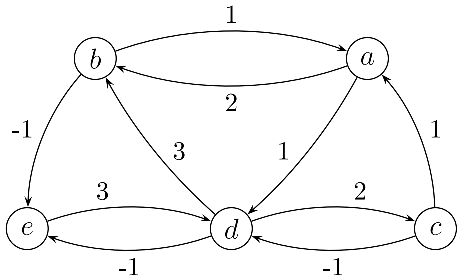
Exercice I

Considérons le graphe G ci-dessous et une a-arborescence représentée par les tables Π (table des potentiels) et $\mathcal{A}$ (table des pères) :

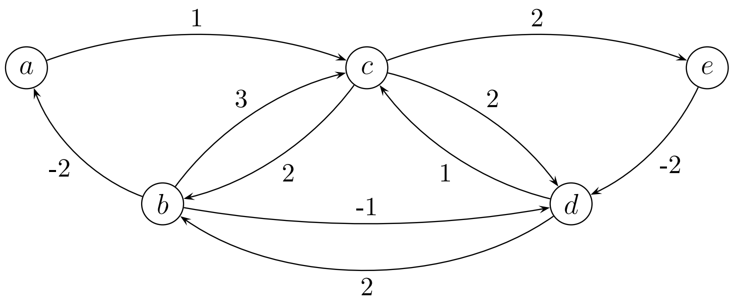


s	a	b	c	d	e
$\Pi[s]$	0	2	6	4	1
$\mathcal{A}[s]$	$\varnothing$	a	d	e	b

1. Dire pourquoi l'arborescence représentée par les tables Π et $\mathcal{A}$ n'est pas une a-arborescence de chemins de poids minimum.
2. Appliquer l'algorithme de base pour détermine une a-arborescence de chemins de poids minimum.
3. Que se passe-t-il si on ajoute un sommet f et les arcs (f, a) et (f, b), tous deux de poids 1 ?

Exercice II

Considérons le graphe G suivant :



Appliquer l'algorithme de Ford pour déterminer :

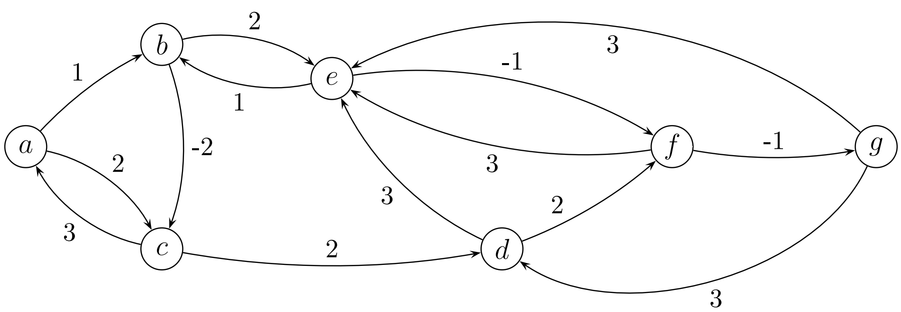
1. une a-arborescence de chemins de poids minimum,
2. une c-arborescence de chemins de poids minimum.

Exercice III

Reprendre le graphe G de l'exercice I en posant $p(a, c) = -1$. Appliquer ensuite l'algorithme de Ford pour rechercher une a-arborescence de chemins de poids minimum.

Exercice IV

Considérons le graphe G suivant :



Appliquer l'algorithme de Ford pour déterminer :

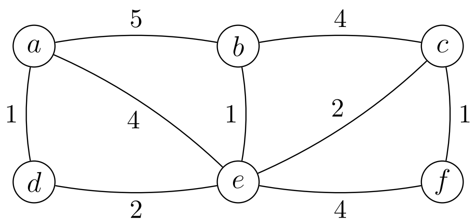
1. une a-arborescence de chemins de poids minimum,
2. une c-arborescence de chemins de poids minimum.

Exercice V

À quelle condition l'algorithme de Ford permet-il de déterminer des chaînes de poids minimum dans un graphe non orienté et simple (sans boucles ni arêtes parallèles) ?

Exercice VI

Considérons le réseau représenté par le graphe non orienté ci-dessous. Les sommets représentent des routeurs et les arêtes représentent les liaisons entre ces routeurs. Le poids d'une arête représente le coût de la liaison (ce coût dépend essentiellement de la bande passante exprimée en bits par secondes).



Un paquet d'informations doit être transmis depuis le routeur a vers chacun des autres routeurs. Comment réaliser cette transmission à moindre coût ?

Algorithme de Ford

Données : Un graphe orienté $G = (S, A, p)$ et un sommet r de G
Résultat : Une r-arborescence de cpm (si elle existe) représentée par les tables Π et $\mathcal{A}$

✎ initialisations
pour tout $s \in S$ **faire**
  $\Pi[s] \leftarrow \infty$; $\mathcal{A}[s] \leftarrow s$
fin pour
$\Pi[r] \leftarrow 0$;$\mathcal{A}[r] \leftarrow \varnothing$
$k \leftarrow 0$

✎ itérations
répéter
  $k \leftarrow k + 1$
  ameliorant $\leftarrow$ **faux**
  ✎ relâchement de tous les arcs
  pour tout $s \in S$ **faire**
    pour tout $x \in V^{+}(s)$ **faire**
      ✎ relâchement de l'arc (s, x)
      si $\Pi[s] + p(s, x) < \Pi[x]$ **alors**
        $\Pi[x] \leftarrow \Pi[s] + p(s, x)$; $\mathcal{A}[x] \leftarrow s$
        ameliorant $\leftarrow$ **vrai**
      fin si
    fin pour
  fin pour
jusqu'à *ameliorant* $=$ **faux** **ou** $k = |S|$ **ou** $\Pi[r] < 0$

✎ conclusion
si non *ameliorant* **alors** ecrire$(\Pi, \mathcal{A})$
sinon ecrire ("le graphe contient des circuits absorbants")