Corrigé feuille d'exercices n° 1
Calcul des propositions

Exercice 1: Traduire les énoncé suivants en langage de la logique formelle (on considérera que le "ou" est inclusif) :

1. Paul est malade et va l'école. $p \wedge q$, où p : Paul est malade et q : Paul va à l'école.
2. Un oiseau est soit rouge, soit bleu. $p \vee q$, où p : un oiseau est rouge et q : un oiseau est bleu.
3. Si la climatisation marche alors il fait frais. $p \to q$, où p : la climatisation marche et q : il fait frais.
4. Jean n'est pas fier de lui. $\neg p$, où p : Jean est fier de lui.
5. Si le drapeau est rouge alors je suis raisonnable et je ne me baigne pas. $p \to (q \wedge \neg r)$, où p : le drapeau est rouge, q : je suis raisonnable et r : je me baigne.
6. Je franchis le carrefour si et seulement si le feu est vert. $p \leftrightarrow q$, où p : je franchis le carrefour et q : le feu est vert.

Exercice 2: En utilisant le contenu concret donné aux propositions élémentaires $p, q \cdots$, traduire les formules suivantes à l'aide d'une phrase en français la plus "naturelle" possible :

1. $p \vee q$ p : Manon travaille q : Manon écoute de la musique

   Manon travaille ou Manon écoute de la musique.
   Manon travaille ou écoute de la musique.

2. $p \wedge \neg q$ p : j'ai du mal à suivre le rythme q : je me décourage

   J'ai du mal à suivre le rythme et je ne me décourage pas.

   J'ai du mal à suivre le rythme mais je ne me décourage pas.

3. $\neg p \wedge \neg q$ p : cette personne aime le sport q : cette personne aime la musique

   Cette personne n'aime pas le sport et n'aime pas la musique.
   Cette personne n'aime ni le sport ni la musique.

4. $(p \vee q) \to r$ p : il neige q : il vente r : je fais mon jogging

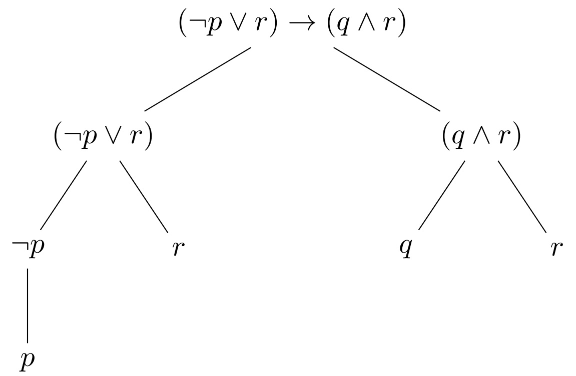
   S'il neige ou s'il vente je fais mon jogging.
   Qu'il neige ou qu'il vente je fais mon jogging.

5. $(p \wedge q) \to (r \vee s)$ proposez un contenu concret pour les propositions élémentaires p, q, r, s

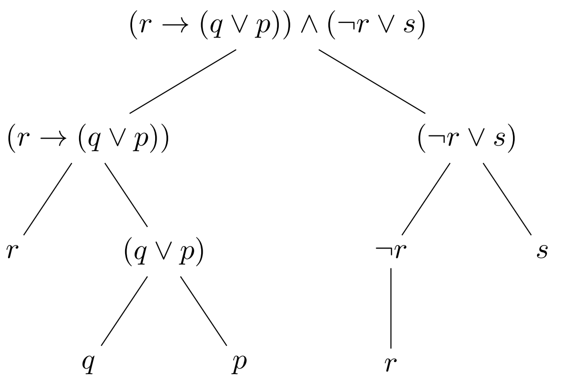
   S'il fait beau et si j'ai fini mon travail alors je paresse au soleil ou bien je vais faire du vélo.

Exercice 3: Donner l'arbre de décomposition des formules suivantes du calcul des propositions.

1. α : $(\neg p \vee r) \to (q \wedge r)$



2. β : $(r \to (q \vee p)) \wedge (\neg r \vee s)$



Exercice 4: Pour chacune des formules suivantes, déterminer leur table de vérité et donner l'ensemble de leurs modèles. Préciser si la formule est une tautologie, une contradiction ou une formule contingente.

1. α : $(\neg p \vee r) \to (q \wedge r)$

	p	q	r	$(\neg p \vee r) \to (q \wedge r)$
i_1	V	V	V	F V **V** V
i_2	V	V	F	F F **V** F
i_3	V	F	V	F V **F** F
i_4	V	F	F	F F **V** F
i_5	F	V	V	V V **V** V
i_6	F	V	F	V V **F** F
i_7	F	F	V	V V **F** F
i_8	F	F	F	V V **F** F

$\mathcal{M}(\alpha) = \{i_1, i_2, i_4, i_5\}$ (Les modèles de la formule α sont i_1, i_2, i_4 et i_5).
i_3 est un contre-exemple de α donc α n'est pas une tautologie.
i_1 est un modèle de α donc α n'est pas une contradiction.
C'est donc une formule contingente.

2. β : $(r \to (q \vee p)) \wedge (\neg r \vee s)$

	p	q	r	s	$(r \to (q \vee p)) \wedge (\neg r \vee s)$
i_1	V	V	V	V	V V **V** F V
i_2	V	V	V	F	V V **F** F F
i_3	V	V	F	V	V V **V** V V
i_4	V	V	F	F	V V **V** V V
i_5	V	F	V	V	V V **V** F V
i_6	V	F	V	F	V V **F** F F
i_7	V	F	F	V	V V **V** V V
i_8	V	F	F	F	V V **V** V V
i_9	F	V	V	V	V V **V** F V
i_{10}	F	V	V	F	V V **F** F F
i_{11}	F	V	F	V	V V **V** V V
i_{12}	F	V	F	F	V V **V** V V
i_{13}	F	F	V	V	F F **F** F V
i_{14}	F	F	V	F	F F **F** F F
i_{15}	F	F	F	V	V F **V** V V
i_{16}	F	F	F	F	V F **V** V V

$\mathcal{M}(\beta) = \{i_1, i_3, i_4, i_5, i_7, i_8, i_9, i_{11}, i_{12}, i_{15}, i_{16}\}$.
i_2 est un contre-exemple de β donc β n'est pas une tautologie.
i_1 est un modèle de β donc β n'est pas une contradiction.
C'est donc une formule contingente.

Exercice 5: Pour chacune des formules suivantes, déterminer leur table de vérité, et préciser si la formule est une tautologie, une contradiction ou une formule contingente.

1. $p \vee \neg p$
2. $p \wedge \neg p$
3. $(p \wedge q) \to p$
4. $p \to (p \vee q)$

Formules 1. et 2.

	p	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
i_1	V	**V** F	**F** F
i_2	F	**V** V	**F** V

Formules 3. et 4.

	p	q	$(p \wedge q) \to p$	$p \to (p \vee q)$
i_1	V	V	V **V**	**V** V
i_2	V	F	F **V**	**V** V
i_3	F	V	F **V**	**V** V
i_4	F	F	F **V**	**V** F

Les formules des questions 1., 3. et 4. sont des tautologies car elles n'ont pas de contre-exemple.
La formule de la question 2. est une contradiction car elle n'a aucun modèle.

Exercice 6: Démontrer les équivalences suivantes en comparant les tables de vérité des formules données.

1. $\neg\neg p$ éq p

	p	$\neg\neg p$	p
i_1	V	**V** F V	**V**
i_2	F	**F** V F	**F**

   $\neg\neg p$ et p ont exactement les mêmes modèles donc elles sont équivalentes.

2. $p \to q$ éq $\neg p \vee q$
3. $p \leftrightarrow q$ éq $(p \to q) \wedge (q \to p)$

   Questions 2. et 3. :

	p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$	$p \leftrightarrow q$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
i_1	V	V	**V**	F **V**	**V**	V **V** V
i_2	V	F	**F**	F **F**	**F**	F **F** V
i_3	F	V	**V**	V **V**	**F**	V **F** F
i_4	F	F	**V**	V **V**	**V**	V **V** V

   $p \to q$ et $\neg p \vee q$ ont exactement les mêmes modèles donc elles sont équivalentes.
   Il en est de même pour $p \leftrightarrow q$ et $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

On retiendra les résultats de cet exercice.

Exercice 7: On considère l'implication *Si son cheval chute, Marie sera disqualifiée* .

1. *Ecrire la réciproque puis la contraposée de cette implication.*
   Si Marie n'est pas disqualifiée, c'est que son cheval n'a pas chuté.
2. *Marie est disqualifiée. Son cheval a-t-il chuté ?*
   L'énoncé "Si son cheval chute, Marie sera disqualifiée" n'est pas équivalent à sa réciproque, qui est : "Si Marie est disqualifiée c'est que son cheval a chuté". On ne peut donc pas déduire de la phrase "Marie est disqualifiée", que son cheval a chuté.
3. Même question si Marie n'est pas disqualifiée.
   L'énoncé "Si son cheval chute, Marie sera disqualifiée" est équivalent à sa contraposée (voir question 1.). On peut donc déduire de la phrase "Marie n'est pas disqualifiée", que son cheval n'a pas chuté.

Exercice 8: Ecrire la négation des propositions suivantes (penser à utiliser les lois de Morgan). On considérera que le "ou" est inclusif.

1. *Les maisons construites par ce promoteur sont esthétiques et de construction traditionnelle.*
   Les maisons construites par ce promoteur ne sont ni esthétiques et ni de construction traditionnelle.
2. *Soit elle s'ennuie, soit elle embête son frère.*
   Elle ne s'ennuie pas et elle n'embête pas son frère.
3. *Cette région n'est pas chaude ou est humide selon les mois de l'année.*
   Cette région est chaude mais n'est pas humide selon les mois de l'année.

Exercice 9: Traduire en logique symbolique du calcul des propositions les expressions suivantes :

1. Si 3 est supérieur à 4, alors 1 = 0. $p \to q$, où p : 3 est supérieur à 4 et q : 1=0.
2. S'il pleut, je joue aux cartes sinon je me promène. $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$, où p : il pleut, q : je joue aux cartes, et r : je me promène.
3. Il s'agit d'un triangle si et seulement si la somme des trois angles est égale à deux droits. $p \leftrightarrow q$, où p : il s'agit d'un triangle et q : la somme des trois angles est égale à deux droits.
4. Je viendrai sauf s'il est là. $p \leftrightarrow \neg q$, où p : je viendrai et q : il est là.
5. Pour que 26 soit le carré d'un nombre entier, il est nécessaire qu'il existe un nombre entier compris entre 5 et 6. $p \to q$, où p : 26 est le carré d'un nombre entier et q :il existe un nompbre entier compris entre 5 et 6.
6. Il suffit que je chante pour qu'il pleuve. $p \to q$, où p : je chante et q : il pleut.
7. Pour qu'il vienne, il suffit que je l'appelle. $q \to p$, où p : il vient et q : je l'appelle.
8. Pour que 24 soit un nombre premier, il est nécessaire et suffisant qu'il soit divisible par lui-même et par 1. $p \leftrightarrow q$, où p : 24 est un nombre premier et q : il est divisible par lui-même et par 1.

Exercice 10: Même exercice que ci-dessus.

1. Pour penser, il faut être. $p \to q$, où p : penser et q : être.
2. Je viendrai à moins qu'il ne soit là. $p \leftrightarrow \neg q$, où p : je viendrai et q : il est là.
3. Il suffit que Juliette soit présente pour que Roméo se rende au bal des Capulet. $p \to q$, où p : Juliette est présente et q : Roméo se rend au bal des Capulets.
4. Il ralentit s'il freine. $q \to p$, où p : il ralentit et q : il freine.
5. Il réussira seulement s'il travaille. $p \to q$, où p : il réussira et q : il travaille.