Algorithme de Floyd

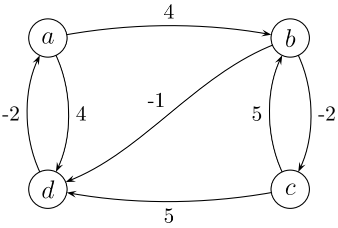
F.M.

2024/2025

Matrice des poids

Soit $G = (S, A, p)$ un graphe pondéré d'ordre n, simple et sans boucle. On appelle **matrice des poids** du graphe G, la matrice carrée $\boldsymbol{M}$ d'ordre n définie par :

$$\forall (x,y) \in S^2,\ M[x,y] = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ p(x,y) & \text{si } (x,y) \in A \\ \infty & \text{si } (x,y) \notin A \end{cases}$$



$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 5 \\ -2 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

matrice des poids

2 / 35

Le problème

Il s'agit de **déterminer tous les chemins de poids minimum** d'un graphe $G = (S, A, p)$ d'ordre n. Problème équivalent : **calculer $\textsc{Dist}(x, y)$ pour tout couple $(x, y) \in S^2$**.

Il est possible de résoudre ce problème en utilisant un algorithme qui détermine une r-arborescence de cpm pour chaque sommet r du graphe (soit n exécutions de l'algorithme). Cette approche n'est cependant pas efficace car un même cpm peut être calculé plusieurs fois (il peut appartenir à plusieurs arborescences de cpm).

Dans ce chapitre, on présente un algorithme plus adapté, **l'algorithme de Floyd** qui détecte, le cas échéant, la présence de circuits absorbants.

3 / 35

Pour représenter **tous les chemins de poids minimum** d'un graphe $G = (S, A, p)$ d'ordre n, on utilise **une table des pères $\mathcal{A}$ de taille $n \times n$ et une table des potentiels Π également de taille $n \times n$**.

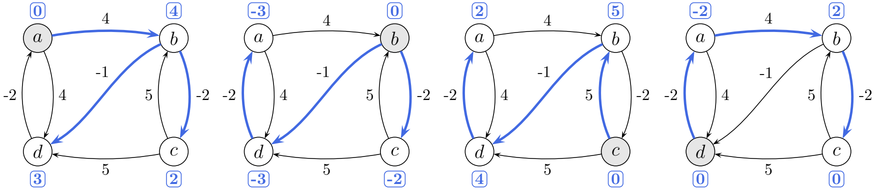
Pour chaque sommet s de G, la ligne s de $\mathcal{A}$ et la ligne s de Π représentent une s-arborescence de chemin de poids minimum. Dans la suite, la notation $T(s)$ désigne **une s-arborescence**.

Ces deux tables sont définies comme suit :

$$\forall s, x \in S, \quad \mathcal{A}[s, x] = \begin{cases} \varnothing & \text{si } x = s \\ y & \text{si } (y, x) \in T(s) \\ x & \text{si } x \notin T(s) \end{cases}$$

$$\forall s, x \in S, \quad \Pi[s, x] = \begin{cases} \textsc{Dist}(s, x) & \text{si } x \in T(s) \\ \infty & \text{si } s \notin T(s) \end{cases}$$

4 / 35



$$
\begin{array}{ccccc}
 & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
\begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d \end{array} &
\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d \end{array} &
\begin{bmatrix} \varnothing & a & b & b \\ d & \varnothing & b & b \\ d & c & \varnothing & b \\ d & a & b & \varnothing \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} \varnothing & a & b & b \\ d & \varnothing & b & b \\ d & c & \varnothing & b \\ d & a & b & \varnothing \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} \varnothing & a & b & b \\ d & \varnothing & b & b \\ d & c & \varnothing & b \\ d & a & b & \varnothing \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} \varnothing & a & b & b \\ d & \varnothing & b & b \\ d & c & \varnothing & b \\ d & a & b & \varnothing \end{bmatrix}
\begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d \end{array}
\end{array}
$$

5 / 35

Algorithme de Floyd : le principe

L'algorithme de Floyd reprend le **schéma itératif de l'algorithme de Warshall**.

À l'**itération $[s]$**, **pour chaque élément (x, y)** de la table Π l'algorithme compare

- le poids du chemin de $T(x)$ allant de x à y, égal à $\mathbf{\Pi[x, y]}$,
- au poids du chemin de $T(x)$ allant de x à s concaténé au chemin de $T(s)$ allant de s à y, égal à $\mathbf{\Pi[x, s] + \Pi[s, y]}$.

De ces deux chemins allant de x à y, **seul celui de plus petit poids est conservé dans les tables $\mathcal{A}$ et Π**.

Un circuit absorbant est détecté quand un élément de la diagonale de Π devient négatif. On peut arrêter l'algorithme si cela se produit.

6 / 35

Algorithme de Floyd : initialisations

Donnée : M, matrice des poids de $G = (S, A, p)$.
Résultat : $\mathcal{A}$ et Π, les tables mémorisant tous les cpm de G

pour tout $s \in S$ **faire**
    ✎ initialisation de $T(s)$
    pour tout $x \in S$ **faire**
        $\Pi[s, x] \leftarrow M[s, x]$
        si $x \in V^+(s)$ **alors** $\mathcal{A}[s, x] \leftarrow s$
        sinon $\mathcal{A}[s, x] \leftarrow x$
    fin pour
    $\mathcal{A}[s, s] \leftarrow \varnothing$
fin pour

Pour tout sommet s du graphe, **$T(s)$ ne contient initialement que s et les arcs sortant de s** (et donc les successeurs de s dans G).

7 / 35

pour tout $s \in S$ **faire**
  pour tout $x \in S$ **faire**
    ✎ tentative d'amélioration de $T(x)$
    pour tout $y \in S$ **faire**
      si $\Pi[x, s] + \Pi[s, y] < \Pi[x, y]$ **alors**
        $\Pi[x, y] \leftarrow \Pi[x, s] + \Pi[s, y]$
        $\mathcal{A}[x, y] \leftarrow \mathcal{A}[s, y]$
      fin si
    fin pour
  fin pour
fin pour

À l'itération $[s]$, si il est plus avantageux de passer par s pour aller de x à y alors Π et $\mathcal{A}$ sont mises à jour en conséquence. En particulier, le père de y dans $T(s)$ devient aussi le père de y dans $T(x)$.

8 / 35

Supposons que $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Initialement, $\mathcal{A}$ contient les chemins de longueur 1 (les arcs du graphe), puis :

- À l'issue de **itération [$\boldsymbol{s_1}$]**, $\mathcal{A}$ contient les chemins de plus petit poids parmi ceux de longueur 1 et ceux de longueur 2 ayant s_1 comme unique sommet interne.
- À l'issue de **itération [$\boldsymbol{s_2}$]**, $\mathcal{A}$ contient les chemins de plus petit poids parmi ceux de longueur 1 et ceux dont tous les sommets internes appartiennent à $\{s_1, s_2\}$.
- Etc.
- À l'issue de **itération [$\boldsymbol{s_n}$]**, $\mathcal{A}$ contient les chemins de plus petit poids parmi ceux de longueur 1 et ceux dont les sommets internes appartiennent à $\{s_1, \ldots, s_n\} = S$. $\mathcal{A}$ contient alors tous les cpm du graphe.

9 / 35

Algorithme de Floyd : les invariants

À l'itération $[s]$, le calcul effectué pour chaque couple de sommets (x, y) est le suivant :

$$\boldsymbol{\Pi[x,y] \leftarrow \min\{\, \Pi[x,y]\ ,\ \Pi[x,s] + \Pi[s,y] \,\}}$$

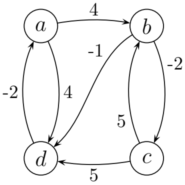
Tout élément $\Pi[x, y]$ dont la valeur ne change pas d'une itération à la suivante est dit **invariant**.

Les invariants à l'itération $[s]$ sont :

- **La ligne $\boldsymbol{s}$ et la colonne $\boldsymbol{s}$ de $\boldsymbol{\Pi}$**, puisqu'aucun chemin d'origine s ou de but s ne peut être amélioré lors de cette itération.
- **La ligne $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{\Pi}$ quand $\boldsymbol{\Pi[x,s] = \infty}$**, puisqu'il n'existe pas de chemin allant de x à s.
- **La colonne $\boldsymbol{y}$ de $\boldsymbol{\Pi}$ quand $\boldsymbol{\Pi[s,y] = \infty}$**, puisqu'il n'existe pas de chemin allant de s à y.

10 / 35

Itération [0] : initialisation



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 5 \\ -2 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\Pi^{[0]}$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} \varnothing & a & c & a \\ a & \varnothing & b & b \\ a & c & \varnothing & c \\ d & b & c & \varnothing \end{bmatrix} \end{array}$$

$\mathcal{A}^{[0]}$

On procède comme pour l'algorithme de Warshall : à chaque itération, on recopie les invariants puis on réévalue les potentiels non recopiés.

11 / 35

Itération $[\boldsymbol{a}]$: recopie des lignes a, b et c, et des colonnes a et c

$$\Pi^{[0]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 5 \\ -2 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 5 \\ -2 & . & \infty & . \end{bmatrix} \end{array} = \Pi^{[a]}$$

$$\mathcal{A}^{[0]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varnothing & a & c & a \\ a & \varnothing & b & b \\ a & c & \varnothing & c \\ d & b & c & \varnothing \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varnothing & a & c & a \\ a & \varnothing & b & b \\ a & c & \varnothing & c \\ d & . & c & . \end{bmatrix} \end{array} = \mathcal{A}^{[a]}$$

12 / 35

Itération $[a]$: $\Pi^{[a]}[d,a] + \Pi^{[a]}[a,b] = \text{-}2 + 4 = 2 < \infty \Rightarrow \boldsymbol{\Pi^{[a]}[d,b] = 2}$

$$\Pi^{[0]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 5 \\ -2 & \boxed{\infty} & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \boxed{4} & \infty & 4 \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 5 \\ \boxed{-2} & \boxed{2} & \infty & . \end{bmatrix} \end{array} = \Pi^{[a]}$$

$$\mathcal{A}^{[0]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varnothing & a & c & a \\ a & \varnothing & b & b \\ a & c & \varnothing & c \\ d & \boxed{b} & c & \varnothing \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varnothing & \boxed{a} & c & a \\ a & \varnothing & b & b \\ a & c & \varnothing & c \\ d & \boxed{a} & c & . \end{bmatrix} \end{array} = \mathcal{A}^{[a]}$$

13 / 35

Trace de l'algorithme de Floyd

Itération $[\boldsymbol{a}]$: $\Pi^{[a]}[d,a] + \Pi^{[a]}[a,d] = \text{-}2 + 4 = 2 \not< 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Pi^{[a]}[d,d] = 0}$

$$\Pi^{[0]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 5 \\ -2 & \infty & \infty & \boxed{0} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & \boxed{4} \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 5 \\ \boxed{-2} & 2 & \infty & \boxed{0} \end{bmatrix} \end{array} = \Pi^{[a]}$$

$$\mathcal{A}^{[0]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varnothing & a & c & a \\ a & \varnothing & b & b \\ a & c & \varnothing & c \\ d & b & c & \boxed{\varnothing} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varnothing & a & c & a \\ a & \varnothing & b & b \\ a & c & \varnothing & c \\ d & a & c & \boxed{\varnothing} \end{bmatrix} \end{array} = \mathcal{A}^{[a]}$$

14 / 35

Itération [b] : recopie de la ligne b et des colonnes b et a

$$\Pi^{[a]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & . & . \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & . & . \\ -2 & 2 & . & . \end{bmatrix} \end{array} = \Pi^{[b]}$$

$$\mathcal{A}^{[a]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varnothing & a & c & a \\ a & \varnothing & b & b \\ a & c & \varnothing & c \\ d & a & c & \varnothing \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varnothing & a & . & . \\ a & \varnothing & b & b \\ a & c & . & . \\ d & a & . & . \end{bmatrix} \end{array} = \mathcal{A}^{[b]}$$

15 / 35

Itération $[b]$: $\Pi^{[b]}[a,b] + \Pi^{[b]}[b,c] = 4 - 2 = 2 < \infty \Rightarrow \boldsymbol{\Pi^{[b]}[a,c] = 2}$

$$\Pi^{[a]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & \boxed{\infty} & 4 \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \boxed{4} & \boxed{2} & . \\ \infty & 0 & \boxed{-2} & -1 \\ \infty & 5 & . & . \\ -2 & 2 & . & . \end{bmatrix} \end{array} = \Pi^{[b]}$$

$$\mathcal{A}^{[a]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varnothing & a & \boxed{c} & a \\ a & \varnothing & b & b \\ a & c & \varnothing & c \\ d & a & c & \varnothing \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varnothing & a & \boxed{b} & . \\ a & \varnothing & \boxed{b} & b \\ a & c & . & . \\ d & a & . & . \end{bmatrix} \end{array} = \mathcal{A}^{[b]}$$

16 / 35

Trace de l'algorithme de Floyd

Itération $[b]$: $\Pi^{[b]}[c,b] + \Pi^{[b]}[b,c] = 5 - 2 = 3 \not< 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Pi^{[b]}[c,c] = 0}$

$$\Pi^{[a]} = \begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ a & 0 & 4 & \infty & 4 \\ b & \infty & 0 & -2 & -1 \\ c & \infty & 5 & \boxed{0} & 5 \\ d & -2 & 2 & \infty & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ a & 0 & 4 & 2 & . \\ b & \infty & 0 & \boxed{-2} & -1 \\ c & \infty & \boxed{5} & \boxed{0} & . \\ d & -2 & 2 & . & . \end{array} = \Pi^{[b]}$$

$$\mathcal{A}^{[a]} = \begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ a & \varnothing & a & c & a \\ b & a & \varnothing & b & b \\ c & a & c & \boxed{\varnothing} & c \\ d & d & a & c & \varnothing \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ a & \varnothing & a & b & . \\ b & a & \varnothing & b & b \\ c & a & c & \boxed{\varnothing} & . \\ d & d & a & . & . \end{array} = \mathcal{A}^{[b]}$$

Itération $[b]$: $\Pi^{[b]}[d,b] + \Pi^{[b]}[b,c] = 2 - 2 = 0 < \infty \Rightarrow \mathbf{\Pi^{[b]}[d,c] = 0}$

$$\Pi^{[a]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & \boxed{\infty} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & . \\ \infty & 0 & \boxed{-2} & -1 \\ \infty & 5 & 0 & . \\ -2 & \boxed{2} & \boxed{0} & . \end{bmatrix} \end{array} = \Pi^{[b]}$$

$$\mathcal{A}^{[a]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varnothing & a & c & a \\ a & \varnothing & b & b \\ a & c & \varnothing & c \\ d & a & \boxed{c} & \varnothing \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varnothing & a & b & . \\ a & \varnothing & \boxed{b} & b \\ a & c & \varnothing & . \\ d & a & \boxed{b} & . \end{bmatrix} \end{array} = \mathcal{A}^{[b]}$$

18 / 35

Itération $[b]$: $\Pi^{[b]}[a,b] + \Pi^{[b]}[b,d] = 4 - 2 = 3 < 4 \Rightarrow \boldsymbol{\Pi^{[b]}[a,d] = 3}$

$$\Pi^{[a]} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 4 & \infty & \boxed{4} \\ b & \infty & 0 & -2 & -1 \\ c & \infty & 5 & 0 & 5 \\ d & -2 & 2 & \infty & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & \boxed{4} & \cancel{2} & \boxed{3} \\ b & \infty & 0 & -2 & \boxed{-1} \\ c & \infty & 5 & 0 & . \\ d & -2 & 2 & 0 & . \end{array} = \Pi^{[b]}$$

$$\mathcal{A}^{[a]} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & \varnothing & a & c & \boxed{a} \\ b & a & \varnothing & b & b \\ c & a & c & \varnothing & c \\ d & d & a & c & \varnothing \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & \varnothing & a & b & \boxed{b} \\ b & a & \varnothing & b & \boxed{b} \\ c & a & c & \varnothing & . \\ d & d & a & b & . \end{array} = \mathcal{A}^{[b]}$$

19 / 35

Itération $[b]$: $\Pi^{[b]}[c,b] + \Pi^{[b]}[b,d] = \text{-}1 + 5 = 4 < 5 \Rightarrow \boldsymbol{\Pi^{[b]}[c,d] = 3}$

$$\Pi^{[a]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 4 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & \text{-}2 & \text{-}1 \\ \infty & 5 & 0 & \boxed{5} \\ \text{-}2 & 2 & \infty & 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 4 & 2 & 3 \\ \infty & 0 & \text{-}2 & \boxed{\text{-}1} \\ \infty & \boxed{5} & 0 & \boxed{4} \\ \text{-}2 & 2 & 0 & . \end{array}\right] \end{array} = \Pi^{[b]}$$

$$\mathcal{A}^{[a]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \varnothing & a & c & a \\ a & \varnothing & b & b \\ a & c & \varnothing & \boxed{c} \\ d & a & c & \varnothing \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \varnothing & a & b & b \\ a & \varnothing & b & \boxed{b} \\ a & c & \varnothing & \boxed{b} \\ d & a & b & . \end{array}\right] \end{array} = \mathcal{A}^{[b]}$$

 20 / 35

Trace de l'algorithme de Floyd

Itération $[\boldsymbol{b}]$: $\Pi^{[b]}[d,b] + \Pi^{[b]}[b,d] = 2 - 1 = 1 \not< 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Pi^{[b]}[d,d] = 0}$

$$\Pi^{[a]} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & \infty & \boxed{0} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \\ \infty & 0 & -2 & \boxed{-1} \\ \infty & 5 & 0 & 4 \\ -2 & \boxed{2} & 0 & \boxed{0} \end{bmatrix} \end{array} = \Pi^{[b]}$$

$$\mathcal{A}^{[a]} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} \varnothing & a & c & a \\ a & \varnothing & b & b \\ a & c & \varnothing & c \\ d & a & c & \boxed{\varnothing} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} \varnothing & a & b & b \\ a & \varnothing & b & b \\ a & c & \varnothing & b \\ d & a & b & \boxed{\varnothing} \end{bmatrix} \end{array} = \mathcal{A}^{[b]}$$

21 / 35

Itération [c] : recopie de la ligne c et des colonnes c et a

$$\Pi^{[b]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & . & 2 & . \\ \infty & . & -2 & . \\ \infty & 5 & 0 & 4 \\ -2 & . & 0 & . \end{bmatrix} \end{array} = \Pi^{[c]}$$

$$\mathcal{A}^{[b]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varnothing & a & b & b \\ a & \varnothing & b & b \\ a & c & \varnothing & b \\ d & a & b & \varnothing \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varnothing & . & b & . \\ a & . & b & . \\ a & c & \varnothing & b \\ d & . & b & . \end{bmatrix} \end{array} = \mathcal{A}^{[c]}$$

22 / 35

Itération $[c]$: aucune amélioration

$$\Pi^{[b]} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 4 & 2 & 3 \\ b & \infty & 0 & -2 & -1 \\ c & \infty & 5 & 0 & 4 \\ d & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 4 & 2 & 3 \\ b & \infty & 0 & -2 & -1 \\ c & \infty & 5 & 0 & 4 \\ d & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array} = \Pi^{[c]}$$

$$\mathcal{A}^{[b]} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & \varnothing & a & b & b \\ b & a & \varnothing & b & b \\ c & a & c & \varnothing & b \\ d & d & a & b & \varnothing \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & \varnothing & a & b & b \\ b & a & \varnothing & b & b \\ c & a & c & \varnothing & b \\ d & d & a & b & \varnothing \end{array} = \mathcal{A}^{[c]}$$

23 / 35

Itération [*d*] : recopie de la ligne d et de la colonne d

$$\Pi^{[c]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} . & . & . & 3 \\ . & . & . & -1 \\ . & . & . & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \Pi^{[d]}$$

$$\mathcal{A}^{[c]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varnothing & a & b & b \\ a & \varnothing & b & b \\ a & c & \varnothing & b \\ d & a & b & \varnothing \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} . & . & . & b \\ . & . & . & b \\ . & . & . & b \\ d & a & b & \varnothing \end{bmatrix} \end{array} = \mathcal{A}^{[d]}$$

24 / 35

Itération [*d*] : éléments non améliorés

$$\Pi^{[b]} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 4 & 2 & 3 \\ b & \infty & 0 & -2 & -1 \\ c & \infty & 5 & 0 & 4 \\ d & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 4 & 2 & 3 \\ b & . & 0 & -2 & -1 \\ c & . & 5 & 0 & 4 \\ d & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array} = \Pi^{[c]}$$

$$\mathcal{A}^{[b]} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & \varnothing & a & b & b \\ b & a & \varnothing & b & b \\ c & a & c & \varnothing & b \\ d & d & a & b & \varnothing \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & \varnothing & a & b & b \\ b & . & \varnothing & b & b \\ c & . & c & \varnothing & b \\ d & d & a & b & \varnothing \end{array} = \mathcal{A}^{[c]}$$

25 / 35

Itération $[d]$: $\Pi^{[d]}[b,d] + \Pi^{[d]}[d,a] = \text{-}1 - 2 = \text{-}3 < \infty \Rightarrow \boldsymbol{\Pi^{[d]}[b,a] = \text{-}3}$

$$\Pi^{[c]} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \\ \boxed{\infty} & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \\ \boxed{-3} & 0 & -2 & \boxed{-1} \\ \cdot & 5 & 0 & 4 \\ \boxed{-2} & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \Pi^{[d]}$$

$$\mathcal{A}^{[c]} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} \varnothing & a & b & b \\ \boxed{a} & \varnothing & b & b \\ a & c & \varnothing & b \\ d & a & b & \varnothing \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} \varnothing & a & b & b \\ \boxed{d} & \varnothing & b & b \\ \cdot & c & \varnothing & b \\ \boxed{d} & a & b & \varnothing \end{bmatrix} \end{array} = \mathcal{A}^{[d]}$$

26 / 35

Trace de l'algorithme de Floyd

Itération $[d]$: $\Pi^{[d]}[c,d] + \Pi^{[d]}[d,a] = 4 - 2 = \text{-}3 < \infty \Rightarrow \boldsymbol{\Pi^{[d]}[c,a] = 2}$

$$\Pi^{[c]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \boxed{\infty} & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & -1 \\ \boxed{2} & 5 & 0 & \boxed{4} \\ \boxed{-2} & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \Pi^{[d]}$$

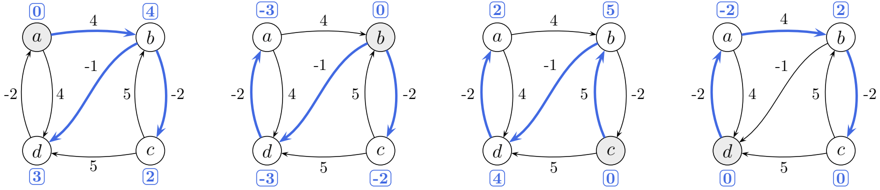
$$\mathcal{A}^{[c]} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varnothing & a & b & b \\ a & \varnothing & b & b \\ \boxed{a} & c & \varnothing & b \\ d & a & b & \varnothing \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varnothing & a & b & b \\ d & \varnothing & b & b \\ \boxed{d} & c & \varnothing & b \\ \boxed{d} & a & b & \varnothing \end{bmatrix} \end{array} = \mathcal{A}^{[d]}$$

27 / 35

Résultats :

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 4 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \varnothing & a & b & b \\ d & \varnothing & b & b \\ d & c & \varnothing & b \\ d & a & b & \varnothing \end{array}\right] \end{array} = \mathcal{A}$$



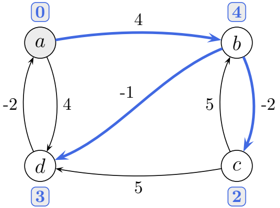
 28 / 35

Il est possible d'utiliser l'algorithme de Floyd pour calculer uniquement les distances. On peut ensuite retrouver **une** table $\mathcal{A}$ à partir de Π en utilisant la propriété : $\boldsymbol{(x,y) \in T(s) \Leftrightarrow \Pi[s,x] + p(x,y) = \Pi[s,y]}$.

Déterminons par exemple $T(a)$ à partir de la ligne a de Π :

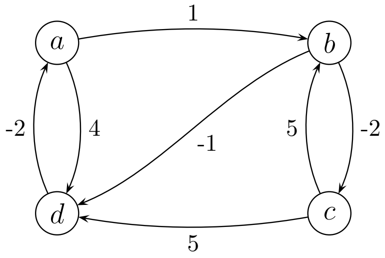
$$\Pi = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3} \\ -3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varnothing} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{b} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \end{array} = \mathcal{A}$$

On annote les sommets avec les potentiels. Les arcs bleus vérifient la propriété et ils forment une a-arborescence de cpm. On remplit ensuite la table des pères $\mathcal{A}$.



29 / 35

Itération [0] : initialisation



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 5 \\ -2 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Pi^{[0]}$$

Itération $[a]$: recopie des lignes a, b et c et des colonnes a et c

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & \infty & 4 \\ b & \infty & 0 & -2 & -1 \\ c & \infty & 5 & 0 & 5 \\ d & -2 & \infty & \infty & 0 \end{array}$$

$\Pi^{[0]}$

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & \infty & 4 \\ b & \infty & 0 & -2 & -1 \\ c & \infty & 5 & 0 & 5 \\ d & -2 & . & \infty & . \end{array}$$

$\Pi^{[a]}$

31 / 35

Algorithme de Floyd et circuits absorbants

Itération $[\boldsymbol{a}]$: $\Pi^{[a]}[d,a] + \Pi^{[a]}[a,b] = -2 + 1 = -1 < \infty \Rightarrow \boldsymbol{\Pi^{[a]}[d,b] = -1}$

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & \infty & 4 \\ b & \infty & 0 & -2 & -1 \\ c & \infty & 5 & 0 & 5 \\ d & -2 & \boxed{\infty} & \infty & 0 \end{array}$$

$\Pi^{[0]}$

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & \boxed{1} & \infty & 4 \\ b & \infty & 0 & -2 & -1 \\ c & \infty & 5 & 0 & 5 \\ d & \boxed{-2} & \boxed{-1} & \infty & . \end{array}$$

$\Pi^{[a]}$

32 / 35

Algorithme de Floyd et circuits absorbants

Itération $[\boldsymbol{a}]$: $\Pi^{[a]}[d,a] + \Pi^{[a]}[a,d] = -2 + 4 = 2 \not< 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Pi^{[a]}[d,d] = 0}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 5 \\ -2 & \infty & \infty & \boxed{0} \end{bmatrix} \end{array}$$

$\Pi^{[0]}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \boxed{4} \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 5 \\ \boxed{-2} & 1 & \infty & \boxed{0} \end{bmatrix} \end{array}$$

$\Pi^{[a]}$

33 / 35

Itération [*b*] : recopie de la ligne b et des colonnes b et a

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & . & . \\ \infty & 0 & -2 & -1 \\ \infty & 5 & . & . \\ -2 & -1 & . & . \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Pi^{[a]} \qquad\qquad \Pi^{[b]}$$

34 / 35

Itération $[\boldsymbol{b}]$: $\Pi^{[b]}[d,b] + \Pi^{[b]}[b,d] = -1 - 12 = -2 < 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Pi^{[b]}[d,d] = -2}$

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & \infty & 4 \\ b & \infty & 0 & -2 & -1 \\ c & \infty & 5 & 0 & 5 \\ d & -2 & -1 & \infty & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & -1 & 0 \\ b & \infty & 0 & -2 & \boxed{-1} \\ c & \infty & 5 & 0 & 4 \\ d & -2 & \boxed{-1} & -3 & \boxed{-2} \end{array}$$

$$\Pi^{[a]} \qquad\qquad \Pi^{[b]}$$

détection d'un circuit absorbant contenant $\boldsymbol{d}$

$\Rightarrow$ **arrêt de l'algorithme**

35 / 35