Chapitre 1 : Suites numériques et récurrence

1 Généralités

On rappelle qu'on note $\mathbb{N}$ l'ensemble de tous les entiers naturels et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels.

Définition 1.1. On appelle *suite numérique* une fonction u d'un intervalle $I \subset \mathbb{N}$ (c'est-à-dire de l'intersection d'un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u\colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n). \end{aligned}$$

En général, on note $u_n = u(n)$ pour tout $n \in I$.

Exemples 1.2.

1. Soit $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $u_n = 2n + 3$. Alors $u_0 =$, $u_1 =$ et $u_2 =$.
2. Soit $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $u_n = 2^n$. Alors $u_0 =$, $u_1 =$, $u_2 =$ et $u_3 =$.
3. Soit $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $u_n = (-1)^n$. Alors $u_0 =$, $u_1 =$, $u_2 =$ et $u_3 =$.
4. Soit $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $u_n = 2n$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des entiers naturels pairs.
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des entiers naturels *premiers*. Alors $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, $u_3 = 5$, $u_4 = 7$, $u_5 =$, $u_6 =$.
6. Soit $u\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $u_n = \frac{1}{n}$. Alors $u_1 =$, $u_2 =$, $u_3 =$ et $u_4 =$.
7. Soit u la suite des entiers naturels à au plus deux chiffres. Alors $u\colon \qquad \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $u_0 = 0,\ \ u_1 = 1,\ \ \ldots\ \ , u_{99} =$.

Vocabulaire et notations :

- On appelle u_n le *terme général* de la suite u. C'est aussi, pour un n fixé, le *terme d'indice* n de la suite.
- La suite u est généralement renotée sous la forme $(u_n)_{n\in I}$.
- Si $I = \mathbb{N}$ ou $I = \{k, k+1, k+2, \ldots\}$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$, alors la suite $(u_n)_{n\in I}$ est dite *infinie*. Sinon, elle est dite *finie*.

Définition 1.3. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction, où $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. Alors f définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemples 1.4.

1. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = -2x + 3$. Alors la suite associée à f a pour terme général $u_n =$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier,

$$u_0 = \qquad, u_1 = \qquad, u_2 = \qquad, u_3 =$$

2. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2 + 3$. Alors la suite associée à f a pour terme général $u_n =$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier,

$$u_0 = \qquad, u_1 = \qquad, u_2 = \qquad, u_3 =$$

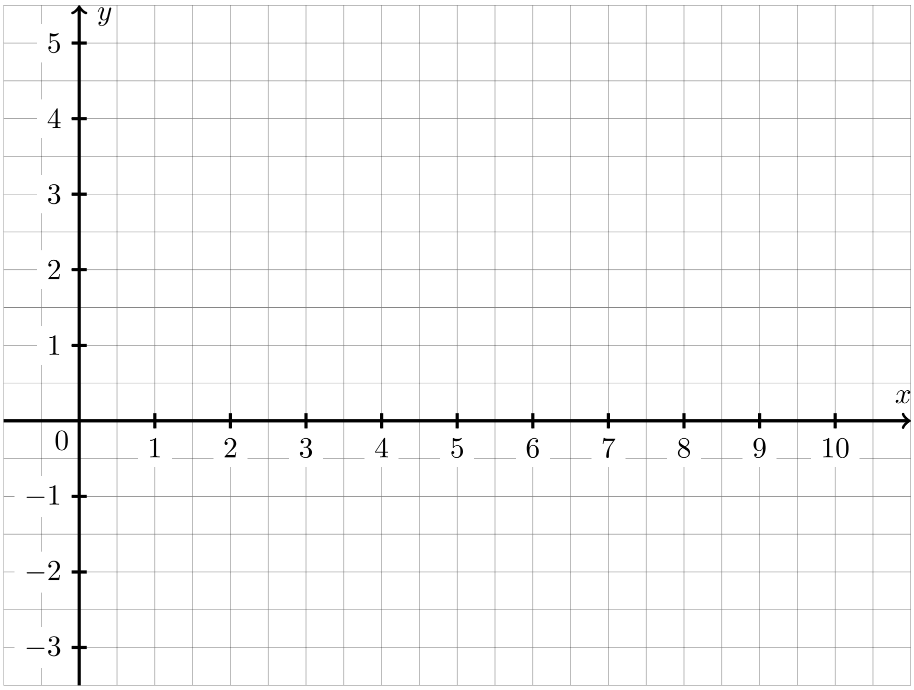
Attention : Plusieurs fonctions peuvent définir la même suite. Par exemple, considérons $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x\cos(2\pi x)$. Alors, pour tout entier naturel n, $f(n) =$ et $g(n) =$ car $\cos(2\pi n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $f(n) = g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite, f et g définissent la même suite de terme général $u_n =$.

2 Représentation graphique d'une suite

On distingue plusieurs représentations graphiques possibles d'une suite numérique.

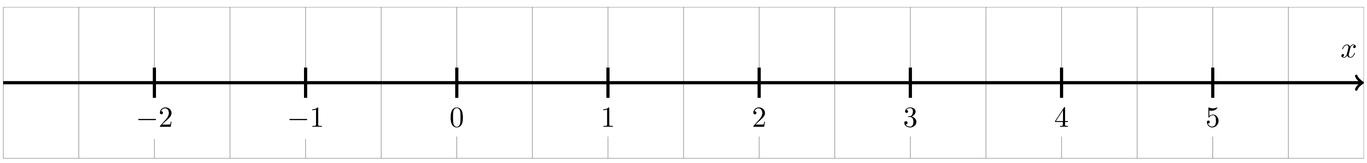
2.1 Comme fonction de $I \subset \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

Considérons par exemple une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 = 3{,}5$, $u_1 = 2$, $u_2 = 5$, $u_3 = -2$, $u_4 = 4$, $u_5 = 2$, $u_6 = -2{,}5$, $u_7 = 4{,}5$, $u_8 = 0$, $u_9 = 3$ et $u_{10} = 4$. On représente chaque terme u_n de la suite par un point P_n d'abscisse n et d'ordonnée u_n.



2.2 Représentation sur un seul axe

Dans l'exemple précédent,



Notons qu'un point peut représenter *plusieurs* termes de la suite.

3 Suites définies par récurrence

Définition 3.1. Une suite numérique est *définie par récurrence* lorsqu'elle est définie par la donnée

- de son premier terme u_0 ou u_1,
- de u_{n+1} en fonction de u_n,

ou bien par la donnée

- de ses premiers termes,
- d'un terme en fonction d'un certain nombre de termes précédents.

Exemples 3.2.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = 3u_n + 4 \end{cases}$. Alors $u_1 =$, $u_2 =$ et $u_3 =$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = -1 \\ u_{n+1} & = 2u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$. Alors $u_1 =$, $u_2 =$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite (appelée *suite de Fibonacci*) définie par $\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_1 & = 1 \\ u_{n+2} & = u_{n+1} + u_n \end{cases}$.

   Alors $u_2 =$, $u_3 =$, $u_4 =$, $u_5 =$, $u_6 =$, $u_7 =$.

Remarque 3.3. Dans les exemples 1 et 2 ci-dessus, on peut mettre u_{n+1} sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour une certaine fonction f : dans l'exemple 1, si $f(x) = 3x + 4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $u_{n+1} = 3u_n + 4 = f(u_n)$ et dans l'exemple 2, si $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$, alors de même $u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{u_n} = f(u_n)$. De manière plus générale, si $f\colon A \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}$, alors pour tout $a \in A$, le schéma

$$\begin{cases} u_0 & = a \\ u_{n+1} & = f(u_n) \end{cases}$$

définit une suite par récurrence... *à condition que* la suite ne quitte jamais le domaine de définition de f !

Exemple 3.4. Soit $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$. Alors f est définie sur puisque $2x - 4 = 0 \iff x =$. Voyons maintenant si le schéma

$$\begin{cases} u_0 & = \frac{13}{5} \\ u_{n+1} & = f(u_n) = \frac{u_n+1}{2u_n-4} \end{cases}$$

définit bien une suite par récurrence. Remarquons déjà que u_0 est dans le domaine de définition de f. Calculons maintenant $u_1 = \frac{u_0+1}{2u_0-4} = \frac{\frac{13}{5}+1}{2\times\frac{13}{5}-4} = \frac{\frac{18}{5}}{\frac{6}{5}} = 3$ et $u_2 = \frac{u_1+1}{2u_1-4} = \frac{3+1}{2\times3-4} = \frac{4}{2} = 2$. Or $f(2)$ n'est pas défini, par conséquent $u_3 = f(u_2)$ ne l'est pas non plus : le schéma ci-dessus ne définit donc pas de suite par récurrence.

Théorème 3.5. *Soit $f\colon A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}$. Si $f(A) \subset A$, c'est-à-dire $f(x) \in A$ pour tout $x \in A$, alors pour tout $a \in A$, le schéma*

$$\begin{cases} u_0 & = a \\ u_{n+1} & = f(u_n) \end{cases}$$

définit une suite par récurrence.

4 Sens de variation d'une suite

Définition 4.1. Une suite numérique $(u_n)_{n\in I}$ est dite

- *croissante* si et seulement si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in I$,
- *décroissante* si et seulement si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in I$,
- *constante* si et seulement si $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in I$.

Ainsi, une suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si et seulement si chaque terme est supérieur ou égal au terme précédent ; et elle est décroissante si et seulement si chaque terme est inférieur ou égal au terme précédent.

Exemples 4.2.

1. La suite des entiers naturels pairs (définie par $u_n = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) est croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2(n+1) = 2n+2 > 2n$, c'est-à-dire que $u_{n+1} > u_n$, en particulier $u_{n+1} \geq u_n$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$ est décroissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $n+1 > n$, $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, c'est-à-dire que $u_{n+1} < u_n$, en particulier $u_{n+1} \leq u_n$.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \cos(2\pi n)$ est constante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(2\pi n) = 1$ c'est-à-dire que $u_n = 1$.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^3 - 12n + 1$ vérifie $u_0 = 1$, $u_1 = 1 - 12 + 1 = -10$ et $u_2 = 8 - 24 + 1 = -15$, si bien que $u_0 > u_1 > u_2$; par contre, $u_3 = 27 - 36 + 1 = -8$, $u_4 = 64-48+1 = 17$ et $u_5 = 125-60+1 = 66$, si bien que $u_3 < u_4 < u_5$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est *ni croissante ni décroissante*. On peut montrer qu'elle est croissante à partir du rang 2.

Théorème 4.3. *Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est*

(a) croissante *si et seulement si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in I$,*

(b) décroissante *si et seulement si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \in I$,*

(c) constante *si et seulement si $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout $n \in I$.*

Exemples 4.4.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = -2n + 3$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 3 - (-2n+3) = -2n - 2 + 3 + 2n - 3 = -2$. Puisque $-2 < 0$, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n^2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = (n+1-n)(n+1+n) = 2n+1$. Or $2n+1 > 0$, par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Définition 4.5. Une suite qui est croissante ou décroissante est dite *monotone*. Une suite qui n'est ni croissante ni décroissante est tout simplement appelée *non monotone*.

Exemple 4.6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$ n'est pas monotone : en effet, $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $u_2 = 1$, si bien que $u_0 > u_1$ et $u_1 < u_2$. La suite prend alternativement les valeurs -1 et 1.

Théorème 4.7. *Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite à termes* strictement positifs*, c'est-à-dire que $u_n > 0$ pour tout $n \in I$. Alors $(u_n)_{n\in I}$ est*

(a) croissante *si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout $n \in I$,*

(b) décroissante *si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ pour tout $n \in I$,*

(c) constante *si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ pour tout $n \in I$.*

Exemples 4.8.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = 3^n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3\times 3^n}{3^n} = 3$. Puisque $3 > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{2}{3}$. Puisque $\frac{2}{3} < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Théorème 4.9. *Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

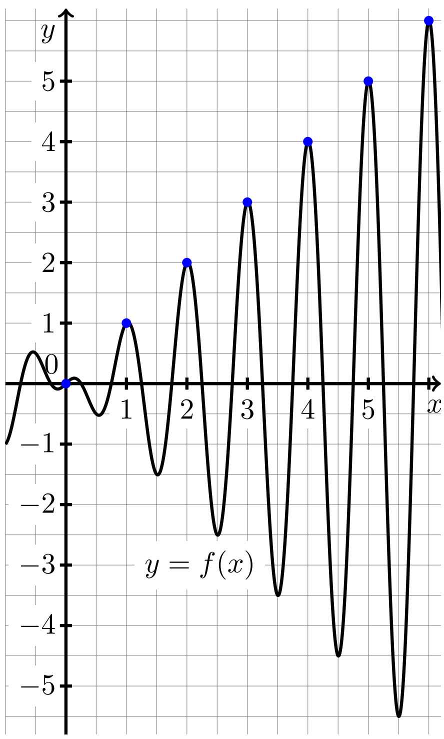
(a) Si f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(b) Si f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exemples 4.10.

1. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < 0$. Alors f est décroissante, si bien que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n = f(n) = an + b$ est aussi décroissante.
2. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Alors f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, si bien que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n = f(n) = n^2$ est aussi croissante.

Attention : La réciproque du théorème 4.9 est fausse ! Considérons par exemple la fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\cos(2\pi x)$. Alors f n'est ni croissante, ni décroissante sur $\mathbb{R}_+$, pourtant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = f(n) =$ est, elle, croissante.



5 Suites majorées, minorées et bornées

Définition 5.1. Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique.

(a) On dit que $(u_n)_{n\in I}$ est *majorée* si et seulement si il existe un nombre réel M tel que, pour tout $n \in I$, $u_n \leq M$. Dans ce cas, le nombre réel M est appelé *majorant* de la suite $(u_n)_{n\in I}$.

(b) On dit que $(u_n)_{n\in I}$ est *minorée* si et seulement si il existe un nombre réel m tel que, pour tout $n \in I$, $m \leq u_n$. Dans ce cas, le nombre réel m est appelé *minorant* de la suite $(u_n)_{n\in I}$.

(c) On dit que $(u_n)_{n\in I}$ est *bornée* si et seulement si $(u_n)_{n\in I}$ est à la fois minorée et majorée.

Il faut remarquer que, si une suite $(u_n)_{n\in I}$ admet un majorant M, alors ce majorant *ne dépend pas* de n ; il en va de même si $(u_n)_{n\in I}$ admet un minorant m.

Exemples 5.2.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$. Puisque $\frac{1}{n} \leq 1$ pour tout $n \geq 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1. De plus, $\frac{1}{n} \geq 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0.
2. De façon plus générale, toute suite positive est minorée par 0 et toute suite négative est majorée par 0.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \cos(n)$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : en effet, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si bien que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par -1 et majorée par 1.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$, où $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. On peut montrer (cf. tableau de variations de f ci-dessous) que la fonction f est croissante, ce qui implique que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{3}$ $\nearrow$	2

   Puisque $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$. Mais, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on en déduit que $u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2. D'autre part, d'après le tableau de variations de f ci-dessus, $\frac{2n+1}{n+3} \geq \frac{1}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{1}{3}$.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = -\sqrt{n}$. Puisque $-\sqrt{n} \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 0. Par contre, puisque $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, si bien que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée.

Théorème 5.3. *Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique.*

1. Si $(u_n)_{n\in I}$ converge, alors $(u_n)_{n\in I}$ est bornée.

2. (a) Si $(u_n)_{n\in I}$ est croissante et majorée, alors $(u_n)_{n\in I}$ converge.

(b) Si $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante et minorée, alors $(u_n)_{n\in I}$ converge.

Attention au fait que la réciproque de l'affirmation 1 du théorème 5.3 est fausse en général : par exemple, la suite de terme général $(-1)^n$ a beau être bornée, elle n'est pas convergente.

6 Le principe de récurrence

De nombreuses propriétés portent sur les nombres entiers. Par exemple : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, ou encore $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.

Certaines de ces propriétés ne sont pas démontrables directement. On peut alors faire appel au *principe de récurrence* pour les prouver. Soit à démontrer : "*Pour tout entier naturel n, n vérifie la propriété $\mathcal{P}$*", ce que l'on note aussi : "$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie". Il suffit alors de prouver la proposition suivante :

Proposition 6.1. *Supposons que*
(a) l'entier 0 vérifie la propriété $\mathcal{P}$ et
(b) pour tout entier naturel k, si k vérifie $\mathcal{P}$, alors $k+1$ vérifie $\mathcal{P}$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, n vérifie $\mathcal{P}$, ce qui peut se réécrire "$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie".

Remarque 6.2. L'hypothèse "$\mathcal{P}(k)$ *est vraie*" est appelée **hypothèse de récurrence**.

Exemple 6.3. Soit à démontrer la propriété $\mathcal{P}$: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Ainsi, $\mathcal{P}(n)$ est la propriété "$0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$", ce que l'on peut noter $A(n) = B(n)$, où $A(n) = 0+1+2+\ldots+n$ et $B(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

(a) **Est-ce que $\mathcal{P}(0)$ est vraie ?** On calcule et on trouve $A(0) = 0$ ainsi que $B(0) = 0$, en particulier $A(0) = B(0)$. Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

(b) **Hypothèse de récurrence** : Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire tel que $A(k) = B(k)$. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $A(k+1) = B(k+1)$. On part de $A(k+1)$ et on utilise l'hypothèse de récurrence pour transformer l'expression et aboutir à $B(k+1)$:

$$\begin{aligned}
A(k+1) &= \underbrace{0+1+2+\ldots+k}_{A(k)} + k+1 \\
&= B(k)+k+1 \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + k+1 \\
&= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) \qquad \text{avec } \frac{k}{2}+1 = \frac{k+2}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= B(k+1).
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

(c) **Conclusion** : La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie et, si pour un entier k, $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(k+1)$ aussi. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Remarques 6.4.

1. Il est fondamental de démontrer que la propriété est vraie pour $n = 0$ ou pour le premier rang concerné. Par exemple, considérons la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$n = n+1$". Cette propriété est bien sûr fausse, en particulier pour $n = 0$. Pourtant on démontre aisément que, si un entier k vérifie $\mathcal{P}$, alors $k+1$ vérifie aussi $\mathcal{P}$: en effet, si $k = k+1$, alors $k+1 = (k+1)+1 = k+2$, donc $k+1$ vérifie $\mathcal{P}$.

2. Certaines propriétés ne sont vérifiées que pour $n \geq 1$, ou $n \geq 2$ etc. Dans ce cas, on commence par démontrer que 1 (ou 2 ou etc.) vérifie $\mathcal{P}$ au lieu de 0.