Exercices corrigés supplémentaires.
Propriétés des relations binaires - Division euclidienne et diviseurs d'un entier.

Exercice 1 : On considère les deux relations binaires suivantes dans l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$:
$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,3)\}$
$\mathcal{T} = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3)\}$

1. Représenter chaque relation par un diagramme sagittal.
   Les questions suivantes ont pour but d'étudier des propriétés de ces relations. Les tableaux donnés seront à compléter jusqu'à ce qu'on puisse conclure, éventuellement dès qu'un contre-exemple apparaît.
2. Compléter les tableaux ci-dessous avec V (vrai) ou F (faux). Conclure pour chacune des relations.

x	$x\mathcal{R}x$
1	
2	
3	

x	$x\mathcal{T}x$
1	
2	
3	

3. Compléter les tableaux ci-dessous avec V (vrai) ou F (faux) en-dessous de $x\mathcal{R}y$, de $y\mathcal{R}x$ puis du connecteur $\rightarrow$. Conclure pour chacune des relations si elle est symétrique ou pas.

x	y	$x\mathcal{R}y \quad \rightarrow \quad y\mathcal{R}x$
1	1	
1	2	
1	3	
2	1	
2	2	
2	3	
3	1	
3	2	
3	3	

x	y	$x\mathcal{T}y \quad \rightarrow \quad y\mathcal{T}x$
1	1	
1	2	
1	3	
2	1	
2	2	
2	3	
3	1	
3	2	
3	3	

4. Compléter les tableaux ci-dessous avec V (vrai) ou F (faux) de la même façon que précédemment en ne reportant dans les trois colonnes à gauche, que les triplets (x, y, z) tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ soient à Vrai pour le premier tableau, et $x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}z$ soient à Vrai pour le deuxième. Ecrire alors Vrai ou Faux en-dessous de $x\mathcal{R}z$, respectivement $x\mathcal{T}z$, puis en-dessous du connecteur $\rightarrow$.
   Conclure pour chacune des relations si elle est transitive ou pas.

x	y	z	$(x\mathcal{R}y \quad ET \quad y\mathcal{R}z) \quad \rightarrow \quad x\mathcal{R}z$
1	1	1	
1	1	2	

x	y	z	$(x\mathcal{T}y \quad ET \quad y\mathcal{T}z) \quad \rightarrow \quad x\mathcal{T}z$
1	1	1	
1	1	2	

5. Compléter les tableaux ci-dessous avec V (vrai) ou F (faux) comme précédemment. Conclure pour chacune des relations si elle est antisymétrique ou pas.

x	y	$x\mathcal{R}y \quad ET \quad y\mathcal{R}x \quad \to \quad x = y$
1	1	
1	2	
1	3	
2	1	
2	2	
2	3	
3	1	
3	2	
3	3	

x	y	$x\mathcal{T}y \quad ET \quad y\mathcal{T}x \quad \to \quad x = y$
1	1	
1	2	
1	3	
2	1	
2	2	
2	3	
3	1	
3	2	
3	3	

Exercice 2 :

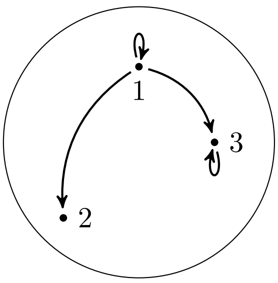
1. Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 150. En déduire le nombre de diviseurs positifs qu'il possède.
2. Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 150.

Correction

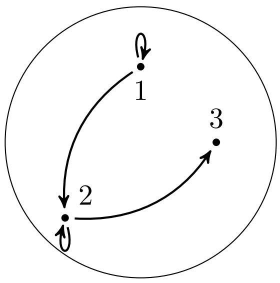
Exercice 1 : On considère les deux relations binaires suivantes dans l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$:
$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 3)\}$
$\mathcal{T} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$

1. Représenter chaque relation par un diagramme sagittal.
Solution :

$\mathcal{R}$



$\mathcal{T}$



Les questions suivantes ont pour but d'étudier des propriétés de ces relations. Les tableaux donnés seront à compléter jusqu'à ce qu'on puisse conclure, éventuellement dès qu'un contre exemple apparaît.

2. Compléter les tableaux ci-dessous avec V (vrai) ou F (faux). Conclure pour chacune des relations.

x	$x\mathcal{R}x$
1	V
2	F
3	

x	$x\mathcal{T}x$
1	V
2	V
3	F

$\mathcal{R}$ n'est pas réflexive car $2\not\mathcal{R}2$. $\mathcal{T}$ n'est pas réflexive car $3\not\mathcal{R}3$

Remarque : il n'est pas nécessaire de compléter le tableau entièrement lorsque l'on rencontre un contre-exemple.

3. Compléter les tableaux ci-dessous avec V (vrai) ou F (faux). Conclure pour chacune des relations si elle est symétrique ou pas.

x	y	$x\mathcal{R}y$	$\rightarrow$	$y\mathcal{R}x$
1	1	V	V	V
1	2	V	F	F
1	3			
2	1			
2	2			
2	3			
3	1			
3	2			
3	3			

x	y	$x\mathcal{T}y$	$\rightarrow$	$y\mathcal{T}x$
1	1	V	V	V
1	2	V	F	F
1	3			
2	1			
2	2			
2	3			
3	1			
3	2			
3	3			

$\mathcal{R}$ n'est pas symétrique car $1\mathcal{R}2$ mais $2\not\mathcal{R}1$.
$\mathcal{T}$ n'est pas symétrique car $1\mathcal{T}2$ mais $2\not\mathcal{T}1$.

4. Compléter les tableaux ci-dessous avec V (vrai) ou F (faux). Conclure pour chacune des relations si elle est transitive ou pas.

x	y	z	$(x\mathcal{R}y$	ET	$y\mathcal{R}z)$	$\rightarrow$	$x\mathcal{R}z$
1	1	1		V		V	V
1	1	2		V		V	V
1	1	3		V		V	V
3	3	3		V		V	V

x	y	z	$(x\mathcal{T}y$	ET	$y\mathcal{T}z)$	$\rightarrow$	$x\mathcal{T}z$
1	1	1		V		V	V
1	1	2		V		V	V
1	2	2		V		V	V
1	2	3		V		F	F

$\mathcal{R}$ est transitive car $\forall x, y, z \in A$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.

$\mathcal{T}$ n'est pas transitive car $1\mathcal{T}2$ et $2\mathcal{T}3$ mais $1\not\mathcal{T}3$.

5. Compléter les tableaux ci-dessous avec V (vrai) ou F (faux). Conclure pour chacune des relations si elle est antisymétrique ou pas.

x	y	$x\mathcal{R}y$	ET	$y\mathcal{R}x$	$\rightarrow$	$x=y$
1	1		V		V	V
1	2		F			
1	3		F			
2	1		F			
2	2		F			
2	3		F			
3	1		F			
3	2		F			
3	3		V		V	V

x	y	$x\mathcal{T}y$	ET	$y\mathcal{T}x$	$\rightarrow$	$x=y$
1	1		V		V	V
1	2		F			
1	3		F			
2	1		F			
2	2		V		V	V
2	3		F			
3	1		F			
3	2		F			
3	3		F			

$\mathcal{R}$ est antisymétrique car $\forall x, y \in A$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$.

$\mathcal{T}$ est antisymétrique car $\forall x, y \in A$, si $x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}x$ alors $x = y$.

Exercice 2 :

1. Décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier 150 :

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi $150 = 2 \times 3 \times 5^2$.
Le nombre de diviseurs positifs de 150 est donc $(1 + 1)(1 + 1)(1 + 2) = 12$.

2. Déterminons l'ensemble des diviseurs positifs de 150.
Pour cela développons le produit $P = (1 + 2)(1 + 3)(1 + 5 + 5^2)$.

$$\begin{aligned} P = (1 + 2 + 3 + 2 \times 3)(1 + 5 + 5^2) = {} & 1 + 5 + 5^2 + \\ & 2 + 2 \times 5 + 2 \times 5^2 + \\ & 3 + 3 \times 5 + 3 \times 5^2 + \\ & 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 5 + 2 \times 3 \times 5^2 \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(150) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150\}$.