Exercices corrigés - Logique formelle - Ensembles

Exercice 1 (Cours) :

1. Donner, dans une même table, les tables de vérité des formules $p \to q$, $q \to p$ et $\neg q \to \neg p$.
   (a) En déduire une formule équivalente à $p \to q$.
   (b) Compléter les phrases suivantes :
   $q \to p$ est la $\cdots\cdots$ de $p \to q$.
   $\neg q \to \neg p$ est la $\cdots\cdots$ de $p \to q$.
2. Compléter les phrases suivantes pour obtenir les lois de Morgan :
   (a) $\neg(p \vee q)$ éq ...
   (b) $\neg(p \wedge q)$ éq ...

Exercice 2 : Soient p, q et r trois propositions élémentaires. On considère la formule φ suivante :

$$\varphi : q \wedge (r \to \neg p)$$

1. Donner l'arbre de décomposition de la formule φ.
2. Construire sa table de vérité. *Respecter les conventions adoptées en travaux dirigés pour écrire les interprétations des propositions élémentaires et écrire en-dessous de chaque connecteur logique la valeur de vérité.*
3. Donner les modèles de la formule φ. Cette formule est-elle une tautologie ? une contradiction ? une formule contingente ? Justifiez votre réponse.

Exercice 3 : Traduire en logique symbolique du calcul des propositions les expressions ci-dessous. On nommera p, q , ... les propositions élémentaires dans l'ordre d'apparition dans la phrase et on n'utilisera que les connecteurs suivants : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$.

1. Il ira au cinéma seulement si le concert est annulé.
2. Pour faire connaître ce restaurant il suffit d'en faire de la publicité.
3. Je suis riche mais je ne suis pas heureux.
4. J'achèterai une Ferrari si et seulement si je gagne au loto.
5. Si j'ai cet emploi je pourrai déménager sinon je resterai dans mon studio.
6. Si j'ai cet emploi je devrai m'acheter une voiture et déménager.

Exercice 4 : Ecrire en français la négation des propositions suivantes :

1. Soit je pars en vacances en Italie, soit je pars en Grèce cet été.
2. En général il accepte de négocier et il livre rapidement la marchandise.

Exercice 5 : On considère l'implication suivante α : S'il y a des soldes alors j'irai en ville.

1. Ecrire la réciproque, en français, de cette proposition α.
2. Ecrire la contraposée de α.
3. Je ne suis pas en ville. Y-a-t-il des soldes ? Justifiez votre réponse.
4. Je suis en ville. Y-a-t-il des soldes ? Justifiez votre réponse.

Solutions

Exercice 1 :

1.

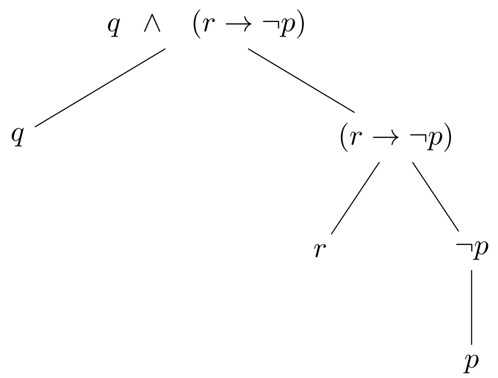
p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\neg q \to \neg p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

   (a) Les formules $p \to q$ et $\neg q \to \neg p$ on la même table de vérité donc elles sont équivalentes.
   (b) $q \to p$ est la **réciproque** de $p \to q$.
   $\neg q \to \neg p$ est la **contraposée** de $p \to q$.

2. Compléter les phrases suivantes pour obtenir les lois de Morgan :
   (a) $\neg(p \vee q)$ éq$\neg p \wedge \neg q$
   (b) $\neg(p \wedge q)$ éq$\neg p \vee \neg q$

Exercice 2 :

1.



2.

	p	q	r	$q \wedge (r \to \neg p)$		
i_1	V	V	V	**F**	F	F
i_2	V	V	F	**V**	V	F
i_3	V	F	V	**F**	F	F
i_4	V	F	F	**F**	V	F
i_5	F	V	V	**V**	V	V
i_6	F	V	F	**V**	V	V
i_7	F	F	V	**F**	V	V
i_8	F	F	F	**F**	V	V

3. $\mathcal{M}(\varphi) = \{i_2, i_5, i_6\}$.
   i_3 est un contre-exemple de φ donc φ n'est pas une tautologie.
   i_2 est un modèle de φ donc φ n'est pas une contradiction.
   C'est donc une formule contingente.

Exercice 3 :

1. Il ira au cinéma seulement si le concert est annulé. $p \to q$
2. Pour faire connaître ce restaurant il suffit d'en faire de la publicité. $q \to p$
3. Je suis riche mais je ne suis pas heureux. $p \wedge \neg q$
4. J'achèterai une Ferrari si et seulement si je gagne au loto. $p \leftrightarrow q$.
5. Si j'ai cet emploi je pourrai déménager sinon je resterai dans mon studio. $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$
6. Si j'ai cet emploi je devrai m'acheter une voiture et déménager. $p \to (q \wedge r)$

Exercice 4 :

1. Je ne pars en vacances ni en Italie ni en Grèce cet été.
2. En général il n'accepte pas de négocier ou il ne livre pas rapidement la marchandise.

Exercice 5 : La proposition α est de la forme $p \to q$.

1. Réciproque, en français, de α :
   Si je vais en ville c'est qu'il y a des soldes. $(q \to p)$
2. Contraposée de α :
   Si je ne vais pas en ville c'est qu'il n'y a pas de soldes. $(\neg q \to \neg p)$
3. Je ne suis pas en ville. Y-a-t-il des soldes ?
   La contraposée "Si je ne vais pas en ville c'est qu'il n'y a pas de soldes." est équivalente à à la proposition α. On peut donc conclure qu'il n'y a pas de soldes.
4. Je suis en ville. Y-a-t-il des soldes ?
   La réciproque "Si je vais en ville c'est qu'il y a des soldes." n'est pas équivalente à la proposition α. On ne peut donc pas conclure s'il y a des soldes ou pas.

Exercices sur les ensembles

Exercice 6 : (Cours)

1. Donner la définition de l'intersection de deux ensembles. Préciser la notation. La représenter sur un diagramme de Venn.
2. Donner la définition de la réunion de deux ensembles et préciser la notation. La représenter sur un diagramme de Venn.
3. Qu'appelle-t-on partie d'un ensemble ? Préciser la notation.
4. Soit A une partie de E. Comment s'appelle l'ensemble noté $\complement_E(A)$?
   Compléter $x \in \complement_E(A) \iff$.

Exercice 7 : On considère l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ et les parties A et B de E définies par : A est l'ensemble des éléments de E qui sont des carrés parfaits et $B = \{x \in E \ / \ 4 \leqslant x^2 \leqslant 110\}$.
Un carré parfait est le carré d'un nombre entier. Exemple : 121 est un carré parfait car $121 = 11^2$.

1. Ecrire en extension les ensembles A et B.
2. Ecrire en extension les ensembles $A \cup B$ et $A \cap B$.
3. Ecrire en extension les ensembles $\complement_E(A)$ et $\complement_E(B)$.
4. Ecrire en extension l'ensemble $\complement_E(A \cup B)$. Ce résultat était-il prévisible, d'après la question 3. ?
5. Ecrire en extension les ensembles $B - A$ et la différence symétrique $A \Delta B$.

Exercice 8 : On considère l' ensemble $A = \{x, y, z\}$ et on note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A.

1. Combien d'éléments possède $\mathcal{P}(A)$? (Citer le résultat de cours utilisé.)
2. Faire l'arbre des parties de A puis donner $\mathcal{P}(A)$ en extension.
3. Compléter avec le symbole $\in$ ou $\subset$:

$$\{y\} \cdots A, \qquad \{x, z\} \cdots \mathcal{P}(A), \qquad x \cdots A, \qquad \{\emptyset, \{y, z\}\} \cdots \mathcal{P}(A).$$

Exercice 9 : Une enquête effectuée auprès de 1 500 personnes (habitants d'une ville) portant sur les jeux d'argent indique que
• 1 182 jouent à la loterie
• 310 vont au casino
• 190 jouent à la loterie et vont au casino
Vous justifierez soigneusement vos réponses aux questions ci-dessous.
Parmi ces 1 500 personnes :

1. Combien de personnes jouent soit à la loterie, soit au casino ?
2. Combien de personnes jouent uniquement au casino ?
3. Combien de personnes ne jouent ni à la loterie ni au casino ?

Exercice 10 : On considère les ensembles $A = \{\ell, m, n, r, s\}$ et $B = \{i, u, e\}$. Donner la représentation cartésienne de $A \times B$.

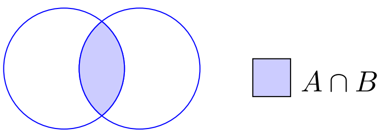
Exercice 11 :

1. On souhaite réaliser un code de 3 chiffres avec les chiffres de 1 à 6. Combien de codes distincts peut-on créer ?
2. On lance 3 dés non truqués, dont les faces sont donc numérotées de 1 à 6. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

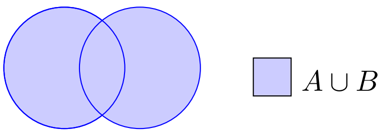
Solutions

Exercice 6 :

1. Intersection de deux ensembles : On appelle **intersection de deux ensembles** A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B. On le note $A \cap B$. Ainsi : $A \cap B = \{x \in E / \ x \in A$ **et** $x \in B\}$.



2. Réunion de deux ensembles : On appelle **réunion de deux ensembles** A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B. On le note $A \cap B$. Ainsi : $A \cup B = \{x \in E / \ x \in A$ **ou** $x \in B\}$.

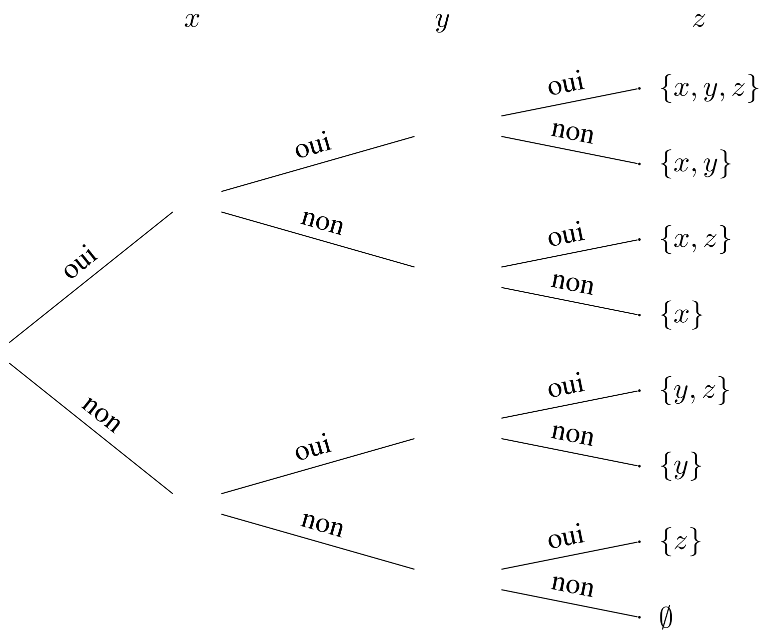


3. E et F deux ensembles. On dit que E est une **partie de** F si tout élément de E est élément de F. On note $E \subset F$. On dit aussi que E est **inclus dans** F ou que E est **un sous-ensemble de** F.
Ainsi : $E \subset F$ si et seulement si : $\forall x \in E, x \in F$.
4. Soit A **une partie d'un ensemble** E. L'ensemble noté $\complement_E(A)$ est appelé **complémentaire de** A **dans** E. C'est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. Ainsi : $x \in \complement_E(A) \iff x \in E$ et $x \notin A$.

Exercice 7 : *On considère l'ensemble* $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ *et les parties* A *et* B *de* E *définies par :* A *est l'ensemble des éléments de* E *qui sont des carrés parfaits et* $B = \{x \in E \ / \ \ 4 \leqslant x^2 \leqslant 110\}$.

1. $A = \{0, 1, 4, 9\}$ et $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
2. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et $A \cap B = \{4, 9\}$.
3. $\complement_E(A) = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}$ et $\complement_E(B) = \{0, 1, 11, 12\}$.
4. $\complement_E(A \cup B) = \{11, 12\}$. On pouvait prévoir ce résultat car $\complement_E(A \cup B) = \complement_E(A) \cap \complement_E(B)$ (Loi de Morgan).
5. $A - B = \{0, 1\}$ et $A \Delta B = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10\}$.

Exercice 8 : Soit $A = \{x, y, z\}$.

1. Théorème : $Card(\mathcal{P}(A)) = 2^{Card(A)}$. Donc $Card(\mathcal{P}(A)) = 2^3 = 8$.
2. 

   Alors $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \ \{x\}, \ \{y\}, \ \{z\}, \ \{x, y\}, \ \{x, z\}, \ \{y, z\}, \ \{x, y, z\}\}$
3. *Compléter avec le symbole* $\in$ *ou* $\subset$:

   $\{y\} \subset A, \qquad \{x, z\} \in \mathcal{P}(A), \qquad x \in A, \qquad \{\emptyset, \{y, z\}\} \subset \mathcal{P}(A).$

Exercice 9 : *Une enquête effectuée auprès de 1 500 personnes (habitants d'une ville) portant sur les jeux d'argent indique que*
• *1 182 jouent à la loterie*
• *310 vont au casino*
• *190 jouent à la loterie et vont au casino*
Vous justifierez soigneusement vos réponses aux questions ci-dessous.
Parmi ces 1 500 personnes :

1. *Combien de personnes jouent soit à la loterie, soit au casino ?*
   Notons A l' ensemble des personnes qui jouent à la loterie et B l' ensemble des personnes qui vont au casino.
   Une personne qui joue à la loterie ou au casino appartient à $A \cup B$.
   Par ailleurs, une personne qui joue à la loterie et va au casino appartient à $A \cap B$.
   Or $Card(A \cup B) = Card\ A + Card\ B - Card(A \cap B) = 1\ 182 + 310 - 190 = 1\ 492 - 190 = 1\ 302$.
   Ainsi 1 302 personnes jouent soit à la loterie, soit au casino.

2. *Combien de personnes jouent uniquement au casino ?*
   Notons E l'ensemble des 1 500 personnes interrogées.
   Une personne qui joue seulement au casino est une personne qui va au casino **et** qui ne joue pas à la loterie. Elle appartient donc à $B \cap \bar{A}$, où $\bar{A}$ désigne $\complement_E(A)$.
   Or $Card(B \cap \bar{A}) = Card\ B - Card(A \cap B) = 310 - 190 = 120.$
   Ainsi 120 personnes vont au casino mais ne jouent pas à la loterie.
3. *Combien de personnes ne jouent ni à la loterie ni au casino ?*
   Une personne qui ne joue ni à la loterie ni au casino appartient $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$, d'après l'une des lois de Morgan.
   Or $Card(\overline{A \cup B}) = Card(E) - Card(A \cup B) = 1\ 500 - 1\ 302 = 198.$
   Ainsi 198 personnes ne jouent ni à la loterie ni au casino.

Exercice 10 :

$A \backslash B$	i	u	e
ℓ	(ℓ,i)	(ℓ,u)	(ℓ,e)
m	(m,i)	(m,u)	(m,e)
n	(n,i)	(n,u)	(n,e)
r	(r,i)	(r,u)	(r,e)
s	(s,i)	(s,u)	(s,e)

Exercice 11 : Notons $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. *On souhaite réaliser un code de 3 chiffres avec les chiffres de 1 à 6. Combien de codes distincts peut-on créer ?*
   Un tel code est un élément de E^3. Or $Card(E^3) = Card(E)^3 = 6^3 = 216$.
   On peut s'aider du schéma ci-dessous pour raisonner correctement :

C_1	C_2	C_3
$6\times$	$6\times$	6

   $= 6^3 = 216$ possibilités. On peut donc réaliser 216 codes différents.
2. *On lance 3 dés non truqués, dont les faces sont donc numérotées de 1 à 6. Combien y a-t-il de résultats possibles ?*
   Un résultat est un élément de E^3, comme dans la question précédente ! Les 3 dés étant distincts, il faut distinguer, par exemple, le résultat (1,6,4) du résultat (6,1,4), même si le lancer a donné globalement les mêmes entiers. Il y a donc 216 résultats possibles.