Chapitre 0 : calculs algébrique et numérique

1 Calcul algébrique

1.1 Développement et factorisation

Développer un produit, c'est le transformer en somme.

Factoriser une expression, c'est la transformer en produit.

Rappel : dans l'ensemble des nombres réels, la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition, c'est-à-dire que pour tous réels a, b, k,

$$\begin{aligned} k(a+b) &= ka + kb \qquad \text{(on développe)} \\ ka + kb &= k(a+b) \qquad \text{(on factorise)} \end{aligned}$$

Conséquence : pour tous réels a, b, c, d,

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

Exemple 1.1. Pour tous réels a, x,

$$\begin{aligned} 5a - 8a &= (5-8)a = -3a \\ 2x^3 - 8x^3 &= (2-8)x^3 = -6x^3 \end{aligned}$$

Identités remarquables : pour tous réels a, b,

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Exemples 1.2. Pour tout réel x,
(a) $(x+5)^2 =$
(b) $9x^2 + 30x + 25 = (\qquad\qquad)^2$
(c) $64 - x^2 = (\qquad\qquad) \cdot (\qquad\qquad)$

1.2 Puissances entières

Définition 1.3. La puissance entière d'un nombre réel x est définie de façon récursive : on pose $x^0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$x^{n+1} = x^n \cdot x.$$

Ainsi, $x^1 = x$, $x^2 = x \cdot x$ et, plus généralement,

$$x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ facteurs égaux à } x}$$

Le nombre x^n se lit "x exposant n" et est aussi appelé "puissance $n^{\text{ième}}$ de x".

Définition 1.4. On définit la puissance avec un exposant entier négatif d'un nombre réel *non nul* x de la façon suivante : on pose $x^{-1} = \frac{1}{x}$ (inverse de x) et, plus généralement,

$$x^{-p} = \frac{1}{x^p}$$

pour tout entier naturel p.

Ainsi, $x^{-1} \cdot x = 1$ et, plus généralement, $x^{-p} \cdot x^p = 1$ pour tout entier naturel p.

Proposition 1.5. *Soient x un réel non nul et m, n des entiers relatifs. Alors*

(a) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

(b) $(x^m)^n = x^{mn}$

(c) $(xy)^m = x^m y^m$

(d) $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$

Exemples 1.6.

(a) $(-9)^4 \cdot (-9)^3 =$

(b) $\left(2 \cdot 10^3\right)^4 =$

(c) $(6^3)^4 =$

(d) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 =$

1.3 Racines carrées

Définition 1.7. Soit a un réel positif ou nul. La *racine carrée* de a est la solution positive ou nulle x de l'équation $x^2 - a = 0$. On la note $\sqrt{a}$.

Ainsi, l'équation $x^2 - a = 0$ d'inconnue x admet pour solutions $\sqrt{a}$ **et** $-\sqrt{a}$ (ne pas l'oublier !).

Remarque 1.8. Si a est un réel *strictement négatif*, alors l'équation $x^2 - a = 0$ n'admet aucune solution réelle.

Proposition 1.9. *Pour tous réels a, x,*

(a) si $a \geq 0$, alors $\sqrt{a}^2 = \sqrt{a^2} = a$

(b) si $a \geq 0$, alors $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = x^2 - a$

(c) si a est quelconque, alors $\sqrt{a^2} = |a|$ (valeur absolue de a).

Par exemple, $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

Proposition 1.10. *Soient a et b des réels positifs. Alors*

(a) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

(b) si $b > 0$, alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Attention ! L'addition n'est pas préservée par la racine carrée : en général, $\sqrt{\mathbf{a} + \mathbf{b}} \neq \sqrt{\mathbf{a}} + \sqrt{\mathbf{b}}$. Par exemple, si $a = 1$ et $b = 2$, alors $\sqrt{a+b} = \sqrt{3} \simeq 1,732$ mais $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 + \sqrt{2} \simeq 2,414$.

2 Calcul numérique

2.1 Fractions de nombres réels

Rappels : Soient a, b, c, d des réels avec b et d non nuls. Alors

(a) $\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$

(b) $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

(c) $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$

(d) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, en particulier $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$

(e) si $a \neq 0$, alors $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$, en particulier $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

En conséquence,
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}.$$
Attention ! En général, $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b+d}} \neq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{d}}$. Par exemple, si $b=1$ et $d=2$, alors $\frac{1}{b+d}=\frac{1}{3}$ mais $\frac{1}{b}+\frac{1}{d}=1+\frac{1}{2}=\frac{\qquad}{2}$.

2.2 Addition et réduction de rationnels

On peut calculer la somme de deux fractions d'entiers – on appelle cela des nombres *rationnels* – comme ci-dessus : si a, b, c, d sont des entiers avec b et d non nuls, alors $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$. On a ramené chacune des fractions sur un dénominateur *commun* qui est bd.

Cependant, il est souvent avantageux en termes de calculs de ne pas prendre le produit bd comme dénominateur commun. En effet, il peut exister un entier qui soit multiple de b et de d mais qui soit inférieur (en valeur absolue) au produit bd. On cherche dans ce cas le *plus petit multiple commun* de b et de d, cf. ressource R1.06 (mathématiques discrètes). Au préalable et en fin de calcul, on *simplifie* au maximum la fraction en supprimant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur.

Exemples 2.1.

(a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{\qquad\qquad\qquad}{6}=\frac{\qquad}{6}$

(b) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{\qquad\qquad\qquad}{}=$

(c) $\frac{2}{6}-\frac{1}{3}=\frac{\qquad}{}-\frac{1}{3}=$

(d) $\frac{9}{10}-\frac{1}{15}=\frac{\qquad\qquad\qquad}{}=$

2.3 Équations du second degré

Définition 2.2. Une *équation du second degré* est une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$, où x est l'inconnue et a, b, c sont des réels avec $a \neq 0$.

Remarquons que, si $a=0$, alors $ax^2+bx+c=bx+c$ et ainsi l'équation $ax^2+bx+c=0$ est du premier degré.

Exemples 2.3.

(a) $2x^2+5x-1=0$

(b) $-3x^2+1=0$

(c) $2x^2+x=0$

(d) $-x^2+3=x$

(e) $(2x+3)(-x+1)=2$

Par contre, $x^3+1=0$ par exemple n'est pas une équation du second degré.

Méthodes de résolution d'une équation du second degré :

1. Si $b=0$: alors l'équation devient $ax^2+c=0$, soit $x^2=-\frac{c}{a}$.
   (a) Si $\frac{c}{a}>0$, alors $-\frac{c}{a}<0$ et dans ce cas l'équation n'a pas de solution réelle, autrement dit son ensemble $\mathcal{S}$ de solutions est vide : $\mathcal{S}=\varnothing$.
   (b) Si $\frac{c}{a}=0$, ce qui équivaut à $c=0$, alors l'équation admet 0 comme seule solution : $\mathcal{S}= \qquad\qquad$.
   (c) Si $\frac{c}{a}<0$, alors $-\frac{c}{a}>0$ et dans ce cas l'équation admet deux solutions opposées : $\mathcal{S}=\left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$.

2. Si l'équation est sous forme factorisée, c'est-à-dire du type $(dx+e)(fx+g) = 0$ avec d, e, f, g réels : comme un produit de facteurs est nul si et seulement l'un des facteurs l'est, on résout séparément $dx + e = 0$ et $fx + g = 0$ et alors l'ensemble des solutions de l'équation est l'*union* des ensembles de solutions des deux équations.
3. Si l'équation n'est pas sous forme factorisée, on peut essayer de la rendre sous cette forme en regroupant tous les termes d'un seul côté et en recherchant les facteurs communs, cf. exemples 2.4 ci-dessous.
4. Si l'équation n'est pas sous forme factorisée mais qu'aucun facteur commun n'apparaît, on peut encore chercher à factoriser en faisant apparaître le début d'un carré, cf. exemples 2.4 ci-dessous.
5. Si aucune des méthodes ci-dessus ne s'applique, on peut faire appel à la méthode du discriminant : on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et trois cas se présentent alors :
   (a) Soit $\Delta < 0$: alors l'équation n'admet aucune solution réelle, soit $\mathcal{S} = \varnothing$.
   (b) Soit $\Delta = 0$: alors l'équation admet une unique solution réelle, soit $\mathcal{S} = \{-\frac{b}{2a}\}$.
   (c) Soit $\Delta > 0$: alors l'équation admet deux solutions réelles, soit $\mathcal{S} = \{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\}$.

Retenir qu'il ne faut pas se précipiter sur le calcul du discriminant !

Exemples 2.4.

(a) L'équation du second degré $(3x+2)(2x-1) = 0$ est sous forme factorisée. La résolution donne $\mathcal{S} = \{\quad , \quad\}$.

(b) L'équation du second degré $(x-3)(2x+1) - (5x+1)(2x+1) = (8x+4)(x-3)$ n'est *a priori* par sous forme factorisée. Cependant, on peut tenter de procéder comme dans la méthode suggérée ci-dessus et commencer par faire passer $(8x+4)(x-3)$ à gauche avant de factoriser :

$$
\begin{aligned}
(x-3)(2x+1) - (5x+1)(2x+1) - (8x+4)(x-3) &= (x-3)(2x+1) - (5x+1)(2x+1) - 4(2x+1)(x-3) \\
&= (2x+1)\left(x-3-(5x+1)-4(x-3)\right) \\
&= (2x+1)(x-3-5x-1-4x+12) \\
&= (2x+1)(-8x+8) \\
&= 8(2x+1)(-x+1).
\end{aligned}
$$

Par conséquent, $\mathcal{S} = \{\quad , \quad\}$.

(c) L'équation du second degré $x^2 + 20x - 156 = 0$ n'est *a priori* pas sous forme factorisée. Cependant, $x^2 + 20x$ est le début de $(x+10)^2 = x^2 + 20x + 100$. L'idée est de faire apparaître ce carré et de retrancher ce qui est en trop (le terme 100) :

$$
\begin{aligned}
x^2 + 20x - 156 &= x^2 + 20x + 100 - 100 - 156 \\
&= (x+10)^2 - 256 \\
&= (x+10)^2 - 16^2 \\
&= (x+10-16)(x+10+16) \\
&= (x-6)(x+26).
\end{aligned}
$$

Par conséquent, $\mathcal{S} = \{\quad , \quad\}$.