Correction de la feuille d'exercices n° 4
Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Les questions ou exercices précédés d'une étoile (*) sont plus difficiles.
Vous ne les traiterez qu'avec l'accord de votre enseignant(e) de TD.

Exercice 1 : *Déterminer la division euclidienne de a par b dans les cas ci-dessous :*

1. $a = 2013; b = 7$.
2. $a = 7; b = 2013$.
3. $a = -2013; b = 7$.
4. $a = -7; b = 2013$.

Solution : Rappelons qu'il s'agit de trouver un couple (q, r) d'entiers tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$.

1. La division euclidienne de a par b s'écrit $2013 = 7 \times 287 + 4$: on a $q = 287$ et $r = 4$ (on a bien $0 \leq r < 7$).
2. La division euclidienne de a par b s'écrit $7 = 2013 \times 0 + 7$: on a $q = 0$ et $r = 7$ (on a bien $0 \leq r < 2013$).
3. La division euclidienne de a par b s'écrit $-2013 = 7 \times (-288) + 3$: on a $q = -288$ et $r = 3$ (on a bien $0 \leq r < 7$).
   En effet, en utilisant la question 1. on obtient :
   $$\begin{aligned} -2013 &= -7 \times 287 - 4 \\ &= 7 \times (-287) - 4 \\ &= 7 \times (-288) + 7 - 4 = 7 \times (-288) + 3. \end{aligned}$$
4. La division euclidienne de a par b s'écrit $-7 = 2013 \times (-1) + 2006$: on a $q = -1$ et $r = 2006$ (on a bien $0 \leq r < 2013$).

Exercice 2 : Solution : On considère la relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$, notée $|$. On rappelle que :
Pour tout couple (x, y) d'entiers : $x \mid y$ s'il existe un entier k tel que $y = kx$.

1. *Donner deux couples vérifiant la relation de divisibilité et deux couples ne la vérifiant pas.*
   $(3, 21)$ et $(15, 30)$ vérifient la relation de divisibilité. $(21, 3)$ et $(12, 14)$ ne la vérifient pas.
2. (a) *Donner la représentation **cartésienne** de la relation de divisibilité restreinte à l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.*

E \ E	1	2	3	5	6	10	15	30
1	×	×	×	×	×	×	×	×
2		×			×	×		×
3			×		×		×	×
5				×		×	×	×
6					×			×
10						×		×
15							×	×
30								×

(b) *Comment se traduit dans ce tableau la réflexivité de cette relation ? Son antisymétrie ?*
La réflexivité de la relation se traduit par le fait que toutes les cases de la première diagonale sont cochées.
L'antisymétrie se traduit ici par le fait qu'aucune case située en-dessous de cette diagonale n'est cochée. On ne peut donc avoir $x|y$ et $y|x$ lorsque $x \neq y$.

3. *On souhaite étudier si la relation de divisibilité est transitive dans E. En vous appuyant sur sa représentation cartésienne, complétez le tableau ci-dessous en 2 parties, en ne reportant dans les trois colonnes à gauche, que les triplets (x, y, z) tels que $x \mid y$ et $y \mid z$, avec $x \neq 1$. Ecrire alors Vrai ou Faux en-dessous de $x \mid z$, puis en-dessous du connecteur $\rightarrow$.*

x	y	z	$(x \mid y$ ET $y \mid z)$	$\rightarrow$	$x \mid z$	x	y	z	$(x \mid y$ ET $y \mid z)$	$\rightarrow$	$x \mid z$
2	2	2	*V*	*V*	*V*	5	5	10	*V*	*V*	*V*
2	2	6	*V*	*V*	*V*	5	5	15	*V*	*V*	*V*
2	2	10	*V*	*V*	*V*	5	5	30	*V*	*V*	*V*
2	2	30	*V*	*V*	*V*	5	10	10	*V*	*V*	*V*
2	6	6	*V*	*V*	*V*	5	10	30	*V*	*V*	*V*
2	6	30	*V*	*V*	*V*	5	15	15	*V*	*V*	*V*
2	10	10	*V*	*V*	*V*	5	15	30	*V*	*V*	*V*
2	10	30	*V*	*V*	*V*	5	30	30	*V*	*V*	*V*
2	30	30	*V*	*V*	*V*	6	6	6	*V*	*V*	*V*
3	3	3	*V*	*V*	*V*	6	6	30	*V*	*V*	*V*
3	3	6	*V*	*V*	*V*	6	30	30	*V*	*V*	*V*
3	3	15	*V*	*V*	*V*	10	10	10	*V*	*V*	*V*
3	3	30	*V*	*V*	*V*	10	10	30	*V*	*V*	*V*
3	6	6	*V*	*V*	*V*	10	30	30	*V*	*V*	*V*
3	6	30	*V*	*V*	*V*	15	15	15	*V*	*V*	*V*
3	15	15	*V*	*V*	*V*	15	15	30	*V*	*V*	*V*
3	15	30	*V*	*V*	*V*	15	30	30	*V*	*V*	*V*
3	30	30	*V*	*V*	*V*	30	30	30	*V*	*V*	*V*
5	5	5	*V*	*V*	*V*						

On constate que pour tout $(x, y, z) \in E^3$, si $x \mid y$ et $y \mid z$, alors $x \mid z$. La divisibilité dans E est donc transitive.

4. *D'après les questions 2. et 3., que peut-on dire de la relation de divisibilité dans E ?*
La divisibilité dans E est réflexive, transitive et antisymétrique. C'est donc une relation d'ordre.

Exercice 3 :

1. *Dresser la liste des diviseurs positifs des entiers* 36*,* 49 *et* 126 *sans outil de calcul.*
2. *Combien d'entiers compris entre* -50 *et* 75 *le nombre* 17 *divise-t-il ?*
3. *Soit n un entier. On pose $a = 2n + 7$ et $b = n + 1$.*
   (a) *Calculer $a - 2b$*
   (b) *Soit d un entier divisant a et divisant b. Quelles sont les valeurs possibles de d ?*

Solution :

1. On a :
   $36 = 1 \times 36, \quad 36 = 2 \times 18, \quad 36 = 3 \times 12, \quad 36 = 4 \times 9 \quad \text{et} \quad 36 = 6 \times 6$
   On a écrit 36 de toutes les façons possibles comme produit de 2 entiers positifs (à l'ordre des facteurs près).
   En respectant les notations du cours, on obtient les ensembles suivants :
$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(36) &= \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \\ \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(49) &= \{1, 7, 49\} \\ \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(126) &= \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126\} \end{aligned}$$
2. Les entiers compris entre -50 et 75 et qui sont divisibles par 17 sont $-34, -17, 0, 17, 34, 51$ et 68 (ne pas oublier 0). Il y en a donc sept en tout.
3. (a) On calcule $a - 2b = 2n + 7 - 2(n+1) = 5$.
   (b) Soit $d \in \mathbb{Z}$ un entier divisant a et b. Alors d doit diviser toute *combinaison linéaire à coefficients entiers* de d d'après le cours, c'est-à-dire que, pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$, $d \mid xa+yb$. En choisissant $(x, y) = (1, -2)$, on obtient que $d \mid a - 2b$, soit $d \mid 5$ d'après la question précédente. Or 5 n'a pour diviseurs entiers que $-5, -1, 1, 5$. Par conséquent d ne peut prendre que les valeurs $-5, -1, 1, 5$.
   Remarque : Attention, selon la valeur de n, l'entier d ne prend pas nécessairement toutes ces valeurs ! Par exemple, si $n = 1$, alors $a = 9$ et $b = 2$ et dans ce cas les seuls diviseurs communs de a et b sont -1 et 1, en revanche 5 n'est pas un diviseur commun puisque $5 \nmid 9$. On dit dans ce cas que a et b sont *premiers entre eux*.

Exercice 4 : *Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants :*

$$720, \ 2\,860, \ 8\,040, \ 1\,323.$$

Solution :

1. On procède comme en cours :
$$\begin{array}{r|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$
   Ainsi, $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$.
2. On procède comme en cours :
$$\begin{array}{r|l} 2\,860 & 2 \\ 1\,430 & 2 \\ 715 & 5 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$
   Ainsi, $2\,860 = 2^2 \times 5 \times 11 \times 13$.

3. On procède comme en cours :

$$\begin{array}{r|l} 8\,040 & 2 \\ 4\,020 & 2 \\ 2\,010 & 2 \\ 1\,005 & 3 \\ 335 & 5 \\ 67 & 67 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi, $8\,040 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 67$.

4. On procède comme en cours :

$$\begin{array}{r|l} 1\,323 & 3 \\ 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi, $1\,323 = 3^3 \times 7^2$.

Exercice 5 : *Donner le nombre de diviseurs positifs de chacun des entiers*

$$a = 3^2 \times 5^7, \qquad b = 2 \times 11^3, \qquad \textit{et} \qquad c = 2^3 \times 5^5 \times 11 \times 17^{10} \times 21^5.$$

Solution : D'après le cours, si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ est la décomposition en produit de facteurs premiers de n, avec $p_1, \ldots, p_r$ premiers et $\alpha_i \in \mathbb{N}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, alors le nombre d'entiers naturels diviseurs de n est :

$$\mathrm{card}(\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(n)) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_r).$$

1. Ici $a = 3^2 \times 5^7$ est la décomposition en produit de facteurs premiers de a, par conséquent la formule rappelée ci-dessus implique que

$$\mathrm{card}(\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(a)) = (1 + 2) \cdot (1 + 7) = 3 \cdot 8 = 24.$$

2. Ici $b = 2 \times 11^3$ est la décomposition en produit de facteurs premiers de b, par conséquent la formule rappelée ci-dessus implique que

$$\mathrm{card}(\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(b)) = (1 + 1) \cdot (1 + 3) = 2 \cdot 4 = 8.$$

3. Attention, $c = 2^3 \times 5^5 \times 11 \times 17^{10} \times 21^5$ n'est pas la décomposition en produit de facteurs premiers de c ! En effet $21 = 3 \times 7$, si bien que

$$c = 2^3 \times 5^5 \times 11 \times 17^{10} \times (3 \times 7)^5 = 2^3 \times 3^5 \times 5^5 \times 7^5 \times 11 \times 17^{10}.$$

Comme $c = 2^3 \times 3^5 \times 5^5 \times 7^5 \times 11 \times 17^{10}$ est la décomposition en produit de facteurs premiers de c, la formule rappelée ci-dessus implique que

$$\mathrm{card}(\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(c)) = (1 + 3) \cdot (1 + 5) \cdot (1 + 5) \cdot (1 + 5) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 10) = 19\,008.$$

Exercice 6 :

1. *Déterminer le nombre de diviseurs positifs de* 210 *et* 910 *puis tous leurs diviseurs positifs.*
2. *Calculer le PGCD de* 210 *et* 910.

Solution :

1. Les décompositions en produits de facteurs premiers de 210 et de 910 sont les suivantes :

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \text{Ainsi, } 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7. \qquad \begin{array}{r|l} 910 & 2 \\ 455 & 5 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \quad \text{Ainsi, } 910 = 2 \times 5 \times 7 \times 13.$$

   Par conséquent, d'après la formule rappelée ci-dessus

$$\begin{aligned} \operatorname{card}(\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(210)) &= (1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 16 \\ \operatorname{card}(\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(910)) &= (1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 16 \end{aligned}$$

   Pour déterminer les diviseurs positifs de 210 et 910 explicitement et sans se tromper, une méthode est également à disposition dans le cours. On considère le produit P suivant, basé sur la décomposition en produit de facteurs premiers de 210 ci-dessus, et on développe P :

$$\begin{aligned} P &= (1+2)\cdot(1+3)\cdot(1+5)\cdot(1+7) \\ &= (1+3+2+2\cdot 3)\cdot(1+7+5+5\cdot 7) \\ &= 1+3+2+2\cdot 3+7+3\cdot 7+2\cdot 7+2\cdot 3\cdot 7+5+3\cdot 5+2\cdot 5+2\cdot 3\cdot 5 \\ &\quad +5\cdot 7+3\cdot 5\cdot 7+2\cdot 5\cdot 7+2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \\ &= 1+3+2+6+7+21+14+42+5+15+10+30 \\ &\quad +35+105+70+210. \end{aligned}$$

   Les diviseurs positifs de 210 sont alors les termes de la somme obtenue. Par conséquent,

$$\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(210) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}.$$

   On vérifie bien au passage qu'on a exactement 16 diviseurs positifs de 210, conformément à ce qu'on avait calculé ci-dessus.
   De même, on forme le produit P pour 910 et on le développe :

$$\begin{aligned} P &= (1+2)\cdot(1+5)\cdot(1+7)\cdot(1+13) \\ &= (1+5+2+2\cdot 5)\cdot(1+13+7+7\cdot 13) \\ &= 1+13+7+7\cdot 13+5+5\cdot 13+5\cdot 7+5\cdot 7\cdot 13+2+2\cdot 13+2\cdot 7+2\cdot 7\cdot 13 \\ &\quad +2\cdot 5+2\cdot 5\cdot 13+2\cdot 5\cdot 7+2\cdot 5\cdot 7\cdot 13 \\ &= 1+13+7+91+5+65+35+455+2+26+14+182 \\ &\quad +10+130+70+910, \end{aligned}$$

   par conséquent

$$\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(910) = \{1, 2, 5, 7, 10, 13, 14, 26, 35, 65, 70, 91, 130, 182, 455, 910\}.$$

2. Il y a deux façons de faire : soit on détermine tous les diviseurs communs positifs de 210 et 910 d'après les listes de leurs diviseurs positifs établies dans la question précédente, auquel cas on constate que 70 est le plus grand apparaissant dans les deux listes ; soit on utilise leurs décompositions en produits de facteurs premiers :

$$\operatorname{pgcd}(210, 910) = 2 \times 5 \times 7 = 70.$$

   Dans les deux cas, on trouve $\operatorname{pgcd}(210, 910) = 70$.

Exercice 7 : (*)*Déterminer tous les entiers n de 4 chiffres tels que les restes des divisions euclidiennes de* 21 685 *et* 33 509 *par n soient respectivement* 37 *et* 53.

Solution : Écrivons la division euclidienne de 21 685 par n : il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que $21\,685 = n \cdot q + r$, avec $0 \leq r < n$. D'après l'énoncé, $r = 37$.

De même, l'énoncé implique l'existence d'un unique couple (q', r') d'entiers tel que
$33\,509 = n \cdot q' + r'$, avec $0 \leq r' < n$; et d'après l'énoncé, $r' = 53$.
On obtient ainsi les deux identités suivantes d'inconnues n, q, q' :

$$\begin{array}{rcl} n \cdot q & = & 21\,685 - 37 = 21\,648 \\ n \cdot q' & = & 33\,509 - 53 = 33\,456 \end{array}$$

Ces deux identités signifient que n est un *diviseur commun* des entiers $a = 21\,648$ et $b = 33\,456$. Afin de déterminer les diviseurs communs possibles de a et b, décomposons-les en produits de facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 21\,648 & 2 \\ 10\,824 & 2 \\ 5\,412 & 2 \\ 2\,706 & 2 \\ 1\,353 & 3 \\ 451 & 11 \\ 41 & 41 \\ 1 & \end{array} \quad \text{Ainsi, } 21\,648 = 2^4 \times 3 \times 11 \times 41. \qquad \begin{array}{r|l} 33\,456 & 2 \\ 16\,728 & 2 \\ 8\,364 & 2 \\ 4\,182 & 2 \\ 2\,091 & 3 \\ 697 & 17 \\ 41 & 41 \\ 1 & \end{array} \quad \text{Ainsi, } 33\,456 = 2^4 \times 3 \times 17 \times 41.$$

D'après le cours, le plus grand diviseur commun positif de a et b est

$$\mathrm{pgcd}(a, b) = 2^4 \times 3 \times 41 = 1968.$$

Les entiers n cherchés sont donc des diviseurs positifs de 1968. Or 1968 a 4 chiffres et le second diviseur commun le plus grand de a et b serait $\frac{1968}{2} = 984$, qui est un nombre à 3 chiffres. Cela implique que le seul diviseur commun positif de a et b ayant 4 chiffres est 1968, par conséquent il n'existe qu'un seul n respectant les données de l'énoncé : c'est $n = 1968$.

Exercice 8 : (*)*Déterminer le plus petit nombre entier naturel qui admette* 15 *diviseurs positifs.*

Solution : Soit $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier naturel n cherché.
Alors d'après le cours le nombre de diviseurs positifs de n est

$$\mathrm{card}(\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(n)) = (1 + \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (1 + \alpha_r).$$

D'après l'énoncé, on a ainsi $(1 + \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (1 + \alpha_r) = 15$.

1^{er} **cas** : $15 = 3 \times 5 = (1 + 2)(1 + 4)$ On a alors r=2.

Alors $n = p_1^2 p_2^4$ ou $n = p_1^4 p_2^2$, avec $p_1 < p_2$.
Comme on cherche n entier naturel le plus petit possible, on a $p_1 = 2$ et $p_2 = 3$.

Alors $n = 2^2 \times 3^4 = 4 \times 81 = 324$, ou $n = 2^4 \times 3^2 = 16 \times 9 = 144$.

2**ème** **cas** : $15 = (1 + 14)$ On a alors r=1.

Alors $n = p_1^{14} = 16\ 384$.

Comme 144 est le plus petit des trois entiers calculés ci-dessus, on peut donc conclure que l'entier cherché est $n = 144$.

Exercice 9 : (*)*Déterminer le plus grand entier de deux chiffres qui admette* 6 *diviseurs positifs.*

Solution : Si on applique la même approche que celle ci-dessus et en tenant compte du fait que $6 = 2 \times 3$ est la décomposition en produit de facteurs premiers de 6, on n'a que deux possibilités pour l'entier cherché n décomposé comme ci-dessus en produit de facteurs premiers :
soit $n = p_1^5$ avec p_1 premier, soit $n = p_1 \cdot p_2^2$ avec p_1 et p_2 entiers premiers distincts.

Dans le premier cas, le seul entier de deux chiffres s'écrivant sous la forme p_1^5 avec p_1 premier est $2^5 = 32$.

Dans le second cas, il faut tester différentes combinaisons pour (p_1, p_2) en cherchant celle qui donne le plus grand nombre positif à deux chiffres.

On trouve après essai $p_1 = 11$ et $p_2 = 3$, avec $n = 11 \times 3^2 = 99$.

Remarquons que 99 est bien le plus grand entier positif à deux chiffres de toute façon, on pouvait donc directement constater après décomposition en produit de facteurs premiers que 99 avait 6 diviseurs positifs !