Chapitre 1 : Logique formelle

Formules du calcul des propositions

1 Introduction

Le mot "**logique**" provient du mot grec "**logos**", qui signifie "**science de la raison**".
La logique formelle est la science des raisonnements valides. Elle analyse seulement la vérité matérielle d'un raisonnement.

Applications :

1. programmation logique
2. modélisation des raisonnements
3. intelligence artificielle

Exemple 1 : Admettons la phrase suivante : "S'il pleut, le sol est mouillé."
On peut déduire de la phrase "il pleut", la conclusion "le sol est mouillé".

Or ceci fonctionne aussi pour une déduction à partir d'une phrase qui n'a pas de sens mais qui se présente sous forme logique correcte :

Exemple 2 : "Si les poules ont des dents, le soleil brille".
On peut déduire de la phrase "les poules ont des dents", la conclusion "le soleil brille".
C'est un raisonnement valide.

Notion d'argument

— La logique s'intéresse aux arguments
— Un **argument** est la donnée d'une conclusion et de prémisses censés la justifier.
— Prémisses et conclusion sont des énoncés susceptibles d'être vrais ou faux. On les appelle aussi **propositions**.
— La logique cherche à déterminer si un argument est valide ou pas.

Remarque : Les énoncés du raisonnement comme "il pleut", "les poules ont des dents", ne relèvent pas de la logique mais des faits.
Par contre, les mécanismes de pensée que nous utilisons pour les articuler entre eux relèvent de la logique.

Exemple 3 :
Pierre dit à Marie : "Je viendrai s'il pleut".
Or il ne pleut pas.
"Donc Pierre ne viendra pas" se dit Marie.

Que penser du raisonnement de Marie ?

Exemple 4 :
Toute fonction holomorphe est analytique.
Toute fonction analytique est continue.
Donc toute fonction holomorphe est continue.

Ce raisonnement est exact, la conclusion est légitime. Pour dire si la conclusion est exacte il faudrait connaître les définitions des mots utilisés afin de déterminer si les prémisses sont vrais ou non.

Il s'agit donc ici d'une approche sémantique. Mais la justesse du raisonnement ne dépend pas du contenu des prémisses, seulement de la façon dont ils sont articulés.
Il y a donc deux approches de la logique : **sémantique** et **syntaxique**.

2 Langage et métalangage

Il existe dans notre langue maternelle des ambiguïtés et des difficultés à exprimer correctement certaines choses. Cela peut être source de malentendus et de discussions interminables.

Exemple 1 : Considérons les 3 énoncés suivants :
Si je gagne au loto j'achèterai une Ferrari.
Si j'achète une Ferrari, c'est que j'ai gagné au loto.
Si je n'achète pas de Ferrari, c'est que je n'ai pas gagné au loto.

Ces trois énoncés sont-ils équivalents ? Comment être sûr de ceux qui le sont ou pas ?

Exemple 2 : (un peu cynique...)
Un père dit à son jeune fils :"Si tu ne termines pas ta soupe, tu n'auras pas de bonbon".
Le garçon se dépêche de terminer sa soupe. Son père lui dit alors : "C'est bien, tu peux aller te coucher".
"Et mon bonbon alors ?" réclame son fils.
Réponse du père : "Ah, mais je n'ai pas dit que si tu terminais ta soupe tu aurais un bonbon !"

Cet exemple à l'humour grinçant n'a pour but que de montrer qu'une mauvaise interprétation d'un énoncé peut nous jouer des tours, nous mener à commettre une erreur etc.

Exemple 3 :
1. La phrase ci-dessous est vraie.
2. La phrase ci-dessus est fausse.

Si l'on suppose que la phrase 1 dit vrai, la phrase 2 dit donc vrai aussi. Or elle affirme que la phrase 1 dit faux. On obtient donc un paradoxe.
Et il en est de même si l'on suppose que la phrase 1 dit faux.
Ce paradoxe est dû au fait que ces deux phrases sont autoréférentielles.

Pour éviter les paradoxes et les ambiguïtés de la langue écrite ou parlée, il est nécessaire de codifier les enchaînements de phrases. Cela amène à créer un nouveau langage, plus rigide et plus restreint que la "vraie langue", avec des règles de construction.
Ce langage est le reflet de la logique de l'observateur et est appelé logique objet ou métalangage.

Exemples de codifications

1. S'$\underbrace{\text{il pleut}}_{p}$ alors $\underbrace{\text{il fait froid}}_{q}$.

   Cet énoncé est de la forme "Si p alors q", et sera codifié "$p \rightarrow q$".
2. $\underbrace{\text{Il pleut}}_{p}$ et $\underbrace{\text{il fait froid}}_{q}$.

   Cet énoncé est de la forme " p et q", et sera codifié "$p \wedge q$".
3. $\underbrace{\text{Il pleut}}_{p}$ ou $\underbrace{\text{il fait froid}}_{q}$.

   Cet énoncé est de la forme "p ou q", et sera codifié "$p \vee q$".

3 Formules du calcul des propositions

Intuitivement une proposition est un énoncé susceptible d'être vrai ou faux.

Exemples :

1. Il pleut.
2. Demain je pars.
3. Je ne dors pas.
4. Si la sonnerie retentit alors le cours s'arrête.

Par contre : "Quelle heure est-il ?", ou "Sortez !", ne sont pas des propositions.

Les propositions 1. et 2. sont des propositions élémentaires.
Les propositions 3. et 4. sont des propositions composées : elles sont construites à partir de propositions élémentaires reliées par des connecteurs :
- le connecteur de négation pour la proposition 3. : $ne \cdots pas$
- le connecteur $si \cdots alors$ pour la proposition 4.

4 Le langage du calcul des propositions

Soit $P = \{p, q, ...\}$ un ensemble **fini** de lettres.

4.1 Définition récursive du langage du calcul des propositions

Symboles :

1. $p, q, r, ...$ sont les lettres de proposition.
2. $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ sont les connecteurs
3. (,) les parenthèses

Formules :

1. Une lettre de proposition est une formule (dite **proposition élémentaire** ou **formule atomique**).
2. (a) Si A est une formule, $\neg A$ est aussi une formule.
   (b) Si A et B sont des formules $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$ et $(A \leftrightarrow B)$ sont des formules.

Remarques :
- Lorsque 2(a) est appliquée en dernier on peut omettre les parenthèses.
- Une formule obtenue par 2) est dite formule composée.

L'ensemble des formules obtenues est noté $\mathcal{F}(P)$ et s'appelle **l'ensemble des formules du calcul des propositions construites sur** P.

Signification des connecteurs :

$\neg$: NON (négation)
$\vee$: OU $\wedge$: ET $\rightarrow$: SI $\cdots$ ALORS (conditionnelle)
$\leftrightarrow$: SI ET SEULEMENT SI (biconditionnelle)

Exemples
1. $p \wedge \neg q$ (se lit : p et non q)
2. $(p \vee q) \rightarrow \neg r$ (se lit : si p ou q, alors non r)

Exercice 1 : Reformuler les énoncés ci-dessus par une phrase en français en attribuant aux propositions élémentaires les contenus suivants :
p : je lis q : je joue aux cartes r : je m'ennuie

Réponses :
1. Je lis et je ne joue pas aux cartes.
2. Si je lis ou joue aux cartes alors je ne m'ennuie pas.
   Ou bien : Si je lis ou si je joue aux cartes, je ne m'ennuie pas.
   etc

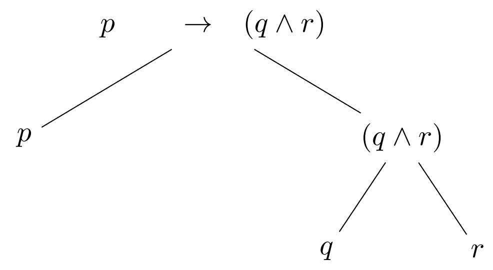
Exercice 2 Traduire en langage de la logique les énoncés suivants :
1. Cette voiture n'est pas rapide.
2. Cette voiture est confortable mais n'est pas rapide.
3. Si je gagne au loto alors j'achèterai une Ferrari.
4. Si j'achète une Ferrari c'est que j'ai gagné au loto.
5. Si je n'achète pas de Ferrari, c'est que je n'ai pas gagné au loto.
6. J'achèterai une Ferrari si et seulement si je gagne au loto.

Réponses :
1. $\neg p$, où p : cette voiture est rapide
2. $p \wedge \neg q$, où p : cette voiture est confortable et q : cette voiture est rapide
3. $p \rightarrow q$, où p : je gagne au loto et q : j'achète une Ferrari
4. $q \rightarrow p$
5. $(\neg q) \rightarrow \neg p$
6. $p \leftrightarrow q$

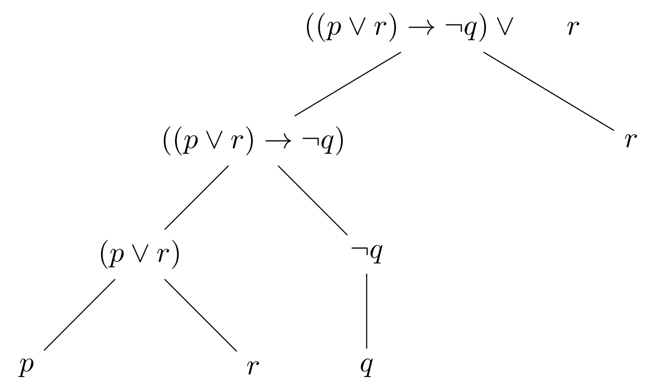
5 Arbre de décomposition

Une formule se décompose de façon unique jusqu'aux formules atomiques qui la composent. Cela peut être représenté par un arbre de décomposition.
A chaque étape de la réalisation de cet arbre on supprime le connecteur logique le plus externe.

Exemple 1 :



Exemple 2 :



L'utilité de l'arbre de décomposition est de bien comprendre la structure d'une formule. Cela permet, entre autres, de déterminer sa valeur de vérité en fonction des valeurs de vérité des formules atomiques qui la constituent (voir chapitre suivant).