

Feuille d'exercices n° 4

Divisibilité et division euclidienne dans \mathbb{Z}

Les questions ou exercices précédés d'une étoile (*) sont plus difficiles.

Vous ne les traiterez qu'avec l'accord de votre enseignant(e) de TD.

Exercice 1 : Déterminer la division euclidienne de a par b dans les cas ci-dessous :

1. $a = 2013; b = 7$
2. $a = 7; b = 2013$
3. $a = -2013; b = 7$
4. $a = -7; b = 2013$

Exercice 2 : On considère la relation de divisibilité dans \mathbb{Z} , notée $|$. On rappelle que :

Pour tout couple (x, y) d'entiers : $x \mid y$ s'il existe un entier k tel que $y = kx$.

1. Donner deux couples vérifiant la relation de divisibilité et deux couples ne la vérifiant pas.
2. (a) Donner la représentation **cartésienne** de la relation de divisibilité restreinte à l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.
(b) Comment se traduit dans ce tableau la réflexivité de cette relation ? Son antisymétrie ?
3. On souhaite étudier si la relation de divisibilité est transitive dans E . En vous appuyant sur sa représentation cartésienne, complétez le tableau ci-dessous en 2 parties, en ne reportant dans les trois colonnes à gauche, que les triplets (x, y, z) tels que $x \mid y$ et $y \mid z$, avec $x \neq 1$.
Ecrire alors Vrai ou Faux en-dessous de $x \mid z$, puis en-dessous du connecteur \rightarrow .

[illegible]

4. D'après les questions 2. et 3., que peut-on dire de la relation de divisibilité dans E ?

Exercice 3 :

1. Dresser la liste des diviseurs positifs des entiers 36, 49 et 126 sans outil de calcul.
2. Combien d'entiers compris entre -50 et 75 le nombre 17 divise-t-il ?
3. Soit n un entier. On pose $a = 2n + 7$ et $b = n + 1$.
 - (a) Calculer $a - 2b$
 - (b) Soit d un entier divisant a et divisant b . Quelles sont les valeurs possibles de d ?

Exercice 4 : Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants :

720, 2 860, 8 040, 1 323

Exercice 5 : Donner le nombre de diviseurs positifs de chacun des entiers

$$a = 3^2 \times 5^7, \quad b = 2 \times 11^3, \quad \text{et} \quad c = 2^3 \times 5^5 \times 11 \times 17^{10} \times 21^5.$$

Exercice 6 :

1. Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 210 et 910 puis tous leurs diviseurs positifs.
2. Calculer le PGCD de 210 et 910.

Exercice 7 : (*) Déterminer un entier n de 4 chiffres tel que les restes des divisions euclidiennes de 21 685 et 33 509 par n soient respectivement 37 et 53.**Exercice 8 :** (*) Déterminer le plus petit nombre entier naturel qui admet 15 diviseurs positifs.**Exercice 9 :** (*) Déterminer le plus grand entier de deux chiffres qui admet 6 diviseurs positifs.