Chapitre 3 : Les ensembles

1 Ensemble. Elément d'un ensemble

Définition 1. Intuitivement un ensemble E est constitué d'objets appelés **éléments de l'ensemble** E.
Si a est un élément de E, on dit aussi que a **appartient à** E, et on note $a \in E$.
Sinon on note $a \notin E$ pour exprimer que a n'est pas un élément de E.

Exemple 1 : l'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

Exemple 2 :

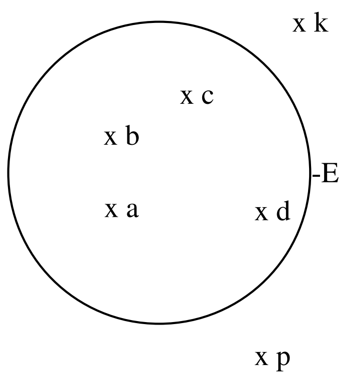


FIGURE 1 – $E = \{a, b, c, d\}$; $a \in E$; $k \notin E$

Définition 2. On pourra définir un ensemble de deux façons :

— **Par extension : en citant chacun de ses éléments**.
Notation : $E = \{a, b, c, d\}$.
L'ordre d'écriture des éléments n'importe pas. On écrit chaque élément une seule fois.

Exemples : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$; l'ensemble des lettres du mot "ananas" est $E = \{a, n, s\}$.

— **Par compréhension : à partir d'une propriété caractéristique** $\mathcal{P}$ **de ses éléments**.
Soit A l'ensemble des éléments de E qui vérifient la propriété $\mathcal{P}$.
On note : $A = \{x \in E / x \text{ vérifie } \mathcal{P}\}$
Une telle propriété, qui est vérifiée par chaque élément de A et seulement par eux, est appelée une **propriété caractéristique des éléments** de l'ensemble A.

Exemples :

1. Soit P l'ensemble des entiers naturels pairs. $P = \{n \in \mathbb{N} / \ \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p\}$
2. Soit I l'ensemble des entiers naturels impairs. $I = \{n \in \mathbb{N} / \ \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p + 1\}$
3. Soit E l'ensemble des nombres réels dont le carré est inférieur à 2. $E = \{x \in \mathbb{R} / \ x^2 \leq 2\}$
4. Soit B l'ensemble des habitants de la ville de Metz.
5. Soit $E = \{2, 6, 8, 12\}$. "Etre pair" est une propriété des éléments de E mais n'en est pas une propriété caractéristique, car il existe bien d'autres nombres pairs.

Attention, un même objet mathématique peut être à la fois un ensemble et être lui-même élément d'un autre ensemble.

Exemple : Une ville est un ensemble d'habitants. On peut considérer l'ensemble E dont les éléments sont les villes d'un département.

On peut ainsi considérer des ensembles d'ensembles.
Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les ensembles.
Alors $\mathcal{E}$ est élément de $\mathcal{E}$.

Considérons maintenant l'ensemble $V = \{E/E \notin E\}$.
A-t-on $V \in V$?

si oui, on en déduit que $V \notin V$ d'après la définition de V,

si non, on en déduit que $V \in V$.

On aboutit donc à un paradoxe.

Axiome : On convient que pour tout x, on a : x n'appartient pas à x ($x \notin x$). Autrement dit, un objet mathématique ne peut pas être élément de lui-même.

Définition 3. Un ensemble comportant un seul élément est appelé un **singleton** (de l'anglais : *single*). Un ensemble comportant exactement deux éléments est appelé une **paire**.

Ne pas confondre le singleton $\{a\}$ et l'objet a.
Ne pas confondre la paire $\{a, b\}$ avec le couple (a, b) (voir produit cartésien).

Exemples : Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Les singletons de E sont : $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ et $\{6\}$.

$\{2, 4\}$ est une paire d'éléments de E. On a $\{2, 4\} = \{4, 2\}$.

Exercice : trouver toutes les paires d'éléments de E (il y en a 15).

Définition 4. Deux ensembles E et F sont **égaux** s'ils sont constitués des mêmes éléments. Sinon on dit que E et F sont **distincts**.

Autrement dit :
$E = F$ si et seulement si $\forall x(x \in E \iff x \in F)$, ou encore :
$E = F$ si et seulement si : $\forall x(x \in E \Rightarrow x \in F)$ et $(x \in F \Rightarrow x \in E)$
On écrit plus simplement : $E = F$ si et seulement si $\begin{cases} \forall x \in E, x \in F \\ \forall x \in F, x \in E \end{cases}$

Exemples :

1. Soit $A = \{x \in \mathbb{N}/x^2 \leqslant 11\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. A-t-on $A = B$?
   Les entiers naturels dont le carré est inférieur ou égal à 11 sont exactement 0,1,2 et 3. Donc $A = B$.
2. Soit $C = \{x \in \mathbb{Z}/x^2 \leqslant 11\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$.
   $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. $-2 \in C$ mais $-2 \notin B$ donc $C \neq B$.

Axiome : Il existe un ensemble qui ne comporte aucun élément.

Définition 5. On l'appelle **l'ensemble vide** et on le note $\emptyset$.

Théorème 1.1. *Cet ensemble est unique. (Démonstration en exercice.)*

Attention : { $\emptyset$ } n'est pas l'ensemble vide ! C'est un singleton dont l'unique élément est ... l'ensemble vide. (voir plus bas)

Définition 6. Soit A un ensemble fini. On appelle cardinal de A le nombre d'éléments de A, que l'on note Card(A) ou $|A|$.

Exemples :

1. Si $A = \{a, b\}$ alors Card(A)=2.
2. Si $A = \{a\}$ alors Card(A)=1.
3. Si $A = \emptyset$ alors Card(A)=0.

2 Partie d'un ensemble. Inclusion

Définition 7. Soient E et F deux ensembles. On dit que E est une **partie de** F si tout élément de E est élément de F. On note $E \subset F$ et on dit aussi que E est **inclus dans** F ou que E est **un sous-ensemble de** F.
Ainsi : $E \subset F$ si et seulement si : $\forall x \in E, x \in F$.

Exemple : Soient $B = \{0, 1, 2, 3\}$ et $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
$B \subset C$ car tout élément de B est élément de C. Mais $C \not\subset B$ car $-1 \in C$ mais $-1 \notin B$.

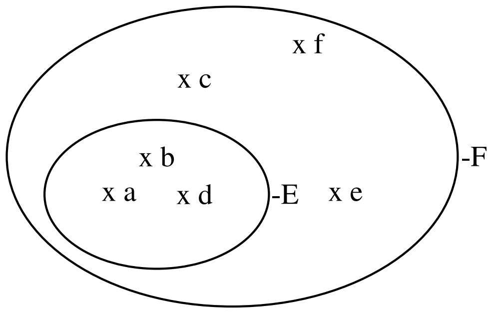


FIGURE 2 – $E \subset F$

Théorème 2.1 (Théorème de la double inclusion)**.**

$$A = B \textit{ si et seulement si } (A \subset B \textit{ et } B \subset A)$$

La démonstration est une conséquence immédiate des définitions 4. et 7 .

Conséquence : Ensembles distincts
$A \neq B$ si et seulement si $A \not\subset B \; ou \; B \not\subset A$
$A \neq B$ si et seulement si : $(\exists x, x \in A \; et \; x \notin B \;) ou (\; \exists x, x \in B, x \notin A)$

Théorème 2.2 (Transitivité de l'inclusion)**.** *Soient A, B et C trois ensembles.*
Si $A \subset B$ *et* $B \subset C$ *alors* $A \subset C$.

Théorème 2.3. *Soit* E *un ensemble. Alors l'ensemble vide est une partie de* E *. De même* E *est une partie de* E.

Ainsi : $\emptyset \subset E \; et \; E \subset E$

Définition 8. L'ensemble vide est appelée **la partie vide** de E. E est appelé **la partie pleine** de E. Une partie de E qui n'est ni la partie vide ni la partie pleine est appelée une **partie propre** de E.

3 Opérations sur les ensembles

Définition 9. On appelle **réunion de deux ensembles** A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent **à l'un au moins** des ensembles A et B. On le note $A \cup B$.

Ainsi, étant données A et B deux parties de E : $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ } ou \text{ } x \in B\}$.
(ou est **inclusif** c'est à dire qu'il signifie : soit l'un soit l'autre soit les deux).

Remarque. $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$.

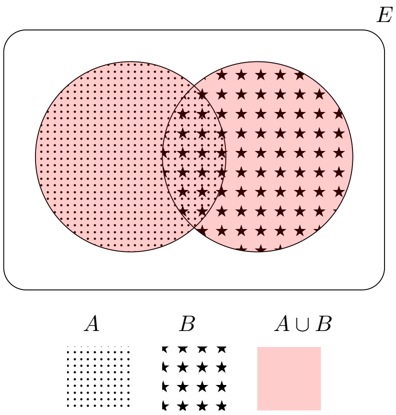


Figure 3 - Réunion de deux ensembles

Exemple :
Soit $A = \{a, b, d, f, g\}$ et $B = \{a, c, d, e, f\}$.
Alors $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

On peut démontrer, à titre d'exercice que : $A \subset C$ *et* $B \subset C$ si et seulement si $(A \cup B) \subset C$.

Définition 10. On appelle **intersection de deux ensembles** A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent **à la fois** à A et à B. On le note $A \cap B$.

Ainsi étant données A et B deux parties de E : $A \cap B = \{x \in E / \ x \in A \text{ } et \text{ } x \in B\}$.

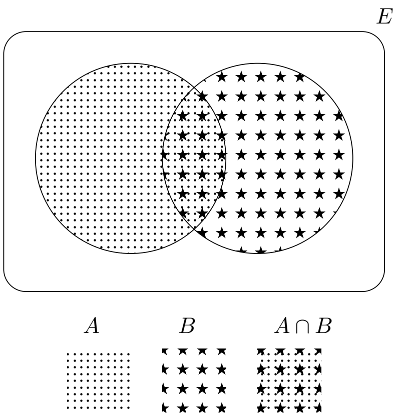


Figure 4 - Intersection de deux ensembles

Exemple :
Soit $A = \{a, b, d, f, g\}$ et $B = \{a, c, d, e, f\}$.
Alors $A \cap B = \{a, d, f\}$.

Remarque. $(A \cap B) \subset A$ et $(A \cap B) \subset B$.

On peut démontrer, à titre d'exercice que : $C \subset A$ et $C \subset B$ si et seulement si $C \subset (A \cap B)$.

Théorème 3.1. *L'intersection est distributive par rapport à la réunion c'est à dire que, pour toutes parties A, B et C de$E$, on a :* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Théorème 3.2. *La réunion est distributive par rapport à l' intersection c'est à dire que, pour toutes parties A, B et C de E, on a :* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Définition 11. On dit que A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

Ne pas confondre avec deux ensembles distincts c'est à dire tels que $A \neq B$.

Exemple : Soit $A = \{a, b, d, f, g\}$ et $B = \{a, c, d, e, f\}$. A et B sont distincts puisque, par exemple, $b \in A$ mais $b \notin B$. Mais il ne sont pas disjoints puisque $A \cap B = \{a, d, f\}$, et donc $A \cap B \neq \emptyset$.

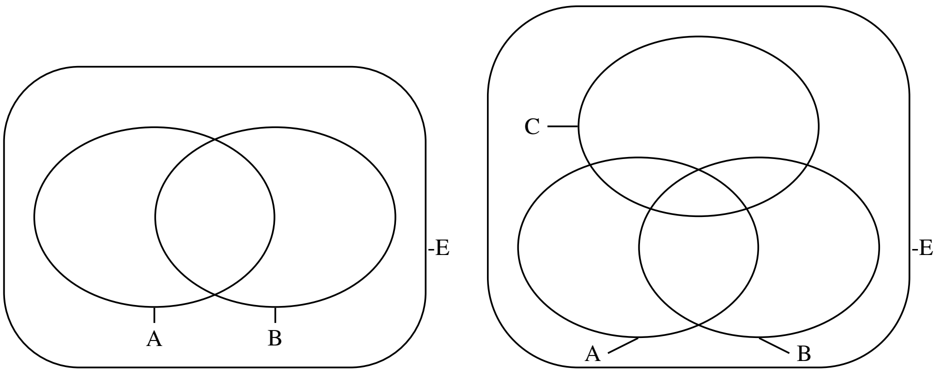
Proposition 1. *Etant donnés deux ensembles finis A et B, on a*

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B).$$

Exemple : Dans l'exemple ci-dessus, $Card(A) = 5,\ Card(B) = 5$ et $Card(A \cap B) = 3$.
Alors $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B) = 5 + 5 - 3 = 7$.

Remarque. Quand on ajoute $Card(A)$ et $Card(B)$ on compte deux fois les éléments communs à A et à B, d'où la formule donnée par la proposition 1.

4 Diagramme de Venn



C'est la façon de représenter par des "ronds" deux (respectivement trois) parties quelconques d'un ensemble E. Il serait en effet erroné de représenter A et B disjoints dans le premier cas.

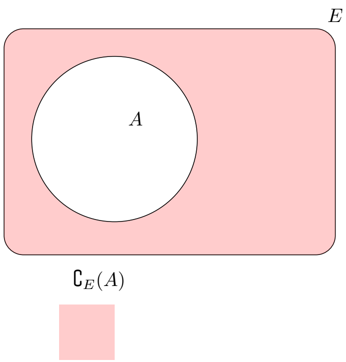
Considérons que E est l'ensemble des habitants d'un village. Notons A l'ensemble de ses habitants qui appartiennent au club de pétanque, et B l'ensemble de ses habitants qui appartiennent au comité des fêtes.
Sans précision supplémentaire nous devons considérer que certains habitants font partie à la fois du club de pétanque et du comité des fêtes.
Notons maintenant C l'ensemble des habitants ayant entre 25 et 40 ans.
Sans précision supplémentaire nous devons considérer que certains habitants n'appartiennent qu'à un seul de ces trois ensembles, ou à deux d'entre eux exactement, ou aux trois en même temps.
D'où le diagramme de Venn ci-dessus.

5 Complémentaire d'une partie d'un ensemble

Définition 12. Soit A **une partie d'un ensemble** E. On appelle **complémentaire de** A **dans** E l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On note cette partie $\complement_E(A)$ ou encore $\overline{A}$ lorsque E est bien précisé par le contexte.

Ainsi :

$$\complement_E(A) = \{x/x \in E \text{ et } x \notin A\}.$$



Exemple :
Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ et $A = \{a, b, d, f, g\}$.

Alors $\complement_E(A) = \{c, e, h, i\}$.

Figure 5 - Complémentaire de A dans E

Théorème 5.1. *Soit E un ensemble. Alors $\complement_E(\emptyset) = E$ et $\complement_E(E) = \emptyset$.*

Théorème 5.2. *Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E. Alors :*

$$A \subset B \text{ si et seulement si } \complement_E(B) \subset \complement_E(A).$$

Théorème 5.3. *Soit A et B deux parties de E. Alors :*

1. $A \cup \complement_E(A) = E$ *c-à-d :* $A \cup \overline{A} = E$
2. $A \cap \complement_E(A) = \emptyset$ *c-à-d :* $A \cap \overline{A} = \emptyset$
3. $\complement_E(\complement_E(A)) = A$ *c-à-d :* $\overline{\overline{A}} = A$

   Formules de Morgan :
4. $\complement_E(A \cup B) = \complement_E(A) \cap \complement_E(B)$ *c-à-d :* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
5. $\complement_E(A \cap B) = \complement_E(A) \cup \complement_E(B)$ *c-à-d :* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Proposition 2. *Soit E un ensemble et A une partie de E. Alors*

$$Card(\complement_E(A)) = Card(E) - Card(A).$$

Exemple : Dans l'exemple précédent, $Card(E) = 9,\ Card(A) = 5$, donc

$$Card((\complement_E(A)) = Card(E) - Card(A) = 9 - 5 = 4.$$

6 Ensemble des parties d'un ensemble

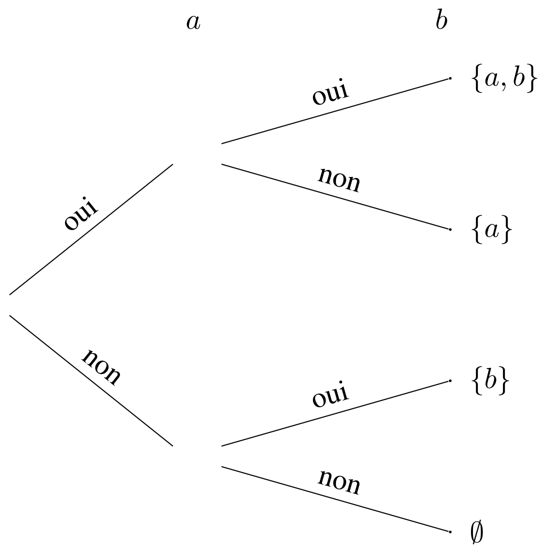
Définition 13. On appelle **ensemble des parties de** E l'ensemble dont les éléments sont les parties de E. On note $\mathcal{P}(E)$ cet ensemble. Ainsi :

$$\mathcal{P}(E) = \{X/X \subset E\}$$

$$X \in \mathcal{P}(E) \iff X \subset E$$

Exemple : $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\{a,b\},\{a\},\{b\},\emptyset\}$

Pour déterminer toutes les parties d'un ensemble fini E on peut s'aider d'un arbre, appelé arbre des parties.
On écrit en ligne les éléments de E et on construit l'arbre en dessous.



Les feuilles de l'arbre sont toutes les parties de E.

Théorème 6.1. *Soit E un ensemble à n éléments, $n \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de parties de E est 2^n.*
Ainsi, $Card(E) = n \Rightarrow Card(\mathcal{P}(E)) = 2^{Card(E)} = 2^n$.

Dans l'exemple ci-dessus, $Card(\{a,b\}) = 2$ et on a bien $Card(\mathcal{P}(\{a,b\})) = 2^2 = 4$.

Définition 14. Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$. Une partie de E à p éléments est aussi appelée **combinaison de** p **éléments de** E.

Théorème 6.2. *Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$. Le nombre de combinaisons de p éléments de E est le nombre $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, appelé coefficient binômial d'indices n et p.*

Rappel : Si n est un entier naturel non nul alors $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$ et se lit factorielle n. De plus $0! = 1$ par convention.

Remarque : Le nombre de parties de E est la somme des nombres de parties à 0 élément, 1 élément, 2 éléments, $\cdots$, n éléments. Ainsi :

$$2^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$$

Exercice : Dans une urne contenant 8 jetons numérotés (de 1 à 8) on en choisit 3 simultanément au hasard. Combien y-a-t-li de résultats possibles ?
Un tirage est une combinaison de 3 éléments d'un ensemble à 8 éléments.
$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5)(1 \times 2 \times 3)} = 7 \times 8 = 56$
Il y a donc 56 tirages possibles

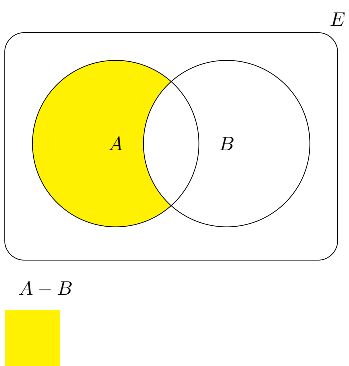
7 Autres opérations sur les ensembles

Définition 15. On appelle **différence de deux ensembles** A et B **pris dans cet ordre** l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et mais n'appartiennent pas à B. On le note $A - B$.

Ainsi : Soient A et B deux parties de E.

$$A - B = \{x \in E / \ x \in A \ et \ x \notin B\}$$

.



Exemple :
Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$,
$A = \{a, b, d, f, g\}$ et $B = \{a, c, d, e, f\}$.

Alors $A - B = \{b, g\}$.

Figure 6 - Différence de deux ensembles

Proposition 3. *Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. Alors :*

1. $A - B = A \cap \complement_E(B)$
2. $Card(A - B) = Card(A) - Card(A \cap B)$

Exemple : Considérons l'ensemble A des 150 habitants d'une ville qui appartiennent au club de pétanque, et l'ensemble B des 60 habitants qui font partie du comité des fêtes. On sait par ailleurs que 25 habitants font partie du club de pétanque et du comité des fêtes. Combien d'habitants font partie du club de pétanque sans faire partie du comité des fêtes ?

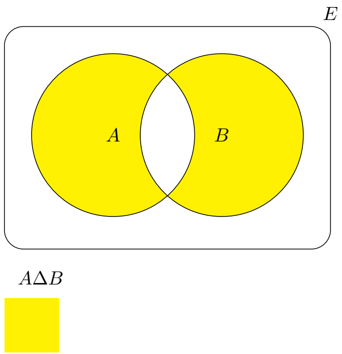
$Card(A - B) = Card(A) - Card(A \cap B) = 150 - 25 = 125.$
125 habitants font partie du club de pétanque sans faire partie du comité des fêtes.

Définition 16. On appelle **différence symétrique de deux ensembles** A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A soit à B, mais pas aux deux en même temps. On le note $A \Delta B$.

Ainsi : Soient A et B deux parties de E.

$$A \Delta B = \{x \in E / \ (x \in A \ et \ x \notin B) \ ou \ (x \notin A \ et \ x \in B)\}$$

.



Exemple :
Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$,
$A = \{a, b, d, f, g\}$ et $B = \{a, c, d, e, f\}$.

Alors $A\Delta B = \{b, c, e, g\}$.

Figure 7 - Différence symétrique de deux ensembles

Proposition 4. *Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. Alors :*

1. $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
2. $Card(A\Delta B) = Card(A - B) + Card(B - A) = Card(A) + Card(B) - 2Card(A \cap B)$

Exemple : Reprenons l'exemple ci-dessus. Combien d'habitants font partie du club de pétanque ou du comité des fêtes, mais pas des deux en même temps ?

$Card(A\Delta B) = Card(A) + Card(B) - 2Card(A \cap B) = 150 + 60 - 50 = 160$
160 habitants font partie du club de pétanque ou du comité des fêtes, mais pas des deux.

8 Couple. Produit cartésien de deux ensembles

Intuitivement, on se donne un couple lorsqu'on considère deux éléments a et b pris dans cet ordre. On note (a, b) ce couple. (On remarquera que a et b peuvent être égaux).

Théorème 8.1. *Les couples (a, b) et (c, d) sont égaux si et seulement si* $\begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

Définition 17. Soient A et B deux ensembles. On appelle produit cartésien de A par B l'ensemble noté $A \times B$ défini par :

$$A \times B = \{(a, b)/ \ a \in A \ et \ b \in B\}$$

Définition 18. Soit A un ensemble. On appelle carré cartésien de A le produit cartésien de A par lui-même. On le note A^2.

$$A^2 = A \times A = \{(a, b)/ \ a \in A \ et \ b \in A\}.$$

Représentation cartésienne - Exemple
Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2\}$. La représentation cartésienne de $A \times B$ est la suivante :

A \ B	1	2
a	$(a, 1)$	$(a, 2)$
b	$(b, 1)$	$(b, 2)$
c	$(c, 1)$	$(c, 2)$

Ainsi $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.

Théorème 8.2. *Soient A et B deux ensembles finis. Alors $Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$.*

Dans l'exemple ci-dessus, $Card(A \times B) = 3 \times 2 = 6$.

9 Généralisation : produit cartésien d'ensembles

Définition 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et A_1, A_2,$\cdots$ A_n, n ensembles.
Le produit cartésien $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est l'ensemble des n-uplets $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ tels que $a_i \in A_i, \ \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Théorème 9.1. *Soient A_1, A_2, $\cdots$, A_n des ensembles finis.*
Alors $Card(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = Card(A_1) \times Card(A_2) \times \cdots \times Card(A_n)$.

Exemple : On souhaite former un code de 4 symboles tel que les deux premiers symboles soient des chiffres et les deux derniers des lettres majuscules. Par exemple : 05ZZ.

Notons C l'ensemble des chiffres de 0 à 9 et L l'ensemble des lettres de A à Z. Un tel code est un élément du produit cartésien $C \times C \times L \times L = C^2 \times L^2$.
Nombre de codes possibles :

$$Card(C^2 \times L^2) = Card(C)^2 \times Card(L)^2 = 10^2 \times 26^2 = 67\,600.$$

Définition 20. Soit E un ensemble à n éléments et $n, p \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$. On appelle **arrangement de p éléments de E** un p-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ d'éléments de E tous distincts.

Théorème 9.2. *: Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$. Le nombre d'arrangements de p éléments de E est le nombre*

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1).$$

On montre que $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Définition 21. Si E possède n éléments, un arrangement de n éléments de E est appelé **permutation** de E.

Remarque 1 : le nombre de permutations de E est donc $A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1) = n!$

Exemple 1 : Supposons maintenant que nous devions former un code composé de 4 chiffres distincts pris dans l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, par exemple 1984.
Un tel code est un arrangement de 4 éléments d'un ensemble à 10 éléments. Le nombre de codes possibles est donc

$$A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040.$$

Un code formé de 10 chiffres distincts de E est une permutation de E. Le nombre de codes de ce format est donc $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3\,628\,800$.

Exemple 2 : clé candidate
On considère la table ADHERENT(nom-adh, prenom-adh, tel-adh, ad-adh, iban-adh, date-adh, date-fin, cereale) dont un extrait est donné ci-dessous.

no	nom_adh	prenom_adh	tel_adh	ad_adh	iban	date_adh	date_fin	cereale
1	ANDRE	Marc	0301090807	Grand Pre 57222 Saint-Pierre	FR101000000106729450762	01/02/2022	01/02/2023	mais
2	BARNABE	Hippolyte	0301020304	Grand Champ 57111 Saint-Jean	FR101000000108138423562	05/01/2022	05/01/2023	ble
3	BARNABE	Lucien	0301020304	Grand Champ 57111 Saint-Jean	FR101000000108639178074	07/01/2022	07/01/2023	orge
4	CHRISTIAN	Andre	0301181917	Rue de la Fontaine 57333 Saint-Michel	FR102000000292348721501	03/01/2022	03/01/2023	ble
5	DUMONT	Jacques	0301171819	Grand Fosse 57111 Saint-Jean	FR102000000465198627014	05/01/2022	05/01/2023	ble
6	EUDES	Pascal	0301102030	Grand Pre 57222 Saint-Pierre	FR102000000479284361820	03/02/2022	03/02/2023	orge
7	EUDES	Pascal	0301112131	Les Etangs 57444 Saint-Germain	FR102000000412816348279	03/03/2022	03/03/2023	orge
8	FAYARD	Jules	0301203040	Grand Rue 57111 Saint-Jean	FR102000000893762459241	04/01/2022	04/01/2023	mais
9	GEORGES	Aime	0301191817	Place du Marche 57444 Saint-Germain	FR102000000281627496821	15/02/2022	15/02/2023	epeautre
10	GRAND	Laurent	0301304050	Rue Longue 57333 Saint-Michel	FR101000000107652497831	02/01/2022	02/01/2023	mais
11	HUGUES	Michel	0301405060	Grand Pre 57222 Saint-Pierre	FR101000000105289673109	01/03/2022	01/03/2023	epeautre
12	IVAN	Sophie	0301181917	Rue de la Fontaine 57333 Saint-Michel	FR102000000274592830182	03/01/2022	03/01/2023	ble
13	JACQUES	Jean	0301403020	Rue Haute 57444 Saint-Germain	FR101000000105267831042	08/04/2022	08/04/2023	orge
14	LUCIEN	Vincent	0301718191	La Chaume 57111 Saint-Jean	FR101000000104286913572	10/01/2022	10/01/2023	epeautre
15	PIERRE	Andre	0301202122	Grand Fosse 57111 Saint-Jean	FR102000000192837465823	08/03/2022	08/03/2023	ble

nom-adh, prenom-adh, tel-adh, ad-adh, iban-adh, date-adh, date-fin et cereale sont les attributs. Une clé candidate est un n-uplet d'attributs qui définit de façon unique chaque ligne de la table et qui est minimal : si l'on supprime l'un des attributs, plusieurs lignes de cette table correspondront au (n-1)-uplet obtenu.

Par exemple le triplet (nom-adh, prenom-adh, tel-adh) est une clé candidate.

Le triplet (nom-adh, prenom-adh, iban-adh) en est une aussi.

Par contre le couple (nom-adh, prenom-adh) n'est pas une clé candidate car les lignes 6 et 7 de la table correspondent toutes les deux au couple (EUDES,Pascal).

Le quadruplet (nom-adh, prenom-adh, iban-adh, cereale) n'est pas une clé candidate car si l'on supprime l'attribut cereale, le triplet obtenu définit de façon unique chaque ligne de la table. C'est l'une des clés candidates citées plus haut.

10 Partition

Définition 22. Soit E un ensemble. Et soient A_1, $A_2 \cdots A_n$, n parties de E.
On dit que $A_1, A_2, \cdots, A_n$ constituent une partition de E si :

i) aucune de ces parties n'est vide.
ii) pour tout $i \neq j$, A_i et A_j sont disjoints (c'est-à-dire : $A_i \cap A_j = \emptyset$).
iii) la réunion des A_i pour i de 1 à n est la partie pleine E. (on note : $\cup_{i=1}^{n} = E$)

Exemple 1 : Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Soient $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{d, e\}$, et $A_3 = \{f, g\}$.
Alors A_1, A_2 et A_3 constituent une partition de E : A_1, A_2 et A_3 sont 2 à 2 disjoints et leur réunion est bien égale à E.

Exemple 2 : Si A est une partie propre de E, A et $\complement_E(A)$ constituent une partition de E.

Exemple 3 : Soit E un ensemble non vide. E à lui seul constitue une partition de E.

PROPRIETES DES OPERATIONS SUR LES ENSEMBLES

Théorème : Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. On a les égalités suivantes :

$$A \cap A = A \quad \text{(idempotence)}$$
$$A \cap B = B \cap A \quad \text{(commutativité)}$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad \text{(associativité)}$$

On se permet donc de noter $A \cap B \cap C$ ce dernier ensemble.

$$A \cup A = A \quad \text{(idempotence)}$$
$$A \cup B = B \cup A \quad \text{(commutativité)}$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{(associativité)}$$

On se permet donc de noter $A \cup B \cup C$ ce dernier ensemble.

Soit A une partie de E. On a :

$$A \cup E = E$$
$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap E = A$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Théorème : L'intersection est distributive par rapport à la réunion : pour toutes parties A, B et C de E on a

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup A \cap C)$$

La réunion est distributive par rapport à l'intersection : pour toutes parties A, B et C de E on a

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap A \cup C)$$

Théorème :

$$A \cup (A \cap B) = A \quad \text{(absorption)}$$
$$A \cap (A \cup B) = A \quad \text{(absorption)}$$

Passage au complémentaire
Théorème :

$$A \cup \complement_E(A) = E \quad \text{ou} \quad A \cup \overline{A} = E$$
$$A \cap \complement_E(A) = \emptyset \quad \text{ou} \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Lois de Morgan :

$$\complement_E(A \cup B) = \complement_E(A) \cap \complement_E(B), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\complement_E(A \cap B) = \complement_E(A) \cup \complement_E(B), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$