# Feuille d'exercices n° 1 - Suites numériques et récurrence

Les questions ou exercices précédés d'une étoile (*) sont optionnels. **Vous ne les traiterez qu'avec l'accord de votre enseignant(e) de TD.**

**Exercice 1 :** Soit les suites données par leur terme général ci-dessous. Pour chacune d'elles calculer $u_0$ (le cas échéant), $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$ et, pour (a), (b), (f) et (h) seulement, représenter ces termes en repère orthonormé.

1.
   (a) $u_n = \frac{1}{2}n + 1$
   (b) $u_n = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}$
   (c) $u_n = 2^{-n}$
   (d) $u_n = (-2)^n$
   (e) (*) $u_n = (\frac{1}{3})^n$
   (f) (*) $u_n = \frac{2n+1}{2n-1}$
   (g) (*) $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$
   (h) (*) $u_n = (-1)^n$
2. Pour chacune des suites ci-dessus, écrire $u_{n+1}$.

**Exercice 2 :**

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = 2u_n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Calculer $u_1$, $u_2$ , $u_3$ et $u_4$.
2. Même question avec la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

**Exercice 3 :** Pour chacune des suites données ci-dessous par leur terme général, calculer les premiers termes jusqu'au rang 5 et déterminer le sens de variation de chacune de ces suites.

1. $u_n = \sum_{i=0}^{n} i$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *série de terme général* $i$.
2. $v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée *série de terme général* $\frac{1}{i}$.
3. (*) $w_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n+i}$

**Exercice 4 :** Étudier le sens de variation des suites ci-dessous, données par leur terme général :

1. $u_n = -3n + 4$
2. $u_n = \frac{1}{n+1}$
3. $u_n = 3^n$
4. $u_n = (-2)^n$
5. $u_n = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}$

**Exercice 5 :** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 2$,

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= f(u_n) = \dfrac{1}{3}u_n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Dans un repère orthonormé, tracer les droites $d$ et $d'$ d'équations respectives $y = x$ et $y = \dfrac{1}{3}x + 2$.
2. Placer $u_0$ sur l'axe des ordonnées, puis le reporter sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite $d$, qui n'est autre que la première bissectrice. En vous aidant alors de la droite $d'$, placer $u_1$ sur l'axe des ordonnées (utiliser le fait que $u_1 = f(u_0)$). À l'aide de $d$, reporter $u_1$ sur l'axe des abscisses, puis $u_2$ sur l'axe des ordonnées à l'aide de $d'$ et ainsi de suite, jusqu'à $u_3$. Prendre comme unité 2 cm et prévoir 8 cm au moins sur l'axe des ordonnées.
3. Quel semble être le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ? Calculer $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

**Exercice 6 :** Procéder comme dans l'exercice précédent pour conjecturer le comportement des suites ci-dessous :

1. $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= -\dfrac{1}{2}u_n + 6 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Prendre comme unité 2 cm et prévoir 11 cm au moins sur l'axe des ordonnées.
2. (*) $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{3}u_n^2 + \dfrac{1}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tracer la droite $d : y = x$ et la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{2}$ et de sommet le point $Q\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. Prendre comme unité 4 cm et prévoir 10 cm au moins sur l'axe des ordonnées.

**Exercice 7 :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= \dfrac{2}{3} \\ u_{n+1} &= 3u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3^{n-1}+1}{2}$.
4. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

**Exercice 8 :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{3}u_n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 3$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Conclure qu'elle est convergente et calculer sa limite.
4. Reprendre les questions ci-dessus pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence comme ci-dessus mais avec $u_0 = 4$. *On montrera successivement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 3$, puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour conclure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite à déterminer.*

**Exercice 9 :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= -\dfrac{1}{2}u_n + 6 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

**Exercice 10 :** (*) On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. Montrer par récurrence que : $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire l'égalité $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer par récurrence que : $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 11 :**

1. Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$. Déterminer l'ensemble de définition de $g$ puis étudier ses variations sur l'intervalle $]-\dfrac{1}{2}, +\infty[$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= \frac{3u_n}{1+2u_n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. *On pourra utiliser le tableau de variations de la fonction $g$.*
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

**Exercice 12 :** (*) Déterminer, s'il existe, le sens de variation des suites suivantes, définies par leur terme général :

1. $u_n = n^2 + 3n - 2$.
2. $u_n = \dfrac{2n-1}{n+2}$.
3. $u_n = \dfrac{4n+1}{n}$, $n \geq 1$.
4. $u_n = \sqrt{3n+1}$.
5. $u_n = \dfrac{n^2 - 3n}{n+1}$.
6. $u_n = \cos(\dfrac{1}{n})$.

**Exercice 13 :** (*) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.