Feuille d'exercices n° 2
Ensembles

Les questions ou exercices précédés d'une étoile (*) sont plus difficiles. **Vous ne les traiterez qu'avec l'accord de votre enseignant(e) de TD.**

Exercice 1 : Décrire en extension :

1. $A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x^2 \leq 10\}$
2. $B = \{x^2 \ / \ x \in \mathbb{N} \text{ et } x \leq 10\}$
3. $C = \{x^2 \ / \ x \in \mathbb{N} \text{ et } x^2 \leq 10\}$
4. $D = \{x \in \mathbb{Z} / \ x^2 \leq 10\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{N} / \ 5 \leq x^2 \leq 8\}$

Exercice 2 : Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$, et les trois parties suivantes de E :
$A = \{a, b, e, f, j, l, m\}$, $B = \{f, g, h, i, m, n\}$ et $C = \{d, e, f, h, j, k, l, n\}$.

1. Ecrire en extension les ensembles suivants : $A \cup B$; $A \cap B$; $A \cap C$; $B \cap C$; $(A \cap B) \cap C$; $\complement_E(A)$.
2. Représenter ces ensembles E, A, B , C par un diagramme.
3. Ecrire en extension les ensembles suivants : $A - B$; $A \Delta B$

Exercice 3 :

1. Compléter cette définition : $E \subset F$ si et seulement si : ? $x \in E, x ? F$.
2. Comment lit-on cette définition ainsi complétée ?
3. On rappelle la définition suivante : $E = F$ si et seulement si $\begin{cases} \forall x \in E, x \in F \\ \forall x \in F, x \in E \end{cases}$
   En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $E = F$ en utilisant l'inclusion.
   Nb. **Le théorème obtenu s'appelle le théorème de la double inclusion**.
4. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $E \not\subset F$ en utilisant le symbole d'appartenance.
5. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $E \neq F$ en utilisant le symbole d'appartenance.

Exercice 4 : Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

1. Exprimer $A - B$ de différentes façon à l'aide de l'intersection, la réunion et le passage au complément.
2. Même question avec $A \Delta B$.

Exercice 5 : Dans une classe de 25 élèves, 18 pratiquent un sport en dehors du collège, 10 jouent d'un instrument de musique et 7 ont à la fois une activité sportive et une activité musicale. Modéliser l'énoncé à l'aide d'ensembles (on pourra faire un diagramme de Venn) puis justifiez vos réponses aux questions suivantes en vous appuyant sur le cours.

1. Combien d'élèves pratiquent l'une ou l'autre de ces activités ?
2. Combien d'élèves ne pratiquent aucune de ces deux activités ?
3. Combien d'élèves pratiquent du sport mais ne jouent pas d'un instrument de musique ?
4. Combien d'élèves pratiquent une et une seule des deux activités ?

Exercice 6 :

1. Soit $A = \{a, b, c\}$. Construire l'arbre des parties de A et donner $\mathcal{P}(A)$.
2. Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$. Comparer A et E puis $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(E)$.
3. (*) Démontrer pour A et E quelconques l'équivalence :

$$A \subset E \iff \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(E)$$

4. (*) Déterminer $\mathcal{P}(\emptyset)$, puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ et enfin $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$.

Exercice 7 :

1. Un club de football dispose de 21 joueurs tous polyvalents. Combien d'équipes de 11 joueurs peut-il former ?
2. On suppose maintenant que seulement 3 des 21 joueurs peuvent être gardien de but. Quel est alors le nombre d'équipes possibles ?

Exercice 8 :

1. Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Construire le tableau cartésien de $A \times B$ et donner cet ensemble en extension.
2. Même question avec $B \times A$ puis avec le carré cartésien A^2.

Exercice 9 : On note $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ l'ensemble des chiffres de 1 à 9. Justifiez vos réponses aux questions suivantes en vous appuyant sur le cours.

1. Combien d'entiers naturels de 4 chiffres peut-on former avec les chiffres de 1 à 9 ?
2. Parmi ces entiers de 4 chiffres,
   (a) Combien commencent par 2 ?
   (b) Combien sont pairs ?

Exercice 10 :

1. Un mot de passe doit être constitué de 4 chiffres (de 0 à 9) suivis de 2 lettres majuscules. Dénombrer les mots de passe possibles.
2. On suppose maintenant que les 4 chiffres doivent être distincts et que les deux lettres doivent être distinctes. Combien de mots de passe peut-on former ?

Exercice 11 :

1. Avant le 15 avril 2009 les plaques d'immatriculation de véhicules étaient composées de 3 chiffres suivis de 3 lettres, elles-mêmes suivies du numéro de département.
   (a) Déterminer le nombre d'immatriculations différentes respectant ce format en Moselle.
   (b) Combien ont un premier chiffre non nul ?
   (c) Combien ne contiennent pas le chiffre 0 ?
2. Depuis le 15 avril 2009 les plaques d'immatriculation sont composées de 2 lettres suivies de 3 chiffres, eux-mêmes suivis de 2 lettres (sur le modèle AA-111-AA).
   (a) Déterminer le nombre d'immatriculations différentes respectant ce format.
   (b) (*)En réalité on exclut les lettres I, O et U en raison de leur ressemblance avec les chiffres 0 et 1 et la lettre V. De plus les séries SS et WW sont exclues du bloc de gauche et la série SS est exclue du bloc de droite. Enfin, les séries démarrent à 001.
   Déterminer alors le nombre d'immatriculations différentes.

Exercice 12 : (*)

1. Soient $A = \{n \in \mathbb{N} / \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} / \exists p \in \mathbb{N}, n = 6p\}$. Démontrer que l'un de ces deux ensembles (lequel ?) est inclus dans l'autre.
2. Soit $A = \{n \in \mathbb{N} / \exists p \in \mathbb{N}, n = 5p + 3\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} / \exists p \in \mathbb{N}, n = 10p + 3\}$.
   Comparer ces deux ensembles.

Exercice 13 : (*)

1. Un axiome de la théorie des ensembles énonce : Pour tout x, x n'appartient pas à x. (c.-à-d. $\forall x,\ x \notin x$). En déduire que pour tout a on a : $a \neq \{a\}$.
2. Démontrer que l'ensemble vide est unique. On pourra raisonner par l'absurde.