\mathsf{A}}, \\ y_2 = f\,(x_1)\,. \end{cases}$$

Выразим через x_1 остальные переменные задачи: $y_2 = f(x_1)$, $x_1^{\mathsf{A}} = \omega_1^{\mathsf{A}} - x_1$, $x_2^{\mathsf{A}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + f(x_1)$. Подставляя полученные выражения для x_1^{A}, x_2^{A} в целевую функцию, приведем задачу к следующему виду:

$$u^{\mathsf{A}}\left(\omega_1^{\mathsf{A}} - x_1,\, \omega_2^{\mathsf{A}} + f(x_1),\, x_1\right) \to \max_{0 \leqslant x_1 \leqslant \omega_1^{\mathsf{A}}}.$$

Условие первого порядка для решения, в котором компонента $0 < x_1 < \omega_1^{\mathsf{A}}$:

$$-\frac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_1^{\mathsf{A}}} + \frac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_2^{\mathsf{A}}} f'(x_1) + \frac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_1} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_2^{\mathsf{A}}} f'(x_1) + \frac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_1} = \frac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_1^{\mathsf{A}}}.$$

Поскольку по условию $\partial u^{\mathsf{A}} / \partial x_2^{\mathsf{A}} \neq 0$, то разделим левую и правую часть полученного выражения на $\partial u^{\mathsf{A}} / \partial x_2^{\mathsf{A}}$, откуда получим дифференциальную характеристику внутреннего Парето-оптимального распределения $f'(x_1) + \dfrac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_1} \Big/ \dfrac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_2^{\mathsf{A}}} = \dfrac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_1^{\mathsf{A}}} \Big/ \dfrac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_2^{\mathsf{A}}}$, которая может быть записана следующим образом: $f'(x_1) + MRS^{\mathsf{A}}_{x_1,\, x_2^{\mathsf{A}}} = MRS^{\mathsf{A}}_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}}}$.

(б) По условию заданное распределение допустимо, а значит, для него выполнены условия сбалансированности рынков. Так как в рассматриваемом распределении все компоненты положительные, то решения задач потребителя и фирмы должны быть внутренними. Во внутреннем решении задачи потребителя:

$$\begin{cases} u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_1\right) \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ \widetilde{p}_1 x_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 x_2^{\mathsf{A}} \leqslant \widetilde{p}_1 \omega_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 \omega_2^{\mathsf{A}} + \pi(\widetilde{p}_1,\, \widetilde{p}_2), \end{cases}$$

выполнено $MRS^{\mathsf{A}}_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_1\right) = \widetilde{p}_1 / \widetilde{p}_2$. Допустимое распределение удовлетворяет ограничению задачи производителя:

$$\begin{cases} \widetilde{p}_2 y_2 - \widetilde{p}_1 x_1 \to \max\limits_{x_1,\, y_2 \geqslant 0}, \\ y_2 = f(x_1), \end{cases}$$

и во внутреннем решении задачи производителя выполнено $f'(\widetilde{x}_1) = \widetilde{p}_1 / \widetilde{p}_2$ (условие первого порядка). Так как по условию $MRS^{\mathsf{A}}_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widetilde{x}_1\right) = f'(\widetilde{x}_1) = 3$, распределение может быть равновесным при ценах $\widetilde{p}_1 / \widetilde{p}_2 = 3$. Но невозможно дать однозначно утвердительный ответ, поскольку в рассуждениях использовались условия первого порядка, которые, в общем случае, являются только необходимыми, но не достаточными условиями.

(в) Распределение не удовлетворяет необходимому условию Парето-оптимальности, выведенному в п. (а). Таким образом, оно не может быть Парето-оптимальным. $MRS^{\mathsf{A}}_{x_1, x_2^{\mathsf{A}}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1\right) = -6$ означает, что $dx_2^{\mathsf{A}}/dx_1 = -(-6) = 6$. Таким образом, увеличение использования фактора на 1 малую единицу требует увеличения потребления второго блага на 6 малых единиц. Это означает, что воздействие на потребителя негативное. Уменьшим использование первого блага в производстве x_1 на одну малую единицу. Это возможно, поскольку по условию все компоненты распределения положительны. Тогда выпуск уменьшится на $f'\left(\widetilde{x}_1\right) = 3$ малых единицы. В рассматриваемом распределении $MRS^{\mathsf{A}}_{x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1\right) = 3$. Это означает, что увеличение потребления первого блага на одну малую единицу компенсируется без изменения полезности уменьшением потребления второго блага на 3 малых единицы. Таким образом, в отсутствии экстерналий такое перераспределение не привело бы к увеличению полезности. Однако так как по условию $MRS^{\mathsf{A}}_{x_1, x_2^{\mathsf{A}}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1\right) = -6$, то уменьшение использования первого блага в производстве на малую единицу без изменения полезности компенсировалось бы потерей шести малых единиц второго блага. Потребителю же пришлось отказаться только от трех малых единиц второго блага, а следовательно, его благосостояние возросло.

4.4. (а) В экономике с одним потребителем Парето-оптимальное распределение — это допустимое распределение, такое, что не существует другого допустимого распределения, в котором благосостояние потребителя было бы больше. Таким образом, задача поиска оптимальных по Парето распределений записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \ln x_2^{\mathsf{A}} + \ln y_2 + x_1^{\mathsf{A}} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}, y_2, x_1 \geqslant 0}, \\ x_1^{\mathsf{A}} + x_1 = \omega_1^{\mathsf{A}}, \\ x_2^{\mathsf{A}} = y_2 + \underbrace{\omega_2^{\mathsf{A}}}_{=0}, \\ y_2 = 2\sqrt{x_1}\,. \end{cases}$$

Выразив из ограничений переменные x_2^{A} и x_1^{A} через y_2, приведем задачу к виду $2\ln y_2 + 10 - y_2^2/4 \to \max\limits_{0 \leqslant y_2 \leqslant 2\sqrt{10}}$, откуда найдем $\widehat{y}_2 = 2$. Воспользовавшись условиями допустимости (ограничениями задачи), найдем остальные компоненты распределения: $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 2$, $\widehat{x}_1 = 1$, $\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 9$.

В дальнейшем, для большей наглядности и понимания полученных результатов, будет использоваться дифференциальная характеристика внутренних оптимальных по Парето распределений. Для ее вывода запишем функцию полезности в следующем виде:

$$u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}},\, y_2\right) = v_x\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) + v_y\left(y_2\right) + x_1^{\mathsf{A}},$$

где $v_i'(\cdot) > 0$, $v_i''(\cdot) < 0$, $i = \{x,\, y\}$. Обратную функцию к производственной функции обозначим $c(y_2)$, где $c(y_2)$ — количество единиц первого блага, необходимое для производства y_2 единиц второго. В задаче $c(y_2) = y_2^2/4$. Заметим, что для функции выполнено $c'(y_2) > 0$, $c''(y_2) > 0$.

Тогда для задачи поиска оптимальных по Парето распределений

$$\begin{cases} v_x\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) + v_y\left(y_2\right) + x_1^{\mathsf{A}} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}},\, y_2,\, x_1 \geqslant 0}, \\ x_1^{\mathsf{A}} + x_1 = \omega_1^{\mathsf{A}}, \\ x_2^{\mathsf{A}} = y_2 + \underbrace{\omega_2^{\mathsf{A}}}_{=0}, \\ x_1 = c\left(y_2\right). \end{cases}$$

Выразив переменные x_2^{A} и x_1^{A} через y_2, запишем целевую функцию (функцию полезности) следующим образом: $v_x(y_2) + v_y(y_2) + \omega_1^{\mathsf{A}} - c(y_2)$. Таким образом, индикатор благосостояния для рассматриваемой экономики $W(y_2) = v_x(y_2) + v_y(y_2) - c(y_2)$. Слагаемое $v_x(y_2)$ интерпретируется как выгода от потребления второго блага, y_2, $c(y_2)$ — как частные издержки производства второго блага, разность $c(y_2) - v_y(y_2)$ интерпретируется как общественные издержки.

Условие первого порядка, которое в силу вогнутости целевой функции является достаточным условием, для внутреннего решения есть

$$v_x'(\widehat{y}_2) + v_y'(\widehat{y}_2) - c'(\widehat{y}_2) = 0, \text{ или } v_x'(\widehat{y}_2) = c'(\widehat{y}_2) - v_y'(\widehat{y}_2). \quad (4.2)$$

То есть во внутреннем Парето-оптимальном распределении предельная выгода от потребления равна предельным общественным издержкам.

(б) В равновесии потребитель решает задачу при равновесных ценах и равновесном уровне выпуска второго блага:

$$\begin{cases} v_x\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) + v_y\left(\widetilde{y}_2\right) + x_1^{\mathsf{A}} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ \widetilde{p}_1 x_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 x_2^{\mathsf{A}} \leqslant \widetilde{p}_1 \omega_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 \underbrace{\omega_2^{\mathsf{A}}}_{=0} + \pi\left(\widetilde{p}_1,\, \widetilde{p}_2\right). \end{cases}$$

Так как полезность растет по каждому потребительскому благу, то предпочтения потребителя строго монотонны. Во внутреннем решении задачи потребителя выполнено условие $MRS^{\mathsf{A}}_{x_2^{\mathsf{A}},\, x_1^{\mathsf{A}}} = \widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1$. Так как функция полезности вогнута (сумма вогнутых функций), то предпочтения потребителя выпуклы. Следовательно, условие равенства предельной полезности отношению цен является не только необходимым, но и достаточным. Для рассматриваемой задачи — это условие: $v'_x\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) = \widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1$ (обратная функция спроса). Из условия уравновешенности рынка второго блага $x_2^{\mathsf{A}} = y_2$.

Для задачи производителя $\begin{cases} \widetilde{p}_2 y_2 - \widetilde{p}_1 x_1 \to \max\limits_{x_1,\, y_2 \geqslant 0}, \\ x_1 = c\left(y_2\right), \end{cases}$ условие первого порядка для внутреннего решения записывается, как $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = c'\left(y_2\right)$ (обратная функция предложения фирмы). Так как производственная функция вогнута (функция $c(y_2)$ выпукла), то условие первого порядка задачи фирмы является не только необходимым, но и достаточным. Таким образом, дифференциальная характеристика внутреннего равновесного распределения $v'_x\left(\widetilde{y}_2\right) = c'\left(\widetilde{y}_2\right)$. Для заданных функций это условие означает $1/y_2 = y_2/2$, откуда $\widetilde{y}_2 = \sqrt{2}$. Из ограничения задачи фирмы $\widetilde{x}_1 = 1/2$. Из условия сбалансированности рынка второго блага $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = \sqrt{2}$. Из условия сбалансированности рынка первого блага $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 9{,}5$.

Таким образом, равновесное распределение не является оптимальным по Парето. Так как полезность потребителя растет с ростом выпуска второго блага (слагаемое $\ln y_2$ в полезности), то внешний эффект, возникающий в производстве, положительный. В Парето-оптимальном распределении производится больше второго блага, чем в равновесии, поскольку в равновесии фирма учитывает только частные издержки и не учитывает внешние выгоды.

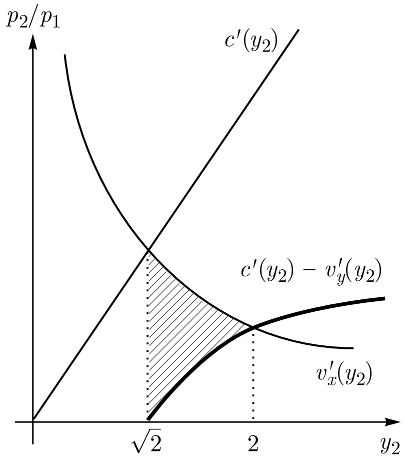

Рис. 4.5. Чистые потери в равновесии равны площади заштрихованной области

(в) На рис. 4.5 заштрихованы безвозвратные (чистые) потери.

Площадь заштрихованной области равна безвозвратным потерям. В равновесном распределении производится $\widetilde{y}_2 = \sqrt{2}$ ед. второго блага. Но и при бо́льшем выпуске предельная выгода (а, значит, готовность заплатить) выше, чем предельные общественные издержки вплоть до Парето-оптимального уровня $\widehat{y}_2 = 2$. Пример более подробного обоснования см. в решении п. (г) задачи 4.1.

(г) Реализуем внутреннее оптимальное по Парето распределение ($\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 9$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 2$, $\widehat{x}_1 = 1$, $\widehat{y}_2 = 2$) как равновесное в экономике с налогом/субсидией на экстерналии.

Начнем анализ с задачи фирмы. Именно деятельность фирмы приводит к внешнему эффекту, причем этот внешний эффект положительный. Таким образом, нужно ввести субсидию фирме для того, чтобы в равновесии она производила бо́льший выпуск. Существуют ли цены и субсидия такие, что решением задачи $\begin{cases} (p_2 + s)\, y_2 - p_1 x_1 \to \max\limits_{x_1,\, y_2 \geqslant 0}, \\ x_1 = c\,(y_2) \end{cases}$ является ($\widehat{x}_1 = 1$, $\widehat{y}_2 = 2$)?

Заметим, что ($\widehat{x}_1$, $\widehat{y}_2$) удовлетворяет ограничению задачи.

Упростив задачу, получим: $(p_2 + s)\, y_2 - p_1 c\,(y_2) \to \max\limits_{y_2 \geqslant 0}$. Так как функция $c\,(y_2)$ выпукла, целевая функция вогнута, а значит, условие первого порядка является не только необходимым, но и достаточным: $(p_2 + s)/p_1 = c'\,(y_2)$. Из условия (4.2) следует, что Парето-оптимум удовлетворяет этому условию при $\widetilde{p}_2 = v'_x\,(\widehat{y}_2)$, $\widetilde{p}_1 = 1$ и $s = v'_y\,(\widehat{y}_2)$. То есть, $\widetilde{p}_2 = 0,5$, $\widetilde{p}_1 = 1$ и $s = 0,5$. Следовательно, при указанных ценах и субсидии ($\widehat{x}_1$, $\widehat{y}_2$) является решением задачи потребителя.

Рассмотрим задачу потребителя

$$\begin{cases} v_x\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) + v_y\left(\widehat{y}_2\right) + x_1^{\mathsf{A}} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ \widetilde{p}_1 x_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 x_2^{\mathsf{A}} \leqslant \widetilde{p}_1 \omega_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{p}_2 \underbrace{\omega_2^{\mathsf{A}}}_{=0} + \pi\left(\widetilde{p}_1,\, \widetilde{p}_2,\, s\right) - s\widehat{y}_2. \end{cases}$$

Является ли набор $(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 9,\ \widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 2)$ решением задачи потребителя при указанных ценах и субсидии?

Во-первых, предпочтения строго монотонны, следовательно, внутреннее решение задачи потребителя должно удовлетворять условию $MRS^{\mathsf{A}}_{x_2^{\mathsf{A}},\, x_1^{\mathsf{A}}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{y}_2\right) = \widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1$. Более того, так как предпочтения выпуклы (следствие вогнутости функции полезности), то это условие является не только необходимым, но и достаточным. Для заданной функции полезности $v_x'\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) = \widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1$ или $1/x_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1$. При выбранных ценах это условие выполнено.

Во-вторых, из строгой монотонности следует, что решение задачи должно удовлетворять бюджетному ограничению как равенству. Убедитесь, что это выполнено при любых ценах и величине субсидии. Следовательно, набор $(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}},\ \widehat{x}_2^{\mathsf{A}})$ является решением задачи потребителя при выбранных ценах и субсидии. Для оптимального по Парето распределения выполнены условия сбалансированности рынков.

Таким образом, $(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 9,\ \widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 2,\ \widehat{x}_1 = 1,\ \widehat{y}_2 = 2)$ является равновесным распределением при $\widetilde{p}_2 = 0{,}5$, $\widetilde{p}_1 = 1$ и $s = 0{,}5$.

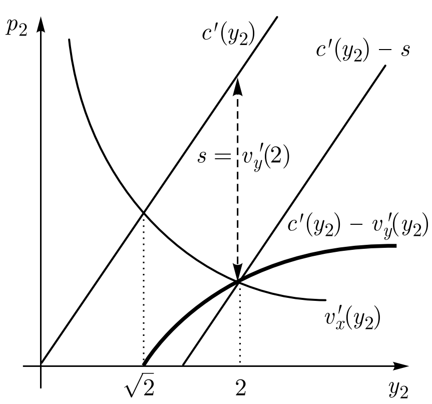

Рис. 4.6. Введение субсидии позволяет реализовать оптимальное распределение как равновесное

Приведем графическую иллюстрацию на рис. 4.6. Введение субсидии означает, что график обратной функции предложения фирмы сдвигается вниз на величину субсидии (при нормировке $\widetilde{p}_1 = 1$).

4.5 (а) Доход потребителя формируется из двух источников. Во-первых, единственный потребитель владеет фирмой, а значит, получает всю прибыль фирмы. Во-вторых, потребитель продает L^{A} своего времени. Таким образом, задача потребителя:

$$\begin{cases} u^{\mathsf{A}}\left(l^{\mathsf{A}}, x^{\mathsf{A}}\right) \to \max\limits_{x^{\mathsf{A}}, l^{\mathsf{A}}, L^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ p_x x^{\mathsf{A}} \leqslant p_L L^{\mathsf{A}} + \pi\left(p_x, p_L\right), \\ L^{\mathsf{A}} + l^{\mathsf{A}} + S\left(x\right) \leqslant \overline{\overline{L}}^{\mathsf{A}}, \end{cases}$$

где p_x — цена потребительского блага, p_L — цена времени.

Фирма максимизирует прибыль, решая следующую задачу:

$$\begin{cases} p_x x - p_L L \to \max\limits_{x, L \geqslant 0}, \\ x = f\left(L\right). \end{cases}$$

Тогда набор $\left(\widetilde{x}^{\mathsf{A}}, \widetilde{l}^{\mathsf{A}}, \widetilde{L}^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}, \widetilde{L}, \widetilde{p}_x, \widetilde{p}_L\right)$ является равновесием, если

(1) набор $\widetilde{x}^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{l}^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{L}^{\mathsf{A}}$ — решение задачи потребителя при ценах $\widetilde{p}_x$, $\widetilde{p}_L$ и равновесном уровне экстерналий $\widetilde{x}$;

(2) набор $\left(\widetilde{x}, \widetilde{L}\right)$ — решение задачи производителя при ценах $\widetilde{p}_x$, $\widetilde{p}_L$;

(3) выполнены балансовые ограничения: $\widetilde{x}^{\mathsf{A}} = \widetilde{x}$, $\widetilde{L} = \widetilde{L}^{\mathsf{A}}$.

(б) Для того чтобы ответить на вопрос, будет ли внутреннее равновесное распределение Парето-оптимальным, выведем дифференциальные характеристики внутренних равновесных и Парето-оптимальных распределений, а затем их сравним.

Напомним, что в общем случае внутренним распределением называется состояние экономики, в котором все блага всеми потребителями потребляются в положительном количестве. В этом разделе и в предыдущих в понятие внутреннего распределения также включили распределения, в которых выпуск и, соответственно, затраченный фирмой труд ненулевые. Заметим, однако, что в рассматриваемой задаче, как будет показано ниже, ненулевые затраты фактора и выпуск являются необходимым условием ненулевого потребления.

Начнем анализ с равновесных распределений. Знаки первой производной $\partial u^{\mathsf{A}}/\partial x^{\mathsf{A}} > 0$, $\partial u^{\mathsf{A}}/\partial l^{\mathsf{A}} > 0$, показывают, что благосостояние потребителя растет с увеличением потребления и досуга. Другими словами, предпочтения потребителя строго монотонны. Поскольку досуг увеличивает полезность потребителя, а работа увеличивает его доход, что дает возможность увеличивать потребление потребительского блага, то потребитель будет работать все время, которое у него остается от его начального запаса после вычета отдыха и времени, проведенного на больничном: $L^{\mathsf{A}} = \overline{\overline{L}}^{\mathsf{A}} - l^{\mathsf{A}} - S(\widetilde{x})$. Так как предпочтения потребителя строго монотонны, то бюджетное ограничение будет выполнено как равенство. Подставив в уравнение бюджетной линии выражение для L^{A} и выразив x^{A}, получим $x^{\mathsf{A}} = \left(p_L\left(\overline{\overline{L}}^{\mathsf{A}} - l^{\mathsf{A}} - S(\widetilde{x})\right) + \pi(p_x, p_L)\right)/p_x$. Подставив полученное выражение в целевую функцию, запишем задачу потребителя в следующем виде:

$$u^{\mathsf{A}}\left(l^{\mathsf{A}}, \frac{p_L\left(\overline{\overline{L}}^{\mathsf{A}} - l^{\mathsf{A}} - S(\widetilde{x})\right) + \pi(p_x, p_L)}{p_x}\right) \to \max_{l^{\mathsf{A}} \geqslant 0}.$$

Поскольку ищем внутренние распределения, то $l^{\mathsf{A}} > 0$, а значит, условие первого порядка задачи выполнено как равенство: $\dfrac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial l^{\mathsf{A}}} + \dfrac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x^{\mathsf{A}}}\left(-\dfrac{p_L}{p_x}\right) = 0$, откуда получим, что в равновесном распределении выполнено:

$$\frac{\partial u^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{l}^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}^{\mathsf{A}}\right)}{\partial x^{\mathsf{A}}} \Bigg/ \frac{\partial u^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{l}^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}^{\mathsf{A}}\right)}{\partial l^{\mathsf{A}}} = \frac{\widetilde{p}_x}{\widetilde{p}_L}. \tag{4.3}$$

Теперь рассмотрим задачу фирмы. Поскольку ограничение в задаче производителя выполнено как равенство, задача максимизации прибыли записывается в следующем виде:

$$p_x f(L) - p_L L \to \max_{L \geqslant 0}.$$

Поскольку мы рассматриваем только внутренние распределения, то $\widetilde{x}^{\mathsf{A}} > 0$. Из $\widetilde{x}^{\mathsf{A}} > 0$ и ограничения $\widetilde{x}^{\mathsf{A}} = \widetilde{x}$ следует, что $\widetilde{x} > 0$, а значит, $f(\widetilde{L}) > 0$, откуда $\widetilde{L} > 0$. Следовательно, условие первого порядка будет выполнено как равенство:

$$\widetilde{p}_x f'(\widetilde{L}) = \widetilde{p}_L,$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{f'(\widetilde{L})} = \frac{\widetilde{p}_x}{\widetilde{p}_L}. \tag{4.4}$$

Из (4.3) и (4.4) получим дифференциальную характеристику внутренних равновесных распределений:

$$\frac{\partial u^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{l}^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}^{\mathsf{A}}\right)}{\partial x^{\mathsf{A}}} \Bigg/ \frac{\partial u^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{l}^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}^{\mathsf{A}}\right)}{\partial l^{\mathsf{A}}} = \frac{1}{f'(\widetilde{L})}. \tag{4.5}$$

Теперь выведем дифференциальную характеристику внутренних Парето-оптимальных распределений. Если состояние экономики $\left(\overline{x}^{\mathsf{A}}, \overline{l}^{\mathsf{A}}, \overline{L}^{\mathsf{A}}, \overline{x}, \overline{L}\right)$ Парето-оптимально, то оно является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} u^{\mathsf{A}}\left(l^{\mathsf{A}}, x^{\mathsf{A}}\right) \to \max\limits_{x^{\mathsf{A}}, l^{\mathsf{A}}, L^{\mathsf{A}}, x, L \geqslant 0}, \\ x = f(L), \\ x^{\mathsf{A}} = x, \\ L = L^{\mathsf{A}}, \\ L^{\mathsf{A}} + l^{\mathsf{A}} + S(x) \leqslant \overline{\overline{L}}^{\mathsf{A}}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Ограничение $L^{\mathsf{A}} + l^{\mathsf{A}} + S(x) \leqslant \overline{\overline{L}}^{\mathsf{A}}$ в решении задачи выполнено как равенство. Если бы это было не так, то, увеличив L^{A}, можно было бы увеличить L, следовательно, увеличить выпуск x и, следовательно, x^{A}. Поскольку по условию $\partial u^{\mathsf{A}}/\partial x^{\mathsf{A}} > 0$, то увеличение x^{A} приведет к росту благосостояния потребителя.

Выразив l^{A}, x^{A}, L^{A} и x через L, запишем задачу в следующем виде:

$$u^{\mathsf{A}}\left(\overline{\overline{L}}^{\mathsf{A}} - L - S(f(L)),\, f(L)\right) \to \max_{L \geqslant 0}.$$

По условию распределение внутреннее, что означает, наряду с $l^{\mathsf{A}} > 0$, что $x^{\mathsf{A}} > 0$. Так как $x = x^{\mathsf{A}} > 0$ и, по условию, $f(0) = 0$, то в распределении, в котором $x^{\mathsf{A}} > 0$, выполнено $L > 0$. Следовательно, условие первого порядка выполнено как равенство: $\left(\partial u^{\mathsf{A}}/\partial l^{\mathsf{A}}\right)\left(-1 - S'(x) f'(L)\right) + \left(\partial u^{\mathsf{A}}/\partial x^{\mathsf{A}}\right) f'(L) = 0$, откуда после преобразований получим дифференциальную характеристику внутренних Парето-оптимальных распределений в следующем виде:

$$\frac{\partial u^{\mathsf{A}}\left(\overline{l}^{\mathsf{A}}, \overline{x}^{\mathsf{A}}\right)}{\partial x^{\mathsf{A}}} \bigg/ \frac{\partial u^{\mathsf{A}}\left(\overline{l}^{\mathsf{A}}, \overline{x}^{\mathsf{A}}\right)}{\partial l^{\mathsf{A}}} = \frac{1}{f'\left(\overline{L}\right)} + S'(\overline{x}). \tag{4.7}$$

Так как по условию $S'(x) > 0$, то во внутреннем Парето-оптимальном распределении должно выполняться

$$\frac{\partial u^{\mathsf{A}}\left(\overline{l}^{\mathsf{A}}, \overline{x}^{\mathsf{A}}\right)}{\partial x^{\mathsf{A}}} \bigg/ \frac{\partial u^{\mathsf{A}}\left(\overline{l}^{\mathsf{A}}, \overline{x}^{\mathsf{A}}\right)}{\partial l^{\mathsf{A}}} > \frac{1}{f'(L)},$$

тогда как в равновесии

$$\frac{\partial u^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{l}^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}^{\mathsf{A}}\right)}{\partial x^{\mathsf{A}}} \bigg/ \frac{\partial u^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{l}^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}^{\mathsf{A}}\right)}{\partial l^{\mathsf{A}}} = \frac{1}{f'(\widetilde{L})}.$$

Таким образом, равновесное распределение не удовлетворяет необходимому условию Парето-оптимальности, а значит, не будет Парето-оптимальным.

(в) Покажем, что произвольное внутреннее Парето-оптимальное распределение $\left(\overline{x}^{\mathsf{A}}, \overline{l}^{\mathsf{A}}, \overline{L}^{\mathsf{A}}, \overline{x}, \overline{L}\right)$ можно реализовать как равновесное в экономике с квотами.

Любое решение задачи (4.6) является Парето-оптимальным. Кроме того, в силу вогнутости $u^{\mathsf{A}}\left(l^{\mathsf{A}}, x^{\mathsf{A}}\right)$, $f\left(L\right)$ и выпуклости $S\left(x\right)$ условия первого порядка являются не только необходимыми, но и достаточными. Таким образом, если распределение удовлетворяет (4.7) и ограничениям задачи (4.6), то оно является Парето-оптимальным.

Проверим рациональность производителя. Поскольку внешнее воздействие создает фирма при производстве блага x, то квотируется производство блага x. Таким образом, задача фирмы выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} p_x x - p_L L \to \max\limits_{x,\, L \geqslant 0}, \\ x = f\left(L\right), \\ x = \overline{x}. \end{cases}$$

Фирма фактически выбирает только одну переменную. Таким образом, значение L может быть найдено из ограничения задачи. Так как в Парето-оптимуме $\overline{x} = f\left(\overline{L}\right)$, то при любых положительных ценах $\left(\overline{x}, \overline{L}\right)$ — решение задачи фирмы.

Проверим рациональность потребителя. Рассмотрим задачу потребителя:

$$\begin{cases} u^{\mathsf{A}}\left(l^{\mathsf{A}}, x^{\mathsf{A}}\right) \to \max\limits_{x^{\mathsf{A}},\, l^{\mathsf{A}},\, L^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ p_x x^{\mathsf{A}} \leqslant p_L L^{\mathsf{A}} + \pi\left(p_x, p_L\right), \\ L^{\mathsf{A}} + l^{\mathsf{A}} + S\left(\overline{x}\right) \leqslant \overline{\overline{L}}^{\mathsf{A}}. \end{cases}$$

Как уже отмечалось выше, в силу строгой монотонности предпочтений потребителя, бюджетное ограничение и второе ограничение в задаче в решении должны быть выполнены как равенства. Далее, поскольку в Парето-оптимальном распределении $\overline{x} = \overline{x}^{\mathsf{A}}$, $\overline{L} = \overline{L}^{\mathsf{A}}$, а прибыль фирмы $\pi\left(p_x, p_L\right) = p_x\overline{x} - p_L\overline{L}$, то Парето-оптимальное распределение удовлетворяет бюджетному ограничению как равенству при любых ценах p_x и p_L. Так как второе условие в задаче потребителя представляет собой одно из условий допустимости, Парето-оптимальное распределение удовлетворяет этому условию (в п. (б) показано, что условие выполнено как равенство).

Вывод условий первого порядка аналогичен п. (б), где была выведена дифференциальная характеристика внутреннего решения задачи и представлена в виде: $\dfrac{\partial u^{\mathsf{A}}(l^{\mathsf{A}},\, x^{\mathsf{A}})}{\partial x^{\mathsf{A}}} \Big/ \dfrac{\partial u^{\mathsf{A}}(l^{\mathsf{A}},\, x^{\mathsf{A}})}{\partial l^{\mathsf{A}}} = \dfrac{p_x}{p_L}$ (см. (4.3)). При каких ценах Парето-оптимальное распределение удовлетворяет этому условию?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, представим дифференциальную характеристику внутреннего Парето-оптимального распределения в следующем виде:

$$\frac{\partial u^{\mathsf{A}}\left(\bar{l}^{\mathsf{A}},\overline{x}^{\mathsf{A}}\right)}{\partial x^{\mathsf{A}}} \Big/ \frac{\partial u^{k}\left(\bar{l}^{\mathsf{A}},\overline{x}^{\mathsf{A}}\right)}{\partial l^{\mathsf{A}}} = \frac{1+S'\left(\overline{x}\right)f'\left(\overline{L}\right)}{f'\left(\overline{L}\right)}. \tag{4.8}$$

Сравнивая дифференциальную характеристику задачи потребителя (см. выше и (4.3)) и (4.8), заметим, что Парето-оптимальное распределение будет удовлетворять условию (4.3) при $p_L = f'\left(\overline{L}\right)$ и $p_x = 1 + S'\left(\overline{x}\right)f'\left(\overline{L}\right)$.

Поскольку целевая функция задачи потребителя $u^{\mathsf{A}}(l^{\mathsf{A}},\, x^{\mathsf{A}})$ вогнута, функция $S\left(x\right)$ выпукла, то условие первого порядка в задаче потребителя является не только необходимым, но и достаточным.

Таким образом, набор $\left(\overline{L}^{\mathsf{A}},\, \bar{l}^{\mathsf{A}},\, \overline{x}^{\mathsf{A}}\right)$ при ценах $p_L = f'\left(\overline{L}\right)$ и $p_x = 1 + S'\left(\overline{x}\right)f'\left(\overline{L}\right)$ является решением задачи потребителя. Поскольку Парето-оптимальное распределение допустимо, то выполнены условия сбалансированности рынков: $\overline{x} = \overline{x}^{\mathsf{A}}$, $\overline{L} = \overline{L}^{\mathsf{A}}$.

Таким образом, было показано, что Парето-оптимальное распределение $\left(\overline{x}^{\mathsf{A}}, \bar{l}^{\mathsf{A}},\, \overline{L}^{\mathsf{A}},\, \overline{x},\, \overline{L}\right)$ реализуемо как равновесное в экономике с квотами при ценах $p_L = f'\left(\overline{L}\right)$ и $p_x = 1 + S'\left(\overline{x}\right)f'\left(\overline{L}\right)$.

(г) Произвольное внутреннее $\left(\overline{x}^{\mathsf{A}}, \bar{l}^{\mathsf{A}},\, \overline{L}^{\mathsf{A}},\, \overline{x},\, \overline{L}\right)$ Парето-оптимальное распределение реализуемо в экономике с налогами как равновесное.

Начнем анализ с задачи фирмы. Поскольку с выпуском блага x связаны экстерналии, то налогом будет облагаться выпуск этого блага. Задача производителя в этом случае записывается следующим образом: $\begin{cases} (p_x - t)\,x - p_L L \to \max\limits_{x,\, L \geqslant 0}, \\ x = f\left(L\right). \end{cases}$

Ограничение задачи выполнено для $\left(\overline{x},\, \overline{L}\right)$. Упростив задачу, получим $(p_x - t)\, f(L) - p_L L \to \max\limits_{L \geqslant 0}$. В п. (б) было показано, что если потребление ненулевое, то в решении $L > 0$. Это позволяет записать условие первого порядка как равенство: $(p_x - t)\, f'(L) = p_L$, откуда следует, что

$$\frac{1}{f'(L)} = \frac{p_x - t}{p_L}. \tag{4.9}$$

При каких ценах и налоге внутреннее Парето-оптимальное распределение удовлетворяет полученной дифференциальной характеристике задачи производителя? Возможно, у читателя возникнут затруднения при ответе на этот вопрос в случае, если опыта в решении задач недостаточно. Для разрешения этого затруднения обратимся к анализу решения задачи потребителя. В рассматриваемой экономике доход потребителя, кроме стоимости труда и прибыли фирмы, формируется за счет поступления налогов. Таким образом, задача потребителя:

$$\begin{cases} u^{\mathsf{A}}(l^{\mathsf{A}}, x^{\mathsf{A}}) \to \max\limits_{x^{\mathsf{A}}, l^{\mathsf{A}}, L^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ p_x x^{\mathsf{A}} \leqslant p_L L^{\mathsf{A}} + \pi(p_x, p_L) + t\overline{x}, \\ L^{\mathsf{A}} + l^{\mathsf{A}} + S(\overline{x}) \leqslant \overline{\overline{L}}{}^{\mathsf{A}}. \end{cases}$$

Прибыль фирмы теперь $\pi(p_x, p_L) = (p_x - t)\,\overline{x} - p_L\overline{L}$ в предположении, что $(\overline{x}, \overline{L})$ — решение задачи фирмы (ведь этот факт еще не доказан). Так как для Парето-оптимального распределения выполнено $\overline{x} = \overline{x}^{\mathsf{A}}$, $\overline{L} = \overline{L}^{\mathsf{A}}$, то, как и раньше, набор $(\overline{L}^{\mathsf{A}}, \overline{l}^{\mathsf{A}}, \overline{x}^{\mathsf{A}})$ удовлетворяет бюджетному ограничению как равенству при любых ценах p_x и p_L. Второе ограничение также выполнено как равенство для $(\overline{l}^{\mathsf{A}}, \overline{x}^{\mathsf{A}})$. Следовательно, $(\overline{L}^{\mathsf{A}}, \overline{l}^{\mathsf{A}}, \overline{x}^{\mathsf{A}})$ удовлетворяет ограничениям задачи потребителя. По аналогии с предыдущими пунктами выведем дифференциальную характеристику внутреннего решения: $\dfrac{\partial u^{\mathsf{A}}(l^{\mathsf{A}}, x^{\mathsf{A}})}{\partial x^{\mathsf{A}}} \Big/ \dfrac{\partial u^{\mathsf{A}}(l^{\mathsf{A}}, x^{\mathsf{A}})}{\partial l^{\mathsf{A}}} = \dfrac{p_x}{p_L}$.

Как и в п. (в) Парето-оптимальное распределение будет удовлетворять дифференциальной характеристике задачи потребителя при $p_L = f'(\overline{L})$ и $p_x = 1 + S'(\overline{x})\, f'(\overline{L})$. Поскольку функция $u^{\mathsf{A}}(l^{\mathsf{A}}, x^{\mathsf{A}})$ вогнута, функция $S(x)$ выпукла, то условие первого порядка (а следовательно, и выведенная из него характеристика (4.3)) является не только необходимым условием, но и достаточным. Таким образом, $\left(\overline{L}^{\mathsf{A}}, \overline{l}^{\mathsf{A}}, \overline{x}^{\mathsf{A}}\right)$ — решение задачи потребителя.

Вернемся к задаче фирмы. При ценах $p_L = f'\left(\overline{L}\right)$ и $p_x = 1 + S'\left(\overline{x}\right) f'\left(\overline{L}\right)$ и налоге $t = S'\left(\overline{x}\right) f'\left(\overline{L}\right)$ Парето-оптимальное распределение удовлетворяет условию (4.9). Так как функция $f\left(L\right)$ вогнута, то условие первого порядка задачи фирмы является не только необходимым, но и достаточным. Теперь можем сделать вывод, что $\left(\overline{x}, \overline{L}\right)$ — решение задачи фирмы.

Как и в п. (в), выполнение условий сбалансированности следует из допустимости Парето-оптимального распределения.

Таким образом, внутреннее Парето-оптимальное распределение $\left(\overline{x}^{\mathsf{A}}, \overline{l}^{\mathsf{A}}, \overline{L}^{\mathsf{A}}, \overline{x}, \overline{L}\right)$ реализуемо как равновесное при ценах $p_L = f'\left(\overline{L}\right)$ и $p_x = 1 + S'\left(\overline{x}\right) f'\left(\overline{L}\right)$ и налоге $t = S'\left(\overline{x}\right) f'\left(\overline{L}\right)$.

(д) Так же, как и выше, в силу вогнутости $u^{\mathsf{A}}\left(l^{\mathsf{A}}, x^{\mathsf{A}}\right)$, $f\left(L\right)$ и выпуклости $S\left(x\right)$ дифференциальная характеристика (4.7) (она же, записанная в другом виде (4.8)) является не только необходимым условием, но и достаточным. Это означает, что если внутреннее распределение удовлетворяет (4.8) и ограничениям задачи (4.6), то оно является Парето-оптимальным распределением.

Покажем, что произвольное внутреннее Парето-оптимальное распределение в рассматриваемой экономике можно реализовать как равновесное в экономике с торговлей экстерналиями. Задача производителя в рассматриваемой экономике при торговле экстерналиями: $\begin{cases} \left(p_x - q\right) x - p_L L \to \max\limits_{x,\, L \geqslant 0}, \\ x = f\left(L\right), \end{cases}$

где q — цена экстерналии, создаваемой фирмой. Набор $\left(\overline{x}, \overline{L}\right)$ удовлетворяет ограничению задачи, поскольку Парето-оптимальное распределение допустимо, а значит, для него выполнено $\overline{x} = f\left(\overline{L}\right)$. По условию, в задании рассматриваются только внутренние распределения, что означает $\overline{x}^{\mathsf{A}} > 0$, $\overline{l}^{\mathsf{A}} > 0$. В п. (б) было показано, что если потребление ненулевое, то в решении задачи фирмы должно быть $L > 0$. Следовательно, условие первого порядка в решении выполнено как равенство: $\left(p_x - q\right) f'\left(L\right) - p_L = 0$. Преобразовав, получим

$$\frac{1}{f'\left(L\right)} = \frac{p_x - q}{p_L}. \tag{4.10}$$

Нетрудно заметить, что выражение (4.10) напоминает (4.9) из п. (г). Тогда, по аналогии с п. (г), при ценах $p_L = f'\left(\overline{L}\right)$ и $p_x = 1 + S'\left(\overline{x}\right) f'\left(\overline{L}\right)$ и цене экстерналии $q = S'\left(\overline{x}\right) f'\left(\overline{L}\right)$ Парето-оптимальное распределение удовлетворяет условию (4.10). И поскольку функция $f\left(L\right)$ вогнута, то условие первого порядка задачи фирмы является не только необходимым, но и достаточным, что позволяет сделать вывод, что $\left(\overline{x},\, \overline{L}\right)$ — решение задачи фирмы.

Теперь перейдем к анализу задачи потребителя. В рассматриваемом равновесии набор $\left(\overline{x}^{\mathsf{A}}, \overline{l}^{\mathsf{A}},\, \overline{L}^{\mathsf{A}},\, \overline{x}\right)$ должен быть решением задачи

$$\begin{cases} u^{\mathsf{A}}(l^{\mathsf{A}},\, x^{\mathsf{A}}) \to \max\limits_{x^{\mathsf{A}},\, l^{\mathsf{A}},\, L^{\mathsf{A}},\, x_{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ p_x x^{\mathsf{A}} \leqslant p_L L^{\mathsf{A}} + \pi\left(p_x, p_L\right) + q x_{\mathsf{A}}, \\ L^{\mathsf{A}} + l^{\mathsf{A}} + S\left(x_{\mathsf{A}}\right) \leqslant \overline{\overline{L}}^{\mathsf{A}}, \end{cases}$$

где x_{A} — переменная, обозначающая выбор потребителем объема влияющей на него экстерналии, для которой в равновесии должно быть выполнено условие $x_{\mathsf{A}} = x$.

Как и в пунктах, рассмотренных выше, набор $\left(\overline{x}^{\mathsf{A}},\, \overline{l}^{\mathsf{A}},\, \overline{L}^{\mathsf{A}},\right.$ $\left.x_{\mathsf{A}} = \overline{x}\right)$ удовлетворяет ограничению $L^{\mathsf{A}} + l^{\mathsf{A}} + S\left(x_{\mathsf{A}}\right) \leqslant \overline{\overline{L}}^{\mathsf{A}}$, так как Парето-оптимальное распределение допустимо, и это ограничение выполнено для Парето-оптимального распределения как равенство. В п. (б) показано также, что Парето-оптимальное распределение выполнено как равенство. Поскольку в Парето-оптимальном распределении выполнено $\overline{x} = \overline{x}^{\mathsf{A}}$, $\overline{L} = \overline{L}^{\mathsf{A}}$, прибыль фирмы $\pi\left(p_x,\, p_L\right) = \left(p_x - q\right)\overline{x} - p_L\overline{L}$ и, кроме того, $x_{\mathsf{A}} = \overline{x}$, то набор $\left(\overline{L}^{\mathsf{A}},\, \overline{l}^{\mathsf{A}},\, \overline{x}^{\mathsf{A}},\, x_{\mathsf{A}} = \overline{x}\right)$ удовлетворяет бюджетному ограничению как равенству при любых ценах p_x, p_L и q. Таким образом, в решении ограничения задачи должны быть выполнены как равенства. Воспользовавшись этим, преобразуем задачу к виду:

$$u^{\mathsf{A}}\left(l^{\mathsf{A}},\, \frac{p_L\left(\overline{\overline{L}}^{\mathsf{A}} - l^{\mathsf{A}} - S\left(x_{\mathsf{A}}\right)\right) + \pi\left(p_x,\, p_l\right) + q x_{\mathsf{A}}}{p_x}\right) \to \max_{l^{\mathsf{A}},\, x_{\mathsf{A}} \geqslant 0}.$$

В предположении, что решение задачи внутреннее, условия первого порядка записываются следующим образом:

$$\frac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial l^{\mathsf{A}}} + \frac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x^{\mathsf{A}}}\left(-\frac{p_L}{p_x}\right) = 0, \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x^{\mathsf{A}}}\left(\frac{p_L}{p_x}\left(-S'\left(x_{\mathsf{A}}\right)\right)+\frac{q}{p_x}\right)=0. \qquad (4.12)$$

Отметим, что в силу вогнутости целевой функции и выпуклости $S\left(x_{\mathsf{A}}\right)$, условия первого порядка в задаче потребителя являются не только необходимым условием, но и достаточным. Подставим цены $p_L=f'\left(\overline{L}\right)$ и $p_x=1+S'\left(\overline{x}\right)f'\left(\overline{L}\right)$ в (4.11) и преобразуем для наглядности к следующему виду:

$$\frac{\partial u^{\mathsf{A}}(l^{\mathsf{A}},\, x^{\mathsf{A}})}{\partial x^{\mathsf{A}}}\Big/\frac{\partial u^{\mathsf{A}}(l^{\mathsf{A}},\, x^{\mathsf{A}})}{\partial l^{\mathsf{A}}}=\frac{1+S'\left(\overline{x}\right)f'\left(\overline{L}\right)}{f'\left(\overline{L}\right)}.$$

Сравнивая полученное выражение с дифференциальной характеристикой внутреннего Парето-оптимального распределения (4.8), можем сказать, что внутреннее Парето-оптимальное распределение удовлетворяет этому условию.

Рассмотрим (4.12). По условию $\partial u^{\mathsf{A}}/\partial x^{\mathsf{A}}>0$, цены рассматриваем положительные, поэтому из (4.12) следует $q=p_L S'\left(x_{\mathsf{A}}\right)$. Так как $p_L=f'\left(\overline{L}\right)$ и $q=S'\left(\overline{x}\right)f'\left(\overline{L}\right)$, то $x_{\mathsf{A}}=\overline{x}$ удовлетворяет (4.12). Таким образом, набор $\left(\overline{L}^{\mathsf{A}},\, \overline{l}^{\mathsf{A}},\, \overline{x}^{\mathsf{A}},\, x_{\mathsf{A}}=\overline{x}\right)$ является решением задачи потребителя.

Балансовые ограничения также выполнены в силу допустимости Парето-оптимального распределения.

Следовательно, при ценах $p_L=f'\left(\overline{L}\right)$ и $p_x=1+S'\left(\overline{x}\right)f'\left(\overline{L}\right)$ и цене экстерналии $q=S'\left(\overline{x}\right)f'\left(\overline{L}\right)$ внутреннее Парето-оптимальное распределение $\left(\overline{x}^{\mathsf{A}}, \overline{l}^{\mathsf{A}},\, \overline{L}^{\mathsf{A}},\, \overline{x},\, \overline{L}\right)$ реализуемо как равновесное в экономике с торговлей экстерналиями.

4.6. Выведем дифференциальную характеристику Парето-оптимального распределения:

$$\begin{cases} u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}},\, x_1\right)\to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}},\, y_2,\, x_1\geqslant 0}, \\ x_1^{\mathsf{A}}+x_1=\omega_1^{\mathsf{A}}, \\ x_2=y_2+\omega_2^{\mathsf{A}}, \\ y_2=f\left(x_1,\, x_1^{\mathsf{A}}\right). \end{cases} \qquad (4.13)$$

Из первого ограничения задачи выразим x_1^{A}: $x_1^{\mathsf{A}}=\omega_1^{\mathsf{A}}-x_1$. Воспользовавшись вторым и третьим ограничениями и выражением для x_1^{A}, получим $x_2^{\mathsf{A}}=\omega_2^{\mathsf{A}}+f\left(x_1,\, \omega_1^{\mathsf{A}}-x_1\right)$. Подставив выражения для x_1^{A}, x_2^{A} в целевую функцию, приведем задачу к следующему виду:

$$u^{\mathsf{A}}\left(\omega_1^{\mathsf{A}} - x_1,\, \omega_2^{\mathsf{A}} + f\big(x_1,\, \omega_1^{\mathsf{A}} - x_1\big),\, x_1\right) \to \max_{0 \leqslant x_1 \leqslant \omega_1^{\mathsf{A}}}.$$

По условию предпочтения представимы дифференцируемой функцией, поэтому можем записать условие первого порядка. Условие первого порядка для $0 < x_1 < \omega_1^{\mathsf{A}}$:

$$-\frac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_1^{\mathsf{A}}} + \frac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_2^{\mathsf{A}}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1^{\mathsf{A}}}\right) + \frac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_1} = 0,$$

откуда получим $\dfrac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_2^{\mathsf{A}}}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_1} = \dfrac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_1^{\mathsf{A}}} + \dfrac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_2^{\mathsf{A}}}\,\dfrac{\partial f}{\partial x_1^{\mathsf{A}}}$.

Поскольку по условию сказано, что предпочтения потребителя строго монотонны, а функция полезности дифференцируема, то $\partial u^{\mathsf{A}}/\partial x_2^{\mathsf{A}} > 0$, а значит, поскольку $\partial u^{\mathsf{A}}/\partial x_2^{\mathsf{A}} \neq 0$, разделим левую и правую часть полученного выражения на $\partial u^{\mathsf{A}}/\partial x_2^{\mathsf{A}}$. Таким образом, дифференциальная характеристика внутреннего Парето-оптимального распределения может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_1^{\mathsf{A}}}\Big/\frac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_2^{\mathsf{A}}} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1^{\mathsf{A}}} + \frac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial u^{\mathsf{A}}}{\partial x_2^{\mathsf{A}}}. \tag{4.14}$$

Обратим внимание, что в случае $\partial f/\partial x_1^{\mathsf{A}} = 0$ и $\partial u^{\mathsf{A}}/\partial x_1 = 0$, т. е. в случае, когда в экономике отсутствуют экстерналии, полученная дифференциальная характеристика — это равенство предельной нормы замещения предельному продукту, что, как известно из предыдущей главы, является дифференциальной характеристикой Парето-оптимального распределения, в котором все компоненты положительны, в экономике без экстерналий (см. задачу 3.60).

Так как функция полезности и производственная функция вогнуты, условие первого порядка и, следовательно, выведенная дифференциальная характеристика (4.14) являются не только необходимым условием, но и достаточным. Таким образом, если распределение, в котором все компоненты положительны, удовлетворяет условию (4.14) и ограничениям задачи (4.13), то оно является Парето-оптимальным. Обозначим такое распределение $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_2^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_1,\, \overline{y}_2\right)$.

Для того чтобы ответить на вопрос, можно ли реализовать распределение $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}, \overline{x}_1, \overline{y}_2\right)$ как равновесное, нужно проверить, выполнены ли для него условия уравновешенности рынков, существуют ли цены, при которых набор $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ — решение задачи потребителя, и $(\overline{x}_1, \overline{y}_2)$ — решение задачи фирмы.

Условия уравновешенности рынков выполнены, поскольку они совпадают с условиями допустимости — первым и вторым ограничениями в задаче (4.13).

Существуют ли цены p_1 и p_2 такие, что решением задачи фирмы: $\begin{cases} p_2 y_2 - p_1 x_1 \to \max\limits_{x_1, y_2 \geqslant 0}, \\ y_2 = f\left(x_1, \overline{x}_1^{\mathsf{A}}\right), \end{cases}$ является набор $(\overline{x}_1, \overline{y}_2)$?

Решение $(\overline{x}_1, \overline{y}_2)$ удовлетворяет ограничению задачи фирмы, поскольку $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}, \overline{x}_1, \overline{y}_2\right)$ — оптимальное по Парето распределение, а значит, допустимо (для того чтобы решение задачи (4.13) было допустимо, были введены соответствующие ограничения). Одно из условий допустимости совпадает с ограничением в задаче фирмы. Запишем задачу фирмы в виде: $p_2 f\left(x_1, \overline{x}_1^{\mathsf{A}}\right) - p_1 x_1 \to \max\limits_{x_1 \geqslant 0}$. Условие первого порядка для $x_1 > 0$: $p_2(\partial f\left(x_1, \overline{x}_1^{\mathsf{A}}\right)/\partial x_1) - p_1 = 0$, откуда $\partial f\left(x_1, \overline{x}_1^{\mathsf{A}}\right)/\partial x_1 = p_1/p_2$. Набор $(\overline{x}_1, \overline{y}_2)$ удовлетворяет условию первого порядка при отношении цен $p_1/p_2 = \partial f\left(\overline{x}_1, \overline{x}_1^{\mathsf{A}}\right)/\partial x_1$. Так как производственная функция вогнута, условие первого порядка является не только необходимым, но и достаточным.

Проверим, является ли набор $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}}, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ решением задачи потребителя

$$\begin{cases} u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}, \overline{x}_1\right) \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}} \geqslant 0}, \\ p_1 x_1^{\mathsf{A}} + p_2 x_2^{\mathsf{A}} \leqslant p_1 \omega_1^{\mathsf{A}} + p_2 \omega_2^{\mathsf{A}} + \pi\left(p_1, p_2\right) \end{cases}$$

при ценах $p_1/p_2 = \partial f\left(\overline{x}_1, \overline{x}_1^{\mathsf{A}}\right)/\partial x_1$. Так как предпочтения строго монотонны, решение задачи должно удовлетворять бюджетному ограничению как равенству. Парето-оптимальное распределение удовлетворяет этому условию. Так как рассматривается распределение, в котором все компоненты положительны, а значит, и $x_2^{\mathsf{A}} > 0$, выразим x_2^{A} из бюджетного ограничения: $x_2^{\mathsf{A}} = \left(p_1 \omega_1^{\mathsf{A}} + p_2 \omega_2^{\mathsf{A}} + \pi\left(p_1, p_2\right) - p_1 x_1^{\mathsf{A}}\right)/p_2$ и подставим в целевую функцию задачи:

$$u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, \frac{p_1\omega_1^{\mathsf{A}} + p_2\omega_2^{\mathsf{A}} + \pi(p_1,\, p_2) - p_1x_1^{\mathsf{A}}}{p_2},\, \overline{x}_1^{\mathsf{A}}\right) \to \max_{x_1^{\mathsf{A}} \geqslant 0}.$$

Условие первого порядка для внутреннего решения может быть записано в виде: $\dfrac{\partial u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_1^{\mathsf{A}}\right)}{\partial x_1^{\mathsf{A}}} \Big/ \dfrac{\partial u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_1^{\mathsf{A}}\right)}{\partial x_2^{\mathsf{A}}} = \dfrac{p_1}{p_2}$. Подставив отношение цен $p_1/p_2 = \partial f\left(\overline{x}_1,\, \overline{x}_1^{\mathsf{A}}\right)/\partial x_1$, получим

$$\frac{\partial u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_1^{\mathsf{A}}\right)}{\partial x_1^{\mathsf{A}}} \Big/ \frac{\partial u^{\mathsf{A}}\left(x_1^{\mathsf{A}},\, x_2^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_1^{\mathsf{A}}\right)}{\partial x_2^{\mathsf{A}}} = \frac{\partial f\left(\overline{x}_1,\, \overline{x}_1^{\mathsf{A}}\right)}{\partial x_1}. \qquad (4.15)$$

Может ли набор $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ удовлетворять соотношению (4.15)? Сравнивая (4.15) с дифференциальной характеристикой Парето-оптимального распределения (4.14) можем сделать вывод, что $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ удовлетворяет (4.15) при

$$\frac{\partial f\left(\overline{x}_1,\, \overline{x}_1^{\mathsf{A}}\right)}{\partial x_1^{\mathsf{A}}} = \frac{\partial u^{\mathsf{A}}\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_2^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_1\right)}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial u^{\mathsf{A}}\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_2^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_1\right)}{\partial x_2^{\mathsf{A}}}. \qquad (4.16)$$

Поскольку для вогнутой функции полезности условие первого порядка является не только необходимым, но и достаточным, то, в случае выполнения (4.16), $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ является решением задачи потребителя при ценах $p_1/p_2 = \partial f\left(\overline{x}_1,\, \overline{x}_1^{\mathsf{A}}\right)/\partial x_1$.

Таким образом, было показано, что в рассматриваемой экономике при выполнении (4.16) Парето-оптимальное распределение, компоненты которого положительны, реализуемо как равновесное.

Если же условие (4.16) не выполнено, то при ценах $p_1/p_2 = \partial f\left(\overline{x}_1,\, \overline{x}_1^{\mathsf{A}}\right)/\partial x_1$ набор $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ не удовлетворяет условию первого порядка (в общем случае необходимому условию), а значит, не является решением задачи потребителя. Следовательно, при нарушении (4.16) невозможно реализовать $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_2^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_1,\, \overline{y}_2\right)$ как равновесное.

4.7. (б) В экономике задачи допустимое распределение $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_1^{\mathsf{B}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$ называется Парето-оптимальным, если не существует другого допустимого распределения $\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_2^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_1^{\mathsf{B}},\, \overline{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$, такого, что $u^{\mathsf{A}}\left(\overline{x}_1^{\mathsf{A}},\, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right) \geqslant u^{\mathsf{A}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$, $u^{\mathsf{B}}\left(\overline{x}_1^{\mathsf{B}},\, \overline{x}_2^{\mathsf{B}},\, \overline{x}_2^{\mathsf{A}}\right) \geqslant u^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{B}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{B}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ и хотя бы одно из неравенств выполнено как строгое. Другими словами, если экономика находится в Парето-оптимальном состоянии, то допустимым образом невозможно увеличить благосостояния хотя бы одного из потребителей, не ухудшая при этом благосостояние другого.

В задаче 3.6 гл. 3 сформулировано утверждение, согласно которому распределение $\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_1^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{B}}\right)$ тогда и только тогда оптимально по Парето, когда является решением следующих двух задач:

$$\begin{cases} v^{\mathsf{A}}\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) + x_1^{\mathsf{A}} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}, x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}} \geqslant 0}, \\ v^{\mathsf{B}}\left(x_2^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) + x_1^{\mathsf{B}} \geqslant u^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right), \\ x_1^{\mathsf{A}} + x_1^{\mathsf{B}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}, \\ x_2^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{B}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^{\mathsf{B}}\left(x_2^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) + x_1^{\mathsf{B}} \to \max\limits_{x_1^{\mathsf{A}}, x_2^{\mathsf{A}}, x_1^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{B}} \geqslant 0}, \\ v^{\mathsf{A}}\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) + x_1^{\mathsf{A}} \geqslant u^{\mathsf{A}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right), \\ x_1^{\mathsf{A}} + x_1^{\mathsf{B}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}, \\ x_2^{\mathsf{A}} + x_2^{\mathsf{B}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}. \end{cases}$$

Так как в рассматриваемой экономике предпочтения потребителей строго монотонны (полезность растет по потреблению каждого блага), то достаточно рассмотреть одну из задач, например, первую. Ограничение по полезности B выполнено как равенство. Тогда, так как $x_1^{\mathsf{A}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}} - x_1^{\mathsf{B}}$, то $x_1^{\mathsf{A}} = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}} + v^{\mathsf{B}}\left(x_2^{\mathsf{B}}, x_2^{\mathsf{A}}\right) - u^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$. Воспользовавшись тем, что $x_2^{\mathsf{B}} = \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}} - x_2^{\mathsf{A}}$, запишем задачу в следующем виде:

$$v^{\mathsf{A}}\left(x_2^{\mathsf{A}}\right) + \underbrace{\omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}} + v^{\mathsf{B}}\Big(\underbrace{\omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}} - x_2^{\mathsf{A}}}_{x_2^{\mathsf{B}}}, x_2^{\mathsf{A}}\Big) - u^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)}_{x_1^{\mathsf{A}}} \to$$

$$\to \max_{0 \leqslant x_2^{\mathsf{A}} \leqslant \omega_2^{\mathsf{A}} + \omega_2^{\mathsf{B}}}.$$

Тогда условие первого порядка для внутреннего решения

$$\left(v^{\mathsf{A}}\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)\right)' - \frac{\partial v^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)}{\partial x_2^{\mathsf{B}}} + \frac{\partial v^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)}{\partial x_2^{\mathsf{A}}} = 0. \tag{4.17}$$

Это и есть дифференциальная характеристика внутренних оптимальных по Парето распределений. В оптимальном по Парето распределении предельная частная выгода A от потребления второго блага $\left(v^{\mathsf{A}}\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)\right)'$ плюс предельная выгода B от внешнего эффекта $\partial v^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)/\partial x_2^{\mathsf{B}}$ должна быть равна частной предельной выгоде потребителя B от потребления второго блага. Так как при предположении о поведении функций $v^k(\cdot)$, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$, целевая функция вогнута, то условие первого порядка (4.17) является не только необходимым, но и достаточным.

4.8. (а) На рис. 4.1, *а* приведены кривая частного спроса (дана), кривая предложения, кривая общественного предельного выигрыша (S*M*B, или кривая общественной предельной готовности платить за товар, потребление которого «несет» экстерналию). На рис. 4.1, *б* приведены кривая частного спроса (дана), кривая предложения, кривая общественного предельного выигрыша (S*M*B, или кривая общественной предельной готовности платить за товар, потребление которого «несет» экстерналию).

(б) На рис. 4.1, *а* имеет место отрицательная экстерналия в потреблении, поскольку кривая S*M*B лежит ниже кривой спроса, т. е. предельная максимальная готовность потребителей платить за данный товар, несущий внешний эффект (экстерналию), в действительности ниже. На рис. 4.1, *б* изображена ситуация положительного внешнего эффекта в потреблениии, поскольку кривая S*M*B лежит выше кривой спроса, т. е. предельная максимальная готовность потребителей платить за данный товар, несущий экстерналию, в действительности выше.

(в) На рис. 4.1, *а* Q_1 — эффективный объем, Q_2 — равновесный объем. На рис. 4.1, *б* наоборот.

(г) На рис. 4.1, *а* ABD — безвозвратные потери. Увеличивая выпуск, относительно эффективного, можно заметить на рисунке, что общественная готовность заплатить за каждую дополнительную единицу выпуска оказывается меньше предельных издержек производства этой единицы (вплоть до равновесной). Следовательно, площадь указанного треугольника — потери, связанные с перепроизводством товара, несущего экстерналию. На рис. 4.1, *б* ABD — безвозвратные потери. Увеличивая выпуск, относительно равновесного, можно заметить на рисунке, что общественная готовность заплатить за каждую дополнительную единицу выпуска оказывается выше предельных издержек производства этой единицы (вплоть до эффектвной). Следовательно, площадь указанного треугольника — потери, связанные с недопроизводством товара, несущего экстерналию.

(д) Для ситуации на рис. 4.1, a требуется введение налога по ставке t на потребление товара, несущего экстерналию. Графическая иллюстрация этой политики с указанием ставки налога представлена на рис. 4.7.

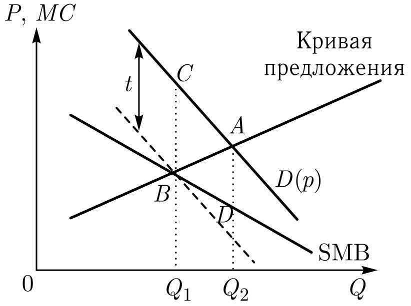

Рис. 4.7. Введение налога позволяет в равновесии реализовать оптимальный по Парето уровень потребления блага Q

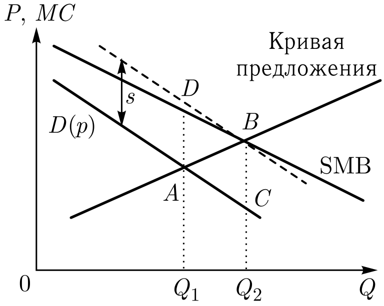

Рис. 4.8. Введение субсидии в экономике с экстерналиями

Для ситуации, изображенной на рис. 4.1, $б$, требуется введение субсидии по ставке s на потребление товара, несущего экстерналию. Графическая иллюстрация этой политики с указанием ставки субсидии приведена на рис. 4.8.

4.9. (а) Поскольку $\partial TC\,(x, y)/\partial y < 0$, имеет место положительный внешний эффект. Возможные причины снижения издержек фермеров: работа лопастей позволяет повысить интенсивность опыления цветков, шум и вращение лопастей отпугивает птиц и мелких животных, которые истребляют урожай.

(б) В условии сказано, что предельная готовность граждан заплатить за дополнительную единицу $700 - y$. Это означает, что обратная функция спроса $p = 700 - y$. Поскольку фирму обязывают устанавливать цену на уровне предельных издержек, т. е. вести себя конкурентно, оптимальный положительный объем ветряков определяется условием равенства предельного дохода компании ее предельным издержкам, т. е. $p = \partial TC\,(\widetilde{y})/\partial y$, или в данном случае $700 - \widetilde{y} = 100 + 5\,\widetilde{y}$. Откуда находим, что $\widetilde{y} = 100$.

Используемое условие первого порядка является необходимым и достаточным в силу выпуклости функции издержек.

(в) Эффективное количество (положительное) ветряков будет определяться условием равенства величины предельной готовности заплатить за дополнительную единицу $(700 - y)$ величине общественных предельных издержек $(SMC\,(y))$.

Заметим, что если это условие при положительном объеме выпуска не выполнено, то всегда можно изменить выпуск товара, порождающего внешнее воздействие, увеличивая совокупный выигрыш общества. Например, если предельная готовность заплатить за дополнительную единицу товара, влекущего экстерналию, больше, чем общественные предельные издержки, то выпуск дополнительной единицы этого товара обошелся бы обществу дешевле, чем его выигрыш от получения этой дополнительной единицы, что в предположении роста благосостояния от увеличения потребления данного товара (квазилинейность предпочтений) увеличило бы его благосостояние. Так как $SMC\,(y) = MC_Э\,(y) + MC_K\,(y) = 100 + 2\,y$, из $700 - y = SMC\,(y)$ находим эффективное количество ветряков $\widehat{y} = 200$.

Следует отметить, что тот же результат мы могли бы получить, максимизируя совокупную прибыль компании и фермерского хозяйства, т. е. интернализируя внешнее воздействие.

Поскольку имеет место положительный внешний эффект, в равновесии без учета внешнего воздействия производится меньший объем товара, чем в эффективном распределении.

(г) Задача энергетической компании при субсидировании производства имеет вид: $py - TC_Э\,(y) + sy \to \max\limits_{y \geqslant 0}$. Необходимое и достаточное, в силу выпуклости функции издержек, условие первого порядка для внутреннего решения: $700 - y = 100 + 5\,y - s$.

Поскольку вводимая потоварная субсидия должна стимулировать энергетическую компанию производить эффективный объем производства, то $s = 6\,\widehat{y} - 600 = 600$.

Ситуация проиллюстрирована на рис. 4.9.

4.10. (а) Фирма, производящая сталь, решает следующую задачу:

$$p_s s - s^2\,(\theta - x)^2 - s^2 \to \max_{s,\,x \geqslant 0}. \tag{4.18}$$

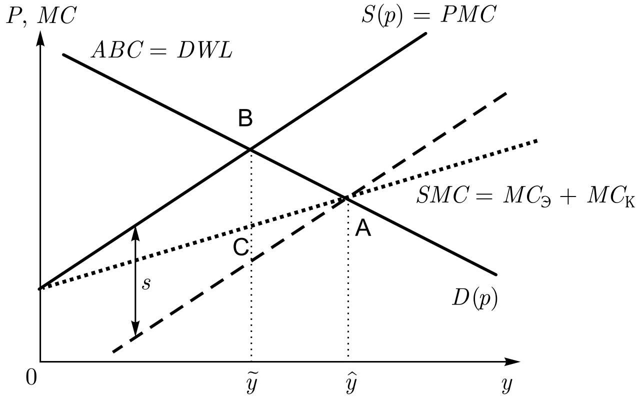

Рис. 4.9. Введение субсидии позволяет реализовать в равновесии оптимальный уровень установки ветряков

Задача рыбохозяйства имеет вид

$$p_f f - f^2 x^2 \to \max_{f \geqslant 0}. \tag{4.19}$$

Таким образом, из задачи (4.18), при предположении внутреннего решения, находим

$$s = \frac{p_s}{2(\theta - x)^2 + 2}, \qquad x^* = \theta,$$

откуда получаем оптимальный выпуск стали: $s^* = p_s/2$.

Из задачи (4.19), учитывая, что $x^* = \theta$, получим оптимальный уровень производства рыбы: $f^* = p_f/(2\theta^2)$.

(б) Здесь предполагается «слияние» обеих фирм с целью интернализации экстерналии. Тогда оптимальные уровни производства стали, рыбы и загрязнения определяются из решения следующей задачи:

$$p_s s + p_f f - s^2 (\theta - x)^2 - s^2 - f^2 x^2 \to \max_{s,\, x,\, f \geqslant 0}.$$

Условия первого порядка этой задачи, при предположении внутреннего решения, представляют собой систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$s = \frac{p_s}{2(\theta - x)^2 + 2}, \qquad f = \frac{p_f}{2x^2}, \qquad x = \frac{s^2}{s^2 + f^2}\,\theta.$$

Из приведенной системы нетрудно найти оптимальные уровни производства стали, рыбы и загрязнения. И даже не решая ее, мы можем сказать, что в данном случае уровень загрязнения будет ниже при любом положительном уровне производства стали и рыбы.

Принимая решение о производстве в п. (а), сталелитейное предприятие не учитывало дополнительные издержки, наносимые им рыбохозяйству. Таким образом, совокупные общественные предельные издержки были выше, чем частные предельные издержки сталелитейного предприятия, в результате чего экстерналия порождает неэффективность распределения ресурсов в данной экономике, где решение принимается лишь на основе максимизации частной прибыли, и влечет больший, чем эффективный, выпуск продукта, несущего внешний эффект.

(в) Покажем, что с помощью введения налога на экстерналии можно достичь общественно оптимального уровня. Трудность реализации этой меры состоит в том, что для этого требуется информация, которую правительству трудно получить, поскольку налог зависит от спецификации функции издержек и т. д.

Найдем налог t. Фирма, производящая сталь, решает следующую задачу:

$$p_s s - tx - s^2(\theta - x)^2 - s^2 \to \max_{s,\, x \geqslant 0}.$$

Из условий первого порядка, записанных как равенство, поскольку решение внутреннее, получим

$$s = \frac{p_s}{2(\theta - x)^2 + 2}, \qquad x = \theta - \frac{t}{2s^2}.$$

Тогда, принимая во внимание, что при налогах Пигу достижим оптимальный уровень загрязнения, найдем налог: $t = (2\,\theta s^2 f^2)/(s^2 + f^2)$.

(г) Пусть q — это цена, которую рыбохозяйство платит за единицу загрязнения. Тогда задачи фирм преобразуются следующим образом:

задача фирмы, производящей сталь:

$$p_s s + q(\overline{x} - x) - s^2(\theta - x)^2 - s^2 \to \max_{s,\, x \geqslant 0};$$

задача рыбохозяйства:

$$p_f f - f^2 x^2 - q(\overline{x} - x) \to \max_{x,\, f \geqslant 0}.$$

Тогда из условий первого порядка, в предположении внутреннего решения, для сталепроизводства $x = \theta - q/(2\,s^2)$, а из условий первого порядка для рыбохозяйства, записанных на равенство: $q = 2\,f^2 x$, откуда $q = (2\,\theta s^2 f^2)/(s^2 + f^2)$ и $x = (\theta s^2)/(s^2 + f^2)$.

Таким образом, в отсутствии транзакционных издержек можем получить оптимальное распределение, поддерживающие права собственности, что согласуется с теоремой Коуза.

Наличие экстерналии при отсутствии рынка этого товара порождало неэффективность в распределении ресурсов. Устранение неполноты рынков может приводить к устранению неэффективности.

4.11. Задача каждого преподавателя $m^k y\Big(\sum\limits_{j=1}^{N} m^j\Big) - cm^k \to$ $\to \max\limits_{m^k \geqslant 0}$. Целевая функция может быть преобразована к следующему виду:

$$\frac{m^k}{M} My\Big(\sum_{j=1}^{N} m^j\Big) - cm^k = \frac{m^k}{\sum\limits_{j=1}^{N} m^j}\, g\Big(\sum_{j=1}^{N} m^j\Big) - cm^k.$$

Условие первого порядка для внутреннего решения $\widetilde{m}^k > 0$ задачи преподавателя: $\dfrac{\widetilde{M} - \widetilde{m}^k}{\widetilde{M}^2} g(\widetilde{M}) + \dfrac{m^k}{M} g'(\widetilde{M}) = c$. Просуммировав по всем преподавателям, получим: $\dfrac{N-1}{\widetilde{M}} g(\widetilde{M}) + g'(\widetilde{M}) = Nc$. Так как для строго вогнутой функции $g(M)/M > g'(M)$, то из полученного выражения следует $g'(\widetilde{M}) < c$. Целевая функция заведующего кафедрой: $g\,(M) - cM$. Условие первого порядка для $M^* > 0$: $g'\,(M^*) = c$. Поскольку $g''(M) < 0$, то $g'(M)$ убывает. Следовательно, $\widetilde{M} > M^*$.

4.15. (а) Приведем пример Парето-улучшения. Так как по условию распределение внутреннее, то потребители потребляют общественное благо. Поскольку изначально в экономике общественного блага нет, значит, оно производится в заданном состоянии экономики (выпуск ненулевой). Заметим, что $MRS^{\mathsf{A}}_{2,1}\,(\widehat{x}^{\mathsf{A}}_1,\, \widehat{x}_2) + MRS^{\mathsf{B}}_{2,1}\,(\widehat{x}^{\mathsf{B}}_1,\, \widehat{x}_2) < (1/f'\,(\widehat{x}_1)) = c'\,(\widehat{y}_2)$. Это означает, что для компенсации потери малой единицы общественного (второго) блага потребителям необходимо меньшее количество малых единиц частного (первого) блага (в рассматриваемой задаче — это шесть малых единиц), чем высвободится при уменьшении на одну малую единицу производства общественного блага (так как $f'(\widehat{x}_1) = 1/7$, то уменьшение выпуска на одну малую единицу приведет к высвобождению семи малых единиц частного блага). Тогда уменьшим производство общественного (второго) блага на одну малую единицу. Чтобы компенсировать потерю малой единицы общественного блага (без изменения полезности), отдадим потребителю A три малых единицы частного (по условию $MRS_{21}^{\mathsf{A}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2\right) = 3$), а потребителю B — четыре малых единицы частного блага. Чтобы компенсировать потерю малой единицы общественного блага без изменения полезности, потребителю B было достаточно получить три малых единицы частного блага, так как $MRS_{21}^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2\right) = 3$. Поскольку B получил четыре малых единицы частного блага и его полезность растет с увеличением потребления каждого блага, его благосостояние возрастет. Таким образом, Парето-улучшение построено.

(б) Пример Парето-улучшения. В рассматриваемом распределении $MRS_{21}^{\mathsf{A}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}}, \widehat{x}_2\right) + MRS_{21}^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_1^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2\right) > 1/f'(\widehat{x}_1)$. Это означает, что ради одной малой единицы общественного блага потребители в сумме готовы отказаться от большего количества малых единиц частного блага, чем необходимо для производства малой единицы общественного. Поскольку распределение внутреннее, то в рассматриваемом распределении потребление индивидов ненулевое. Следовательно, можно отнять у потребителя A две малых единицы частного (первого) блага, у потребителя B — пять малых единиц частного (первого) блага и передать их в производство. Семь малых единиц частного блага позволят увеличить выпуск на одну малую единицу общественного блага. Поскольку $\partial u^k/\partial x_1^k > 0$, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$, такое перераспределение приведет к увеличению полезности потребителей A и B.

4.21. Для предпочтений, представимых квазилинейной функцией полезности $u^k\left(x_1^k, x_2\right) = v^k(x_2) + x_1^k$, выполнено $MRS_{21}^k = \left(v^k(x_2)\right)'$. Это означает, что в условии заданы предельные полезности потребителей A и B, соответственно, $\left(v^{\mathsf{A}}(x_2)\right)' = 9 - x_2$ и $\left(v^{\mathsf{B}}(x_2)\right)' = 7 - x_2$. Предельные затраты частного блага $\left((y_2)^2\right)' = 2y_2$. Уравнение Самуэльсона для рассматриваемой экономики $9 - x_2 + 7 - x_2 = 2\,y_2$. Воспользовавшись условиями допустимости (Парето-оптимальные распределения допустимы)

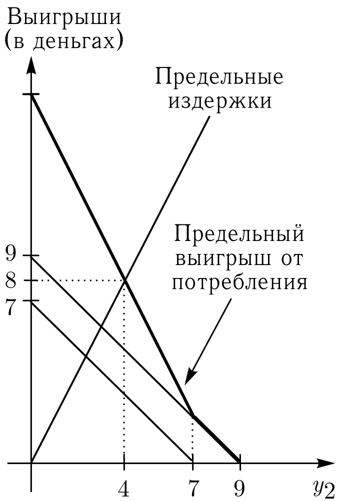

Рис. 4.10. Парето-оптимальный объем производства общественного блага

получим характеристику внутренних Парето-оптимальных распределений: ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 84$, $\widetilde{x}_2 = 4$, $\widetilde{x}_1 = 16$, $\widetilde{y}_2 = 4$). См. рис. 4.10.

4.25. (а) Равновесие с добровольным финансированием — это набор ($\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$, $\widetilde{t}^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{t}^{\mathsf{B}}$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}$, $\widetilde{x}_2$, $\widetilde{y}_2$, $\widetilde{x}_1$) такой, что

1) $\widetilde{x}_2$, $\widetilde{t}^k$, $\widetilde{x}_1^k$ — решение задачи потребителя k:

$$\begin{cases} v^k(x_2) + x_1^k \to \max\limits_{x_2,\, t^k,\, x_1^k \geqslant 0}, \\ \widetilde{p}_1 x_1^k + t^k \leqslant \widetilde{p}_1 \omega_1^k + \theta^k \pi(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2), \\ t^k + \widetilde{t}^{-k} = \widetilde{p}_2 x_2, \end{cases}$$

где $\pi(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$ — прибыль фирмы, θ^k — доля потребителя k в прибыли фирмы, t^k — добровольный взнос потребителя k на покупку общественного блага, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$.

2) $\widetilde{y}_2$, $\widetilde{x}_1$ — решение задачи фирмы

$$\begin{cases} \widetilde{p}_2 y_2 - \widetilde{p}_1 x_1 \to \max\limits_{y_2,\, x_1 \geqslant 0}, \\ y_2 = f(x_1), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \widetilde{p}_2 y_2 - \widetilde{p}_1 x_1 \to \max\limits_{y_2,\, x_1 \geqslant 0}, \\ c(y_2) = x_1. \end{cases}$$

3) $\widetilde{x}_2 = \widetilde{y}_2$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} + \widetilde{x}_1 = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}$.

(б) Запишем задачу фирмы в следующем виде:

$$\begin{cases} p_2 y_2 - p_1 x_1 \to \max\limits_{y_2,\, x_1 \geqslant 0}, \\ c(y_2) = x_1. \end{cases}$$

Отсюда $p_2 y_2 - p_1 c(y_2) \to \max\limits_{y_2 \geqslant 0}$. Условие первого порядка: $p_2 - p_1 c'(y_2) \leqslant 0$ и $= 0$, если $y_2 > 0$. Для рассматриваемой задачи $c(y_2) = y_2^2$. Тогда $c'(y_2) = 2y_2$. А значит, условие первого порядка для задачи фирмы: $p_2 - 2p_1 y_2 \leqslant 0$, $= 0$, если $y_2 > 0$. После преобразования это условие может быть записано в следующем виде: $p_2/p_1 \leqslant 2y_2$, $= 2y_2$, если $y_2 > 0$.

(в) Запишем задачу потребителя k:

$$\begin{cases} v^k(x_2) + x_1^k \to \max\limits_{x_2,\, t^k,\, x_1^k \geqslant 0}, \\ \widetilde{p}_1 x_1^k + t^k \leqslant \widetilde{p}_1 \omega_1^k + \theta^k \pi\left(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2\right), \\ t^k + \widetilde{t}^{-k} = \widetilde{p}_2 x_2. \end{cases}$$

Так как полезность растет по объему потребления каждого блага (предпочтения строго монотонны), то в решении задачи бюджетное ограничение выполнено как равенство. Выразим x_2 из $t^k + \widetilde{t}^{-k} = \widetilde{p}_2 x_2$ и x_1^k из $\widetilde{p}_1 x_1^k + t^k = \widetilde{p}_1 \omega^k + \theta^k \pi\left(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2\right)$ (при предположении, что в решении $x_1^k > 0$) и подставим в целевую функцию:

$$v^k\Big(\frac{t^k + \widetilde{t}^{-k}}{p_2}\Big) + \frac{p_1 \omega_1^k + \theta^k \pi\left(p_1, p_2\right) - t^k}{p_1} \to \max_{t^k \geqslant 0}.$$

Условие первого порядка для рассматриваемой задачи: $\left(v^k\Big(\dfrac{t^k + \widetilde{t}^{-k}}{p_2}\Big)\right)' \dfrac{1}{p_2} - \dfrac{1}{p_1} \leqslant 0$ и будет $= 0$, если $t^k > 0$. Заметим, что так как $x_2 = (t^k + \widetilde{t}^{-k})/\widetilde{p}_2$, то условие первого порядка может быть записано, как $\big(v^k\left(x_2\right)\big)'(1/p_2) - 1/p_1 \leqslant 0$ и будет $= 0$, если $t^k > 0$. После преобразования условие первого порядка для задачи потребителя k: $\big(v^k\left(x_2\right)\big)' \leqslant p_2/p_1$, $= p_2/p_1$, если $t^k > 0$. Таким образом, для задачи потребителя A условие первого порядка: $4/x_2 \leqslant p_2/p_1$, $= p_2/p_1$, если $t^{\mathsf{A}} > 0$, и для задачи потребителя B: $8/x_2 \leqslant p_2/p_1$, $= p_2/p_1$, если $t^{\mathsf{B}} > 0$.

(г) Предположим, потребитель A будет финансировать покупку общественного блага. Это означает, что $t^{\mathsf{A}} > 0$. Тогда для $\widetilde{x}_2$ условие первого порядка для задачи потребителя A будет выполнено как равенство: $8/\widetilde{x}_2 = p_2/p_1$. Но для этого же значения $\widetilde{x}_2$ должно быть выполнено условие первого порядка задачи потребителя B, т. е. $8/\widetilde{x}_2 \leqslant p_2/p_1$. Следовательно, $8/\widetilde{x}_2 \leqslant 4/\widetilde{x}_2 = p_2/p_1$. Получили противоречие. Тогда потребитель A не финансирует покупку общественного блага, т. е. его взнос равен нулю: $\widetilde{t}^{\mathsf{A}} = 0$.

Таким образом, если покупка общественного блага финансируется, то она финансируется потребителем B. Если B выберет $t^{\mathsf{B}} = 0$, то покупка общественного блага никем не будет финансироваться, т. е. $x_2 = 0$. Но в нуле значения полезностей потребителей стремятся к минус бесконечности, поэтому у каждого есть стимул сделать положительный взнос при нулевом взносе контрагента. Следовательно, если равновесие существует, то $\widetilde{t}^{\mathsf{B}} > 0$ и $\widetilde{x}_2 > 0$.

Ситуацию можно представить графически, воспользовавшись терминологией теории игр. Заметим, что в равновесии взнос одного потребителя является лучшим ответом на равновесный взнос другого потребителя. Таким образом, рассматриваемая концепция равновесия соответствует равновесию по Нэшу. Из условия первого порядка k-го потребителя

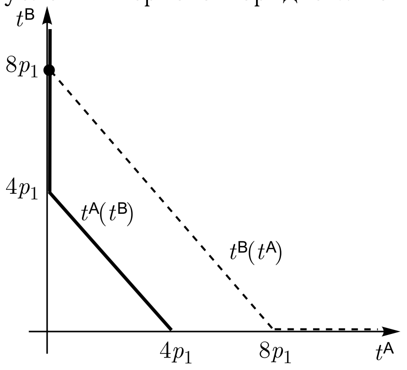

Рис. 4.11. Функции наилучшего ответа и равновесие

$$\left(v^k\left(\frac{t^k + \widetilde{t}^{-k}}{p_2}\right)\right)' \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} \leqslant 0$$

и будет $= 0$, если $t^k > 0$ выведем функции наилучшего ответа k-го потребителя. Для потребителя A: $t^{\mathsf{A}} =$
$$= \begin{cases} 4\,p_1 - t^{\mathsf{B}}, & t^{\mathsf{B}} < 4\,p_1, \\ 0, & t^{\mathsf{B}} \geqslant 4\,p_1. \end{cases}$$
Для потребителя B:
$$t^{\mathsf{B}} = \begin{cases} 4\,p_1 - t^{\mathsf{A}}, & t^{\mathsf{A}} < 8\,p_1, \\ 0, & t^{\mathsf{A}} \geqslant 8\,p_1. \end{cases}$$
Схематично (без соблюдения масштаба) изобразим функции наилучшего ответа на рис. 4.11.

Функции наилучшего ответа пересекаются в точке ($t^{\mathsf{A}} = 0$, $t^{\mathsf{B}} = 8\,p_1$). Таким образом, в равновесии общественное благо финансирует только потребитель B и его взнос $t^{\mathsf{B}} = 8\,p_1$.

(д) Далее продолжим решать задачу, не ссылаясь на результат, полученный из графического анализа.

Так как потребитель B финансирует покупку общественного блага, то $\widetilde{t}^{\mathsf{B}} > 0$, а значит, условие первого порядка выполнено как равенство $8/x_2 = p_2/p_1$.

С другой стороны, так как в равновесии $\widetilde{x}_2 > 0$ и $\widetilde{x}_2 = \widetilde{y}_2$, то $\widetilde{y}_2 > 0$, а значит, условие первого порядка задачи фирмы также выполнено как равенство: $p_2 - 2\,p_1 y_2 = 0$. После преобразования это условие может быть записано в следующем виде: $p_2/p_1 = 2y_2$. Кроме того, так как в равновесии $\widetilde{x}_2 = \widetilde{y}_2$, то $p_2/p_1 = 2x_2$.

Таким образом, из условий первого порядка задачи фирмы и задачи потребителя B получим $8/x_2 = 2x_2$, откуда $\widetilde{x}_2 = 2$. Тогда $\widetilde{y}_2 = 2$, $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 4$. Для удобства дальнейших вычислений введем нормировку $\widetilde{p}_1 = 1$, тогда $\widetilde{p}_2 = 4$. Прибыль фирмы равна 4.

Остальные параметры равновесия: $\widetilde{t}^{\mathsf{A}} = 0$, $\widetilde{t}^{\mathsf{B}} = 8$ (заметим, что этот результат совпадает с результатом графического анализа, в ходе которого получили $t^{\mathsf{B}} = 8\,p_1$), $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 123$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 21 - 8 = 13$.

(e) Найденное равновесное распределение не является Парето-оптимальным. Условие, которому удовлетворяет равновесное распределение $8/x_2 = 2x_2$ — это $\left(v^{\mathsf{B}}\left(\widetilde{x}_2\right)\right)' = c'\left(\widetilde{y}_2\right)$. Так как $\left(v^{\mathsf{A}}\left(x_2\right)\right)' > 0$, то $\left(v^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{x}_2\right)\right)' + \left(v^{\mathsf{B}}\left(\widetilde{x}_2\right)\right)' > c'\left(\widetilde{y}_2\right)$, тогда как внутреннее Парето-оптимальное распределение удовлетворяет уравнению Самуэльсона: $\left(v^{\mathsf{A}}\left(\widehat{x}_2\right)\right)' + \left(v^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_2\right)\right)' = c'\left(\widehat{y}_2\right)$. Уравнение Самуэльсона для рассматриваемой задачи: $4/x_2 + 8/x_2 = 2y_2$. Так как предпочтения потребителей выпуклы и строго монотонны, производственная функция вогнута, то уравнение Самуэльсона является не только необходимым условием для внутреннего Парето-оптимального распределения, но и достаточным. Поскольку Парето-оптимальное распределение допустимо, то $x_2 = y_2$, откуда $4/x_2 + 8/x_2 = 2x_2$, а следовательно, в Парето-оптимальном распределении $\widehat{x}_2 = \widehat{y}_2 = \sqrt{6}$. Далее, так как $c\left(y_2\right) = \left(y_2\right)^2$, получим $\widehat{x}_1 = 6$. Из условия допустимости $x_1^{\mathsf{A}} + x_1^{\mathsf{B}} + x_1 = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}$ находим $\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} + \widehat{x}_1^{\mathsf{B}} = 134$. Таким образом, множество внутренних Парето-оптимальных распределений $(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} + \widehat{x}_1^{\mathsf{B}} = 134,\ \widehat{x}_2 = \widehat{y}_2 = \sqrt{6}\,,\ \widehat{x}_1 = 6)$.

4.27. (a) Так как все компоненты распределения положительны, а первоначально в экономике нет второго блага, то в распределении благо производится. Следовательно, в равновесии с добровольным финансированием, по крайней мере, кто-то из потребителей профинансировал покупку этого блага, а фирма произвела его. Тогда, по крайней мере, для одного из потребителей должно быть выполнено условие $MRS_{21}^k = c'\left(y_2\right)$, где k — потребитель, финансирующий покупку общественного блага. Так как в распределении, о котором идет речь в условии, указанное равенство не выполнено, то распределение не может быть равновесным.

4.45. (a) Равновесие по Линдалю — это набор $(\widetilde{p}_1,\ \widetilde{p}_2,\ \widetilde{q}^{\mathsf{A}},\ \widetilde{q}^{\mathsf{B}},\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}},\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}},\ \widetilde{x}_2,\ \widetilde{y}_2,\ \widetilde{x}_1)$ такой, что

1) $\widetilde{x}_1^k, \widetilde{x}_2$ — решение задачи потребителя k:

$$\begin{cases} u^k\left(x_1^k,\ x_2\right) \to \max\limits_{x_1^k, x_2 \geqslant 0}, \\ \widetilde{p}_1 x_1^k + \widetilde{q}^k x_2 \leqslant \widetilde{p}_1 \omega_1^k + \theta^k \pi\left(\widetilde{p}_1,\ \widetilde{p}_2\right), \end{cases}$$

где $\pi(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$ — прибыль фирмы, q^k — индивидуализированная цена общественного блага (цена Линдаля), θ^k — доля потребителя k в прибыли фирмы, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$;

2) $\widetilde{y}_2$, $\widetilde{x}_1$ — решение задачи фирмы

$$\begin{cases} \widetilde{p}_2 y_2 - \widetilde{p}_1 x_1 \to \max\limits_{y_2,\, x_1 \geqslant 0}, \\ y_2 = f(x_1), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \widetilde{p}_2 y_2 - \widetilde{p}_1 x_1 \to \max\limits_{y_2,\, x_1 \geqslant 0}, \\ c(y_2) = x_1; \end{cases}$$

3) $\widetilde{x}_2 = \widetilde{y}_2$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} + \widetilde{x}_1 = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}$;

4) $\widetilde{q}^{\mathsf{A}} + \widetilde{q}^{\mathsf{B}} = \widetilde{p}_2$.

(б) Задача фирмы, производящей из единицы частного блага единицу общественного: $\begin{cases} \widetilde{p}_2 y_2 - \widetilde{p}_1 x_1 \to \max\limits_{x_1,\, y_2 \geqslant 0}, \\ x_1 = y_2. \end{cases}$

Решение этой задачи:

$$y_2(p_1, p_2) = \begin{cases} 0, & \widetilde{p}_2 < \widetilde{p}_1, \\ [0, +\infty), & \widetilde{p}_1 = \widetilde{p}_2, \\ \infty, & \widetilde{p}_2 > \widetilde{p}_2, \end{cases} \qquad x_1(p_1, p_2) = y_2(p_1, p_2).$$

При всех ценах, при которых существует решение задачи фирмы ($\widetilde{p}_2 \leqslant \widetilde{p}_1$), прибыль фирмы равна нулю.

Задача потребителя k: $\begin{cases} x_1^k x_2^k \to \max\limits_{x_1^k,\, x_2^k \geqslant 0}, \\ \widetilde{p}_1 x_1^k + \widetilde{q}^k x_2^k \leqslant \widetilde{p}_1 \omega_1^k + \theta^k \pi(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2), \end{cases}$

где x_2^k — переменная, обозначающая количество общественного блага, на которое предъявляет спрос потребитель k.

Предпочтения потребителей представимы функциями полезности Кобба–Дугласа. Если потребление хотя бы одного из благ — нулевое, то полезность равна нулю. Но тогда, при положительном доходе, потребители предъявляют ненулевой спрос на оба блага. Так как в равновесии $\widetilde{x}_2 = \widetilde{y}_2$ и так как $\widetilde{x}_2 > 0$, то $\widetilde{y}_2 > 0$. Фирма выбирает $y_2 > 0$ только при ценах $\widetilde{p}_1 = \widetilde{p}_2$, а значит, в равновесии, если оно существует, цены равны.

Решение задачи потребителя k при положительных ценах:

$$x_1^k = \frac{\widetilde{p}_1 \omega_1^k + \overbrace{\theta^k \pi(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)}^{=0}}{2\widetilde{p}_1}, \quad x_2^k = \frac{\widetilde{p}_1 \omega_1^k + \overbrace{\theta^k \pi(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)}^{=0}}{2\widetilde{q}^k}.$$

Таким образом, $x_1^{\mathsf{A}} = \widetilde{p}_1 \omega_1^{\mathsf{A}}/(2\widetilde{p}_1) = 10$ и $x_1^{\mathsf{B}} = \widetilde{p}_1 \omega_1^{\mathsf{B}}/(2\widetilde{p}_1) = 40$.

В равновесии по Линдалю должно быть выполнено $x_2^{\mathsf{A}} = x_2^{\mathsf{B}}$. Следовательно, $\widetilde{p}_1 \omega_1^{\mathsf{A}}/(2\widetilde{q}^{\mathsf{A}}) = \widetilde{p}_1 \omega_1^{\mathsf{B}}/(2\widetilde{q}^{\mathsf{B}})$, откуда $\widetilde{q}^{\mathsf{B}} =$

$= \widetilde{q}^{\mathsf{A}}\omega_1^{\mathsf{B}}/(\omega_1^{\mathsf{A}}) = 4q^{\mathsf{A}}$. Кроме того, индивидуальные цены должны удовлетворять следующему условию: $\widetilde{q}^{\mathsf{A}} + \widetilde{q}^{\mathsf{B}} = \widetilde{p}_2$. Тогда $\widetilde{q}^{\mathsf{A}} + 4\widetilde{q}^{\mathsf{A}} = \widetilde{p}_2$, откуда найдем $\widetilde{q}^{\mathsf{A}} = (1/5)\,\widetilde{p}_2$, а значит $\widetilde{q}^{\mathsf{B}} = (4/5)\,\widetilde{p}_2$. Тогда, воспользовавшись тем, что $\widetilde{p}_1 = \widetilde{p}_2$, из $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{p}_1\omega_1^{\mathsf{A}}/(2\widetilde{q}^{\mathsf{A}})$ и $\widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = \widetilde{p}_1\omega_1^{\mathsf{B}}/(2\widetilde{q}^{\mathsf{B}})$ получим $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 50$.

Следовательно, $\widetilde{x}_2 = \widetilde{y}_2 = 50$. Тогда затраты частного блага на производство общественного $\widetilde{x}_1 = 50$. Баланс по частному благу выполнен: $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} + \widetilde{x}_1 = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}$.

Таким образом, равновесие по Линдалю: $(\widetilde{p}_1 = \widetilde{p}_2,\ \widetilde{q}^{\mathsf{A}} = (1/5)\,\widetilde{p}_2,\ \widetilde{q}^{\mathsf{B}} = (4/5)\,\widetilde{p}_2,\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 10,\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 40,\ \widetilde{x}_2 = 50,\ \widetilde{x}_1 = 50,\ \widetilde{y}_2 = 50)$.

4.6. Ответы и подсказки

4.3. (а) Экстерналия в производстве оказывает положительное воздействие на потребителя. **(б)** $\widehat{x}_1^{\mathsf{A}} = 609/625$, $\widehat{x}_2^{\mathsf{A}} = 4/25$, $\widehat{x}_1 = 16/625$, $\widehat{y}_2 = 4/25$. **(в)** Не существует внутреннего равновесного распределения. **(г)** Парето-оптимальное распределение реализуемо как равновесное в экономике с квотами, субсидией, торговлей экстерналиями. **4.7. (а)** A оказывает положительное воздействие на B. **(в)** $\big(v^{\mathsf{A}}(\widehat{x}_2^{\mathsf{A}})\big)' = \partial v^{\mathsf{B}}(\widehat{x}_2^{\mathsf{B}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}})/\partial x_2^{\mathsf{B}}$. **(г)** *Подсказка*: при реализации распределения как равновесного в экономике с двумя потребителями, как и в экономике без экстерналий (см. гл. 3, например, задачу 3.38 (к)), вводятся трансферты $T^k = p_1\widehat{x}_1^k + p_2\widehat{x}_2^k - p_1\omega_1^k - p_2\,\omega_2^k$, где $\big(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_1^{\mathsf{B}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{B}}\big)$ — оптимальное по Парето распределение, $k = \{\mathsf{A},\, \mathsf{B}\}$. Квота вводится на потребление второго блага потребителем A, $x_2^{\mathsf{A}} = \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}$. При введении квоты задача потребителя A сводится к поиску объема потребления первого блага. В силу строгой монотонности предпочтений A (функция полезности растет по каждому благу) решение задачи потребителя удовлетворяет бюджетному ограничению как равенству. При указанных трансфертах при любых ценах набор $\big(\widehat{x}_1^{\mathsf{A}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\big)$ удовлетворяет уравнению бюджетной линии. Набор $\big(\widehat{x}_1^{\mathsf{B}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{B}}\big)$ является решением задачи потребителя B при ценах $\widetilde{p}_2 = \partial v^{\mathsf{B}}(\widehat{x}_2^{\mathsf{B}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}})/\partial x_2^{\mathsf{B}}$ и $\widetilde{p}_1 = 1$. Парето-оптимальное распределение реализуемо как равновесное в экономике с квотами. Парето-оптимальное распределение реализуемо как равновесное в экономике с субсидией на экстерналии при ценах $\widetilde{p}_2 = \partial v^{\mathsf{B}}(\widehat{x}_2^{\mathsf{B}},\, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}})/\partial x_2^{\mathsf{B}}$, $\widetilde{p}_1 = 1$ и величине субсидии $s = \partial v^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)/\partial x_2^{\mathsf{A}}$. Парето-оптимальное распределение реализуемо как равновесное в экономике с торговлей экстерналиями при $\widetilde{p}_2 = \partial v^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)/\partial x_2^{\mathsf{B}}$, $\widetilde{p}_1 = 1$ и цене экстерналии $\widetilde{q} = \partial v^{\mathsf{B}}\left(\widehat{x}_2^{\mathsf{B}}, \widehat{x}_2^{\mathsf{A}}\right)/\partial x_2^{\mathsf{A}}$. **4.12**. Нет, не существуют, поскольку не выполнено условие $\widetilde{x}_1 = (\widetilde{y}_2)^{3/2}$. **4.13.** Количество потребляемого общественного блага соответствует точке пересечения $\left(v^{\mathsf{A}}(x_2)\right)' + \left(v^{\mathsf{B}}(x_2)\right)'$ и $c'(y_2)$. **4.14.** *Подсказка*: предположите, что для внутреннего оптимального по Парето распределения выполнено $MRS_{21}^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2\right) + MRS_{21}^{\mathsf{B}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2\right) < c'(\widetilde{y}_2)$, а затем $MRS_{21}^{\mathsf{A}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2\right) + MRS_{21}^{\mathsf{B}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2\right) > c'(\widetilde{y}_2)$ и получите противоречие, предложив вариант построения улучшения по Парето. См. решение задачи 4.15. **4.16.** *Подсказки*. **(а)** При использовании понятия предельной нормы замещения и бесконечной делимости товаров оперировать можно лишь бесконечно малыми величинами. **(б)** 1) $MRS_{G,\,x^k}^k = -\left.\dfrac{\Delta x}{\Delta G}\right|_{U=\text{const},\ \Delta G\to 0}$. 2) Общественное благо потребляется всеми агентами в одинаковом количестве. **4.17.** Множество внутренних Парето-оптимальных распределений $(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 4,\ \widetilde{x}_2 = 2,\ \widetilde{x}_1 = 4,\ \widetilde{y}_2 = 2)$. **4.18.** $\overline{x}_2 < \widetilde{x}_2$. **4.19.** $0 < \lambda < 1$. **4.20.** **(а)** Заданное распределение не является Парето-оптимальным. Заметим, что предпочтения потребителей представимы функциями полезности Кобба–Дугласа, а значит, в распределении, в котором в экономике не производится общественное благо, полезности всех потребителей равны нулю. Пример Парето-улучшения $(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 139,\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 90,\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{C}} = 70,\ \widetilde{x}_2 = 1,\ \widetilde{x}_1 = 1,\ \widetilde{y}_2 = 1)$. **(б)** Заданное распределение не является Парето-оптимальным. Пример Парето-улучшения $(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 0,\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 0,\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{C}} = 150,\ \widetilde{x}_2 = 150,\ \widetilde{x}_1 = 150,\ \widetilde{y}_2 = 150)$. **4.22.** Сельсовет должен знать предельную выгоду всех жителей села и предельные издержки установки фонарей. Если количество фонарей эффективно по Парето, то суммарная предельная выгода должна быть равна предельным издержкам. **4.23.** Да. **4.24.** Искомый объем соответствует точке пересечения $\left(v^{\mathsf{B}}(x_2)\right)'$ и $c'(y_2)$. **4.26.** **(а)** $\dfrac{\partial u^k\left(x_1^k, x_2\right)}{\partial x_2}\bigg/\dfrac{\partial u^k\left(x_1^k, x_2\right)}{\partial x_1^k} \leqslant p_2/p_1$ и $= p_2/p_1$, если $t^k > 0$, где t^k — добровольный взнос потребителя k на покупку общественного блага, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$. **(б)** $\dfrac{\partial u^{k_1}\left(x_1^{k_1}, x_2\right)}{\partial x_2}\bigg/\dfrac{\partial u^{k_1}\left(x_1^{k_1}, x_2\right)}{\partial x_1^{k_1}} = c'(y_2)$, где k_1 — потребитель, чей добровольный взнос на покупку общественного блага положителен, $c(y_2)$ — функция, обратная к производственной (количество частного блага, необходимое для производства y_2 единиц общественного блага). **4.27. (б)** Заданное распределение может быть равновесным в равновесии с добровольным финансированием при ценах $p_2/p_1 = 5$. **4.28. (а)** Потребитель A. **(б)** В равновесии недопроизводство общественного блага по сравнению с Парето-оптимумом. **4.29.** Так как для внутреннего равновесного распределения выполнено $\dfrac{\partial u^{k_1}\left(x_1^{k_1}, x_2\right)}{\partial x_2}\Big/\dfrac{\partial u^{k_1}\left(x_1^{k_1}, x_2\right)}{\partial x_1^{k_1}} = c'(y_2)$, а в Парето-оптимуме выполнено уравнение Самуэльсона $\sum\limits_{k=\{\mathsf{A},\mathsf{B},\mathsf{C}\}} \dfrac{\partial u^k\left(x_1^k, x_2\right)}{\partial x_2}\Big/\dfrac{\partial u^k\left(x_1^k, x_2\right)}{\partial x_1^k} = c'(y_2)$, то равновесное распределение и Парето-оптимум могут совпадать, только если $\sum\limits_{k\neq k_1} \dfrac{\partial u^k\left(x_1^k, x_2\right)}{\partial x_2}\Big/\dfrac{\partial u^k\left(x_1^k, x_2\right)}{\partial x_1^k} = 0$. Однако при введенных предпосылках последнее соотношение не выполнено. Таким образом, равновесное распределение не является Парето-оптимальным. Альтернативным способом доказательства является построение Парето-улучшения. **4.30. (а)** Во всех Парето-оптимальных распределениях выполнено $x_1^{\mathsf{A}} + x_1^{\mathsf{B}} + x_1 = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}$, $x_2 = y_2 = x_1$. Существуют три вида Парето-оптимальных распределений: (1) $x_1^{\mathsf{A}} < x_2 = x_1^{\mathsf{B}}$; (2) $x_1^{\mathsf{B}} < x_2 = x_1^{\mathsf{A}}$; (3) $x_1^{\mathsf{A}} = x_2 = x_1^{\mathsf{B}}$. **(б)** $(\widetilde{x}_2 = \widetilde{y}_2 = \widetilde{x}_1 = \widetilde{t}^{\mathsf{B}} = 40, \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 20, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 40, \widetilde{t}^{\mathsf{A}} = 0, \widetilde{p}_1 = \widetilde{p}_2 = 1)$. **(в)** Равновесное распределение Парето-оптимально. Однако никакого противоречия с результатом, полученным в задаче 4.29, нет. В рассматриваемой экономике функции полезности недифференцируемы. А значит, одна из предпосылок утверждения, сформулированного в задаче 4.29, нарушена. **4.31. (а)** Не существует значений y_2, при которых распределение допустимо. **(б)** $(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 2,\ \widetilde{x}_2 = 9,\ \widetilde{x}_1 = 18,\ \widetilde{y}_2 = 9)$. **(в)** $(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 2,\ \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 10,\ \widetilde{x}_2 = 4,\ \widetilde{x}_1 = 8,\ \widetilde{y}_2 = 4,\ \widetilde{t}^{\mathsf{A}} = 4\widetilde{p}_2,\ \widetilde{t}^{\mathsf{B}} = 0,\ \widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 2)$. **(в)** Равновесное распределение не является Парето-оптимальным. Чтобы ответить на вопрос, достаточно убедиться, что выполнены все предпосылки, сформулированные в задаче 4.29. Альтернативный способ — удостовериться, что равновесное распределение, в котором все компоненты положительны, не удовлетворяет уравнению Самуэльсона (необходимой дифференциальной характеристике внутренних Парето-оптимальных распределений). **(д)** ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 2$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{A}} = 4$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 8$, $\widetilde{x}_2^{\mathsf{B}} = 1$, $\widetilde{x}_1 = 10$, $\widetilde{y}_2 = 5$, $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 2$). **(е)** По первой теореме благосостояния в экономике, где предпочтения всех потребителей монотонны, равновесное распределение является Парето-оптимальным. **4.32. (а)** $1 \leqslant p_2/p_1 \leqslant 16$. **(б)** В рассматриваемой экономике не существует равновесия, в котором общественное благо потребляется в положительном количестве. **4.33.** Указанный набор является равновесным при ценах $\widetilde{p}_1 = 1$, $\widetilde{p}_2 = 3/2$. **4.34. (а)** $0 < \alpha < 12$. Равновесие ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 34$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 28$, $\widetilde{x}_2 = 4$, $\widetilde{x}_1 = 8$, $\widetilde{y}_2 = 4$, $\widetilde{t}^{\mathsf{A}} = 0$, $\widetilde{t}^{\mathsf{B}} = 4\widetilde{p}_2$, $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 3$). **(б)** При $\alpha = 12$ существует множество равновесий, в которых оба потребителя финансируют покупку общественного блага в равновесии с добровольным финансированием: ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 34 - \widetilde{t}^{\mathsf{A}}/p_1$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 40 - \widetilde{t}^{\mathsf{B}}/p_1$, $\widetilde{x}_2 = 4$, $\widetilde{x}_1 = 8$, $\widetilde{y}_2 = 4$, $\widetilde{t}^{\mathsf{A}} + \widetilde{t}^{\mathsf{B}} = 4\widetilde{p}_2$, $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 3$). Заметим, что при $\alpha = 12$ существует равновесие, в котором покупку общественного блага финансирует только A, и равновесие, в котором финансирует покупку только B. **4.35.** $\widetilde{y}_2 = (1-\alpha)\,\omega/(\alpha K + 1 - \alpha)$. С ростом K объем производства падает. **4.36.** $\omega_1^{\mathsf{A}} \leqslant \alpha\omega_1^{\mathsf{B}}$. **4.37. (а)** ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 3$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 27$, $\widetilde{x}_2 = 10$, $\widetilde{x}_1 = 30$, $\widetilde{y}_2 = 10$, $\widetilde{t}^{\mathsf{A}} = 9$, $\widetilde{t}^{\mathsf{B}} = 81$, $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 3$). **(б)** $\omega_1^{\mathsf{B}} \geqslant 114$. **4.38.** ($\widetilde{p}_2 = \widetilde{p}_1$, $\widetilde{x}_2 = \widetilde{x}_1 = \widetilde{y}_2 = \omega_1^{\mathsf{A}} + \omega_1^{\mathsf{B}}$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 0$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 0$, $\widetilde{t}^{\mathsf{A}} = \omega_1^{\mathsf{A}}\widetilde{p}_1$, $\widetilde{t}^{\mathsf{B}} = \omega_1^{\mathsf{B}}\widetilde{p}_1$). **4.39.** ($\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 32$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 59$, $\widetilde{x}_2 = 3$, $\widetilde{x}_1 = 9$, $\widetilde{y}_2 = 3$, $\widetilde{t}^{\mathsf{A}} = 3\widetilde{p}_2$, $\widetilde{t}^{\mathsf{B}} = 0$, $\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 6$). **4.40. (а)** 4 га. *Подсказка*: в квазилинейной экономике обычно цены нормируются таким образом, что цена блага, входящего в полезность линейно, равна единице. В этом случае совокупные издержки — это не только величина затрат на производство фонарей, но и количество единиц агрегированного блага, от которых придется отказаться, чтобы очистить x га территории. **(б)** $\sqrt[3]{25}$ га. Доля района «Ясенево» составляет 1. **4.41. (а)** Парето-эффективным вариантом будет тот, при котором совокупный потребительский излишек окажется максимальным:

$$CS_{\text{б/ф}} = 20\,000 + 15\,000 + 20\,000 - 45\,000 = 10\,000,$$
$$CS_{\text{с/ф}} = 25\,000 + 20\,000 + 30\,000 - 70\,000 = 5\,000.$$

Таким образом, приобретение альпийской горки без фонтана является Парето-оптимальным вариантом. **(б)** Не существует равновесия с добровольным финансированием в данной задаче, в котором финансирование осуществлялось бы лишь одной семьей. *Подсказка*: поскольку товар дискретный, то в данном случае существует бесконечное множество равновесий с добровольным финансированием. Например, возможным равновесием может быть обустройство альпийской горки без фонтана, где каждая семья внесет по 15 000 руб. Или обустройство горки с фонтаном, где семьи Ивановых и Петровых заплатят по 2000 руб., а семья Смирновых 30 000 руб. **4.42.** Да. **4.43.** Выпуск общественного блага в равновесии Линдаля соответствует точке пересечения кривых $\left(v^{\mathsf{A}}(x_2)\right)' + \left(v^{\mathsf{B}}(x_2)\right)'$ и $c'(y_2)$. **4.44.** 4. **4.46.** *Подсказка*: во внутреннем решении задачи потребителя k выполнено $MRS_{21}^{k} = q^k/p_1$, где q^k — цена Линдаля, $k = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$, и $q^{\mathsf{A}} + q^{\mathsf{B}} = p_2$. Для внутреннего решения задачи фирмы выполнено $p_2/p_1 = c'(y_2)$. Дифференциальная характеристика внутреннего Парето-оптимального распределения — уравнение Самуэльсона. **4.47.** ($\widetilde{p}_2/\widetilde{p}_1 = 8$, $\widetilde{q}^{\mathsf{A}} = 5\widetilde{p}_1$, $\widetilde{q}^{\mathsf{B}} = 3\widetilde{p}_1$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 38$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 46$, $\widetilde{x}_2 = 4$, $\widetilde{x}_1 = 16$, $\widetilde{y}_2 = 4$). **4.48.** **(а)** $\widetilde{p}_1 = 1$, $\widetilde{p}_2 = 3$, $\widetilde{q}^{\mathsf{A}} = 2$, $\widetilde{q}^{\mathsf{B}} = 1$, $\widetilde{x}_2 = \widetilde{y}_2 = 4$, $\widetilde{x}_1 = 8$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 2$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 10$. **(б)** Заданное распределение реализуемо как равновесное по Линдалю в экономике с трансфертами при ценах $\widetilde{p}_1 = 1$, $\widetilde{p}_2 = 3$, $\widetilde{q}^{\mathsf{A}} = 2$, $\widetilde{q}^{\mathsf{B}} = 1$ и трансфертах $T^{\mathsf{A}} = 3$ и $T^{\mathsf{B}} = -3$. **4.49.** Цена Линдаля для потребителя А находится из условия $\widetilde{q}^{\mathsf{A}} = \widetilde{p}_2 - \widetilde{q}^{\mathsf{B}} - \widetilde{q}^{\mathsf{C}} = 2$. Количество производимого общественного блага $\widetilde{y}_2 = 2$ найдем из условия первого порядка задачи фирмы $\widetilde{p}_2 = \widetilde{p}_1 c'(y_2)$. Тогда потребляемое количество общественного блага $\widetilde{x}_2 = 2$. Для производства общественного блага фирма использует $\widetilde{x}_1 = c(\widetilde{y}_2) = 4$ ед. частного блага. Для того чтобы определить потребление частного блага потребителями, необходимо найти прибыль фирмы: $\pi = \widetilde{p}_2\widetilde{y}_2 - \widetilde{p}_1\widetilde{x}_1 = 8$. Тогда из бюджетных ограничений находим потребление частного блага: $\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}} = 10$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{B}} = 20$, $\widetilde{x}_1^{\mathsf{C}} = 26$. **4.50.** **(а)** $t^{\mathsf{A}} = 4000$ м, $t^{\mathsf{B}} = 2000$ м. **(б)** Парето-оптимальное количество метров гирлянд 4500 м, тогда как в п. (а) было 3000 м. **(в)** При индивидуальных ценах Линдаля $q^{\mathsf{A}} = 10/9$ и $q^{\mathsf{B}} = 8/9$ будет куплено 4500 м гирлянд.

Глава 5

РЫНОЧНЫЕ СТРУКТУРЫ: МОНОПОЛИЯ И ОЛИГОПОЛИЯ

5.1. Максимизация прибыли монополистом, чистые потери от наличия монополии

5.1. Функция совокупных издержек монополиста имеет вид $TC(Q) = 100 + 2\,Q^2$. Если обратная функция спроса на продукцию монополиста имеет вид $P(Q) = 60 - Q$, чему будет равна максимальная прибыль монополиста?

5.2. Монополист владеет двумя заводами, A и B. Предельные издержки данных заводов представлены следующими функциями: $MC^{\mathsf{A}}(q^{\mathsf{A}}) = q^{\mathsf{A}}$ и $MC^{\mathsf{B}}(q^{\mathsf{B}}) = 2\,q^{\mathsf{B}}$. Если обратная функция спроса на товар, производимый монополистом, имеет вид $P(Q) = 800 - Q$, то сколько будет производить монополист на каждом заводе?

5.3. Функция совокупных издержек монополиста имеет вид $TC(Q) = 10 + 4\,Q^2$. Если обратная функция спроса на продукцию монополиста имеет вид $P(Q) = 120 - 2\,Q$, чему будут равны потери общества?

5.4. Может ли недискриминирующая монополия (при вмешательстве правительства или без вмешательства) производить эффективный объем продукции? Если да, то объясните и приведите пример, если нет, то обоснуйте, почему.

5.5. Известно, что монополист производит такой объем, при котором эластичность спроса равна 4. Если предельные издержки монополиста постоянны и равны 9, то по какой цене он продает свой товар?

5.6. Рассмотрите монополистический рынок некоторого товара, функция спроса на который непрерывна и убывает с ростом цены. Пусть обратная функция спроса дифференцируема, а функция предельных издержек монополиста не убывает. Покажите, что монополист всегда устанавливает цену выше предельных издержек, если возможность ценовой дискриминации для него на данном рынке отсутствует.

5.7. Монополист продает свой товар на рынке, спрос на котором представлен функцией $D(p) = 180 - 6\,p$. Функция издержек монополиста имеет вид $c(y) = 8\,y$. Найдите оптимальный объем выпуска и цену монополиста и рассчитайте эластичность спроса при оптимальном выпуске. Прокомментируйте полученный результат.

5.8. По мотивам [2.4, гл. 23, вопросы для повторения]. Исследование спроса на легкие наркотики в одной небольшой стране с развивающейся экономикой показали, что при объеме спроса выше, чем $\widetilde{q}$, эластичность спроса постоянна и меньше 1 (т. е. $|e| < 1$), а при объеме спроса не более чем $\widetilde{q}$ кривая спроса апроксимируется линейной зависимостью. В настоящее время по подсчетам специалистов объем спроса на легкие наркотики составляет примерно $3\,\widetilde{q}$. В качестве одной из мер, направленных на сокращение их потребления в стране, правительство рассматривает легализацию продажи легких наркотиков, однако осуществлять продажи этого товара разрешено будет только одной фирме, чье право на этот вид деятельности будет закреплено покупкой у государства лицензии. Если этот вариант политики правительства будет принят, то как вы полагаете, удастся ли сократить объем потребления легких наркотиков в этой стране, по крайней мере, в 2 раза? Объясните.

5.9. Рассмотрите компанию монополиста, сталкивающегося с непрерывной убывающей функцией спроса на его товар и имеющего возрастающие непрерывные предельные издержки. Менеджер компании, обработав статистические данные, определил, что при данном объеме выпуска монополии ее предельный доход равен 5, а предельные издержки равны 6. С каким предложением к руководству компании, на ваш взгляд, должен обратиться менеджер, если целью компании является максимизация ее прибыли? Объясните.

5.10. Верно ли, что монополизация отрасли неизбежно приведет к потере общественного благосостояния? Если да, то докажите, если нет, то приведите пример.

5.11. Монополия производит товар q в соответствии с технологией $q\,(K, L) = \sqrt{K} + \sqrt{L}$, где K — объем капитала, а L — количество работников (в 10 тыс. человек), и осуществляет свои продажи в регионе, где спрос на продукцию монополиста имеет вид $q\,(p) = 3^5/p^2$. Известно, что на рынках совершенной конкуренции факторов производства цена капитала равна 3, ставка заработной платы работника за рассматриваемый временной период равна 9, а количество трудоустроенного населения в регионе составляет 100 тыс. человек. Найдите цену товара, производимого монополией, и определите процент трудоустроенного населения, занятого на его производстве.

5.12. Компания «Аква» является единственным поставщиком в регион воды с уникальными лечебными свойствами. Известно, что предельные издержки компании являются неубывающей функцией, а обратная функция спроса на эту лечебную воду в регионе $p\,(q)$ является непрерывной, убывающей, причем $p''\,(q) \geqslant 0$. Региональные власти обязали компанию продавать половину своей продукции по цене $\overline{p} < \widetilde{p}$, где $\widetilde{p}$ — цена, которую установила бы «Аква» на воду без вмешательства властей. Остальную половину продукции компания может продавать по свободной от вмешательства властей цене.

(а) Верно ли, что компания «Аква» не может выиграть от вмешательства региональных властей? Если да, то докажите, если нет, то приведите пример увеличения ее прибыли, специфицируя функции издержек и спроса.

(б) Верно ли, что данная политика неизбежно приведет к увеличению потребления лечебной воды в регионе? Если да, то докажите, если нет, то приведите пример снижения ее потребления, специфицируя функции издержек и спроса.

5.13. Фирма «Бодрость», выпускающая уникальный энергетический алкогольный коктейль, владеет двумя заводами, расположенными в областях городов А и В. Функции издержек предприятия на этих двух заводах, соответственно, имеют вид $TC_{\mathsf{A}} = 10\,q_{\mathsf{A}}$ и $TC_{\mathsf{B}} = q_{\mathsf{B}}^2$. Города А и В расположены по соседству в странах, между которыми установлен безвизовый режим въезда. Издержки предприятия, связанные с доставкой продукции от любого завода до места реализации в любую из этих стран, постоянны и одинаковы.

(а) Предположим, компания «Бодрость» производит коктейль в объеме Q. Как компания распределит выпуск продукции между заводами?

(б) Пусть в стране А правительство ввело запрет на производство алкогольной продукции без покупки лицензии. Размер лицензии в этой стране составляет 100 за тот же период времени, что и период описанных издержек. Предприятия, отказавшиеся от производства алкогольной продукции, лицензию не оплачивают. Как теперь фирма распределит выпуски между заводами?

5.14. Единственное предприятие «Альфа» в регионе производит товар x, производство которого осуществляется по технологии $x\,(K, L) = \min\{K, L\}$, где K — объем капитала, а L — объем труда высококвалифицированных рабочих. Все факторы производства «Альфа» закупает на рынке совершенной конкуренции, где цена капитала составляет 3, а цена труда 4. Проведенные исследования показали, что положительный объем спроса на товар x возникает только при цене ниже 10, и при любом возможном положительном объеме продаж предприятия его выручка увеличивается на 2 при сокращении выпуска на 1. В результате региональной политики на рынке труда появится низкоквалифицированная рабочая сила, использование которой увеличит затраты объема труда на производство каждой единицы продукции в два раза, при этом качество самого товара несколько снизится, что приведет к снижению спроса на этот товар в два раза. При какой цене труда низкоквалифицированной рабочей силы «Альфа» предпочтет нанимать только этих работников, если у владельца предприятия есть возможность различать работников и нанимать либо только низкоквалифицированных, либо только высококвалифицированных работников?

5.15. Статистические данные позволили определить совокупную функцию спроса на уникальный крем для рук, эта функция имеет вид $P = 1400 - Q$. Есть только одна косметическая компания, производящая этот крем. Она владеет двумя фабриками, A и B. Известны функции издержек каждой из фабрик: $TC^{\mathsf{A}}(q^{\mathsf{A}}) = \left(q^{\mathsf{A}}\right)^2$, $TC^{\mathsf{B}}(q^{\mathsf{B}}) = \left(q^{\mathsf{B}}\right)^2 + 100\,q^{\mathsf{B}}$.

(а) Найдите равновесие и укажите объем продукции, который будет производить компания на каждой из фабрик.

(б) Проиллюстрируйте графически решение п. (а).

5.16. По мотивам [2.8; гл. 11]. Фирма SportGym производит и продает уникальные спортивные тапочки для занятия гимнастикой. Ежемесячный спрос на продукцию этой фирмы имеет вид $p = 1000 - 30\,q$, где p — цена (в тыс. руб.) за тысячу пар тапочек, а q — объем их продаж в тысячах пар. Функция совокупных издержек фирмы SportGym за тот же период имеет вид: $TC\,(q) = 40\,q^2 + 100\,q$. Осуществлять продажу своей продукции в силу некоторых обстоятельств фирма может только через посредника — фирму Factor. Размер ежемесячной лицензии на право торговли данным товаром для посреднической фирмы составляет 200 тыс. руб., других издержек по продаже фирма не несет.

(а) Найдите объем продаж спортивных тапочек, цену, которую платит конечный потребитель, а также прибыли SportGym и Factor.

(б) У фирмы SportGym появилась возможность отказаться от участия посредника в продаже ее товара, но при этом власти обязали ее рекламировать свой товар. Доходы от рекламы власти планируют направить на поддержку развития физкультуры и спорта в регионе. Известно, что если расходы на рекламу составят N млн рублей, то спрос на спортивные тапочки будет иметь вид $p = 1000 - 30\,q + 4\sqrt{N}$. Как вы полагаете, стоит ли фирме SportGym отказаться от услуг посредника, и если да, то какой дополнительный доход от рекламы будут получать городские власти?

5.2. Сравнительная статика: введение налога/субсидии на продукцию монополиста

5.17. Верно ли, что обложение монополиста налогом на объем продаж всегда вызывает повышение рыночной цены на сумму, бóльшую величины налога?

5.18. Рассмотрите монополизированный рынок некоторого товара. Производство каждой единицы продукции субсидируется государством таким образом, чтобы монополист осуществлял объем продаж своего товара на Парето-оптимальном уровне. Верно ли, что чистые потери общества при такой экономической политике отсутствуют?

5.19.* Рассмотрите монополиста с функцией издержек $c(q) = (0{,}5)\,q^2$, осуществляющего продажу своей продукции на рынке с функцией спроса на монопольный товар $q(p) = 200 - 2\,p$. Во сколько раз изменятся чистые потери общества при введении потоварного налога для производителя в размере $t = 10$? Проиллюстрируйте графически излишек потребителей, излишек производителя, доходы правительства и чистые потери общества до и после введении потоварного налога.

5.20. Верно ли, что введение потоварного налога на продукцию монополии неизбежно приведет к снижению прибыли недискриминирующего монополиста?

5.21. Монополия производит продукт на рынке, ценовая дискриминация на котором запрещена. Правительство вводит потоварный налог в размере t на единицу выпуска монополиста. Верно ли, что все налоговое бремя после введения налога ляжет на потребителей (т. е. монопольная цена возрастет на величину налога)?

5.22. Рассмотрите монополиста, осуществляющего продажу своего товара на рынке, где обратная функция спроса на его продукцию имеет вид $p = 120 - q$. Функция издержек монополии составляет $c(q) = 2\,q^2$.

(а) Предположим, по морально этическим соображениям власти планируют снизить потребление данного товара, вводя потоварный налог в размере t для производителя. Размер налога определяется таким образом, чтобы налоговые поступления с данного производителя в государственный бюджет были максимальными. Во сколько раз при этом сократится объем потребления товара?

(б) Если бы вместо потоварного налога был введен пропорциональный налог на выручку монополиста, приводящий к такому же сокращению потребления его товара, как и потоварное налогообложение, то во сколько бы раз изменился объем поступающих в бюджет государства средств?

5.23. Компания владеет патентом на рецепт слабоалкогольного напитка «Бодрость». Известно, что предельные издержки производства этого напитка непрерывны и не убывают, а спрос на него является непрерывно убывающим, кроме того, спрос на рассматриваемый товар характеризуется убывающей непрерывной предельной выручкой, а ценовая эластичность спроса при любых положительных объемах больше 1. В целях сокращения потребления алкогольной продукции в регионе местные власти рассматривают две возможные политики налогообложения производителей алкогольной продукции: введение потоварного налога в размере t или введение пропорционального налога на выручку в размере τ $(0 < \tau < 1)$. Если в результате внедрения любой из политик объемы налоговых сборов от данной компании оказались положительными и одинаковыми, то какой из указанных вариантов налогообложения привел бы к большему сокращению производства напитка «Бодрость»?

5.24. Фармацевтическая компания обладает патентом на производство лекарственного препарата, использование которого позволяет сократить время восстановления кожного покрова после хирургического вмешательства. Исследование спроса показали, что спрос на этот лекарственный препарат убывает с ростом цены и характеризуется убывающей непрерывной предельной выручкой. В настоящее время объем потребления данного лекарства составляет всего лишь половину от Парето-эффективного объема потребления. Известно также, что предельные издержки фармацевтической компании не убывают. В целях увеличения объемов продаж этого препарата в полтора раза Министерство здравоохранения предложило правительству субсидировать фармацевтическую компанию. В качестве альтернатив рассматривается введение потоварной субсидии и субсидии на выручку компании. Предположим, спрос на препарат и издержки могут быть описаны дважды дифференцируемыми непрерывными функциями, кроме того, ценовая эластичность спроса при любых положительных объемах, не превышающих эффективный объем потребления препарата, более 1. Какой из двух вариантов субсидирования будет принят, если целью правительства является минимизация расходов на субсидирование данной компании при достижении требуемого министерством объема производства? Обоснуйте.

5.25. Монополист, использующий технологию с функцией издержек $TC(Q) = (31/48)\,Q^2$, может осуществлять продажи своего товара на двух рынках, ценовая дискриминация между которыми запрещена. Обратные функции спроса на товар монополии на одном рынке имеет вид $p(q_1) = 10 - q_1$, а на другом $p(q_2) = 13 - 0{,}5\,q_2$.

(а) Найдите минимальную ставку потоварной субсидии, предоставляемой монополии, при которой монополист начнет осуществлять продажи своей продукции на двух рынках. Проиллюстрируйте решение графически.

(б) Пусть в результате улучшения условий труда на производстве издержки монополии незначительно снизились, и функция издержек монополиста теперь имеет вид $TC\,(Q) = (5/8)\,Q^2$. Правительство планирует ввести пропорциональный налог на продажу товара монополией, однако ставку налогообложения необходимо выбрать таким образом, чтобы продажи монопольной продукции осуществлялись на обоих рынках. Найдите максимальную ставку данного налога, удовлетворяющего указанному условию. Проиллюстрируйте решение графически.

5.3. Естественные монополии и их регулирование

5.26. Функция долгосрочных совокупных издержек монополиста $TC(Q) = 19{,}8 + 4\,Q^2$. Пусть обратная функция спроса на продукцию монополиста имеет вид $P = 20 - Q$.

(а) Объясните, что такое естественная монополия, и укажите возможные причины ее возникновения.

(б) Какую цену назначит монополист и какой объем выпуска он будет производить? Проиллюстрируйте равновесие графически.

(в) Найдите и изобразите графически потери общества от монополизации отрасли.

(г) Найдите равновесие, если в силу политики правительства единственной возможностью ценообразования для монополии является ценообразование на основе предельных издержек. Объясните полученный результат.

5.27. Обеспечение общественным транспортом некоторого региона, в котором расположены дачные поселки и деревни, осуществляется единственной компанией, функция издержек которой в каждый период времени $TC(q) = 576 + 4\,q^2$, где q — количество (в сотнях) автобусов. Исследования показали, что обратная функция спроса на автобусы в этом регионе за тот же период имеет вид $p = 280 - 24\,q$.

(а) Какое количество автобусов будет осуществлять перевозки в этом регионе, если объем своего автопарка компания выбирает без вмешательства властей?

(б) Если задачей местных властей является максимизация общественного благосостояния, то какое количество автобусов должно осуществлять перевозки в регионе? Сравните полученный результат с результатом, полученным в п. (а), и объясните полученные различия.

(в) Могут ли региональные власти для достижения эффективного количества общественного транспорта без дополнительных затрат заставить компанию предоставлять свои услуги по цене, сформированной на основе предельных издержек? Объясните.

(г) Предложите региональным властям различные меры достижения эффективного количества общественного транспорта. Объясните использование предложенных вами политик и сравните их с точки зрения общественного благосостояния.

5.4. Монополия: ценовая дискриминация

5.28. Известно, что рынок контролируется монополистом, практикующим ценовую дискриминацию первой степени. Охарактеризуйте излишек потребителя и общественное благосостояние в равновесии.

5.29. В некотором городе имеется единственный кинотеатр, в котором обычный билет стоит 5 долл., в то время как студенты получают скидку 1 долл. при показе студенческого билета. Сравните ценовые эластичности спроса студентов и всех остальных потребителей в равновесии.

5.30. Может ли монополия, действуя самостоятельно, производить такой же объем выпуска, как и в случае, если бы она была обязана производить совершенной конкурентный объем?

5.31. Монополист с функцией предельных издержек $MC(y) = 1 + y$ продает продукцию на рынке некоторого товара, спрос на который представлен следующей функцией: $D(p) = 4 - p$.

(а) Найдите выпуск монополиста и равновесную цену.

(б) Предположим, открылся новый рынок сбыта данного товара с функцией спроса $D^{\text{new}}(p) = 10 - p$. Если у монополиста будет возможность дискриминировать, то по какой цене он будет продавать продукцию на каждом рынке?

5.32.* Монополист, использующий технологию с функцией издержек $TC(Q) = (31/48)\,Q^2$, может осуществлять продажи своего товара в двух регионах, ценовая дискриминация между которыми запрещена. Обратные функции спроса на товар монополии в одном регионе имеют вид $p(q_1) = 10 - q_1$, а в другом $p(q_2) = 13 - 0{,}5\,q_2$.

(а) Найдите равновесие и проиллюстрируйте его графически. Будет ли монополист осуществлять продажи своего товара, в обоих регионах?

(б) Найдите чистые потери общества и проиллюстрируйте их графически.

(в) Пусть теперь монополист может назначать различную цену своего товара для двух регионов, и перепродажи между регионами невозможны. Найдите равновесие и проиллюстрируйте решение графически.

(г) Как изменится благосостояние потребителей, прибыль монополии и совокупное благосостояние общества при возможности дискриминации по сравнению с равновесием на рынке монопольного товара в отсутствии дискриминации? Прокомментируйте полученный результат.

5.33. Предположим, монополист с функцией предельных издержек $MC = 2$ продает выпуск на двух рынках с функциями спроса $D_1(p) = 10 - 0{,}5\,p$ и $D_2(p) = 20 - p$. Предположим, правительство ввело потоварную субсидию s для потребителей второго рынка. Если монополист может предотвратить перепродажи товара между потребителями, то какую сумму потратит правительство на программу субсидирования?

5.34. Владелец фармацевтической компании, которая производит уникальную биологическую добавку «Молодость», исследовал отчеты компании и на основе выделенной им информации, которая приведена ниже, предъявил управляющему компанией претензии в недобросовестном исполнении его обязанностей. Прав ли был владелец? Если нет, то объясните почему. Если да, то какие рекомендации следует дать управляющему компанией, и как изменятся цены на продукцию компании в этих регионах, если рекомендации будут приняты?

Информация, предоставленная управляющему в качестве аргумента его недобросовестности:

1) продажи биологической добавки «Молодость» осуществляются в трех различных регионах, причем в силу удаленности этих регионов друг от друга перепродажи препарата между ними невозможны;

2) спрос в каждом из трех регионов на продукцию компании является функцией убывающей;

3) дополнительная выручка, которую могла бы получить компания, если бы она при данном объеме выпускаемой продукции продала дополнительную единицу продукции в первом регионе, составила бы 200 руб., во втором — 300 руб., а в третьем — 100 руб.;

4) предельные издержки фирмы являются возрастающими;

5) при данном объеме выпуска затраты на дополнительную единицу выпускаемой продукции обошлись бы компании в 200 руб.

5.35. Потребитель типа A готов заплатить за сэндвич максимум 4 долл. и за чашку кофе максимум 1 долл. Потребитель типа B готов заплатить за сэндвич максимум 3 долл. и за чашку кофе максимум 2 долл. Предельные издержки производства чашки кофе равны 0,2 долл., а одного сэндвича — 0,5 долл. Определите оптимальную стратегию ценообразования кафе.

5.36. По мотивам [2.9]. Ваш приятель M, владелец маленького кафе, обратился к вам как к будущему экономисту за советом. Проведя мониторинг, M выяснил, что его кафе посещают три группы посетителей. Доли посетителей одинаковы. Посетители первой группы готовы заплатить за чашку кофе максимум 60 руб., а за пирожное — максимум 10 руб. Посетители второй группы готовы заплатить за чашку кофе максимум 50 руб., а за пирожное — максимум 30 руб. Посетители третьей группы готовы заплатить за чашку кофе максимум 10 руб., а за пирожное — максимум 50 руб. Издержки кафе на одну чашку кофе составляют 15 руб., а издержки на одно пирожное составляют 25 руб. Определите оптимальную стратегию ценообразования кафе.

5.37. Известно, что ценовые эластичности спроса на фильмы в единственном кинотеатре города H постоянны. Местные власти не контролируют процесс ценообразования на билеты в этом кинотеатре. Обычная публика платит 100 руб. за билет, в то время как школьники, учащиеся высших и средних учебных заведений, а также пенсионеры получают скидку 20%. Сравните ценовые эластичности спроса потребителей, полагая, что средние издержки владельца кинотеатра на одного зрителя постоянны.

5.38. По материалам [2.5]. Дискриминирующий монополист продает свой товар на внутреннем рынке и поставляет его на экспорт в соседнюю страну, где он также является единственным продавцом, назначая для каждого рынка свою линейную цену за производимый им товар без взимания платы за доступ. Перепродажи данного товара между странами другими агентами невозможны. Известно, что в обеих странах спрос на рассматриваемый товар характеризуется убывающей непрерывной предельной выручкой. Функция предельных издержек монополиста непрерывно возрастает по выпуску. Как на внутреннем рынке изменятся объем и цена товара, если в стране, куда поставляется монопольный товар, будет введена потоварная субсидия для потребителей на этот товар? Приведите графическое решение для случаев положительных объемов продаж и до, и после введения потоварной субсидии.

5.39. По мотивам [2.6]. Рассмотрите две группы потребителей со следующими функциями полезности: $u^{\mathsf{A}}(x^{\mathsf{A}}, m^{\mathsf{A}}) = 4\sqrt{x^{\mathsf{A}}} + m^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}(x^{\mathsf{B}}, m^{\mathsf{B}}) = 6\sqrt{x^{\mathsf{B}}} + m^{\mathsf{B}}$. Пусть благо x производится монополистом, технология которого описывается функцией издержек $c(x) = x/2$. Монополист предлагает не больше двух пакетов, в которых указываются количество товара и цена, которую потребителю предлагается заплатить за это количество: (x, t). Пусть количество потребителей в обеих группах одинаково. Считайте, что потребителям обеих групп предлагается положительное количество блага x. Кроме того, монополист не может различать потребителей.

(а) Запишите задачу максимизации прибыли монополиста и укажите, какие из ограничений в указанной задаче будут выполняться как равенства. Объясните.

(б) Найдите оптимальные пакеты и проиллюстрируйте их графически.

(в) Предположим теперь, что у монополиста есть возможность различать потребителей. Какие пакеты в этом случае будет предлагать монополист? Проиллюстрируйте решение графически.

(г) Если бы дискриминация любого рода была запрещена, как и насколько изменилась бы прибыль монополиста по сравнению с п. (б)? Проиллюстрируйте равновесие при запрете ценовой дискриминации графически.

5.40. **По мотивам [2.6].** Рассмотрите две группы потребителей со следующими функциями полезности: $u^{\mathsf{A}}(x^{\mathsf{A}}, m^{\mathsf{A}}) = 4\sqrt{x^{\mathsf{A}}} + m^{\mathsf{A}}$ и $u^{\mathsf{B}}(x^{\mathsf{B}}, m^{\mathsf{B}}) = 8\sqrt{x^{\mathsf{B}}} + m^{\mathsf{B}}$. Пусть благо x производится монополистом, технология которого описывается функцией издержек $c(x) = x^2$. Пусть количество потребителей в группе A составляет 12 000, а в группе B — в 2 раза больше. Считайте, что доходы потребителей обеих групп таковы, что они предъявляют положительный объем спроса на оба товара.

(а) Пусть перепродажи монопольного товара между группами невозможны, а монополист имеет возможность различать потребителей и назначать каждой группе свою линейную цену за товар. Найдите равновесие и проиллюстрируйте его графически.

(б) Пусть теперь у монополиста есть возможность нелинейного ценообразования на свой товар, при котором с каждой группы он может взимать плату за доступ к товару и назначать линейную цену. Найдите равновесие и проиллюстрируйте его графически при условии, что монополист может различать потребителей.

(в) Пусть теперь при условии ценообразования на монопольную продукцию п. (б) монополист не может различать потребителей. Найдите равновесие и проиллюстрируйте его графически.

(г) Сравните прибыли монополии в пп. (а), (б) и (в) и прокомментируйте полученный результат.

5.41. Спрос на товар x, производимый монополией, предъявляют две группы потребителей. Потребители группы A имеют функцию спроса на товар x вида $x^{\mathsf{A}} = 4 - p$, а спрос потребителей группы B имеет вид $x^{\mathsf{B}} = 6 - p$. Количество потребителей в группах одинаковое. Монопольное производство осуществляется с помощью технологии с постоянной отдачей от масштаба, при которой средние издержки на производство каждой единицы товара составляют 1.

(а) Пусть перепродажи между группами потребителей невозможны, монополист может различать потребителей, и ему разрешено проводить любую ценовую дискриминацию. Какой вид ценообразования предпочтет монополист? Найдите равновесие и проиллюстрируйте его графически.

(б) Предположим теперь, что по морально-этическим соображениям правительство запретило назначать различные цены для разных групп потребителей, однако монополист, по-прежнему, остается свободен в способе ценообразования. Какой теперь вид ценообразования предпочтет монополист? Найдите равновесие и проиллюстрируйте его графически.

5.42. В поселке городского типа имеется единственный кинотеатр, который построил местный предприниматель. Проведя исследование, он обнаружил, что недельный спрос на билеты в кинотеатр для молодежи имеет вид $D_1(p) = 9 - 0{,}5\,p$, а для остальных жителей поселка $D_2(p) = 5 - 0{,}5\,p$. Функция совокупных издержек кинотеатра за тот же период имеет вид $TC = 6\,y + 3$, где y — количество посетителей.

(а) Если местные власти разрешают назначить различные цены за билет в кинотеатр для молодежи и остальных жителей, то каковы будут цены билетов в кино и какое количество жителей поселка будет посещать еженедельно кинотеатр?

(б) По этическим соображениям местные власти запрещают устанавливать различные цены на билеты для жителей поселка. На сколько изменится еженедельная прибыль предпринимателя и количество посетителей кинотеатра в неделю?

(в) Укажите политику (или политики) местных властей, которая могла бы без дополнительных затрат для городского бюджета привести к эффективному объему посещений кинотеатра. Продемонстрируйте, как работает эта политика в данном случае, указав равновесие и проиллюстрировав его графически.

5.43. Единственный производитель некоторого товара осуществляет свои продажи в двух регионах, A и B. Спрос на данный товар в этих регионах может быть описан следующими функциями: $q^{\mathsf{A}} = 100 - p^{\mathsf{A}}$ и $q^{\mathsf{B}} = 60 - p^{\mathsf{B}}$, а функция издержек производителя имеет вид $TC\,(Q) = 4\,Q^2$. Известно, что перепродажи между регионами невозможны, но власти запрещают производителю назначать различные цены товара в различных регионах. Какую максимальную сумму будет готов заплатить производитель за разрешение назначать в каждом регионе свою цену товара?

5.5. Олигополия: одновременный выбор выпусков (модель Курно)

5.44. Рассмотрите дуополию, в которой фирмы одновременно выбирают объемы выпусков. Известно, что функция рыночного спроса имеет вид $Q(p) = 15 - p$, а предельные издержки фирм A и B постоянны и равны: $MC^{\mathsf{A}} = MC^{\mathsf{B}} = 3$. Найдите равновесие на данном рынке.

5.45. Рассмотрите дуополию, в которой фирмы A и B одновременно выбирают объемы выпусков. Приведите пример таких функций спроса и функций издержек фирм, при которых в равновесии выпуск фирмы B был меньше выпуска фирмы A.

5.46. Рассмотрите модель олигополии Курно, где функции предельных издержек фирм A и B имеют вид $MC^{\mathsf{A}}(q^{\mathsf{A}}) = 3\,q^{\mathsf{A}}$ и $MC^{\mathsf{B}}(q^{\mathsf{B}}) = 2\,q^{\mathsf{B}}$ соответственно. Если в равновесии фирма A выпускает 3 ед. продукции, а фирма B — 4 ед., то какова рыночная цена и чему равна эластичность спроса при равновесном выпуске отрасли?

5.47. Рассмотрите отрасль, где продажу товара осуществляют только две фирмы. Известно, что функция рыночного спроса имеет вид $Q(p) = a - bp$, а предельные издержки каждой фирмы постоянны и равны c_1 и c_2 (c_1, c_2, a, $b > 0$).

(а) Найдите условия, связывающие параметры a, b, c_1 и c_2, при которых существует равновесие (или равновесия), если фирмы конкурируют путем одновременного выбора объемов выпускаемой продукции. Найдите все равновесия при различных значениях указанных параметров, удовлетворяющих найденным условиям. Проиллюстрируйте найденные равновесия графически.

(б) Рассмотрите только те равновесия из найденных в п. (а), в которых каждая из фирм производит положительный объем выпуска. Покажите формально, что сокращение выпуска каждой фирмы на бесконечно малую величину приведет к увеличению прибыли каждой фирмы. Проиллюстрируйте этот результат графически и объясните причину его возникновения.

5.48. Рассмотрите модель дуополии Курно, где функции издержек фирм A и B имеют вид $TC^{\mathsf{A}}(q^{\mathsf{A}}) = c^{\mathsf{A}}q^{\mathsf{A}}$ и $TC^{\mathsf{B}}(q^{\mathsf{B}}) = 2q^{\mathsf{B}}$ соответственно. Обратная функция спроса на товар имеет вид $P(Q) = 20 - 3Q$. Если известно, что в равновесии фирма A производит нулевой выпуск, то какими должны быть предельные издержки этой фирмы?

5.49.* Рассмотрите отрасль, в которой действуют две фирмы с функциями издержек $c_1(y_1) = y_1^2 + 7y_1$, $c_2(y_2) = y_2^2 + 13y_2$. Спрос на продукцию отрасли задан функцией $D(p) = 100 - p$. В предположении, что фирмы взаимодействуют в соответствии с моделью Курно, определите равновесные объемы производства для каждой фирмы, выпуск отрасли и цену продукции.

5.50. Рассмотрите отрасль, где продажу товара осуществляют только две фирмы, A и B, конкурирующие путем одновременного выбора объемов выпускаемой продукции. Спрос на продукцию отрасли имеет вид $Q(p) = 100 - 2p$, а издержки фирм имеют вид $TC(q_{\mathsf{A}}) = q_{\mathsf{A}}^2$ и $TC(q_{\mathsf{B}}) = 2q_{\mathsf{B}}^2$, где q_{A} и q_{B} — выпуски фирм A и B соответственно. Известно, что грамотно проведенная рекламная кампания может повысить спрос на продукцию отрасли в два раза. Какую максимальную сумму готова будет вложить каждая фирма в проведение рекламной кампании?

5.51. Обратная функция спроса на некоторый товар имеет вид $P(Q) = 15 - 2Q$. На рынке действуют две фирмы, A и B, с функциями издержек $TC^{\mathsf{A}}(q^{\mathsf{A}}) = 2 + 2q^{\mathsf{A}}$ и $TC^{\mathsf{B}}(q^{\mathsf{B}}) = 5 + q^{\mathsf{B}}$ соответственно. Фирмы конкурируют путем одновременного выбора объема продаж. Предположим, правительство решило собрать некоторую сумму налога T путем введения потоварного налога на продукцию фирм (налог выплачивают производители).

(а) Найдите, какой должна быть налоговая ставка, чтобы правительство собрало сумму T (в предположении, что сумма T достаточно мала).

(б) Если будет возможно выбирать разные ставки налога для данных фирм, то будет ли этим пользоваться правительство, чтобы уменьшить потери общества от налогообложения?

5.52. Рассмотрите рынок некоторого товара, спрос на который представлен функцией $P(Q) = 102 - 5Q$. Предположим, что вход фирм на данный рынок происходит в два этапа. Сначала фирмы принимают решение, входить на рынок или нет. Если некоторая фирма приняла решение войти, то такая фирма будет нести издержки входа в размере $K = 20$. Затем вошедшие на рынок фирмы одновременно выбирают объемы выпусков. Предполагая, что все фирмы имеют одинаковые функции издержек $c_i(q_i) = 2\,q_i$, найдите равновесие на рынке, т. е. равновесные цену, объем выпуска каждой фирмы и число фирм на рынке. Чему будет равна равновесная прибыль каждой вошедшей фирмы?

5.53. Студент решал следующую задачу:

«Рассмотрите отрасль с N фирмами, конкурирующими по Курно. Пусть все фирмы имеют одинаковые постоянные предельные издержки $c > 0$. Обратная функция совокупного спроса на продукцию отрасли имеет вид $P(Q) = a - Q$, $a > c$. Найдите равновесный выпуск и прибыль каждой фирмы, равновесный выпуск отрасли и цену продукции».

Найдите ***ошибки*** в решении студента (решать саму задачу не требуется):

«В модели Курно фирмы одновременно выбирают выпуски, максимизируя собственную прибыль. Рассмотрим задачу первой фирмы: $P(q_1 + q_2 + \ldots + q_N) \cdot q_1 - c \cdot q_1 \to \max\limits_{q_1 \geqslant 0}$. *Поскольку все фирмы имеют одинаковые постоянные предельные издержки, обратная функция спроса является дифференцируемой и убывающей, причем* $P(0) = a > c$, *то в равновесии Курно все фирмы будут иметь одинаковые положительные выпуски* $\widetilde{q}_1 = \widetilde{q}_2 = \ldots = \widetilde{q}_N$. *Поэтому задачу первой фирмы можно переписать с учетом данного соображения:* $P(Nq_1) \cdot q_1 - c \cdot q_1 \to \max\limits_{q_1 \geqslant 0}$, *или* $(a - Nq_1) \cdot q_1 - c \times$ $\times\, q_1 \to \max\limits_{q_1 \geqslant 0}$. *Тогда условие первого порядка задачи максимизации прибыли первой фирмы будет иметь следующий вид:* $a - 2N\widetilde{q}_1 - c = 0$, *откуда найдем равновесный выпуск каждой фирмы:* $\widetilde{q}_1 = \widetilde{q}_2 = \ldots = \widetilde{q}_N = (a - c)/2N$. *Равновесный выпуск отрасли* $\widetilde{Q} = (a - c)/2$, *равновесная цена продукции* $\widetilde{P} = (a + c)/2$. *Равновесная прибыль каждой фирмы*

$$\widetilde{\pi}_k = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{a-c}{2N} - c \cdot \frac{a-c}{2N} =$$
$$= \frac{a-c}{2N} \cdot \left(\frac{a+c}{2} - c\right) = \frac{a-c}{2N} \cdot \frac{a-c}{2} = \frac{(a-c)^2}{4N}».$$

5.6. Олигополия: последовательный выбор выпусков (модель Штакельберга)

5.54. Рассмотрите отрасль, в которой конкурируют по объему выпуска фирмы A и B, функции издержек которых имеют вид $TC^{\mathsf{A}}(q^{\mathsf{A}}) = 4q^{\mathsf{A}}$ и $TC^{\mathsf{B}}(q^{\mathsf{B}}) = 4q^{\mathsf{B}}$ соответственно. Функция спроса на производимый фирмами товар имеет вид $Q(P) = 20 - P$. Предполагая, что фирма B первой выбирает объем выпуска, а фирма A является последователем, найдите равновесные выпуски фирм и цену.

5.55. Рассмотрите модель дуополии Штакельберга, где функции издержек фирм A и B имеют вид $TC^{\mathsf{A}}(q^{\mathsf{A}}) = q^{\mathsf{A}}$ и $TC^{\mathsf{B}}(q^{\mathsf{B}}) = cq^{\mathsf{B}}$, $c > 1$, соответственно, а фирма A играет роль лидера. Обратная функция спроса на товар имеет вид $P(Q) = a - Q$, $a > c$. Как изменятся равновесные выпуски фирм, если предельные издержки фирмы B увеличатся? Какая фирма отреагирует бóльшим изменением выпуска?

5.56. Рассмотрите модель дуополии Штакельберга, где функции издержек фирм A и B имеют вид $TC^{\mathsf{A}}(q^{\mathsf{A}}) = q^{\mathsf{A}}$ и $TC^{\mathsf{B}}(q^{\mathsf{B}}) = 2q^{\mathsf{B}}$ соответственно, а фирма A играет роль лидера. Обратная функция спроса на товар имеет вид $P(Q) = 10 - 0{,}5\,Q$. Если спрос на продукцию фирм увеличится на α, то как изменятся равновесные выпуски фирм? Какая фирма отреагирует большим изменением выпуска?

5.7. Олигополия: одновременный выбор цен (модель Бертрана)

5.57. Рассмотрите дуополию, в которой фирмы конкурируют путем одновременного выбора цен. Обратная функция спроса на товар имеет вид $P(Q) = 8 - 0{,}4\,Q$. Совокупные издержки фирм представлены функциями $TC^{\mathsf{A}}(q^{\mathsf{A}}) = 4\,q^{\mathsf{A}}$, $TC^{\mathsf{B}}(q^{\mathsf{B}}) = 4\,q^{\mathsf{B}}$. Найдите равновесный выпуск отрасли.

5.58. Рассмотрите модель Бертрана с тремя фирмами, функции издержек которых имеют вид $TC^{\mathsf{A}}(q^{\mathsf{A}}) = q^{\mathsf{A}}$, $TC^{\mathsf{B}}(q^{\mathsf{B}}) = 2\,q^{\mathsf{B}}$ и $TC^{\mathsf{C}}(q^{\mathsf{C}}) = q^{\mathsf{C}}$ соответственно. Спрос на продукцию отрасли задан функцией $D(p) = 50 - 3\,p$. Найдите равновесие в этой игре.

5.59. Рассмотрите модель конкуренции по Бертрану с тремя фирмами, производящими однородную продукцию и имеющими одинаковые постоянные предельные издержки $c > 0$. Пусть p_j — цена, установленная фирмой j. Будет ли набор цен $(p_1,\ p_2,\ p_3)$, где $p_1 = c$, $p_3 > p_2 > c$ равновесием по Нэшу в данной игре? Обоснуйте свой ответ.

5.60.* Рассмотрите рынок некоторого товара, спрос на который представлен функцией $D(P) = a - bP$. На данном рынке конкурируют десять фирм путем одновременного выбора цен (потребители предпочитают покупать по меньшей цене; в случае назначения несколькими фирмами одинаковых минимальных цен данные фирмы будут делить рынок поровну). Функции издержек данных фирм представлены функциями $TC_i(q_i) = cq_i$, $a \gg c$. Найдите равновесие/равновесия в данной игре.

5.61. Рассмотрим дуополию Бертрана с дифференцированным продуктом. Спрос на продукцию каждой фирмы задан следующими функциями: $q_1(p_1, p_2) = 10 - p_1 + p_2$, $q_2(p_1, p_2) = 10 - \alpha p_2 + p_1$, $\alpha \geqslant 1$. Функция издержек каждой фирмы $TC(q_i) = q_i$. Фирмы конкурируют путем одновременного выбора цен. Возможно ли, что при некоторых α в равновесии только одна фирма будет производить положительный выпуск?

5.62. Рассмотрим модель дуополии Бертрана с дифференцированным продуктом. Спрос на продукцию каждой фирмы задан следующими функциями: $q_1(p_1, p_2) = p_2^5/p_1^4$, $q_2(p_1, p_2) = p_1^5/p_2^4$. Функция издержек каждой фирмы $TC(q_i) = q_i$.

(а) Выведите функции реакции каждой фирмы и изобразите их графически. Объясните вид кривых.

(б) Найдите равновесие по Нэшу, определив равновесные цены, выпуски и прибыль каждой фирмы.

5.63. Рассмотрите рынок некоторого товара, спрос на который представлен функцией $P(Q) = 102 - 5\,Q$. Предположим, что вход фирм на данный рынок происходит в два этапа. Сначала фирмы принимают решение, входить на рынок или нет. Если некоторая фирма приняла решение войти, то такая фирма будет нести издержки входа в размере $K = 100$. Затем вошедшие на рынок фирмы одновременно выбирают цены. Предполагая, что все фирмы имеют одинаковые функции издержек $c_i(q_i) = 2\,q_i$, найдите равновесие на рынке, т. е. равновесные цену, объем выпуска каждой фирмы и число фирм на рынке. Чему будет равна равновесная прибыль каждой вошедшей фирмы?

5.8. Олигополия: модель ценового лидерства

5.64.* В некоторой отрасли присутствуют 6 фирм, функция издержек каждой из которых имеет следующий вид: $TC_i(q_i) = q_i^2 + 2\,q_i$. Функция спроса на продукцию отрасли $Q^d(P) = 96 - 2\,P$. Две фирмы решили объединиться. Предположим, созданная фирма играет роль ценового лидера, оставшиеся фирмы в отрасли играют роль конкурентного окружения. Определите равновесные выпуск каждой фирмы, выпуск отрасли и цену продукции. Приведите графическую иллюстрацию.

5.65. Рассмотрите рынок некоторого товара, спрос на который представлен функцией $Q(P) = -1000\,P + 60\,000$. В отрасли по производству данного товара функционирует 1000 совершенно конкурентных фирм, предельные издержки каждой из которых равны $MC_i(q_i) = 2\,q_i + 5$. На данный рынок входит фирма A, средние издержки которой постоянны и равны 20. Предположим, данная фирма будет вести себя как ценовой лидер, при этом остальные фирмы будут играть роль конкурентного окружения.

(а) Как изменится равновесная цена товара после входа фирмы A?

(б) Вычислите, какую долю рынка будет иметь фирма A.

5.66. Рассмотрите рынок некоторого товара, спрос на который описывается функцией $Q^d(P) = 480 - 2\,P$. Известно, что на данном рынке присутствует доминирующая фирма L, совокупные издержки которой представлены функцией $TC(Q) = 0{,}25\,Q^2$. Кроме того, на рынке действуют еще 8 фирм-аутсайдеров, совокупные издержки которых представлены функциями $TC_i(q_i) = 0{,}5\,q_i^2 + 10\,q_i$. Найдите равновесные цену и выпуски всех фирм.

5.9. Олигополистическая конкуренция при одновременном выборе стратегий и сговор

5.67. Рассмотрите отрасль, в которой действуют две фирмы с функциями издержек $c_1(y_1) = 5\,y_1$, $c_2(y_2) = 5\,y_2$. Спрос на продукцию отрасли задан функцией $D(p) = 70 - 2\,p$. Предположим, фирмы решили объединиться, договариваясь о совокупном объеме продаж. Определите выпуск отрасли и цену единицы продукции в этой ситуации. Будут ли выпуски фирм равновесными по Нэшу?

5.68.* Рассмотрите отрасль, в которой действуют две фирмы, их предельные издержки: $MC_1(y_1) = 2 + y_1$, $MC_2(y_2) = 4 + y_2$. Спрос на продукцию отрасли задан функцией $D(p) = 43 - p$. Предположим, фирмы ведут себя кооперативно, договариваясь о своих объемах продаж. Определите выпуск отрасли, выпуск каждой фирмы и цену продукции в этом случае.

5.10. Повторяющиеся взаимодействия в условиях олигополистической конкуренции, стратегии возвращения к равновесию по Нэшу

5.69. Рассмотрите отрасль, в которой действуют две фирмы с функциями издержек $TC_1(y_1) = 2\,y_1$, $TC_2(y_2) = 2\,y_2$. Спрос на продукцию отрасли задан функцией $D(p) = 14 - p$. Рассмотрите бесконечно повторяющуюся игру фирм, в которой каждый игрок максимизирует сумму дисконтированных выигрышей на каждой стадии игры. Найдите все значения дисконтирующего множителя δ (если таковые существуют), при которых фирмы в равновесии будут вести себя кооперативно (предполагайте, что каждая фирма в этом случае производит половину отраслевого выпуска).

5.70. Рассмотрите бесконечно повторяющуюся игру между двумя фирмами. Каждая фирма может либо разработать и выпустить новый продукт (N), либо производить продукт прошлого периода (P). Прибыли каждого периода представлены матрицей выигрышей:

$1\backslash2$	P	N
P	2, 2	1, 4
N	3, 1	−1, −1

.

Каждый игрок максимизирует сумму дисконтированных выигрышей на каждой стадии игры, дисконтирующий множитель равен δ. Найдите все значения δ (если таковые существуют), при которых фирмы в равновесии не будут разрабатывать новые продукты.

5.11. Задачи на разные модели олигополии

5.71.* Обратная функция спроса на пиццу в некотором городе имеет вид $P(Q) = 10 - Q$. В городе действуют две фирмы, A и B, по производству пиццы, функции издержек которых имеют вид $TC^{\mathsf{A}}(q^{\mathsf{A}}) = 5 + q^{\mathsf{A}}$ и $TC^{\mathsf{B}}(q^{\mathsf{B}}) = 5 + q^{\mathsf{B}}$ соответственно.

(а) Если фирмы конкурируют по объемам и фирма A играет роль лидера, то какова будет цена пиццы?

(б) Если фирмы выбирают выпуски одновременно, то какую максимальную сумму готова заплатить фирма A фирме B, чтобы первой выбирать выпуск?

(в) Если фирмы выбирают выпуски одновременно, то какую минимальную сумму готова получить фирма B, чтобы позволить фирме A первой выбирать выпуск?

5.72. В рамках модели дуополистической конкуренции ответьте на следующие вопросы и выполните задания, пользуясь рис. 5.1. При расчетах приведите необходимые пояснения.

(а) Объясните, почему распределение выпусков, соответствующее точке A на рис. 5.1, не является равновесием ни в модели Штакельберга, ни в модели Курно.

(б) Укажите на рисунке равновесие Курно и определите, какой совокупный объем продукции будет производить отрасль.

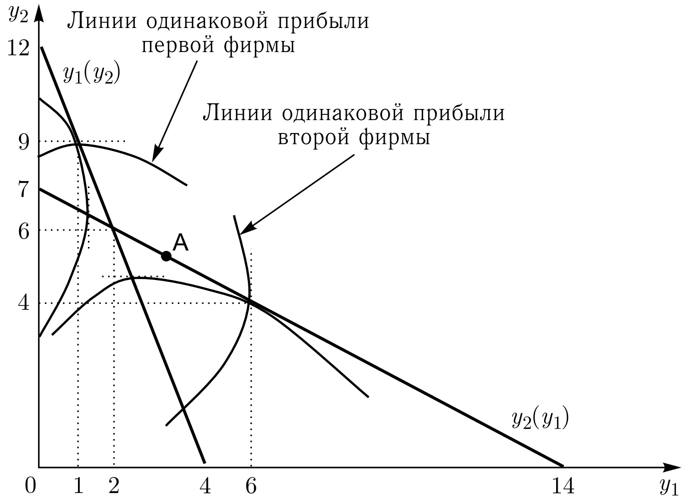

Рис. 5.1

(в) Укажите на рисунке равновесие Штакельберга, если лидером является вторая фирма. Какой объем продукции будет при этом производить ведомая фирма?

(г) Сравните цену продукции в равновесии Курно и Штакельберга, если известно, что функция спроса на продукцию отрасли является убывающей. Ответ поясните.

(д) Если бы первая фирма прекратила свое производство по каким-либо причинам и отрасль была бы монополизирована второй фирмой, то какой объем продукции был бы произведен? Объясните.

(е) Проведя необходимые графические построения, обоснуйте, почему сговор может быть выгоден обеим фирмам, если они находятся в равновесии Курно.

5.73. Рассмотрите конкуренцию Бертрана между двумя фирмами: A и B, функции издержек которых имеют следующий вид: $TC^{\mathsf{A}}(q^{\mathsf{A}}) = cq^{\mathsf{A}}$ и $TC^{\mathsf{B}}(q^{\mathsf{B}}) = cq^{\mathsf{B}}$ соответственно. Функция рыночного спроса имеет вид $Q^d(P)$, причем $\big(Q^d(P)\big)' < 0$, $Q^d(c) > 0$. Предположим, игра длится два периода, в каждом из которых фирмы одновременно выбирают цены.

(а) Найдите равновесие в такой игре.

(б) Изменился бы ваш ответ на вопрос п. (а), если бы игра продолжалась не два периода, а бесконечное число периодов?

5.74. На рынке контактных линз действуют два продавца с идентичными производственными функциями. Предположим, эти продавцы заключили соглашение о разделе рынка. Известно, что если обе фирмы будут следовать соглашению, их прибыль будет составлять по 40 млн руб. ежегодно. Если обе фирмы нарушат соглашение, то они получат прибыль по 15 млн руб. Если одна фирма нарушит соглашение, а вторая — нет, то нарушитель получает 75 млн руб. прибыли, а соблюдавшая соглашение сторона получает 5 млн руб.

(а) Найдите равновесие по Нэшу в неповторяющейся игре.

(б) Найдите величины дисконтирующего фактора, при которых фирмы не будут нарушать соглашение в бесконечно повторяющейся игре (если таковые существуют).

5.75. Рассмотрите модель дуополии, где функции издержек фирм A и B имеют вид $TC^{\mathsf{A}}(q^{\mathsf{A}}) = 4q^{\mathsf{A}}$ и $TC^{\mathsf{B}}(q^{\mathsf{B}}) = 2q^{\mathsf{B}}$ соответственно. Обратная функция спроса на товар имеет вид $P(Q) = 21 - 0{,}5\,Q$. Фирма A может провести инновацию, снижающую ее предельные издержки до уровня предельных издержек фирмы B.

(а) Известно, что фирмы конкурируют путем одновременного выбора объемов продаж. Определите максимальную стоимость инновации, при которой фирма A будет проводить инновацию.

(б) Ответьте на тот же вопрос, если фирмы конкурируют путем выбора объемов продаж и фирма B играет роль лидера.

(в) Как соотносятся величины, найденные в предыдущих пунктах? Предложите объяснение данному соотношению.

5.76. Рассмотрим модель дуополии Бертрана с дифференцированным продуктом. Спрос на продукцию каждой фирмы задан следующими функциями: $q_1(p_1, p_2) = 9 - 2\,p_1 + p_2$, $q_2(p_1, p_2) = 9 - 2\,p_2 + p_1$ соответственно. Функция издержек каждой фирмы $TC(q_i) = q_i$, $i = 1, 2$. Предположим, фирмы отрасли решили вести себя кооперативно, договариваясь об уровне цен. Найдите выпуски, цены и прибыли фирм. Имеют ли фирмы стимулы к отклонению от кооперативного поведения? Приведите графическую иллюстрацию.

5.77. Рассмотрим дуополию с дифференцированным продуктом. Спрос каждой фирмы задан следующими функциями: $q_1(p_1, p_2) = 10 - 2\,p_1 + p_2$, $q_2(p_1, p_2) = 10 - 2\,p_2 + p_1$. Функция издержек каждой фирмы $TC(q_i) = q_i$.

(а) Выведите функции реакции каждой фирмы и изобразите их графически.

(б) Найдите равновесие по Нэшу в игре, где фирмы одновременно выбирают цены (определите равновесные цены, выпуски и прибыль каждой фирмы). Будет ли равновесие устойчивым?

(в) Предположим теперь, что сначала вторая фирма устанавливает цену, а затем первая, наблюдая цену второй фирмы, назначает свою цену. Найдите равновесные цены и выпуски фирм. Как изменились параметры равновесия по сравнению с п. (б)?

5.78.* Рассмотрите отрасль, в которой действуют три фирмы, их предельные издержки: $MC_1 = 2$, $MC_2 = 3$, $MC_3 = 4$ соответственно. Спрос на продукцию отрасли задан функцией $D(p) = 47 - p$.

(а) В предположении, что фирмы взаимодействуют в соответствии с моделью Курно, выведите функции лучших ответов каждой фирмы. Определите равновесные выпуск каждой фирмы, выпуск отрасли и цену продукции. Рассчитайте прибыль каждой фирмы.

(б) Пусть теперь фирмы не одновременно выбирают объем выпускаемой продукции, первая фирма играет роль лидера по объему выпуска, а остальные фирмы — роль последователей (одновременно выбирают объемы). Определите равновесные выпуск каждой фирмы, выпуск отрасли и цену продукции. Рассчитайте прибыль каждой фирмы.

5.79.* Пусть продажу некоторого товара на рынке осуществляют только две фирмы, функции издержек которых имеют вид $TC_1(q_1) = 0{,}5\,q_1^2$ и $TC_2(q_2) = q_2$, где q_1 и q_2 — выпуски первой и второй фирм соответственно. Кривая рыночного спроса на этот товар может быть описана функцией $Q\,(p) = 4 - p$.

(а) Найдите равновесие Курно в отрасли и проиллюстрируйте его графически.

(б) Найдите равновесие Штакельберга, полагая, что первая фирма является доминирующей. Проиллюстрируйте найденное равновесие графически.

(в) Сравните прибыли и выпуски каждой из фирм в моделях Курно и Штакельберга, а также совокупные выпуски отрасли в этих моделях, и приведите графическое обоснование полученных результатов.

5.80. Рассмотрите рынок, на котором потребности в товаре удовлетворяют только две фирмы, конкурирующие путем одновременного выбора объемов выпускаемой продукции. Верно ли, что заключение между фирмами картельного соглашения неизбежно приведет к сокращению отраслевого выпуска?

5.81. Пусть продажу некоторого товара на рынке осуществляют несколько фирм, конкурируя путем одновременного выбора объемов выпускаемой продукции. Верно ли, что создание картеля неизбежно приведет к снижению совокупного благосостояния общества в такой экономике? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

5.82. Рассмотрите отрасль, в которой действуют две фирмы с функциями издержек $TC_1(y_1) = 10\,y_1$, $TC_2(y_2) = 10\,y_2$. Спрос на продукцию отрасли задан функцией $D(p) = 40 - p$.

(а) В предположении, что фирмы взаимодействуют в соответствии с моделью Курно, выведите функции лучших ответов каждой фирмы и изобразите графически. Определите равновесные выпуск каждой фирмы, выпуск отрасли и цену продукции. Рассчитайте прибыль каждой фирмы.

(б) Пусть теперь фирмы взаимодействуют по Штакельбергу, где первая фирма играет роль лидера. Определите равновесные выпуск каждой фирмы, выпуск отрасли и цену продукции.

(в) Предположим, фирмы решили вести себя кооперативно, договариваясь о совокупном объеме продаж. Определите равновесные выпуск отрасли и цену продукции. Рассчитайте прибыль каждой из фирм в предположении, что фирмы делят совокупную прибыль поровну.

(г) Если у фирм есть возможность нарушить соглашение и вести себя некооперативно, то какую стратегию выберет каждая фирма? Определите равновесие в данной игре.

(д) Рассмотрите теперь бесконечно повторяющуюся игру фирм. Каждый игрок максимизирует сумму дисконтированных выигрышей на каждой стадии игры, дисконтирующий множитель равен δ. Может ли быть набор триггерных стратегий равновесием в рассматриваемой игре? Если нет, аргументируйте, если да, найдите соответствующие значения δ.

5.83*. Рассмотрим модификацию модели Бертрана с дифференцированным продуктом. Спрос на продукцию каждой фирмы задан следующими функциями: $q_1(p_1, p_2) = 36 - 4\,p_1 + 2\,p_2$, $q_2(p_1, p_2) = 24 - 4\,p_2 + p_1$. Предельные издержки первой фирмы равны 11, второй фирмы равны 6, постоянных издержек нет.

(а) Выведите функции реакции каждой фирмы и изобразите их графически.

(б) Найдите равновесие по Нэшу в игре, где фирмы одновременно выбирают цены, определив равновесные цены, выпуски и прибыль каждой фирмы. Будет ли равновесие устойчивым?

(в) Предположим, фирмы решили вести себя кооперативно. Найдите равновесные выпуски, цены и прибыли фирм.

(г) Имеют ли фирмы стимулы к отклонению от кооперативного поведения? Если нет, объясните, почему; если да, продемонстрируйте выгодность отклонения.

5.84.* Известно, что на рынке присутствуют две фирмы. Рыночный спрос на товар представлен функцией $Q^d(P) = 80 - 2\,P$. Фирмы выбирают объем мощностей (объем мощности определяет максимальный объем выпуска фирмы). После выбора мощностей фирмы конкурируют ценами на рынке. Известно, что каждая фирма выбрала объем мощности, равной 20. Считайте, что предельные издержки фирм равны нулю. Найдите равновесные ценовые стратегии фирм. Покажите, что фирмы не имеют стимулов к отклонению от этих стратегий.

5.85. Известно, что на рынке присутствуют две фирмы, предельные издержки обеих равны 10. Функция рыночного спроса на товар имеет вид $Q^d(P) = 100 - 5\,P$. Фирмы выбирают объем мощностей. После выбора фирмы конкурируют ценами на рынке. Известно, что каждая фирма выбрала объем мощности, равной 100. Найдите равновесные ценовые стратегии фирм. Покажите, что фирмы не имеют стимулов к отклонению от этих стратегий.

5.86. Рассмотрите отрасль, где конкурируют две фирмы, одновременно выбирая объемы и уровень сервиса, предоставляемого потребителям. Функции издержек фирм имеют вид $TC_1(y_1, e_1) = cy_1 + e_1^2$, $TC_2(y_2, e_2) = cy_2 + e_2^2$ соответственно, где y_i — объем выпуска i-й фирмы, e_i — уровень сервиса i-й фирмы. Обратная функция спроса $P(Q) = a + e - Q$, где $e = e_1 + e_2$ — совокупный уровень сервиса, $a > c$.

(а) Найдите равновесные цену продукции, выпуск и уровень сервиса каждой фирмы.

(б) Как изменится ответ на вопрос п. (а), если фирмы одновременно выбирали бы не выпуски, а цены? (Предположите, что потребители покупают товар у той фирмы, цена которой минимальна. В случае выбора фирмами одинаковых цен, фирмы делят рынок поровну.)

5.12. Решения задач

5.19. Для того чтобы найти чистые потери общества (DWL) до и после введения налога, необходимо найти равновесия на монопольном рынке в обеих ситуациях. Задача максимизации прибыли для монополиста в общем виде имеет вид $\Pi(q) = p(q)\,q - c(q) \to \max\limits_{q\geqslant 0}$, откуда получаем условия первого порядка для внутреннего решения: $MR(q^*) = MC(q^*)$, или $p'(q^*) \cdot q^* + p(q^*) = c'(q^*)$.

Найдем начальное равновесие на рынке монопольного продукта. Условие первого порядка для внутреннего решения данной задачи $100 - q^* = q^*$ дает нам равновесный объем производимой продукции $q^* = 50$, откуда, подставляя найденное значение объема продаж в функцию спроса, находим цену монопольного товара $p^* = 75$.

Заметим, что условие первого порядка в этом случае является не только необходимым, но и достаточным, поскольку целевая функция в задаче монополиста является строго вогнутой. Легко убедиться, что графически в пространстве «количество–деньги» целевая функция $\Pi(q) = (100 - q/2)\,q - q^2/2$ представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз.

Чистые потери общества, связанные с монополизацией отрасли, удобно в данном случае найти, используя графическое представление излишков потребителей и производителя. На рис. 5.2 представлены излишки потребителей и производителя, а также чистые потери общества. Излишек потребителей графически представлен площадью треугольника p^*AC $(CS = S_{p^*AC})$, излишек монополиста графически представлен площадью трапеции p^*ABO $(PS = S_{p^*ABO})$. Поскольку ни производитель, ни потре-

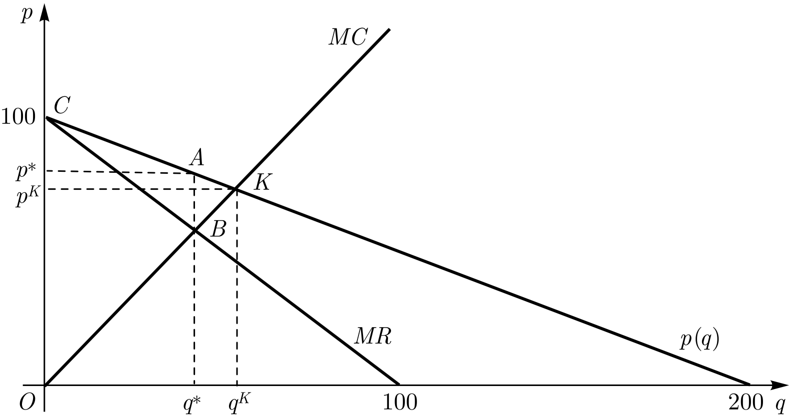

Рис. 5.2. Равновесие на монопольном рынке без вмешательства правительства

битель не облагаются налогами или субсидиями, то доходы или расходы правительства равны нулю. Заметим, что совокупное благосостояние общества было бы максимальным, если бы ценообразование монополии производилось бы на основе предельных издержек. В этом случае Парето-эффективный объем производства монополии составлял бы объем q^K, а совокупное благосостояние общества было бы графически представлено треугольником OKC $\left(TW^K = S_{OKC}\right)$. В этом случае чистые потери общества графически представлены площадью треугольника ABK

$$\left(DWL = S_{ABK} = TW^K - PS - CS = S_{OKC} - (S_{p^*AC} + S_{p^*ABO})\right).$$

Парето-эффективный объем производства будет определяться условием $p^K = MC\left(q^K\right)$, откуда найдем $q^K = 66\frac{2}{3}$, $p^K = 66\frac{2}{3}$. Тогда чистые потери общества составят $DWL = S_{ABK} = 208\frac{1}{3}$.

При введении потоварного налога для производителя цена, по которой потребители будут приобретать товар, больше цены, которую за каждую единицу продукции будет получать монополист, ровно на величину этого потоварного налога. Поскольку потоварный налог увеличивает предельные издержки монополиста на величину этого налога, то условие первого порядка для внутреннего решения задачи монополиста при введении налога имеет вид $MR\left(q^t\right) = MC\left(q^t\right) + t$ или $p'\left(q^t\right)q^t + p\left(q^t\right) = c'\left(q^t\right) + t$, откуда равновесие на монопольном рынке при введении потоварного налога составляет $q^t = 45$, $p^t = 77{,}5$, $p^t_m = 67{,}5$, где p^t — цена, по которой потребители приобретают каждую единицу товара, а p^t_m — цена, которую за каждую единицу своей продукции получает монополист. Рисунок 5.3 иллюстрирует равновесие на монопольном рынке при введении потоварного налога. На этом же рисунке графически представлены излишки потребителей и монополиста, а также доходы правительства от потоварного налогообложения (T) и чистые потери общества. В частности:

$$CS^t = S_{p^tFC}, \quad PS^t = S_{p^t_mLNO}, \quad T = S_{p^t_mLFp^t} = tq^t,$$

$$DWL^t = S_{FKN} = TW^K - \left(CS^t + PS^K + T\right), \text{ где } DWL^t = 352\frac{1}{3}.$$

Таким образом, чистые потери общества увеличились в 1,69 раз.

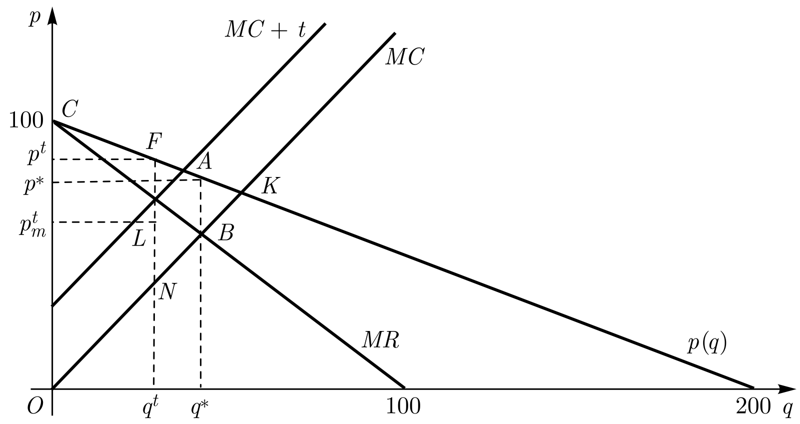

Рис. 5.3. Равновесие на монопольном рынке при введении потоварного налога

5.32. (а) Поскольку монополист не может осуществлять ценовую дискриминацию между регионами, цена монопольного товара должна быть одинакова для всех потребителей.

Задача максимизация прибыли монополиста имеет следующий вид:

$$p\,(q_1+q_2)\,q_1+p\,(q_1+q_2)\,q_2-TC\,(q_1+q_2)\to\max_{q_1\geqslant 0,\,q_2\geqslant 0},$$

или

$$p\,(Q)\,Q-TC\,(Q)\to\max_{Q\geqslant 0}.$$

Совокупный спрос на продукцию монополии находим суммированием объемов спроса в различных регионах при одинаковой цене продукции:

$$Q\,(p)=\begin{cases}26-2\,p, & p\geqslant 10,\\ 36-3\,p, & p<10,\end{cases}$$

тогда обратная функция спроса

$$p\,(Q)=\begin{cases}13-Q/2, & Q\leqslant 6,\\ 12-Q/3, & Q>6.\end{cases}$$

Необходимое условие первого порядка задачи максимизации прибыли при $Q^*>0$ имеет следующий вид: $MR\,(Q^*)=MC\,(Q^*)$.

Заметим, что выручка $TR(Q) = \begin{cases} 13Q - Q^2/2, & Q \leqslant 6, \\ 12Q - Q^2/3, & Q > 6, \end{cases}$ является функцией вогнутой, а функция издержек — выпуклой, поэтому целевая функция в задаче монополиста вогнута, как разность вогнутой и выпуклой функций. В случае нулевого выпуска прибыль монополии равна нулю, в то время как объем выпуска, соответствующий условию первого порядка, при отсутствии у монополии фиксированных издержек даст фирме положительную прибыль. Поэтому ищем только внутренние решения задачи монополиста.

Таким образом, равновесный объем выпускаемой продукции есть решение уравнений

$$13 - Q^* = \frac{31}{24}Q^*, \quad Q^* \leqslant 6,$$

или

$$12 - \frac{2}{3}Q^* = \frac{31}{24}Q^*, \quad Q^* > 6,$$

откуда имеем $Q_1^* = 5\frac{37}{55}$ или $Q_2^* = 6\frac{6}{47}$. Чтобы определить, какой из найденных объемов является равновесным, необходимо сравнить прибыли монополии при этих объемах выпуска:

$$\Pi_1^*(Q_1^*) \approx 36{,}87, \qquad \Pi_2^*(Q_2^*) \approx 36{,}77.$$

Поскольку $\Pi_1^*(Q_1^*) > \Pi_2^*(Q_2^*)$, максимизирующий прибыль монополист будет производить объем товара $Q^* = Q_1^* = 5\frac{37}{55}$. При этом осуществлять продажи своего товара он будет только во втором регионе, а цена будет установлена на уровне $p^* = 10\frac{9}{55}$. Рисунок 5.4 демонстрирует равновесие при отсутствии дискриминации. Заметим, что кривая предельных издержек (прямая в данном случае) дважды пересекает кривую предельного дохода, которая в точке $Q = 6$ имеет разрыв из-за излома кривой совокупного спроса. Монополист выберет из двух возможных вариантов тот объем продаж, который будет максимизировать его прибыль.

(б) Для того чтобы найти чистые потери (DWL), необходимо найти величину совокупного благосостояния общества при Парето-оптимальном распределении (W_{eff}) и вычесть из него величину совокупного благосостояния общества при монополии (W_m).

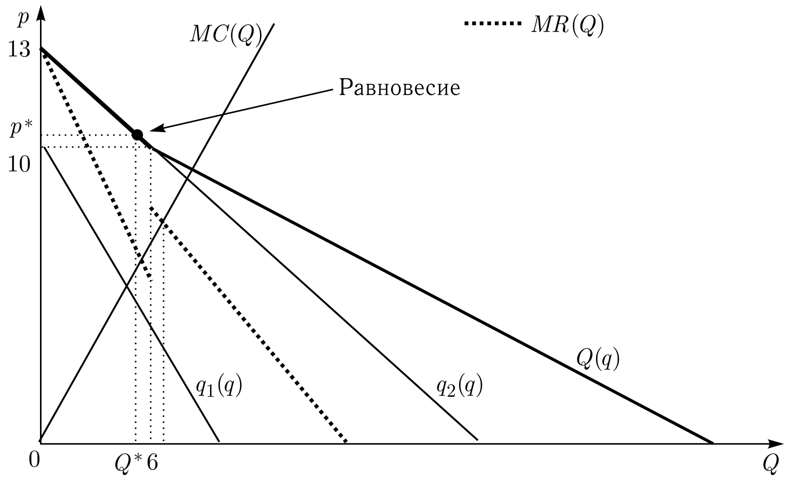

Рис. 5.4. Равновесие при отсутствии дискриминации

Первый подход к решению. Парето-оптимальное состояние в данной квазилинейной экономике является решением следующей задачи (см. [2.3]):

$$\begin{cases} v_1(q_1) + v_2(q_2) - TC(Q) \to \max\limits_{q_1 \geqslant 0,\, q_2 \geqslant 0,\, Q \geqslant 0}, \\ q_1 + q_2 = Q, \end{cases}$$

где функции полезности регионов, порождающие их функции спроса на товар q, имеют вид: $u_i(q_i, m_i) = v_i(q_i) + m_i$, $i = 1, 2$, $v_i(0) = 0$, $v_i'(q_i) > 0$, $v_i''(q_i) \leqslant 0$, а целевая функция в задаче максимизации — функция общественного благосостояния (W).

Запишем условия первого порядка для внутреннего решения задачи на поиск Парето-оптимального распределения, которые в силу вогнутости целевой функции и выпуклости множества, задаваемого ограничениями задачи, являются не только необходимыми, но и достаточными:

$$v_1'(\widetilde{q}_1) = MC(\widetilde{q}_1 + \widetilde{q}_2), \qquad v_2'(\widetilde{q}_2) = MC(\widetilde{q}_1 + \widetilde{q}_2).$$

Подставляя эти условия в условия первого порядка задачи на поиск Парето-оптимальных распределений и учитывая, что

$$v_1'(\widetilde{q}_1) = 10 - \widetilde{q}_1, \qquad v_2'(\widetilde{q}_2) = 13 - 0{,}5\,\widetilde{q}_2,$$

имеем

$$10-\widetilde{q}_1=\frac{31}{24}\left(\widetilde{q}_1+\widetilde{q}_2\right), \qquad 13-\frac{1}{2}\widetilde{q}_2=\frac{31}{24}\left(\widetilde{q}_1+\widetilde{q}_2\right),$$

откуда находим $\widetilde{q}_1=6/13$, $\widetilde{q}_2=90/13$.

Учитывая стандартную предпосылку $v(0)=0$, находим, что функции $v_1(q_1)$ и $v_2(q_2)$ имеют вид $v_1(q_1)=10q_1-q_1^2/2$ и $v_2(q_2)=13q_2-q_2^2/4$. Тогда значение целевой функции совокупного общественного благосостояния в Парето-оптимальном распределении равно

$$W^{\text{eff}}=v_1(\widetilde{q}_1)+v_2(\widetilde{q}_2)-TC(\widetilde{q}_1+\widetilde{q}_2)=47\frac{4}{13}\approx 47{,}3.$$

Следует заметить, что монополия в отсутствии дискриминации производит меньший объем выпуска, чем в оптимальном распределении, т. е. $q_1^*+q_2^*<\widetilde{q}_1+\widetilde{q}_2$, а, значит, будут иметь место чистые потери общества.

Совокупное благосостояние общества при монополии вычислим аналогично:

$$W_m=v_1(q_1^*)+v_2(q_2^*)-TC(q_1^*+q_2^*)=44\frac{2776}{3025}\approx 44{,}9.$$

Тогда $DWL=W^{\text{eff}}-W^m\approx 2,4$.

Второй подход к решению использует графический поиск чистых потерь. Парето-оптимальное распределение можно найти, используя связь между совокупным общественным благосостоянием и излишками потребителей и производителей. В этом случае $W=CS_1+CS_2+PS$, где CS_i — излишек потребителей в i-м регионе, где $i=1,2$, а PS — излишек производителя. В Парето-оптимальном распределении при этом ценообразование будет происходить на основе предельных издержек (предлагаем читателю убедиться самостоятельно, что все предпосылки первой теоремы благосостояния выполнены, а следовательно, равновесие Парето-эффективно):

$$\begin{cases} p_1(\widetilde{q}_1)=MC(\widetilde{q}_1+\widetilde{q}_2), \\ p_2(\widetilde{q}_2)=MC(\widetilde{q}_1+\widetilde{q}_2). \end{cases}$$

Заметим, что эти условия абсолютно идентичны условиям первого порядка задачи на поиск Парето-эффективных распределений, описанным выше. Таким образом, $\widetilde{q}_1=6/13$, $\widetilde{q}_2=90/13$, $\widetilde{p}_1=\widetilde{p}_2=124/13$.

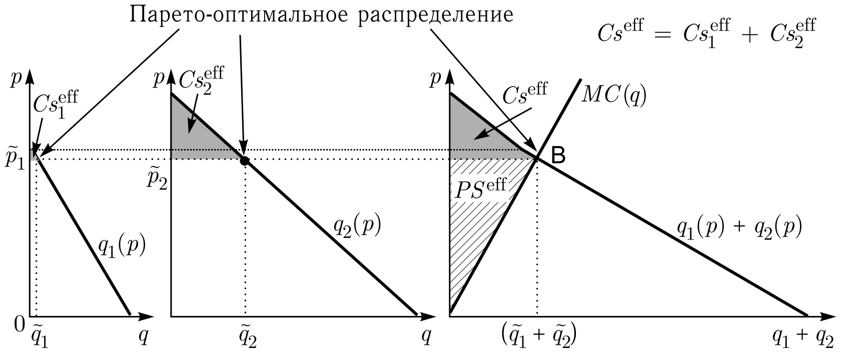

Рис. 5.5. Парето-оптимальные распределения

Рисунок 5.5 демонстрирует графический поиск Парето-оптимальных распределений и излишков потребителей и производителей. Для того чтобы найти это распределение, изобразим кривую совокупного спроса $(q_1(p) + q_2(p))$, каждая точка которой по горизонтальной оси есть сумма объемов спроса на товар q в обоих регионах при каждой цене товара. Точка пересечения полученной кривой совокупного спроса и кривой предельных издержек (точка B на рис. 5.5) определяет положение Парето-оптимального распределения. Проведем от точки B влево горизонтальную прямую. Горизонтальные координаты точек пересечения этой прямой с кривыми спроса в каждом регионе определяют эффективный (оптимальный) объем продаж товара ($\widetilde{q}_1$ и $\widetilde{q}_2$) в этих регионах по цене, являющейся вертикальной координатой точки B ($\widetilde{p} = \widetilde{p}_1 = \widetilde{p}_2$). Излишки потребителей на данном рисунке представлены областями, закрашенными серым цветом, а излишек производителя — областью, заштрихованной диагональными линиями.

Излишки потребителей в каждом регионе вычислим, как площади соответствующих треугольников, а излишек производителя от продажи объема $(\widetilde{q}_1 + \widetilde{q}_2)$ при $\widetilde{p} = p_1(\widetilde{q}_1) = p_2(\widetilde{q}_2) = 9\dfrac{7}{13}$ вычислим, как площадь соответствующего треугольника. Таким образом,

$$CS_1^{\text{eff}} = \frac{1}{2}\widetilde{q}_1\,(10 - \widetilde{p}) = \frac{18}{169}, \quad CS_2^{\text{eff}} = \frac{1}{2}\widetilde{q}_2\,(13 - \widetilde{p}) = 11\frac{166}{169},$$

$$PS^{\text{eff}} = \frac{1}{2}\,(\widetilde{q}_1 + \widetilde{q}_2)\,\widetilde{p} = 35\frac{37}{169},$$

откуда

$$W^{\text{eff}} = CS_1^{\text{eff}} + CS_2^{\text{eff}} + PS^{\text{eff}} = 47\frac{4}{13}.$$

Следует заметить, что, как и следовало ожидать, мы получили тот же объем совокупного благосостояния, как и в расчетах выше.

Совокупное благосостояние общества при монополии мы найдем как сумму излишков потребителей при монополии и монополиста, т. е. $W^m = CS_1^m + CS_2^m + PS^m$. Поскольку в равновесии при монополии продажи будут осуществляться только во втором регионе, то излишек потребителей первого региона равен нулю.

Рисунок 5.6 иллюстрирует излишки потребителей и монополии при отсутствии дискриминации. Треугольник, закрашенный серым цветом, соответствует графическому изображению излишка потребителей второго региона, а трапеция, заштрихованная диагональными линиями, соответствует графическому изображению излишка монополиста. Посчитаем излишки агентов, как площади соответствующих фигур:

$$CS_2^m = \frac{1}{2}Q^*\,(13 - p^*) \approx 8{,}0,$$
$$PS^m = \frac{1}{2}Q^*\,(p^* + (p^* - MC\,(Q^*))) \approx 36{,}9,$$
$$W^m = CS_2^m + PS^m \approx 44{,}9.$$

Следовательно, $DWL = W^{\text{eff}} - W^m \approx 2{,}4$.

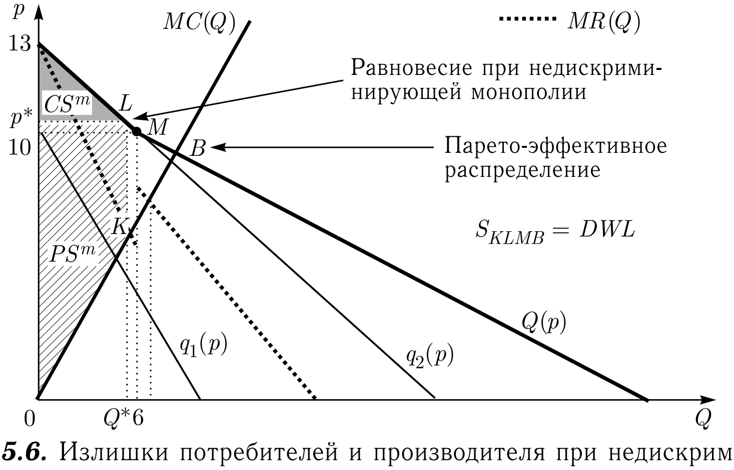

Рис. 5.6. Излишки потребителей и производителя при недискриминирующей монополии

Графически площадь четырехугольника $KLMB$ соответствует безвозвратным потерям общества (см. рис. 5.6).

(в) При возможности дискриминации монополист может назначать для каждого региона свою цену товара. Такая ценовая дискриминация относится к 3-му типу. Задача монополиста в этом случае имеет вид:

$$p_1(q_1)\,q_1 + p_2(q_2)\,q_2 - TC(q_1+q_2) \to \max_{q_1 \geqslant 0,\, q_2 \geqslant 0}.$$

Необходимые условия первого порядка задачи максимизации прибыли в этом случае при $\overline{q}_1 > 0$ и $\overline{q}_2 > 0$ имеют вид:

$$\begin{cases} MR_1(\overline{q}_1) = MC(\overline{q}_1 + \overline{q}_2), \\ MR_2(\overline{q}_2) = MC(\overline{q}_1 + \overline{q}_2). \end{cases}$$

Действительно, дополнительная единица выпуска (бесконечно малая при непрерывных функциях спроса и издержек) в точке равновесия при положительных объемах выпуска должна приносить монополисту в каждом регионе одинаковый предельный доход, равный затратам на выпуск этой единицы. Иначе ему следовало бы перераспределить продажу таким образом, чтобы сократить ее на одну единицу в регионе, где предельный доход меньше, и увеличить продажу на одну единицу в регионе, где предельный доход больше, увеличив при этом прибыль фирмы.

Доходы монополии в каждом регионе $TR_1 = 10\,q_1 - q_1^2$ и $TR_2 = 13\,q_2 - q_2^2/2$ являются функциями вогнутыми, а функция издержек — выпуклой, поэтому целевая функция в задаче максимизации является вогнутой, вследствие чего условия первого порядка задачи максимизации прибыли являются достаточными. Кроме того, как и в п. (а), нет смысла рассматривать невнутренние решения. Следовательно, для данных функций спроса и издержек равновесные объемы продаж в каждом регионе являются решением системы

$$\begin{cases} 10 - 2\,\overline{q}_1 = \dfrac{31}{24}(\overline{q}_1 + \overline{q}_2), \\[2ex] 13 - \overline{q}_2 = \dfrac{31}{24}(\overline{q}_1 + \overline{q}_2), \end{cases}$$

откуда равновесные объемы продаж в каждом регионе $\overline{q}_1 = 1\dfrac{6}{141}$ и $\overline{q}_2 = 5\dfrac{12}{141}$.

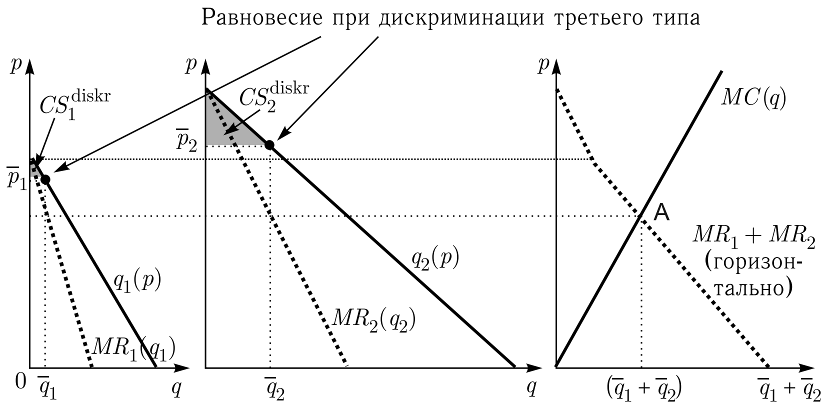

Рис. 5.7. Равновесие при ценовой дискриминации третьего типа

Равновесные цены, которые в каждом регионе будут назначены монополистом: $\overline{p}_1 = 8\dfrac{135}{141}$ и $\overline{p}_2 = 10\dfrac{43}{94}$.

Рисунок 5.7 демонстрирует равновесие при монополии с возможностью назначать различные цены в разных регионах. Для того чтобы графически найти равновесие, изобразим кривую $MR_1 + MR_2$, каждая точка которой получена путем сложения объемов продаж в каждом регионе при каждом значении предельного дохода. Равновесный совокупный объем выпуска соответствует точке пересечения полученной кривой $MR_1 + MR_2$ и кривой предельных издержек (точка A, рис. 5.7). Проведем из точки A горизонтальную прямую до пересечения ее с кривыми предельных доходов каждого региона. Соответствующие горизонтальные координаты указанных точек пересечения будут удовлетворять условию равновесия $\begin{cases} MR_1\left(\overline{q}_1\right) = MC\left(\overline{q}_1 + \overline{q}_2\right), \\ MR_2\left(\overline{q}_2\right) = MC\left(\overline{q}_1 + \overline{q}_2\right). \end{cases}$ Равновесные цены для каждого региона определим по кривым спроса при объемах продаж $\overline{q}_1$ и $\overline{q}_2$.

(г) Найдем величину совокупного благосостояния общества при возможности дискриминации третьего типа, как сумму излишка монополиста и излишков потребителей в каждом регионе. Рисунок иллюстрирует излишки потребителей в каждом регионе при возможности монополии назначать различные цены в регионах. Области, закрашенные серым цветом, соответствуют излишкам потребителей в каждом регионе. Значение этих величин найдем как площади соответствующих треугольников:

$$CS_1^{\text{diskr}} = \frac{1}{2}\overline{q}_1\left(10 - \overline{p}_1\right) \approx 0{,}5, \quad CS_2^{\text{diskr}} = \frac{1}{2}\overline{q}_2\left(13 - \overline{p}_2\right) \approx 6{,}5.$$

Излишек монополиста вычислим, пользуясь определением излишка производителя, как разность между выручкой монополиста и его переменными издержками. В данном случае

$$PS^{\text{diskr}} = \overline{p}_1\overline{q}_1 + \overline{p}_2\overline{q}_2 - TC\left(\overline{q}_1 + \overline{q}_2\right),$$

поскольку фиксированных издержек у монополиста нет. Таким образом, $PS^{\text{diskr}} \approx 38{,}3$ и величина совокупного благосостояния

$$W^{\text{diskr}} = CS_1^{\text{diskr}} + CS_2^{\text{diskr}} + PS^{\text{diskr}} \approx 45{,}3,$$

$$DWL = W^{\text{eff}} - W^{\text{diskr}} \approx 2.$$

Заметим, что совокупный излишек потребителей при возможности дискриминации ниже, чем в равновесии без ценовой дискриминации, а излишек монополии выше при возможности дискриминации, чем в равновесии без дискриминации. Действительно, возможность назначать различные цены для разных регионов не может снизить прибыль монополии. При этом чистые потери общества больше при отсутствии дискриминации, чем при возможности для монополиста дискриминировать, а, значит, совокупное благосостояние общества оказалось выше при дискриминации. Поскольку предельные издержки монополиста возрастают, отсутствие продажи монопольного товара на одном из рынков для недискриминирующей монополии не привело к тому, что излишек потребителей возрос при возможности дискриминации.

5.49. В модели Курно фирмы одновременно выбирают выпуски, руководствуясь критерием максимизации собственной прибыли. Равновесием в такой игре будет набор выпусков фирм, каждый из которых приносит максимальную прибыль выбравшей его фирме при равновесном выпуске конкурента.

Рассмотрим задачу первой фирмы:

$$p\left(y_1 + y_2\right) \cdot y_1 - \left(y_1^2 + 7y_1\right) \to \max_{y_1 \geqslant 0}.$$

Цена, по которой фирма может продать свою продукцию, определяется рыночным спросом и зависит от выпуска фирмы-конкурента:

$$p\left(y_1 + y_2\right) = 100 - \left(y_1 + y_2\right).$$

Условия первого порядка (в силу вогнутости целевой функции эти условия будут достаточными) при положительных объемах выпусков имеют вид:

$$100 - 2y_1 - y_2 - (2y_1 + 7) = 0, \quad 100 - 2y_2 - y_1 - (2y_2 + 13) = 0.$$

Решая полученную систему, находим $\widetilde{y}_1 = 19$, $\widetilde{y}_2 = 17$. Равновесный объем выпуска отрасли $\widetilde{Q} = 36$, равновесную цену определим из функции спроса $\widetilde{P} = 64$.

Несложно проверить, что в равновесии выпуск одной из фирм не может быть равен нулю.

5.60. В данном случае конкуренция описывается моделью Бертрана. Рассмотрим различные комбинации цен фирм.

1. $\exists\, i\colon p_i < c$.

В этом случае фирма, устанавливающая минимальную цену, будет иметь отрицательную прибыль, так как ее цена будет меньше средних издержек. Поэтому, как минимум, одна эта фирма будет иметь стимулы к отклонению — повышению цены до уровня, при котором она будет иметь бóльшую (например, нулевую) прибыль.

2. $p_i > c \ \forall\, i = \overline{1,10}$.

В этом случае каждая фирма (кроме фирмы, имеющую минимальную цену — назовем эту фирму первой) имеет стимул к отклонению. Покажем это. Прибыль первой фирмы равна $\pi_1 = (p_1 - c)(a - bp_1) > 0$, прибыли всех остальных фирм $\pi_i = 0$, поскольку потребители покупают товар у первой фирмы. Тогда i-я фирма имеет стимул снизить свою цену (при фиксированных ценах остальных фирм) до $p_i = p_1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — бесконечно малая величина, поскольку в этом случае прибыль i-й фирмы увеличивается (становится положительной $\pi_i = (p_1 - \varepsilon - c)(a - b(p_1 - \varepsilon)) > 0$). Таким образом, рассмотренный вектор цен не может быть равновесием. Случай, когда не одна фирма имеет минимальную цену, отдельно не рассматриваем, поскольку в этом случае все фирмы будут иметь стимулы к отклонению: фирмы, имеющие бóльшие цены, будут иметь стимулы к отклонению по причине, описанной выше. Фирмы, имеющие минимальную цену, также готовы будут снизить цену на бесконечно малую величину, так как в этом случае фирма получит весь рынок, цена при этом в пределе не изменится, следовательно, прибыль вырастет за счет увеличения объема продаж.

3. $\exists\, j\colon p_j = c$, все остальные $p_i > c$.

В этом случае все фирмы имеют нулевую прибыль: j-я фирма удовлетворяет весь рыночный спрос по цене, равной средним издержкам, остальные фирмы имеют нулевой объем продаж. Только j-я фирма имеет стимулы к отклонению — к увеличению своей цены так, чтобы ее цена по-прежнему была минимальной. В этом случае фирма будет обеспечивать весь объем продаж на рынке по цене, превосходящей ее средние издержки — в таком случае прибыль фирмы станет положительной. Таким образом, рассмотренный вектор цен не может быть равновесным.

4. $\exists\, j, k\colon p_j = c,\ p_k = c$, все остальные $p_i > c$.

В этом случае ни одна из фирм не имеет стимул к отклонению. Те фирмы, цена которых равна средним издержкам, имеют нулевую прибыль. Отклоняясь, они не могут увеличить прибыль — при понижении цены прибыль становится отрицательной, при повышении цены фирма будет иметь нулевой выпуск и прибыль будет по-прежнему нулевой. Фирмы, чья цена больше средних издержек, также имеют нулевую прибыль из-за отсутствия продаж и не могут ее увеличить (получить положительную прибыль). Таким образом, данный вектор цен является равновесием.

5. Обобщим 4-й случай. Равновесием будет любой вектор цен, в котором цены хотя бы двух фирм будут равны средним (предельным) издержкам — в этом случае ни у одной фирмы не будет стимулов к отклонению.

5.64. В данной игре фирма лидер выбирает цену, после чего конкурентное окружение, воспринимая цену лидера как заданную, выбирает объем выпусков. Решим данную игру методом обратной индукции.

Найдем предложение фирм-последователей.

Поскольку фирмы-последователи ведут себя как совершенно конкурентные фирмы, предложение каждой фирмы найдем из условий $p = MC_i(q_i)$ и $p \geqslant \min AC_i(q_i)$ (функции MC являются возрастающими функциями): $p = 2\,q_i + 2$ и $p \geqslant q_i + 2$;
$q_i(p) = \begin{cases} 0{,}5\,p - 1, & p \geqslant 2, \\ 0, & p < 2, \end{cases}$ — функция предложения i-й фирмы;

$\sum\limits_{i=1}^{4} q_i(p) = \begin{cases} 2\,p-4, & p \geqslant 2, \\ 0, & p < 2, \end{cases}$ — функция предложения конкурентного окружения.

Фирма-лидер выбирает цену, максимизируя прибыль на остаточном спросе. Найдем остаточный спрос для фирмы-лидера:

$$Q^{\text{ост}}(p) = Q^d(p) - \sum_{i=1}^{4} q_i(p) = 96 - 2\,p - (2\,p-4) = 100 - 4\,p,$$

если производить будут все фирмы;

$$Q^{\text{ост}}(p) = \begin{cases} 100-4\,p, & p \geqslant 2,\ p \leqslant 25, \\ 96-2\,p, & p < 2, \\ 0, & p > 25. \end{cases}$$

Найдем функцию издержек фирмы-лидера (поскольку фирма-лидер состоит из двух объединившихся фирм, то ситуация аналогична случаю фирмы с двумя заводами):

$$\begin{cases} q_1^2 + 2q_1 + q_2^2 + 2q_2 \to \min\limits_{q_1, q_2 \geqslant 0}, \\ q_1 + q_2 = q_L. \end{cases}$$

Решением данной задачи являются выпуски $q_1 = q_2 = 0{,}5\,q_L$, и функция издержек фирмы лидера будет иметь вид $TC_L(q_L) = 0{,}5\,q_L^2 + 2\,q_L$, где q_L — выпуск лидера.

Таким образом, запишем задачу максимизации прибыли фирмы-лидера:

$$p \cdot Q^{\text{ост}}(p) - 0{,}5 \cdot \left(Q^{\text{ост}}(p)\right)^2 - 2 \cdot Q^{\text{ост}}(p) \to \max_{p \geqslant 0}.$$

Рассмотрим случай $25 \geqslant p \geqslant 2$:

$$p \cdot (100 - 4\,p) - 0{,}5 \cdot (100 - 4\,p)^2 - 2\,(100 - 4\,p) \to \max_{p \geqslant 0}.$$

Условие первого порядка $(100-8\,p)-(100-4\,p)\cdot(-4)-2\cdot(-4)=0$, отсюда $p \approx 21{,}16$.

Проверим случай $p < 2$:

$$p \cdot (96 - 2\,p) - 0{,}5 \cdot (96 - 2\,p)^2 - 2\,(96 - 2\,p) \to \max_{p \geqslant 0}.$$

Условие первого порядка $(96-2\,p)-(96-2\,p)\cdot(-2)-2\cdot(-2)=0$, отсюда $p \approx 48$ — не удовлетворяет условию $p < 2$.

Таким образом, равновесная цена $\widetilde{p} \approx 21{,}16$, выпуск лидера $\widetilde{q}_L \approx 15{,}36$, выпуск каждой фирмы из конкурентного окружения $\widetilde{q}_i \approx 9{,}58$.

Приведем графическую иллюстрацию (см. рис. 5.8).

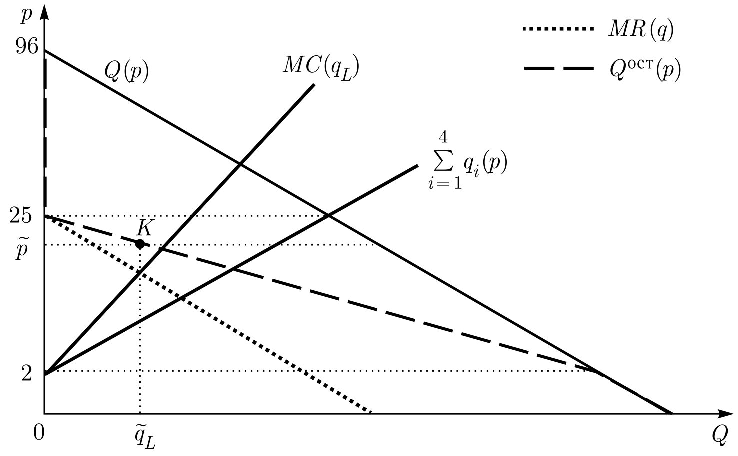

Рис. 5.8. Равновесие в модели с ценовым лидерством

5.68. В этом случае фирмы будут выбирать такие выпуски, при которых совокупная прибыль будет максимальна. Таким образом, задача фирм выглядит следующим образом:

$$(43 - y_1 - y_2) \cdot (y_1 + y_2) - TC_1(y_1) - TC_2(y_2) \to \max_{y_1, y_2 \geqslant 0}.$$

Условия первого порядка данной задачи (являются достаточными в силу вогнутости целевой функции) для внутреннего решения:

$$43 - 2\,y_1 - 2\,y_2 - 2 - y_1 = 0,$$

$$43 - 2\,y_1 - 2\,y_2 - 4 - y_2 = 0.$$

Решением данной системы является набор выпусков $\widetilde{y}_1 = 9$, $\widetilde{y}_2 = 7$. Равновесный выпуск отрасли составит $\widetilde{Y} = 9 + 7 = 16$, равновесная цена $\widetilde{P} = 43 - 16 = 27$.

5.71. (a) В данном случае имеет место конкуренция по Штакельбергу, где фирма A — лидер — первой принимает решение об объеме выпуска, а фирма B — последователь — выбирает свой объем выпуска, воспринимая выпуск фирмы A как заданный. Поскольку игра является последовательной, решим ее методом обратной индукции: когда фирма A принимает решение о своем объеме выпуска, она принимает во внимание, как на этот выпуск отреагирует фирма B.

Рассмотрим задачу максимизации прибыли фирмы-последователя (фирмы B):

$$(10 - \overline{q}^{\mathsf{A}} - q^{\mathsf{B}}) \cdot q^{\mathsf{B}} - 5 - q^{\mathsf{B}} \to \max_{q^{\mathsf{B}} \geqslant 0}.$$

Из условия первого порядка (которое является достаточным в силу строгой вогнутости целевой функции) найдем оптимальный выпуск фирмы B при заданном выпуске фирмы A. Функция реакции фирмы B:

$$q^{\mathsf{B}}(q^{\mathsf{A}}) = \begin{cases} (9 - q^{\mathsf{A}})/2, & q^{\mathsf{A}} < 9, \\ 0, & q^{\mathsf{A}} \geqslant 9. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу максимизации прибыли фирмы A — лидера:

$$\big(10 - q^{\mathsf{A}} - (9 - q^{\mathsf{A}})/2\big) \cdot q^{\mathsf{A}} - 5 - q^{\mathsf{A}} \to \max_{q^{\mathsf{A}} \geqslant 0}.$$

Выпишем условия первого порядка данной задачи (условия являются достаточными в силу вогнутости целевой функции):

$$10 - 2\,q^{\mathsf{A}} - 4{,}5 + q^{\mathsf{A}} - 1 = 0, \quad \text{если } q^{\mathsf{A}} > 0,$$
$$10 - 2\,q^{\mathsf{A}} - 4{,}5 + q^{\mathsf{A}} - 1 \leqslant 0, \quad \text{если } q^{\mathsf{A}} = 0.$$

Из данного условия находим равновесный выпуск фирмы-лидера: $\widetilde{q}^{\mathsf{A}} = 4{,}5$. По функции реакции фирмы-последователя определяем, что фирма B будет реагировать на выпуск лидера положительным выпуском и в равновесии выпуск фирмы B будет равен $\widetilde{q}^{\mathsf{B}} = 2{,}25$.

Равновесную цену пиццы найдем из функции рыночного спроса: $\widetilde{P} = 10 - 4{,}5 - 2{,}25 = 3{,}25$.

(б) При одновременном выборе выпусков имеет место конкуренция Курно. В случае, когда одна из фирм имеет возможность первой выбрать выпуск, данная фирма может увеличить свою прибыль. Поэтому максимальная сумма, которую готова заплатить фирма за данную возможность, равна приросту ее прибыли.

В случае, когда фирма A первой выбирает объем выпуска (равновесие найдено в предыдущем пункте), ее прибыль равна $\widetilde{\pi}^{\mathsf{A}} = 3{,}25 \cdot 4{,}5 - 5 - 4{,}5 = 5{,}125$.

Определим прибыль фирмы A, которую она имела бы при конкуренции по Курно. Для этого найдем характеристики равновесия Курно. Функция реакции фирмы B найдена в п. (а), функцию реакции фирмы A выпишем, исходя из симметричности фирм:

$$q^{\mathsf{A}}(q^{\mathsf{B}}) = \begin{cases} (9 - q^{\mathsf{B}})/2, & \text{если } q^{\mathsf{B}} < 9, \\ 0, & \text{если } q^{\mathsf{B}} \geqslant 9. \end{cases}$$

Равновесные выпуски определяются пересечением функций реакций, решением системы из двух функций реакций являются следующие выпуски: $\widehat{q}^{\mathsf{A}} = \widehat{q}^{\mathsf{B}} = 3$. При конкуренции по Курно прибыль фирмы A составляет $\widehat{\pi}^{\mathsf{A}} = (10 - 3 - 3) \cdot 3 - 5 - 3 = 4$.

Таким образом, прирост прибыли фирмы A при изменении типа конкуренции составляет 1,125 — это максимальная сумма, которую готова отдать фирма A, чтобы играть роль лидера.

(в) В случае, когда фирма B играет роль последователя, позволяя фирме A первой выбирать объем выпуска, прибыль фирмы B снижается. При одновременном выборе выпусков прибыль фирмы B составляет $\widehat{\pi}^{\mathsf{B}} = (10 - 3 - 3) \cdot 3 - 5 - 3 = 4$. В случае, когда фирма B позволяет фирме A играть роль лидера, фирма B получит прибыль $\widetilde{\pi}^{\mathsf{A}} = 3{,}25 \cdot 2{,}25 - 5 - 2{,}25 = 0{,}0625$. Таким образом, чтобы компенсировать фирме B снижение прибыли, ей нужно выплатить 3,9375, что значительно больше, чем сумма, найденная в п. (б).

5.78. (а) Рассмотрим задачу максимизации прибыли каждой фирмы и определим их функции реакции.

Задача первой фирмы:

$$(47 - q_1 - q_2 - q_3) \cdot q_1 - TC_1(q_1) \to \max_{q_1 \geqslant 0}.$$

Условие первого порядка (является достаточным, поскольку целевая функция строго вогнута):

$$47 - 2\,q_1 - q_2 - q_3 - 2 = 0, \quad \text{если } q_1 > 0,$$
$$47 - 2\,q_1 - q_2 - q_3 - 2 \leqslant 0, \quad \text{если } q_1 = 0,$$

откуда найдем функцию реакции первой фирмы:

$$q_1 = \begin{cases} \dfrac{45 - q_2 - q_3}{2}, & q_2 + q_3 < 45, \\ 0, & q_2 + q_3 \geqslant 45. \end{cases}$$

Задача второй фирмы:

$$(47 - q_1 - q_2 - q_3) \cdot q_2 - TC_2(q_2) \to \max_{q_2 \geqslant 0}.$$

Условие первого порядка (является достаточным, поскольку целевая функция строго вогнута):

$$47 - q_1 - 2q_2 - q_3 - 3 = 0, \quad \text{если } q_2 > 0,$$
$$47 - 2q_1 - 2q_2 - q_3 - 3 \leqslant 0, \quad \text{если } q_2 = 0,$$

откуда найдем функцию реакции второй фирмы:

$$q_2 = \begin{cases} \dfrac{44 - q_1 - q_3}{2}, & q_1 + q_3 < 44, \\ 0, & q_1 + q_3 \geqslant 44. \end{cases}$$

Задача третьей фирмы:

$$(47 - q_1 - q_2 - q_3) \cdot q_3 - TC_3(q_3) \to \max_{q_3 \geqslant 0}.$$

Условие первого порядка (является достаточным, поскольку целевая функция строго вогнута):

$$47 - q_1 - q_2 - 2q_3 - 4 = 0, \quad \text{если } q_3 > 0,$$
$$47 - q_1 - q_2 - 2q_3 - 4 \leqslant 0, \quad \text{если } q_3 = 0,$$

откуда найдем функцию реакции третьей фирмы:

$$q_3 = \begin{cases} \dfrac{43 - q_1 - q_2}{2}, & q_1 + q_2 < 43, \\ 0, & q_1 + q_2 \geqslant 43. \end{cases}$$

Определим равновесные выпуски как пересечение функций реакций: $\widetilde{q}_1 = 12$, $\widetilde{q}_2 = 11$ и $\widetilde{q}_3 = 10$. Равновесный выпуск отрасли $\widetilde{Q} = 12 + 11 + 10 = 33$. Равновесную цену определим из функции рыночного спроса $\widetilde{P} = 47 - 33 = 14$. Прибыли фирм составят: $\widetilde{\pi}_1 = 14 \cdot 12 - 2 \cdot 12 = 144$, $\widetilde{\pi}_2 = 14 \cdot 11 - 3 \cdot 11 = 121$ и $\widetilde{\pi}_2 = 14 \times \times 10 - 4 \cdot 10 = 100$.

(б) Данная игра между фирмами является последовательной игрой, где первой принимает решение о выпуске первая фирма, после чего вторая и третья фирмы одновременно принимают решения о своих выпусках, воспринимая выпуск первой фирмы как заданный. Решим игру методом обратной индукции.

На последнем шаге игры принимают решение вторая и третья фирмы. Их функции реакции были найдены в п. (а). Найдем равновесие на этом шаге игры как пересечение функций реакций:

$$q_2 = \begin{cases} (44 - q_1 - q_3)/2, & q_1 + q_3 < 44, \\ 0, & q_1 + q_3 \geqslant 44; \end{cases}$$

$$q_3 = \begin{cases} (43 - q_1 - q_2)/2, & q_1 + q_2 < 43, \\ 0, & q_1 + q_2 \geqslant 43, \end{cases}$$

и найдем выпуски данных фирм как функции от выпуска лидера — первой фирмы:

$$q_2 = \begin{cases} (45 - q_1)/3, & q_1 < 45, \\ 0, & q_1 \geqslant 45, \end{cases} \qquad q_3 = \begin{cases} (42 - q_1)/3, & q_1 < 42, \\ 0, & q_1 \geqslant 42. \end{cases}$$

Запишем задачу максимизации прибыли фирмы-лидера (вместо выпусков фирм-последователей подставляем их функции реакции):

$$\left(47 - q_1 - \frac{45 - q_1}{3} - \frac{42 - q_1}{3}\right) \cdot q_1 - TC_1(q_1) \to \max_{q_1 \geqslant 0}.$$

Решением этой задачи является выпуск $\widehat{q}_1 = 24$. Выпуски фирм-последователей равны $\widehat{q}_2 = 7$ и $\widehat{q}_1 = 6$. Равновесная цена $\widetilde{P} = 47 - 24 - 7 - 6 = 10$. Прибыли фирм составят: $\widehat{\pi}_1 = 10 \cdot 24 - 2 \cdot 24 = 192$, $\widehat{\pi}_2 = 10 \cdot 7 - 3 \cdot 7 = 49$ и $\widehat{\pi}_2 = 10 \cdot 6 - 4 \cdot 6 = 36$.

5.79. (а) В данном случае фирмы конкурируют путем одновременного установления объемов выпусков. В равновесии Курно каждая из фирм определяет свой выпуск, полагая выпуск продукции конкурентом заданным. Задача максимизации прибыли каждой фирмы имеет следующий вид:

$$\Pi_1 = (4 - q_1 - q_2)\, q_1 - q_1^2/2 \to \max_{q_1 \geqslant 0},$$

откуда из условий первого порядка, которые в силу вогнутости целевой функции являются необходимыми и достаточными, получаем функцию реакции первой фирмы в зависимости от выпуска второй фирмы:

$$q_1(q_2) = \begin{cases} (4 - q_2)/3, & q_2 \leqslant 4, \\ 0, & q_2 > 4. \end{cases}$$

Аналогично для второй фирмы решаем задачу максимизации ее прибыли:

$$\Pi_2 = (4 - q_1 - q_2)\, q_2 - q_2 \to \max_{q_2 \geqslant 0},$$

откуда получаем кривую реакции второй фирмы в зависимости от выпуска первой фирмы:

$$q_2(q_1) = \begin{cases} (3 - q_1)/2, & q_1 \leqslant 3, \\ 0, & q_1 > 3. \end{cases}$$

Заметим, что в силу вида кривых реакции, если равновесие существует, то оно единственно.

Равновесие найдем, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} q_1(q_2) = (4 - q_2)/2, \\ q_2(q_1) = (3 - q_1)/3, \end{cases}$$

откуда находим равновесный выпуск каждой фирмы: $q_1^c = q_2^c = 1$ и по функции рыночного спроса определяем равновесную цену: $p^c = 2$.

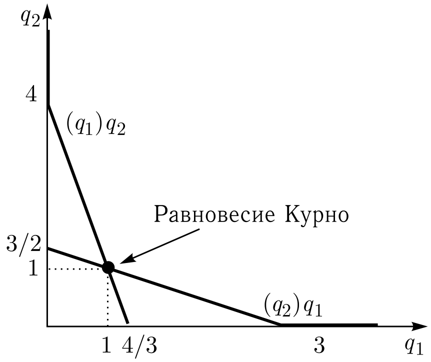

Рис. 5.9. Равновесие Курно

Рисунок 5.9 иллюстрирует равновесие Курно в данной задаче.

(б) По условию первая фирма является доминирующей, она устанавливает выпуск продукции первой. Вторая фирма является в этом случае ведомой и устанавливает объем своего выпуска в зависимости от выпуска фирмы-лидера.

Лидер знает, что его действия оказывают влияние на выбор объема выпуска ведомым. Следовательно, выбирая свой объем выпуска, лидер должен признавать влияние, оказываемое им на ведомого. Поэтому, решая задачу, мы воспользуемся методом обратной индукции, решив сначала задачу ведомого, а затем задачу лидера, при условии, что лидер знает, какова будет реакция ведомого на принятое лидером решение.

Задача ведомого в этом случае:

$$\Pi_2 = (4 - q_1 - q_2)q_2 - q_2 \to \max_{q_2 \geqslant 0}.$$

Откуда из условий первого порядка, являющихся необходимыми и достаточными в силу вогнутости целевой функции, находим, как и в предыдущем пункте, максимизирующий прибыль выпуск ведомого как функцию объема выпуска лидера, т. е. функцию реакции, которая показывает, как будет реагировать ведомый на выбор объема выпуска лидера:

$$q_2(q_1) = \begin{cases} (3 - q_1)/2, & q_1 \leqslant 3, \\ 0, & q_1 > 3. \end{cases}$$

Задача максимизации прибыли лидера тогда имеет вид:

$$\begin{cases} \Pi_1 = (4 - q_1 - q_2\,(q_1))q_1 - q_1^2/2 \to \max\limits_{q_1 \geqslant 0}, \\ q_2(q_1) = \begin{cases} (3 - q_1)/2, & q_1 \leqslant 3, \\ 0, & q_1 > 3, \end{cases} \end{cases}$$

откуда находим выпуск лидера: $q_1^s = 1{,}25$. Подставляя найденное значение в функцию реакции ведомого на выпуск лидера, находим выпуск ведомого $q_2^s = 0{,}875$. Подставляя найденные значения выпусков в функцию рыночного спроса, найдем равновесную цену $p^s = 1{,}875$.

Рисунок 5.10 иллюстрирует равновесие Штакельберга.

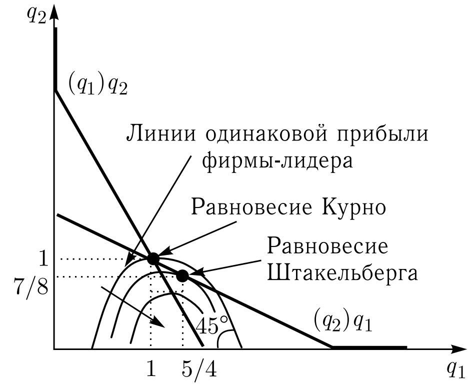

Рис. 5.10. Равновесие Штакельберга

(в) Прибыли фирм в каждой модели составляют $\Pi_1^c = 1{,}5$, $\Pi_2^c = 1$, $\Pi_1^s = 25/16$, $\Pi_2^s = 49/64$. Прибыль фирмы-лидера в равновесии Штакельберга больше, чем прибыль этой же фирмы в равновесии Курно, а прибыль ведомого меньше, чем прибыль этой же фирмы в равновесии Курно.

Сравнивая выпуски, заметим, что выпуск ведомого меньше, чем выпуск этой же фирмы в равновесии Курно, а выпуск фирмы-лидера в равновесии Штакельберга больше, чем выпуск этой же фирмы в равновесии Курно. Совокупный выпуск отрасли больше в равновесии Штакельберга, чем в равновесии Курно.

Приведем теперь графическое обоснование полученных результатов.

Линии одинаковой прибыли (изопрофитные линии) для обеих фирм представляют собой параболы, что следует из выражения для подсчета прибыли: $\Pi_i = (4 - q_i - q_{-i})q_i - TC_i\,(q_i)$, причем чем меньше значение q_{-i}, тем больше значение Π_i при одном и том же значении q_i. Очевидно, что наибольшую прибыль каждая из фирм получила бы в том случае, когда ей не пришлось бы делить с другой фирмой отраслевой выпуск, и она могла бы вести себя как монополист. Кроме того, из условий первого порядка задачи максимизации прибыли i-й фирмы при заданном значении выпуска другой фирмы следует, что вершины парабол, представляющие собой изопрофитные линии, лежат на кривой реакции $q_i(q_{-i})$, причем наклон изопрофитных линий i-й фирмы на кривой реакции $q_i(q_{-i})$ равен наклону оси Oq_i, т. е. в данной задаче касательные к изопрофитным линиям первой фирмы в точках на кривой реакции $q_1(q_2)$ горизонтальны, а касательные к изопрофитным линиям второй фирмы в точках на кривой реакции $q_2(q_1)$ вертикальны.

Графически равновесие Курно есть точка пересечения кривых реакций, где соответствующие этой точке изопрофитные линии пересекаются. В равновесии Штакельберга фирма-лидер будет выбирать объем выпуска, максимизирующий ее прибыль, при условии, что она знает, какова будет реакция ведомого на ее выбор. Таким образом, графически равновесие Штакельберга должно находиться на кривой реакции ведомого в точке, где изопрофитная кривая лидера касается этой кривой реакции. Рисунок 5.11 иллюстрирует изопрофитные линии и соответствующие равновесия. Поскольку кривая реакции ведомого имеет отрицательный наклон (убывающая) и больший уровень прибыли ли-

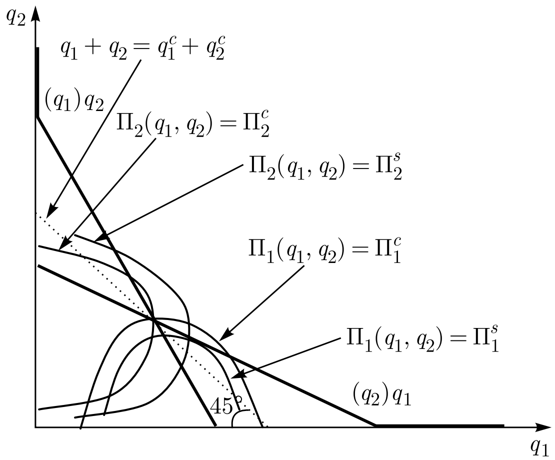

Рис. 5.11. Сравнение объемов выпусков и прибыли в равновесии Курно и Штакельберга

дера соответствует изопрофите, расположенной ниже вдоль его кривой реакции, то касание изопрофитной линии лидера кривой реакции ведомого может состояться только при большем объеме, выпускаемом лидером, чем в равновесии Курно. Следовательно, первая фирма-лидер в равновесии Штакельберга выпускает больше, чем эта же фирма в равновесии Курно, а вторая фирма-ведомый выпускает меньше, чем эта же фирма в равновесии Курно. Соответственно, прибыль лидера в равновесии Штакельберга больше, чем прибыль этой же фирмы в равновесии Курно (точка равновесия Штакельберга лежит на изопрофитной линии первой фирмы, лежащей под изопрофитной линией этой же фирмы, соответствующей равновесию Курно). Аналогичные наблюдения изопрофитных линий второй фирмы показывают, что прибыль ведомого в равновесии Штакельберга меньше, чем прибыль той же фирмы в равновесии Курно.

Для того чтобы сравнить равновесные объемы выпуска отрасли в различных моделях олигополистической конкуренции в данной задаче, проведем дополнительные построения, которые иллюстрирует рис. 5.11. А именно, проведем через точку равновесия Курно прямую $q_1 + q_2 = q_1^c + q_2^c$. Заметим, что любые комбинации выпусков фирм, соответствующие большему, чем в равновесии Курно совокупному объему выпуска, лежат на графике правее, чем построенная нами прямая $q_1 + q_2 = q_1^c + q_2^c$.

Тангенс угла наклона этой прямой равен (-1), в то время как кривая реакции второй фирмы — более пологая и имеет наклон $(-1/2)$. Таким образом, графически легко увидеть, что равновесие Штакельберга соответствует совокупному объему выпуска, где $q_1^s + q_2^s > q_1^c + q_2^c$.

5.83. (а) Каждая фирма максимизирует свою прибыль при фиксированной цене конкурента. Задача первой фирмы:

$$(36 - 4\,p_1 + 2\,p_2) \cdot p_1 - 11 \cdot (36 - 4\,p_1 + 2\,p_2) \to \max_{p_1 \geqslant 0}.$$

Условие первого порядка (является достаточным в силу вогнутости целевой функции) для внутреннего решения (легко проверить, что случай $p_1 = 0$ невозможен):

$$(36 - 8\,p_1 + 2\,p_2) - 11 \cdot (-4) = 0,$$

откуда получим функцию реакции первой фирмы:

$$p_1(p_2) = \frac{p_2}{4} + 10.$$

Задача второй фирмы:

$$(24 - 4\,p_2 + p_1) \cdot p_2 - 6 \cdot (24 - 4\,p_2 + p_1) \to \max_{p_2 \geqslant 0}.$$

Условие первого порядка (является достаточным в силу вогнутости целевой функции) для внутреннего решения (легко проверить, что случай $p_2 = 0$ невозможен):

$$(24 - 8\,p_2 + p_1) - 6 \cdot (-4) = 0,$$

откуда получим функцию реакции второй фирмы:

$$p_2(p_1) = p_1/8 + 6.$$

Изобразим функции реакции на графике (рис. 5.12).

(б) Найдем равновесие. Равновесием по Нэшу будет точка пересечения функций реакций:

$$\begin{cases} p_1 = p_2/4 + 10, \\ p_2 = p_1/8 + 6. \end{cases}$$

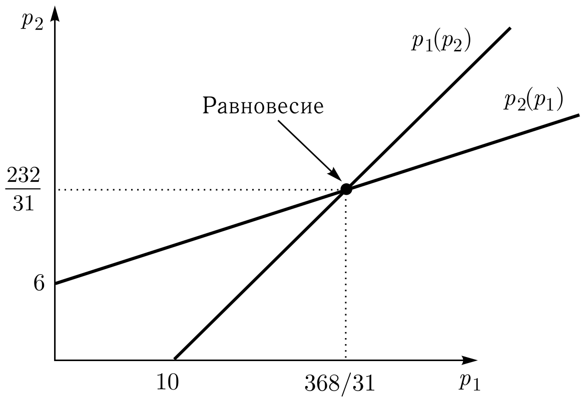

Рис. 5.12. Функции реакции и равновесие по Нэшу

Решая эту систему, определим равновесные выпуски $\widetilde{p}_1 = \dfrac{368}{31}$, $\widetilde{p}_2 = \dfrac{232}{31}$. Равновесные выпуски определим из функций спроса: $\widetilde{q}_1 = \dfrac{108}{31}$, $\widetilde{q}_2 = \dfrac{184}{31}$. Тогда прибыли будут соответственно равны:

$$\widetilde{\pi}_1 = \left(\frac{368}{31} - 11\right) \cdot \frac{108}{31} = 4 \cdot \left(\frac{27}{31}\right)^2,$$

$$\widetilde{\pi}_2 = \left(\frac{232}{31} - 6\right) \cdot \frac{184}{31} = 4 \cdot \left(\frac{46}{31}\right)^2.$$

Проверим, будет ли равновесие устойчивым. Для этого предположим, что одна из фирм отклонилась (например, первая). Тогда найдем, как будет реагировать вторая фирма. Видим, что если первая фирма отклоняется в сторону цены, большей равновесной, то вторая реагирует так, что первая отвечает снижением цены (рис. 5.13). Таким образом, фирмы возвращаются к выбору равновесных цен — равновесие является устойчивым.

(в) В случае, когда фирмы ведут себя кооперативно, они выбирают такие цены, при которых их совокупная прибыль оказывается максимальной. Тогда задача фирм имеет следующий вид:

$$(36 - 4p_1 + 2p_2) \cdot p_1 - 11 \cdot (36 - 4p_1 + 2p_2) + \\ + (24 - 4p_2 + p_1) \cdot p_2 - 6 \cdot (24 - 4p_2 + p_1) \to \max_{p_1, p_2 \geqslant 0}.$$

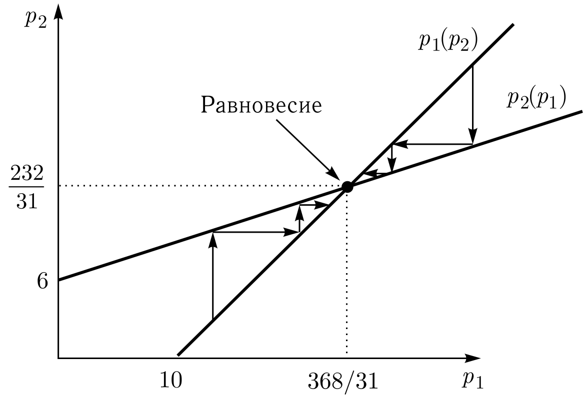

Рис. 5.13. Устойчивость равновесия

Условия первого порядка для внутреннего решения (являются достаточными в силу вогнутости целевой функции):

$$\begin{cases} (36 - 8p_1 + 2p_2) - 11 \cdot (-4) + p_2 - 6 = 0, \\ 2p_1 - 11 \cdot 2 + (24 - 8p_2 + p_1) - 6 \cdot (-4) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 74 - 8p_1 + 3p_2 = 0, \\ 26 - 8p_2 + 3p_1 = 0, \end{cases}$$

тогда оптимальные цены: $\widehat{p}_1 = \dfrac{134}{11}$, $\widehat{p}_2 = \dfrac{86}{11}$. Равновесные выпуски определим из функций спроса: $\widehat{q}_1 = \dfrac{32}{11}$, $\widehat{q}_2 = \dfrac{54}{11}$. Тогда прибыли будут соответственно равны:

$$\widehat{\pi}_1 = \left(\frac{134}{11} - 11\right) \cdot \frac{32}{11} = \frac{416}{121}, \quad \widehat{\pi}_2 = \left(\frac{86}{11} - 6\right) \cdot \frac{54}{11} = \frac{1080}{121}.$$

Можно заметить, что каждая фирма в случае кооперативного поведения получает бóльшую прибыль, чем в случае, когда они независимо друг от друга выбирают цены. Это объясняется тем, что в случае кооперативного поведения фирмы принимают во внимание, как цена каждой из них влияет на объем продаж другой.

(г) Фирмы имеют стимулы к отклонению от кооперативного поведения. Покажем это на примере второй фирмы. Зафиксируем цену первой фирмы и определим, какую цену выгодно будет выбрать второй фирме. Задача второй фирмы выглядит при этом следующим образом:

$$(24 - 4p_2 + 134/11) \cdot p_2 - 6 \cdot (24 - 4p_2 + 134/11) \to \max_{p_2 \geqslant 0}.$$

Условие первого порядка (является достаточным, поскольку целевая функция вогнута):

$$(24 - 8p_2 + 134/11) - 6 \cdot (-4) = 0,$$

отсюда получаем $p_2' = 331/44 \neq 134/11$, т. е. вторая фирма находит выгодным отклониться от оптимальной цены п. (в) (то же мы могли показать используя функции реакции, полученные в п. (а) данной задачи).

5.84. Данная игра является модификацией модели Бертрана с ограничением по мощности. Поскольку каждая фирма выбрала объем мощности, равный 20, максимальный объем выпуска каждой фирмы будет равен 20. Поэтому результат простой модели Бертрана — равновесные цены, равные предельным издержкам, — в данном случае не будет иметь место (при цене, равной предельным издержкам, объем спроса будет равен 80, что превышает общий объем мощностей фирм). Предположим, фирмы будут полностью задействовать свои мощности и будут выбирать такие цены, при которых их объемы выпусков будут равны 20. Тогда каждая из них должна выбрать $p_i = 20$.

Проверим, будут ли у фирм стимулы к отклонению, и если да, то в какую сторону.

Рассмотрим первую фирму. Зафиксируем выбор второй фирмы. Тогда остаточный спрос первой фирмы будет равен $Q^{\text{ост}}(p) = 80 - 2p - 20 = 60 - 2p$. Найдем, какую цену будет выбирать первая фирма (учитывая ограничение, что максимальный выпуск данной фирмы равен 20).

Задача первой фирмы:

$$(60 - 2p_1) \cdot p_1 \to \max_{60 - 2p_1 \leqslant 20}.$$

Из условия первого порядка (которое будет достаточным в силу вогнутости целевой функции) найдем максимизирующую прибыль цену первой фирмы: $p_1 = 20$. Таким образом, ни одной фирме не выгодно отклоняться от $p_i = 20$. Заметим, что цена, равная 20, является монопольной, при этой цене каждая фирма будет получать максимальную возможную при данной рыночной структуре прибыль, а ограничение по мощности делает отклонение невозможным.

Таким образом, в равновесии фирмы будут выбирать цены, равные 20.

5.13. Ответы и подсказки

5.1. 200. **5.2.** $q^{\mathsf{A}} = 200$, $q^{\mathsf{B}} = 100$. **5.3.** 20. **5.4.** Может и при вмешательстве правительства, и без вмешательства. Пример в случае невмешательства: совершенная ценовая дискриминация. В этом случае монополист производит такой объем выпуска, при котором общественное благосостояние максимально. **5.5.** 12. **5.6.** *Подсказка*: запишите условие первого порядка, характеризующее цену монополиста. **5.7.** $y^m = 66$, $p^m = 19$, $\varepsilon = 19/11 > 1$. **5.8.** Сокращение объема потребления легких наркотиков по крайней мере в два раза означает, что равновесный уровень потребления будет не выше $1{,}5\,\widetilde{q}$. При объеме $1{,}5\,\widetilde{q}$ спрос является неэластичным — монополист не максимизирует прибыль в этой точке. То же верно для всех других объемов, бо́льших $\widetilde{q}$. *Подсказка*: рассмотрите объемы потребления, не большие $\widetilde{q}$. Возможно ли, что при некотором объеме потребления из этого интервала монополист будет максимизировать прибыль? **5.9.** Сократить объем производства. **5.10.** Неверно. Например, в случае совершенной ценовой дискриминации общественное благосостояние максимально. **5.11.** $p = 3^{7/3}$, 0,13%. **5.12. (а)** Верно. *Подсказка*: доказательство строится на основе теории выявленной прибыли. **(б)** Неверно. Пример: $TC\,(q) = 20\,q$, $p\,(q) = 44 - 2\,q$, $\overline{p} = 16$. Тогда $\widetilde{p} = 32$, $\widetilde{q} = 6$, $\overline{q} \approx 8$. **5.13. (а)** $q^{\mathsf{A}} = \begin{cases} 0, & Q \leqslant 5, \\ Q - 5, & Q > 5, \end{cases}$ $q^{\mathsf{B}} = \begin{cases} Q, & Q \leqslant 5, \\ 5, & Q > 5. \end{cases}$ **(б)** $q^{\mathsf{A}} = \begin{cases} 0, & Q \leqslant 15, \\ Q - 5, & Q > 15, \end{cases}$ $q^{\mathsf{B}} = \begin{cases} Q, & Q \leqslant 15, \\ 5, & Q > 15. \end{cases}$ **5.14.** $w < (7 - 3\sqrt{2})/2$. **5.15. (а)** $\widetilde{P} = 950$, $\widetilde{Q} = 450$, $\widetilde{q}^{\mathsf{A}} = 250$, $\widetilde{q}^{\mathsf{B}} = 200$. **5.16. (а)** $\widetilde{P} = 865$, $\widetilde{Q} = 4{,}5$, $\pi^{SG} = 2025$, $\pi^F = 407{,}5$. **(б)** Стоит. Примерно 186 тыс. руб. **5.17.** Неверно. Контрпример: рассмотрите случай линейного спроса и технологии с постоянными предельными издержками. **5.18.** Неверно. **5.20.** Верно. *Подсказка*: воспользуйтесь слабой аксиомой максимизации прибыли.

5.21. Неверно. **5.22. (а)** В 2 раза. **(б)** В 1,5 раза. **5.23.** Невозможно сравнить в общем случае. Но сравнить можно, например, для случая линейной функции спроса. *Подсказка*: запишите условия первого порядка для каждого случая. **5.24.** В случае потоварной субсидии расходы будут меньше. **5.25. (а)** 11,25. **(б)** 1/16. **5.26. (а)** См. [2.4; разделы 23.6–23.7]. **(б)** $\widetilde{P} = 18$, $\widetilde{Q} = 2$. **(в)** 2/9. **(г)** $\widetilde{P} = 160/9$, $\widetilde{Q} = 20/9$. **5.27. (а)** $q = 5$. **(б)** $q = 9$, в равновесии автобусов меньше. **(в)** Не могут. **(г)** Например, потоварное субсидирование, субсидия на выручку, ценообразование по принципу средних издержек. **5.28.** Потребительский излишек равен 0, общественное благосостояние максимально — общественные потери отсутствуют. **5.29.** Студенты обладают более эластичным спросом. **5.30.** Может (пример — случай совершенной ценовой дискриминации). **5.31. (а)** $y^m = 1$, $p^m = 3$. **(б)** $p^m = 7$ на каждом рынке. **5.33.** $9\,s + 0{,}5\,s^2$. **5.34.** Прав. Не менять объем продаж в первом регионе, увеличить во втором регионе, снизить в третьем. Цена в первом регионе не изменится, во втором — снизится, в третьем — увеличится. **5.35.** Продавать комплект из одного сэндвича и одной чашки кофе за 5 долл. **5.36.** Цена чашки кофе 50 руб., цена одного пирожного 30 руб. **5.37.** Эластичность спроса обычных посетителей меньше. **5.38.** Объем снизится, цена вырастет. **5.39. (а)** $t_\mathsf{A} + t_\mathsf{B} - 0,5(x_\mathsf{A} + x_\mathsf{B}) \to \max\limits_{\substack{t_\mathsf{A},\, t_\mathsf{B} \\ x_\mathsf{A},\, x_\mathsf{B} \geqslant 0}}$, при ограничениях

$$\begin{cases} 4\sqrt{x_\mathsf{A}} - t_\mathsf{A} \geqslant 4\sqrt{x_\mathsf{B}} - t_\mathsf{B}, \\ 6\sqrt{x_\mathsf{B}} - t_\mathsf{B} \geqslant 6\sqrt{x_\mathsf{A}} - t_\mathsf{A}, \\ 4\sqrt{x_\mathsf{A}} - t_\mathsf{A} \geqslant 0, \\ 6\sqrt{x_\mathsf{B}} - t_\mathsf{B} \geqslant 0; \end{cases}$$

второе и третье ограничения будут выполнены как равенства. **(б)** $x_\mathsf{A} = 4$, $t_\mathsf{A} = 8$, $x_\mathsf{B} = 36$, $t_\mathsf{B} = 32$. **(в)** $x_\mathsf{A} = 16$, $t_\mathsf{A} = 16$, $x_\mathsf{B} = 36$, $t_\mathsf{B} = 36$. **(г)** Снизилась в 13/40 раз. **5.40. (а)** $p^\mathsf{A} = p^\mathsf{B} = 120$. **(б)** $p^\mathsf{A} = p^\mathsf{B} \approx 95{,}24$, $T^\mathsf{A} \approx 0{,}42$, $T^\mathsf{B} \approx 0{,}168$. **(в)** $p \approx 95{,}24$, $T \approx 0{,}42$. **(г)** Прибыль в п. (б) больше, чем прибыль в п. (в), которая больше, чем прибыль в п. (а). **5.41. (а)** Предпочтет совершенную ценовую дискриминацию, например, будет продавать потребителям группы A пакет из 3 ед. товара за 7,5, а потребителям группы B — пакет из 5 ед. за 17,5. **(б)** Предпочтет ценовую дискриминацию второго типа, например, будет продавать пакет из 5 ед. товара за 17,5 (будут покупать только потребители группы B). **5.42. (а)** $p_1 = 12$, $p_2 = 8$, $y = 4$. **(б)** Количество посетителей снизится на 1, прибыль снизится на 2. **(в)** Обязать продавать эффективное число билетов или продавать по цене, равной предельным издержкам. **5.43.** Не готов платить. **5.44.** $p = 7$, $q^{\mathsf{A}} = q^{\mathsf{B}} = 4$, $Q = 8$. **5.45.** Обратная функция спроса $P(Q) = 20 - Q$, функции издержек $TC^{\mathsf{A}}(q^{\mathsf{A}}) = q^{\mathsf{A}}$ и $TC^{\mathsf{B}}(q^{\mathsf{B}}) = 2\,q^{\mathsf{B}}$. **5.46.** $\varepsilon = 12/7$, $p = 6$. **5.47. (а)** *Подсказка*: проверьте, при каких параметрах существует пересечение функций реакций. **5.48.** $c^{\mathsf{A}} \geqslant 11$. **5.50.** Каждая фирма готова заплатить максимум такую сумму, на которую возрастет ее равновесная прибыль: $\Delta\pi_{\mathsf{A}} = \dfrac{365\cdot 340}{179^2} - \dfrac{65\cdot 90}{59^2}$, $\Delta\pi_{\mathsf{B}} = \dfrac{345\cdot 180}{179^2} - \dfrac{55\cdot 50}{59^2}$. **5.51. (а)** $t = \dfrac{27 - \sqrt{729 - 48T}}{4}$. **(б)** Да, $t^{\mathsf{B}} = 0,5 + t^{\mathsf{A}}$. **5.52.** $\widetilde{q}_i = 2$, $\widetilde{p} = 12$, равновесное число фирм $N = 9$, равновесная прибыль каждой фирмы $\pi_i = 0$. **5.53.** *Подсказка*: симметричность выпусков фирм можно учитывать в условиях первого порядка, но не при максимизации прибыли фирм. **5.54.** $q^{\mathsf{A}} = 4$, $q^{\mathsf{B}} = 8$, $p = 8$. **5.55.** $\Delta q^{\mathsf{A}}/\Delta c = 0{,}5$, $\Delta q^{\mathsf{B}}/\Delta c = -0{,}75$. Фирма B. **5.56.** $\Delta q^{\mathsf{A}} = 0{,}5\alpha$, $\Delta q^{\mathsf{B}} = 0{,}25\alpha$. Фирма A — лидер. **5.57.** $\widetilde{Q} = 10$. **5.58.** $p^{\mathsf{A}} = 1$, $p^{\mathsf{C}} = 1$, $p^{\mathsf{B}} = b$, $b \geqslant 2$. **5.59.** Нет, у первой фирмы есть стимулы к отклонению. **5.61.** Нет. **5.62. (а)** $p_1 = 4/3$, $p_2 = 4/3$ — доминирующие стратегии. **(б)** $\widetilde{p}_1 = \widetilde{p}_2 = 4/3$, $\widetilde{q}_1 = \widetilde{q}_2 = 4/3$, $\pi_1 = \pi_2 = 4/9$. **5.63.** $\widetilde{q}_i = 10$, $\widetilde{p} = 52$, равновесное число фирм $N = 1$, равновесная прибыль фирмы равна монопольной $\pi^m = 400$. **5.65. (а)** Снизится на 10,8. **(б)** $\approx 55{,}7\%$. **5.66.** $\widetilde{p} = 80$, $\widetilde{q}_L = 80$, $\widetilde{q}_i = 38 \quad \forall i = \overline{1, 8}$. **5.67.** $\widetilde{Q} = 30$, $\widetilde{p} = 20$. Нет. **5.69.** $\delta \geqslant 9/17$. **5.70.** $\delta \geqslant 0{,}4$. **5.72. (а)** *Подсказка*: проверьте, максимизирует ли каждая фирма прибыль при заданном объеме выпуска конкурента в соответствующей модели. **(б)** $y_1 = 2$, $y_2 = 6$, $Y = 8$. **(в)** $y_1 = 1$. **(г)** В равновесии Штакельберга цена ниже; **(д)** $y_2 = 7$. **(е)** *Подсказка*: изобразите на графике области, где фирмы могут увеличить свою прибыль по сравнению с равновесием Курно и найдите их пересечение. **5.73. (а)** $p^{\mathsf{A}} = c$, $p^{\mathsf{B}} = c$ в каждом периоде. **(б)** В бесконечно повторяющейся игре в каждый период может играться не равновесие по Нэшу. Пример равновесия:

в триггерных стратегиях — поддерживать монопольную цену в каждом периоде (возможно при коэффициенте дисконтирования $\delta \geqslant 1/2$). **5.74. (а)** (нарушать соглашение, нарушать соглашение). **(б)** $\delta \geqslant 5/12$. **5.75. (а)** 272/9. **(б)** 24. **(в)** Величина п. (а) больше. **5.76.** $\widetilde{q}_1 = \widetilde{q}_2 = 4$, $\widetilde{p}_1 = \widetilde{p}_2 = 5$, $\pi_1 = \pi_2 = 16$. Имеют. **5.77. (а)** $p_1(p_2) = 3 + 0{,}25\,p_2$, $p_2(p_1) = 3 + 0{,}25\,p_1$. **(б)** $\widetilde{p}_1 = \widetilde{p}_2 = 4$, $\widetilde{q}_1 = \widetilde{q}_2 = 6$, $\pi_1 = \pi_2 = 18$. **(в)** $\widehat{p}_1 = 227/56$, $\widehat{p}_2 = 59/14$, $\widehat{q}_1 = 165/28$, $\widehat{q}_2 = 45/8$. **5.80.** Неверно. Пример: две фирмы, технологии которых описываются функциями издержек $c_1(q_1) = 0{,}5\,q_1$ и $c_2(q_2) = 1{,}5\,q_2$. Обратная функция спроса на продукцию отрасли имеет вид: $p(Q) = 2 - Q$. В этом случае отраслевые выпуски в равновесии Курно и в равновесии картеля совпадают. **5.81.** Неверно. По аналогии с решением задачи 5.80. **5.82. (а)** $q_1(q_2) = 15 - 0{,}5\,q_2$, $q_2(q_1) = 15 - 0{,}5\,q_1$, $\widetilde{p} = 20$, $\widetilde{q}_1 = \widetilde{q}_2 = 10$, $\widetilde{Q} = 20$, $\pi_1 = \pi_2 = 100$. **(б)** $\widehat{p} = 17{,}5$, $\widehat{q}_1 = 15$, $\widehat{q}_2 = 7{,}5$, $\widehat{Q} = 22{,}5$. **(в)** $\overline{Q} = 15$, $\overline{p} = 25$. **(г)** Каждой фирме вести себя некооперативно. **(д)** Да, $\delta \geqslant 0{,}53$. **5.85.** $p_i = 10 \;\; \forall i = 1{,}2$. **5.86. (а)** $\widetilde{q}_1 = \widetilde{q}_2 = (a - c)/2$, $\widetilde{e}_1 = \widetilde{e}_2 = (a - c)/4$, $p = (a + c)/2$. **(б)** $\widehat{q}_1 = \widehat{q}_2 = (a - c)/2$, $\widehat{e}_1 = \widehat{e}_2 = 0$, $p = c$.

Глава 6

ВЫБОР ПОТРЕБИТЕЛЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

6.1. Денежные лотереи, отношение к риску, денежный эквивалент лотереи и премия за риск, функция ожидаемой полезности

6.1. Агент-рискофоб любит посещать казино. Известно, что в казино можно выиграть 2000 руб. с вероятностью 70%, 10 000 руб. с вероятностью 20% и 20 000 руб. с вероятностью 10%. Найдите величину ожидаемого выигрыша агента.

6.2. Верно ли, что среди двух различных альтернатив агент-рискофоб всегда выберет альтернативу с бóльшим ожидаемым богатством? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

6.3. Рассмотрите индивида, имеющего элементарную функцию полезности $u(x) = \sqrt{x}$ и первоначальное богатство $w = 10$ руб. Пусть индивид владеет лотереей, по которой можно равновероятно выиграть 26 руб. и проиграть 6 руб. Согласится ли индивид продать эту лотерею за 15 руб.?

6.4. Рассмотрите индивида, имеющего элементарную функцию полезности $u(x) = \sqrt{x}$ и первоначальное богатство $w = 4$ руб. Пусть лотерея L обещает равновероятно получить 14 и 2 руб. Если индивид не владеет лотерей L, то согласится ли он ее купить за 2 руб.?

6.5. Пусть агент-рискофоб, имеющий богатство w, согласился на участие в рисковом проекте. Верно ли, что нейтральный к риску агент, имеющий также богатство w, тоже согласится на участие в этом проекте? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

6.6. Рассмотрите следующие элементарные функции полезности:

(1) $u(x) = \sqrt{x} + x$; **(2)** $u(x) = (x+2) \cdot (x-3)$;
(3) $u(x) = 3 - \exp(-2x)$; **(4)** $u(x) = 8(\ln x - 5)$;
(5) $u(x) = -2/x$; **(6)** $u(x) = 5x + 2$;
(7) $u(x) = 1 - \exp(-x^2/2)$; **(8)** $u(x) = x^3$.

(а) Какая/какие из указанных функций полезности описывают предпочтения индивида, обладающего положительным богатством, если

- индивид является рискофобом;
- индивид нейтрален к риску;
- индивид является рискофилом?

(б) Есть ли среди указанных функций полезности такие, что индивид при одном уровне богатства является рискофобом, а при другом — рискофилом?

6.7. Рассмотрите индивида, которому предложили выбрать между получением 175 руб. и участием в лотерее L, по которой можно выиграть 400 руб. с вероятностью 1/4 и 100 руб. с вероятностью 3/4.

(а) Если известно, что индивид является рискофобом, то какую альтернативу он выберет?

(б) Предположим теперь, что индивиду предложили выбор между лотерей L и получением 170 руб. Если индивид предпочел участие в лотерее L, то можно ли сделать однозначный вывод, что он является рискофилом?

(в) Предположим теперь, что предпочтения индивида описываются функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности $u(x) = \sqrt{x}$. Найдите денежный (гарантированный) эквивалент лотереи L.

6.8. Рассмотрите индивида, которому предложили выбрать между получением 7 д. е. и участием в лотерее, позволяющей выиграть 20 д. е. с вероятностью 1/4 и 4 д. е. с вероятностью 3/4.

(а) Если известно, что индивид — рискофоб, то что он выберет?

(б) Если известно, что индивид — рискофил, то что он выберет?

(в) Если известно, что индивид нейтрален к риску, то что он выберет?

(г) Предположим теперь, что элементарная функция полезности индивида имеет вид $u(x) = -1/x$. Каково отношению к риску у данного индивида? Что выберет данный индивид? Как изменится ваш ответ, если индивиду предлагается выбор между данной лотереей и гарантированным получением 4,5 д. е.?

(д) Найдите премию за риск для индивида из п. (г).

6.9. Предположим, в ходе эксперимента господину A предложили ответить на вопрос: во сколько он оценивает лотерею, по которой равновероятно можно получить 100 д. е. или x д. е.? Господин A ответил, что оценивает данную лотерею в 60 д. е.

(а) Если известно, что господин A нейтрален к риску, то что можно сказать о значении x?

(б) Как изменится ваш ответ на п. (а), если господин A является рискофобом?

6.10. В ходе эксперимента господину Б предложили выбрать между лотереей L_1, по которой можно выиграть 4000 долл. с вероятностью 0,3; 3500 долл. с вероятностью 0,65 и остаться без выигрыша в противном случае, и гарантированным получением 3500 долл. Господин Б предпочел не участвовать в лотерее и гарантированно получить 3500 долл. Далее этому же господину предложили выбрать между двумя лотереями: L_2, по которой можно получить 4000 долл. с вероятностью 0,3 и остаться без выигрыша в противном случае, и лотерей L_3, позволяющей получить 3500 долл. с вероятностью 0,35 и ничего в противном случае. В этой ситуации господин Б предпочел лотерею L_2. Согласуется ли поведение господина Б с теорией ожидаемой полезности?

6.11. Пусть лотерея L обещает выплату в размере x_1 с вероятностью π и в размере x_2 в противном случае. Рассмотрите нейтрального к риску индивида, обладающего богатством w. Обозначим через $p_{\min}$ — минимальную цену, по которой индивид согласится продать данную лотерею, если он ею владеет, а через $p_{\max}$ — максимальную цену, за которую он согласится купить данную лотерею, если он ею не владеет. Чему равны $p_{\min}$ и $p_{\max}$? Проинтерпретируйте полученный результат.

6.12. Господину В, обладающему первоначальным богатством 100 д. е., предложили принять участие в лотерее, по которой можно равновероятно проиграть 36 д. е. и выиграть y д. е. Если известно, что предпочтения господина В представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности $u(x) = \sqrt{x}$, то при каких значениях y господин В согласится участвовать в лотерее (считайте, что если господину В все равно, участвовать в лотерее или нет, то он участвует)?

6.13. Агент-рискофоб осуществляет выбор между двумя вакансиями. Первая вакансия дает ему возможность заработать 120 000 руб. с вероятностью 10% и 100 000 руб. с вероятностью 90%. Вторая работа дает ему возможность заработать 100 000 руб. с вероятностью 50% и 104 000 руб. с вероятностью 50%.

(а) Какую вакансию выберет агент? Приведите графическое и аналитическое решение.

(б) Предположим, что у данного агента есть только две возможности быть нанятым: либо занять первую вакансию, либо совмещать две предложенные вакансии, работая на каждой на половину ставки (предполагаем, что риски независимы). Возможно ли, что данный агент выберет второй вариант?

6.14. Рассмотрите агента, которому предложили принять участие в следующей игре: с вероятностью p его богатство составит A руб., а с вероятностью $(1-p)$ его богатство составит B руб. Пусть предпочтения данного агента представимы функцией ожидаемой полезности с возрастающей непрерывной элементарной функцией полезности. Известно, что он отказался от предложенной игры. Тогда агенту предложили участие в различных играх, где параметры игры B и p менялись таким образом, чтобы ожидаемая полезность от любой из предлагаемых игр была такой же, как и в исходной игре. На это агент заявил, что какие бы ни были значения p и B при условии сохранения его ожидаемой полезности, как в исходной игре, он в любом случае от нее откажется. Верно ли, что данный агент — рискофоб?

6.15. Два брата-близнеца, А и Б, уверенно утверждают, что они похожи абсолютно во всем. Их общий друг, студент экономического факультета, решил проверить, так ли это, и предложил братьям провести следующий эксперимент: брату А он предложил выбрать между получением 9 руб. и покупкой лотерейного билета, который стоит 100 руб. и дает с вероятностью 1/10 выигрыш 1000 руб., а с вероятностью 9/10 — выигрыш 10 руб. Брату Б он предложил получить 405 руб. безвозмездно или поучаствовать в игре «орел–решка», где при выпадении «орла» Б получил бы 1000 руб., а при выпадении «решки» — 10 руб., при этом за участие в игре Б должен был бы заплатить 100 руб. Известно, что монета — правильная и у обоих братьев было достаточно денег для покупки лотерейного билета и оплаты участия в игре, но брат А с радостью согласился купить лотерейный билет, а брат Б категорически отказался от игры. Сможет ли студент на основании проведенного эксперимента убедить близнецов, что они заблуждаются, утверждая, что они похожи абсолютно во всем?

6.16. Два брата близнеца, Иван и Сергей, внешне очень похожи друг на друга, но их характеры и способности различны. Оба готовятся сдавать госэкзамен по микроэкономике. Из 60 билетов Иван к экзамену выучил лишь 40, но если на экзамене ему попадется билет, который он выучил, то он непременно получит оценку «5». Естественно, что за невыученный билет любой студент на экзамене получит неудовлетворительную оценку «2». Сергей же выучил все билеты, однако знает он каждый билет лишь на твердую «4». Известно, что по отношению к получаемым оценкам Сергей является нейтральным к риску, а Иван — рискофобом. Как вы полагаете, захотят ли братья обмануть экзаменатора, выдав себя друг за друга на экзамене по микроэкономике? Обоснуйте.

6.17. Сотрудник Отдела внутренних расследований ГАИ, проводя оперативные действия и находясь за рулем автомобиля, специально нарушал правила дорожного движения, и был остановлен инспекторами ГАИ И и П. При индивидуальной беседе нарушителя с каждым из инспекторов выяснилось, что оба согласны получить от него сумму в размере A в качестве вознаграждения за то, что нарушение ПДД фиксироваться не будет. Оба инспектора знали, что отдел внутренних расследований может проводить проверки на дорогах. Можете ли вы на основе описанной информации сделать вывод о том, что И и П характеризуются одинаковым отношением к риску, связанным с выявлением нарушений в их профессиональной деятельности?

6.18. Ваш приятель, молодой начинающий предприниматель обратился к вам, как к будущему экономисту, за советом. Ему предлагают вложить 10 тыс. долл. в инвестиционный проект, который с вероятностью 0,6 принесет ему 21 тыс. долл. и с вероятностью 0,4 принесет только 1 тыс. долл. В настоящий момент ваш приятель располагает суммой в 25 тыс. долл.

(а) Как вы полагаете, стоит ли вашему приятелю вкладывать деньги в данный проект, если он — рискофоб?

(б) Как изменится ответ на п. (а), если исследование вами предпочтений вашего приятеля показало, что он рискофил?

6.19. Ваш знакомый предприниматель М, не владея аналитическим аппаратом, позволяющим определить отношение его к риску, полагает, что он является рискофилом. Чтобы подтвердить свое отношение к риску, он рассказал, что однажды, имея в кармане всего 25 тыс. рублей, отправился в путешествие на корабле, билет на который обошелся ему в 10 тыс. руб. (стоимость билета он оплатил из имеющихся у него в наличии денег), причем до отъезда М знал, что эта поездка может принести ему 21 тыс. руб. валовой прибыли с вероятностью 0,6 и всего 1 тыс. рублей валовой прибыли с вероятностью 0,4. Как вы полагаете, действительно ли М является рискофилом?

6.20. Каждому из двоих ваших приятелей, М и К, предложили принять участие в следующей игре: игрок подбрасывает игральную кость и получает 3 тыс. долл., если на игральной кости выпадет 1 или 2, причем если на игральной кости выпадает 3, 4, 5 или 6, то он должен заплатить 1,2 тыс. долл. М и К никогда не изучали микроэкономику, но точно известно, что М — нейтрален к риску, а К — рискофоб. Они обратились к вам за советом, стоит ли им принять участие в предложенной игре при условии, что у каждого из них достаточно средств для этого. Что вы посоветуете вашим приятелям? Объясните и проиллюстрируйте решение графически на двух рисунках: в пространстве контингентных товаров и в осях полезность–богатство.

6.21. У некоторого предпринимателя есть возможность вложить средства в инвестиционный проект, который с вероятностью 1/2 принесет ему чистую прибыль в 33 тыс. долл. и с вероятностью 1/2 принесет чистый убыток в 30 тыс. долл.

(а) Если состояние предпринимателя составляет 111 тыс. долл., а его элементарная функция полезности имеет вид $u(x) = \sqrt{x}$, где x — богатство в тыс. долл., будет ли он вкладывать средства в данный инвестиционный проект? Проиллюстрируйте решение графически.

(б) Приятель А данного предпринимателя нейтрален к риску и предлагает разделить риск с товарищем в любой доле на выбор предпринимателя, т. е. все расходы и доходы по проекту приятели делят в заранее оговоренной единой пропорции. Существует ли такая доля, в соответствии с которой предприниматель готов был бы разделить риск со своим товарищем? Если да, то найдите ее, если нет, то обоснуйте почему.

(в) Приятель В данного предпринимателя также готов разделить риск с товарищем, но только в равных долях. Однако взамен на жесткое условие о долевом участии он готов предложить разделить риск на тех же условиях и по своему инвестиционному проекту, который является полностью зависимым от инвестиционного проекта предпринимателя и дает чистую прибыль 17 тыс. долл. с вероятностью 1/2, когда предприниматель получает прибыль по своему проекту, и дает чистый убыток 10 тыс. долл. с вероятностью 1/2, когда предприниматель несет убыток по своему проекту. Примет ли предприниматель предложение приятеля В?

(г) Рационально ли вел себя приятель В, предлагая разделение рисков с товарищем, если известно, что он также нейтрален к риску? Обоснуйте свой ответ.

6.22. Предприниматель М, состояние которого оценивается в 98 млн руб., размышляет, стоит ли ему вложить средства в инвестиционный проект, который с вероятностью 1/2 принесет ему чистую прибыль в 46 млн руб., и с вероятностью 1/2 принесет чистый убыток в 34 млн руб. Известно, что его предпочтения представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности $u(x) = \sqrt{x}$, где x — богатство предпринимателя в миллионах рублей. Верно ли, что если будет создана корпорация, члены которой (включая и М) будут в равных долях делить все выигрыши и потери, связанные с данным инвестиционным проектом, то М откажется от участия в проекте при любом количестве партнеров, входящих в эту корпорацию? Проиллюстрируйте решение графически.

6.23. Господин Д, имеющий доход 800 долл., увлекается большим теннисом и иногда посещает букмекерскую контору, делая ставки на результаты матчей. Перед финалом Уимблдона букмекер принимал ставки на выигрыш Роджера Ф у Рафаэля Н из расчета два к одному, т. е. поставив 1 долл., можно было получить 3 долл. в случае выигрыша Роджера Ф и проиграть свою ставку в противном случае (будем считать, что господин Д может произвольно варьировать ставку). Пусть предпочтения господина Д описываются функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности $u(x) = -1/x$.

(а) Предположим, господину Д предложили поставить на выигрыш Роджера Ф 200 долл., и он согласился. Что можно сказать о том, какова вероятность выигрыша Роджера Ф?

В пунктах (б)–(в) считайте, что вероятность выигрыша Роджера Ф равна 2/3.

(б) Какова оптимальная ставка господина Д?

(в) Какова максимальная ставка, на которую согласится господин Д?

6.24. Владелец салона по прокату машин в приморском городе перед началом сезона решил расширить свой автопарк, выделив на это 90 д. е. Пополнить автопарк он может, закупив кабриолеты или машины с закрытым верхом, либо и те, и другие. Кабриолеты пользуются особой популярностью в солнечную погоду; тогда 1 д. е. вложений в кабриолеты приносит прибыль, равную 9 д. е. за сезон. Однако в плохую погоду бо́льшим спросом пользуются машины с закрытым верхом и тогда 1 д. е. вложений в кабриолеты составляет 2 д. е. за сезон. Доход от 1 д. е. вложений в машины с закрытым верхом не зависит от погодных условий и равен 6 д. е. за сезон. Будем считать, что вероятность хорошей погоды равна 2/3.

(а) Предполагая, что элементарная функция полезности владельца салона имеет вид $u(x) = \ln x$, определите, как он должен распределить средства между машинами обоих типов.

В пунктах (б)–(в) считайте, что в случае хорошей погоды 1 д. е. вложений в кабриолеты приносит не 9 д. е., а лишь 8 д. е. прибыли в сезон.

(б) Как владелец салона распределит средства между машинами обоих типов? Попытайтесь ответить на вопрос, не решая задачу максимизации ожидаемой полезности.

(в) Как изменится ваш ответ на п. (б), если элементарная функция полезности владельца салона имеет вид $u(x) = x^2$? Попытайтесь ответить на вопрос, не решая задачу максимизации ожидаемой полезности.

6.25. В одном из научно-исследовательских институтов (НИИ) в бывшей горной союзной республике по итогам годовой работы руководство выдало своим сотрудникам премию, но обязало каждого сотрудника на 3/4 премиальной суммы купить акции одной из гидроэлектростанций, функционирующей в этой республике. Подобные действия со стороны руководства НИИ являлись следствием государственной политики, нацеленной на привлечение средств населения, необходимых для технического переоснащения ГЭС.

Пусть имеют место следующие обстоятельства:

(1) Богатство каждого сотрудника составляет m, а размер премии составляет $0{,}1\,m$.

(2) Штат НИИ составляет 900 сотрудников.

(3) Предпочтения каждого сотрудника представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности $u(x) = \sqrt{x}$, или $u(x) = x$, или $u(x) = x^2$. Известно, что доли сотрудников каждого типа одинаковы.

(4) Чистая доходность каждой акции на 1 д. е. составляет 2 д. е. с вероятностью 1/4 и (−1) д. е. с вероятностью 3/4.

(5) Занимать или одалживать средства, а также иметь другие активы и перепродавать акции сотрудники не могут.

(6) Цена каждой акции ГЭС составляет $0{,}01\,m$.

Действительно ли была оправдана политика принудительного владения акциями при описанных обстоятельствах, и во сколько раз изменился бы объем средств, выделяемый сотрудниками данного НИИ на покупку акций, если бы каждому сотруднику было позволено самостоятельно принимать решение об объемах вложений в активы?

6.2. Пространство контингентных благ

6.26.* Две подруги, Анна и Мария, предпочтения которых представимы функцией ожидаемой полезности с элементарными функциями полезности вида $u^{\mathsf{A}}(x) = \sqrt{x}$ и $u^{\mathsf{M}}(x) = x$, где x — богатство в тысячах долларов, собираются вложить деньги в инвестиционные проекты, вероятность успеха в которых оценивается в 1/4. Если деньги будут вложены в инвестиционный проект, предлагаемый Анне, удачно, то ее состояние составит 256 тыс. долл., если нет, то ее состояние составит только 36 тыс. долл. Если деньги будут вложены удачно в инвестиционный проект, предлагаемый Марии, то ее состояние составит 100 тыс. долл., если нет, то ее состояние составит только 52 тыс. долл. В настоящее время богатство каждой из подруг оценивается в 64 тыс. долл.

(а) Будет ли Анна инвестировать средства в проект? Будет ли Мария инвестировать средства в проект? Проиллюстрируйте решение графически в пространстве контингентных благ и в пространстве богатство–полезность.

(б) Предположим, что проекты независимы и у подруг есть возможность либо объединить свои риски, либо участвовать в индивидуальном инвестиционном проекте. При объединении рисков полученные от инвестиций средства (как выигрыши, так и потери) подруги будут делить пополам, т. е. состояние обеих подруг будет одинаковым. Согласится ли каждая из подруг принять подобные условия и участвовать в проектах, объединив свои средства?

(в) Какую максимальную сумму будет готова Мария заплатить Анне за то, чтобы подруги участвовали в рисковых проектах совместно? Если Мария заплатит Анне указанную сумму, изменит ли Анна свое решение относительно совместного участия в проектах?

(г) Предположим, что до принятия решения о вложении средств в индивидуальный рисковый проект каждая из подруг имеет возможность получить достоверную информацию о том, будут ли инвестиции успешны или нет, заплатив за эту информацию некоторую сумму денег. Найдите максимальную сумму денег, которую каждая из подруг захочет заплатить за информацию. Проиллюстрируйте решение графически в пространстве контингентных благ.

6.27. Опишите проблему выбора господина Д из задачи 6.23 в терминах контингентных благ, а именно:

(а) Определите состояния природы и контингентные блага.

(б) Запишите уравнение бюджетной линии в терминах контингентных благ и изобразите ее графически.

(в) Изобразите на одном рисунке кривые безразличия господина **Д** и бюджетную линию. Отметьте на рисунке оптимальную точку и точку, соответствующую максимальной ставке.

6.28. Владелец квартиры в центре Москвы решил выставить ее на продажу. Согласно действующему законодательству ему придется заплатить налог на доход, полученный от продажи квартиры. Собственнику квартиры хотелось бы избежать необходимости выплачивать всю сумму налога, указав в договоре купли–продажи сумму, отличную от фактически полученной, и заплатить требуемый налог с этой заниженной суммы. Но при этом он осознает, что в случае проведения проверки может быть выявлено нарушение налогового законодательства и тогда за каждый рубль, полученный от продажи квартиры, но не указанный в договоре, ему придется заплатить штраф по ставке, превышающей ставку налога. Будем считать, что в случае проведения проверки налоговая инспекция гарантированно выявит фактическую стоимость квартиры. Предположим также, что владелец квартиры является рискофобом с предпочтениями, представимыми функцией ожидаемой полезности с дифференцируемой элементарной функцией полезности.

(а) Специфицируйте все необходимые переменные и опишите задачу владельца квартиры в терминах теории выбора в условиях неопределенности.

(б) Выпишите условия первого порядка задачи владельца квартиры.

(в) Приведите необходимое и достаточное условие (включающее только экзогенные параметры модели) того, что владелец квартиры будет указывать в договоре купли–продажи сумму, меньшую фактически полученной.

(г) Что можно сказать о том, как изменится оптимальная стоимость квартиры, указанная в договоре купли–продажи, при малом увеличении ставки налога на доход, полученный от продажи недвижимости?

(д) Опишите состояния природы и контингентные блага.

(е) Выпишите бюджетное ограничение в терминах контингентных благ и приведите графическую иллюстрацию. Проинтерпретируйте условие, приведенное в п. (в), исходя из наклонов бюджетной линии и кривых безразличия в пространстве контингентных благ.

(ж) Как изменится ваш ответ на п. (д), если проверка, проводимая налоговой инспекцией, выявляет фактическую сумму квартиры не гарантированно?

(з) Предположим, условие, приведенное в п. (в), выполнено. Предположим также, что владелец квартиры нейтрален к риску. Какая стоимость квартиры будет указана в договоре купли-продажи в этом случае? Приведите графическую иллюстрацию.

6.29. Вы располагаете богатством 500 д. е. Ваш приятель хочет открыть свой магазин и просит у вас вложить в его бизнес некоторую сумму денег. Взамен он обещает, что вы станете совладельцем. Тогда, если торговля будет успешной, то с каждой вложенной вами денежной единицы вы получите 4 д. е. Но если магазин прогорит, то вы потеряете свои деньги. Изучая статистику, вы поняли, что вероятность успеха равна 2/5. Ваша элементарная функция полезности имеет вид: $u(x) = \ln x$.

(а) Предположим, ваш приятель просит у вас вложить в магазин 200 д. е. Согласитесь ли вы с предложением приятеля?

(б) Выпишите условие, характеризующее максимальную сумму денег, которую вы готовы вложить в магазин.

(в) Предположим, что ваш приятель просит у вас не определенную сумму, а предлагает вам самому решить, сколько вложить, чтобы стать совладельцем. Какую сумму вы дадите?

(г) Определите состояния природы и соответствующие контингентные блага в данной модели.

(д) Выведите бюджетное ограничение в терминах контингентных благ и изобразите графически.

(е) Изобразите на графике ваш оптимальный выбор.

(ж) Предположим теперь, что вы нейтральны к риску. Каков будет ваш оптимальный выбор в этом случае? Приведите графическую иллюстрацию.

6.30. Рассмотрите чиновника, имеющего богатство w руб., чьи должностные обязанности включают выдачу лицензий на оказание медицинских услуг. Предприниматель, желающий ускорить процесс получения лицензии, готов предложить чиновнику взятку b руб. Однако в рамках программы борьбы с коррупцией в государственных органах может быть проведена проверка деятельности чиновника и если будет выявлен факт получения взятки, чиновник понесет наказание в виде штрафа $F(b)$, причем чем больше взятка, тем большее наказание ожидает чиновника. Для простоты будем считать, что штраф за взяточничество пропорционален размеру полученной взятки, т. е. $F(b) = f \cdot b$, где $f > 0$. Вероятность проверки работы чиновника равна π, $0 \leqslant \pi \leqslant 1$, и в ходе нее гарантировано будет раскрыта его коррупционная деятельность (если таковая имеет место) и размер полученной взятки. Предположим, что чиновник является рискофобом, имеющим предпочтения, представимые функцией ожидаемой полезности с дифференцируемой элементарной функцией полезности $u(x)$.

(а) Выпишите задачу чиновника и условия первого порядка, характеризующие оптимальную для чиновника величину взятки.

(б) Как изменится оптимальная величина взятки при малом увеличении ставки штрафа f?

(в) Приведите необходимое и достаточное условие (в терминах экзогенных параметров модели) того, что чиновник согласится принять взятку. Докажите, что это условие является необходимым и достаточным.

(г) Опишите задачу выбора оптимальной величины взятки в терминах контингентных благ:

(i) Определите состояния природы и соответствующие контингентные блага в данной модели.
(ii) Выведите уравнение бюджетной линии в терминах контингентных благ и приведите графическую иллюстрацию.
(iiii) Отметьте оптимальный набор контингентных благ на рисунке, предполагая, что выполняется условие, полученное в п. (в), а также отметьте на рисунке оптимальную взятку.
(iv) Проинтерпретируйте условие, полученное в п. (в), в терминах наклонов кривых безразличия и бюджетной линии в пространстве контингентных благ.

(д) Пусть условие, полученное в п. (в), выполнено. Какова будет оптимальная величина взятки, если чиновник нейтрален к риску?

(е) Как изменится ваш ответ на п. (г) (i), если проверка деятельности чиновника выявляет взяточничество с вероятностью τ, $0 < \tau < 1$?

(ж) Пусть предпочтения чиновника описываются элементарной функцией полезности $u(x) = \ln(x)$, первоначальное богатство чиновника составляет $w = 80\,000$ руб., ставка штрафа равна $f = 2$, а вероятность проверки равна $\pi = 1/5$. Найдите оптимальную величину взятки.

6.31. Вашему приятелю, который не изучал никогда микроэкономику, предложили принять участие в игре, в которой он может получить чистый выигрыш 13 долл. с вероятностью 2/3 и потерять 11 долл. с вероятностью 1/3. На момент предложения данной игры в наличии у приятеля имелось только 12 долл. и он отказался от участия в игре.

(а) Верно ли поступил ваш приятель, отказавшись от игры? Объясните и проиллюстрируйте ответ графически в пространстве контингентных товаров.

(б) Как изменится ваш ответ на п. (а), если, опросив вашего приятеля, вы смогли выявить, что его предпочтения могут быть представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности $u\,(x) = \sqrt{x}$, где x — богатство приятеля. Проиллюстрируйте решение графически в осях богатство–полезность.

(в) Какую максимальную сумму готов был бы заплатить за участие в предложенной игре ваш приятель, имеющий описанные в п. (б) предпочтения?

6.32. Представим себе налогоплательщика, который должен подать декларацию о доходах и размышляет о том, стоит ли скрыть свои реальные доходы. В случае обнаружения соответствующими органами сокрытия дохода данный индивид будет призван к ответственности в соответствии со ст. 122 налогового кодекса РФ, которая гласит:

1. Неуплата или неполная уплата сумм налога (сбора) в результате занижения налоговой базы, иного неправильного исчисления налога (сбора) или других неправомерных действий (бездействия) влекут взыскание штрафа в размере 20% от неуплаченной суммы налога (сбора).

2. Деяния, предусмотренные пунктом 1 настоящей статьи, совершенные умышленно, влекут взыскание штрафа в размере 40% от неуплаченной суммы налога (сбора).

Пусть данный налогоплательщик должен выплачивать государству только подоходный налог, который составляет 13%, имея богатство m руб., а вероятность выявления уклонения от уплаты налогов для физического лица равна p, $p \in (0,\, 1)$. При этом мы будем полагать, что если налоговая проверка состоится, то она в полной мере выявит размер сокрытых доходов, а также определит, произошло ли данное сокрытие умышленно или нет. Кроме того, налогоплательщик обязан выплатить всю сумму вмененного ему налога и уплатить, помимо этого, наложенный на него штраф.

(а) Определите состояния природы и контингентные товары.

(б) Изобразите на одном графике в пространстве контингентных товаров бюджетные линии данного налогоплательщика при умышленном и непреднамеренном сокрытии доходов.

(в) Верны ли следующие утверждения:

1) Нейтральному к риску налогоплательщику всегда безразлично, сокрыть ли некоторую сумму от уплаты подоходного налога или указать свои доходы в полном объеме.
2) Налогоплательщик-рискофоб никогда не будет скрывать свои доходы от уплаты подоходного налога.
3) Налогоплательщик-рискофил всегда умышленно предпочтет скрыть хотя бы часть своего дохода от уплаты подоходного налога.

(г) Предположим, что налогоплательщик-рискофоб умышленно предпочел полностью отказаться от уплаты подоходного налога. Изобразите графически на рисунке, являющимся ответом на п. (б), минимальную прибавку к жалованью данного агента, которая побудила бы его декларировать свой доход в полном объеме. Считайте, что данная прибавка не облагается никаким видом налога и выплачивается налогоплательщику только в том случае, если он гарантированно декларирует свой доход в полном объеме. Полагая, что предпочтения налогоплательщика представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности $u\,(w)$, где w — богатство агента, запишите формально условие, определяющее данную прибавку.

(д) Предположим, что у налогоплательщика-рискофоба есть возможность за некоторое вознаграждение получить точную информацию о том, будет ли проведена налоговая проверка. Изобразите графически на рисунке, являющимся ответом на п. (б), максимальную сумму денег, не облагаемую налогом, которую данный налогоплательщик будет готов заплатить информатору. Полагая, что предпочтения налогоплательщика представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности $u(w)$, где w — богатство агента, запишите формально условие, определяющее данную плату информатору.

(е) Верно ли, что значительный рост вероятности налоговой проверки неизбежно приведет к сокращению объемов скрываемых доходов для любого налогоплательщика? Проиллюстрируйте свой ответ в пространстве контингентных благ.

6.3. Модель спроса на страховку

6.33. Верно ли, что с ростом богатства потребители-рискофобы будут страховаться на меньшую сумму? Если утверждение верно, тогда докажите его; если нет — приведите контрпример.

6.34. Известно, что агент A — рискофоб, а агент B — рискофил. Оба агента имеют одинаковое богатство, сталкиваются с одинаковым риском и каждый из агентов может застраховаться, выбирая размер страховки. Единственным ограничением является запрет на страховку, превышающую сумму потерь. Предположим, что страховая компания в качестве рекламной акции предложила первым 100 клиентам, в число которых попали агенты A и B, страховаться по цене страховки, меньшей вероятности потерь. Верно ли, что каждый из агентов A и B захочет купить такую страховку?

6.35. Известно, что агент A — рискофоб, а агент B — рискофил. Оба агента имеют одинаковое богатство и сталкиваются с одинаковыми рисками. Оба агента могут застраховаться и сами выбирают размер страховки. Страхование на сумму, превышающую потери, запрещено. Предположим, что цена страховки больше вероятности потерь. Верно ли, что каждый из агентов откажется купить данную страховку?

6.36. Агент хранит все свои ценные вещи и накопления в совокупном размере 100 тыс. руб. в своем доме. Предпочтения агента представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности $u(x) = \sqrt{x}$, где x — богатство агента в тыс. руб. Поскольку у данного индивида очень старая входная дверь и простые дверные замки, вероятность ограбления составляет 10%. Известно, что если ограбление произойдет, то данный индивид потеряет все свои накопления и ценные вещи.

(а) Какую максимальную сумму денег готов отдать агент за полную страховку от кражи?

(б) Предположим, у агента есть возможность установить более сложные средства защиты от кражи, затратив 5 тыс. руб. (в этом случае вероятность кражи снижается до 1%). Если агент установит их, то захочет ли он покупать полную страховку от кражи по какой-либо цене? Если **да**, найдите максимальную сумму, которую он готов в этом случае отдать за данную страховку.

6.37.* Рассмотрите индивида, который обратился в страховую компанию и рассматривает возможность приобретения страховки своего недвижимого имущества (дома в дачном поселке, расположенного неподалеку от лесополосы). Пусть предпочтения данного агента представимы функцией ожидаемой полезности с дважды непрерывно дифференцируемой элементарной функцией полезности $u(x)$, где x — богатство агента, $u'(x) > 0$, $u''(x) < 0$ для любого x. Пусть совокупное богатство агента (включая дом в дачном поселке) составляет m руб., вероятность того, что дом сгорит во время лесных пожаров равна p, при этом ущерб, который будет нанесен агенту, составит L. Страховая компания, работающая на совершенно конкурентном рынке, никаких операционных издержек не несет, является нейтральной к риску и предлагает своим клиентам приобрести страховку величиной K по цене γ за каждый рубль страхового покрытия. Известно также, что в соответствии с законодательством, страхование на сумму, превышающую потери, запрещено.

(а) Определите контингентные блага и состояния природы.

(б) Пусть страховка, предлагаемая страховой компанией, актуарно справедлива. Изобразите графически в пространстве контингентных товаров все значения K, на которые согласится данный агент, если таковые существуют.

(в) Можно ли, не специфицируя параметры задачи и элементарную функцию полезности, определить объем страхового покрытия, который предпочтет данный агент при актуарно справедливой страховке? Если **да**, то найдите эту величину, если **нет**, то объясните, почему это невозможно сделать. Проиллюстрируйте решение графически.

(г) Верно ли, что если страховка не является актуарно справедливой ($\gamma > p$), а страховая компания предлагает своим клиентам либо не страховаться вовсе, либо страховаться на полную сумму потерь, то данный индивид откажется от полной страховки?

(д) Пусть теперь $p = 0{,}01$, $m = 16$ млн руб., $L = 7$ млн руб. и $u(x) = \sqrt{x}$, где x — богатство индивида в миллионах рублей. Какую максимальную сумму денег готов был бы отдать клиент за полную страховку своего имущества? Проиллюстрируйте решение графически.

(е) Пусть теперь $p = 0,01$, $m = 16$ млн руб., $L = 7$ млн руб. и $u(x) = \sqrt{x}$, где x — богатство индивида в миллионах рублей, а цена одного миллиона рублей страхового покрытия в страховой компании составляет 100 тыс. руб. Страховая компания предлагает своим клиентам покупку полиса с любым страховым покрытием в соответствии с законодательством. Найдите величину страхового покрытия, которую выберет данный агент, и проиллюстрируйте решение графически.

6.38. Рассмотрите модель спроса на страховку для индивида-рискофоба, обладающего богатством w д. е. Предположим, с вероятностью π может произойти несчастный случай, в результате которого индивид потеряет часть этого богатства в размере L д. е., $L < w$. Индивид имеет возможность приобрести страховку по цене γ за единицу страхового покрытия у нейтральной к риску страховой компании, не имеющей операционных издержек. Предпочтения индивида описываются функцией ожидаемой полезности с дифференцируемой элементарной функцией полезности $u(x)$.

(а) Выпишите задачу индивида и условия первого порядка.

(б) Как изменится оптимальная величина страховки при малом увеличении потерь L? Проинтерпретируйте полученный результат.

(в) Как изменится оптимальная величина страховки при малом увеличении вероятности наступления страхового случая π? Проинтерпретируйте полученный результат.

Предположим теперь, что $w = 12$ д. е., $L = 8$ д. е., $\pi = 1/2$, $\gamma = 1/2$, $u(x) = \ln(x)$.

(г) Какое количество страховки приобретет данный индивид?

(д) Как изменится ваш ответ на п. (г), если цена единицы страховки составит $\gamma = 3/5$?

(е) Опишите задачу выбора оптимальной величины страховки в терминах контингентных благ.

(i) Определите состояния природы и соответствующие контингентные блага в данной модели.

(ii) Выведите бюджетное ограничение в терминах контингентных благ и изобразите графически.

(iii) Изобразите на графике оптимальную точку при $\gamma = 1/2$ и $\gamma = 3/5$.

(ж) Предположим теперь, что индивид нейтрален к риску. На какую сумму застрахуется данный индивид при $\gamma = 3/5$? Изобразите решение графически.

6.39. М занимается изготовлением и продажей сувениров туристам. Его доход составляет 100 тыс. долл. в год. Из-за извержения вулкана Эйяфьятлайокудль в Исландии было закрыто воздушное пространство Европы, из-за чего поток туристов резко сократился. Если полеты не возобновятся в течение недели, то М потеряет 75 тыс. долл. годового дохода. Вероятность того, что полеты будут возобновлены в течение недели, составляет одну пятую. Страховая компания предлагает застраховать М свой риск по актуарно справедливой цене. Предпочтения М представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности вида $u\,(x) = \sqrt{x}$.

(а) Захочет ли М застраховать свои потери? Если нет, то объясните почему, если да, то полис с каким объемом страхового покрытия он приобретет и какую цену заплатит за страховку? Приведите графическую иллюстрацию.

(б) Какую максимальную сумму М будет готов заплатить за полную страховку своих потерь? Приведите графическую иллюстрацию.

(в) Сравните величины, полученные в пп. (а) и (б) и объясните полученный результат.

6.40. Рассмотрите модель спроса на страховку для двух индивидов-рискофобов, А и В, имеющих одинаковое первоначальное богатство w и одинаковые предпочтения, описываемые непрерывно дифференцируемой элементарной функцией полезности. Считайте, что страховка для обоих агентов является актуарно справедливой. Индивид A планирует застраховать свое имущество от пожара, вероятность возникновения которого составляет π. Индивид B планирует застраховать свое имущество от наводнения, вероятность которого равна q ($\pi > q$). Пусть в результате наступления страхового случая каждый из индивидов может потерять 25% своего богатства.

(а) Верно ли, что величина страховки агента A превысит величину страховки агента B? Объясните.

(б) Верно ли, что стоимость страховки для агента A превысит стоимость страховки для агента B? Объясните.

(в) Пусть теперь страховка не является актуарно справедливой для обоих агентов, однако цена единицы страховки γ одинакова для обоих агентов (и больше вероятности наступления несчастного случая). Известно, что один из агентов не отказался от страховки. Верно ли, что оба агента застрахуются на одинаковую сумму? Если да, то докажите, если нет, то укажите, величина страховки кого из агентов будет больше. Объясните.

6.41. Талантливый музыкант M, доход которого составляет 100 тыс. долл. в год, заболел гриппом. Осложнения после гриппа могут привести к тому, что M потеряет слух. В этом случае его годовой доход составит только 25 тыс. долл. Врачи оценивают вероятность потери слуха как $1/5$. Страховая компания «Альфа» предлагает M застраховать свое здоровье по актуарно справедливой цене. Известно, что предпочтения M представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности вида $u(x) = \sqrt{x}$.

(а) Как вы считаете, захочет ли M воспользоваться услугами этой страховой компании? Если нет, то объясните почему, если да, то укажите, какую сумму он заплатит за страховку. Приведите графическую иллюстрацию.

(б) Другая страховая компания, «Бетта», зная предпочтения и доходы M, рассчитала максимальную сумму, которую M готов будет отдать за полную страховку своего здоровья, и предлагает ему воспользоваться ее услугами, заплатив за полную страховку именно эту сумму. Найдите эту сумму. Приведите графическую иллюстрацию.

(в) Сравните величины, полученные в пп. (а) и (б), и объясните полученный результат.

6.42. Рассмотрите индивида, богатство которого, равное 10 тыс. долл., вложено в разные активы в разных странах мира. В случае финансового кризиса индивид понесет потери, величина которых зависит от его масштабов. Так, если кризис будет носить глобальный характер в масштабах мировой экономики в целом, то индивид потеряет сумму, равную 3600 долл., вероятность этого события по оценкам экспертов равна 10%; если же кризис будет локальным, затрагивающим лишь отдельный регион, то потери индивида составят 1900 долл. (вероятность этого события оценивается в 20%). Индивид может застраховать свои активы в страховой компании, предлагающей только контракты полного страхования по цене p (т. е. в случае глобального финансового кризиса страховая компания выплатит индивиду сумму 3600 долл., а в случае локального — 1900 долл.). Будем считать, что страховая компания нейтральна к риску, не несет операционных издержек и все ее расходы связаны лишь с выплатами по страховым полисам. Предположим также, что предпочтения индивида представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности $u(x)$.

(а) Предположим известно, что индивид отказался от услуг страховой компании. Какую лотерею он выбрал в этом случае?

(б) Если индивид приобретает контракт полного страхования, то с какой лотереей он сталкивается?

(в) Выпишите условие, характеризующее максимальную цену, которую индивид готов заплатить за полную страховку.

(г) Если элементарная функция полезности индивида имеет вид $u(x) = \sqrt{x}$, то какова максимальная цена, которую он готов заплатить за полную страховку?

Предположим далее, что страховая компания предлагает также частичную страховку, согласно которой индивид может застраховать долю γ возможных потерь, заплатив за контракт сумму γp, где $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ (т. е. если, например, наступит глобальный финансовый кризис, то страховая компания выплатит индивиду сумму 3600γ долл.).

(д) Какова будет цена страхового контракта p при актуарно справедливой страховке?

(е) Будет ли индивид-рискофоб страховаться полностью при цене страховки, полученной в п. (д)?

(ж) На какую сумму застрахуется нейтральный к риску индивид при цене страховки, полученной в п. (д)?

6.43. Рассмотрите модель спроса на страховку для индивида, обладающего богатством $w = 900$ д. е. Предположим, с вероятностью π может произойти несчастный случай, в результате которого индивид потеряет часть этого богатства в размере $L = 500$ д. е. Нейтральная к риску страховая компания предлагает индивиду приобрести полную страховку от несчастного случая по цене, равной ожидаемым потерям плюс дополнительная плата за заключение страхового контракта, равная 9 д. е. Пусть предпочтения индивида описываются функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности $u(x) = \sqrt{x}$.

(а) Какова цена страхового контракта с полным покрытием?

(б) При каких значениях π индивид согласится приобрести предлагаемый страховой контракт? Проинтерпретируйте полученный результат.

6.44. Менеджер по продажам в силу своей профессии много общается с самыми разными людьми. В городе, где работает менеджер, разразилась эпидемия гриппа, в связи с чем по оценкам экспертов вероятность того, что он заболеет, равна 50%. Первоначальное богатство менеджера составляет 14 д. е., и в случае болезни из-за расходов на лечение и упущенного заработка он потеряет 11 д. е. Предположим, заболевание сопровождается не только финансовыми потерями, но и оказывает влияние на предпочтения менеджера. Так, если он не заболевает, то его предпочтения описываются элементарной функцией полезности $u_h(x) = 0{,}25 \ln(x)$, а если заболевает — функцией $u_s(x) = \ln(x)$. Менеджер может купить медицинскую страховку у нейтральной к риску страховой компании, не несущей операционных издержек, заплатив за страховое покрытие в размере y д. е. сумму $P(y) = 0,875\,y$. Будем считать, что страхование на сумму, превышающую величину потерь, запрещено. На какую сумму застрахуется менеджер?

6.45. Рассмотрите модель спроса на страховку для индивида-рискофоба, имеющего первоначальное богатство w. Предположим, в результате несчастного случая, вероятность которого равна π, индивид может понести потери в размере $L < w$. Индивид может приобрести страховку от несчастного случая по цене γ за единицу страхового покрытия у нейтральной к риску страховой компании, не имеющей операционных издержек. Предположим, несчастный случай влечет не только финансовые потери, но и оказывает влияние на предпочтения индивида: при наступлении несчастного случая предпочтения индивида описываются дифференцируемой элементарной функцией полезности $u_1(x)$, а в противном случае — функцией $u_2(x)$. Рассмотрим следующие случаи соотношений предельных полезностей:

(1) $u_1'(x) < u_2'(x)$ для любого уровня богатства $x \geqslant 0$;

(2) $u_1'(x) > u_2'(x)$ для любого уровня богатства $x \geqslant 0$.

(а) Предположим, страховка является актуарно справедливой. На какую сумму застрахуется индивид в случаях (1) и (2)? Проинтерпретируйте полученный результат. Приведите графическую иллюстрацию в пространстве контингентных благ.

(б) Предположим, страховка не является справедливой: цена единицы страховки выше вероятности наступления страхового случая. На какую сумму застрахуется индивид в случаях (1) и (2)? Может ли индивид застраховаться на полную стоимость потерь? Проинтерпретируйте полученный результат. Приведите графическую иллюстрацию в пространстве контингентных благ.

6.4. Модель формирования портфеля инвестиций

6.46. Рассмотрите индивида, который решает, как ему распределить свое богатство, равное 10 д. е., между двумя активами. Первый актив — безрисковый: вложив 1 д. е. в этот актив, он получит 4 д. е. Вложив 1 д. е. во второй актив, можно получить $a = 8$ д. е. с вероятностью $\pi = 2/5$ и $b = 2$ д. е. в противном случае (указаны валовые выигрыши). Пусть предпочтения индивида представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности $u(x) = \ln(x)$.

(а) Выпишите задачу индивида и найдите оптимальную величину вложений в рисковый и безрисковый активы.

(б) Как изменится ваш ответ на п. (а), если $a = 7$, а все остальные условия неизменны?

(в) Как изменится ваш ответ на п. (а), если индивид нейтрален к риску?

(г) Опишите задачу выбора оптимального портфеля в терминах контингентных благ:

(i) Определите состояния природы и соответствующие контингентные блага в данной модели.

(ii) Выведите бюджетное ограничение в терминах контингентных благ и изобразите графически.

(д) Изобразите на графике оптимальную точку для индивида с элементарной функцией полезности $u(x) = \ln(x)$ и для нейтрального к риску индивида.

6.47. Рассмотрим агента, распределяющего свое богатство ω руб. между двумя активами. Известно, что 1 руб., вложенный в рисковый актив, приносит валовый доход, равный 4 руб. в первом состоянии мира (с вероятностью 25%) и α руб. — во втором состоянии мира. Рубль, вложенный в безрисковый актив, приносит валовый доход 1 руб. вне зависимости от состояния мира. Предпочтения агента представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности $u(x) = \ln x$.

(а)* Предположим, известно, что агент включил в портфель только безрисковый актив (в положительном количестве). Определите все возможные значения α.

(б) Верно ли, что результат п. (а) будет справедлив для любого рискофоба с дифференцируемой элементарной функцией полезности?

6.48.* Рассмотрим агента, распределяющего свое богатство ω руб. между рисковым и безрисковым активами. Известно, что валовая доходность безрискового актива равна 2 руб. Один рубль, вложенный в рисковый актив, приносит 4 руб. с вероятностью 50% и 1 руб. с вероятностью 50% (указаны валовые доходности). Предпочтения агента представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности $u(x)$, где x — богатство агента, $u'(x) > 0$, $u''(x) < 0$ для любого x. Агент рассматривает три альтернативы: 1) вложить в каждый из активов 50% богатства; 2) вложить в рисковый актив 75%

богатства, остальное — в безрисковый актив; 3) вложить все богатство в безрисковый актив. Если известно, что для агента второй вариант не хуже третьего, то верно ли, что первый вариант для него предпочтительнее, чем третий?

6.49. Господину М, имеющему ежемесячный фиксированный доход в размере m руб., предложили вложить средства в рисковый актив, валовая доходность по которому на каждый рубль вложений в месяц составит 2 руб. с вероятностью $3/4$ и 50 коп. с вероятностью $1/4$. Помимо рискового актива у М есть возможность вложить средства в безрисковый актив с чистой доходностью 20 коп. на каждый рубль вложений. Господин М может варьировать объемы вложений средств в оба актива, однако занимать средства и давать деньги в долг, а также вкладывать средства в другие активы, возможности у него нет. Доходности указанных активов остаются неизменными. Предпочтения М представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности $u(w) = \ln w$, где w — богатство индивида. Известно, что М финансирует ремонт в своей новой квартире, причем если его доход за месяц превысит фиксированный ежемесячный доход m, то финансовый вклад в ремонт квартиры составит разницу между полученным доходом и суммой m, если его месячный доход окажется меньше, чем m, то в этот месяц вклад в ремонт квартиры он не осуществляет. За какой срок в среднем М сможет профинансировать ремонт в своей квартире, если необходимая для ремонта сумма составляет $9{,}75\,m$?

6.50. Начинающий бизнесмен решает, как ему распределить свой доход $w = 90$ д. е. в месяц между двумя проектами: собственным бизнесом и участием в бизнесе своего родственника (будем считать, что он имеет возможность одновременно участвовать в обоих проектах). По оценкам экспертов каждая денежная единица вложений в собственный бизнес принесет ему (валовую) доходность $a = 6$ д. е. в месяц при благоприятном развитии событий (вероятность этого равна $\pi = 1/3$) и b д. е. в месяц в противном случае. В то же время единица вложений в бизнес родственника обещает (валовую) отдачу c д. е. в месяц гарантированно. Пусть предпочтения бизнесмена представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности $u(x) = \ln(x)$. Рассмотрим следующие случаи:

(1) $b = 3/10$, $c = 6/5$;

(2) $b = 1$, $c = 2$.

(а) Какую сумму в месяц бизнесмен будет инвестировать в собственный бизнес в каждом из указанных случаев?

(б) Предположим теперь, что доход, вырученный от участия в этих бизнес-проектах, если он превышает w, бизнесмен предполагает потратить на приобретение автомобиля Porsche 911 стоимостью $d = 460$ д. е. Будем считать, что у него нет возможности занимать или вкладывать средства в другие активы и доходность вложений со временем не меняется. Сколько времени в среднем потребуется бизнесмену, чтобы приобрести автомобиль в каждом из указанных случаев?

(в) Как изменится ваш ответ на п. (б), если бизнесмен нейтрален к риску?

6.51. Предпринимателю M с богатством w руб. предлагают вложить средства в рисковый актив, валовая доходность по которому на каждый рубль вложений составит 4 руб. с вероятностью 1/4 и 50 коп. с вероятностью 3/4. Помимо рискового актива у M есть возможность вложить средства в безрисковый актив с валовой доходностью 1. M может варьировать объемы вложений средств в оба актива, однако занимать средства и давать деньги в долг, а также вкладывать средства в другие активы, возможности у него нет. Известно, что M — рискофоб.

(а) Определите состояния природы и контингентные товары в данной задаче.

(б) Найдите и изобразите в пространстве контингентных товаров множество доступных предпринимателю M альтернатив.

(в) Верно ли, что если M будет предоставлен выбор между вложением всех средств только в рисковый актив и вложением всех средств только в безрисковый актив, то он выберет второй вариант, поскольку он является рискофобом? Обоснуйте.

(г) Приведите в общем виде необходимое условие (в терминах валовых доходностей по активам и вероятностей состояний природы), положительности вклада рискофоба в рисковый актив. Проверьте, выполнено ли это условие в данной задаче.

(д) Пусть предпочтения M представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности вида $u(x) = \ln x$. Какую долю своего богатства M вложит в рисковый актив? Проиллюстрируйте решение графически в пространстве контингентных товаров.

(е) Предположим, M владеет активами, описанными в условии задачи, и вкладывает в них сумму, найденную в п. (д). За какую минимальную сумму денег M готов продать свои активы? Проиллюстрируйте решение графически в осях контингентных товаров и в пространстве богатство–полезность.

6.52. Рассмотрите индивида-рискофоба, который решает, как ему распределить свое богатство, равное $w = 400$ д. е., между двумя активами: безрисковым и рисковым. Чистая доходность по безрисковому активу равна нулю. Чистая доходность по рисковому активу на единицу вложений составляет $\alpha = 4$ с вероятностью $\pi = 1/3$ и $\beta = -1$ в противном случае. Пусть предпочтения индивида представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности $u(x) = \sqrt{x}$.

(а) Найдите оптимальную величину вложений в рисковый актив.

(б) Предположим теперь, что чистая доходность рискового актива пропорционально изменилась так, что теперь чистая доходность рискового актива составляет $\overline{a} = \alpha(1 + \tau)$ с вероятностью $\pi = 1/3$ и $\overline{\beta} = \beta(1 + \tau)$ в противном случае, где $\tau = 0{,}25$. Как соотносятся величины вложений в рисковый актив до и после изменения доходности? Проинтерпретируйте полученный результат.

(в) Будет ли соотношение вложений в рисковый актив, полученное в п. (б), справедливо для любого индивида-рискофоба с дифференцируемой элементарной функцией полезности при произвольных параметрах $w > 0$, $\alpha > 0$, $\beta < 0$ и $0 < \pi < 1$ таких, что индивид до и после изменения чистой доходности рискового актива вкладывает средства в оба актива?

6.5. Общее равновесие в экономике с контингентными благами (равновесие Эрроу–Дебре)

6.53. Рассмотрите экономику обмена с одним физическим благом, двумя потребителями (A и B) и двумя состояниями мира (1 и 2). Пусть первоначальные запасы потребителей описываются векторами $\omega^{\mathsf{A}} = (\omega, 0)$, $\omega^{\mathsf{B}} = (0, \omega)$, где $\omega > 0$. Потребители одинаково оценивают вероятности наступления обоих состояний мира. Предположим также, что потребители являются рискофобами с предпочтениями, представимыми функцией ожидаемой полезности с дифференцируемыми элементарными функциями полезности, не зависящими от состояния.

(а) Покажите, что во всех внутренних Парето-оптимальных распределениях потребители будут полностью застрахованы от риска (т. е. $x_1^k = x_2^k$ для любого потребителя k), пользуясь дифференциальной характеристикой внутреннего Парето-оптимума.

(б) Приведите альтернативное доказательство утверждения из п. (а): покажите, что для любого допустимого внутреннего распределения такого, что $x_1^k \neq x_2^k$, можно построить Парето-улучшение.

(в) Покажите, что во внутреннем равновесии Эрроу–Дебре равновесное отношение цен равно отношению вероятностей наступления соответствующих состояний мира.

(г) Предположим теперь, что потребитель A нейтрален к риску, а все остальные условия задачи остаются неизменными. Будет ли потребитель B по-прежнему полностью застрахован от риска в любом внутреннем Парето-оптимальном распределении?

6.54. Рассмотрите экономику обмена с одним физическим благом, двумя потребителями (A и B) и двумя состояниями мира (1 и 2). Пусть первоначальные запасы потребителей описываются векторами $\omega^{\mathsf{A}} = (\omega, 0)$, $\omega^{\mathsf{B}} = (0, \omega)$, где $\omega > 0$. Пусть потребитель A считает первое состояние мира более вероятным, т. е. $\pi_1^{\mathsf{A}} > \pi_1^{\mathsf{B}}$. Предположим также, что потребители являются рискофобами с предпочтениями представимыми функцией ожидаемой полезности с дифференцируемыми элементарными функциями полезности, не зависящими от состояния.

(а) Покажите, что во всех внутренних Парето-оптимальных распределениях уровень потребления каждого потребителя будет выше в том состоянии мира, которое он считает более вероятным.

(б) Будет ли верен результат п. (а), если потребитель A нейтрален к риску?

6.55. Рассмотрите экономику обмена с единственным физическим благом, двумя состояниями природы (1, 2) и двумя потребителями (A и B). Совокупный запас физического блага в каждом состоянии мира равен единице, причем потребитель A

владеет всем запасом физического блага в первом состоянии мира, а потребитель B владеет всем запасом физического блага во втором состоянии мира. Оценки вероятностей состояний природы у потребителей совпадают (т. е. $\pi_s^{\mathsf{A}} = \pi_s^{\mathsf{B}} \equiv \pi_s$ для любого состояния мира s). Будем считать, что потребители являются рискофобами с дифференцируемыми элементарными функциями полезности, не зависящими от состояния мира, но предпочтения их различны.

(а) Приведите определение равновесия Эрроу–Дебре для данной экономики.

(б) Найдите внутреннее равновесие Эрроу–Дебре. Приведите графическую иллюстрацию в ящике Эджворта.

(в) Можно ли распределение $\overline{x}^{\mathsf{A}} = (1/3,\ 2/3)$, $\overline{x}^{\mathsf{B}} = (2/3,\ 1/3)$ реализовать как равновесное в экономике с трансфертами? Если вы считаете, что **можно**, тогда укажите соответствующие цены и трансферты, если считаете, что **нельзя** — тогда объясните почему.

6.56. Рассмотрите экономику обмена с одним физическим благом, двумя состояниями мира (1 и 2) и тремя потребителями (A, B и C). Запасы физического блага у потребителей в состояниях мира 1 и 2, соответственно, составляют $\omega^{\mathsf{A}} = (\omega/3,\ 0)$, $\omega^{\mathsf{B}} = (\omega/3,\ 0)$, $\omega^{\mathsf{C}} = (\omega/3,\ \omega)$, где $\omega > 0$. Предпочтения потребителей представимы функцией ожидаемой полезности с дифференцируемыми возрастающими строго вогнутыми элементарными функциями полезности, не зависящими от состояния. Известно, что по мнению потребителя A первое состояние мира наступит с вероятностью 1/3. Кроме того, известно, что во внутреннем равновесии Эрроу–Дебре все потребители полностью застрахованы от риска, т. е. $\widetilde{x}_1^k = \widetilde{x}_2^k$ для любого потребителя k, и $\widetilde{p} \gg 0$. Найдите все недостающие параметры равновесия.

6.57. Рассмотрите экономику обмена с одним физическим благом, двумя состояниями мира (1 и 2) и тремя потребителями (A, B и C). Запасы физического блага у потребителей в состояниях мира 1 и 2, соответственно, составляют $\omega^{\mathsf{A}} = (9,\ 3)$, $\omega^{\mathsf{B}} = (9,\ 6)$, $\omega^{\mathsf{C}} = (9,\ 3)$. Предпочтения потребителей представимы функцией ожидаемой полезности с возрастающими элементарными функциями полезности, причем элементарная функция полезности потребителя C имеет вид: $u^{\mathsf{C}}(x) = \ln x^{\mathsf{C}}$. Потребитель C считает, что первое состояние мира наступит с вероятностью $\pi_1^{\mathsf{C}} = 1/3$. Известно также, что в равновесии Эрроу–Дебре $\widetilde{x}^{\mathsf{A}} = (12,\, 2)$ и $\widetilde{p} \gg 0$. Найдите недостающие параметры равновесия.

6.58. Рассмотрите экономику обмена с одним физическим благом, двумя потребителями (A и B) и двумя состояниями мира (1 и 2). Пусть первоначальные запасы потребителей описываются векторами $\omega^{\mathsf{A}} = (\omega,\, \omega)$, $\omega^{\mathsf{B}} = (3\,\omega,\, \omega)$, где $\omega > 0$. Предположим также, что оба потребителя считают, что первое состояние мира наступит с вероятностью $\pi_1 = 1/3$. Элементарная функция полезности потребителя B имеет вид: $u^{\mathsf{B}}(x^{\mathsf{B}}) = \ln(x^{\mathsf{B}})$, а потребитель A нейтрален к риску.

(а) Найдите и изобразите множество Парето-оптимальных распределений в ящике Эджворта.

(б) Какие из граничных Парето-оптимальных распределений, найденных в п. (а), не могут быть равновесными (без трансфертов) ни при каких положительных ценах?

(в) Приведите определение равновесия Эрроу–Дебре для данной экономики.

(г) Найдите равновесие Эрроу–Дебре. Будут ли потребители полностью застрахованы от риска во внутреннем равновесии?

(д) Предположим теперь, что $\pi_1 = 3/4$. Найдите равновесие Эрроу–Дебре в этом случае.

(е) Укажите все значения π_1, при которых равновесие (при положительных ценах) будет граничным.

В пп. (ж)–(з) считайте, что по-прежнему $\pi_1 = 1/3$.

(ж) Можно ли реализовать распределение $\overline{x}^{\mathsf{A}} = (7\,\omega/2, 3\,\omega/2)$, $\overline{x}^{\mathsf{B}} = (\omega/2,\, \omega/2)$ как равновесное в экономике с трансфертами? Если вы считаете, что **можно**, тогда укажите соответствующие цены и трансферты, если считаете, что **нельзя** — тогда объясните почему.

(з) Можно ли распределение $\widehat{x}^{\mathsf{A}} = (\omega,\, 0)$, $\widehat{x}^{\mathsf{B}} = (3\,\omega,\, 2\,\omega)$ реализовать как равновесное в экономике с трансфертами? Если вы считаете, что **можно**, тогда укажите соответствующие цены и трансферты, если считаете, что **нельзя** — тогда объясните почему.

6.59. Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями (A и B), одним физическим благом и двумя состояниями природы (1 и 2). Пусть потребители считают состояния мира равновероятными. Потребитель A имеет элементарную функцию полезности вида $u^{\mathsf{A}}(x^{\mathsf{A}}) = (x^{\mathsf{A}})^2$, а потребитель B нейтрален к риску. В экономике имеется $\overline{\omega}_1$ ед. блага в первом состоянии мира и $\overline{\omega}_2$ — во втором состоянии.

(а) Пусть $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2$. Изобразите множество Парето-оптимальных распределений в ящике Эджворта.

(б) Какие из найденных в п. (а) Парето-оптимальных распределений не могут быть реализованы как равновесные в экономике с трансфертами?

(в) Предположим теперь, что $\overline{\omega}_2 = 2\overline{\omega}_1$. Изобразите множество Парето-оптимальных распределений в ящике Эджворта в этом случае.

(г) Какие из найденных в п. (в) Парето-оптимальных распределений не могут быть реализованы как равновесные в экономике с трансфертами?

6.6. Решения задач

6.26. (а) Подруги будут инвестировать средства в проект, если ожидаемая полезность от участия в проекте больше, чем полезность при отказе от участия. Если эти величины одинаковы, то подругам безразлично, принимать участие в проекте или отказаться от него.

Обозначим величину богатства (в тыс. долл.) в случае хорошего исхода через x_G, в случае плохого исхода через x_B, а начальный объем богатства обозначим через ω. Тогда для Анны

$$Eu^{\mathsf{A}} = pu^{\mathsf{A}}(x_B^{\mathsf{A}}) + (1-p)\, u^{\mathsf{A}}(x_G^{\mathsf{A}}) = \\ = 0{,}75 \cdot \sqrt{36} + 0{,}25 \cdot \sqrt{256} = 8{,}5 > 8 = \sqrt{\omega^{\mathsf{A}}}.$$

Следовательно, Анна согласится на участие в проекте. Рисунок 6.1 демонстрирует выбор Анны в пространстве контингентных товаров, а рис. 6.2 иллюстрирует выбор Анны в пространстве богатство–полезность.

Для Марии

$$Eu^{\mathsf{M}} = pu^{\mathsf{M}}(x_B^{\mathsf{M}}) + (1-p)\, u^{\mathsf{M}}(x_G^{\mathsf{M}}) = 0{,}75 \cdot 52 + 0{,}25 \cdot 100 = 64 = \omega^{\mathsf{M}},$$

следовательно, Марии безразлично, участвовать в проекте или отказаться от него. Заметим, что Мария нейтральна к риску

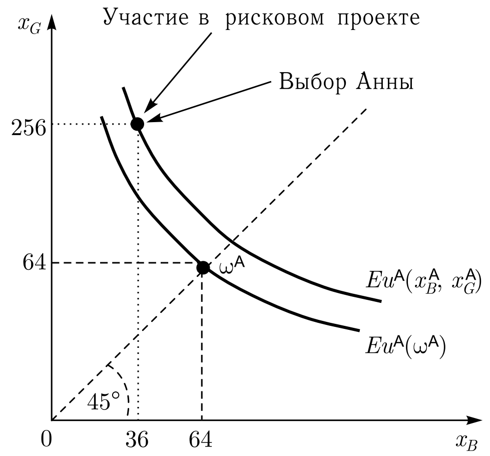

Рис. 6.1. Анна примет участие в рисковом проекте (иллюстрация в пространстве контингентных товаров)

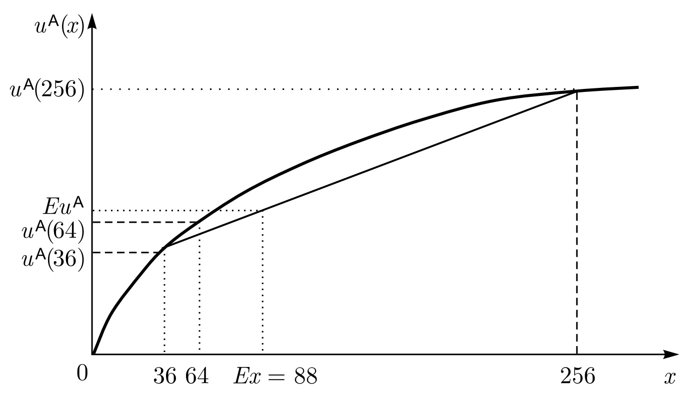

Рис. 6.2. Анна примет участие в рисковом проекте (иллюстрация в пространстве богатство–полезность)

и ожидаемое богатство от участия в данном рисковом проекте в точности равно богатству Марии. Рисунок 6.3 демонстрирует безразличие Марии между участием в рисковом проекте и отказе от него в пространстве контингентных товаров, а рис. 6.4 — в пространстве богатство–полезность.

(б) В табл. 6.1 представлены уровни богатств каждой из подруг и вероятности исходов в предположении, что проекты независимы, а риски объединены.

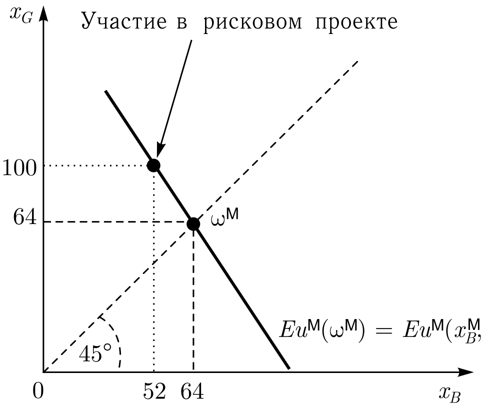

Рис. 6.3. Марии безразлично, участвовать в рисковом проекте или отказаться от него (иллюстрация в пространстве контингентных товаров)

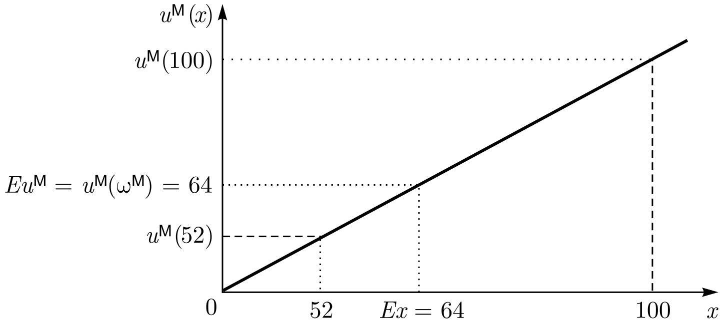

Рис. 6.4. Марии безразлично, участвовать в рисковом проекте или отказаться от него (иллюстрация в пространстве богатство–полезность)

Таблица 6.1. Вероятности выигрышей и соответствующие им объемы выигрышей каждой из подруг

Вероятность	1/16	3/16	3/16	9/16
Богатство каждой из подруг	178	154	68	44

Каждая из подруг захочет объединить риски, только если ожидаемая полезность от объединения рисков будет больше, чем ожидаемая полезность от участия в индивидуальном рисковом проекте. Найдем ожидаемую полезность каждой из подруг при объединении рисков:

$$Eu_{\text{об}}^{\mathsf{A}} = \frac{1}{16}\sqrt{178} + \frac{3}{16}\sqrt{154} + \frac{3}{16}\sqrt{68} + \frac{9}{16}\sqrt{44} \approx 8{,}44 < 8{,}5;$$

$$Eu_{\text{об}}^{\mathsf{M}} = \frac{1}{16} \cdot 178 + \frac{3}{16} \cdot 154 + \frac{3}{16} \cdot 68 + \frac{9}{16} \cdot 44 = 77{,}5 > 64.$$

Следовательно, Анна откажется объединять риски и будет участвовать в рисковом проекте индивидуально, а Мария, наоборот, предпочтет объединение рисков индивидуальному участию в рисковом проекте.

(в) Мария будет готова заплатить Анне за объединение рисков, только если ее ожидаемая полезность от совместного участия в проектах и уплаты данной суммы будет не меньше, чем ожидаемая полезность от индивидуального участия в проекте. Найдем эту сумму:

$$E\widetilde{u}_{\text{об}}^{\mathsf{M}} = \frac{1}{16}(178-t) + \frac{3}{16}(154-t) + \frac{3}{16}(68-t) + \frac{9}{16}(44-t) \geqslant 64.$$

Сумма, которую Мария готова будет заплатить Анне, максимальна, если последнее условие выполняется как равенство:

$$E\widetilde{u}_{\text{об}}^{\mathsf{M}} = \frac{1}{16}(178 - T) + \frac{3}{16}(154 - T) + \frac{3}{16}(68 - T) + \frac{9}{16}(44 - T) = 64,$$

откуда находим величину $T = 13{,}5$ тыс. долл.

Анна согласится на совместное участие в проектах, только если ее ожидаемая полезность при этом после выплаты Марией суммы $T = 13{,}5$ окажется больше, чем полезность от индивидуального участия в проекте:

$$E\widetilde{u}_{\text{об}}^{\mathsf{A}} = \frac{1}{16}\sqrt{178 + 13{,}5} + \frac{3}{16}\sqrt{154 + 13{,}5} + \frac{3}{16}\sqrt{68 + 13{,}5} + \frac{9}{16}\sqrt{44 + 13{,}5} \approx 9{,}25 > 8{,}5.$$

Следовательно, Анна изменит свое решение относительно совместного участия в проектах, согласившись на него.

(г) Учитывая, что Марии безразлично, участвовать в рисковом проекте или нет (см. п. (а)), то Мария не будет платить за информацию, поскольку заплатив любую положительную сумму, она получит меньшую ожидаемую полезность, чем при отказе от участия в проекте.

Анна, напротив, захочет заплатить некоторую сумму за информацию, поскольку индивидуальное участие в проекте приносит ей бóльшую ожидаемую полезность, чем отказ от него (см. п. (а)). Если Анна получит точную информацию об успешности проекта, то с вероятностью $1/4$ она будет участвовать в проекте и с вероятностью $3/4$ от участия в проекте откажется. Тогда при условии, что она заплатила сумму s за информацию, ее ожидаемая полезность составит $Eu_s^{\mathsf{A}} = 0{,}75\sqrt{64 - s} + 0{,}25\sqrt{256 - s}$.

Анна заплатит за информацию только в том случае, если ее ожидаемая полезность при покупке информации будет не меньше, чем ожидаемая полезность от участия в проекте без получения информации. Максимальная сумма денег S, которую Анна готова будет заплатить за информацию, будет определяться условием, при котором ей безразлично, участвовать ли в проекте без получения информации о его успешности или участвовать в проекте, заплатив сумму S:

$$E\widehat{u}_S^{\mathsf{A}} = \frac{3}{4}\sqrt{64 - S} + \frac{1}{4}\sqrt{256 - S} = \frac{3}{4}\sqrt{36} + \frac{1}{4}\sqrt{256} = 8{,}5,$$

откуда найдем $S \approx 24{,}757$ тыс. долл. Рисунок 6.5 иллюстрирует максимальную сумму, которую Анна готова заплатить за информацию в пространстве контингентных благ.

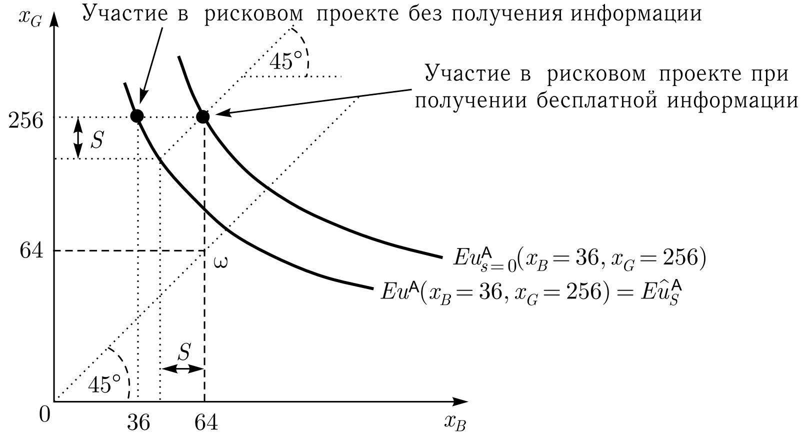

Рис. 6.5. Максимальная сумма денег, которую Анна готова заплатить за информацию об успешности рискового проекта

6.37. (а) Есть два состояния природы в данной экономике: первое состояние природы — будет пожар, и дом сгорит (вероятность наступления этого состояния равна p), второе состояние природы — пожара не будет (вероятность этого состояния равна $1 - p$). Соответственно первое контингентное благо — богатство индивида, если пожар случится (обозначим уровень богатства в этом случае через X_L), и второе контингентное благо — богатство индивида, если пожара не будет (обозначим уровень богатства в этом случае через X_{NL}).

(б) Агент согласится приобретать страховку величины K только в том случае, если его ожидаемая полезность при покупке страховки указанного объема будет не ниже, чем ожидаемая полезность при условии, что он не приобретает страховку вовсе. При этом мы будем предполагать, что если индивиду безразлично, приобретать страховку или не страховаться вовсе, то он будет приобретать страховку. Таким образом, условию задания будут удовлетворять только такие значения K, для которых $Eu(\omega) \equiv Eu\,(K=0) = pu\,(m-L) + (1-p)\,u\,(m) \leqslant$ $\leqslant pu\,(m-L-\gamma K+K) + (1-p)\,u\,(m-\gamma K)$, где $K \leqslant L$.

Следует заметить также, что поскольку цена страховки составляет γ за каждый рубль страхового покрытия, то графически точки, соответствующие покупке страховки величиной $\widetilde{K}$ по цене $\gamma\widetilde{K}$, будут расположены на участке ωA прямой с наклоном $-\gamma/(1-\gamma)$, так как снижение потребления в случае хорошего исхода на величину $\gamma\widetilde{K}$ будет компенсироваться суммой $(1-\gamma)\,\widetilde{K}$ в случае плохого исхода. Рисунок 6.6 демонстрирует приобретение страховки величиной $\widetilde{K}$, в результате которого агент будет иметь набор контингентных товаров B.

По условию задачи элементарная функция полезности агента является строго вогнутой, следовательно, агент является рискофобом. Известно также, что в случае гладкой кривой безразли-

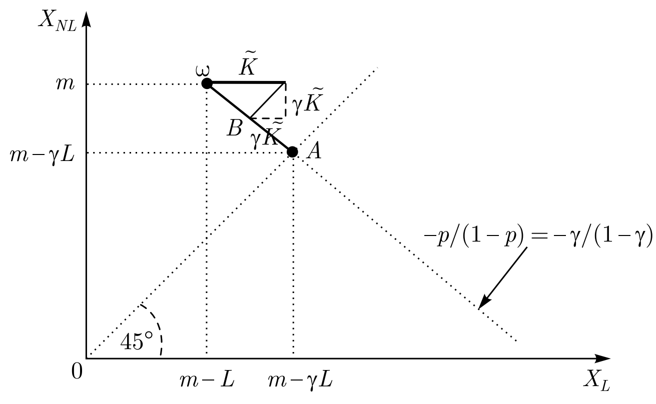

Рис. 6.6. Покупка страховки величиной K

чия наклон любой кривой безразличия на линии определенности равен отношению вероятностей наступления состояний природы, т. е. $-p/(1-p)$. Функция ожидаемой полезности как сумма монотонных вогнутых функций является монотонной вогнутой функцией, следовательно, предпочтения, которые она описывает, являются выпуклыми, вследствие чего предельная норма замещения $MRS_{X_L,X_{NL}}$ убывает при росте X_L. Так как по условию $\gamma = p$, то в точке начального запаса ω кривая безразличия и прямая ωA имеют различные наклоны, причем кривая безразличия в этой точке имеет больший наклон (по абсолютной величине), чем прямая, наклон которой равен $-\gamma/(1-\gamma)$. Поэтому найдутся такие значения величины страховки K, приобретая которые, агент повысит свое благосостояние. Заметим также, что поскольку страховка является актуарно справедливой, то кривая безразличия коснется прямой с наклоном $-\gamma/(1-\gamma) = -p/(1-p)$ в точке, где $K = L$. Поэтому агент будет согласен купить любую страховку, размер которой составит $0 < K \leqslant L$. Рисунок 6.7 демонстрирует все такие значения K в пространстве контингентных товаров, на покупку которых будет согласен агент.

(в) Можно. Агент-рискофоб с дважды непрерывно дифференцируемой элементарной функцией полезности застрахуется на полную сумму потерь. Действительно, кривая безразличия в этом случае — гладкая, без изломов. Наклон любой кривой безразличия на линии определенности равен $-p/(1-p)$. Выве-

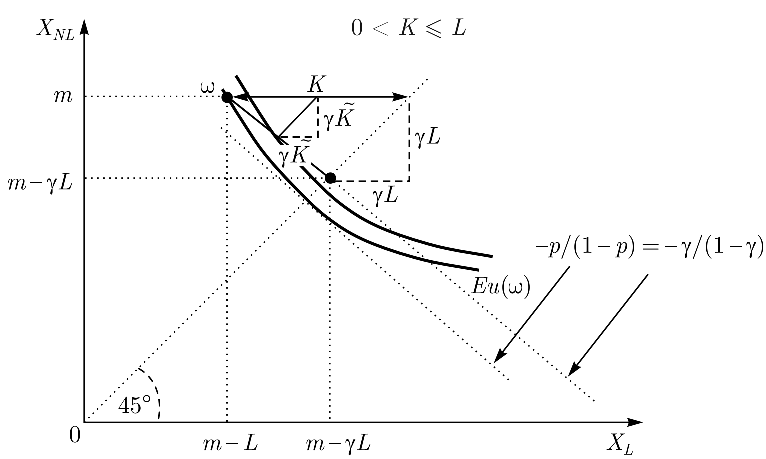

Рис. 6.7. Величина страховки, которую захочет приобрести агент

дем уравнение бюджетной линии для данного агента:

$$\begin{cases} X_{NL} = m - \gamma K, & X_{NL} \leqslant m, \\ X_L = m - L - \gamma K + K, & X_L \leqslant m - \gamma L, \end{cases}$$

поэтому, исключая K, получим уравнение бюджетной линии:

$$(1-\gamma)\,X_{NL} + \gamma X_L = m - \gamma L,$$
$$m - \gamma L \leqslant X_{NL} \leqslant m, \quad m - L \leqslant X_L \leqslant m - \gamma L.$$

Заметим, что наклон бюджетной линии равен $-\gamma/(1-\gamma)$.

Поскольку страховка справедливая, т. е. $\gamma = p$, то кривая безразличия коснется бюджетной линии в точке на линии определенности, где $X_{NL} = X_L$, откуда получаем, что агент выберет размер страховки $K = L$, т. е. будет полностью застрахован от потерь, приобретя страховку на полную сумму потерь. Рисунок 6.8 демонстрирует выбор рискофоба с гладкими кривыми безразличия при актуарно справедливой страховке.

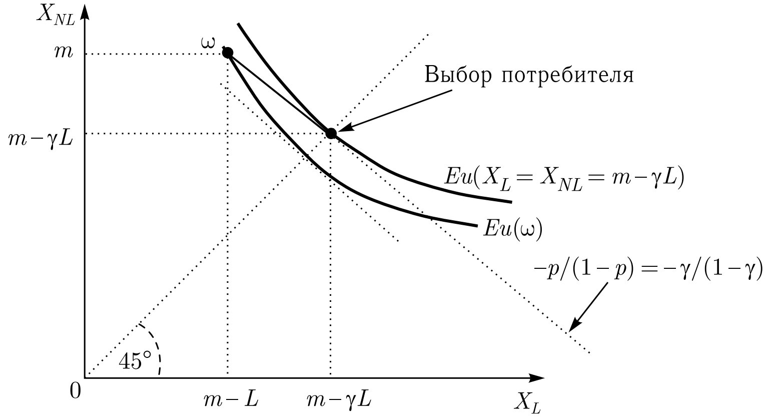

Рис. 6.8. Выбор рискофоба при актуарно справедливой страховке

(г) Неверно. Если агент может выбирать лишь между полной страховкой и нулевой страховкой, то при некоторых предпочтениях агента его благосостояние при полной страховке может быть выше, чем при отказе от страховки. Подобный графический пример представлен на рис. 6.9.

(д) При полной страховке своего имущества в любом состоянии природы агент будет иметь одинаковый уровень богатства x. Следовательно, агент будет готов платить за полную страховку

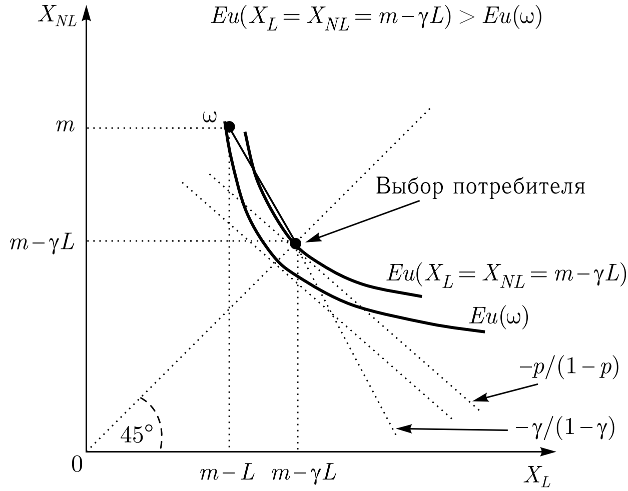

Рис. 6.9. Данный агент страхуется полностью при несправедливой страховке и отсутствии возможности выбирать размер страхового возмещения

своего имущества, если $Eu\,(K = 0) \leqslant u(x)$. Максимальную сумму денег он будет готов отдать в том случае, если его ожидаемая полезность при отказе от страховых услуг будет в точности равна его полезности при полной страховке, т. е. максимальная сумма T определяется соотношением $Eu\,(K = 0) = u\,(m - T)$. Найдем величину T: $Eu\,(K = 0) = 0{,}01\sqrt{16-7} + 0{,}99\sqrt{16} = \sqrt{16-T}$, откуда имеем $T = 0{,}0799$ млн руб.

Рисунок 6.10 демонстрирует максимальную сумму денег, которую данный агент готов будет отдать за полную страховку.

Заметим также, что если бы данному агенту была предложена актуарно справедливая страховка, то стоимость его страховки составила бы $\gamma L = pL = 0{,}07$ млн руб., что меньше, чем данный агент готов был бы заплатить за полную страховку своих потерь. Действительно, при выборе объема страховой суммы при актуарно справедливой страховке агент повышает свое благосостояние по сравнению с благосостоянием в точке начального запаса, в то время как при уплате максимальной суммы, которую он готов отдать, он обеспечит свой начальный уровень благосостояния.

(e) Заметим сразу, что страховка, предлагаемая данному агенту, не является актуарно справедливой, поскольку $\gamma = 0{,}1 > p = 0{,}01$. Для нахождения оптимальной величины страховки

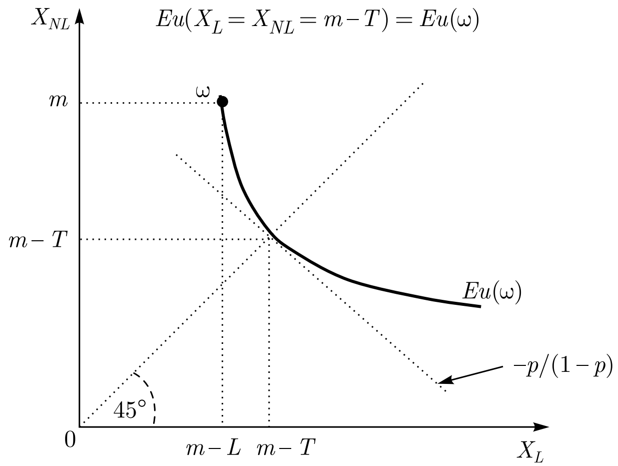

Рис. 6.10. Максимальная сумма денег, которую данный агент готов отдать за полную страховку своего имущества

решим задачу потребителя:

$$\begin{cases} pu\left(X_L\right) + (1-p)\,u\left(X_{NL}\right) \to \max\limits_{\substack{m-\gamma L\leqslant X_{NL}\leqslant m,\\ m-L\leqslant X_L\leqslant m-\gamma L}}, \\ (1-\gamma)\,X_{NL} + \gamma X_L = m - \gamma L, \end{cases}$$

что эквивалентно задаче

$$pu\,(m - L + K - \gamma K) + (1-p)\,u\,(m - \gamma K) \to \max_{0\leqslant K\leqslant L}.$$

Так как кривая безразличия на линии определенности более полога, чем бюджетная линия, а предельная норма замещения $MRS_{X_L, X_{NL}}$ убывает с ростом потребления в случае плохого исхода, то данный агент при несправедливой страховке не будет страховаться на полную сумму потерь, т. е. $K < L$. Будет ли потребитель вообще приобретать страховку?

Задача потребителя имеет вид:

$$0{,}01\sqrt{9 + 0{,}9\,K} + 0{,}99\sqrt{16 - 0{,}1\,K} \to \max_{0\leqslant K\leqslant L}.$$

Условие первого порядка для внутреннего решения данной задачи (т. е. для $0 < K < L$), которое является необходимым и достаточным в силу строгой вогнутости целевой функции, имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\sqrt{9+0{,}9\,K}} - \frac{11}{\sqrt{16-0{,}1\,K}} = 0.$$

Решая полученное уравнение, находим $K < 0$. Следовательно, данный агент при указанных условиях не будет приобретать страховку, поскольку цена ее оказалась слишком велика. Следует также заметить, что к этому выводу можно было прийти, проанализировав поведение целевой функции задачи потребителя при всех допустимых значениях K: данная функция монотонно убывает с ростом K, следовательно, максимум достигается при $K = 0$. Рисунок 6.11 демонстрирует выбор данного агента при несправедливой страховке.

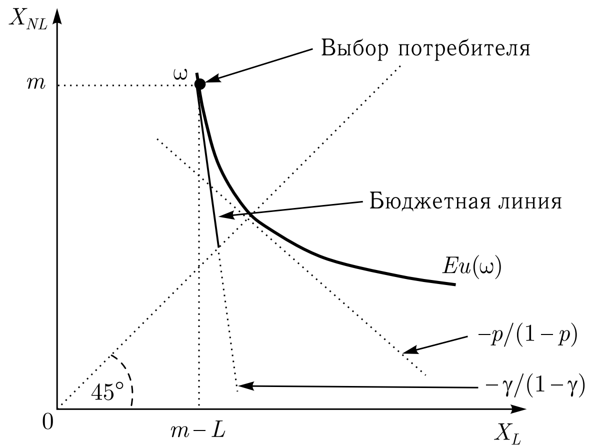

Рис. 6.11. При несправедливой страховке данный агент откажется приобретать страховой полис

6.47. (а) Обозначим через z объем вложений в безрисковый актив. Определим оптимальную величину вложений в безрисковый актив $\widetilde{z}$, решив задачу максимизации ожидаемой полезности данного агента:

$$0{,}25\ln(4\cdot(\omega - z) + 1\cdot z) + 0{,}75\ln(\alpha\cdot(\omega - z) + 1\cdot z) \to \max_{0\leqslant z\leqslant \omega}.$$

Условия первого порядка, которые являются необходимыми и достаточными в силу строгой вогнутости функции ожидаемой полезности, имеют вид:

$$\frac{0{,}25\cdot(-3)}{4\cdot(\omega-\widetilde{z})+1\cdot\widetilde{z}}+\frac{0{,}75\cdot(-\alpha+1)}{\alpha\cdot(\omega-\widetilde{z})+1\cdot\widetilde{z}}=0,\quad 0<\widetilde{z}<\omega,$$
$$\frac{0{,}25\cdot(-3)}{4\cdot(\omega-\widetilde{z})+1\cdot\widetilde{z}}+\frac{0{,}75\cdot(-\alpha+1)}{\alpha\cdot(\omega-\widetilde{z})+1\cdot\widetilde{z}}\leqslant 0,\quad \widetilde{z}=0,$$
$$\frac{0{,}25\cdot(-3)}{4\cdot(\omega-\widetilde{z})+1\cdot\widetilde{z}}+\frac{0{,}75\cdot(-\alpha+1)}{\alpha\cdot(\omega-\widetilde{z})+1\cdot\widetilde{z}}\geqslant 0,\quad \widetilde{z}=\omega.$$

Согласно условию оптимальный объем инвестиций в безрисковый актив составляет всю величину богатства, т. е. $\widetilde{z}=\omega$. Тогда должно быть выполнено условие:

$$\frac{0{,}25\cdot(-3)}{4\cdot(\omega-\omega)+1\cdot\omega}+\frac{0{,}75\cdot(-\alpha+1)}{\alpha\cdot(\omega-\omega)+1\cdot\omega}\geqslant 0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{0{,}25\cdot(-3)}{\omega}+\frac{0{,}75\cdot(-\alpha+1)}{\omega}\geqslant 0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -0{,}75+0{,}75-0{,}75\,\alpha\geqslant 0\Rightarrow\alpha\leqslant 0.$$

Таким образом, агент будет вкладывать все свое богатство в безрисковый актив в том случае, если во втором состоянии мира он не будет получать дохода, либо будет нести убытки.

6.48. Утверждение верно. Покажем это. Пусть лотерея L_1, соответствует первому варианту вложений в активы, приведенному в условии, лотерея L_2 — второму, лотерея L_3 — третьему.

Известно, что для агента лотерея L_2 не хуже лотереи L_3. Это означает, что ожидаемая полезность агента U от второго варианта не меньше, чем от третьего варианта:

$$U(\mathsf{L}_2)\geqslant U(\mathsf{L}_3),$$

где

$$U(\mathsf{L}_2)=0{,}5\,u(x_{G_2})+0{,}5\,u(x_{B_2}),$$
$$x_{G_2}=0{,}75\,\omega\cdot 4+0{,}25\,\omega\cdot 2=3{,}5\,\omega,$$
$$x_{B_2}=0{,}75\,\omega\cdot 1+0{,}25\,\omega\cdot 2=1{,}25\,\omega,$$
$$U(\mathsf{L}_3)=u(2\,\omega).$$

Рассмотрим первый вариант. Покажем, что ожидаемая полезность от лотереи L_1 действительно будет не меньше ожидаемой полезности от лотереи L_3:

$$U(\mathsf{L}_1)=0{,}5\,u(x_{G_1})+0{,}5\,u(x_{B_1}),$$

где

$$x_{G_1} = 0{,}5\,\omega\cdot 4 + 0{,}5\,\omega\cdot 2 = 3\,\omega,\quad x_{B_1} = 0{,}5\,\omega\cdot 1 + 0{,}5\,\omega\cdot 2 = 1{,}5\,\omega.$$

Перепишем ожидаемую полезность от первого варианта следующим образом:

$$U(\mathsf{L}_1) = 0{,}5\,u\left(\frac{2}{3}\cdot 3{,}5\,\omega + \frac{1}{3}\cdot 2\,\omega\right) + 0{,}5\,u\left(\frac{2}{3}\cdot 1{,}25\,\omega + \frac{1}{3}\cdot 2\,\omega\right).$$

Так как элементарная функция полезности данного агента является строго вогнутой, то будут выполнены следующие неравенства:

$$0{,}5\,u\left(\frac{2}{3}\cdot 3{,}5\,\omega + \frac{1}{3}\cdot 2\,\omega\right) > 0{,}5\left(\frac{2}{3}\,u(3{,}5\,\omega) + \frac{1}{3}\,u(2\,\omega)\right)$$

и

$$0{,}5\,u\left(\frac{2}{3}\cdot 1{,}25\,\omega + \frac{1}{3}\cdot 2\,\omega\right) > 0{,}5\left(\frac{2}{3}\,u(1{,}25\,\omega) + \frac{1}{3}\,u(2\,\omega)\right).$$

Получаем

$$\begin{aligned} U(\mathsf{L}_1) > 0{,}5\cdot\left(\frac{2}{3}\,u(3{,}5\,\omega) + \frac{1}{3}\,u(2\,\omega)\right) &+ \\ + \ 0{,}5\cdot\left(\frac{2}{3}\,u(1{,}25\,\omega) + \frac{1}{3}\,u(2\,\omega)\right) &= \\ = \frac{2}{3}\cdot(0{,}5\,u(3{,}5\,\omega) + 0{,}5\,u(1{,}25\,\omega)) + \frac{1}{3}\cdot u(2\,\omega) &= \\ = \frac{2}{3}U(\mathsf{L}_2) + \frac{1}{3}U(\mathsf{L}_3) \geqslant \frac{2}{3}U(\mathsf{L}_3) + \frac{1}{3}U(\mathsf{L}_3) &= U(\mathsf{L}_3). \end{aligned}$$

6.7. Ответы и подсказки

6.1. Ожидаемый выигрыш равен 5400 руб. **6.2.** Неверно. Пусть, например, в первой альтернативе богатство индивида составит 4 д. е. с вероятностью 0,5 и 121 д. е. с вероятностью 0,5, а во второй альтернативе его богатство составит 16 д. е. с вероятностью 0,25 и 64 д. е. с вероятностью 0,75. Предпочтения агента представимы функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности вида $u(x) = \sqrt{x}$. **6.3.** Согласится, ожидаемая полезность от продажи лотереи выше, чем от отказа от продажи. **6.4.** Согласится, ожидаемая полезность от покупки лотереи выше, чем от отказа от покупки. **6.5.** *Подсказка*: используя строгую вогнутость и монотонность элементарной функции полезности рискофоба, а также линейность элементарной функции полезности нейтрального к риску агента, необходимо доказать, что утверждение задачи верно. **6.6. (а)** Элементарные функции полезности, описывающие предпочтения рискофоба: (1), (3), (4), (5). Элементарная функция полезности, описывающая предпочтения индивида нейтрального риска: (6). Элементарная функция полезности, описывающая предпочтения рискофила: (2), (8). **(б)** Элементарная функция полезности (7) описывает предпочтения рискофила при $0 < x < 1$ и рискофоба при $x > 1$. **6.7. (а)** Пользуясь определением рискофоба делаем вывод, что так как ожидаемый выигрыш от лотереи равен 175 руб., то агент-рискофоб предпочтет гарантированно получить 175 руб., а не участвовать в лотерее. **(б)** Однозначный вывод сделать нельзя: при таких условиях лотерею выберут и агент, нейтральный к риску, и даже некоторые рискофобы. **(в)** $\sqrt{CE} = 0{,}25 \times \times \sqrt{400} + 0{,}75 \cdot \sqrt{100}$, откуда $CE = 156{,}25$. **6.8. (а)** Нельзя дать однозначный ответ, руководствуясь только определением рискофоба и не зная предпочтений данного индивида, поскольку гарантированно индивид может получить 7 д. е., а ожидаемый выигрыш лотереи равен 8 д. е. В этой ситуации рискофобы с разными предпочтениями могут выбрать как лотерею, так и гарантированную сумму. **(б)** Индивид предпочтет участие в лотерее. **(в)** Нейтральный к риску индивид оценивает альтернативы по ожидаемому выигрышу, следовательно, предпочтет участие в лотерее. **(г)** Поскольку данная функция является строго вогнутой (и возрастающей), так как $u''(x) = -2/x^3 < 0$, то данный индивид является рискофобом. Ожидаемая полезность от лотереи равна $-1/5$, что меньше, чем полезность от гарантированного получения 7 д. е., равная $-1/7$, следовательно, данный индивид предпочтет гарантированное получение 7 д. е. участию в лотереи. В случае, когда гарантированно предлагается 4,5 д. е., результат будет противоположным. **(д)** Премия за риск равна 3 д. е. **6.9. (а)** $x = 20$, денежный эквивалент равен ожидаемому выигрышу. **(б)** $x > 20$, денежный эквивалент меньше ожидаемого выигрыша. **6.10.** Поведение индивида не согласуется с теорией ожидаемой полезности. **6.11.** $p_{\min} = p_{\max} = \pi x_1 + (1 - \pi)x_2$. **6.12.** Индивид предпочтет участие в лотерее при $y \geqslant 44$. **6.13. (а)** Агент выберет вторую вакансию. Для аналитического решения: воспользуемся строгой вогнутостью функции полезности рискофоба:

$$\frac{1}{2}u(100) + \frac{1}{2}u(104) = \frac{1}{2}u(100) + \frac{1}{2}u\left(\frac{1}{5}\cdot 120 + \frac{4}{5}\cdot 100\right) >$$

$$> \frac{1}{2}u(100) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}u(120) + \frac{4}{5}u(100)\right] = \frac{9}{10}u(100) + \frac{1}{10}u(120).$$

(б) Да, возможно. Пусть, например, элементарная функция полезности данного агента имеет вид $u(x) = \sqrt{x}$. **6.14.** Неверно. Если $A < B$, то предпочтения агента могут быть таковы, что сначала он является рискофилом, а затем, с ростом богатства, становится рискофобом. Если $A > B$, то наоборот, сначала он может быть рискофобом, а затем, с ростом богатства, начинает вести себя, как рискофил. **6.15.** Сможет. **6.16.** Сергею безразлично, сдавать экзамен за себя или за брата, а Иван предпочел бы, чтобы брат выдал себя за него. **6.17.** Нет. И и П могут иметь различное отношение к риску, достаточно привести графические примеры, когда один из них — рискофоб, другой — рискофил, сталкиваясь с одинаковым риском, сделают одинаковый выбор. **6.18. (а)** Невозможно дать однозначный ответ, не зная предпочтений приятеля. **(б)** Приятелю стоит вкладывать деньги в проект. **6.19.** Нельзя утверждать, что М действительно является рискофилом, поскольку на игру с ожидаемым богатством, превышающим исходное богатство индивида, могли согласиться как рискофил, так и нейтральный к риску агент и рискофоб. **6.20.** М нужно посоветовать играть, поскольку его ожидаемое богатство от участия в игре выше его богатства при отказе от игры. К ничего посоветовать нельзя, не зная точно его предпочтений. **6.21. (а)** Не будет. **(б)** Существует: при доле, равной 296/441, ожидаемая полезность от проекта равна полезности от богатства, а если доля меньше этой величины, то ожидаемая полезность от проекта выше ожидаемой полезности от богатства. **(в)** Примет. **(г)** Нерационально. *Подсказка*: сравните ожидаемый доход приятеля при совместном участии в проектах и его ожидаемый доход при самостоятельном участии в собственном проекте. **6.22.** Неверно. Ему безразлично, участвовать в проекте самостоятельно или делить риск с одним партнером. Делить риск с бóльшим количеством партнеров он не будет. **6.23. (а)** Вероятность выигрыша Роджера Ф больше 0,5. **(б)** Оптимальная ставка равна 200 долл. **(в)** Максимальная ставка равна 400 долл. **6.24. (а)** Владелец салона выделит 30 д. е. на кабриолеты и 60 д. е. на машины с закрытым верхом. **(б)** Владелец салона потратит все 90 д. е. на машины с закрытым верхом. **(в)** Владелец салона потратит все 90 д. е. на кабриолеты. **6.25.** Указанная политика с точки зрения максимизации объемов денежных средств населения, привлекаемых для технического переоснащения ГЭС, ошибочна. Если бы каждому сотруднику было позволено самостоятельно принимать решение об объемах вложений в активы, то сотрудники НИИ, являющиеся нейтральными к риску и рискофобами, отказались бы от покупки акций, в то время как рискофилы потратили бы на покупку акций все свое богатство. В результате объем средств, выделяемый сотрудниками данного НИИ на покупку акций, возрос бы в 44 раза. **6.27. (а)** Состояния мира: 1) выигрывает Роджер Ф (вероятность 2/3); 2) выигрывает Рафаэль Н (вероятность 1/3). Контингентные блага: 1) доход господина Д в первом состоянии мира: $x_{NL} = 800 + 2b$, где b — величина ставки; 2) доход господина Д во втором состоянии мира: $x_L = 800 - b$. **(б)** Уравнение бюджетной линии: $x_{NL} = 2400 - 2x_L$ при $0 \leqslant x_L \leqslant 800$. **(в)** Оптимальный набор контингентных благ: ($x_L = 600$, $x_{NL} = 1200$); графически — это точка касания кривой безразличия и бюджетной линии. Набор контингентных благ, соответствующий максимальной ставке: ($x_L = 400$, $x_{NL} = 1600$). Графически — это точка пересечения кривой безразличия, проходящей через точку первоначального запаса ($x_L = 800$, $x_{NL} = 800$), и бюджетной линии. **6.28. (а)** Пусть w — фактическая цена квартиры; τ — ставка налога; s — ставка штрафа, $s > \tau$; p — вероятность проведения проверки и выявления фактической стоимости квартиры; x — стоимость квартиры, указанная в договоре купли–продажи; $u(\cdot)$ — элементарная функция полезности владельца квартиры. Задача владельца квартиры: $pu\,(w - \tau x - s(w - x)) + (1 - p)u\,(w - \tau x) \to \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant w}$. **(б)** Условия первого порядка, характеризующие стоимость квартиры, указываемую в договоре, $\widetilde{x}$, имеют вид:

$$pu'(w-\tau\widetilde{x}-s(w-\widetilde{x}))(s-\tau)+(1-p)u'(w-\tau\widetilde{x})(-\tau)\leqslant 0,\quad \widetilde{x}=0;$$
$$pu'(w-\tau\widetilde{x}-s(w-\widetilde{x}))(s-\tau)+(1-p)u'(w-\tau\widetilde{x})(-\tau)=0,\quad 0<\widetilde{x}<w;$$
$$pu'(w-\tau\widetilde{x}-s(w-\widetilde{x}))(s-\tau)+(1-p)u'(w-\tau\widetilde{x})(-\tau)\geqslant 0,\quad \widetilde{x}=w.$$

(в) Необходимое и достаточное условие того, что владелец квартиры будет указывать в договоре купли–продажи сумму, меньшую фактически полученной, т. е. $\widetilde{x} \neq w$, имеет вид: $p(s - \tau) - (1 - p)\tau < 0$ или $\tau - ps > 0$. **(г)** $d\widetilde{x}/d\tau < 0$, т. е. с ростом ставки налога оптимальная стоимость квартиры, указанная в договоре купли–продажи, снизится. **(д)** Состояния мира: 1) налоговая инспекция проводит проверку (вероятность p); 2) налоговая инспекция не проводит проверку (вероятность $(1 - p)$). Контингентные блага: 1) доход владельца квартиры в первом состоянии мира: $x_L = w - \tau x - s(w - x)$; 2) доход владельца квартиры во втором состоянии мира: $x_{NL} = w - \tau x$. **(е)** Уравнение бюджетной линии: $x_{NL} = \dfrac{ws(1 - \tau)}{s - \tau} - \dfrac{\tau}{s - \tau} x_L$ при $w(1 - s) \leqslant x_L \leqslant w(1 - \tau)$. Условие $\tau - ps > 0$ можно трактовать как условие того, что на линии определенности наклон бюджетной линии (по абсолютной величине) $\tau/(s - \tau)$ больше наклона кривой безразличия (по абсолютной величине) $p/(1 - p)$. **(ж)** Обозначим через q вероятность того, что проверка выявит фактическую стоимость квартиры, $0 < q < 1$. Возможны следующие состояния мира: 1) проверка проводится и выявляется фактическая стоимость квартиры (вероятность pq); 2) проверка проводится и не выявляется фактическая стоимость квартиры (вероятность $p(1 - q)$); 3) проверка не проводится (вероятность $(1 - p)$). Как нетрудно убедиться сумма вероятностей состояний мира равна 1. Соответствующие контингентные блага: 1) $x_1 = w - \tau x - s(w - x)$; 2) $x_2 = w - \tau x$; 3) $x_3 = w - \tau x$. Поскольку доход владельца квартиры во втором и третьем состояниях мира одинаков, то можно ограничиться двумя контингентными благами: $x_L = w - \tau x - s(w - x)$ (вероятность получения pq) и $x_{NL} = w - \tau x$ (вероятность получения $(1 - pq)$). **(з)** При выполнении условия $\tau - ps > 0$ нейтральный к риску владелец квартиры предпочтет набор контингентных благ $(x_L = w(1 - s),\ x_{NL} = w)$, т. е. предпочтет вообще не декларировать свой доход от продажи квартиры. **6.29. (а)** Индивид согласится с предложением приятеля, поскольку при этом получит более высокую ожидаемую полезность, чем если бы отказался участвовать в бизнесе. **(б)** Пусть $\overline{x}$ — максимальная сумма, которую индивид готов инвестировать в магазин. Тогда эта величина должна удовлетворять условию: $0{,}4 \cdot \ln(500 + 3\overline{x}) + 0{,}6 \cdot \ln(500 - \overline{x}) = \ln(500)$. **(в)** Индивид предпочтет вложить в дело 100 д. е. **(г)** Состояния природы:

1) торговля оказывается успешной (вероятность 2/5); 2) магазин прогорает (вероятность 3/5). Пусть x — объем инвестиций в магазин. Контингентные блага: 1) доход индивида в первом состоянии мира $x_{NL} = 500 + 3x$; 2) доход индивида во втором состоянии мира $x_L = 500 - x$. **(д)** Уравнение бюджетной линии: $x_{NL} = 2000 - 3x_L$ при $0 \leqslant x_L \leqslant 500$. **(е)** Оптимальной величине инвестиций равной 100 д. е., найденной в п. (в), соответствует набор контингентных благ ($x_L = 400$, $x_{NL} = 800$). Эта точка является точкой касания кривой безразличия индивида и бюджетной линии. **(ж)** В этом случае индивид решит все свое богатство вложить в магазин. В пространстве контингентных благ такой выбор соответствует набору ($x_L = 0$, $x_{NL} = 2000$). **6.30. (а)** Пусть $\widetilde{b}$ — оптимальная величина взятки. Поскольку богатство индивида не может быть отрицательным, должно быть выполнено условие $\widetilde{b} \leqslant w/f$. Оптимальная величина взятки определяется из задачи чиновника: $\pi u(w - fb) + (1 - \pi)u(w + b) \to \max\limits_{0 \leqslant b \leqslant w/f}$.

Тогда условия первого порядка имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\pi u'\big(w - f\widetilde{b}\big)(-f) + (1-\pi)\,u'\big(w + \widetilde{b}\big) \leqslant 0, \quad \text{если } \widetilde{b} = 0;\\
&\pi u'\big(w - f\widetilde{b}\big)(-f) + (1-\pi)\,u'\big(w + \widetilde{b}\big) = 0, \quad \text{если } 0 < \widetilde{b} < w/f;\\
&\pi u'\big(w - f\widetilde{b}\big)(-f) + (1-\pi)\,u'\big(w + \widetilde{b}\big) \geqslant 0, \quad \text{если } \widetilde{b} = w/f.
\end{aligned}$$

(б) С ростом ставки штрафа оптимальная величина взятки уменьшится. *Подсказка*: для ответа на вопрос воспользуйтесь теоремой о дифференцировании неявной функции и примите во внимание условие второго порядка. **(в)** Необходимое и достаточное условие того, что чиновник согласится на взятку, т. е. $\widetilde{b} > 0$, имеет вид: $(1 - \pi) - \pi f > 0$. **(г) (i)** Состояния природы: 1) проводится проверка, выявляющая коррупционное поведение чиновника (вероятность π); 2) проверка деятельности чиновника не проводится (вероятность $1 - \pi$). Контингентные блага: 1) богатство чиновника в первом состоянии: $x_L = w - fb$, 2) богатство чиновника во втором состоянии: $x_{NL} = w + b$. **(ii)** Уравнение бюджетной линии: $x_{NL} = w \cdot (1 + f)/f - x_L/f$ при $0 \leqslant x_L \leqslant w$. **(iii)** Оптимальный набор контингентных благ характеризуется касанием кривой безразличия чиновника и бюджетной линии. Оптимальная взятка на рисунке — это расстояние по оси x_{NL} между оптимальной точкой и $x_{NL} = w$. Точка ($x_L = w$, $x_{NL} = w$) лежит на пересечении линии определенности и бюджетной линии. **(iv)** Условие положительности оптимальной величины взятки означает, что в пространстве контингентных благ, где по оси абсцисс откладываются значения x_L, а по оси ординат — значения x_{NL}, наклон кривой безразличия (по абсолютной величине) на линии определенности меньше наклона бюджетной линии (по абсолютной величине). **(д)** Оптимальная величина взятки $\widetilde{b} = w/f$. **(е)** Состояния природы: 1) проверка проводится и взяточничество выявляется (вероятность $\pi\tau$); 2) проверка проводится и взяточничество не выявляется (вероятность $\pi(1-\tau)$); 3) проверка не проводится (вероятность $(1-\pi)$). Контингентные блага: 1) богатство чиновника в первом состоянии $x_1 = w - fb$; 2) богатство чиновника во втором состоянии $x_2 = w + b$; 3) богатство чиновника в третьем состоянии $x_3 = w + b$. Поскольку во втором и третьем состояниях богатство чиновника одинаково, то можно рассматривать два контингентных блага: $x_L = w - fb$ (вероятность получения $\pi\tau$) и $x_{NL} = w + b$ (вероятность получения $(1 - \pi\tau)$). **(ж)** $\widetilde{b} = 16\,000$ руб. **6.31. (а)** Если приятель — рискофил, то поступил неверно. Если приятель — рискофоб, то невозможно дать однозначный ответ, поскольку не знаем его предпочтений. **(б)** Поступил неверно. **(в)** Максимальная сумма составит $T = 16\sqrt{3} - 27$. **6.32. (а)** Контингентные товары: богатство налогоплательщика в случае проведения налоговой проверки и богатство индивида при отсутствии налоговой проверки. **(б)** Пусть богатство налогоплательщика в том случае, если проверка проведена, равно $X_{\text{п}}$, а если проверка не проводилась — $X_{\text{н/п}}$, s — указанный в налоговой декларации доход ($0 \leqslant s \leqslant m$). Тогда уравнение бюджетной линии в пространстве контингентных благ при умышленном сокрытии части дохода (см. рис. 6.12) имеет вид: $X_{\text{н/п}} + \dfrac{0{,}13}{0{,}27} X_{\text{п}} = m + \dfrac{0{,}13}{0{,}27} \cdot 0{,}6\,m$, где $0{,}87\,m \leqslant X_{\text{н/п}} \leqslant m$ и $0{,}60\,m \leqslant X_{\text{п}} \leqslant 0{,}87\,m$. Бюджетное ограничение налогоплательщика при неумышленном сокрытии части дохода предлагаем получить читателю самостоятельно. **(в)** Все приведенные в данном пункте утверждения неверны. **(г)** *Подсказка*: налогоплательщик согласится на декларирование полного объема дохода с прибавкой к жалованью только в том случае, если его полезность в этом случае будет не меньше, чем ожидаемая полезность при полном сокрытии дохода. **(д)** *Подсказка*: заметьте, что любой налогоплательщик-рискофоб предпочтет владеть бесплатной информацией о проведении налоговой проверки. В этом случае с вероятностью p его богатство составит $0{,}87\,m$

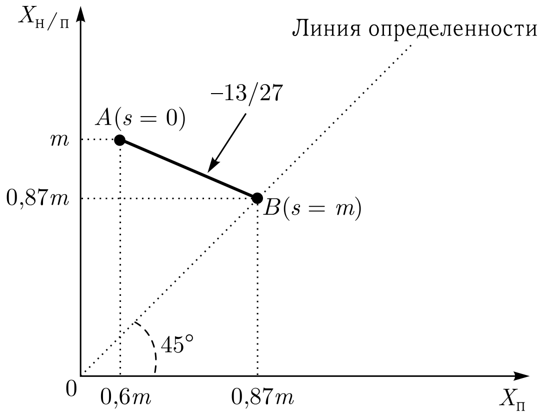

Рис. 6.12. Бюджетная линия при умышленном сокрытии части дохода

и с вероятностью $(1-p)$ богатство составит m. **(е)** *Подсказка*: обратите внимание, изменяется ли наклон бюджетной линии при изменении вероятности налоговой проверки. Утверждение неверно. Даже при сильном увеличении вероятности налоговой проверки, она может оставаться малой величиной и не влиять на изменение декларируемой суммы дохода, если до изменения вероятности любой из агентов предпочитал полностью скрыть объем своего дохода. **6.33.** Утверждение не верно. *Подсказка*: рассмотрите, например, рискофоба с элементарной функцией полезности $u(x) = -\exp\{-x\}$. **6.34.** Неверно. Агент-рискофил может отказаться от страховки. **6.35.** Неверно. Откажется рискофил. Рискофоб может согласится на приобретение данной страховки. **6.36. (а)** 19 тыс. руб. **(б)** Захочет, если цена не будет превышать 1890,5 руб. **6.38. (а)** Пусть y — величина страхового покрытия, приобретаемого индивидом. Задача индивида: $\pi u(w - L - \gamma y + y) + (1-\pi)u(w - \gamma y) \to \max\limits_{y \geqslant 0}$. Оптимальная величина спроса на страховку $\widetilde{y}$ удовлетворяет условиям первого порядка: $\pi u'(w - L - \gamma\widetilde{y} + \widetilde{y})(1-\gamma) + (1-\pi)u'(w - \gamma\widetilde{y})(-\gamma) \leqslant 0$ и $\pi u'(w - L - \gamma\widetilde{y} + \widetilde{y})(1-\gamma) + (1-\pi)u'(w - \gamma\widetilde{y})(-\gamma) = 0$, если $\widetilde{y} > 0$. **(б)** Увеличение потерь приведет к росту спроса на страховку. **(в)** Увеличение вероятности наступления страхового случае приведет к росту спроса на страховку. **(г)** Индивид застрахуется на всю величину потерь, поскольку данный индивид является рискофобом и страховка актуарно справедлива. **(д)** Страховка не является справедливой: $\gamma = 3/5 > \pi = 1/2$, следовательно, рискофоб (с дифференцируемой элементарной функцией полезности) будет страховаться на величину, меньшую величины потерь. В данном случае индивид застрахуется на сумму $y = 5 < L = 8$. **(е)** **(i)** Два состояния природы: первое состояние соответствует несчастному случаю, который приводит к потерям (вероятность этого состояния π), и второе состояние соответствует случаю отсутствия потерь (наступает с вероятностью $1 - \pi$). Контингентные блага: x_L — богатство в случае потерь и x_{NL} — богатство в случае отсутствия потерь; $x_L = w - L - \gamma y + y = 4 + y(1 - \gamma)$ и $x_{NL} = w - \gamma y = 12 - \gamma y$. **(ii)** Уравнение бюджетной линии: $x_L + x_{NL} \cdot (1 - \gamma)/\gamma = 4 + 12 \times \times (1 - \gamma)/\gamma$ при $x_L \geqslant 4$ (поскольку индивид не может эмитировать страховку, т. е. $y \geqslant 0$). **(iii)** При $\gamma = 1/2 = \pi$ наклоны бюджетной линии и кривой безразличия совпадают на линии определенности, т. е. при $x_L = x_{NL}$; это означает, что индивид будет страховаться полностью, $y = L = 8$. В пространстве контингентных благ такому выбору соответствует точка ($x_L = 8$, $x_{NL} = 8$). При $\gamma = 3/5 > 1/2 = \pi$ наклон бюджетной линии (по абсолютной величине) больше наклона кривой безразличия (по абсолютной величине) на линии определенности. Оптимальная точка — точка касания кривой безразличия и бюджетной линии — лежит левее линии определенности, т. е. там, где $x_L < x_{NL}$. **(ж)** При $\gamma = 3/5$ нейтральный к риску индивид страховаться не станет, т. е. в пространстве контингентных благ он выберет набор ($x_L = 4$, $x_{NL} = 12$). **6.39. (а)** Захочет. Приобретет полис с величиной страхового покрытия 75 тыс. долл., заплатив за страховку 60 тыс. долл. **(б)** 64 тыс. долл. **6.40. (а)** Неверно. Поскольку страховка актуарно справедлива для обоих агентов, каждый из них застрахуется на величину потерь. **(б)** Верно, $0{,}25\,w\pi > 0{,}25\,wq$. **(в)** Неверно. *Подсказка*: воспользовавшись условиями первого порядка задачи агента и свойствами строго вогнутой элементарной функции полезности, покажите, что величина страховки агента A превысит величину страховки агента B. **6.41. (а)** Захочет. Заплатит 15 тыс. долл. *Подсказка*: музыкант является рискофобом, условия страхования актуарно справедливы. **(б)** Максимальная сумма, которую M готов будет заплатить за полную страховку составляет 19 тыс. долл. **(в)** *Подсказка*: сравните ожидаемые полезности M в пп. (а) и (б). **6.42. (а)** Если индивид отказывается от приобретения страховки, то это означает, что он выбирает лотерею, выигрыш по которой равен 10 000 долл. с вероятностью 0,7, 8100 долл. с вероятностью 0,2 и 6400 долл. с вероятностью 0,1; т. е. лотерею $L = ((10\,000,\ 8100,\ 6400);\ (0{,}7,\ 0{,}2,\ 0{,}1))$. **(б)** Индивид сталкивается с вырожденной лотереей, гарантирующей получение суммы $(10\,000 - p)$ долл. в любом состоянии мира, т. е. индивид выбирает лотерею $L = (10\,000 - p;\ 1)$. **(в)** Пусть $\overline{p}$ — максимальная цена, которую индивид готов заплатить за страховку. Тогда $u(10\,000 - \overline{p}) = 0{,}7\,u(10\,000) + 0{,}2\,u(8100) + 0{,}1\,u(6400)$. **(г)** Максимальная цена, которую индивид готов заплатить за страховку, равна 784 долл. **(д)** При акутарно справедливой страховке $p = 740$ долл. **(е)** Индивид-рискофоб будет страховаться полностью. *Подсказка*: выпишите условия первого порядка задачи максимизации ожидаемой полезности индивида и убедитесь, что они выполнены при $\gamma = 1$. **(ж)** При актуарно справедливой страховке нейтральному к риску индивиду все равно, страховаться или нет, и если страховаться, то на какую сумму, поскольку в любом случае он получает один и тот же уровень ожидаемой полезности. **6.43. (а)** Цена страхового контракта с полным покрытием равна $P = \pi L + 9 = 500\pi + 9$. **(б)** Индивид согласится застраховаться на всю сумму потерь при $1/10 < \pi < 9/10$; при $\pi = 1/10$ и $\pi = 9/10$ индивиду безразлично, страховаться на всю сумму потерь или не страховаться вообще. **6.44.** Индивид застрахуется на сумму $y = 8$ д. е. **6.45. (а)** В случае (1) индивид застрахуется на сумму меньше потерь, а в случае (2) — на сумму, превышающую потери. Например, в случае (1) при каждом данном уровне богатства увеличение богатства в большей степени приводит к росту полезности в «хорошем» состоянии, чем в «плохом», т. е. это можно проинтерпретировать так, что если, например, индивид заболевает, то его способность получать «удовольствие» от денег снижается. В пространстве контингентных благ, где по оси абсцисс откладывается богатство индивида в «плохом» состоянии, а по оси ординат — в «хорошем», оптимальная точка характеризуется касанием кривой безразличия и бюджетной линии; наклон бюджетной линии равен $-\pi/(1 - \pi)$, а наклон кривой безразличия $-\pi u_1'(x_1)/(1 - \pi)u_2'(x_2)$. В случае (1) наклон кривой безразличия на линии определенности (по абсолютной величине) меньше $\pi/(1 - \pi)$, наклона бюджетной линии (по абсолютной величине); в случае (2) соотношение наклонов будет обратным. **(б)** В случае (1) индивид застрахуется на сумму меньше потерь. В случае (2) однозначный ответ дать нельзя, в том числе возможна ситуация, что индивид застрахуется полностью. **6.46. (а)** Введем следующие обозначения: пусть x_1 — вложения в безрисковый актив, x_2 — вложения в рисковый актив. Оптимальная величина вложений в рисковый актив определяется из решения задача максимизации ожидаемой полезности индивида:

$$0{,}4 \cdot \ln(40 + 4\,x_2) + 0{,}6 \cdot \ln(40 - 2\,x_2) \to \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant 10}.$$

Оптимальная величина вложений в рисковый актив составляет $x_2 = 2$, соответственно, вложения в безрисковый актив будут равны $x_1 = 8$. **(б)** Индивид предпочтет все деньги вложить в безрисковый актив, т. е. $x_1 = 10$, соответственно $x_2 = 0$. *Подсказка*: для ответа на этот вопрос нет необходимости заново производить вычисления, достаточно вспомнить определение индивида-рискофоба. **(в)** Индивид предпочтет все деньги вложить в рисковый актив: $x_2 = 10$, $x_1 = 0$. **(г) (i)** Состояния природы: первое, когда рисковый актив имеет доходность $a = 8$ (вероятность этого состояния $\pi = 2/5$), и второе, когда отдача по рисковому активу $b = 2$ (вероятность $1 - \pi = 3/5$). Контингентные блага: богатство в первом состоянии: $x_a = 4\,x_1 + 8\,x_2 = 4(10 - x_2) + 8\,x_2 = 40 + 4\,x_2$, богатство во втором состоянии: $x_b = 40 - 2\,x_2$. **(ii)** Уравнение бюджетной линии: $x_a = 120 - 2\,x_b$, где $20 \leqslant x_b \leqslant 40$. **(д)** Для индивида с элементарной функцией полезности $u(x) = \ln(x)$ оптимальная точка ($x_b = 36$, $x_a = 48$) характеризуется касанием бюджетной линии и кривой безразличия. Для нейтрального к риску индивида оптимальный набор ($x_b = 20$, $x_a = 80$). **6.47. (б)** Утверждение верно. *Подсказка*: рассмотрите необходимое и достаточное условие положительности вложений в рисковый актив для индивида-рискофоба с дифференцируемой элементарной функцией полезности. **6.49.** За 1 год и 2 месяца. **6.50. (а)** (1) 25 д. е.; (2) 30 д. е. **(б)** (1) 10 месяцев; (2) примерно 4 месяца и 6 дней. **(в)** В обоих случаях бизнесмену потребуется примерно 3 месяца и 2 дня. **6.51. (а)** Состояния природы: 1) «хорошее», когда валовая доходность рискового актива составляет $a = 4$ (вероятность наступления этого состояния $\pi = 1/4$); 2) «плохое», когда валовая доходность рискового актива составляет $b = 0{,}5$ (вероятность наступления этого состояния $1 - \pi = 3/4$). Пусть x_1 — объем вложений в безрисковый актив, x_2 — объем вложений в рисковый проект.

Тогда контингентные блага: 1) богатство предпринимателя в «хорошем» состоянии $x_a = x_1 + ax_2 = w + x_2(a-1) = w + 3x_2$; 2) богатство предпринимателя в «плохом» состоянии $x_b = x_1 + bx_2 = w + x_2(b-1) = w - 0{,}5\,x_2$. **(б)** Уравнение бюджетной линии: $x_a = 7\,w - 6\,x_b$, где $w/2 \leqslant x_b \leqslant w$. **(в)** Неверно, выбор предпринимателя будет зависеть от его предпочтений. **(г)** Необходимое условие положительности вложений в рисковый актив: $\pi a + (1-\pi)b > c$, где c — валовая доходность безрискового актива. **(д)** 1/4. **(е)** $\left(\dfrac{7}{4\sqrt[4]{8}} - 1\right)w$. **6.52. (а)** Оптимальная величина вложений в рисковый актив составляет $x = 150$ д. е. **(б)** Оптимальная величина вложений в рисковый актив при пропорциональном изменении доходности: $\overline{x} = 120$ д. е. Таким образом, $x/\overline{x} = 1,25 = 1 + \tau$. **(в)** Соотношение $x/\overline{x} = 1 + \tau$ или $\overline{x} = x/(1+\tau)$ при пропорциональном изменении доходности справедливо для любого индивида рискофоба с дифференцируемой элементарной функцией полезности. *Подсказка*: для доказательства этого результата выпишите задачу индивида и условия первого порядка (для внутреннего решения) до и после изменения доходности и сопоставьте полученные выражения. **6.53. (а)** *Подсказка*: выпишите дифференциальную характеристику внутреннего Парето-оптимального распределения (равенство предельных норм замещения) и воспользуйтесь методом доказательства от противного, учитывая, что в экономике отсутствует системный риск (т. е. совокупные запасы благ в обоих состояниях мира равны). **(б)** *Подсказка*: рассмотрите распределение, где $x^k = \left(\pi_1 x_1^k + \pi_2 x_2^k, \pi_1 x_1^k + \pi_2 x_2^k\right)$. **(в)** *Подсказка*: воспользуйтесь тем, что по первой теореме благосостояния равновесное распределение Парето-оптимально, и во внутреннем равновесии отношении цен равно предельной норме замещения. **(г)** Потребитель B будет полностью застрахован от риска. **6.54. (а)** *Подсказка*: выпишите дифференциальную характеристику внутреннего Парето-оптимального распределения (равенство предельных норм замещения) и воспользуйтесь методом доказательства от противного, учитывая, что в экономике отсутствует системный риск. **(б)** Результат п. (а) будет по-прежнему справедлив. **6.55. (а)** Определение равновесия Эрроу–Дебре: набор $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_1^{\mathsf{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{B}})$ является равновесием Эрроу–Дебре, если 1) $\left(\widetilde{x}_1^{\mathsf{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathsf{A}}\right)$ является решением

задачи потребителя A: $\begin{cases} \pi_1 u^{A}(x_1^{A}) + \pi_2 u^{A}(x_2^{A}) \to \max\limits_{x_1^{A}\geqslant 0, x_2^{A}\geqslant 0}, \\ \widetilde{p}_1 x_1^{A} + \widetilde{p}_2 x_2^{A} \leqslant \widetilde{p}_1; \end{cases}$
2) $(\widetilde{x}_1^{B}, \widetilde{x}_2^{B})$ является решением задачи потребителя B: $\begin{cases} \pi_1 u^{B}(x_1^{B}) + \pi_2 u^{B}(x_2^{B}) \to \max\limits_{x_1^{B}\geqslant 0, x_2^{B}\geqslant 0}, \\ \widetilde{p}_1 x_1^{A} + \widetilde{p}_2 x_2^{A} \leqslant \widetilde{p}_2; \end{cases}$ 3) все рынки уравновешены: $\widetilde{x}_1^{A} + \widetilde{x}_1^{B} = 1$; $\widetilde{x}_2^{A} + \widetilde{x}_2^{B} = 1$. **(б)** Равновесие Эрроу–Дебре: $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = \pi_1/\pi_2$, $(\widetilde{x}_1^{A}, \widetilde{x}_2^{A}) = (\pi_1,\ \pi_1)$, $(\widetilde{x}_1^{B}, \widetilde{x}_2^{B}) = (\pi_2,\ \pi_2)$. **(в)** Данное распределение нельзя реализовать как равновесное, поскольку оно не Парето-оптимально, а следовательно, по первой теореме благосостояния не может быть равновесным. **6.56.** В равновесии: $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = \pi_1/\pi_2 = 1/2$, $\widetilde{x}^{A} = (\omega/9,\ \omega/9)$, $\widetilde{x}^{B} = (\omega/9,\ \omega/9)$, $\widetilde{x}^{C} = (7\omega/9,\ 7\omega/9)$. **6.57.** Недостающие параметры равновесия: $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 1/3$, $\widetilde{x}^{B} = (9,\ 6)$, $\widetilde{x}^{C} = (6,\ 4)$. **6.58.** **(а)** Множество Парето-оптимаьных распределений: $\overline{x}_2^{B} = \overline{x}_1^{B}$ при $0 \leqslant \overline{x}_1^{B} \leqslant 2\omega$ и $\overline{x}_2^{B} = 2\omega$ при $2\omega \leqslant \overline{x}_1^{B} \leqslant 4\omega$. **(б)** $\overline{x}_2^{A} = 0$ при $0 \leqslant \overline{x}_1^{A} \leqslant \omega$. **(в)** Аналогично определению равновесия в задаче 6.55. **(г)** Равновесие: $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 1/2$, $\widetilde{x}^{A} = (7\omega/3,\ \omega/3)$, $\widetilde{x}^{B} = (5\omega/3, 5\,\omega/3)$. Потребитель-рискофоб B полностью застрахован от риска нейтральным к риску потребителем A. **(д)** Равновесие: $\widetilde{p}_1/\widetilde{p}_2 = 7/3$, $\widetilde{x}^{A} = (10\omega/7,\ 0)$, $\widetilde{x}^{B} = (18\omega/7,\ 2\,\omega)$. **(е)** При $\pi_1 \geqslant 1/2$ будут граничные равновесные распределения при положительных ценах, где $\widetilde{x}_2^{A} = 0$ и $\omega < \widetilde{x}_1^{A} \leqslant 2\omega$. **(ж)** Данное распределение можно реализовать как равновесное, например, при ценах $\overline{p}_1 = 1$, $\overline{p}_2 = 2$ и трансфертах $\overline{T}^{A} = 7\omega/2$, $\overline{T}^{B} = -7\omega/2$. **(з)** Данное распределение можно реализовать как равновесное, например, при ценах $\widehat{p}_1 = 1$, $\widehat{p}_2 = 3$ и трансфертах $\widehat{T}^{A} = -3\omega$, $\widehat{T}^{B} = 3\omega$. **6.59.** **(а)** Множество Парето-оптимальных распределений — периметр ящика Эджворта. **(б)** Распределения, где $x_2^{B} = 0$ при $0 \leqslant x_1^{B} \leqslant \overline{\omega}_1$ и $x_1^{B} = 0$ при $0 \leqslant x_2^{B} \leqslant \overline{\omega}_2$. **(в)** Множество Парето-оптимальных распределений: $x_2^{A} = 0$ при $0 \leqslant x_1^{A} \leqslant \overline{\omega}_1$; $x_1^{A} = 0$ при $0 \leqslant x_2^{A} \leqslant \overline{\omega}_2$; $x_2^{A} = \overline{\omega}_2$ при $0 \leqslant x_1^{A} \leqslant \overline{\omega}_1$; $x_1^{A} = \overline{\omega}_1$ при $0 \leqslant x_2^{A} \leqslant \overline{\omega}_2/2 = \overline{\omega}_1$. **(г)** Распределения такие, что $x_2^{B} = 0$ при $0 \leqslant x_1^{B} \leqslant \overline{\omega}_1$ и $x_1^{B} = 0$ при $\overline{\omega}_2/2 \leqslant x_2^{B} \leqslant \overline{\omega}_2$.

Литература, рекомендуемая в качестве теоретической базы для задачника

1.1. *Gravelle H.*, *Rees R.* Microeconomics. 3rd ed. Prentice Hall, 2004.

1.2. *Nicholson W.* Microeconomic Theory. Basic principles and extensions. 7th ed. Dryden Press, 1997.

1.3. *Вэриан Х.Р.* Микроэкономика, промежуточный уровень. Современный подход /Пер. с англ. М.: Юнити, 1997.

1.4. *Кац М.*, *Роузен Х.* Микроэкономика / Пер. с англ. Минск: Новое знание, 2004.

1.5. *Коуэл Ф.* Микроэкономика. Принципы и анализ / Пер. с англ. М: Дело, 2011.

1.6. *Пиндайк Р.С.*, *Рубинфельд Д.Л.* Микроэкономика / Пер. с англ. М: Дело, 2000.

Используемая литература

2.1. *Varian H.* Microeconomic Analysis. New York: W.W. Norton, 1992.

2.2. *Mas-Colell A.*, *Whinston M.D.*, *Green J.R.* Microeconomic theory. Oxford University Press, 1995.

2.3. *Бусыгин В.П.*, *Желободько Е.В.*, *Цыплаков А.А.* Микроэкономика: третий уровень. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008.

2.4. *Вэриан Х.Р.* Микроэкономика, промежуточный уровень. Современный подход / Пер. с англ. М.: Юнити, 1997.

2.5. Домашняя страница профессора LSE Фрэнка Коуэла. http://darp.lse.ac.uk/Frankweb/courses/EC202/default.htm

2.6. *Левина Е.А.*, *Покатович Е.В.* Микроэкономика: задачи и решения. М.: Изд. дом ВШЭ, 2010.

2.7. Материалы London School of Economics and Political Science (LSE). http://www.londonexternal.ac.uk/current_students/programme_resources/lse/exams.shtml

2.8. *Пиндайк Р.С.*, *Рубинфельд Д.Л.* Микроэкономика. М: Дело, 2001.

2.9. *Bergstrom T.C.*, *Varian H.R.* Workouts in Intermediate Microeconomics. 6th ed. W. W. Norton & Co.Inc., 2002.

Учебное издание

Балакина Татьяна Петровна,
Левина Евгения Александровна,
Покатович Елена Викторовна,
Попова Елена Владимировна

Микроэкономика: промежуточный уровень

Сборник задач с решениями и ответами

Зав. редакцией *Е.А. Бережнова*
Редактор *И.Л. Легостаева*
Художественный редактор *А.М. Павлов*
Компьютерная верстка и графика: *И.Г. Андреева*
Корректор *И.Л. Легостаева*

Подписано в печать 29.08.2013. Формат 60×90/16. Гарнитура Antiqua.
Печать офсетная. Усл.-печ. л. 31,5. Уч.-изд. л. 25,6.
Тираж 1000 экз. Изд. № 1607

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
101000, Москва, ул. Мясницкая, 20
Тел./факс: (499) 611-15-52

ISBN 978-5-7598-0983-8

9 785759 809838