Fermeture transitive

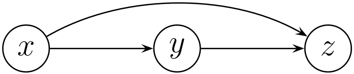
F.M.

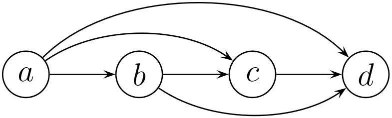
2024/2025

Transitivité

Un graphe orienté $G = (S, A)$ est dit **transitif** si :

$$(x, y) \in A \text{ et } (y, z) \in A \Rightarrow (x, z) \in A$$





2 / 50

On appelle **Fermeture Transitive** (**FT** en abrégé) d'un graphe orienté $G = (S, A)$, le **plus petit graphe transitif contenant** $\boldsymbol{G}$. On note $\boldsymbol{\hat{G} = (S, \hat{A})}$ la fermeture transitive de G.

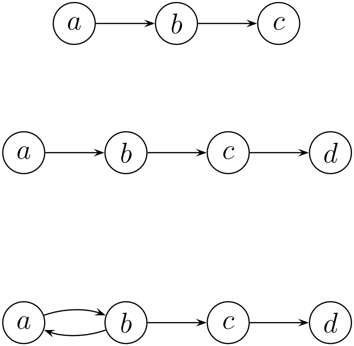
On a $\boldsymbol{A \subseteq \hat{A}}$ puisque $\boldsymbol{\hat{G}}$ **contient** $\boldsymbol{G}$. On obtient $\hat{G}$ en ajoutant à G les arcs qui le rendent transitif.

Plus petit se rapporte à la taille (le nombre d'arcs) de $\hat{G}$. **Plus petit** signifie que : si on supprime un arc de $\hat{G}$, soit $\hat{G}$ n'est plus transitif, soit $\hat{G}$ ne contient plus G.

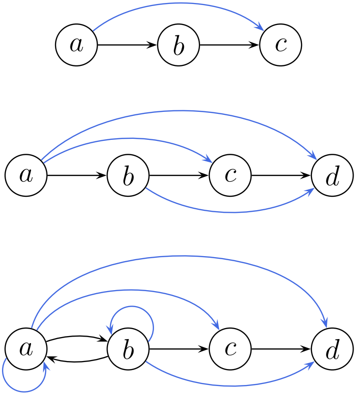
 3 / 50

Exemples

$G = (S, A)$



$\hat{G} = (S, \hat{A})$



quelle est l'information portée par chaque arc de $\hat{G}$?

4 / 50

Propriété de la fermeture transitive

Soient $G = (S, A)$ un graphe et $\hat{G} = (S, \hat{A})$ la fermeture transitive de G. Alors :

$$(x, y) \in \hat{G} \;\Leftrightarrow\; \textbf{il existe un chemin de } x \textbf{ à } y \textbf{ dans } G$$

Conséquence : si $\hat{G}$ est connu, la réponse à la question « existe-t-il un chemin de x à y dans G ? » est immédiate. D'où l'intérêt de calculer, une fois pour toute, la fermeture transitive d'un graphe.

Précision : si $(x, x) \in \hat{G}$ alors il existe un chemin fermé d'au moins un arc passant par x dans G.

Application en base de données : fermeture transitive du graphe des dépendances fonctionnelles (permet de déduire des dépendances fonctionnelles par transitivité).

5 / 50

Soient $G = (S, A)$ un graphe et $\hat{G} = (S, \hat{A})$ la fermeture transitive de G.
L'algorithme de base formalise une méthode de construction du diagramme de $\hat{G}$ à partir du diagramme de G :

$\hat{A} \leftarrow A$ .... ✎ initialisation
tant que $\exists\ (x, y)$ **et** $(y, z) \in \hat{A}$ **tels que** $(x, z) \notin \hat{A}$ **faire**
  $\hat{A} \leftarrow \hat{A} \cup \{(x, z)\}$ .... ✎ ajout de l'arc (x, z) au graphe
fin tant que

Lorsqu'on ajoute un arc, on dit que l'**on ferme une transitivité**.

L'algorithme se termine lorsqu'il n'y a plus de transitivité à fermer.

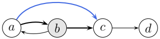
Le résultat final ne dépend pas du choix effectué à chaque itération.

 6 / 50

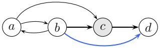
Illustration

ité. [0] : $\hat{A} \leftarrow A$ . . . .

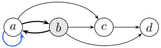
ité. [1] : $(a, \boldsymbol{b})$ et $(\boldsymbol{b}, c) \in \hat{A} \;\Rightarrow\; \hat{A} \leftarrow \hat{A} \cup \{(a, c)\}$ . . . .



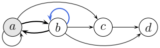
ité. [2] : $(b, \boldsymbol{c})$ et $(\boldsymbol{c}, d) \in \hat{A} \;\Rightarrow\; \hat{A} \leftarrow \hat{A} \cup \{(b, d)\}$ . . . .



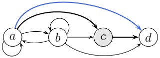
ité. [3] : $(a, \boldsymbol{b})$ et $(\boldsymbol{b}, a) \in \hat{A} \;\Rightarrow\; \hat{A} \leftarrow \hat{A} \cup \{(a, a)\}$ . . . .



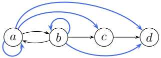
ité. [4] : $(b, \boldsymbol{a})$ et $(\boldsymbol{a}, b) \in \hat{A} \;\Rightarrow\; \hat{A} \leftarrow \hat{A} \cup \{(b, b)\}$ . . . .



ité. [5] : $(a, \boldsymbol{c})$ et $(\boldsymbol{c}, d) \in \hat{A} \;\Rightarrow\; \hat{A} \leftarrow \hat{A} \cup \{(a, d)\}$ . . . .



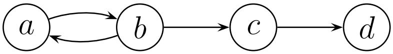
result. : $\hat{A} \;=\; A \;\cup\; \{(a, c), (b, d), (a, a), (b, b), (a, d)\}$ . . . .



7 / 50

Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre n. On appelle **matrice d'adjacence de G, la matrice carrée M d'ordre n définie par :**

$$\forall x, y \in S,\ M[x, y] = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

La représentation d'un graphe par sa matrice d'adjacence est adaptée aux opérations d'ajout/suppression d'arcs. Mais elle n'est pas adaptée aux opérations d'ajout/suppression de sommets.

8 / 50

Le produit d'une matrice ligne $X = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$ de dimension $(1, \boldsymbol{n})$ par une matrice colonne $Y = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n]^t$ de dimension $(\boldsymbol{n}, 1)$ est une matrice de dimension $(1, 1)$, donc un nombre, calculée suit :

$$\begin{aligned} X \times Y &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \times y_1 + x_2 \times y_2 + \cdots + x_n \times y_n \end{bmatrix} \\ &= \ x_1 \times y_1 + x_2 \times y_2 + \cdots + x_n \times y_n \end{aligned}$$

Lorsque X et Y sont des matrices booléennes, l'opérateur $+$ est considéré comme l'opérateur booléen **OU** et l'opérateur $\times$ comme l'opérateur booléen **ET**.

9 / 50

produit matriciel

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{0 \times 0} + \boxed{1 \times 1} + \boxed{1 \times 1} + \boxed{0 \times 1} = 2$$

produit matriciel booléen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{0 \times 0} + \boxed{1 \times 1} + \boxed{1 \times 1} + \boxed{0 \times 1} = 1$$

$$0 \times x = 0 \qquad 1 \times x = x$$
$$0 + x = x \qquad 1 + x = 1$$

il suffit d'un terme $\boxed{\mathbf{1 \times 1}}$
pour que la somme soit $\mathbf{1}$

10 / 50

Rappel : produit matriciel (suite)

Soit $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{\ell 1} & x_{\ell 2} & \cdots & x_{\ell j} & \cdots & x_{\ell n} \end{bmatrix}$ une matrice $(\boldsymbol{\ell}, n)$.

On note usuellement $X = (x_{ij})$ où x_{ij} désigne l'élément $X[i, j]$.

Soit $Y = (y_{ij})$ une matrice $(n, \boldsymbol{c})$.

Alors $Z = X \times Y$ est une matrice $(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{c})$ et tout élément z_{ij} de Z est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} z_{ij} &= \text{produit matriciel de la } i^{\text{e}} \text{ ligne de } X \text{ par la } j^{\text{e}} \text{ colonne de } Y \\ &= x_{i1} \times y_{1j} + x_{i2} \times y_{2j} + \cdots + x_{in} \times y_{nj} \end{aligned}$$

11 / 50

Exemple

produit matriciel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{X} \quad \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{Y} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{X \times Y}$$

$$1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 2$$

produit matriciel booléen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{X} \quad \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{Y} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{X \times Y}$$

$$1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1$$

12 / 50

Propriété de la matrice d'adjacence

Soit M la matrice d'adjacence booléenne d'un graphe $G = (S, A)$. Alors :

$$\boldsymbol{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x, y \in S,\ M^k[x, y] = 1}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow}$$

il existe un chemin de $\boldsymbol{k}$ arcs allant de $\boldsymbol{x}$ à $\boldsymbol{y}$ dans $\boldsymbol{G}$

On démontre cette équivalence par récurrence sur k. Tout d'abord, cette équivalence est vraie pour $k = 1$ (évident).

On suppose que l'équivalence est vraie au rang $k-1$: $M^{k-1}[x, y] = 1 \Leftrightarrow$ il existe un chemin de $k-1$ arcs de x à y dans G. On va démontrer qu'elle est toujours vraie au rang k.

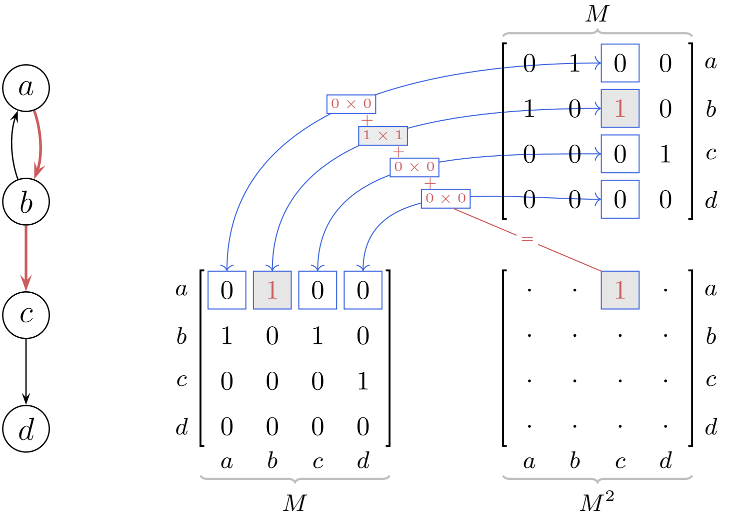
On a $M^k = M^{k-1} \times M$ et $M^k[x, y]$ est le produit matriciel de la ligne x de M^{k-1} par la colonne y de M :

$$M^k[x, y] = \sum_{s \in S} M^{k-1}[x, s] \times M[s, y]$$

$$\begin{aligned} M^k[x, y] = 1 \ &\Leftrightarrow\ \exists s \in S \text{ tel que } M^{k-1}[x, s] = 1 \text{ et } M[s, y] = 1 \\ &\Leftrightarrow\ \text{il existe un chemin de } k \text{ arcs de } x \text{ à } y \text{ dans } G \end{aligned}$$

13 / 50

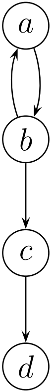
Illustration : calcul d'un élément de M^2



$$M^2[a,c] = \underbrace{M[a,a]\times M[a,c]}_{0\Rightarrow(a,a,c)\nexists} + \underbrace{M[a,b]\times M[b,c]}_{1\Rightarrow(a,b,c)\exists} + \underbrace{M[a,c]\times M[c,c]}_{0\Rightarrow(a,c,c)\nexists} + \underbrace{M[a,d]\times M[d,c]}_{0\Rightarrow(a,d,c)\nexists} = 1$$

14 / 50

Illustration : calcul de M^2



$$\begin{array}{cc} \overbrace{\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}}^{M} & \begin{matrix}a\\b\\c\\d\end{matrix} \\ \begin{matrix}a & b & c & d\end{matrix} & \end{array}$$

$$\begin{matrix}a\\b\\c\\d\end{matrix} \underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}}_{M} \quad \underbrace{\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&\boxed{1}&0\\0&\boxed{1}&0&\boxed{1}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}}_{M^2} \begin{matrix}a\\b\\c\\d\end{matrix}$$

il existe des chemins de 2 arcs allant
de a à a, de a à c, de b à b et de b à d

15 / 50

Astuce pour le calcul matriciel booléen

Calculons la 1re ligne de M^2 :

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{M}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{M^2}$$

il suffit de recopier la 2e ligne de M

16 / 50

Astuce pour le calcul matriciel booléen

Calculons la 2e ligne de M^2 :

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{M}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{M^2}$$

il suffit de faire la somme de la 1re et de la 3e ligne de M

17 / 50

Calculons la 3[e] ligne de M^2 :

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{bmatrix}}^{M}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{M^2}$$

il suffit de recopier la 4[e] ligne de M

 18 / 50

Astuce pour le calcul matriciel booléen

Calculons la 4ᵉ ligne de M^2 :

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{M}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{bmatrix}}_{M^2}$$

des 0 sur toute la ligne

19 / 50

Astuce pour le calcul matriciel booléen

Calculons la 1re colonne de M^2 :

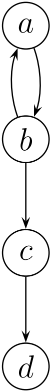
$$\overbrace{\begin{bmatrix}0&1&0&0\\ \boxed{1}&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}}^{M}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0&\boxed{1}&0&0\\ 1&\boxed{0}&1&0\\ 0&\boxed{0}&0&1\\ 0&\boxed{0}&0&0\end{bmatrix}}_{M} \quad \underbrace{\begin{bmatrix}\boxed{1}&\cdot&\cdot&\cdot\\ \boxed{0}&\cdot&\cdot&\cdot\\ \boxed{0}&\cdot&\cdot&\cdot\\ \boxed{0}&\cdot&\cdot&\cdot\end{bmatrix}}_{M^2}$$

il suffit de recopier la 2e colonne de M. Etc.

20 / 50

Illustration : calcul de M^3



$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{M} \quad \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{M}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M^2} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M^3}$$

il existe des chemins de 3 arcs allant
de a à b, de a à d, de b à a et de b à c

21 / 50

Soit M la matrice d'adjacence booléenne d'un graphe $G = (S, A)$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x, y \in S,\ M^k[x, y] = 1$$
$$\Leftrightarrow \text{il existe un chemin de } k \text{ arcs allant de } x \text{ à } y \text{ dans } G$$

Considérons un graphe d'ordre n.

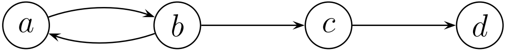
S'il existe un chemin allant de x à y alors il existe un chemin élémentaire de longueur au plus $n-1$ allant de x à y : $\exists\, \ell \leq n-1,\ M^\ell[x, y] = 1$.

S'il existe un chemin fermé contenant x alors il existe un circuit élémentaire de longueur au plus n arcs contenant x : $\exists\, \ell \leq n,\ M^\ell[x, x] = 1$.

$\Rightarrow$ calculer M^ℓ pour $\ell > n$ est inutile

22 / 50

illustration



$$\overset{\text{chemins de longueur 1}}{\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M}} \qquad \overset{\text{chemins de longueur 2}}{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M^2}} \qquad \overset{\text{chemins de longueur 3}}{\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M^3}} \qquad \overset{\text{chemins de longueur 4}}{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M^4}}$$

$M^4[a, c] = 1$: il existe un chemin de longueur 4 allant de a à c. Ce chemin n'est pas élémentaire et il existe donc un entier $\ell < 4$ tel que $M^\ell[a, c] = 1$.

$M^4[a, a] = 1$: il existe un chemin fermé de longueur 4 allant de a à a. Or la diagonale de M^4 contient des 0 : on en déduit que le graphe ne contient pas de circuit hamiltonien et il existe donc un entier $\ell < 4$ tel que $M^\ell[a, a] = 1$.

Remarquons ici que pour $k \geq 1$, $M^{2k} = M^2$ et $M^{2k+1} = M^3$.

23 / 50

Matrice d'adjacence et fermeture transitive

Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre n et de matrice d'adjacence M. Soit $\hat{G} = (S, \hat{A})$ la fermeture transitive de G. **On note $\hat{M}$ la matrice d'adjacence de $\hat{G}$.**

Pour tout $x, y \in S$, on a :

$$\hat{M}[x,y] = \begin{cases} 1 & \text{si il existe un chemin de } x \text{ à } y \text{ dans } G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calcul matriciel de $\hat{M}$:

$$\hat{M} = M^1 + \cdots + M^n = \sum_{k=1}^{n} M^k$$

Tout chemin élémentaire de G est de longueur au plus $n-1$ et tout circuit hamiltonien est de longueur n (d'où la somme jusqu'à la puissance n).

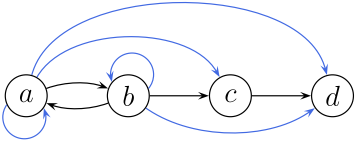
24 / 50

$$\hat{M} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M^2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M^3} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M^4}$$

chemins de longueur 1	chemins de longueur 2	chemins de longueur 3	chemins de longueur 4
M	M^2	M^3	M^4
les arcs du graphe	ajout de (a, a), (b, b), (a, c) et (b, d)	ajout de (a, d)	aucun ajout

additionner les matrices revient à ajouter des arcs

$$\hat{M} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ b & 1 & \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



$\hat{G}$

25 / 50

Algorithme de calcul matriciel de la FT

$P \leftarrow I_n$ .... ✎ affectation matricielle : 2 boucles imbriquées
$\hat{M} \leftarrow O_n$
pour $k \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  $T \leftarrow P \times M$ .... ✎ produit matriciel : 3 boucles imbriquées
  $P \leftarrow T$
  $\hat{M} \leftarrow \hat{M} + P$ .... ✎ somme matricielle : 2 boucles imbriquées
fin pour

Cet algorithme effectue n multiplications matricielles et n additions matricielles. Chaque multiplication matricielle nécessite n^3 opérations (chaque addition en nécessite n^2). Le nombre d'opérations effectuées pour calculer la FT d'un graphe est donc de l'ordre de $n \times n^3 = n^4$.

On dit que cet algorithme a une complexité de l'ordre de n^4.

26 / 50

Principe de l'algorithme de Warshall

Cet algorithme est une implémentation de l'algorithme de base (cf. diapo 6) qui détermine la fermeture transitive $\hat{G} = (S, \hat{A})$ de $G = (S, A)$ en ajoutant des arcs dans l'ordre suivant :

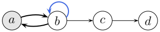
(1) **Initialisation** : $\hat{A} \leftarrow A$.

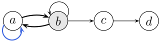
(2) **Itération [s]** : Pour tout couple de sommets (x, y), si $\hat{A}$ ne contient pas (x, y) mais contient les arcs $(x, \boldsymbol{s})$ et $(\boldsymbol{s}, y)$, alors on ajoute l'arc (x, y) à $\hat{A}$. **L'itération [s] consiste donc à fermer toutes les transitivités autour du sommet s.**

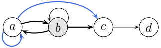
Remarque : les arcs ajoutés à l'itération $[s]$ vont des prédécesseurs du sommet s aux successeurs du sommet s.

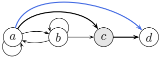
27 / 50

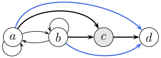
ité. $[0]$: $\hat{A} \leftarrow A$ .... 

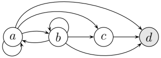
ité. $[a]$: $(b, \boldsymbol{a})$ et $(\boldsymbol{a}, b) \in \hat{A} \;\Rightarrow\; \hat{A} \leftarrow \hat{A} \cup \{(b, b)\}$ .... 

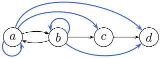
ité. $[b]$: $(a, \boldsymbol{b})$ et $(\boldsymbol{b}, a) \in \hat{A} \;\Rightarrow\; \hat{A} \leftarrow \hat{A} \cup \{(a, a)\}$ .... 

$(a, \boldsymbol{b})$ et $(\boldsymbol{b}, c) \in \hat{A} \;\Rightarrow\; \hat{A} \leftarrow \hat{A} \cup \{(a, c)\}$ .... 

ité. $[c]$: $(a, \boldsymbol{c})$ et $(\boldsymbol{c}, d) \in \hat{A} \;\Rightarrow\; \hat{A} \leftarrow \hat{A} \cup \{(a, d)\}$ .... 

$(b, \boldsymbol{c})$ et $(\boldsymbol{c}, d) \in \hat{A} \;\Rightarrow\; \hat{A} \leftarrow \hat{A} \cup \{(b, d)\}$ .... 

ité. $[d]$: aucun ajout .... 

result. : $\hat{A} \;=\; A \;\cup\; \{(b, b), (a, a), (a, c), (a, d), (b, d)\}$ .... 

28 / 50

Donnée : M, la matrice d'adjacence booléenne de $G = (S, A)$

Résultat : $\hat{M}$, la matrice d'adjacence booléenne de $\hat{G} = (S, \hat{A})$

$\hat{M} \leftarrow M$

pour tout $s \in S$ **faire**

  ✎ itération $[s]$: fermer les transitivités autour de s

  pour tout $x \in S$ **faire**

    pour tout $y \in S$ **faire**

      $\hat{M}[x, y] \leftarrow \hat{M}[x, y] + \left(\hat{M}[x, s] \times \hat{M}[s, y]\right)$

    fin pour

  fin pour

fin pour

29 / 50

L'affectation

$$\hat{M}[x,y] \leftarrow \boxed{\hat{M}[x,y]} + \boxed{\hat{M}[x,s] \times \hat{M}[s,y]}$$

où $+$ et $\times$ sont des opérateurs booléens, réalise **la fermeture d'une transitivité autour du sommet s**. En effet, cette affectation ajoute l'arc (x,y) quand $\hat{M}[x,y] = 0$ et $\hat{M}[x,s] = \hat{M}[s,y] = 1$, autrement dit quand l'arc (x,y) n'existe pas alors que les arcs (x,s) et (s,y) sont présents.

Considérons un graphe d'ordre n. Pour un sommet donné s, cette opération est exécutée n^2 fois, une fois pour chaque couple (x,y) de sommets. Pour n sommets, le nombre total d'opérations exécutées est donc de $n \times n^2 = n^3$.

L'algorithme de Warshall a une complexité de l'ordre de n^3.

Posons $S = \{s_1, \dots, s_n\}$.

Itération [s_1].
Détection des chemins élémentaires de la forme (x, s_1, y).

Itération [s_2].
Détection des chemins élémentaires de la forme (x, s_2, y). Après 2 itérations, les chemins élémentaires détectés sont de la forme, (x, s_1, y), (x, s_2, y), (x, s_1, s_2, y) ou (x, s_2, s_1, y) : tous les chemins élémentaires dont les sommets internes appartiennent à $\{s_1, s_2\}$ sont détectés.

Itération [s_k].
Après k itérations, tous les chemins élémentaires dont les sommets internes appartiennent à $\{s_1, \dots, s_k\}$ sont détectés.

Itération [s_n].
Après n itérations, tous les chemins élémentaires dont les sommets internes appartiennent à $\{s_1, \dots, s_n\} = S$ sont détectés.

31 / 50

Tout élément de la matrice dont la valeur ne change pas d'une itération de l'algorithme à la suivante est dit **invariant**.

Les invariants de la matrice à l'itération $[s]$ sont :

(*i*) Les éléments de valeur 1.
On ne supprime pas d'arcs.

(*ii*) Les éléments de la ligne s et ceux de la colonne s.
Aucun arc d'origine s ou de but s n'est ajouté à l'itération $[s]$.

(*iii*) Les éléments de la ligne x si l'arc (x, s) n'existe pas.
Aucun arc d'origine x ne peut être ajouté dans ce cas.

(*iv*) Les éléments de la colonne y si l'arc (s, y) n'existe pas.Aucun arc de but y ne peut être ajouté dans ce cas.

32 / 50

Déroulement de l'algorithme de Warshall

Itération [0] : initialisation

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\hat{M}^{[0]} \leftarrow M$$

On note $\hat{M}^{[0]}$ la matrice initiale puis $\hat{M}^{[s]}$ celle calculée à l'itération $[s]$

Application stricte de l'algorithme (cf. diapo 29) : à l'itération $[s]$, les éléments de $\hat{M}^{[s]}$ sont évalués ligne par ligne, dans l'ordre $\hat{M}^{[s]}(a, a)$, $\hat{M}^{[s]}(a, b)$, etc., $\hat{M}^{[s]}(d, c)$, $\hat{M}^{[s]}(d, d)$.

Itération $[a]$:

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ b & \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\hat{M}^{[0]} \qquad \hat{M}^{[a]}$$

Se rappeler que : les invariants sont les éléments à 1, ceux de la ligne a et ceux de la colonne a de $\hat{M}^{[0]}$, les éléments d'une ligne x si $\hat{M}^{[0]}[x, a] = 0$ et les éléments d'une colonne y si $\hat{M}^{[0]}[a, y] = 0$.

L'élément (b, b) n'est pas invariant :

$$\hat{M}^{[a]}[b, a] = \hat{M}^{[a]}[a, b] = 1 \Rightarrow \hat{M}^{[a]}[b, b] = 1$$

 34 / 50

Itération $[b]$:

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{M}^{[a]} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{M}^{[b]} \end{array}$$

Se rappeler que : les invariants sont les éléments à 1, ceux de la ligne b et ceux de la colonne b de $\hat{M}^{[a]}$, les éléments d'une ligne x si $\hat{M}^{[a]}[x, b] = 0$ et les éléments d'une colonne y si $\hat{M}^{[a]}[b, y] = 0$.

L'élément (a, a) et (a, c) ne sont pas invariants :

$$\hat{M}^{[a]}[a, b] = \hat{M}^{[a]}[b, a] = 1 \Rightarrow \hat{M}^{[b]}[a, a] = 1$$
$$\hat{M}^{[a]}[a, b] = \hat{M}^{[a]}[b, c] = 1 \Rightarrow \hat{M}^{[b]}[a, c] = 1$$

 35 / 50

Déroulement de l'algorithme de Warshall

Itération $[c]$:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} &
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array} \\
\hat{M}^{[b]}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} &
\begin{bmatrix} 1 & 1 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 1 & 1 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array} \\
\hat{M}^{[c]}
\end{array}
$$

Se rappeler que : les invariants sont les éléments à 1, ceux de la ligne c et ceux de la colonne c de $\hat{M}^{[b]}$, les éléments d'une ligne x si $\hat{M}^{[b]}[x, c] = 0$ et les éléments d'une colonne y si $\hat{M}^{[b]}[c, y] = 0$.

L'élément (a, d) et (d, d) ne sont pas invariants :

$$
\begin{aligned}
\hat{M}^{[b]}[a, c] = \hat{M}^{[b]}[c, d] = 1 &\Rightarrow \hat{M}^{[c]}[a, d] = 1 \\
\hat{M}^{[b]}[a, b] = \hat{M}^{[b]}[b, d] = 1 &\Rightarrow \hat{M}^{[c]}[b, d] = 1
\end{aligned}
$$

36 / 50

Itération $[d]$:

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\hat{M}^{[c]} \qquad\qquad \hat{M}^{[d]}$$

Se rappeler que : les invariants sont les éléments à 1, ceux de la ligne d et ceux de la colonne d de $\hat{M}^{[c]}$, les éléments d'une ligne x si $\hat{M}^{[c]}[x,d] = 0$ et les éléments d'une colonne y si $\hat{M}^{[c]}[d,y] = 0$.

Tous les éléments sont invariants

$$\Rightarrow \hat{M}^{[d]} = \hat{M}$$

Application *à la main* de l'algorithme de Warshall

Un élément (x, y) qui n'est pas un invariant passe systématiquement de la valeur 0 à la valeur 1 (ajout de l'arc (x, y)). Quand on déroule l'algorithme *à la main*, on peut procéder de la façon suivante :

– On démarre chaque itération avec une matrice *vide* dans laquelle on *recopie* tous les invariants de type (*ii*), puis ceux de type (*iii*), puis ceux de type (*iv*) et enfin ceux de type (*i*).

– Après la recopie des invariants, tout élément resté *vide* doit être rempli avec la valeur 1 : un arc est ajouté.

En effet, considérons une itérations $[s]$ et **un élément (x, y) resté vide** après la recopie des invariants. Si tel est le cas, cet élément ne correspond ni à un invariant de type (*i*) (**il y avait un 0 en (x, y)**), ni un invariant de type (*ii*) (**(x, y) n'est pas dans la ligne s ou dans la colonne s**), ni un invariant de type (*iii*) (**il existe un arc (x, s)**), ni un invariant de type (*iv*) (**il existe un arc (s, y)**). **On peut donc ajouter l'arc (x, y)**.

38 / 50

Itération [0] : initialisation

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

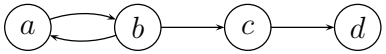
$$\hat{M}^{[0]} \leftarrow M$$

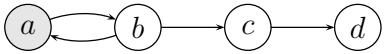
On note $\hat{M}^{[0]}$ la matrice initiale puis $\hat{M}^{[s]}$ celle calculée à l’itération $[s]$

39 / 50

Trace de l'algorithme de Warshall

Itération [*a*] : recopie des invariants





$$\begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ c & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ d & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$\hat{M}^{[0]}$ $\qquad\qquad$ $\hat{M}^{[a]}$

recopie de la ligne a et de la colonne a de $\hat{M}^{[0]}$

40 / 50

Itération [$\boldsymbol{a}$] : recopie des invariants

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left] & b \arrow[l, bend left] \arrow[r] & c \arrow[r] & d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left] & b \arrow[l, bend left] \arrow[r] & c \arrow[r] & d \end{tikzcd}$$

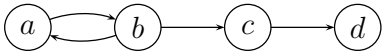
$$\underset{\hat{M}^{[0]}}{\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}} \qquad \underset{\hat{M}^{[a]}}{\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}}$$

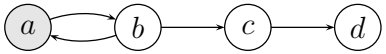
$\hat{M}^{[0]}[c,a] = \hat{M}^{[0]}[d,a] = 0 \Rightarrow$ recopie des lignes c et d de $\hat{M}^{[0]}$

41 / 50

Trace de l’algorithme de Warshall

Itération $[\boldsymbol{a}]$: recopie des invariants





$$\begin{array}{c} \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & & & & \\ b & & & & \\ c & & & & \\ d & & & & \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

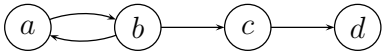
$$\hat{M}^{[0]} \qquad\qquad \hat{M}^{[a]}$$

$\hat{M}^{[0]}[a,c] = \hat{M}^{[0]}[a,d] = 0 \Rightarrow$ recopie des colonnes c et d de $\hat{M}^{[0]}$

42 / 50

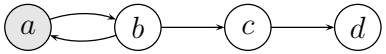
Trace de l'algorithme de Warshall

Itération [$\boldsymbol{a}$] : recopie des invariants



$$\begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\hat{M}^{[0]}$$



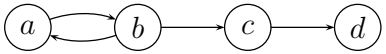
$$\begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & \cdot & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\hat{M}^{[a]}$$

aucune valeur 1 à recopier

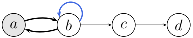
43 / 50

Itération $[\boldsymbol{a}]$: on remplit les éléments vides de $\hat{M}^{[a]}$ avec des 1



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\hat{M}^{[0]}$$



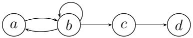
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\hat{M}^{[a]}$$

$$\hat{M}^{[a]}[b,a] = \hat{M}^{[a]}[a,b] = 1 \Rightarrow \hat{M}^{[a]}[b,b] = 1$$

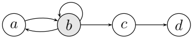
44 / 50

Itération [b] : recopie des invariants



$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & & & & \\ b & & & & \\ c & & & & \\ d & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \hat{M}^{[a]} \end{array}$$



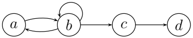
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \hat{M}^{[b]} \end{array}$$

Recopie de la ligne et de la colonne b, recopie des lignes c et d et de la colonne d. Il ne reste pas de 1 à recopier.

 45 / 50

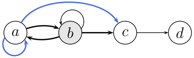
Trace de l'algorithme de Warshall

Itération [*b*] : on remplit les éléments vides de $\hat{M}^{[b]}$ avec des 1



$$\begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\hat{M}^{[a]}$



$$\begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ \hline a & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 \\ b & \boxed{1} & 1 & \boxed{1} & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

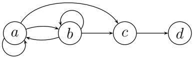
$\hat{M}^{[b]}$

$$\hat{M}^{[a]}[a,b] = \hat{M}^{[a]}[b,c] = 1 \Rightarrow \hat{M}^{[b]}[a,c] = 1$$

$$\hat{M}^{[a]}[a,b] = \hat{M}^{[a]}[b,a] = 1 \Rightarrow \hat{M}^{[b]}[a,a] = 1$$

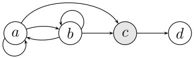
46 / 50

Itération [$\boldsymbol{c}$] : recopie des invariants



$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & 1 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\hat{M}^{[b]}$



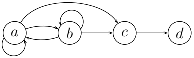
$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ b & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\hat{M}^{[c]}$

Recopie de la ligne et de la colonne c, recopie de la ligne d et des colonnes a et b. Il ne reste pas de 1 à recopier.

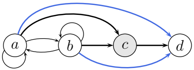
47 / 50

Itération $[c]$: on remplit les éléments vides de $\hat{M}^{[c]}$ avec des 1



$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\hat{M}^{[b]}$



$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 1 & 1 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

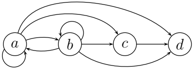
$\hat{M}^{[c]}$

$$\hat{M}^{[b]}[a,c] = \hat{M}^{[b]}[c,d] = 1 \Rightarrow \hat{M}^{[c]}[a,d] = 1$$

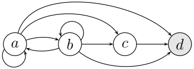
$$\hat{M}^{[b]}[b,c] = \hat{M}^{[b]}[c,d] = 1 \Rightarrow \hat{M}^{[c]}[b,d] = 1$$

48 / 50

Itération [*d*] : recopie des invariants



$$\hat{M}^{[c]} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



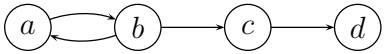
$$\hat{M}^{[d]} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Recopie de la ligne et de la colonne d, recopie des colonnes a, b et c. Tous les éléments sont invariants.

Fin de l'itération et de l'algorithme

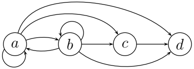
49 / 50

Résultat : la matrice d'adjacence de la fermeture transitive



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

M



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\hat{M}$

50 / 50