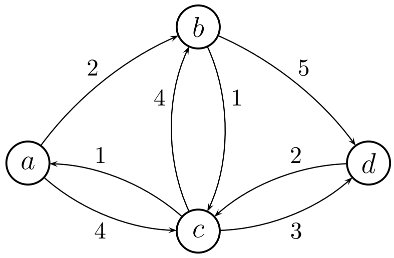
Exercice I

Considérons le graphe $G = (S, A, p)$ ci-dessous et sa matrice des poids M :

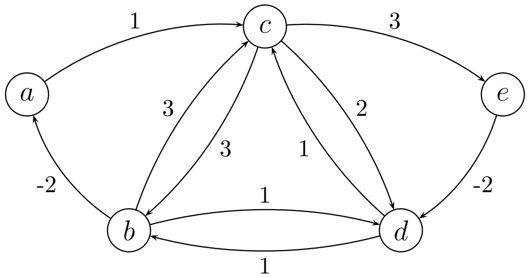


$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & \infty \\ \infty & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Appliquer l'algorithme de Floyd pour déterminer uniquement la matrice des distances de G.
2. En déduire, pour chaque sommet r de G, une r-arborescence de chemins de poids minimum.
3. On fixe le poids de l'arc (a, c) à 3. Que devient la matrice des distances ? Que peut-on dire des chemins de poids minimum d'origine a ?

Exercice II

Appliquer l'algorithme de Floyd au graphe $G = (S, A, p)$ ci-dessous pour déterminer la matrice des distances et la matrice des pères.



Exercice III

Reprenons le graphe de l'exercice II en posant $p(c, b) = -1$. Appliquer ensuite l'algorithme de Floyd en ne calculant que la matrice des distances.

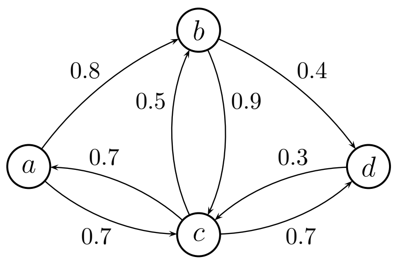
Graphes et probabilité

Soit $G = (S, A, p)$ un graphe orienté d'ordre n où **la pondération p associe une probabilité à chaque arc de A**. Le poids d'un chemin de G est le produit des poids des arcs qui le composent : c'est une probabilité. La matrice des poids M d'un tel graphe est définie comme suit :

$$\forall (x, y) \in S^2,\ M[x, y] = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ p(x, y) & \text{si } (x, y) \in A \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin A \end{cases}$$

Exemple

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.7 & 0 \\ 0 & 1 & 0.9 & 0.4 \\ 0.7 & 0.5 & 1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$



Le chemin (a, b, d, c) est de poids $0.8 \times 0.4 \times 0.3 = 0.096$. Quel est le chemin de probabilité maximum allant de a à c ?

Le problème

Déterminer tous les chemins de probabilité maximum dans un graphe $G = (S, A, p)$.

Exercice IV

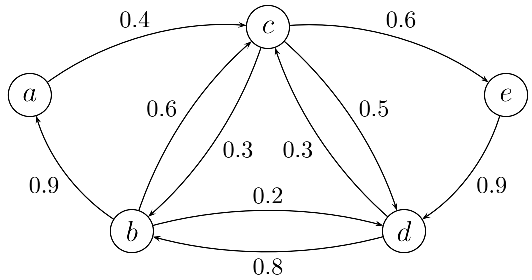
Modifier l'algorithme de Floyd pour qu'il détermine tous les chemins de probabilité maximum.

Exercice V

Appliquer l'algorithme de Floyd pour qu'il détermine uniquement la matrice des distances (des probabilités) pour le graphe de l'exemple. En déduire, pour chaque sommet r de ce graphe, une r-arborescence de chemins probabilité maximum.

Exercice VI

Appliquer l'algorithme de Floyd modifié pour déterminer uniquement la matrice des distances (des probabilités) pour le graphe ci-dessous.



Algorithme de Floyd

Donnée

M : matrice des poids d'un graphe orienté

Résultats

Π, $\mathcal{A}$: matrice des distances et matrice des pères

✎ initialisation

pour tout $x \in S$ **faire**
    pour tout $y \in S$ **faire**
        $\Pi[x, y] \leftarrow M[x, y]$
        si $x = y$ **alors** $\mathcal{A}[x, y] \leftarrow \varnothing$
        sinon si $M[x, y] = \infty$ **alors** $\mathcal{A}[x, y] \leftarrow y$
        sinon $\mathcal{A}[x, y] \leftarrow x$
    fin pour
fin pour

✎ itérations

pour tout $s \in S$ **faire**
    pour tout $x \in S$ **faire**
        pour tout $y \in S$ **faire**
            si $\Pi[x, s] + \Pi[s, y] < \Pi[x, y]$ **alors**
                $\Pi[x, y] \leftarrow \Pi[x, s] + \Pi[s, y]$
                $\mathcal{A}[x, y] \leftarrow \mathcal{A}[s, y]$
            fin si
        fin pour
    fin pour
fin pour