Feuille d'exercices n° 2
Corrigé

Les questions ou exercices précédés d'une étoile (*) sont plus difficiles. **Vous ne les traiterez qu'avec l'accord de votre enseignant(e) de TD.**

Exercice 1 : Décrire en extension :

1. $A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x^2 \leq 10\} = \{0, 1, 2, 3\}$
2. $B = \{x^2 \ / \ x \in \mathbb{N}$ et $x \leq 10\} =$ $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$
3. $C = \{x^2 \ / \ x \in \mathbb{N}$ et $x^2 \leq 10\} = \{0, 1, 4, 9\}$
4. $D = \{x \in \mathbb{Z} / \ x^2 \leq 10\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{N} / \ 5 \leq x^2 \leq 8\} = \emptyset$

Exercice 2 : Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$, et les trois parties suivantes de E :
$A = \{a, b, e, f, j, l, m\}$,
$B = \{f, g, h, i, m, n\}$ et $C = \{d, e, f, h, j, k, l, n\}$.

1. *Ecrire en extension les ensembles suivants :* $A \cup B$; $A \cap B$; $A \cap C$; $B \cap C$; $(A \cap B) \cap C$; $\complement_E(A)$.
   $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$
   $A = \{a, b, e, f, j, l, m\}$
   $B = \{f, g, h, i, m, n\}$
   $C = \{c, d, e, f, h, j, k, l, n\}$
   $A \cup B = \{a, b, e, f, g, h, i, j, l, m, n\}$
   $A \cap B = \{f, m, \}$
   $A \cap C = \{f, j, l, \}$
   $B \cap C = \{f, h, n\}$
   $(A \cap B) \cap C = \{f\}$
   $\complement_E(A) = \{c, d, g, h, i, k, n\}$
2. *Représenter ces ensembles E, A, B , C par un diagramme.*
3. *Ecrire en extension les ensembles suivants :* $A - B$; $A \Delta B$
   $A - B = \{a, b, e, j, l\}$ et $A \Delta B = \{a, b, e, g, h, i, j, l, n\}$

Exercice 3 :

1. *Compléter cette définition :* $E \subset F$ si et seulement si : $\forall \ x \in E, x \in F$.
2. *Comment lit-on cette définition ainsi complétée ?*
   E est inclus dans F si et seulement si tout élément de E est élément de F.
3. *On rappelle la définition suivante :* $E = F$ *si et seulement si* $\begin{cases} \forall x \in E, x \in F \\ \forall x \in F, x \in E \end{cases}$
   En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $E = F$ *en utilisant l'inclusion.*
   Nb. ***Le théorème obtenu s'appelle le théorème de la double inclusion.***
   $E = F$ si et seulement si $\begin{cases} E \subset F \\ F \subset E \end{cases}$
4. *En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que* $E \not\subset F$ *en utilisant le symbole d'appartenance.*
   $E \not\subset F$ si et seulement si $\exists x \in E, x \notin F$.
5. *En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que* $E \neq F$ *en utilisant le symbole d'appartenance.*
   $E \neq F$ si et seulement si $(\exists x \in E, x \notin F)$ ou $(\exists x \in F, x \notin E)$.

Exercice 4 : *Soient* E *un ensemble et* A *et* B *deux parties de* E.

1. *Exprimer* $A - B$ *de différentes façon à l'aide de l'intersection, la réunion et le passage au complément.*
   $A - B = A \cap \bar{B}$
2. *Même question avec* $A \Delta B$.
   $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$.
   $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Exercice 5 : Dans une classe de 25 élèves, 18 pratiquent un sport en dehors du collège, 10 jouent d'un instrument de musique et 7 ont à la fois une activité sportive et une activité musicale. Modéliser l'énoncé à l'aide d'ensembles (on pourra faire un diagramme de Venn) puis justifiez vos réponses aux questions suivantes en vous appuyant sur le cours.

1. *Combien d'élèves pratiquent l'une ou l'autre de ces activités ?*
   A : ensemble des élèves qui pratiquent un sport
   B : ensemble des élèves qui pratiquent une activité musicale
   $A \cap B$: ensemble des élèves qui pratiquent l'une **et** l'autre des activités
   $A \cup B$: ensemble des élèves qui pratiquent l'une **ou** l'autre des activités
   $Card\ A = 18, \quad Card\ B = 10, \quad Card(A \cap B) = 7.$

   Rappel : $Card(A \cup B) = Card\ A + Card\ B - Card(A \cap B)$

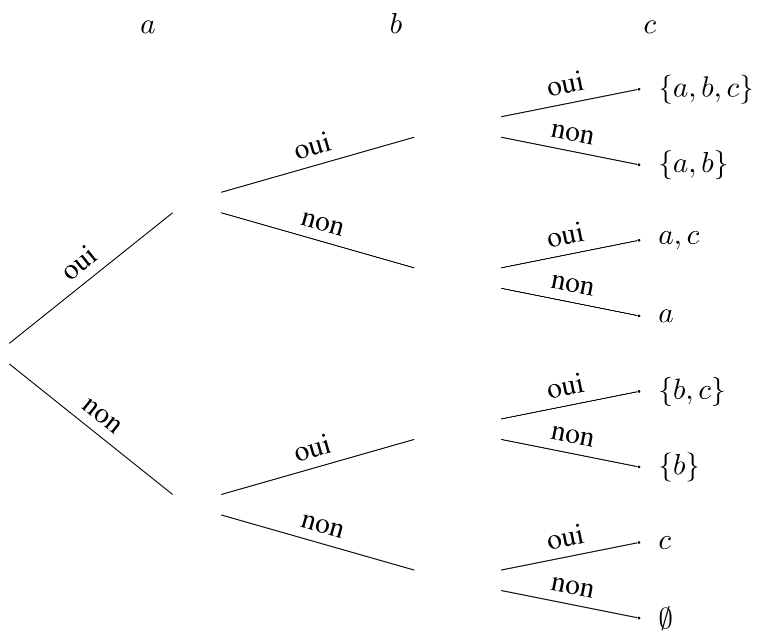
   Ainsi $Card(A \cup B) = 18 + 10 - 7 = 21.$
2. *Combien d'élèves ne pratiquent aucune de ces deux activités ?*
   X : ensemble des élèves de la classe. $Card\ X = 25.$
   $E = A \cup B$. $Card\ E = 21$
   $\bar{E} = \complement_X E$: ensemble des élèves qui ne pratiquent aucune des 2 activités.

   Rappel : $Card\ \bar{E} = Card\ X - Card\ E$

   Ainsi $Card\ \bar{E} = 25 - 21 = 4.$
3. *Combien d'élèves pratiquent du sport mais ne jouent pas d'un instrument de musique ?*
   Un élève qui pratique seulement du sport est un élève qui pratique du sport ***et*** *qui ne pratique pas d'instrument de musique. On représentera ainsi par*
   $A \cap \bar{B}$ *l'ensemble des élèves qui pratiquent seulement du sport.*
   Or $Card(A \cap \bar{B}) = Card\ A - Card(A \cap B) = 18 - 7 = 11$
4. *Combien d'élèves pratiquent une et une seule des deux activités ?*
   Un élève qui pratique une et une seule des deux activités appartient à l'ensemble $A\Delta B$.
   Or $Card(A\Delta B) = Card(A) + Card(B) - 2Card(A \cap B) = 18 + 10 - 2 \times 7 = 28 - 14 = 14.$

Exercice 6 :

1. *Soit* $A = \{a, b, c\}$. *Construire l'arbre des parties de* A *et donner* $\mathcal{P}(A)$.
   On écrit en ligne les éléments de E et on construit l'arbre en dessous.



   Alors $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\},\ \{a, b, c\}\}$

2. *Soit* $E = \{a, b, c, d\}$. *Déterminer* $\mathcal{P}(E)$. *Comparer* A *et* E *puis* $\mathcal{P}(A)$ *et* $\mathcal{P}(E)$.
   On trace l'arbre des parties de E, qui a $2^4 = 16$ feuilles.
   On a $A \subset E$ et $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(E)$.

3. (*) *Démontrer pour* A *et* E *quelconques l'équivalence :*

$$A \subset E \iff \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(E)$$

   Démontrons que pour A et E quelconques, $A \subset E \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(E)$.

   Hypothèse : $A \subset E$.

   Montrons que $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(E)$.
   Soit $X \in \mathcal{P}(A)$. Alors $X \subset A$ par définition de $\mathcal{P}(A)$.
   Or $A \subset E$ (hypothèse), donc, par transitivité de l'inclusion, $X \subset E$.
   On en déduit que $X \in \mathcal{P}(E)$ d'après la définition de $\mathcal{P}(E)$.

   Démontrons que pour A et E quelconques, $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(E) \Rightarrow A \subset E$.

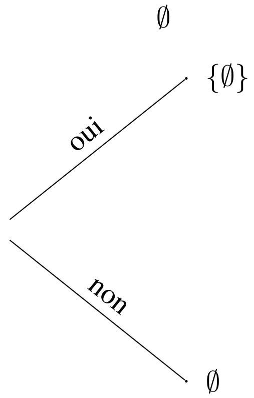
   Hypothèse : $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(E)$.

   $A \in \mathcal{P}(A)$ donc $A \in \mathcal{P}(E)$ d'après l'hypothèse.
   On en déduit que $A \subset E$ par définition de $\mathcal{P}(E)$.

4. (*)*Déterminer* $\mathcal{P}(\emptyset)$, *puis* $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, *puis* $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ *et enfin* $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$.

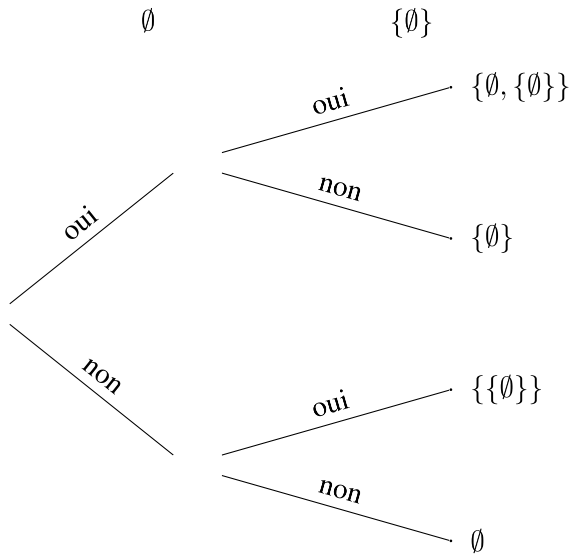
   (a) L'ensemble vide ne possède qu'une seule partie : lui-même. Donc $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. On remarquera que $Card(\mathcal{P}(\emptyset)) = 1 = 2^0$ donc cet ensemble n'est pas vide !

   (b) Arbre des parties de $\mathcal{P}(\emptyset)$



   Alors $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. $Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = 2^1 = 2$.

(c) Arbre des parties de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$



$Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))) = 2^2 = 4$.

(d) $Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))) = 2^4 = 16$. L'arbre sera construit en TD.

Exercice 7 :

1. *Un club de football dispose de 21 joueurs tous polyvalents. Combien d'équipes de 11 joueurs peut-il former ?*
   Une équipe de 11 joueurs est une combinaison de 11 éléments d'un ensemble à 21 éléments.
   $\begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix} = \dfrac{21!}{11!(10)!} = \dfrac{21.20.19.18.17.16.15.14.13.12}{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1} = 19.2.17.3.14.13 = 352\ 716$
   Le club peut former 352 716 équipes.

2. *On suppose maintenant que seulement 3 des 21 joueurs peuvent être gardien de but. Quel est alors le nombre d'équipes possibles ?*
   $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \end{pmatrix} = 3 \times \dfrac{18!}{10!8!} = 3 \times 17.3.2.13.3.11 = 131\ 274$
   Le club peut former 131 274 équipes.

Exercice 8 :

1. *Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Construire le tableau cartésien de $A \times B$ et donner cet ensemble en extension.*

A \ B	1	2	3	4
a	$(a,1)$	$(a,2)$	$(a,3)$	$(a,4)$
b	$(b,1)$	$(b,2)$	$(b,3)$	$(b,4)$
c	$(c,1)$	$(c,2)$	$(c,3)$	$(c,4)$

2. *Même question avec $B \times A$ puis avec le carré cartésien A^2.*

B \ A	a	b	c
1	$(1,a)$	$(1,b)$	$(1,c)$
2	$(2,a)$	$(2,b)$	$(2,c)$
3	$(3,a)$	$(3,b)$	$(3,c)$
4	$(4,a)$	$(4,b)$	$(4,c)$

A \ A	a	b	c
a	(a,a)	(a,b)	(a,c)
b	(b,a)	(b,b)	(b,c)
c	(c,a)	(c,b)	(c,c)

Exercice 9 : *On note* $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ *l'ensemble des chiffres de* 1 *à* 9. *Justifiez vos réponses aux questions suivantes en vous appuyant sur le cours.*

1. *Combien d'entiers naturels de 4 chiffres peut-on former avec les chiffres de 1 à 9 ?*

   Un entier de 4 chiffres est une **suite** de 4 chiffres.

C_1	C_2	C_3	C_4
$9\times$	$9\times$	$9\times$	9

   $= 9^4 = 6\ 561$ possibilités

   Modèle mathématique
   Soit $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
   Un entier de 4 chiffres est un élément du produit cartésien $E \times E \times E \times E$, noté E^4.

   Rappel : Si E_1, E_2, $\cdots$, E_n sont des ensembles finis, alors
   $Card(E_1 \times E_2 \times E_3 \times \cdots \times E_n) = Card\ E_1 \times Card\ E_2 \times Card\ E_3 \times \cdots \times Card\ E_n$.

2. *Parmi ces entiers de 4 chiffres,*

   (a) *Combien commencent par 2 ?*

2	C_1	C_2	C_3
$1\times$	$9\times$	$9\times$	9

   $= 9^3 = 729$ possibilités

   (b) *Combien sont pairs ?*

   L'ensemble des chiffres pairs non nuls est $P = \{2,4,6,8\}$ et $Card\ P = 4$.

C_1	C_2	C_3	C_4
$9\times$	$9\times$	$9\times$	4

   $= 9^3 \times 4 = 2\ 916$ possibilités

Exercice 10 :

1. *Un mot de passe doit être constitué de 4 chiffres (de 0 à 9) suivis de 2 lettres majuscules. Dénombrer les mots de passe possibles.*

   $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $\quad Card\ E = 10$
   $L = \{A, B, \cdots, Z\}$ $\quad Card\ L = 26$

C_1	C_2	C_3	C_4	L_1	L_2
$10\times$	$10\times$	$10\times$	$10\times$	$26\times$	26

   $= 10^4 \times 26^2 = 676 \times 10^4 = 6\ 760\ 000$ possibilités.

2. *On suppose maintenant que les 4 chiffres doivent être distincts et que les deux lettres doivent être distinctes. Combien de mots de passe peut-on former ?*

C_1	C_2	C_3	C_4	L_1	L_2
$10\times$	$9\times$	$8\times$	$7\times$	$26\times$	25

   $= 3\ 276\ 000$ possibilités.

Exercice 11 :

1. *Avant le 15 avril 2009 les plaques d'immatriculation de véhicules étaient composées de 3 chiffres suivis de 3 lettres, elles-mêmes suivies du numéro de département.*
   Soient $\Omega_1 = \{0, \ldots, 9\}$ l'ensemble des chiffres et $\Omega_2 = \{A, \ldots, Z\}$ l'ensemble des lettres. Exemples d'immatriculations : "123-ABC-57", "112-AAB-57", "000-AAA-57", ..

   (a) *Déterminer le nombre d'immatriculations différentes respectant ce format en Moselle.*
   On obtient une immatriculation en effectuant 3 tirages avec remise dans Ω_1 suivis de 3 tirages avec remise dans Ω_2 :
   $$(\underbrace{1,2,3}_{\in\Omega_1}, \underbrace{A,B,C}_{\in\Omega_2})$$
   Le nombre d'immatriculations possibles est donc : $10^3 \times 26^3 = 17\,576\,000$.

   (b) *Combien ont un premier chiffre non nul ?*

   Le premier chiffre devant être non nul, on effectue un premier tirage dans $\Omega_1 \setminus \{0\}$ (lire Ω_1 moins l'élément 0), suivi de deux tirages avec remise dans Ω_1, suivis de 3 tirages avec remise dans Ω_2.

   Le nombre d'immatriculations possibles avec un premier chiffre non nul est donc : $9 \times 10^2 \times 26^3 = 15\,818\,400$.

   (c) *Combien ne contiennent pas le chiffre 0 ?*

   Pour obtenir une immatriculation ne contenant pas le chiffre 0, on effectue 3 tirages avec remise dans $\Omega_1 \setminus \{0\}$, suivis de 3 tirages avec remise dans Ω_2.
   Le nombre d'immatriculations possibles ne contenant pas le chiffre 0 est donc : $9^3 \times 26^3 = 12\,812\,904$.

2. *Depuis le 15 avril 2009 les plaques d'immatriculation sont composées de 2 lettres suivies de 3 chiffres, eux-mêmes suivis de 2 lettres (sur le modèle AA-111-AA).*

   (a) *Déterminer le nombre d'immatriculations différentes respectant ce format.*

   On obtient une immatriculation en effectuant 2 tirages avec remise dans Ω_2, suivis de 3 tirages avec remise dans Ω_1, suivis de 2 tirages avec remise dans Ω_1. Exemples : "AA-000-AA", "UV-010-OI", ...

   Le nombre d'immatriculations possibles est donc : $26^2 \times 10^3 \times 26^2 = 456\,976\,000$.

   (b) (*)*En réalité on exclut les lettres I, O et U en raison de leur ressemblance avec les chiffres 0 et 1 et la lettre V. De plus les séries SS et WW sont exclues du bloc de gauche et la série SS est exclue du bloc de droite. Enfin, les séries démarrent à 001.*
   Déterminer alors le nombre d'immatriculations différentes.

   Les lettres I, O et U sont exclues (23 lettres autorisées). Les séries SS et WW sont exclues du bloc de gauche et la série SS est exclue du bloc de droite. Le bloc central ne peut être 000.

   Nombre de séries valides pour le bloc de gauche : $23^2 - 2$.

   Nombre de séries valides pour le bloc central : $10^3 - 1$.

   Nombre de séries valides pour le bloc de droite : $23^2 - 1$.

   Le nombre d'immatriculations possibles est donc : $(23^2 - 2) \times (10^3 - 1) \times (23^2 - 1) = 277\,977\,744$.

Exercice 12 : (*)

1. Soient $A = \{n \in \mathbb{N} / \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} / \exists p \in \mathbb{N}, n = 6p\}$. *Démontrer que l'un de ces deux ensembles (lequel ?) est inclus dans l'autre.*
   Montrons que $B \subset A$.
   Soit $x \in B$. $\exists p \in \mathbb{N}, x = 6p = 2(3p)$.
   Posons $q = 3p$. Puisqu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $x = 2q$, on en déduit que $x \in A$.
   Alors $B \subset A$.

2. Soit $A = \{n \in \mathbb{N} / \exists p \in \mathbb{N}, n = 5p + 3\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} / \exists p \in \mathbb{N}, n = 10p + 3\}$.
   Comparer ces deux ensembles.
   Montrons que $B \subset A$.
   Soit $x \in B$. $\exists p \in \mathbb{N}, x = 10p + 3 = 5(2p) + 3$.
   Posons $q = 2p$. Puisqu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $x = 5q + 3$, on en déduit que $x \in A$.
   Alors $B \subset A$.

Exercice 13 : (*)

1. *Un axiome de la théorie des ensembles énonce : Pour tout x, x n'appartient pas à x. (c.-à-d. $\forall x,\ x \notin x$). En déduire que pour tout a on a : $a \neq \{a\}$.*
   Hypothèse : $a = \{a\}$.
   On a $a \in \{a\}$ donc, d'après l'hypothèse, $a \in a$.
   Or ceci est impossible d'après l'axiome : Pour tout x, x n'appartient pas à x.
   L'hypothèse est donc fausse. Alors $a \neq \{a\}$.
2. *Démontrer que l'ensemble vide est unique. On pourra raisonner par l'absurde.*
   Hypothèse : On suppose qu'il existe deux ensembles vides notés E_1 et E_2.
   Or, pour tout ensemble A, l'ensemble vide est inclus dans A. Ainsi $E_1 \subset E_2$ et $E_2 \subset E_1$. D'après le théorème de la double inclusion on en déduit que $E_1 = E_2$.
   L'hypothèse est donc fausse : l'ensemble vide est unique.