Chapitre 2 : Calcul des propositions

Théorie sémantique ou théorie des modèles

1 Introduction

L'attribution d'une valeur de vérité précise à une proposition élémentaire concrète ne relève pas de la logique mais du langage de l'observateur.
Par exemple : interpréter à VRAI la proposition "Il pleut ce matin" est extérieur à la logique.
Interpréter la proposition "π est un réel positif" relève des mathématiques.
Le but ici est de formaliser l'interprétation d'une formule (à VRAI ou à FAUX) en fonction des valeurs de vérité des propositions élémentaires qui la composent.

Exemple : considérons la proposition

Pierre parle couramment l'anglais et l'allemand.

Posons p : Pierre parle couramment l'anglais et q : Pierre parle couramment l'allemand.
La proposition est donc de la forme $p \wedge q$ (*se lit : p et q*).

On ne peut pas affirmer que cette proposition est vraie ou fausse. Tout dépend des valeurs de vérité de p et q. Tentons alors, en fonction de celles-ci, d'établir la valeur de vérité de cette proposition.

Pierre parle couramment l'anglais p	Pierre parle couramment l'allemand q	Pierre parle couramment l'anglais et l'allemand $p \wedge q$

On fera bien attention ici à ne pas affirmer qu'une proposition est vraie ou fausse, mais à parler de sa **valeur de vérité**, qui n'est pas forcément la même selon l'**interprétation** que l'on a faite des propositions élémentaires qui la composent.

2 Interprétation de n propositions élémentaires

Définition 1. On appelle interprétation d'un ensemble P de n propositions élémentaires une application i de P dans l'ensemble {V, F}.

Exemple avec n = 3. Soit P = {p, q, r}.

$$\begin{array}{llll} i: & P & \to & \{V,F\}. \\ & p & \mapsto & V \\ & q & \mapsto & F \\ & r & \mapsto & V \end{array}$$

On représente plutôt i ainsi :

	p	q	r
i	V	F	V

Théorème 2.1. *Soit n un entier naturel non nul. Il existe 2^n interprétations d'un ensemble P de n propositions élémentaires.*

On les représente dans un seul tableau.

Exemples :

Pour n= 1	
	p
i_1	V
i_2	F

Pour n= 2		
	p	q
i_1	V	V
i_2	V	F
i_3	F	V
i_4	F	F

Pour n= 3			
	p	q	r
i_1	V	V	V
i_2	V	V	F
i_3	V	F	V
i_4	V	F	F
i_5	F	V	V
i_6	F	V	F
i_7	F	F	V
i_8	F	F	F

Remarque : L'ordre dans lequel les propositions élémentaires sont disposées ainsi que celui des interprétations i sont arbitraires. **On respectera cependant la disposition conventionnelle proposée ici, pour faciliter la communication, à savoir :**

— les propositions élémentaires sont rangées par ordre alphabétique
— on attribuera systématiquement la valeur de vérité V en priorité à la proposition élémentaire située la plus à gauche

.

3 Définition des connecteurs

Pour définir formellement les connecteurs usuels nous nous appuyons sur notre intuition, sur ce que nous souhaitons formaliser. Il y a cependant parfois un "saut théorique" à accomplir, qui se traduira par l'usage des symboles $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ au lieu de NON, OU, ET, si $\cdots$ alors, si et seulement si.
On définit les connecteurs par leur table de vérité. On remarquera la ligne en caractères gras : elle permet de retenir facilement ces tables, qui doivent être parfaitement connues.

3.1 Le connecteur unaire *négation* noté $\neg$

p	$\neg$ p
V	
F	

Exemple :

p : il fait froid	$\neg$ p : il ne fait pas froid
V	
F	

3.2 Le connecteur binaire *et* noté $\wedge$

p	q	p $\wedge$ q
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple : voir l'exemple introductif
"Pierre parle couramment l'anglais et l'allemand"

3.3 Le connecteur binaire *ou inclusif* noté $\vee$

p	q	p $\vee$ q
V	V	
V	F	
F	V	
F	**F**	

Exemple :

p : je mange	q : je ris	p $\vee$ q : je mange ou je ris
V	V	
V	F	
F	V	
F	**F**	

3.4 Le connecteur binaire *implication matérielle* noté $\rightarrow$

p	q	p $\rightarrow$ q
V	V	
V	**F**	
F	V	
F	F	

Exemple :

p : je mange	q : je dors	p $\rightarrow$ q : si je mange alors je dors
V	V	
V	**F**	
F	V	
F	F	

Attention à cette définition peu intuitive :
$p \rightarrow q$ est F seulement pour l'interprétation (V, F) des propositions élémentaires.

3.5 Le connecteur binaire *biconditionnelle* noté $\leftrightarrow$

p	q	p$\leftrightarrow$q
V	**V**	
V	F	
F	V	
F	**F**	

Exemple :

p : je mange	q : je dors	p$\leftrightarrow$q : je mange si et seulement si je dors
V	**V**	
V	F	
F	V	
F	**F**	

Ainsi $p \leftrightarrow q$ est interprétée à V si et seulement si les propositions élémentaires ont la même valeur de vérité.

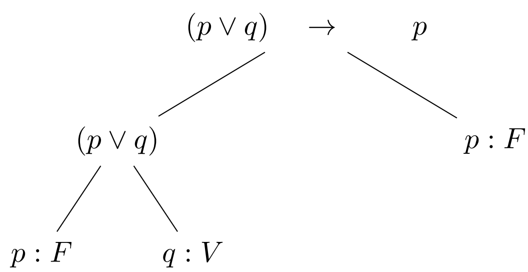
4 Interprétation d'une formule composée

L'interprétation d'une formule composée se fait par le principe de composition des valeurs de vérité :
Soit φ une formule composée. Soit i une interprétation des propositions élémentaires. Sur l'arbre de décomposition de la formule φ on indique à côté de chaque feuille la valeur de vérité de la proposition élémentaire dans l'interprétation i. Puis on remonte l'arbre en indiquant à chaque nœud la valeur de vérité de la sous-formule calculée.
La valeur de vérité finale s'appelle l'interprétation de la formule φ dans l'interprétation i.

Exemple 1 : Donner l'interprétation de la formule $\varphi : (p \vee q) \rightarrow p$ dans l'interprétation i des propositions élémentaires donnée par :

	p	q
i_3	F	V

On complète l'arbre suivant :



Le résultat est noté ainsi :

	p	q	$(p \vee q) \quad \rightarrow \quad p$
i_3	F	V	F

La **table de vérité** d'une formule φ donne la valeur de vérité de φ dans chacune des interprétations des propositions élémentaires.

	p	q	$(p \vee q) \quad \rightarrow \quad p$
i_1	V	V	
i_2	V	F	
i_3	F	V	
i_4	F	F	

Exemple 2 :

	p	q	r	$p \rightarrow (q \wedge r)$
i_1	V	V	V	
i_2	V	V	F	
i_3	V	F	V	
i_4	V	F	F	
i_5	F	V	V	
i_6	F	V	F	
i_7	F	F	V	
i_8	F	F	F	

5 Modèles, contre-exemples d'une formule. Formules équivalentes

Définition 2. Soit une formule φ construite sur un ensemble P de propositions élémentaires.
On appelle **modèle de** φ une interprétation des propositions élémentaires pour laquelle φ est interprétée à V.
On appelle **contre-exemple de** φ une interprétation des propositions élémentaires pour laquelle φ est interprétée à F.

L'ensemble des modèles de φ est noté $\mathcal{M}_\varphi$.

Dans l'exemple 1 : $\mathcal{M}_\varphi = \{i_1, i_2, i_4\}$ et i_3 est un contre-exemple de φ.

Dans l'exemple 2 : $\mathcal{M}_\psi = \{i_1, i_5, i_6, i_7, i_8\}$ et i_2, i_3, i_4 sont des contre- exemples de ψ.

Définition 3. Soit une formule φ construite sur un ensemble P de propositions élémentaires.
On appelle **tautologie** une formule qui n'admet que des modèles. Une formule qui n'admet que des contre-exemples s'appelle une **contradiction**.

La phrase du métalangage : " φ *est une tautologie*" se note : $\models \varphi$.
"ψ *est une contradiction*" se note : $\psi \models$.
Le symbole $\models$ est donc un métasymbole. Il s'appelle le "*double tourniquet sémantique*".

Exemples : (Construire les tables de vérité des formules ci-dessous pour vérifier que ce sont des tautologies ou des contradictions.)

$$\models p \vee \neg p$$
$$\models p \rightarrow p$$
$$\models p \rightarrow (p \vee q)$$
$$\models (p \wedge q) \rightarrow p$$
$$p \wedge \neg p \models$$

Définition 4. On dit que deux formules A et B de $\mathcal{F}(P)$ sont **équivalentes** si elles ont les mêmes modèles (autrement dit si elles ont la même table de vérité). On note alors : A éq B.

Cela équivaut à : $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}_B$

Exemples : $\neg\neg p$ éq p, $\qquad (p \rightarrow q)$ éq $(\neg p \vee q)$.

Théorème 5.1. *A éq B si et seulement si* $\models (A \leftrightarrow B)$

6 Réciproque. Contraposée

Définition 5. Soit l'implication $p \to q$ définie sur un ensemble P de propositions élémentaires.

1. $q \to p$ est appelée **réciproque** de $p \to q$.
2. $\neg q \to \neg p$ est appelée **contraposée** de $p \to q$.

Exemple : Considérons la proposition : *Si je gagne au loto alors j'achète une Ferrari*, qui est de la forme $p \to q$.
Sa réciproque est donc : *Si j'achète une Ferrari c'est que j'ai gagné au loto.*
Sa contraposée est : *Si je n'achète pas de Ferrari c'est que je n'ai pas gagné au loto.*

Proposition 1. *Soit l'implication $p \to q$ définie sur un ensemble P de propositions élémentaires. $p \to q$ est équivalente à sa contraposée :*

$$p \to q \ \textit{éq} \ \neg q \to \neg p$$

Démonstration : Construisons les tables de vérité des deux formules.

	p	q	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
i_1	V	V	**V**	F **V** F
i_2	V	F	**F**	V **F** F
i_3	F	V	**V**	F **V** V
i_4	F	F	**V**	V **V** V

Les formules $p \to q$ et $\neg q \to \neg p$ ont exactement les mêmes modèles donc elles sont équivalentes.

Attention : $p \to q$ n'est pas équivalente à sa réciproque $q \to p$. Construisons les tables de vérité des deux formules :

	p	q	$p \to q$	$q \to p$
i_1	V	V	**V**	**V**
i_2	V	F	**F**	**V**
i_3	F	V	**V**	**F**
i_4	F	F	**V**	**V**

i_3 est un modèle de $p \to q$ mais un contre-exemple de $q \to p$. Les deux formules ne sont donc pas équivalentes.

7 Lois de Morgan

Proposition 2. *Soit p et q des propositions élémentaires. Alors :*

1. $\neg(p \wedge q)$ *éq* $\neg p \vee \neg q$ *2.* $\neg(p \vee q)$ *éq* $\neg p \wedge \neg q$

Démonstration :

	p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
i_1	V	V	**F** V	F **F** F	**F** V	F **F** F
i_2	V	F	**F** V	F **F** V	**V** F	F **V** V
i_3	F	V	**F** V	V **F** F	**V** F	V **V** F
i_4	F	F	**V** F	V **V** V	**V** F	V **V** V

$\neg(p \vee q)$ et $\neg p \wedge \neg q$ ont exactement les mêmes modèles donc elles sont équivalentes.
Il en est de même pour $\neg(p \wedge q)$ et $\neg p \vee \neg q$.
Ces deux équivalences sont appelées lois de De Morgan, usuellement appelées lois de Morgan. Elles sont utilisées pour écrire la négation d'une proposition de la forme $p \wedge q$ ou $p \vee q$ de sorte que la négation porte directement sur les propositions p et q.
Exemples : Ecrivons en français la négation des propositions suivantes :

1. Les voitures de ce garage sont neuves et bien équipées.
   Les voitures de ce garage ne sont pas neuves ou pas bien équipées.
2. Ce soir j'irai au restaurant ou au cinéma.
   Ce soir je n'irai ni au restaurant ni au cinéma.