Exercice I

On pose :

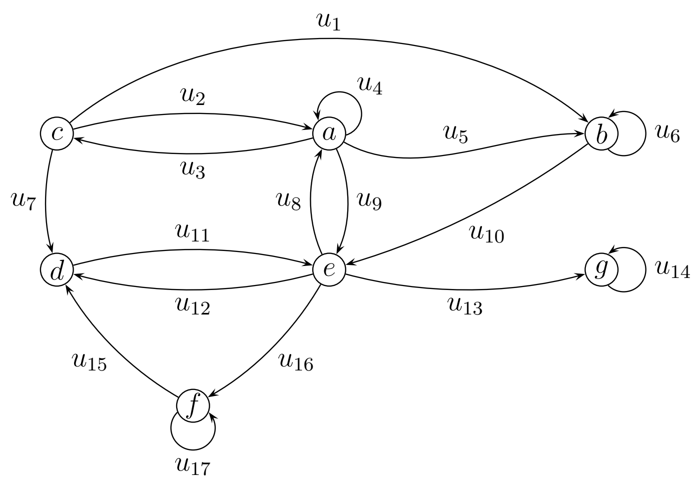
$$S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$A = \{(b,a), (e,b), (a,f), (f,b), (c,b), (c,e), (c,f), (f,d), (d,c), (d,g), (g,d)\}$$

1) Dessiner le graphe $G = (S, A)$ de telle sorte que les arcs ne se croisent pas.
2) Donner des exemples illustrant les notions d'adjacence et d'incidence.
3) Déterminer l'ensemble des successeurs (voisins extérieurs), l'ensemble des prédécesseurs (voisins intérieurs) et l'ensemble des voisins (intérieurs et extérieurs) de chaque sommet.
4) Déterminer le degré extérieur, le degré intérieur et le degré de chaque sommet.
5) Donner différents chemins de f à g.
6) Donner des exemples de parcours élémentaires, hamiltoniens, simples, eulériens.

Exercice II

Soit le graphe :



1) Que représentent les suites suivantes :

$(u_2, u_5, u_{10}, u_{12})$	$(u_{11}, u_8, u_3, u_2, u_5, u_{10}, u_{12})$
$(u_2, u_4, u_5, u_{10}, u_{13})$	(u_7, u_{11}, u_8, u_3)
(c, a, e, a, b)	(a, a)
(d, e, a, b, e, a, c)	(c, d, e, a, b, e, a, c)

2) Ce graphe admet-il un chemin eulérien ? un circuit eulérien ?
3) En raisonnant sur le diagramme du graphe, montrer qu'il n'admet pas de chemin hamiltonien.

Exercice III

Cinq équipes sont engagées dans un tournoi. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres et chaque rencontre se solde obligatoirement par la victoire de l'une des deux équipes.

(1) Représenter les résultats de ce tournoi par un graphe orienté. Dessiner le diagramme d'un graphe de ce type (chacun fait comme bon lui semble).

(2) Que représentent le degré intérieur et le degré extérieur d'un sommet de ce graphe ? En déduire un classement des équipes.

(3) Trouver un chemin hamiltonien dans ce graphe.

Définition

On appelle **tournoi** tout graphe orienté $G = (S, A)$ sans boucle tel qu'il existe exactement un arc reliant chaque paire de sommets distincts. Le graphe de l'exercice III en est un exemple. La particularité de ce graphe est qu'il contient nécessairement un chemin hamiltonien.

Exercice IV

Soit $G = (S, A)$ un tournoi. L'algorithme suivant permet de déterminer un cycle hamiltonien dans G :

(1) *Initialisation (itération 0).* Choisir un sommet quelconque et soit $\mathcal{C}_0$ le chemin trivial ne contenant que ce sommet.

(2) *Itération* $k \geq 1$. Soit $\mathcal{C}_{k-1} = (s_0, ..., s_{k-1})$ le chemin obtenu à l'itération $k - 1$. On obtient le chemin $\mathcal{C}_k$ en ajoutant un sommet à $\mathcal{C}_{k-1}$. Pour ce faire, on utilise l'une des 3 procédures suivantes :

   (i) *Ajout d'un sommet au bout du chemin.*
   Trouver un sommet $x \notin \mathcal{C}_{k-1}$ tel que $(s_{k-1}, x) \in A$. Ajouter x au bout du chemin.

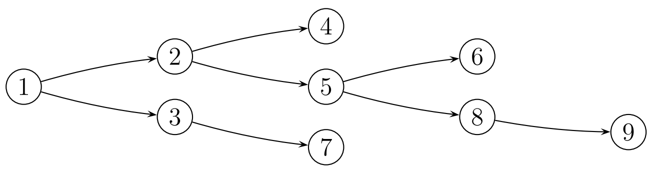
   (ii) *Ajout d'un sommet au début du chemin.*
   Trouver un sommet $x \notin \mathcal{C}_{k-1}$ tel que $(x, s_0) \in A$. Ajouter x au début chemin.

   (iii) *Ajout d'un sommet à l'intérieur du chemin.*
   Trouver un sommet $x \notin \mathcal{C}_{k-1}$ tel que $(s_i, x) \in A$ et $(x, s_{i+1}) \in A$. Remplacer l'arc $(s_i, s_{i+1}) \in \mathcal{C}_{k-1}$ par les deux arcs (s_i, x) et (x, s_{i+1}).

Appliquer cet algorithme au graphe de l'exercice III.

Exercice V

Soit l'arborescence :



1) Donner la table des pères représentant cette arborescence.
2) Écrire un module qui affiche le chemin allant de la racine à un sommet donné de l'arborescence.

Exercice VI

On dispose d'un seau de 8 litres rempli, d'un seau de 5 litres vide et d'un seau de 3 litres vide. Le but est d'isoler 4 litres dans chacun deux premiers seaux en effectuant une série de transvasements et sans perdre de liquide. Les seaux ne sont pas gradués et une opération de transvasement permet, soit de vider entièrement un seau, soit de remplir entièrement un seau. Déterminer une solution à ce problème.