Feuille d'exercices n° 5
Algèbres de Boole

Exercice 1 : Soit $\mathcal{B} = \{0; 1\}$. On définit dans $\mathcal{B}$ une loi de composition interne appelée **addition booléenne** dans $\mathcal{B}$ notée $+$ (par abus d''écriture) et définie par sa table de Cayley ci-dessous fig. 1. On définit de même la **multiplication booléenne** dans $\mathcal{B}$ par la table fig. 2.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

fig. 1.

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

fig. 2.

Que constatez-vous ?

1. Etudier la commutativité de chacune des deux opérations.
2. Démontrer que chacune des deux opérations possède un élément neutre et un élément absorbant que l'on déterminera.
3. Etudier l'associativité de chacune des deux opérations.
4. (a) Démontrer que la multiplication booléenne est distributive par rapport à l'addition booléenne.

   (b) Démontrer que l'addition booléenne est distributive par rapport à la multiplication booléenne.
5. Définissez une complémentation dans $\mathcal{B}$.

Solution : On constate (entre autres) que $1 + 1 = 1$. La multiplication dans $\mathcal{B}$ coïncide avec la multiplication dans $\mathbb{R}$ mais l'addition dans $\mathcal{B}$ ne coïncide pas avec celle dans $\mathbb{R}$.,

1. On déduit des tables de Cayley ci-dessus les tableaux suivants :

a	b	$a+b$	$b+a$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

a	b	$a \times b$	$b \times a$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

   On a donc $a + b = b + a$ pour tous a et b dans $\mathcal{B}$. Par conséquent l'addition booléenne est commutative.
   De même on a $a \times b = b \times a$ pour tous a et b dans $\mathcal{B}$. Par conséquent la multiplication booléenne est commutative.

2. On déduit des tableaux ci-dessus que :
   $0 + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ et $1 + \mathbf{0} = \mathbf{1}$, ce qui prouve que $\forall a \in \mathcal{B}, a + 0 = a (= 0 + a)$. 0 est donc l'élément neutre de l'addition.
   $0 \times \mathbf{1} = \mathbf{0}$ et $1 \times \mathbf{1} = \mathbf{1}$, ce qui prouve que $\forall a \in \mathcal{B}, a \times 1 = 1 (= 1 \times a)$. 1 est donc l'élément neutre de la multiplication.
   $0 + \mathbf{1} = \mathbf{1}$ et $1 + \mathbf{1} = \mathbf{1}$, ce qui prouve que $\forall a \in \mathcal{B}, a + 1 = 1 (= 1 + a)$. 1 est donc l'élément absorbant de l'addition.
   $0 \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$ et $1 \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$, ce qui prouve que $\forall a \in \mathcal{B}, a \times 0 = 0 (= 0 \times a)$. 0 est donc l'élément absorbant de la multiplication.

3. Pour tous $a, b, c \in \mathcal{B}$, on a

$$a + (b + c) = \begin{cases} b + c & \text{si } a = 0, \text{ et alors } (a + b) + c = b + c \\ 1 & \text{si } a = 1, \text{ et alors } (a + b) + c = 1 + c = 1. \end{cases}$$

Dans les deux cas, $a+(b+c) = (a+b)+c$, par conséquent l'addition booléenne est associative. De même, pour tous $a, b, c \in \mathcal{B}$, on a

$$a(bc) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0, \text{ et alors } (ab)c = 0.c = 0 \\ bc & \text{si } a = 1, \text{ et alors } (ab)c = bc. \end{cases}$$

Dans les deux cas, $a(bc) = (ab)c$, par conséquent la multiplication booléenne est associative.

4. (a) Pour tous $a, b, c \in \mathcal{B}$, on a

$$a(b+c) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0, \text{ et alors } ab + ac = 0 + 0 = 0 \\ b+c & \text{si } a = 1, \text{ et alors } ab + ac = b + c. \end{cases}$$

Dans les deux cas, $a(b + c) = ab + ac$, par conséquent la multiplication booléenne est distributive par rapport à l'addition booléenne .

(b) Pour tous $a, b, c \in \mathcal{B}$, on a

$$a + bc = \begin{cases} bc & \text{si } a = 0, \text{ et alors } (a + b)(a + c) = bc \\ 1 & \text{si } a = 1, \text{ et alors } (a + b)(a + c) = (1 + b)(1 + c) = 1.1 = 1. \end{cases}$$

Dans les deux cas, $a + bc = (a + b)(a + c)$, par conséquent l'addition booléenne est distributive par rapport à la multiplication booléenne.

Exercice 2 : Soit $(E, +, ., ')$ une algèbre de Boole où le complément d'un élément x de E est noté x' . On rappelle les lois de Morgan :

$$(x + y)' = x'y' \text{ et } (xy)' = x' + y'$$

Soit $(a, b, c, d, e, f) \in E^6$. Donner le complément de chacun des éléments suivants, en faisant figurer toutes les étapes utilisant l'une ou l'autre des lois de Morgan :

1. $h = a + b' + cd'$;
2. $k = ab' + ec + f'd$;
3. $m = (a + b + c)(e'b + c)$

Solution :

1. $h' = (a + b' + cd')' = a'b''(c' + d'') = a'b(c' + d) = a'bc' + a'bd.$
2. $k' = (a' + b)(e' + c')(f + d') = (a' + b)(e'f + e'd' + c'f + c'd')$ avec

$$(a'+b)(e'f+e'd'+c'f+c'd') = a'e'f+a'e'd'+a'c'f+a'c'd'+be'f+be'd'+bc'f+bc'd'.$$

3. $m' = (a + b + c)' + (e'b + c)' = a'b'c' + (e + b')c' = a'b'c' + ec' + b'c'.$

Exercice 3 : Mêmes notations que dans l'exercice précédent. Démontrer que les égalités suivantes sont vraies dans toute algèbre de Boole.

1. $a' + ab = a' + b$
2. $(a + b)(a' + c') = ac' + a'b$
3. $(a + b + c')(a + b' + c)(a + b + c) = a + bc$
4. $(a + b)(b + c)(c + a) = ab + bc + ca$

Solution :

1. D'après la distributivité de $+$ par rapport à $\times$, la propriété $a+a'=1$ et la neutralité de 1 pour $\times$, on a $a'+ab=(a'+a)(a'+b)=1\cdot(a'+b)=a'+b$.
2. Le théorème de la redondance, la commutativité de $\times$ et la propriété $aa'=0$ donnent $(a+b)(a'+c')=\underbrace{aa'}_{0}+ac'+ba'+bc'=ac'+a'b$.
3. Les propriétés d'absorption appliquées successivement donnent

$$
\begin{aligned}
(a+b+c')(a+b'+c)(a+b+c) &= (a+b+c')(\underbrace{aa}_{a}+ab+ac+b'a+\underbrace{b'b}_{0}+b'c+ca+cb+\underbrace{cc}_{c}) \\
&= (a+b+c')(a+a(\underbrace{b+c+b'+c}_{1+c=1})+c+c(\underbrace{b+b'}_{1})) \\
&= (a+b+c')(\underbrace{a+a}_{a}+\underbrace{c+c}_{c}) \\
&= (a+b+c')(a+c) \\
&= a+ac+ab+bc+ac'+\underbrace{cc'}_{0} \\
&= a(\underbrace{1+c+c'}_{1})+ab+bc \\
&= \underbrace{a+ab}_{a}+bc \\
&= a+bc.
\end{aligned}
$$

3. **Deuxième méthode** : Grâce à la distributivité de l'addition booléenne par rapport à la multiplication booléenne, on pourrait montrer facilement que $\mathbf{x}+yzt=(\mathbf{x}+y)(\mathbf{x}+z)(\mathbf{x}+t)$.

Alors $(\mathbf{a}+b+c')(\mathbf{a}+b'+c)(\mathbf{a}+b+c)=\mathbf{a}+(b+c')(b'+c)(b+c)$
$=a+(b+c')(b'b+c)=a+(b+c')c=a+bc$

Troisième méthode : partir du premier membre
$a+bc=a+bc+bb'=(a+b)(a+c)+bb'$
$=bb'+(a+b)(a+c)=(a+b+bb')(a+c+bb')$
(inutile de factoriser $(a+b+bb')$) $=(a+b)(a+c+b)(a+c+b')$
$=cc'+(a+b)(a+c+b)(a+c+b')$
$=(a+b+cc')(a+c+b+cc')(a+c+b'+cc')$
(inutile de factoriser $(a+c+b+cc')$ et $(a+c+b'+cc')$)
$=(a+b+c)(a+b+c')(a+c+b)(a+c+b')$
$=(a+b+c)(a+b+c')(a+c+b')$

4. De même,

$$
\begin{aligned}
(a+b)(b+c)(c+a) &= (a+b)(bc+ba+c+ac) \\
&= (a+b)(ab+c) \\
&= ab+ac+ab+bc \\
&= ab+bc+ca \text{ car } ab+ab=ab.
\end{aligned}
$$

Exercice 4 : Soit X un ensemble non vide . On rappelle que $\mathcal{P}(X), \cup, \cap, x \mapsto x')$ est une algèbre de Boole.
Soient A , B et C des parties de X.

1. Recopier les expressions suivantes en utilisant les opérations booléennes $+, \times, '$:
   (a) $G = (A \cup B) \cap \complement_X(C))$
   (b) $H = (\complement_X(A) \cap B) \cup (\complement_X(A) \cap C)$
   (c) $A - B = A \cap \complement_X(B)$
   (d) $A\Delta B = (A \cap \complement_X(B)) \cup (\complement_X(A) \cap B)$
2. Faites de même avec les ensembles suivants puis simplifiez leur expression :
   (a) $K = (A \cup B \cup \complement_X(C)) \cap (A \cup \complement_X(B) \cup C) \cap (A \cup B \cup C)$
   (b) $L = (A \cap B) \cup (\complement_X(A) \cap C) \cup (B \cap C)$
3. Démontrer algébriquement la distributivité de l'intersection par rapport à la différence symétrique Δ, c'est-à-dire que $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

Solution :

1. (a) $G = (A \cup B) \cap \complement_X(C)) = (A + B) \times C' = (A + B)C'$.
   (b) $H = (\complement_X(A) \cap B) \cup (\complement_X(A) \cap C) = A'B + A'C$.
   (c) $A - B = A \cap \complement_X(B) = AB'$.
   (d) $A\Delta B = (A \cap \complement_X(B)) \cup (\complement_X(A) \cap B = AB' + A'B$
2. (a)
   $$K = (A + B + C')(A + B' + C)(A + B + C).$$
   Or on a calculé cette expression dans l'exercice 3, question 3 : on a trouvé $A + BC$. Ceci se traduit par
   $$K = A \cup (B \cap C).$$
   (b) $L = AB + A'C + BC = AB + A'C = (A \cap B) \cup (\complement_X(A) \cap C)$ d'après le théorème de la redondance.
3. La différence symétrique de B et C s'écrit en notations booléennes de la façon suivante :
   $$B\Delta C = \big((B \cap \complement_X(C)\big) \cup \big((C \cap \complement_X(B)\big) = B'C + C'B.$$
   La propriété à montrer – qui est $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$ – s'énonce ainsi :
   $$A(BC' + CB') = AB(AC)' + AC(AB)'.$$
   Or
   $$\begin{aligned} AB(AC)' + AC(AB)' &= AB(A' + C') + AC(A' + B') \\ &= ABC' + ACB' \\ &= A(BC' + CB'). \end{aligned}$$
   La propriété est donc démontrée.

Exercice 5 : (*)Dans le cours on nous a donné les propriétés définissant une algèbre de Boole, puis un théorème donnant de nombreuses propriétés vérifiées en conséquence dans une algèbre de Boole. Ce théorème a été admis. Ce exercice a pour but de démontrer quelques-unes de ces propriétés.

Soit $(E, +, \times, x \mapsto x')$ une algèbre de Boole.

1. Démontrer les propriétés d'absorption (voir cours) en admettant les propriétés qui les précèdent dans le cours. (Indication : $a = a \times 1$).
2. Démontrer les lois de Morgan en admettant les propriétés qui les précèdent dans le cours. (Indication : calculer $(a \times b) + (a' + b')$)
3. Démontrer le théorème de la redondance : $\forall (a, b, c) \in E^3$: $ab + a'c + bc = ab + a'c$

Solution : Soient dans tout l'exercice a, b, c trois éléments quelconques de E.

1. $a = a \cdot 1 = a \cdot (a + a') = a \cdot a + a \cdot a' = a \cdot a + 0 = a \cdot a$.
   $a = a + aa' = (a + a)(a + a') = (a + a) \cdot 1 = a + a$.
   $0 \cdot a = (a'a) \cdot a = a' \cdot \underbrace{aa}_{a} = a'a = 0$.
   $1 + a = a + a' + a = \underbrace{a + a}_{a} + a' = a + a' = 1$.
   $a + ab = a(1 + b) = a \cdot 1 = a$.
   $a(a + b) = aa + ab = a + ab = a$.
2. $ab + a' + b' = (a' + a)(a' + b) + b' = a' + b + b' = a' + 1 = 1$.
   $ab(a' + b') = aa'b + abb' = 0 + 0 = 0$, donc $(ab)' = a' + b'$.
   $a + b + a'b' = (a + a')(a + b') + b = a + b' + b = a + 1 = 1$.
   $(a + b)a'b' = aa'b + a'bb' = 0 + 0 = 0$, donc $(a + b)' = a'b'$.
3. $ab + a'c + bc = ab + a'c + b\underbrace{(a + a')}_{1}c = ab + abc + a'c + a'cb = ab + a'c$ par absorption.

$$(a+b)(a'+c)(b+c) = (a+b)(a'+c)(b+c+\underbrace{aa'}_{0}) = (a+b)(a'+c)(b+c+a)(b+c+a') = (a+b)(a'+c)$$

par absorption.

Autre démonstration possible du théorème de la redondance :

$$\begin{aligned} ab + a'c = (ab + a')(ab + c) = (a + a')(b + a')(ab + c) \\ = (b + a')(ab + c) \text{ et on développe} \\ = bab + bc + a'ab + a'c = ab + a'c + bc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + b)(a' + c) = aa' + ac + ba' + bc \\ = ac + ba' + bc = (ac + b)(ac + a') + bc \\ = (a + b)(c + b)(a + a')(c + a') + bc \\ = (a + b + bc)(c + b + bc)(c + a' + bc) \\ = (a + b)(b + c)(a' + c) \text{ en utilisant l'absorption} \end{aligned}$$

Exercice 6 : (*)On définit dans $\mathcal{B}^2$ l'addition booléenne de deux couples, notée provisoirement par $\oplus$, de la façon suivante :
Pour tout $(x, y) \in \mathcal{B}^2$ et tout $(x', y\prime) \in \mathcal{B}^2$:
$(x, y) \oplus (x', y\prime) = (x + x', y + y')$ où $+$ est l'addition booléenne dans $\mathcal{B}$.

On définit de même dans $\mathcal{B}^2$ la multiplication booléenne de deux couples, notée provisoirement par $\otimes$, de la façon suivante :
Pour tout $(x, y) \in \mathcal{B}^2$ et tout $(x', y\prime) \in \mathcal{B}^2$:
$(x, y) \otimes (x', y\prime) = (x.x', y.y')$ où . est la mutiplication booléenne dans $\mathcal{B}$.

1. Pour chacune de ces opérations donner la table de Cayley et étudier
   (a) la commutativité
   (b) l'associativité
   (c) l'existence d'un élément neutre (à déterminer).
2. Démontrer que la multiplication booléenne de $\mathcal{B}^2$ est distributive par rapportàl'addition booléenne de $\mathcal{B}^2$.
3. Démontrer que l'addition booléenne de $\mathcal{B}^2$ est distributive par rapport à la multiplication booléenne de $\mathcal{B}^2$.

Solution :

1. Les tables de Cayley des opérations $\oplus$ et $\otimes$ sont données par :

$\oplus$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$

et

$\otimes$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$
$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$

   (a) L'addition booléenne $\oplus$ est commutative car $+$ est commutative : pour tous élements $(x,y),(x',y') \in \mathcal{B}^2$, on a
   $$(x,y) \oplus (x',y') = (x+x', y+y') = (x'+x, y'+y) = (x',y') \oplus (x,y).$$
   De même, la multiplication booléenne est commutative car $\times$ l'est : pour tous élements $(x,y),(x',y') \in \mathcal{B}^2$, on a
   $$(x,y) \otimes (x',y') = (xx', yy') = (x'x, y'y) = (x',y') \otimes (x,y).$$
   (b) L'addition booléenne $\oplus$ est associative car $+$ l'est : pour tous élements $(x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathcal{B}^2$, on a
   $$\begin{aligned}(x,y) \oplus \big((x',y') \oplus (x'',y'')\big) &= (x,y) \oplus (x'+x'', y'+y'') \\ &= \big(x+(x'+x''), y+(y'+y'')\big) \\ &= \big((x+x')+x'', (y+y')+y''\big) \\ &= (x+x', y+y') \oplus (x'',y'') \\ &= \big((x,y) \oplus (x',y')\big) \oplus (x'',y'').\end{aligned}$$
   On démontre de façon complètement analogue que, l'opération $\times$ étant associative, $\otimes$ l'est également.
   (c) D'après les tables de Cayley ci-dessus, il est clair que $(0,0)$ est élément neutre pour $\oplus$ et absorbant pour $\otimes$, tandis que $(1,1)$ est élément absorbant pour $\oplus$ et neutre pour $\otimes$.
2. Pour tous $(x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathcal{B}^2$, on a d'après la distributivité de $\times$ par rapport à $+$:
   $$\begin{aligned}(x,y) \otimes \big((x',y') \oplus (x'',y'')\big) &= (x,y) \otimes (x'+x'', y'+y'') \\ &= \big(x(x'+x''), y(y'+y'')\big) \\ &= (xx'+xx'', yy'+yy'') \\ &= (xx', yy') \oplus (xx'', yy'') \\ &= \big((x,y) \otimes (x',y')\big) \oplus \big((x,y) \otimes (x'',y'')\big),\end{aligned}$$
   par conséquent $\otimes$ est distributive par rapport à $\oplus$.

3. Pour tous $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathcal{B}^2$, on a d'après la distributivité de $+$ par rapport à $\times$:

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \oplus \big((x',y') \otimes (x'',y'')\big) & = & (x,y) \oplus (x'x'', y'y'') \\ & = & (x + x'x'', y + y'y'') \\ & = & \big((x+x')(x+x''), (y+y')(y+y'')\big) \\ & = & (x+x', y+y') \otimes (x+x'', y+y'') \\ & = & \big((x,y) \oplus (x',y')\big) \otimes \big(((x,y) \oplus (x'',y'')\big)\,, \end{array}$$

par conséquent $\oplus$ est distributive par rapport à $\otimes$.