Correction
Feuille d'exercices n° 5 : Congruences

Exercice 1 :

1. $128 - 15 = 113$. Or 113 n'est pas divisible par 11 donc 128 et 15 ne sont pas congrus modulo 11.
2. Soit r un entier compris ente 0 et 6. Sachant que 2013 est congru à r modulo 7 et que $0 \leqslant r < 7$, r est le reste dans la division euclidienne de 2013 par 7.
$2013 = 7 \times 630 + 3$ donc $r = 3$.
3. Le plus petit entier positif r tel que $2017 \equiv r \ (mod\, 10)$ est le reste dans la division euclidienne de 2017 par 10. On l'appelle aussi résidu de 2017 modulo 10.
$2017 = 10 \times 201 + 7$ donc $r = 7$.

Exercice 2 : *On numérote les jours de l'année de 1 à 365. En 2014 le* 1er *jour de l'année est un mercredi. Les affirmations suivantes sont-elles exactes ? Si ce n'est pas le cas, dire de quel jour de la semaine il s'agit.*

1. En 2014 le 141$^{\text{ème}}$ jour de l'année est aussi un mercredi si et seulement si $141 \equiv 1 \ (mod\, 7)$.
$141 = 7\times 20+1$ donc $141 \equiv 1 \ (mod\, 7)$. Alors le 141$^{\text{ème}}$ jour de l'année est bien un mercredi.
2. En 2014 le 220$^{\text{ème}}$ jour de l'année est-il aussi un mercredi ?
$220 = 7 \times 31 + 3$ donc $220 \equiv 3 \ (mod\, 7)$. Le 220$^{\text{ème}}$ jour de l'année n'est pas un mercredi ; il a le même nom que le 3$^{\text{ème}}$ jour de l'année. C'est donc un vendredi.

Exercice 3 : Pour désigner le résidu d'un entier a modulo n, on peut utiliser la notation suivante : $res_n(a)$.

$21 = 7 \times 3 + 0$ donc $res_7(21) = 0$.

$34 = 7 \times 4 + 6$ donc $res_7(34) = 6$.

$36 = 7 \times 5 + 1$ donc $res_7(36) = 1$.

$513 = 7 \times 73 + 2$ donc $res_7(513) = 2$.

$51 = 7 \times 7 + 2$ donc $51 \equiv 2 \ (mod\, 7)$.
Alors $51^2 \equiv 4 \ (mod\ 7)$ et $res_7(51^2) = 4$.

$114 = 7 \times 16 + 2$ donc $114 \equiv 2 \ (mod\, 7)$.
Alors $114^3 \equiv 8 \ (mod\ 7) \equiv 1 \ (mod\, 7)$.
Donc $res_7(114^3) = 1$.

$176 = 7 \times 25 + 1$ donc $176 \equiv 1 \ (mod\, 7)$.
Alors $176^{5239} \equiv 1 \ (mod\ 7)$ et donc $res_7(176^{5239}) = 1$.

Exercice 4 :

1. Soit n un entier. La division euclidienne de n par 7 s'écrit $n = 7q + r$ avec $0 \leqslant r < 7$, q et r entiers. Les valeurs possibles pour le reste r sont donc les entiers de 0 à 6.
2. Tableau donnant les résidus possibles de $n^3 \ mod\ 7$. Les résidus de n^2 sont calculés pour faciliter le calcul de tête des résidus de n^3. Et on se sert des résidus de n^2 et de n^3 pour obtenir ceux de n^5 dans l'exercice suivant.

r	res de n^2 $mod\, 7$	res de n^3 $mod\, 7$	res de n^5 $mod\, 7$
0	0	0	0
1	1	1	1
2	4	1	4
3	2	6	5
4	2	1	2
5	4	6	3
6	1	6	6

3. On constate que les résidus possibles de n^3 modulo 7 sont 0, 1 ou 6.
   Si $n^3 \equiv 0 \; mod \; 7$ alors il existe un entier k tel que $n^3 = 0 + 3k = 3k$.
   Si $n^3 \equiv 1 \; mod \; 7$ alors il existe un entier k tel que $n^3 = 1 + 3k$.
   Et enfin, si $n^3 \equiv 6 \; mod \; 7$ alors $n^3 \equiv -1 \; mod \; 7$.
   Il existe donc un entier k tel que $n^3 = -1 + 3k$.

Exercice 5 : $n^5 - 2$ est divisible par 7 $\iff n^5 - 2 \equiv 0 \; mod \; 7$
$\iff n^5 \equiv 2 \; mod \; 7$
D'après le tableau de l'exercice précédent,
$n^5 \equiv 2 \; mod \; 7 \iff n \equiv 4 \; mod \; 7$
$\iff$ il existe un entier k tels que $n = 4 + 7k$.

Exercice 6 : *Calculer le reste de la division euclidienne de* $n = 19^{52} \times 23^{41}$ *par* 7.
On cherche d'abord le résidu de 19 modulo 7, puis la plus petite puissance de 19 qui soit congrue à 1 modulo 7.
$19 = 7 \times 2 + 5$ donc $19 \equiv 5 \; (mod \; 7)$. Alors $19^{52} \equiv 5^{52} \; (mod \; 7)$.
$5^2 = 25 = 7 \times 3 + 4$ donc $5^2 \equiv 4 \; (mod \; 7)$.
Alors $5^3 \equiv 20 \equiv 6 \equiv -1 \; (mod \; 7)$.
Ainsi $5^6 \equiv 1 \; (mod \; 7)$. Et par suite $5^{6p} \equiv 1 \; (mod \; 7) \forall p \in \mathbb{N}$. $52 = 6 \times 8 + 4$ donc $5^{52} = (5^6)^8 \times 5^4$.
Alors $5^{52} \equiv 5^4 \; (mod \; 7)$.
Comme $5^4 \equiv 30 \equiv 2 \; (mod \; 7)$, on en déduit que le résidu modulo 7 de 5^{52} (et donc de 19^{52}) est égal à 2.

On procède de façon analogue pour déterminer le résidu de 23^{41} modulo 3.
$23 = 7 \times 3 + 2$ donc $23 \equiv 2 \; (mod \; 7)$. Alors $23^{41} \equiv 2^{41} \; (mod \; 7)$.
$2^2 = 4$ donc $2^2 \equiv 4 \; (mod \; 7)$. $2^3 \equiv 8 \equiv 1 \; (mod \; 7)$. Alors $(2^3)^p \equiv 1 \; (mod \; 7) \forall p \in \mathbb{N}$.
$41 = 3 \times 13 + 2$ donc $2^{41} = (2^3)^{13} \times 2^2$. Ainsi $2^{41} \equiv 2^2 \; (mod \; 7)$. Le résidu modulo 7 de 2^{41} (et donc de 23^{41}) est alors égal à 4.

Enfin, puisque $19^{52} \equiv 2 \; (mod \; 7)$ et $23^{41} \equiv 4 \; (mod \; 7)$,
on en déduit que $19^{52} \times 23^{41} \equiv 8 \equiv 1 \; (mod \; 7)$.

Exercice 7 :

1. $3^{2n} - 2^n = (3^2)^n - 2^n = 9^n - 2^n$.
   Or $9^n - 2^n \equiv 2^n - 2^n \; mod \; 7$, c'est-à-dire $9^n - 2^n \equiv 0 \; mod \; 7$.
   Alors $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.
2. $7^{2n} - 23^n = (7^2)^n - 23^n = 49^n - 23^n$.
   Or $49^n - 23^n \equiv 10^n - 10^n \; mod \; 13 \equiv 0 \; mod \; 13$.
   Alors $7^{2n} - 23^n$ est divisible par 13.