Feuille d'exercices n° 5
Congruences

Exercice 1 :

1. Les entiers 128 et 15 sont-ils congrus modulo 11 ?
2. Soit r un entier compris ente 0 et 6. Quelle est la valeur de r sachant que 2013 est congru à r modulo 7 ?
3. Déterminer le plus petit entier positif r tel que $2017 \equiv r \pmod{10}$.

Exercice 2 : On numérote les jours de l'année de 1 à 365. En 2014 le 1^{er} jour de l'année est un mercredi. Les affirmations suivantes sont-elles exactes ? Si ce n'est pas le cas, dire de quel jour de la semaine il s'agit.

1. En 2014 le $141^{\text{ème}}$ jour de l'année est aussi un mercredi.
2. En 2014 le $220^{\text{ème}}$ jour de l'année est aussi un mercredi.

Exercice 3 : Calculer le résidu modulo 7 de chacun des entiers suivants :

$$21;\ 34;\ 36;\ 513;\ 51^2;\ 114^3;\ 176^{5239}$$

Exercice 4 :

1. Soit n un entier. Ecrire la division euclidienne de n par 7.
   Quelles sont les valeurs possibles pour le reste ?
2. Pour chaque valeur de ce reste, calculer le résidu de n^3 modulo 7. On pourra représenter les résultats dans un tableau pour plus de clarté.
3. En déduire que n^3 est de la forme $7k$, ou $7k+1$, ou $7k-1$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5 : Déterminer les entiers n tels que $n^5 - 2$ soit divisible par 7. (Utiliser le tableau de l'exercice précédent)

Exercice 6 : Calculer le reste de la division euclidienne de $n = 19^{52} \times 23^{41}$ par 7.

Exercice 7 : Montrer que

1. Pour tout entier naturel n, $\quad 3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.
2. Pour tout entier naturel n, $\quad 7^{2n} - 23^n$ est divisible par 13.