TÜREV FORMÜLLERİ

Tanım:

$f:[a,b] \to R, y = f(x) bir\ fonksiyon\ ve\ x_0 \epsilon\ (a,b)$ $olsun.\ y = f(x)\ için$

$lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

değeri varsa bu değere $y = f(x)$ *fonksiyonunun* $x = x_0$ *noktasındaki türevi denir.*

$x = x_0 + h$ *alındığında* $x \to x_0$ *için* $h \to 0$ *olur.*
O halde f fonksiyonunun x_0 *noktasındaki türevi*

$f'(x_0) = lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

şeklinde tanımlanabilir.

- $f'(x_0^-) = lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *soldan türev*
  $f'(x_0^+) = lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *sağdan türev*
  olmak üzere $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$ *ise*
  $f'(x_0)$ *vardır ve* $f'(x_0) = f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$

NOT:

f fonksiyonu x_0 *noktasında türevli ise bu noktada süreklidir. Fakat sürekli olduğu her noktada türevli olmayabilir.*

Türev Alma Kuralları

- $f(x) = c\ ise\ f'(x) = 0\ dır. (c \in R)$
- $f(x) = x^n\ ise\ f'(x) = n.x^{n-1}$
- $f(x) = g(x) + h(x)\ ise\ f'(x) = g'(x) + h'(x)$
- $f(x) = g(x).h(x)\ ise$
  $f'(x) = g'(x).h(x) + h'(x).g(x)$
- $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ *ise* $f'(x) = \frac{g'(x).h(x)-g(x).h'(x)}{(h(x))^2}$
- $f(x) = \sqrt{g(x)}$ *ise* $f'(x) = \frac{g'(x)}{2.\sqrt{g(x)}}$
- $f(x) = g(ax+b)\ ise\ f'(x) = a.g'(ax+b)$

Bileşke Fonksiyonun Türevi

- $f(x) = (goh)(x)\ ise\ f'(x) = g'\big(h(x)\big).h'(x)$

Üstel Fonksiyonun Türevi

- $f(x) = a^{g(x)}\ ise\ f'(x) = g'(x).a^{g(x)}.lna$
- $f(x) = e^{g(x)}\ ise\ f'(x) = g'(x).e^{g(x)}$

Logaritmik Fonksiyonun Türevi

- $f(x) = log_a g(x)\ \ ise\ f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}.log_a e$
- $f(x) = ln\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

- $f(x) = sin\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = g'(x).cos\, g(x)$
- $f(x) = cos\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = -g'(x).sin\, g(x)$
- $f(x) = tan\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = g'(x).[1 + tan^2 g(x)]$
- $f(x) = cot\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = -g'(x).[1 + cot^2 g(x)]$

Ters Fonksiyonun Türevi

$A, B \subset R$ *olmak üzere,* $f : A \longrightarrow B$ *fonksiyonu* $1-1$ *ve örten olsun. f fonksiyonu* $x_0\ \epsilon\ A$ *noktasında türevli ve* $f'(x_0) \neq 0$ *ise,* $f^{-1}: B \to A$ *fonksiyonu da* x_0 *ın f altındaki görüntüsü olan* y_0 *noktasında türevlidir ve* $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ *dır.*

Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

- $f(x) = arc\, sin\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$
- $f(x) = arc\, cos\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = -\frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$
- $f(x) = arc\, tan\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}$
- $f(x) = arc\, cot\, g(x)\ \ ise\ f'(x) = -\frac{g'(x)}{1+g^2(x)}$

Parametrik Fonksiyonların Türevi

$x = u(t)\ ,\ \ y = v(t)$ *olmak üzere*

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ *dir.*

Kapalı Fonksiyonun Türevi

F (x , y) = 0 ise

$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$

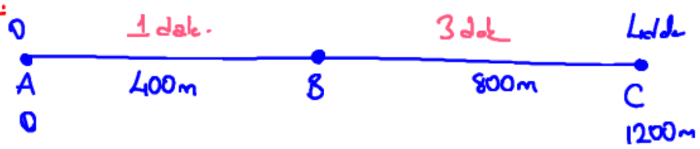
NOT:

x e göre türev alırken y sabittir
y ye göre türev alırken x sabittir.

MATEMATİK II DERSİ 10. HAFTA DERS NOTU

TÜREV

ÖRNEK:



Yukarıdaki gibi bir yolda hiç durmadan yoluna devam eden bir araç A'dan B'ye 1 dakikada, B'den C'ye 3 dakikada gitmiştir. A-C arasındaki ortalama hız kaçtır?

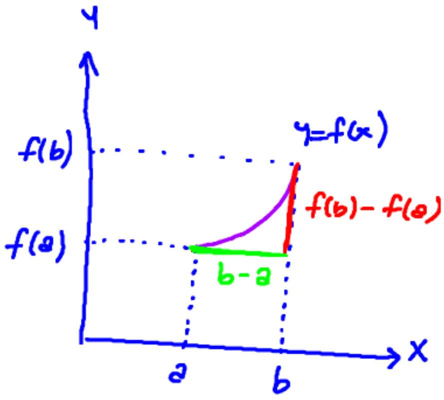
ÇÖZÜM: A-C arasındaki ortalama hız; $= \dfrac{\text{toplam yol}}{\text{toplam zaman}} = \dfrac{400+800}{1+3} = 300\ m/dk$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Son konum} - \text{ilk konum}}{\text{Son zaman} - \text{ilk zaman}} = \frac{1200-0}{4-0} = 300\ m/dk$$

Ortalama değişim oranı (hızı)

Bir $y=f(x)$ fonksiyonunda $[x_0, x_1]$ aralığında x'e göre ortalama değişim oranı (hızı);

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki ortalama değişim oranı;

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

↓

eğim

ÖRNEK: $f(x) = x + e^{x+1}$

fonksiyonunun $[-1, 1]$ aralığındaki ortalama değişim oranını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{(1+e^{(1+1)})-(-1+e^{(-1+1)})}{1+1} = \frac{(1+e^2)-(-1+1)}{2} = \frac{1+e^2+1-1}{2}$$

$$= \frac{1+e^2}{2}$$

ÖRNEK: $y = x^3 + 1$

fonksiyonun $[a, a+2]$ aralığında değişim oranı 1 olduğuna göre a kaçtır?

ÇÖZÜM:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+2)-f(a)}{a+2-a} = \frac{((a+2)^3+1)-(a^3+1)}{2} = \frac{\cancel{a^3}+3a^2 \cdot 2+3a \cdot 2^2+2^3+\cancel{1}-\cancel{a^3}-\cancel{1}}{2}$$

$$= \frac{6a^2+12a+8}{2} = 3a^2+6a+4$$

$$3a^2+6a+4 = 1$$
$$3a^2+6a+3 = 0$$
$$3 \cdot (a^2+2a+1) = 0$$
$$3 \cdot (a+1)^2 = 0 \qquad \boxed{a=-1}$$

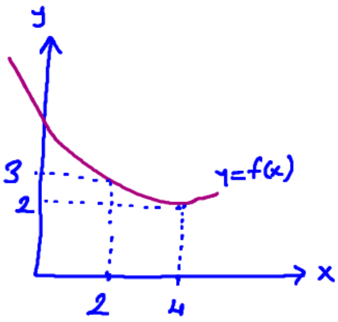
ÖRNEK: $f(x) = x^2 + 3x$

fonksiyonunun $[1, 4]$ aralığındaki ortalama değişim oranı kaçtır.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{(4^2+3.4)-(1^2+3.1)}{3} = \frac{16+12-4}{3} = \frac{28-4}{3}$$

$$= \frac{24}{3} = 8$$

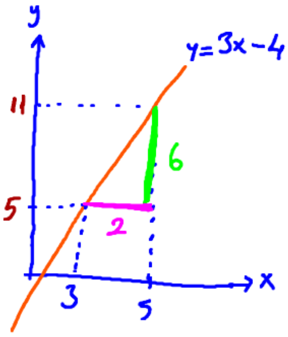
ÖRNEK:



y=f(x)'in [2,4] aralığındaki ortalama değişim oranını kaçtır?

ÇÖZÜM: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{2-3}{2} = \frac{-1}{2}$

ÖRNEK:



Yanda verilen f doğrusal fonksiyonunun [3,5] aralığındaki ortalama değişim oranını ve eğimini karşılaştırın.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5)-f(3)}{5-3} = \frac{11-5}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$m = \frac{6}{2} = 3$

ÖRNEK: $f(x) = x^3 + x^2$

fonksiyonunun aşağıdaki aralıklardan hangisinde ortalama değişim hızı 4'tür?

a) [-4,0] X
b) [0,2] X
c) [-2,2]
d) [-1,3]
e) [1,2]

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 4$

$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \frac{(2^3+2^2)-(\overset{-8}{(-2)^3}+\overset{4}{(-2)^2})}{4} = \frac{8+\cancel{4}+8-\cancel{4}}{4} = 4=4$

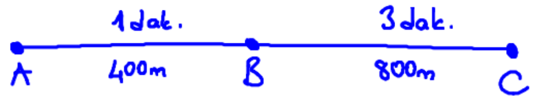
KAYNAKLAR

- İHTİYAROĞLU F /ŞAHBAZ B. , Türev , APOTEMİ
- https://www.youtube.com/watch?v=Xqst_2p14u0

MATEMATİK II DERSİ 11. HAFTA DERS NOTU

TÜREV

Ortalama Değişim Oranı

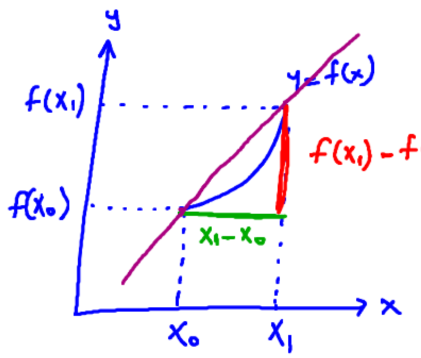


A - C arası ortalama hız;

$$\frac{\text{Toplam yol}}{\text{Toplam zaman}} = \frac{400+800}{1+3} = \frac{1200}{4} = 300 \text{ m/dk}$$

$y=f(x)$ fonksiyonunda $[x_0, x_1]$ aralığında x'e göre ortalama değişim oranı (hızı),

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

ÖRNEK: $f(x) = x + e^{x+1}$

fonksiyonun $[-1,1]$ aralığındaki ortalama değişim oranını bulunuz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{(1+e^{1+1})-(-1+e^{-1+1})}{1+1} = \frac{1+e^2 \cancel{+1} \cancel{-1}}{2} = \frac{1+e^2}{2}$$

ÖRNEK: $y = x^3 + 1$

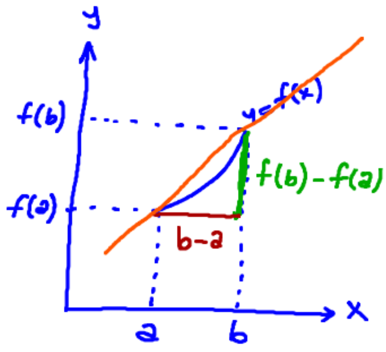
fonksiyonunun $[a, a+2]$ aralığında değişim oranı 1 old. göre a kaçtır?

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+2) - f(a)}{a+2-a} = \frac{\left((a+2)^3 + 1\right) - (a^3+1)}{2} = \frac{\cancel{a^3} + 3a^2 2 + 3a2^2 + 2^3 \cancel{- a^3} - 1}{2}$$

$$= \frac{\cancel{6}^{3}a^2 + \cancel{12}^{6}a + \cancel{8}^{4}}{\cancel{2}} = 1 \qquad 3a^2 + 6a + 4 = 1 \qquad 3.(a^2 + 2a + 1) = 0$$

$$3a^2 + 6a + 3 = 0 \qquad 3.(a+1)^2 = 0$$

$$a = -1$$



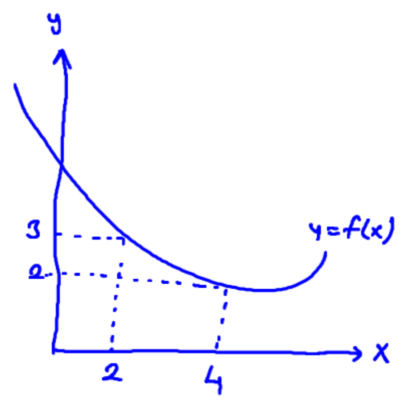
f fonksiyonun $[a, b]$ aralığındaki ortalama değişim oranı;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = m$$

ÖRNEK: $f(x) = x^2 + 3x$ fonksiyonunun $[1, 4]$ aralığındaki ortalama değişim oranını bulunuz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4-1} = \frac{\left(4^2 + 3.4\right) - \left(1^2 + 3.1\right)}{3} = \frac{28 - 4}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

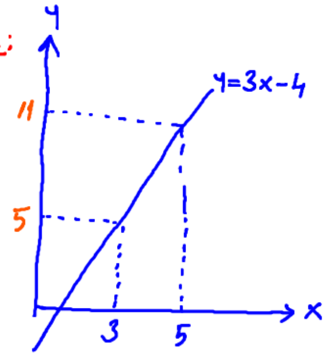
ÖRNEK:



$y = f(x)$'in $[2, 4]$ aralığındaki ortalama değişim oranını bulunuz.

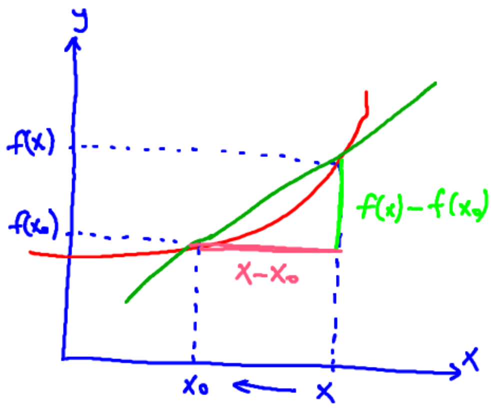
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(2)}{4-2} = \frac{2-3}{2} = \frac{-1}{2}$$

ÖRNEK:



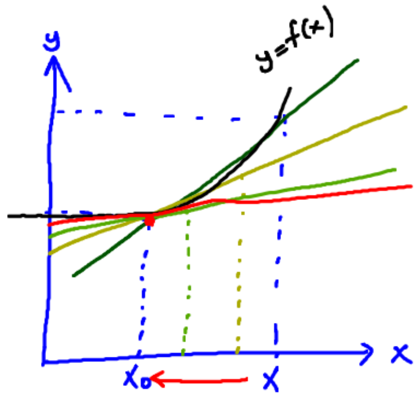
doğrusal fonksiyonun [3,5] aralığındaki ortalama değişim oranını bulunuz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5)-f(3)}{5-3} = \frac{11-5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$



$$\text{Eğim} = \text{Ortalama değişim oranı} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to x_0 \text{ noktasındaki türevdir.}$$



$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

TÜREVİN TANIMI

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in \mathbb{R}$ ve $x_0 \in A$ olmak üzere,

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ limitinin gerçek değeri varsa bu değere

$f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi denir.

$f'(x_0)$ ya da $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK : Türev değerleriniyazınız.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \; f'(x_0)$$

- $\displaystyle \lim_{x \to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = f'(4)$

- $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{2-x} \Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{-(x-2)} \Rightarrow -\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \Rightarrow -f'(2)$

Türev değerini bulunuz.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(a)-f(x)}{2a-2x} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{\cancel{-}(f(x)-f(a))}{\cancel{-}2(x-a)} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \frac{1}{2} \cdot f'(a)$$

fonksiyonun x_0 noktasındaki türevi ; $\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$

$x - x_0 = h$ dersek ;

$x \to x_0$ ise $h \to 0$

$x - x_0 = h$ ise $x = x_0 + h$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \Rightarrow f'(x_0)$$

ÖRNEK : Aşağıda verilen ifadelerin türev değerlerini bulunuz.

- $\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \Rightarrow f'(3)$

- $\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{4h} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

$\frac{1}{4} \cdot f'(-1)$

- $\lim_{h\to 0} \frac{f(e+h)-f(e)}{h} \Rightarrow f'(e)$

$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ÖRNEK : $f(x) = x^2 + 3x$

fonksiyonunun birinci türevini limit yoluyla bulalım.

ÇÖZÜM: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\left((x+h)^2 + 3.(x+h)\right) - \left(x^2+3x\right)}{h}$

$$= \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 + \cancel{3x} + 3h - \cancel{x^2} - \cancel{3x}}{h} = \frac{2hx + h^2 + 3h}{h} = \frac{\cancel{h}(2x+h+3)}{\cancel{h}}$$

$\lim_{h\to 0} 2x+h+3 \Rightarrow 2x+0+3 \Rightarrow \underline{2x+3}$

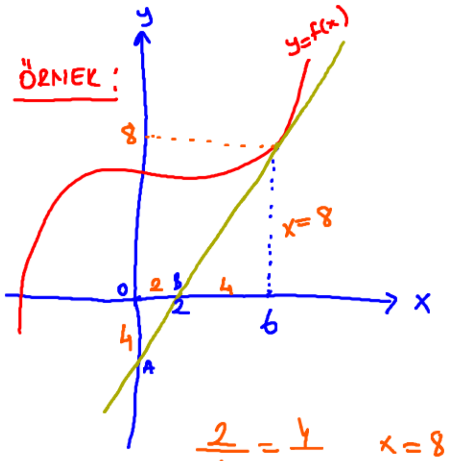
ÖRNEK: Türevlenebilir bir $f: R \to R$ fonksiyonu için

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$f(3) = 11$ old. göre, $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-11}{x-3}$ limitinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM: $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \Rightarrow f'(3) = 3.3^2 - 2.3 + 1 = 27 - 6 + 1 = \underline{22}$

ÖRNEK:



$\frac{2}{4} = \frac{4}{x}$ $\quad \underline{x = 8}$

Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonuna $x = 6$ noktasında teğet çizilmiştir.

$|OA| = 2|OB|$ olduğuna göre

I) $f(6) = 12$ ✗

II) $f'(6) = 2 \Rightarrow \frac{8}{4} = 2 = m$ ✓

III) $f(0) \cdot f'(6) < 0$ ✗

ifadelerinden hangileri doğrudur?

Sadece II doğrudur.

ÖRNEK: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2f(x) - 2f(1)}{x-1}$ işleminin sonucu nedir?

ÇÖZÜM: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2.(f(x) - f(1))}{x-1} \Rightarrow 2. \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} \Rightarrow \underline{2.f'(1)}$

ÖRNEK: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{-h}$ işleminin sonucu nedir?

ÇÖZÜM: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{-h} \Rightarrow -\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} \Rightarrow \underline{-f'(2)}$

ÖRNEK: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{-x}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{-(x-0)} \Rightarrow -\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x-0} \Rightarrow \underline{-f'(0)}$

ÖRNEK: $\lim_{h \to 0} \frac{f(4) - f(4+h)}{h}$ işleminin sonucu nedir?

ÇÖZÜM: $\lim_{h \to 0} \frac{-(f(4+h) - f(4))}{h} \Rightarrow -\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \Rightarrow -f'(4)$

KAYNAKLAR

- İHTİYAROĞLU F /ŞAHBAZ B. , Türev , APOTEMİ
- https://www.youtube.com/watch?v=Xqst_2p14u0

MATEMATİK II DERSİ 12. HAFTA DERS NOTU

$$\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}=f'(a)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\Rightarrow f'(2)$$

ÖRNEK: $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{2x-4}$ işleminin sonucu nedir?

ÇÖZÜM: $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{2.(x-2)}\Rightarrow \frac{1}{2}.\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\Rightarrow \frac{1}{2}.f'(2)$

ÖRNEK: $\lim_{h\to 0}\frac{f(h+3)-f(h-2)+f(-2)-f(3)}{h}$ işlemnin sonucu nedir?

ÇÖZÜM: $\lim_{h\to 0}\frac{f(h+3)-f(3)}{h}+\frac{-f(h-2)+f(-2)}{h}\Rightarrow \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(h+3)-f(3)}{h}}_{f'(3)}+\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{-(f(h-2)-f(-2))}{h}}_{-\,f'(-2)}$

$f'(3)-f'(-2)$

NOT: Sabit fonksiyonun türevi;

$f(x)=c$ fonksiyonun türevi $f'(x)=0$ dır.

Sabit sayıya eşit olan bir fonksiyonun türevi sıfırdır.

ÖRNEK: $f(x)=2008!$ olduğuna göre, $f'(x)$ neye eşittir?

ÇÖZÜM: $f(x)=2008!$ sabit fonksiyon old. $f'(x)=0$ olacaktır.

ÖRNEK: $f(x)=k^2+2k+1$ olduğuna göre, $f'(x)$ neye eşittir?

ÇÖZÜM: $f(x)=k^2+2k+1$ sabit fonksiyon old. $f'(x)=0$ olacaktır.

ÖRNEK: $f(x) = 1+2+3+ \cdots + n$ olduğuna göre $f'(x)$ neye eşittir?

ÇÖZÜM: $f(x) = 1+2+3+ \cdots + n$ sabit fonksiyondur $f'(x) = 0$ dır.

ÖRNEK: $f(x) = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^6$ old. göre, $f'(x)$ kaçtır?

ÇÖZÜM: $f(x) = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^6$ sabit fonksiyondur $f'(x) = 0$ dır.

NOT: $f(x) = x^n$ fonksiyonun türevi $f'(x) = n.x^{n-1}$ dir.
$f(x) = kx^n$ 〃 〃 $f'(x) = k.n.x^{n-1}$ dir.

ÖRNEK: $f(x) = x^{-10}$ olduğuna göre $f'(x)$ kaçtır?

ÇÖZÜM: $f'(x) = -10.x^{-10-1} = \underline{-10.x^{-11}}$

ÖRNEK: $f(x) = \sqrt{x.\sqrt{x}}$ old. göre $f'(x)$ kaçtır?

ÇÖZÜM: $f(x) = \sqrt{x\sqrt[2]{x^1}} \Rightarrow f(x) = \sqrt[2]{x^1 . x^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow f(x) = \sqrt[2]{x^{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt[2]{x^{\frac{3}{2}}}$

$\Rightarrow f(x) = x^{\frac{3}{2.2}} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ $\quad f'(x) = \frac{3}{4} . x^{\frac{3}{4}-1}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3}{4} . x^{-\frac{1}{4}}}$$

ÖRNEK: $f(x) = e^{\pi} - \pi^{e}$ old. göre $f'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM: $f(x) = e^{\pi} - \pi^{e}$ sabit fonks ise $f'(1) = 0$ dır.

ÖRNEK: $f(x) = 2.x^n$ fonksiyonu veriliyor.

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{1-x} = -6$ old. göre n kaçtır?

ÇÖZÜM: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{-(x-1)} \Rightarrow \cancel{-}\underbrace{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}_{f'(1)} = \cancel{-}6$

$f'(1) = 6$

$f(x) = 2.x^n \Rightarrow f'(x) = 2.n.x^{n-1} \Rightarrow f'(1) = 2.n.1^{n-1} = 6$

$2.n.1 = 6$

$n = 3$

ÖRNEK: $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k$ old. göre $f'(x)$ kaçtır?

ÇÖZÜM: $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k$ sabit fonk. $f'(x) = 0$ dır.

ÖRNEK: $f(x) = 7.x^{n-3} + x^{m+1}$ fonksiyonu için $f'(x) = 0$ olduğuna göre $m+n$ toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM: $f'(x) = 0$ için fonk. sabit olmalı (x'li değer olmamalı)

$n-3=0$ $m+1=0$ $m+n = -1+3 = 2$

$n=3$ $m=-1$

ÖRNEK: $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x}}$ olduğuna göre $f'(x)$ kaçtır?

ÇÖZÜM: $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt[2]{x^1}} \Rightarrow f(x) = \dfrac{3x^1}{x^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow f(x) = 3x^{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow f(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$

$f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} \longrightarrow f'(x) = 3.\frac{1}{2}.x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{3}{2}.x^{\frac{1-2}{2}} \Rightarrow \frac{3}{2}.x^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{3}{2}.x^{-\frac{1}{2}}$

NOT: $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

$(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$

ÖRNEK: $f(x) = x^3+4x^2+1$ olduğuna göre $f'(x)$ kaçtır?

ÇÖZÜM: $f'(x) = 3x^2+4.2.x^1+0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2+8x$

ÖRNEK: $f(x) = 5x^3 - x^2 + 3$ olduğuna göre $f'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM: $f'(x) = 5.3.x^2 - 2x^1 + 0 \qquad f'(x) = 15x^2 - 2x$

$f'(1) = 15.1^2 - 2.1 = 15-2 = 13$

ÖRNEK: $f(x) = 2x^2+1$ old. göre

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} \Rightarrow f'(1) = ?$

$f(x) = 2x^2+1 \qquad f'(x) = 2.2.x^1+0 \Rightarrow f'(x) = 4x$

$f'(1) = 4.1 = 4$

ÖRNEK: $x \neq 0$ olmak üzere, f fonksiyonu

$f(x) = \dfrac{1}{x^5}$ olduğuna göre $f'(-1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM: $f(x) = \dfrac{1}{x^5} = x^{-5} \qquad f'(x) = -5.x^{-5-1} \Rightarrow f'(x) = -5.x^{-6}$

$f'(-1) = -5.(-1)^{-6} = -5.\dfrac{1}{\cancel{(-1)^6}_{+1}} = -5$

ÖRNEK: $n \neq 1$ olmak üzere;

$f(x) = x^{n+1}$ ve $f'(1) = 6$ olduğuna göre n kaçtır?

ÇÖZÜM: $f(x) = x^{n+1}$ $\quad f'(x) = (n+1) \cdot x^{n+1-1} \Rightarrow f'(x) = (n+1)\, x^{n}$

$$f'(1) = (n+1) \cdot 1^{n} = 6$$

$$n+1 = 6$$

$$n = 5$$

NOT: İki fonksiyonun çarpım türevi;

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

ÖRNEK: $f(x) = (x^2+1) \cdot (x+2)$ old. göre $f'(x)$ kaçtır?

ÇÖZÜM: $f'(x) = (x^2+1)' \cdot (x+2) + (x+2)' \cdot (x^2+1)$

$$f'(x) = 2x \cdot (x+2) + (1 \cdot \cancel{x^{1-1}}) \cdot (x^2+1)$$

$$2x^2 + 4x + x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$$

NOT: İki fonksiyonun bölümü

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$$

ÖRNEK $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ olduğuna göre $f'(x)$ nedir?

ÇÖZÜM: $f'(x) = \frac{(x+1)' \cdot (x-2) - (x-2)' \cdot (x+1)}{(x-2)^2} = \frac{1 \cdot (x-2) - 1\,(x+1)}{(x-2)^2} = \frac{\cancel{x}-2-\cancel{x}-1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2}$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

NOT: $f(x) = (g(x))^n$

$f'(x) = n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$

ÖRNEK: $f(x) = (x^2+1)^4$ old. göre $f'(x)$ nedir?

ÇÖZÜM: $f'(x) = 4 \cdot (x^2+1)^3 \cdot (x^2+1)' \Rightarrow 4(x^2+1)^3 \cdot (2 \cdot x + 0)$

$\Rightarrow 8x \cdot (x^2+1)^3$

$f'(x) = 8x \cdot (x^2+1)^3$

ÖRNEK: $f(x) = (x^2+x+1)^2$ old. göre $f'(x)$ nedir?

ÇÖZÜM: $f'(x) = 2 \cdot (x^2+x+1) \cdot (x^2+x+1)'$

$= 2 \cdot (x^2+x+1) \cdot (2x+1+0) = 2 \cdot (x^2+x+1) \cdot (2x+1)$

$f'(x) = 2 \cdot (x^2+x+1) \cdot (2x+1)$

KAYNAKLAR

- İHTİYAROĞLU F /ŞAHBAZ B. , Türev , APOTEMİ