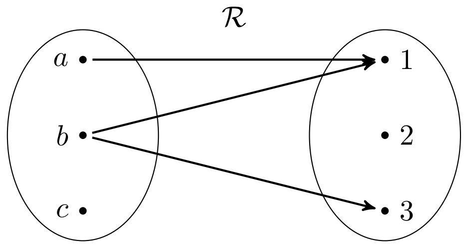
Correction de la feuille d'exercices n° 3
Relations binaires

Les questions ou exercices précédés d'une étoile (*) sont plus difficiles.
Vous ne les traiterez qu'avec l'accord de votre enseignant(e) de TD.

Exercice 1 : Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$.
On définit la relation $\mathcal{R}$ de A vers B par $\mathcal{R} = \{(a, 1), (b, 1), (b, 3)\}$.
Donner la présentation cartésienne de $\mathcal{R}$ puis sa représentation sagittale.

Correction :

$\mathcal{R}$	1	2	3
a	X		
b	X		X
c			

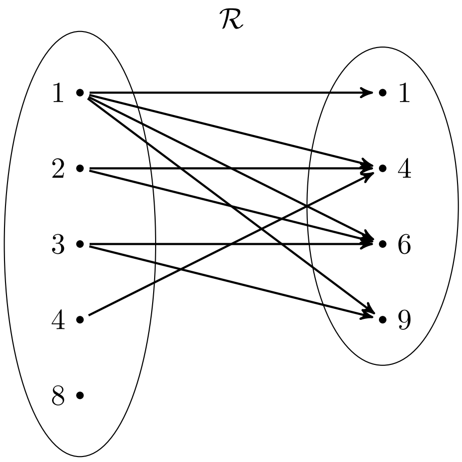


Exercice 2 : *Définition : Soit a et b deux nombres entiers relatifs. On dit que **a divise b** s'il existe un entier relatif k tel que b = ka. On note alors **a** | **b**.*
On considère les relations $\mathcal{R}$ suivantes de A vers B.
Donner pour chacune d'elles une présentation sagittale (ou cartésienne si elle est trop lourde).

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$; $B = \{1, 4, 6, 9\}$ et $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow$ a divise b
2. $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$; $B = \{1, 4, 6, 9\}$ et $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b = a^2$

Correction :

1.



2.

$\mathcal{R}$	1	4	6	9
1	X			
2		X		
3				X
4				
8				

Exercice 3 : Soit $A = \{a, b\}$ et $B = \{1, 2\}$.

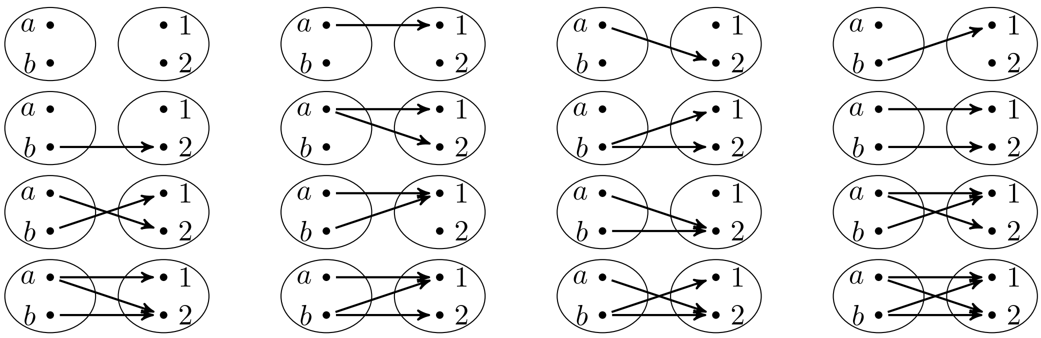
1. Combien existe-t-il de relations binaires de A vers B ? (Indication : revenir à la définition mathématique)
2. Représenter toutes les relations de A vers B. (On s'attachera à travailler méthodiquement) Pour chacune d'elles préciser s'il s'agit d'une application ou non de A vers B. Pour celles qui ne correspondent pas à une application, le prouver en donnant une raison suffisante.

Définition : *Soit $\mathcal{R}$ une relation de A vers B. On dit que le triplet f = (A, B, $\mathcal{R}$) est une application de A dans B si, pour tout x de A, il existe y unique de B tel que x $\mathcal{R}$ y.*
On note alors y = f(x). L'application f est notée :

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Correction :

1. Une relation de A vers B est une partie du produit cartésien $A \times B$. Il y a donc autant de relations de A vers B que d'éléments dans $\mathcal{P}(A \times B)$.
   $Card(A \times B) = 2 \times 2 = 4$ donc $Card(\mathcal{P}(A \times B)) = 2^4 = 16$.
   Il y a 16 relations de A vers B.
2. Donnons-les par leurs représentations sagittales.



   Les applications de A vers B sont les relations $\{(a, 1), (b, 2)\}$, $\{(a, 1), (b, 1)\}$, $\{(a, 2), (b, 1)\}$ et $\{(a, 2), (b, 2)\}$.

Exercice 4 : Soit $A = \{a, b, c, d\}$. Combien y a-t-il de relations dans A ? Représenter sous forme sagittale trois d'entre elles.

Correction : Il y a autant de relations dans A que d'éléments dans $\mathcal{P}(A \times A)$.
$Card(A^2) = 16$ donc $Card(\mathcal{P}(A^2)) = 2^{16} = 65\,536$. Il y a 65 536 relations dans A. On en donne 3 exemples au choix... :)

Exercice 5 : Soit X un ensemble. On considère la relation d'inclusion dans $\mathcal{P}$(X) (l'ensemble des parties de X). Rappeler les propriétés de l'inclusion, démontrées dans un cours précédent, qui font de cette relation une relation d'ordre dans $\mathcal{P}$(X).

Correction : L'inclusion dans $\mathcal{P}$(X) est réflexive, transitive et antisymétrique :

1. $\forall A \in \mathcal{P}(X), A \subset A$.
2. $\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(X)^3$, si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X)^2$, si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$ (c'est le théorème de la double inclusion).

Exercice 6 : On définit une relation dans l'ensemble des mots de la langue française de la façon suivante : un mot **x** est en relation avec un mot **y** s'il est écrit avec les mêmes lettres (on dit que x est un anagramme de y). Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Déterminer la classe du mot "chien".

Correction : Notons E l'ensemble des mots de la langue française.

1. $\mathcal{R}$ est réflexive : soit x un mot de la langue française. x s' écrit avec les mêmes lettres que x. Ainsi $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$.
2. $\mathcal{R}$ est symétrique : soient x et y deux mots de la langue française tels que x s'écrit avec les mêmes lettres que y. Alors y s'écrit avec les mêmes lettres que x.
   Ainsi $\forall (x,y) \in E^2$, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$.
3. $\mathcal{R}$ est transitive : soient x, y et z des mots de la langue française tels que x s' écrit avec les mêmes lettres que y et y s' écrit avec les mêmes lettres que z. Alors x s' écrit avec les mêmes lettres que z. Ainsi $\forall (x,y,z) \in E^3$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.

$\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence. La classe du mot "chien" est l'ensemble des mots de la langue française qui s'écrivent avec les mêmes lettres que le mot "chien".
Ainsi $\mathcal{C}\ell(chien) = \{chien, niche, Chine\}$.

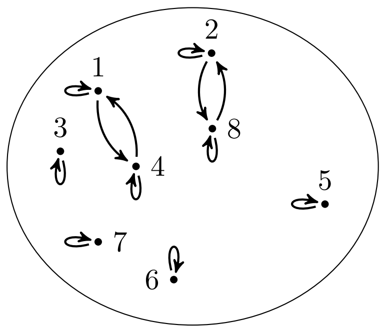
Exercice 7 : Correction :
On rappelle la définition suivante : un entier $n \in \mathbb{N}$ est un carré parfait s'il existe un entier a tel que $n = a^2$. Par exemple 1,4, 9 et 16 sont des carrés parfaits car $1 = 1^2,\ 4 = 2^2,\ 9 = 3^2$ et $16 = 4^2$.
On considère la relation $\mathcal{R}$ définie dans $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^*,\ x\mathcal{R}y \ \Leftrightarrow\ xy \text{ est un carré parfait.}$$

Dans la suite de l'exercice on restreint la relation $\mathcal{R}$ à l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. *Donnez la représentation cartésienne de la relation $\mathcal{R}$, puis sa représentation sagittale à côté.*

$\mathcal{R}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	X			X				
2		X						X
3			X					
4	X			X				
5					X			
6						X		
7							X	
8		X						X



2. *En vous appuyant sur la représentation cartésienne de la relation $\mathcal{R}$, déterminez si celle-ci est réflexive et symétrique.*
   Toutes les cases de la diagonale principale sont cochées, ce qui signifie que $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
   La relation $\mathcal{R}$ est donc réflexive.
   La représentation cartésienne de la relation $\mathcal{R}$ est symétrique par rapport à sa diagonale principale donc $\forall (x,y) \in E^2$, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$. La relation $\mathcal{R}$ est donc symétrique.
3. *On souhaite étudier si la relation $\mathcal{R}$ est transitive. En vous appuyant sur la représentation sagittale, complétez le tableau ci-dessous en 2 parties, en ne reportant dans les trois colonnes à gauche, que les triplets (x, y, z) tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Ecrire alors Vrai ou Faux en-dessous de $x\mathcal{R}z$, puis en-dessous du connecteur $\to$.*

x	y	z	$(x\mathcal{R}y$	ET	$y\mathcal{R}z)$	$\rightarrow$	$x\mathcal{R}z$
1	1	1		V		V	V
1	1	4		V		V	V
1	4	1		V		V	V
1	4	4		V		V	V
2	2	2		V		V	V
2	2	8		V		V	V
2	8	2		V		V	V
2	8	8		V		V	V
3	3	3		V		V	V
4	1	1		V		V	V

x	y	z	$(x\mathcal{R}y$	ET	$y\mathcal{R}z)$	$\rightarrow$	$x\mathcal{R}z$
4	1	4		V		V	V
4	4	1		V		V	V
4	4	4		V		V	V
5	5	5		V		V	V
6	6	6		V		V	V
7	7	7		V		V	V
8	2	2		V		V	V
8	2	8		V		V	V
8	8	2		V		V	V
8	8	8		V		V	V

Pour tout $(x, y, z) \in E^3$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ on a $x\mathcal{R}z)$ d'après le tableau ci-dessus. La relation $\mathcal{R}$ est donc transitive.

4. *Que peut-on dire de la relation $\mathcal{R}$ d'après les questions 2. et 3. ?*
   La relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive. C'est donc une relation d'équivalence dans E.
5. *Donner les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.*
   La représentation sagittale permet de visualiser facilement les classes d'équivalence :
   $\mathcal{C}\ell(1) = \{1, 4\}$
   $\mathcal{C}\ell(2) = \{2, 8\}$
   $\mathcal{C}\ell(3) = \{3\}$
   $\mathcal{C}\ell(5) = \{5\}$
   $\mathcal{C}\ell(6) = \{6\}$
   $\mathcal{C}\ell(7) = \{7\}$
6. (*) *Démontrer la transitivité de la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{N}$ (et non plus dans E).*
   Hypothèse : $a \mid b$ et $b \mid c$

   Montrons que $a \mid c$.

   $a \mid b \iff$ il existe un entier k_1 tel que $b = k_1 \times a$.
   $b \mid c \iff$ il existe un entier k_2 tel que $c = k_2 \times b$.

   Il s'agit de trouver un entier k vérifiant $c = k \times a$.

   Or $c = k_2 \times b = k_2 \times (k_1 \times a) = (k_2 \times k_1) \times a$.
   Posons alors $k = k_2 \times k_1$.

   Conclusion : $a \mid c$

Exercice 8 : (*) Soit a et b deux nombres entiers relatifs. On dit que **a divise b** s'il existe un entier relatif k tel que b = ka. On note alors **a** | **b**.
Démontrer que la relation de divisibilité est réflexive et transitive dans $\mathbb{Z}$. Est-elle antisymétrique dans $\mathbb{Z}$? Démontrer que sa restriction à $\mathbb{N}$ est antisymétrique.

Correction : Soit $n \in \mathbb{Z}$. $n = 1 \times n$ donc $n \mid n$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, n \mid n$, ce qui signifie que la divisibilité est réflexive dans $\mathbb{Z}$.
La transitivité dans $\mathbb{N}$ a été montrée dans l'exercice 7. Elle se démontre de façon analogue dans $\mathbb{Z}$.
Par contre elle n'est pas antisymétrique dans $\mathbb{Z}$ car $(-1) \mid 1$ et $1 \mid (-1)$ mais $-1 \neq 1$.

Montrons que la divisibilité est antisymétrique dans $\mathbb{N}$. Soient a et b des entiers naturels.
Hypothèse : $a \mid b$ et $b \mid a$
Montrons qu'alors $a = b$.
$a \mid b \iff \exists k_1 \in \mathbb{N}$ tel que $b = k_1 a$ et $b \mid a \iff \exists k_2 \in \mathbb{N}$ tel que $a = k_2 b$.
Ainsi $a = k_1 b = k_1 k_2 a$.

Premier cas : $a = 0$.
Les hypothèses sont alors $0 \mid b$ et $b \mid 0$, ce qui implique que $b = 0$. On a alors $a = b$.

Deuxième cas : $a \neq 0$.
Alors $k_1 k_2 = 1 \iff (k_1 = k_2 = 1)$ puisque k_1 et k_2 sont des entiers naturels .

On a alors $a = b$.

Conclusion : $\forall (a, b) \in \mathbb{N}$, si $a \mid b$ et $b \mid a$ alors $a = b$. La divisibilité est antisymétrique dans $\mathbb{N}$.