Graphes orientés

F.M.

2024/2025

Un **graphe orienté** G est un couple (S, A) où :

- S est un ensemble fini d'éléments appelés **sommets**.
- A est un sous-ensemble de $S \times S$ dont les éléments, des couples de sommets, sont appelés **arcs**.

Le **nombre de sommets** du graphe est appelé **ordre** du graphe.

Le **nombre d'arcs** du graphe est appelé **taille** du graphe.

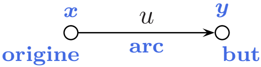
Un arc $u \in A$ s'écrit $\boldsymbol{u = (x, y)}$ où $x \in S$ et $y \in S$:

- Les sommets $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont les **extrémités** de l'arc $\boldsymbol{u}$.
- L'arc est **orienté** de x vers y.
- $\boldsymbol{x}$ est l'**extrémité initiale** ou **origine** de l'arc.
- $\boldsymbol{y}$ est l'**extrémité terminale** ou **but** de l'arc.
- Si $\boldsymbol{x = y}$ l'arc est appelé **boucle**.

 2 / 42

Diagramme d'un graphe

Le **diagramme d'un graphe** est la représentation graphique d'un graphe. Plusieurs possibilités :



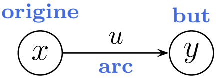
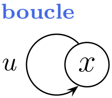
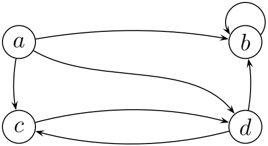


Diagramme d'une boucle :

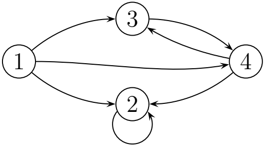


3 / 42

$$G = (S, A)$$
$$S = \{a, b, c, d\}$$
$$A = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (c, d), (d, b), (d, c)\}$$



$$G = (S, A)$$
$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}$$

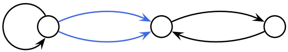


ces deux graphes sont de taille 7 et d'ordre 4

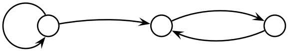
ils sont ***isomorphes*** : $a \leftrightarrow 1, b \leftrightarrow 2, c \leftrightarrow 3, d \leftrightarrow 4$

4 / 42

Un graphe orienté $G = (S, A)$ est dit **simple** si il ne contient pas deux arcs identiques (ou parallèles).



graphe non simple contenant deux arcs parallèles (en bleu)



graphe simple

Dorénavant, le terme **graphe** désignera toujours un **graphe orienté simple**

5 / 42

Sous-graphes et graphes partiels

Un **sous-graphe** de $G = (S, A)$ est un graphe $\boldsymbol{G' = (S', A')}$ où $\boldsymbol{S'}$ **est un sous-ensemble de** $\boldsymbol{S}$ et où $\boldsymbol{A'}$ **est un sous-ensemble de** $\boldsymbol{A}$.

Si A' ne contient que les arcs dont les extrémités appartiennent à S', alors le sous-graphe $G' = (S', A')$ est appelé **sous-graphe de** $\boldsymbol{G}$ **induit par** $\boldsymbol{S'}$.

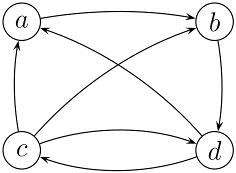
On obtient un sous-graphe de G en supprimant des sommets de G ainsi que tout arc ayant pour extrémité l'un des sommets supprimés.

Si $S' = S$ alors le sous-graphe $G' = (S, A')$ est appelé **sous-graphe couvrant** ou **graphe partiel** de G.

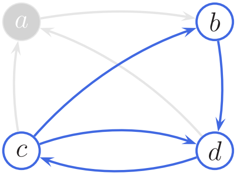
On obtient un sous-graphe couvrant ou graphe partiel de G en supprimant des arcs de G mais en conservant tous les sommets de G.

6 / 42

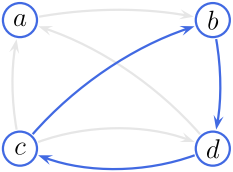
Illustration



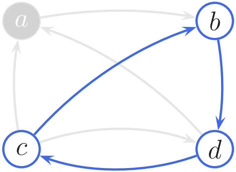
un graphe G



un sous-graphe de G induit par $\{b, c, d\}$



un sous-graphe couvrant ou graphe partiel de G



un sous-graphe partiel de G

7 / 42

Soit $G = (S, A)$ un graphe. Alors A est le graphe d'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur S définie par : $\forall x, y \in S,\ x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow (x, y) \in A$.

$G = (S, A)$ est dit :

réflexif si $\forall x \in S, (x, x) \in A$

symétrique si $\forall x, y \in S,\ (x, y) \in A \Rightarrow (y, x) \in A$

asymétrique si $\forall x, y \in S,\ (x, y) \in A \Rightarrow (y, x) \notin A$

antisymétrique si $\forall x, y \in S,\ (x, y) \in A$ et $(y, x) \in A \Rightarrow x = y$

transitif si $\forall x, y, z \in S,\ (x, y) \in A$ et $(y, z) \in A \Rightarrow (x, z) \in A$

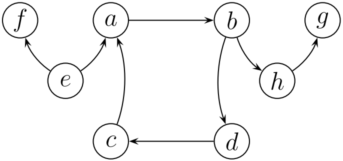
complet si $\forall x, y \in S,\ x \neq y \Rightarrow (x, y) \in A$ et $(y, x) \in A$

8 / 42

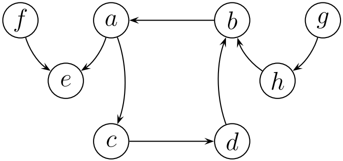
Graphe réciproque

On appelle **graphe réciproque** d'un graphe $G = (S, A)$, le graphe obtenu en inversant l'orientation des arcs de G.

On note $G^{-1} = (S, A^{-1})$ le graphe réciproque de G où l'ensemble d'arcs A^{-1} est défini par : $A^{-1} = \{(x, y) \ ; \ (y, x) \in A\}$.



$G = (S, A)$



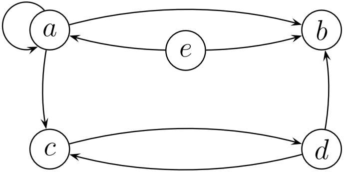
$G^{-1} = (S, A^{-1})$

9 / 42

Incidence

Soit $G = (S, A)$ un graphe et $u = (x, y)$ un arc de G :

- Les sommets x et y sont dits **incidents** à u.
- L'arc u est dit **incident** à x et à y.
- L'arc u est dit **incident vers l'extérieur** à x.
  On dit aussi que u est un arc **sortant** de x.
- L'arc u est dit **incident vers l'intérieur** à y.
  On dit aussi que u est un arc **entrant** en y.

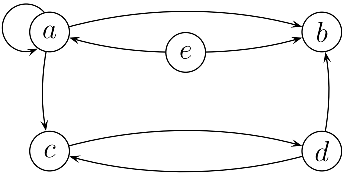


(c, d) est **incident** à c et d
c et d sont **incidents** à (c, d)
(c, d) est un arc **sortant** de c
(c, d) est arc entrant **entrant** en d

10 / 42

Soit $G = (S, A)$ un graphe et $u = (x, y)$ un arc de G :

- Les sommets x et y sont dits **adjacents** ou **voisins**.
- On dit que y est un **voisin extérieur** ou **successeur** de x.
- On dit que x est un **voisin intérieur** ou **prédécesseur** de y.
- Deux arcs sont dit **adjacents** si ils ont une extrémité commune.



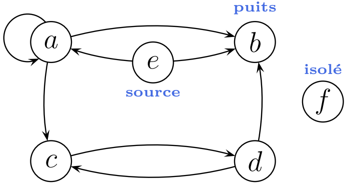
a est **adjacent** à a, b, c et e
a, b, c et e sont les **voisins** de a
a, b et c sont les **successeurs** de a
a et e sont les **prédécesseurs** de a
l'arc (c, d) est **adjacent** aux arcs (a, c), (d, b) et (d, c)

11 / 42

Adjacence (suite)

Soit $G = (S, A)$ un graphe et soit x un sommet de G. On note :

- $\boldsymbol{V^+(x)}$, l'ensemble des successeurs de x.
  Un sommet sans successeur est appelé **puits** du graphe.
- $\boldsymbol{V^-(x)}$, l'ensemble des prédécesseurs de x.
  Un sommet sans prédécesseur est appelé **source** du graphe.
- $\boldsymbol{V(x) = V^+(x) \cup V^-(x)}$, l'ensemble des voisins de x.
  Un sommet sans voisin est dit **isolé** (à la fois source et puits).



$$V^+(a) = \{a, b, c\} \qquad V^+(b) = \emptyset$$

$$V^-(a) = \{a, e\} \qquad V^-(e) = \emptyset$$

$$V(a) = \{a, b, c, e\} \qquad V(f) = \emptyset$$

Les degrés d'un sommet

Soit $G = (S, A)$ un graphe et soit x un sommet de G :

- Le nombre de successeurs du sommet x, noté $\boldsymbol{\delta^+(x)}$, est appelé **degré extérieur** de x. On a donc : $\boldsymbol{\delta^+(x) = |V^+(x)|}$.

  $\boldsymbol{\delta^+(x)}$ est aussi le **nombre d'arcs sortant** de x.

- Le nombre de prédécesseurs du sommet x, noté $\boldsymbol{\delta^-(x)}$, est appelé **degré intérieur** de x. On a donc : $\boldsymbol{\delta^-(x) = |V^-(x)|}$.

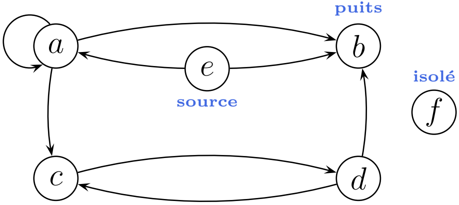
  $\boldsymbol{\delta^-(x)}$ est aussi le **nombre d'arcs entrant** en x.

- Le nombre $\boldsymbol{\delta(x) = \delta^+(x) + \delta^-(x)}$ est appelé **degré** de x.

  $\boldsymbol{\delta(x)}$ est aussi le **nombre d'arcs incidents** à x.

Le degré d'un sommet n'est pas égal au nombre de voisins de x. En effet, un sommet y peut être à la fois successeur et prédécesseur de x. C'est le cas si le graphe contient des arcs symétriques et/ou des boucles.

13 / 42



x	a	b	c	d	e	f
$V^+(x)$	$\{a,b,c\}$	$\emptyset$	$\{d\}$	$\{c,b\}$	$\{a,b\}$	$\emptyset$
$\delta^+(x)$	3	0	1	2	2	0
$V^-(x)$	$\{a,e\}$	$\{a,d,e\}$	$\{a,d\}$	$\{c\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\delta^-(x)$	2	3	2	1	0	0
$V(x)$	$\{a,b,c,e\}$	$\{a,d,e\}$	$\{a,d\}$	$\{c,b\}$	$\{a,b\}$	$\emptyset$
$\delta(x)$	5	3	3	3	2	0

14 / 42

Soit $G = (S, A)$ un graphe.

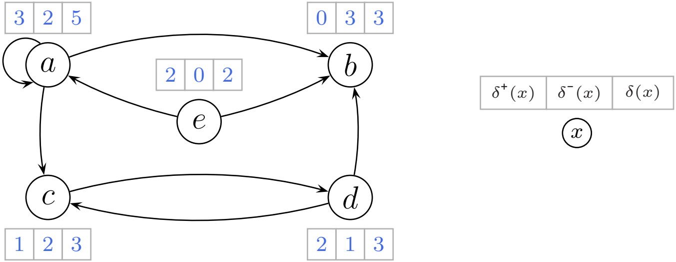
$$\sum_{x \in S} \delta^+(x) = \sum_{x \in S} \delta^-(x) = |A| \quad \text{et} \quad \sum_{x \in S} \delta(x) = 2 \times |A|$$

Le degré intérieur $\delta^+(x)$ est égal au nombre d'arcs sortant du sommet x. La sommet des degrés intérieurs est donc égale au nombre d'arcs du graphe. On en déduit que : $\sum_{x \in S} \delta(x) = \sum_{x \in S} (\delta^+(x) + \delta^-(x)) = \sum_{x \in S} \delta^+(x) + \sum_{x \in S} \delta^-(x) = |A| + |A| = 2|A|$.

Le nombre de sommets de degré impair est pair

La somme des degrés est paire et une somme d'entiers est paire si tous les entiers sont pairs ou si il y a un nombre pair d'entiers impairs.

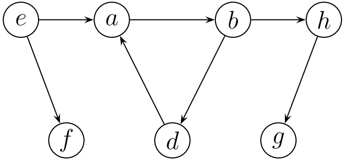
15 / 42



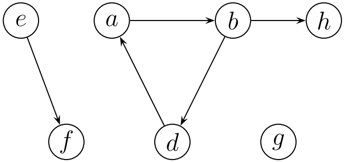
x	a	b	c	d	e	Σ
$\delta^+(x)$	3	0	1	2	2	$8 = \lvert A \rvert$
$\delta^-(x)$	2	3	2	1	0	$8 = \lvert A \rvert$
$\delta(x)$	5	3	3	3	2	$16 = 2 \times \lvert A \rvert$

16 / 42

Graphe connexe



un graphe **connexe**



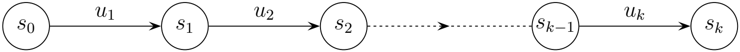
un graphe **non connexe**
composé de 3 sous-graphes
connexes

 17 / 42

Un **chemin** allant d'un sommet s_0 à un sommet s_k dans un graphe $G = (S, A)$ est une suite alternée de sommets et d'arcs

$$\boldsymbol{(s_0, u_1, s_1, u_2, s_2, \ldots, s_{k-1}, u_k, s_k)}$$

telle que $\boldsymbol{u_i = (s_{i-1}, s_i) \in A}$, pour tout $i \in [\![1 \,..\, k]\!]$.



Les sommets s_0 et s_k sont appelés **extrémités** du chemin, s_0 est appelé **origine** du chemin et s_k est appelé **but** du chemin.

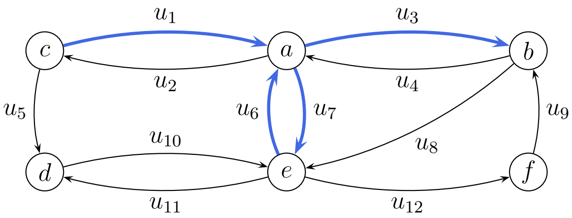
La **longueur** d'un chemin $\mathcal{C}$, notée $\boldsymbol{\ell(\mathcal{C})}$, est égale au nombre d'arcs qui composent ce chemin.

Cas particulier : un chemin de la forme (x) où x est un sommet est considéré comme un chemin de longueur 0 allant de x à x.

 18 / 42

La notation $(s_0, u_1, s_1, u_2, s_2, \dots, s_{k-1}, u_k, s_k)$ d'un chemin se simplifie en ne considérant que les arcs : $(u_1, u_2, \dots, u_k)$.

Dans ce cours, on ne s'intéresse qu'aux graphes simples. Pour ce type de graphes, la notation d'un chemin se simplifie en ne considérant que les sommets : $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_k)$.



$$(c, u_1, a, u_7, e, u_6, a, u_3, b) \equiv (c, a, e, a, b) \equiv (u_1, u_7, u_6, u_3)$$

est un chemin de longueur 4 allant de c à b

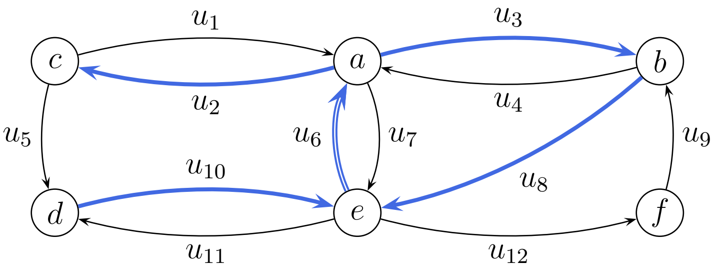
19 / 42

Chemins remarquables

- Un chemin est dit **simple** si ses arcs sont 2 à 2 distincts. C'est un chemin qui ne passe pas 2 fois par un même arc.
- Un chemin est dit **eulérien** si il est simple et de longueur $|A|$. C'est un chemin simple qui passe par tous les arcs du graphe.
- Un chemin est dit **élémentaire** si ses sommets sont 2 à 2 distincts. C'est un chemin qui ne passe pas 2 fois par un même sommet.
- Un chemin est dit **hamiltonien** si il est élémentaire et de longueur $|S| - 1$. C'est un chemin élémentaire qui passe par tous les sommets du graphe.

20 / 42

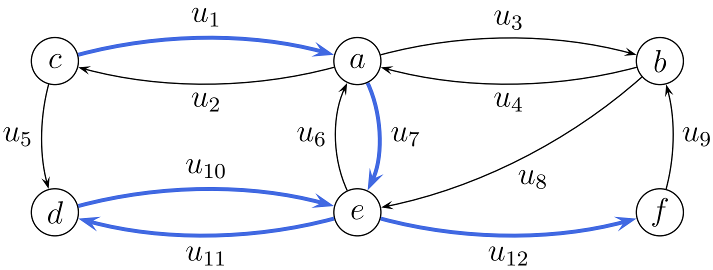
Illustration



$(d, e, a, b, e, a, c) \equiv (u_{10}, u_6, u_3, u_8, u_6, u_2)$

c'est un chemin (non remarquable) de d à c

(il passe 2 fois par l'arc u_6)

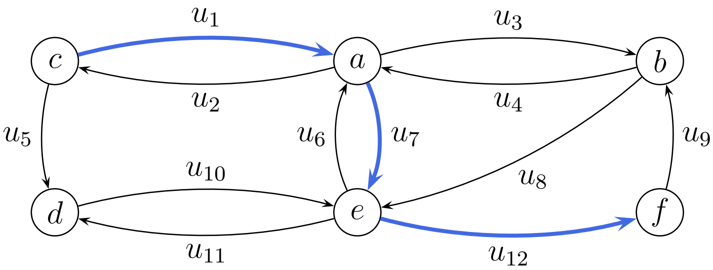


$$(c, a, e, d, e, f) \equiv (u_1, u_7, u_{11}, u_{10}, u_{12})$$

c'est un chemin **simple** non élémentaire de c à f

(il passe 2 fois par le sommet e)

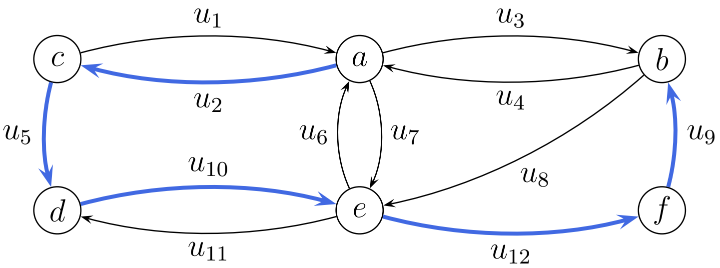
Illustration



$(c, a, e, f) \equiv (u_1, u_7, u_9)$
est un chemin **élémentaire** de c à f

23 / 42

Illustration



$$(a, c, d, e, f, b) \equiv (u_2, u_5, u_{10}, u_{12}, u_9)$$

c'est un chemin **hamiltonien** de a à b

Propriétés

Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre $n = |S|$.

Un chemin élémentaire est nécessairement simple. Mais un chemin simple n'est pas nécessairement élémentaire.

Si un graphe contient un chemin allant de x à y alors il contient nécessairement un chemin élémentaire allant de x à y.

Tout chemin élémentaire est de longueur au plus $n - 1$. Un chemin élémentaire de longueur $n - 1$ est nécessairement un chemin hamiltonien.

25 / 42

Un graphe $G = (S, A)$ admet un chemin eulérien d'origine x et de but y si et seulement si G est connexe et si les conditions suivantes suivantes sont vérifiées :

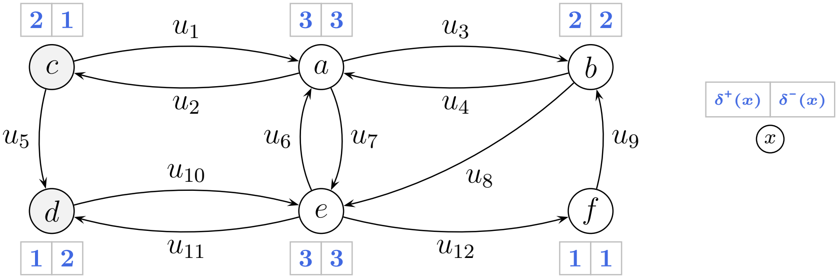
- $\delta^+(x) = \delta^-(x) + 1$
- $\delta^-(y) = \delta^+(y) + 1$
- $\delta^+(s) = \delta^-(s),\ \forall s \in S \setminus \{x, y\}$

Si $\boldsymbol{x}$ est **l'origine du chemin** alors il y a un arc sortant de x. Puis, à chaque fois que l'on entre en x, il doit être possible d'en ressortir : **il y a un arc sortant de plus que d'arcs entrants**.

Si $\boldsymbol{y}$ est **le but du chemin** alors il y a un arc entrant en y. Puis, à chaque fois que l'on entre en y, il doit être possible d'en ressortir : **il y a un arc entrant de plus que d'arcs sortants**.

Soit **$\boldsymbol{s}$ un sommet interne du chemin** (x n'est ni l'origine ni le but du chemin). À chaque fois que l'on entre en s, il doit être possible d'en ressortir : **il y a autant d'arcs entrants que d'arcs sortants**.

26 / 42



le sommet c vérifie $\delta^+(c) = \delta^-(c) + 1$
le sommet d vérifie $\delta^-(d) = \delta^+(d) + 1$
tout sommet s, $s \neq c$ et $s \neq d$, vérifie $\delta^+(s) = \delta^-(s)$

ce graphe admet un chemin eulérien allant du sommet c au sommet d

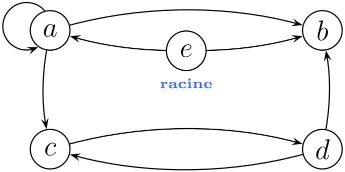
27 / 42

Soit $G = (S, A)$ un graphe.

Un sommet y est un **descendant** d'un sommet x dans G si et seulement si $y = x$ ou il existe un chemin de x à y dans G.

Une sommet r est une **racine** de G si tout sommet de G est un descendant de r.

Un sommet y est un **antécédent** d'un sommet x dans G si et seulement si $y = x$ ou il existe un chemin de y à x dans G.

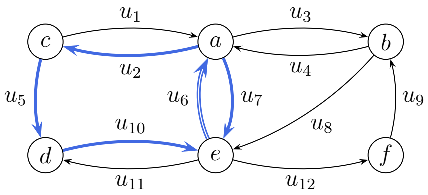


descendants de c : $\{b, c, d\}$
descendants de b : $\{b\}$
antécédents de c : $\{a, c, d, e\}$
antécédents de e : $\{e\}$

 28 / 42

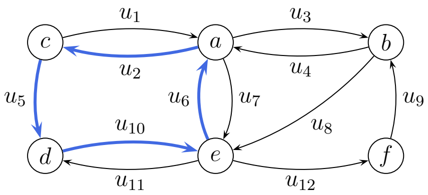
Notion de circuit

Un chemin est dit **fermé** si son origine et son but sont confondus.



$(u_{10}, u_6, u_7, u_6, u_2, u_5)$
$\equiv$
(d, e, a, e, a, c, d)
est un chemin fermé de d à d

Un **circuit** est un **chemin fermé simple**. Un circuit ne passe pas 2 fois par un même arc.



(u_{10}, u_6, u_2, u_5)
$\equiv$
(d, e, a, c, d)
est un circuit

29 / 42

Circuits remarquables

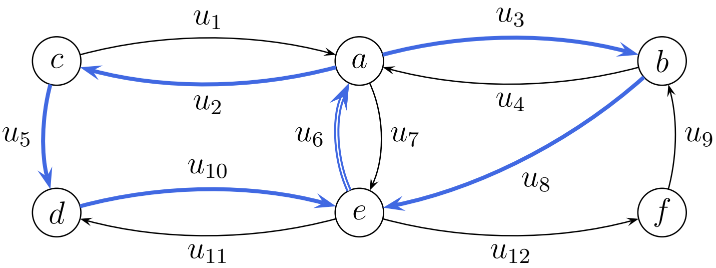
- Par définition, **un circuit est toujours simple**.

- Un circuit est dit **eulérien** si il est de longueur $|A|$. C'est un circuit qui passe par tous les arcs du graphe.

- Un circuit est dit **élémentaire** si ses sommets sont 2 à 2 distincts. C'est un circuit qui ne passe pas 2 fois par un même sommet.

- Un circuit est dit **hamiltonien** si il est élémentaire et de longueur $|S| - 1$. C'est un circuit élémentaire qui passe par tous les sommets du graphe.

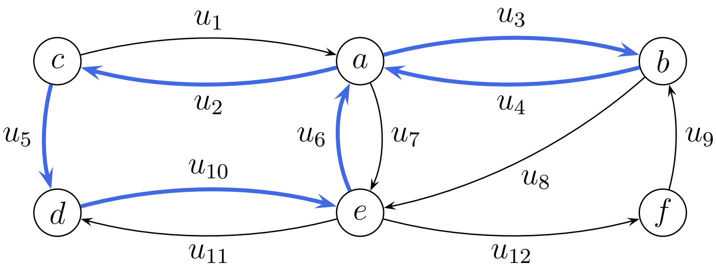
30 / 42



$$
\begin{array}{lcl}
& (d, e, a, b, e, a, c, d) & \equiv & (u_{10}, u_6, u_3, u_8, u_6, u_2, u_5) \\
\equiv & (e, a, b, e, a, c, d, e) & \equiv & (u_6, u_3, u_8, u_6, u_2, u_5, u_{10}) \\
& \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

c'est un **chemin fermé** qui passe 2 fois par u_6 et 2 fois par a et e
mais ce n'est pas un circuit

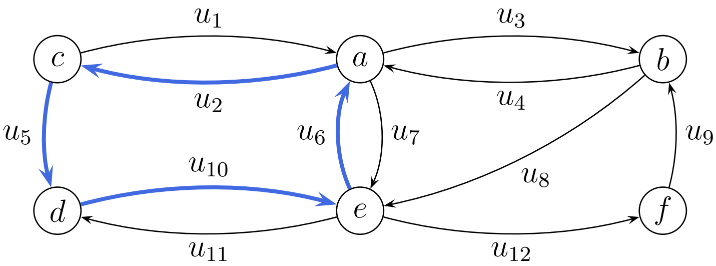
31 / 42



$$
\begin{array}{cccc}
 & (c, d, e, a, b, a, c) & \equiv & (u_5, u_{10}, u_6, u_3, u_4, u_2) \\
\equiv & (d, e, a, b, a, c, d) & \equiv & (u_{10}, u_6, u_3, u_4, u_2, u_5) \\
 & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

c'est un **circuit**

Illustration

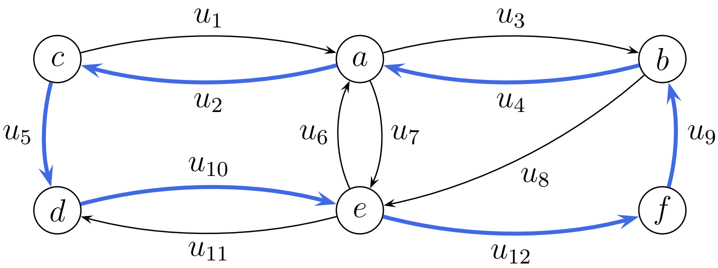


$$
\begin{array}{ccccc}
 & (c, d, e, a, c) & \equiv & (u_5, u_{10}, u_6, u_2) \\
\equiv & (d, e, a, c, d) & \equiv & (u_{10}, u_6, u_2, u_5) \\
 & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

c'est un **circuit élémentaire**

33 / 42

Illustration

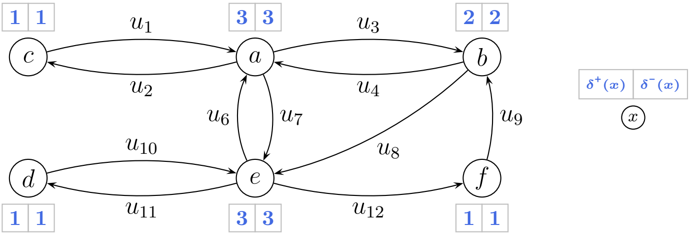


$$
\begin{array}{cccc}
 & (c, d, e, f, b, a, c) & \equiv & (u_5, u_{10}, u_{12}, u_9, u_4, u_2) \\
\equiv & (d, e, f, b, a, c, d) & \equiv & (u_{10}, u_{12}, u_9, u_4, u_2, u_5) \\
 & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

c'est un **circuit hamiltonien**

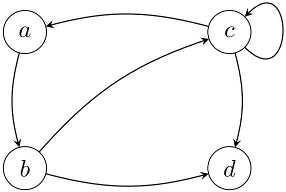
Un graphe G admet un circuit eulérien si et seulement si G est connexe et tout sommet s de G vérifie $\delta^+(s) = \delta^-(s)$.

À chaque fois que l'on entre en un sommet s, il doit être possible d'en ressortir. Il doit donc y avoir autant d'arcs entrants en s que d'arcs sortants de s.



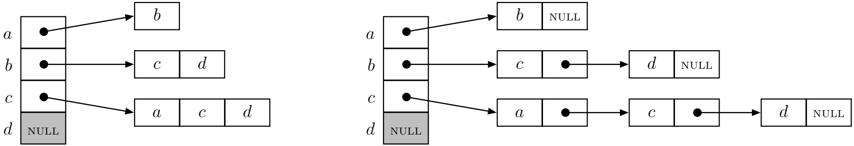
ce graphe admet un circuit **eulérien**
mais n'admet pas de chemin eulérien

35 / 42



$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}$$

matrice d'adjacence



listes d'adjacences

36 / 42

À propos des algorithmes

La plupart des algorithmes de ce cours seront écrits en utilisant un **pseudo-code** adapté au traitement des graphes. Les instructions habituelles seront agrémentées de **notations mathématiques**.

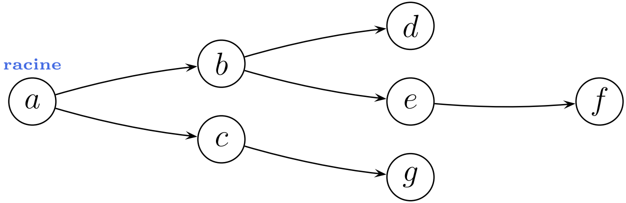
Ces algorithmes ne reposent pas sur des structures de données (pour représenter les ensembles, les graphes, etc.). Leur implémentation dépendra des structures choisies (matrice d'adjacence, listes d'adjacences, classes, etc.).

L'algorithme ci-dessous détermine l'ensemble des descendants d'un sommet donné s dans un graphe $G = (S, A)$. Principe : si x est un descendant de s et si l'arc (x, y) existe alors y est aussi un descendant de s.

$D \leftarrow \{s\}$ .... ☞ D est l'ensemble des successeurs de s
tant que $\exists\,(x, y) \in A$ **tel que** $x \in D$ **et** $y \notin D$ **faire**
│ $D \leftarrow D \cup \{y\}$
fin tant que

 37 / 42

Un graphe $G = (S, A)$ est une **arborescence de racine r** ou **r-arborescence** si et seulement si **pour tout sommet s de G, il existe un unique chemin allant de r à s dans G.**



38 / 42

Caractéristiques d'une Arborescence

Soit $G = (S, A)$ une r-arborescence.

La racine r est l'unique sommet sans prédécesseur : $\boldsymbol{\delta^-(r) = 0}$.

Tout sommet $s \neq r$ ne possède qu'un et un seul prédécesseur appelé **père** de s : $\boldsymbol{\delta^-(s) = 1}$.

Un sommet s qui ne possède aucun successeur est appelé **feuille** de l'arborescence : $\boldsymbol{\delta^+(s) = 0}$.

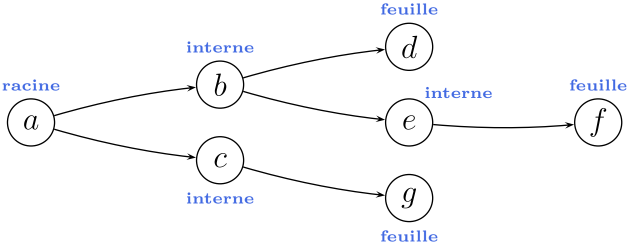
Un sommet s qui n'est ni la racine ni une feuille de G est appelé **sommet interne** de l'arborescence : $\boldsymbol{\delta^-(s) = 1}$ et $\boldsymbol{\delta^+(s) \geq 1}$.

Tout chemin de G est élémentaire et G ne contient aucun circuit.

G est d'ordre $|S|$ et de taille $\boldsymbol{|A| = |S| - 1}$.

Illustration

Soit le graphe $G = (S, A)$:



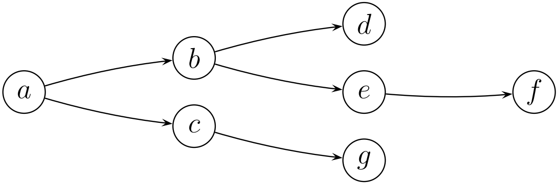
C'est une a-arborescence d'ordre $|S| = 7$ et de taille $|A| = 7 - 1 = 6$.

40 / 42

Représentation d'une arborescence

Pour représenter une r-arborescence on peut utiliser une **table des pères** notée $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ et définie comme suit :

$$\forall s \in S,\ \mathcal{A}[s] = \begin{cases} \varnothing & \text{si } s = r \\ x & \text{si } s \neq r \text{ et si } x \text{ est le père de } s \end{cases}$$



s	a	b	c	d	e	f	g
$\mathcal{A}[s]$	$\varnothing$	a	a	b	b	e	c

Comment retrouver le chemin allant de r à un sommet donné s ?

Mots clés

graphe orienté, sommet, arc

sous-graphe, graphe partiel, connexité

adjacence, incidence

arcs entrant, arc sortant

prédécesseur, successeur, voisin

degré extérieur, degré intérieur, degré

sommet isolé, source, puits, racine

chemin – élémentaire, hamiltonien, simple, eulérien

descendant, antécédent

chemin fermée

circuit (simple) – élémentaire, hamiltonien, eulérien

r-arborescence, père, sommet interne, feuille

42 / 42