Une introduction aux graphes

F.M.

2023/2024

Plan de la ville de Königsberg au 18e siècle (Kaliningrad aujourd'hui).

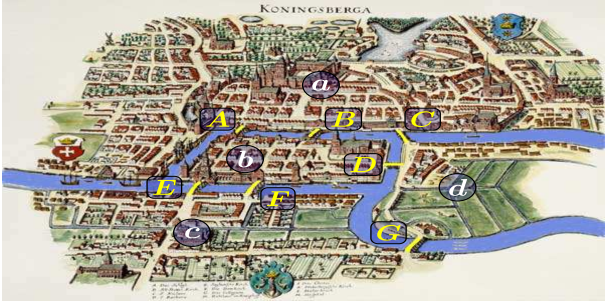
Lors d'une promenade est-il possible de passer une et une seule fois par chaque pont pour finalement revenir au point de départ ?

Les 7 ponts de Königsberg

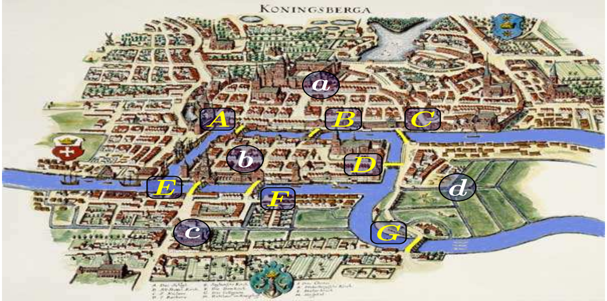
Plan de la ville de Königsberg au 18e siècle (Kaliningrad aujourd'hui).

Lors d'une promenade est-il possible de passer une et une seule fois par chaque pont pour finalement revenir au point de départ ?

En 1735, Leonhard Euler démontra que cela est impossible.

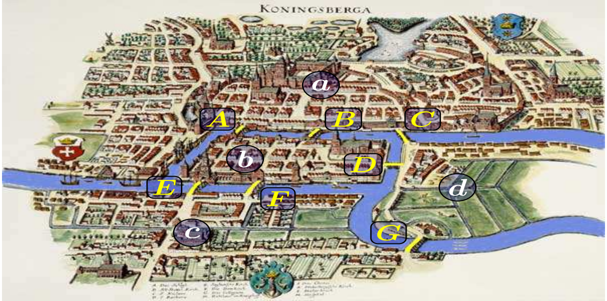


Pour résoudre le problème, Euler s'appuya sur un plan de la ville. Il associa une lettre minuscule à chaque quartier (a à d) et une lettre majuscule à chaque pont (A à G).

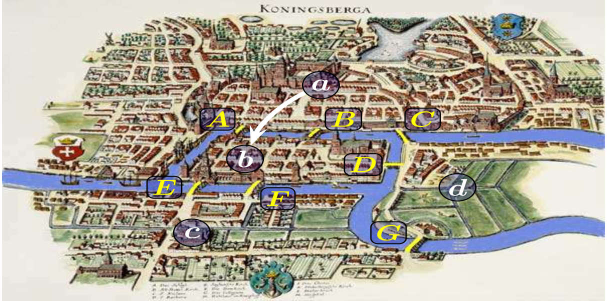


Pour résoudre le problème, Euler s'appuya sur un plan de la ville. Il associa une lettre minuscule à chaque quartier (a à d) et une lettre majuscule à chaque pont (A à G).

Une promenade est représentée par une suite alternée de minuscules et de majuscules : la 1re et la dernière lettre sont des minuscules, une séquence minuscule-majuscule-minuscule correspond à la traversée d'un pont. Exemples : $aAbEc$ est une promenade réalisable, $aAbEd$ non.



La promenade recherchée est une suite dont la première et la dernière lettre sont égales et où chaque lettre majuscule doit figurer exactement une fois. Un fait : si une telle promenade existe, elle peut commencer depuis n'importe quel quartier. Essayons à partir de a :



La promenade recherchée est une suite dont la première et la dernière lettre sont égales et où chaque lettre majuscule doit figurer exactement une fois. Un fait : si une telle promenade existe, elle peut commencer depuis n'importe quel quartier. Essayons à partir de a :

$$\boldsymbol{a\ A\ b}$$

La promenade recherchée est une suite dont la première et la dernière lettre sont égales et où chaque lettre majuscule doit figurer exactement une fois. Un fait : si une telle promenade existe, elle peut commencer depuis n'importe quel quartier. Essayons à partir de a :

$$\boldsymbol{a\ A\ b\ E\ c}$$

La promenade recherchée est une suite dont la première et la dernière lettre sont égales et où chaque lettre majuscule doit figurer exactement une fois. Un fait : si une telle promenade existe, elle peut commencer depuis n'importe quel quartier. Essayons à partir de a :

$$\boldsymbol{a\ A\ b\ E\ c\ G\ d}$$

La promenade recherchée est une suite dont la première et la dernière lettre sont égales et où chaque lettre majuscule doit figurer exactement une fois. Un fait : si une telle promenade existe, elle peut commencer depuis n'importe quel quartier. Essayons à partir de a :

$$\boldsymbol{a\ A\ b\ E\ c\ G\ d\ D\ b}$$

La promenade recherchée est une suite dont la première et la dernière lettre sont égales et où chaque lettre majuscule doit figurer exactement une fois. Un fait : si une telle promenade existe, elle peut commencer depuis n'importe quel quartier. Essayons à partir de a :

$$\boldsymbol{a\ A\ b\ E\ c\ G\ d\ D\ b\ B\ a}$$

La promenade recherchée est une suite dont la première et la dernière lettre sont égales et où chaque lettre majuscule doit figurer exactement une fois. Un fait : si une telle promenade existe, elle peut commencer depuis n'importe quel quartier. Essayons à partir de a :

$$a\ A\ b\ E\ c\ G\ d\ D\ b\ B\ a\ C\ d$$

La promenade recherchée est une suite dont la première et la dernière lettre sont égales et où chaque lettre majuscule doit figurer exactement une fois. Un fait : si une telle promenade existe, elle peut commencer depuis n'importe quel quartier. Essayons à partir de a :

$$\boldsymbol{a\ A\ b\ E\ c\ G\ d\ D\ b\ B\ a\ C\ d}$$

Impossible de poursuivre et le pont $\boldsymbol{F}$ n'a pas été traversé !

Euler démontre qu'une telle promenade n'est possible que si chaque quartier est accessible via un nombre pair de ponts.

Euler démontre qu'une telle promenade n'est possible que si chaque quartier est accessible via un nombre pair de ponts.

En effet, si on accède à un quartier par un pont, on doit pouvoir quitter ce quartier en utilisant en 2e pont. Si on revient vers ce quartier en franchissant un 3e pont, on doit alors utiliser un 4e pont pour le quitter. Etc.

Notion de graphe

Un graphe est un objet mathématique entièrement défini par 2 ensembles : **un ensemble d'objets** (les quartiers par exemple) et **un ensemble de relations** entre ces objets (les ponts).

Un graphe est un objet mathématique entièrement défini par 2 ensembles : **un ensemble d'objets** (les quartiers par exemple) et **un ensemble de relations** entre ces objets (les ponts).

Différents problèmes qui peuvent être résolus en utilisant des graphes. La démarche est la suivante :

- **Définir un graphe qui représente la situation** : dire ce que représentent les objets et les relations.

Notion de graphe

Un graphe est un objet mathématique entièrement défini par 2 ensembles : **un ensemble d'objets** (les quartiers par exemple) et **un ensemble de relations** entre ces objets (les ponts).

Différents problèmes qui peuvent être résolus en utilisant des graphes. La démarche est la suivante :

- **Définir un graphe qui représente la situation** : dire ce que représentent les objets et les relations.
- Formaliser le problème initial en **un problème de graphe**.

Notion de graphe

Un graphe est un objet mathématique entièrement défini par 2 ensembles : **un ensemble d'objets** (les quartiers par exemple) et **un ensemble de relations** entre ces objets (les ponts).

Différents problèmes qui peuvent être résolus en utilisant des graphes. La démarche est la suivante :

- **Définir un graphe qui représente la situation** : dire ce que représentent les objets et les relations.
- Formaliser le problème initial en **un problème de graphe**.
- Résoudre le problème en exploitant des propriétés du graphe et en élaborant un **algorithme**.

Un graphe est un objet mathématique entièrement défini par 2 ensembles : **un ensemble d'objets** (les quartiers par exemple) et **un ensemble de relations** entre ces objets (les ponts).

Différents problèmes qui peuvent être résolus en utilisant des graphes. La démarche est la suivante :

- **Définir un graphe qui représente la situation** : dire ce que représentent les objets et les relations.
- Formaliser le problème initial en **un problème de graphe**.
- Résoudre le problème en exploitant des propriétés du graphe et en élaborant un **algorithme**.

Théorie des graphes $\simeq$ mathématiques + algorithmique

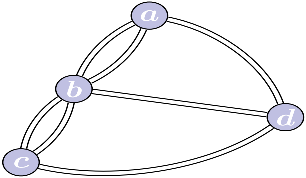
Une aide à la résolution : le diagramme de graphe

Définir un graphe qui représente la situation :

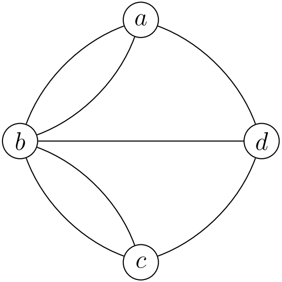
→ Les objets représentent les quartiers.

→ Les relations entre les objets représentent les ponts.

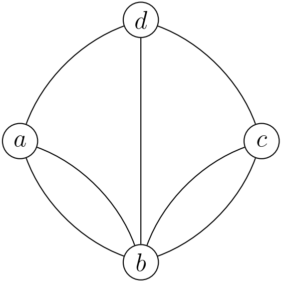
Définir un graphe qui représente la situation :



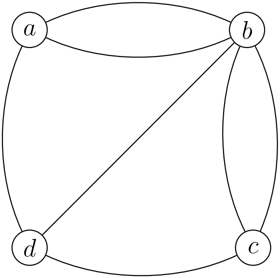
Définir un graphe qui représente la situation :



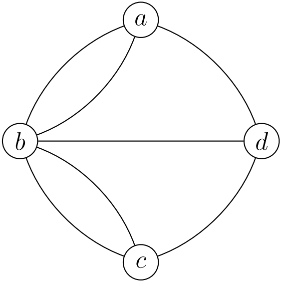
Définir un graphe qui représente la situation :



Définir un graphe qui représente la situation :



Définir un graphe qui représente la situation :



Définir un graphe qui représente la situation :

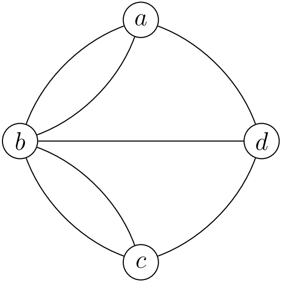


Diagramme d'un **graphe non orienté**

Définir un graphe qui représente la situation :

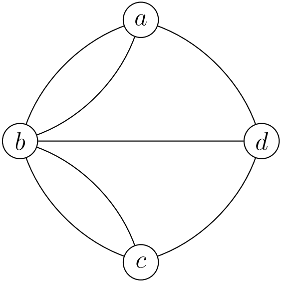
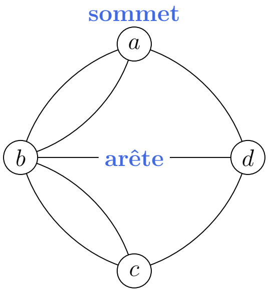
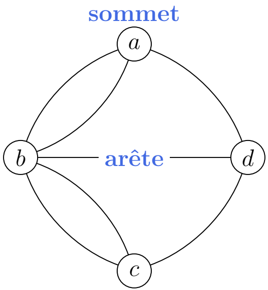


Diagramme d'un **graphe non orienté**

Ce n'est pas un plan mais une représentation abstraite de la situation qui permet de visualiser toutes les informations utiles (c.-à-d. les objets et les relations).

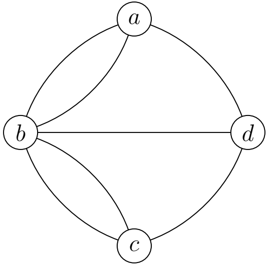


Un **graphe non orienté** est défini par un ensemble de **sommets** (les objets) et par un ensemble d'**arêtes** (les relations entre les sommets).

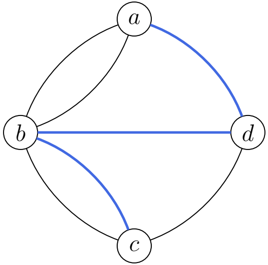


Un **graphe non orienté** est défini par un ensemble de **sommets** (les objets) et par un ensemble d'**arêtes** (les relations entre les sommets).

Chaque arête **relie** deux sommets entre eux et on dit que ces deux sommets sont les **extrémités** de l'arête.

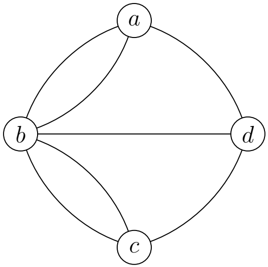


Une *promenade* dans un graphe non orienté est appelée **chaîne**.

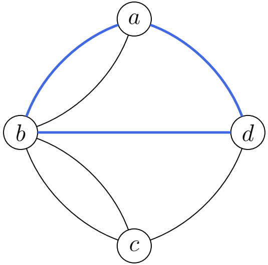


Une *promenade* dans un graphe non orienté est appelée **chaîne**.

Par exemple, partant du sommet a on peut traverser une arête pour aller en d puis continuer vers b pour arriver en c.



Un **cycle** est une chaîne (une promenade) qui part d'un sommet et se termine sur ce même sommet et qui ne traverse pas deux fois une même arête.

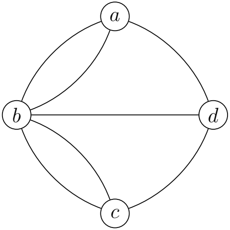


Un **cycle** est une chaîne (une promenade) qui part d'un sommet et se termine sur ce même sommet et qui ne traverse pas deux fois une même arête.

Par exemple, partant du sommet a on peut traverser une arête pour aller en d puis continuer vers b pour finalement revenir en a.

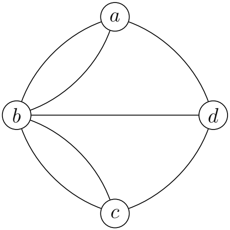
Formaliser le problème initial en un problème de graphe : existe-t-il un cycle qui démarre et se termine en un sommet x et qui traverse une et une seule fois chaque arête du graphe ?

Est-il possible de tracer une figure d'un seul trait et sans lever le crayon ?



Formaliser le problème initial en un problème de graphe : existe-t-il un cycle qui démarre et se termine en un sommet x et qui traverse une et une seule fois chaque arête du graphe ?

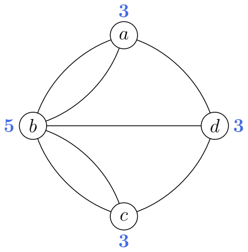
Est-il possible de tracer une figure d'un seul trait et sans lever le crayon ?



Un tel cycle est appelé **cycle eulérien**. La question « le problème des 7 ponts a-t-il une solution ? » devient « le graphe admet-il un cycle eulérien ? ».

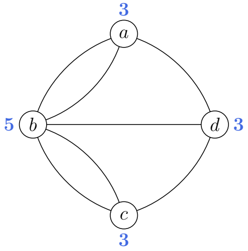
Existence d'une solution :

Le nombre d'arêtes dont l'une des extrémités est le sommet x est appelé **degré** du sommet x.



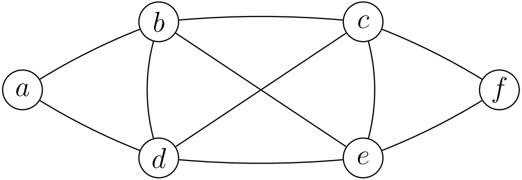
Existence d'une solution :

Le nombre d'arêtes dont l'une des extrémités est le sommet x est appelé **degré** du sommet x.

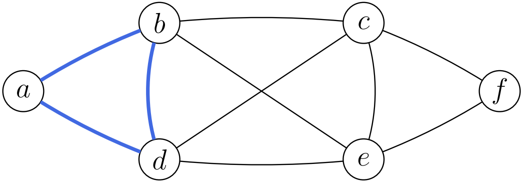


Un graphe admet un cycle eulérien si chaque sommet du graphe est de degré pair et si le graphe est connexe (non divisé en plusieurs parties disjointes).

Résoudre le problème : algorithme d'Euler (Hierholzer 1873).

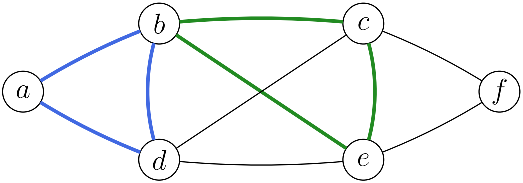


Résoudre le problème : algorithme d'Euler (Hierholzer 1873).



abda

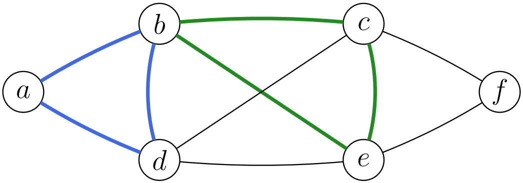
Résoudre le problème : algorithme d'Euler (Hierholzer 1873).



abda

abda **bceb**

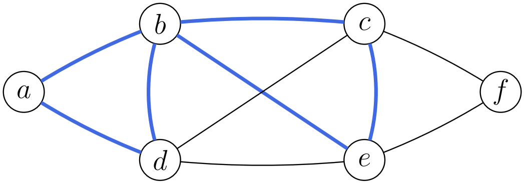
Résoudre le problème : algorithme d'Euler (Hierholzer 1873).



abda

abda **bceb** **abcebda**

Résoudre le problème : algorithme d'Euler (Hierholzer 1873).

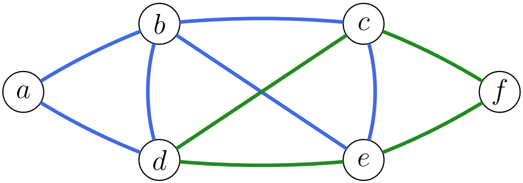


abda

abda **bceb** **abcebda**

abcebda

Résoudre le problème : algorithme d'Euler (Hierholzer 1873).

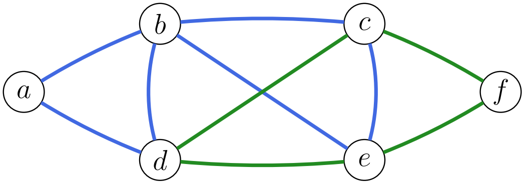


abda

abda **bceb** **abcebda**

abcebda **cdefc**

Résoudre le problème : algorithme d'Euler (Hierholzer 1873).

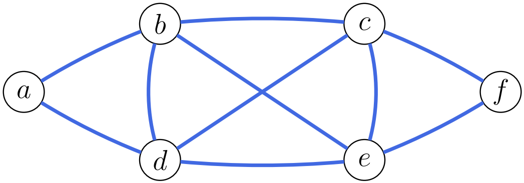


abda

abda **bceb** **abcebda**

abcebda **cdefc** **abcdefcebda**

Résoudre le problème : algorithme d'Euler (Hierholzer 1873).



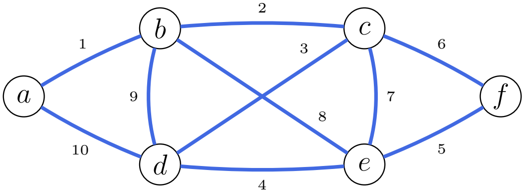
abda

abda bceb abcebda

abcebda cdefc abcdefcebda

abcdefcebda

Résoudre le problème : algorithme d'Euler (Hierholzer 1873).



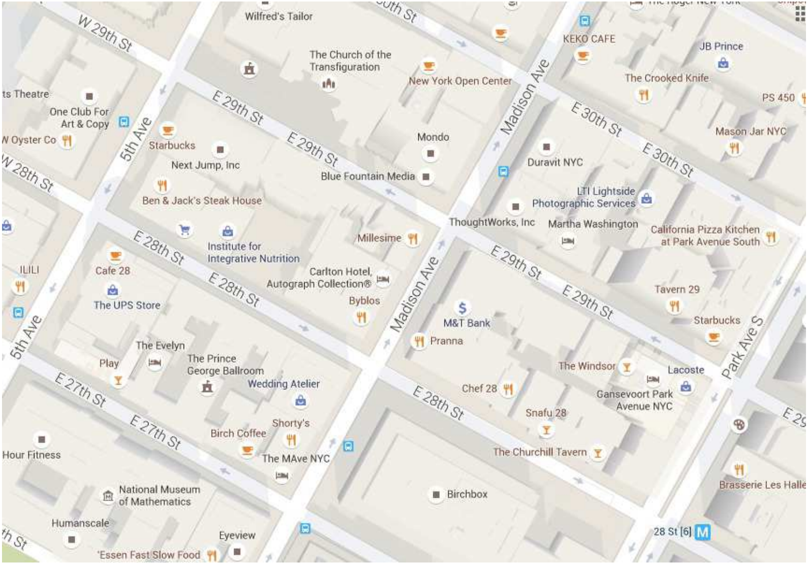
abda

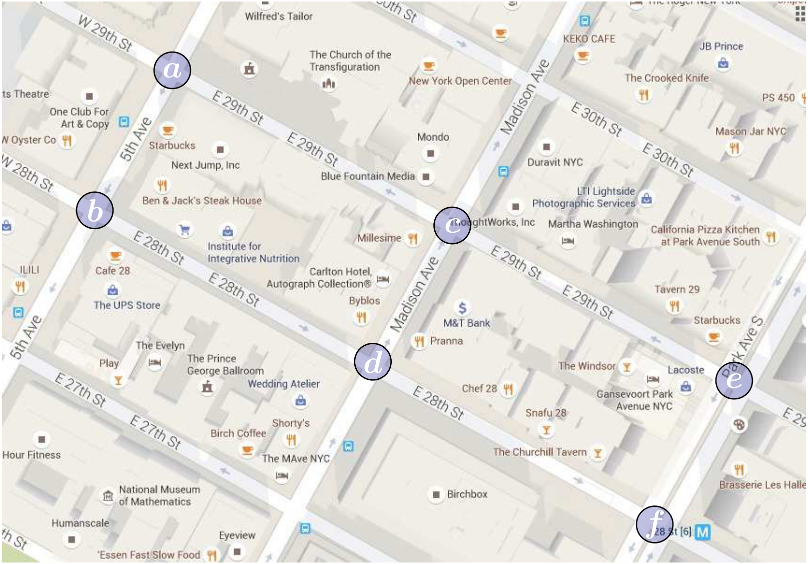
abda **bceb** **abcebda**

abcebda **cdefc** **abcdefcebda**

abcdefcebda

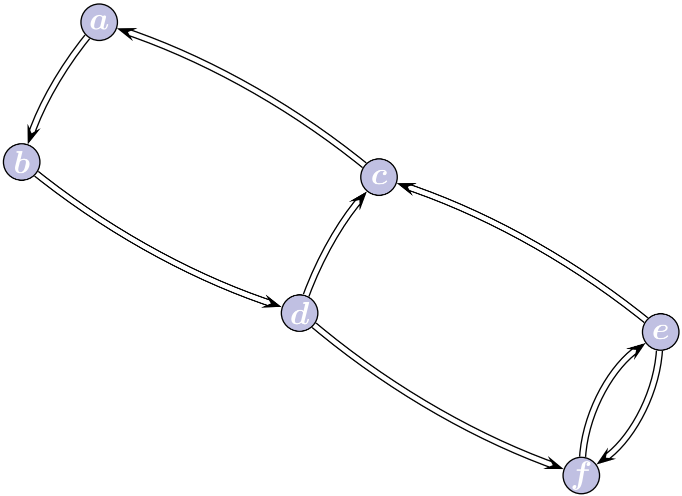
Modélisation du plan d’une ville

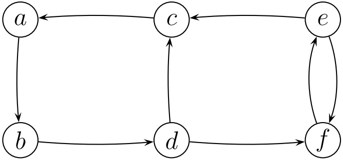



a
b
c
d
e
f
W 29th St
W 28th St
5th Ave
E 29th St
E 28th St
E 27th St
E 30th St
Madison Ave
Wilfred's Tailor
The Church of the Transfiguration
New York Open Center
KEKO CAFE
JB Prince
The Crooked Knife
PS 450
Mason Jar NYC
One Club For Art & Copy
Starbucks
Next Jump, Inc
Mondo
Duravit NYC
Blue Fountain Media
Ben & Jack's Steak House
LTI Lightside Photographic Services
Martha Washington
California Pizza Kitchen at Park Avenue South
Millesime
Institute for Integrative Nutrition
ILILI
Cafe 28
Carlton Hotel, Autograph Collection®
Byblos
Tavern 29
The UPS Store
M&T Bank
Pranna
The Evelyn
Play
The Prince George Ballroom
Wedding Atelier
The Windsor
Lacoste
Chef 28
Gansevoort Park Avenue NYC
Snafu 28
Shorty's
Birch Coffee
The MAve NYC
The Churchill Tavern
Hour Fitness
National Museum of Mathematics
Birchbox
Humanscale
Eyeview
Essen Fast Slow Food
28 St [6]


a
b
c
d
e
f
W 29th St
E 29th St
E 30th St
W 28th St
E 28th St
E 27th St
5th Ave
Madison Ave
Park Ave S
Wilfred's Tailor
The Church of the Transfiguration
New York Open Center
KEKO CAFE
JB Prince
The Crooked Knife
PS 450
Mason Jar NYC
One Club For Art & Copy
Starbucks
Next Jump, Inc
Ben & Jack's Steak House
Mondo
Blue Fountain Media
Duravit NYC
LTI Lightside Photographic Services
Martha Washington
California Pizza Kitchen at Park Avenue South
Millesime
Institute for Integrative Nutrition
Carlton Hotel, Autograph Collection®
Byblos
Cafe 28
The UPS Store
ILILI
M&T Bank
Pranna
Tavern 29
Starbucks
The Evelyn
Play
The Prince George Ballroom
Wedding Atelier
Chef 28
The Windsor
Lacoste
Gansevoort Park Avenue NYC
Snafu 28
Shorty's
Birch Coffee
The MAve NYC
Hour Fitness
National Museum of Mathematics
Birchbox
Brasserie Les Halle
Humanscale
Eyeview
'Essen Fast Slow Food

Modélisation du plan d'une ville




a
c
e
b
d
f

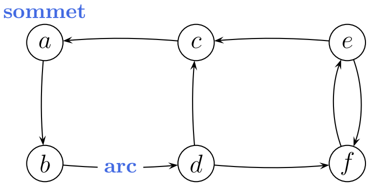


Diagramme d'un graphe orienté

Un **graphe orienté** est défini par un ensemble de **sommets** et par un ensemble d'**arcs**. Chaque arc possède une **orientation** et ne peut être traversé que dans un seul sens.

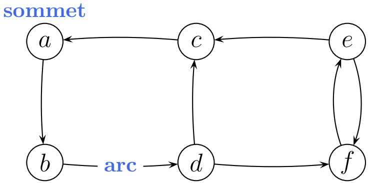


Diagramme d'un graphe orienté

Un **graphe orienté** est défini par un ensemble de **sommets** et par un ensemble d'**arcs**. Chaque arc possède une **orientation** et ne peut être traversé que dans un seul sens.

Exemples de problèmes : validation d'un plan de circulation, calcul d'une tournée de livraison, calcul d'un itinéraire, etc.

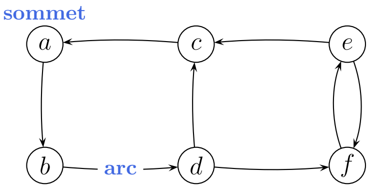


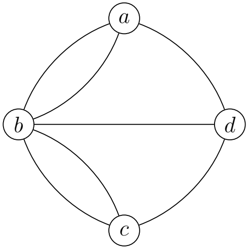
Diagramme d'un graphe orienté

Un **graphe orienté** est défini par un ensemble de **sommets** et par un ensemble d'**arcs**. Chaque arc possède une **orientation** et ne peut être traversé que dans un seul sens.

Exemples de problèmes : validation d'un plan de circulation, calcul d'une tournée de livraison, calcul d'un itinéraire, etc.

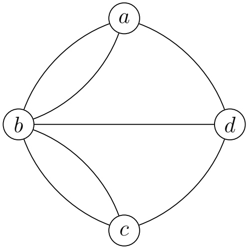
Il existe deux types de graphes, les graphes orientés (sommets et arcs) et les graphes non orientés (sommets et arêtes).

Les graphes non orientés
composés de sommets et d'arêtes

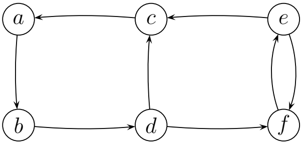


Les deux familles de graphes

Les graphes non orientés
composés de sommets et d'arêtes



Les graphes orientés
composés de sommets et d'arcs



Un **graphe d'états** est un graphe orienté où :

- les sommets représentent les différents **états** d'un système ;
- les arcs représentent des **transitions**, chaque transition étant une action ou un événement qui déclenche le passage d'un état à l'autre.

Graphes d'états

Un **graphe d'états** est un graphe orienté où :

– les sommets représentent les différents **états** d'un système ;

– les arcs représentent des **transitions**, chaque transition étant une action ou un événement qui déclenche le passage d'un état à l'autre.

Modélisation des jeux à deux joueurs : les sommets représentent les différents états du jeux et les arcs représentent les coups des joueurs.

Un **graphe d'états** est un graphe orienté où :

- les sommets représentent les différents **états** d'un système ;
- les arcs représentent des **transitions**, chaque transition étant une action ou un événement qui déclenche le passage d'un état à l'autre.

Modélisation des jeux à deux joueurs : les sommets représentent les différents états du jeux et les arcs représentent les coups des joueurs.

Remarque : l'estimation du nombre d'états est de 10^{20} *pour le jeu de dames, de* 10^{47} *pour le jeu d'échecs et de* 10^{170} *pour le jeu de Go (l'estimation du nombre d'atomes sur terre est de* 10^{50}*).*

Un **graphe d'états** est un graphe orienté où :

- les sommets représentent les différents **états** d'un système ;
- les arcs représentent des **transitions**, chaque transition étant une action ou un événement qui déclenche le passage d'un état à l'autre.

Modélisation des jeux à deux joueurs : les sommets représentent les différents états du jeux et les arcs représentent les coups des joueurs.

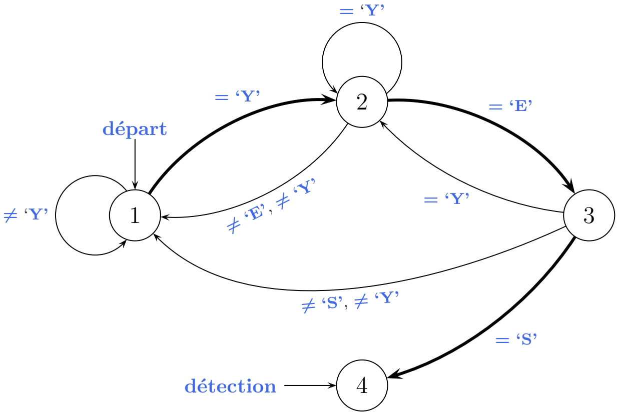
Remarque : l'estimation du nombre d'états est de 10^{20} *pour le jeu de dames, de* 10^{47} *pour le jeu d'échecs et de* 10^{170} *pour le jeu de Go (l'estimation du nombre d'atomes sur terre est de* 10^{50}*).*

Automates, diagrammes UML, graphes probabilistes (chaînes de Markov), ordonnancement de tâches, I.A., etc.

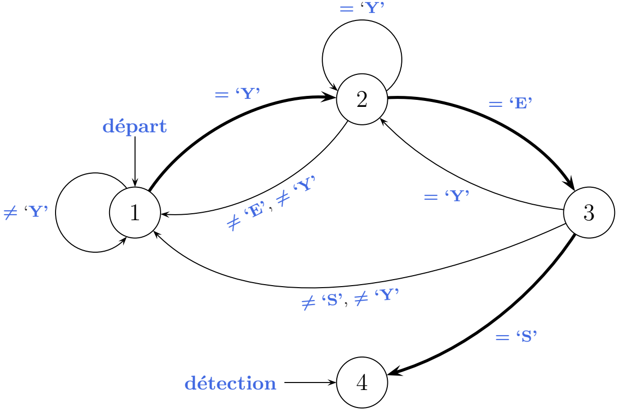
Un exemple de graphe d'états

Recherche d'une occurence du motif "YES" dans un texte T

Recherche d'une occurence du motif "YES" dans un texte T



Recherche d'une occurence du motif "YES" dans un texte T



Il reste à écrire un algorithme reposant sur cet automate...

```
i ← 1 ; etat ← 1
tant que etat ≠ 4  et  i ≤ longueur(T) faire
    suivant etat faire
        cas où 1 : faire
            si T[i] = 'Y' alors etat ← 2
        cas où 2 : faire
            si T[i] = 'E' alors etat ← 3
            sinon si T[i] ≠ 'Y' alors etat ← 1
        cas où 3 : faire
            si T[i] = 'S' alors etat ← 4
            sinon si T[i] = 'Y' alors etat ← 2
            sinon etat ← 1
    fin d'alternative
    i ← i + 1
fin tq
si etat = 4 alors ecrire("première occurence en position", i − 1)
sinon ecrire("le motif est absent")
```

Graphe d'une relation binaire

Les sommets représentent les utilisateurs de Facebook. Une arête relie deux sommets si les utilisateurs représentés par ces deux sommets sont amis. Le graphe ainsi obtenu est le **graphe d'une relation binaire** sur l'ensemble des sommets.

Les sommets représentent les utilisateurs de Facebook. Une arête relie deux sommets si les utilisateurs représentés par ces deux sommets sont amis. Le graphe ainsi obtenu est le **graphe d'une relation binaire** sur l'ensemble des sommets.

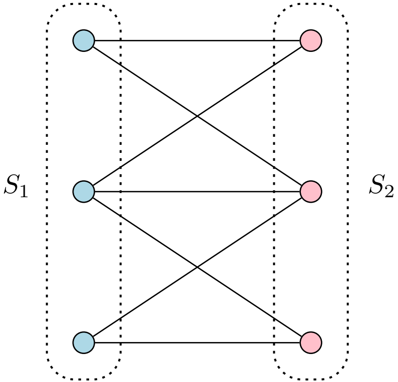
Les sommets représentent les utilisateurs de Facebook. Une arête relie deux sommets si les utilisateurs représentés par ces deux sommets sont amis. Le graphe ainsi obtenu est le **graphe d'une relation binaire** sur l'ensemble des sommets.

En moyenne (données 2015 portant sur 1.59 mrd d'utilisateurs), le *degré de séparation* entre deux personnes est de 4.57 arêtes ou 3.57 amis

Graphes bipartis

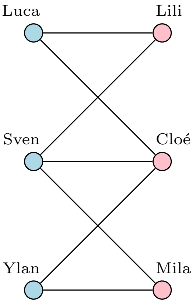
Un **graphe biparti** est un graphe non orienté dont l'ensemble des sommets est divisé en deux parties disjointes notées S_1 et S_2, de sorte que toute arête du graphe relie un sommet de S_1 et un sommet de S_2.

Un **graphe biparti** est un graphe non orienté dont l'ensemble des sommets est divisé en deux parties disjointes notées S_1 et S_2, de sorte que toute arête du graphe relie un sommet de S_1 et un sommet de S_2.



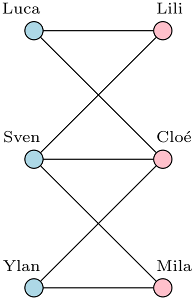
Le problème des mariages. L'ensemble S_1 représente un ensemble de n hommes, l'ensemble S_2 représente un ensemble de n femmes. Chaque arête représente une préférence réciproque entre un homme et une femme. L'objectif est d'établir des couples de sorte que tous soient mariés : **couplage parfait**.

Le problème des mariages. L'ensemble S_1 représente un ensemble de n hommes, l'ensemble S_2 représente un ensemble de n femmes. Chaque arête représente une préférence réciproque entre un homme et une femme. L'objectif est d'établir des couples de sorte que tous soient mariés : **couplage parfait**.

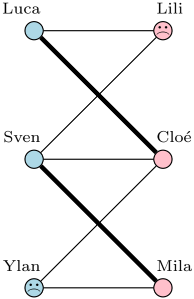


graphe biparti
des préférences

Le problème des mariages. L'ensemble S_1 représente un ensemble de n hommes, l'ensemble S_2 représente un ensemble de n femmes. Chaque arête représente une préférence réciproque entre un homme et une femme. L'objectif est d'établir des couples de sorte que tous soient mariés : **couplage parfait**.

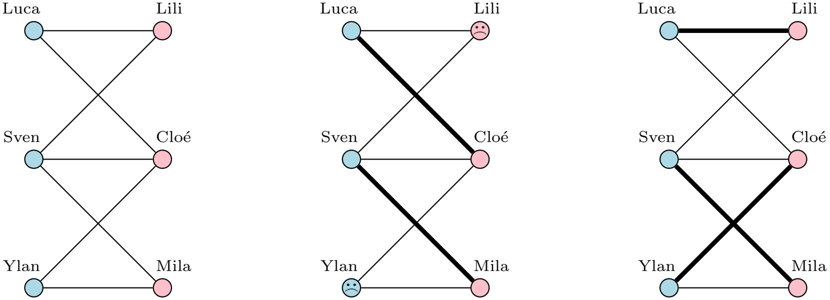


graphe biparti
des préférences



couplage non parfait
2 couples

Le problème des mariages. L'ensemble S_1 représente un ensemble de n hommes, l'ensemble S_2 représente un ensemble de n femmes. Chaque arête représente une préférence réciproque entre un homme et une femme. L'objectif est d'établir des couples de sorte que tous soient mariés : **couplage parfait**.



graphe biparti des préférences | couplage non parfait 2 couples | couplage parfait 3 couples

Domaines d'applications

– réseaux routiers, ferroviaires, informatique, téléphoniques, ...

– réseaux de transport (marchandises, eau, électricité, gaz, ...)

– réseaux sociaux

– gestion de production

– gestion de projet (ordonnancement des tâches et calendrier d'exécution, affectation des tâches, ...)

– gestion logistique (emploi du temps, ...)

– etc.

Objectifs du cours

Le vocabulaire de la théorie des graphes.

Quelques éléments de théorie des graphes.

Des algorithmes sur les graphes.