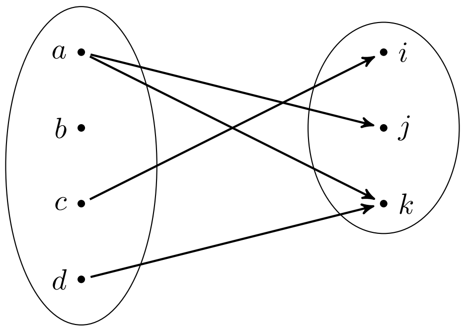
Chapitre 4
Les relations binaires

1 Approche intuitive

Soit A et B deux ensembles. On définit une relation binaire de A vers B en associant certains éléments de A à certains éléments de B.

Exemple : A est l'ensemble des employés d'une entreprise
B est l'ensemble des véhicules de service de cette entreprise
On définit une relation $\mathcal{R}$ grâce au lien verbal "$\cdots$ est autorisé à conduire le véhicule $\cdots$".

Représentation sagittale de $\mathcal{R}$



La personne a est autorisée à conduire les véhicules j et k. On dit que les couples (a, j) et (a, k) vérifient la relation $\mathcal{R}$ et on note, par exemple :

La personne c n'est pas autorisée à conduire le véhicule k. On dit que le couple (c, k) ne vérifie pas la relation $\mathcal{R}$ et on note :

Représentation cartésienne de $\mathcal{R}$

A \ B	i	j	k
a		$\times$	$\times$
b			
c	$\times$		
d			$\times$

On place une croix dans les cases correspondant aux couples qui vérifient la relation $\mathcal{R}$.
Cette relation est donc une partie du produit cartésien $A \times B$:

$$\mathcal{R} = \{(a, j), (a, k), (c, i), (d, k)\}$$

2 Définition mathématique

Définition 1. Soit A et B deux ensembles. Une relation binaire de A vers B est une **partie** du produit cartésien $A \times B$. C'est donc un élément de $\mathcal{P}(A \times B)$.

Notations : $\mathcal{R} \subset A \times B$ ou $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times B)$.

Lorsqu'un couple (x, y) vérifie la relation $\mathcal{R}$ on note $(x, y) \in \mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}(x, y)$ ou $x\mathcal{R}y$. $\mathcal{R}$ est une relation d'**arité** 2.
Sinon on écrit $(x, y) \notin \mathcal{R}$ ou $\not{\mathcal{R}}(x, y)$ ou $x\not{\mathcal{R}}y$.

Définition 2. Si $A = B$ on dit que $\mathcal{R}$ est une relation binaire **dan**s A.

3 Généralisation

Exemple : A est l'ensemble des habitants de la ville de Metz
B est l'ensemble des livres d'une médiathèque
C est l'ensemble des dates comprises entre le 01/01/2014 et le 31/12/2014

On définit une relation de la façon suivante :
(a, b, c) vérifie la relation $\mathcal{R}$ si la personne a a emprunté le livre b à la date c.
On note alors $(a, b, c) \in \mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}(a, b, c)$. $\mathcal{R}$ est une relation d'**arité 3**.

Définition 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et A_1, A_2, $\cdots$, A_n, n ensembles appelés **domaines**. On appelle relation n-aire définie sur les domaines A_1, A_2, $\cdots$, A_n, toute partie du produit cartésien$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.
Si $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathcal{R}$ on note $\mathcal{R}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. $\mathcal{R}$ est une relation d'arité n.

Remarques :

1. Le mot "arité" représente le nombre de places de variables dans le lien verbal.
2. Dans le cas particulier $n = 2$ on retrouve la notion de relation binaire.
3. Cas particulier $n = 1$: on parle de relation unaire ou d'arité 1.
   Exemple : "être pair" dans $\mathbb{N}$. On a $\mathcal{R}(8)$ mais $\not{\mathcal{R}}(11)$.

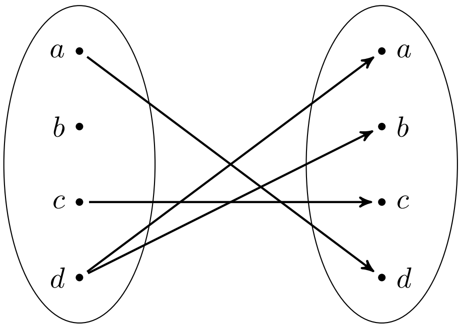
Exemple 2 : On considère la table ADHERENT(<u>nom-adh, prenom-adh, tel-adh</u>, ad-adh, iban-adh, date-adh, date-fin, cereale) dont un extrait est donné ci-dessous.

no	nom_adh	prenom_adh	tel_adh	ad_adh	iban	date_adh	date_fin	cereale
1	ANDRE	Marc	0301090807	Grand Pre 57222 Saint-Pierre	FR1010000000106729450762	01/02/2022	01/02/2023	mais
2	BARNABE	Hippolyte	0301020304	Grand Champ 57111 Saint-Jean	FR1010000000108138423562	05/01/2022	05/01/2023	ble
3	BARNABE	Lucien	0301020304	Grand Champ 57111 Saint-Jean	FR1010000000108639178074	07/01/2022	07/01/2023	orge
4	CHRISTIAN	Andre	0301181917	Rue de la Fontaine 57333 Saint-Michel	FR1020000000292348721501	03/01/2022	03/01/2023	ble
5	DUMONT	Jacques	0301171819	Grand Fosse 57111 Saint-Jean	FR1020000000465198627014	05/01/2022	05/01/2023	ble
6	EUDES	Pascal	0301102030	Grand Pre 57222 Saint-Pierre	FR1020000000479284361820	03/02/2022	03/02/2023	orge
7	EUDES	Pascal	0301112131	Les Etangs 57444 Saint-Germain	FR1020000000412816348279	03/03/2022	03/03/2023	orge
8	FAYARD	Jules	0301203040	Grand Rue 57111 Saint-Jean	FR1020000000893762459241	04/01/2022	04/01/2023	mais
9	GEORGES	Aime	0301191817	Place du Marche 57444 Saint-Germain	FR1020000000281627496821	15/02/2022	15/02/2023	epeautre
10	GRAND	Laurent	0301304050	Rue Longue 57333 Saint-Michel	FR1010000000107652497831	02/01/2022	02/01/2023	mais
11	HUGUES	Michel	0301405060	Grand Pre 57222 Saint-Pierre	FR1010000000105289673109	01/03/2022	01/03/2023	epeautre
12	IVAN	Sophie	0301181917	Rue de la Fontaine 57333 Saint-Michel	FR1020000000274592830182	03/01/2022	03/01/2023	ble
13	JACQUES	Jean	0301403020	Rue Haute 57444 Saint-Germain	FR1010000000105267831042	08/04/2022	08/04/2023	orge
14	LUCIEN	Vincent	0301718191	La Chaume 57111 Saint-Jean	FR1010000000104286913572	10/01/2022	10/01/2023	epeautre
15	PIERRE	Andre	0301202122	Grand Fosse 57111 Saint-Jean	FR1020000000192837465823	08/03/2022	08/03/2023	ble

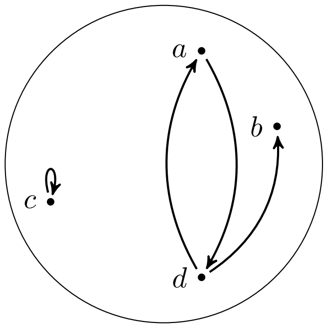
Cette table ADHERENT est une relation 8-aire définie sur les domaines :
A_1 l'ensemble des noms des adhérents, A_2 l'ensemble de leurs prénoms, A_3 l'ensemble de leurs adresses, A_4 l'ensemble de leurs numéros de téléphone, A_5 l'ensemble de leurs Iban, A_6 l'ensemble de leurs dates d'adhésion, A_7 l'ensemble de leurs dates de fin d'adhésion, et A_8 l'ensemble des noms de céréales qu'ils commercialisent.
C'est une partie du produit cartésien $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_8$.

4 Relations binaires dans un ensemble

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire dans un ensemble E, donnée par sa représentation sagittale :



On préfèrera la représentation :



Exemples mathématiques :

1. L'égalité dans un ensemble E : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$.
2. La relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$.
3. La relation < dans $\mathbb{R}$.
4. La divisibilité dans $\mathbb{Z}$, notée $|$. "a divise b" se note $a|b$.
5. Soit X un ensemble. L'inclusion $\subset$ dans $\mathcal{P}(X)$ est une relation binaire.

Illustrations

$\mathcal{R}$	$x\mathcal{R}y$	$x\not\mathcal{R}y$
égalité		
$\leqslant$		
$\vert$		
$\subset$		

5 Propriétés éventuelles d'une relation dans E

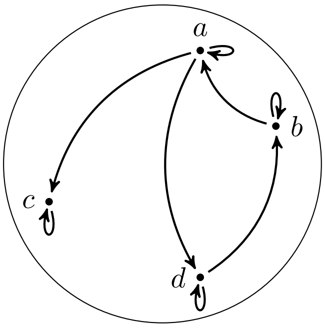
5.1 La réflexivité

Définition 4. Une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite réflexive si $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$.

Exemples :

1. L'égalité dans un ensemble E : $\forall x \in E,\ x = x$.
2. La relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$.
3. La divisibilité dans $\mathbb{Z}$: $\forall a \in \mathbb{Z}, a|a$.
4. L'inclusion $\subset$ dans $\mathcal{P}(X)$: $\forall A \in \mathcal{P}(X), A \subset A$.

Illustration : la réflexivité se traduit par une flèche qui boucle sur chaque élément de E.



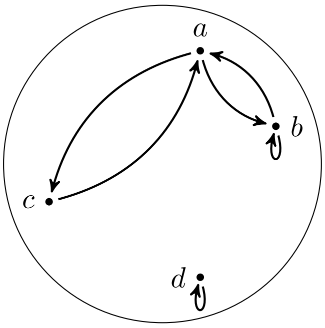
5.2 La symétrie

Définition 5. Une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite symétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x.$$

Exemple : l'égalité dans un ensemble E : $\forall (x, y) \in E^2$, si $x = y$ alors $y = x$.

Illustration : la symétrie se traduit par le fait que s'il y a une flèche de x vers y alors il y a une flèche "retour" de y vers x.



Remarque : les relations $\subset$, $|$, et $\leqslant$ ne sont pas symétriques.
En effet, $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ mais $\{1, 2, 3\} \not\subset \{1, 2\}$, $3|6$ mais $6 \nmid 3$, $2 \leqslant 5$ mais $5 \nleqslant 2$.

5.3 La transitivité

Définition 6. Une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite transitive si

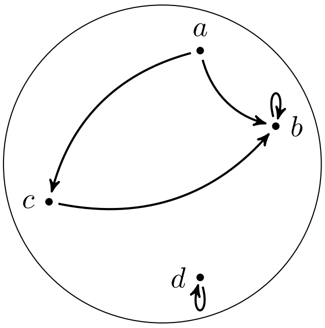
$$\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z.$$

Exemples :

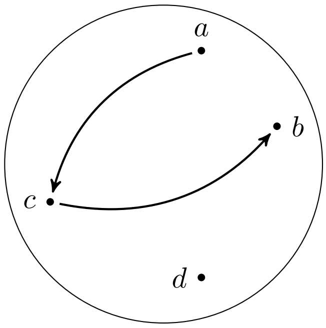
1. L'égalité dans un ensemble E : $\forall (x, y, z) \in E^3$, si $x = y$ et $y = z$, alors $x = z$.
2. La relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$.
3. La divisibilité dans $\mathbb{Z}$: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, si $x|y$ et $y|z$ alors $x|z$.
4. L'inclusion $\subset$ dans $\mathcal{P}(X)$: $\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(X)^3$, si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.

Illustration :

S'il y a une flèche de x vers y et une flèche de y vers z alors il y a une flèche de x vers z.



Si $\mathcal{R}$ est transitive alors la configuration ci-dessous n'est pas possible :



5.4 L'antisymétrie

Définition 7. Une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite antisymétrique si

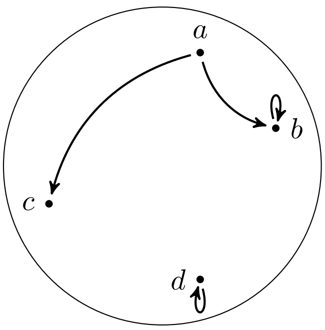
$$\forall (x, y) \in E^2,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y.$$

Exemples :

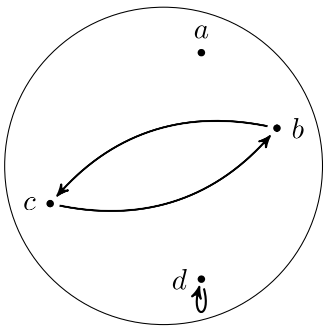
1. L'égalité dans un ensemble E : $\forall (x, y) \in E^2$, si $x = y$ et $y = x$, alors $x = y$.
2. La relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$.
3. L'inclusion $\subset$ dans $\mathcal{P}(X)$: $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X)^2$, si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$ (c'est le théorème de la double inclusion).

Illustration : Le seul cas où il y a une flèche de x vers y et une flèche de y vers x est celui où $x = y$. Il y a alors une boucle sur x.

Exemple



Si $\mathcal{R}$ est antisymétrique alors la configuration ci-dessous n'est pas possible :



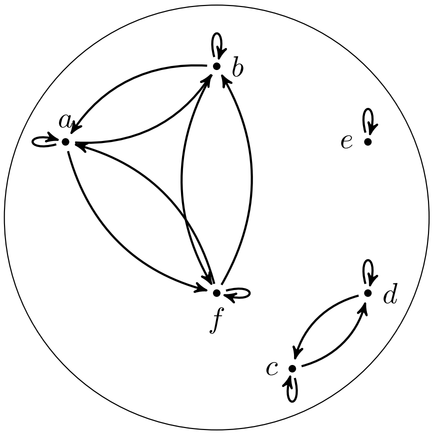
6 Relations d'équivalence

Définition 8. Une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est une relation d'équivalence si elle est à la fois **réflexive, symétrique et transitive**.

Exemples :

1. L'égalité dans un ensemble E
2. La relation "avoir même parité que" dans $\mathbb{N}$
3. Plus généralement, une relation définie par un lien verbal de la forme "avoir même $\cdots$ que"

Illustration :



On distingue clairement 3 parties de E disjointes 2 à 2.

Définition 9. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E, et $x \in E$. On appelle classe d'équivalence de x l'ensemble des éléments y de E tels que $x\mathcal{R}y$.
On la note $\mathcal{C}\ell(x)$. Ainsi $\mathcal{C}\ell(x) = \{y \in E / x\mathcal{R}y\}$.

Exemple : dans l'exemple illustré ci-dessus la relation $\mathcal{R}$ possède trois classes d'équivalence :

$\mathcal{C}\ell(a) =$, $\mathcal{C}\ell(c) =$ et $\mathcal{C}\ell(e) =$.

Théorème 6.1. *Les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans un ensemble E forment une partition de E :*

1. $\forall x \in E,\ \mathcal{C}\ell(x) \neq \emptyset$
2. $\forall (x, x') \in E^2,\ \mathcal{C}\ell(x) \neq \mathcal{C}\ell(x') \Leftrightarrow \mathcal{C}\ell(x) \cap \mathcal{C}\ell(x') = \emptyset$ *(2 classes d'équivalence distinctes sont disjointes et réciproquement)*
3. $\bigcup\limits_{x \in E} \mathcal{C}\ell(x) = E$

Définition 10. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E. L'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ s'appelle ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$. On le note $E/_{\mathcal{R}}$.

Dans l'exemple précédent, $E/_{\mathcal{R}} = \{\mathcal{C}\ell(a),\ \mathcal{C}\ell(c),\ \mathcal{C}\ell(e)\}$.

7 Relations d'ordre

Définition 11. Une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est une relation d'ordre si elle est à la fois **réflexive, antisymétrique et transitive**.

Exemples :

1. L'égalité dans un ensemble E
2. La relation " $\leqslant$ " dans $\mathbb{R}$
3. L'inclusion dans $\mathcal{P}(X)$

Définition 12. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre dans un ensemble E, et $(x, y) \in E^2$.
On dit que x est **comparable** à y pour $\mathcal{R}$ si $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

Définition 13. On dit qu'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est totale si
$\forall (x, y) \in E^2$, x est comparable à y.
Sinon on dit que la relation d'ordre est partielle.
(On dit aussi relation d'ordre total (resp. partiel))

Exemples :

1. L'égalité dans un ensemble E est une relation d'ordre partiel. (Par exemple 2 et 6 ne sont pas comparables)
2. La relation " $\leqslant$ " dans $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre total.
3. L'inclusion dans $\mathcal{P}(X)$ est une relation d'ordre partiel. (Par exemple $[0, 2] \not\subset [1, 3]$ et $[1, 3] \not\subset [0, 2]$)

Feuille d'exercices n° 3
Relations binaires

Les questions ou exercices précédés d'une étoile (*) sont plus difficiles.
Vous ne les traiterez qu'avec l'accord de votre enseignant(e) de TD.

Exercice 1 : Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$.
On définit la relation $\mathcal{R}$ de A vers B par $\mathcal{R} = \{(a, 1), (b, 1), (b, 3)\}$.
Donner la présentation cartésienne de $\mathcal{R}$ puis sa représentation sagittale.

Exercice 2 : *Définition : Soit a et b deux nombres entiers relatifs. On dit que **a divise b** s'il existe un entier relatif k tel que b = ka. On note alors **a** | **b**.*
On considère les relations $\mathcal{R}$ suivantes de A vers B.
Donner pour chacune d'elles une présentation sagittale (ou cartésienne si elle est trop lourde).

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$; $B = \{1, 4, 6, 9\}$ et $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow$ a divise b
2. $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$; $B = \{1, 4, 6, 9\}$ et $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b = a^2$

Exercice 3 : Soit $A = \{a, b\}$ et $B = \{1, 2\}$.
1) Combien existe-t-il de relations binaires de A vers B ? (Indication : revenir à la définition mathématique)
2) Représenter toutes les relations de A vers B. (On s'attachera à travailler méthodiquement)
Pour chacune d'elles préciser s'il s'agit d'une application ou non de A vers B.
Pour celles qui ne correspondent pas à une application, le prouver en donnant une raison suffisante.

***Définition :** Soit $\mathcal{R}$ une relation de A vers B. On dit que le triplet f = (A, B, $\mathcal{R}$) est une application de A dans B si, pour tout x de A, il existe y unique de B tel que x $\mathcal{R}$ y.*
On note alors y = f(x). L'application f est notée :

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Exercice 4 : Soit $A = \{a, b, c, d\}$. Combien y a-t-il de relations dans A ? Représenter sous forme sagittale trois d'entre elles.

Exercice 5 : Soit X un ensemble. On considère la relation d'inclusion dans $\mathcal{P}$(X) (l'ensemble des parties de X). Rappeler les propriétés de l'inclusion, démontrées dans un cours précédent, qui font de cette relation une relation d'ordre dans $\mathcal{P}$(X).

Exercice 6 : On définit une relation dans l'ensemble des mots de la langue française de la façon suivante : un mot **x** est en relation avec un mot **y** s'il est écrit avec les mêmes lettres (on dit que x est un anagramme de y). Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Déterminer la classe du mot "chien".

Exercice 7 : On rappelle la définition suivante : un entier $n \in \mathbb{N}$ est un carré parfait s'il existe un entier a tel que $n = a^2$. Par exemple 1,4, 9 et 16 sont des carrés parfaits car $1 = 1^2,\ 4 = 2^2,\ 9 = 3^2$ et $16 = 4^2$.
On considère la relation $\mathcal{R}$ définie dans $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^*,\ x\mathcal{R}y \ \Leftrightarrow\ xy \text{ est un carré parfait.}$$

Dans la suite de l'exercice on restreint la relation $\mathcal{R}$ à l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. Donnez la représentation cartésienne de la relation $\mathcal{R}$, puis sa représentation sagittale à côté.

$\mathcal{R}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

2. En vous appuyant sur la représentation cartésienne de la relation $\mathcal{R}$, déterminez si celle-ci est réflexive et symétrique.
3. On souhaite étudier si la relation $\mathcal{R}$ est transitive. En vous appuyant sur la représentation sagittale, complétez le tableau ci-dessous en 2 parties, en ne reportant dans les trois colonnes à gauche, que les triplets (x, y, z) tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Ecrire alors Vrai ou Faux en-dessous de $x\mathcal{R}z$, puis en-dessous du connecteur $\rightarrow$.

x	y	z	$(x\mathcal{R}y \quad ET \quad y\mathcal{R}z) \quad \rightarrow \quad x\mathcal{R}z$
1	1	1	$V \qquad\qquad V \quad V$

x	y	z	$(x\mathcal{R}y \quad ET \quad y\mathcal{R}z) \quad \rightarrow \quad x\mathcal{R}z$

4. Que peut-on dire de la relation $\mathcal{R}$ d'après les questions 2. et 3. ?
5. Donner les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.
6. (*) Démontrer la transitivité de la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{N}$ (et non plus dans E).

Exercice 8 : (*) Soit a et b deux nombres entiers relatifs. On dit que **a divise b** s'il existe un entier relatif k tel que b = ka. On note alors **a** | **b**.
Démontrer que la relation de divisibilité est réflexive et transitive dans $\mathbb{Z}$. Est-elle antisymétrique dans $\mathbb{Z}$? Démontrer que sa restriction à $\mathbb{N}$ est antisymétrique.