Chapitre 8 : Algèbres de Boole

1 L'algèbre de Boole fondamentale

Soit $\mathcal{B} = \{0; 1\}$.

On définit dans $\mathcal{B}$ une loi de composition interne appelée **addition booléenne** notée $+$ (par abus d'écriture) et définie par sa table de Cayley ci-dessous fig. 1.
On définit de même la **multiplication booléenne** dans $\mathcal{B}$ par la table fig. 2.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

Figure 1

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Figure 2

On définit également l'opération unaire suivante dans $\mathcal{B}$, appelée **complémentation** :

$$\begin{aligned} {}^{-} : \mathcal{B} &\to \mathcal{B} \\ 0 &\mapsto \bar{0} = 1 \\ 1 &\mapsto \bar{1} = 0 \end{aligned}$$

Théorème 1.1. $(\mathcal{B}, +, \times, {}^{-})$ *est une algèbre de Boole appelée* ***l'algèbre de Boole fondamentale****.*

Démonstration en TD.

2 Définition d'une algèbre de Boole

Définition 1. Soit E un ensemble muni de deux opérations binaires $+$ et $\times$ et d'une opération unaire $x \mapsto x'$.
On dit que $(E, +, \times, x \mapsto x')$ est une *algèbre de Boole* si :

1. (a) $+$ est commutative :

   (b) $+$ est associative :

   (c) $+$ possède un élément neutre dans E, appelé élément nul et noté **0** :

2. (a) $\times$ est commutative :

   (b) $\times$ est associative :

   (c) $\times$ possède un élément neutre dans E, appelé élément unité et noté **1** :

3. $\times$ est distributive par rapport à $+$:

4. $+$ est distributive par rapport à $\times$:

5. $a + a' = \mathbf{1}$ pour tout $a \in E$.
6. $a \times a' = \mathbf{0}$ pour tout $a \in E$.

Définition 2. L'application $x \mapsto x'$ est appelée *la complémentation* et x' *le complément* de x.

Théorème 2.1 (Unicité du complément)**.** *Dans une algèbre de Boole il existe une seule opération unaire vérifiant les axiomes 5 et 6 ci-dessus.*

Convention : On convient que la multiplication booléenne est **prioritaire** par rapport à l'addition booléenne.

Ainsi $a + (b \times c)$ se note plus simplement $a + b \times c$ ou encore $a + bc$.

En particulier les propriétés 3) et 4) s'écrivent :

$$a(b + c) = ab + ac \text{ et } a + bc = (a + b)(a + c).$$

Théorème 2.2. *Soit $(E, +, \times, x \mapsto x')$ une algèbre de Boole. On a :*

7. ***0** est élément absorbant pour $\times$ c.-à-d. :*

8. ***1** est élément absorbant pour $+$ c.-à-d. :*

9. $\boldsymbol{0}' =$

10. $\boldsymbol{1}' =$

Pour tout a de E :

11. $a + a =$ *(idempotence de $+$)*

12. $a \times a =$ *(idempotence de $\times$)*

13. $(a')' =$ *(involution de la complémentation)*

***Lois d'absorption** :*

14. $a + (a \times b) = a$ *c'est-à-dire : $a + ab = a$.*

15. $a \times (a + b) = a$ *c'est-à-dire : $a(a + b) = a$.*

***Lois de Morgan** :*

16. $(a + b)' =$

17. $(a \times b)' =$

Théorème 2.3 (Théorème de la Redondance)**.** *:*

18. $\underline{(a \times b) + (a' \times c)} + (b \times c) = \underline{(a \times b) + (a' \times c)}$ *c.-à-d. :* $\underline{ab + a'c} + bc = \underline{ab + a'c}$

19. $(a + b) \times (a' + c) \times (b + c) = (a + b) \times (a' + c)$ *c.-à-d. :* *(a+b)(a'+c)(b+c) = (a+b)(a'+c)*

ATTENTION : Comme on le voit ci-dessus certaines propriétés sont partagées par l'addition dans $\mathbb{R}$ et l'addition booléenne. D'autres sont différentes. Lorsqu'on travaillera dans une algèbre de Boole il faudra s'habituer à garder les automatismes de calcul qui restent valables, se méfier des autres et profiter des possibilités nouvelles comme la distributivité de l'addition booléenne par rapport à la multiplication booléenne. Par exemple :

- Dans $\mathbb{R}$, pour l'addition habituelle, on a : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad a+c=b+c \Rightarrow a=b$. On dit que l'addition des nombres réels est régulière.
Or dans **une algèbre de boole l'addition booléenne $+$ n'est pas régulière** :

On peut avoir : $a+c=b+c$ et $a \neq b$.

Exemple : $\mathbf{0}+\mathbf{1}=\mathbf{1}+\mathbf{1}$ mais $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$.

De même la multiplication booléenne n'est pas régulière.

- Penser à la transformation possible : $a+bc=(a+b)(a+c)$ (Distributivité de l'add. bool. par rapport à la mult. bool.) -à lire aussi : $(a+b)(a+c)=a+bc$.
Exercice

1. Développer et réduire l'expression $A=(a+bc'+c)(ab+b'+c)$.

2. Factoriser et réduire l'expression $B=ab+bc'+c$.

3 Autres exemples d'algèbre de Boole

Exemple 1.
Soit $\mathcal{B}^2=\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$.
On définit dans $\mathcal{B}^2$ **l'addition booléenne de deux couples**, notée provisoirement par $\oplus$, de la façon suivante :
pour tout $(x,y) \in \mathcal{B}^2$ et tout $(u,v) \in \mathcal{B}^2$:

$$(x,y) \oplus (u,v) = (x+u, y+v)$$

où $+$ est l'addition booléenne dans $\mathcal{B}$.

On définit de même dans $\mathcal{B}^2$ **la multiplication booléenne de deux couples**, notée par $\otimes$, de la façon suivante :
pour tout $(x,y) \in \mathcal{B}^2$ et tout $(u,v) \in \mathcal{B}^2$:

$$(x,y) \otimes (u,v) = (x \times u, y \times v)$$

où $\times$ est la mutiplication booléenne dans $\mathcal{B}$.
On définit dans $\mathcal{B}^2$ l'opération **complément d'un couple** par : $\overline{(x,y)} = (\overline{x}, \overline{y})$

Théorème 3.1. $(\mathcal{B}^2, \oplus, \otimes, ^{-})$ *est une algèbre de Boole d'élément nul* $(0,0)$ *et d'élément unité* $(1,1)$.

Démonstration en TD.
Remarque 1 : $(x,y) \oplus (0,0) =$

Remarque 2 : $(x,y) \otimes (1,1) =$

Remarque 3 : $\overline{(1,0)} =$

Exemple 2 (Généralisation).
Soit n un entier naturel non nul. On définit dans $\mathcal{B}^n$ **l'addition booléenne de deux** $n-$**uplets**, notée par $\oplus$, de la façon suivante :
pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{B}^n$ et tout $(u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathcal{B}^n$:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \oplus (u_1, u_2, ..., u_n) = (x_1 + u_1, x_2 + u_2, ..., x_n + u_n)$$

où $+$ est l'addition booléenne dans $\mathcal{B}$.

On définit dans $\mathcal{B}^n$ **la multiplication booléenne de** $n-$**uplets**, notée par $\otimes$, de la façon suivante :
pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{B}^n$ et tout $(u, v) \in \mathcal{B}^n$:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \otimes (u_1, u_2, ..., u_n) = (x_1 \times u_1, x_2 \times u_2, ..., x_n \times u_n)$$

où $\times$ est la mutiplication booléenne dans $\mathcal{B}$.
Enfin on définit dans $\mathcal{B}^n$ l'opération **complément d'un** $n-$**uplets**, par : $\overline{(x_1, x_2, ..., x_n)} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$.

Théorème 3.2. $(\mathcal{B}^n, \oplus, \otimes, ^{-})$ *est une algèbre de Boole d'élément nul* $(0,0,...,0)$ *et d'élément unité* $(1,1,...,1)$.

Exemple 3.
Soit X un ensemble. Soit $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Alors :

Théorème 3.3. $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \complement_X\,)$ *est une algèbre de Boole d'élément nul* $\emptyset$ *et d'élément unité la partie pleine* X.

Remarque 1 : on a en effet

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \quad \forall A \in \mathcal{P}(X)$$

$$A \cap X = X \cap A = A \quad \forall A \in \mathcal{P}(X) \text{ puisque } A \subset X.$$

Ici **0** $=\emptyset$ et **1** $=X$ dans $\mathcal{P}(X)$.

Remarque 2 : les axiomes 5. et 6. de la définition d'une algèbre de Boole s'écrivent ici :

$$A \cup \complement_X A = X \text{ et } A \cap \complement_X A = \emptyset$$

Exercice : Utiliser les notations booléennes pour simplifier l'expression suivante :

$$(A \cap C) \cup (\complement_X B \cap C) \cup B$$