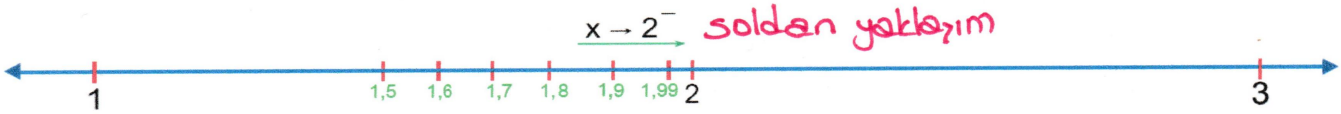
5.1. LİMİT VE SÜREKLİLİK

BİR FONKSİYONUN BİR NOKTADAKİ LİMİTİ İLE SOLDAN VE SAĞDAN LİMİT KAVRAMLARI

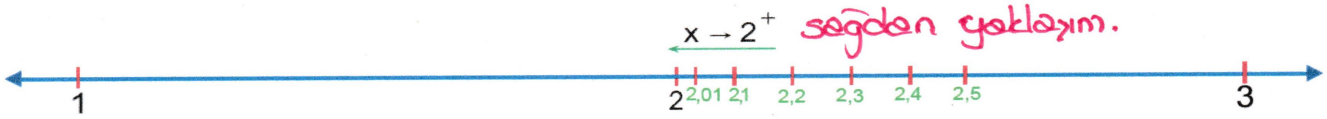
Yaklaşım Kavramı:

✓ x bağımsız değişkeni bir a gerçek sayısına a dan küçük değerler ile artarak yaklaşıyorsa bu yaklaşım durumuna x in a ya soldan yaklaşımı denir ve $\mathbf{x \to a^-}$ biçiminde gösterilir.



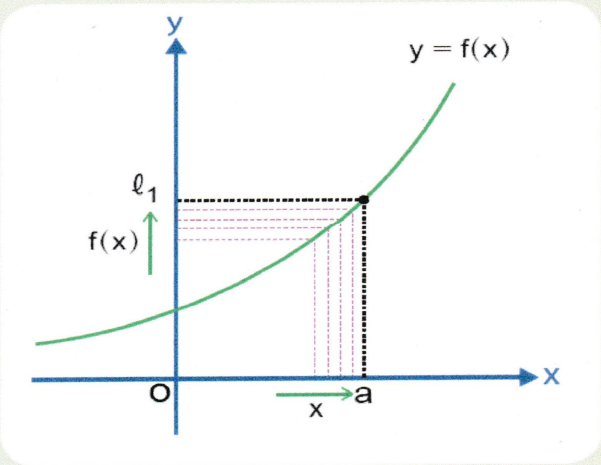
Yukarıdaki sayı doğrusunda 2 ye soldan yaklaşım gösterilmiştir. $x \to 2^-$ gösterimi x in 2 değerini almadığını ancak 2 den küçük 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 1,99; 1,999; ... değerler alarak 2 ye yaklaştığını ifade eder.

✓ x bağımsız değişkeni bir a gerçek sayısına a dan büyük değerler ile azalarak yaklaşıyorsa bu yaklaşım durumuna x in a ya sağdan yaklaşımı denir ve $\mathbf{x \to a^+}$ biçiminde gösterilir.



Yukarıdaki sayı doğrusunda 2 ye sağdan yaklaşım gösterilmiştir. $x \to 2^+$ gösterimi x in 2 değerini almadığı ancak 2 den büyük 2,5; 2,4; 2,3; 2,2; 2,1; 2,01; 2,001; ... değerler alarak 2 ye yaklaştığını ifade eder.

Limit Kavramı:

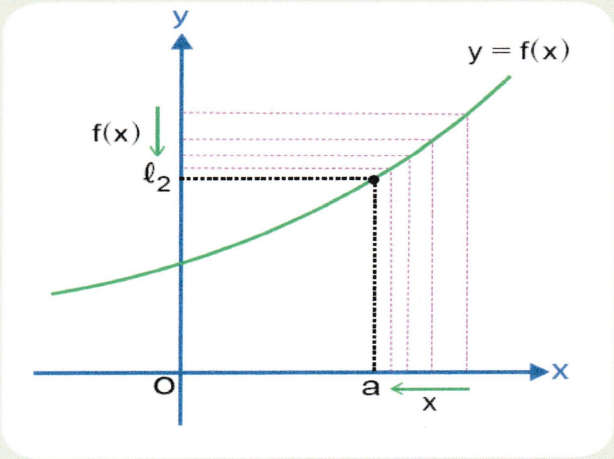


Yanda verilen f(x) fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, a ya soldan yaklaşırken f(x) in ℓ_1 gerçek sayısına yaklaştığı görülmektedir.

ℓ_1 gerçek sayısına f(x) fonksiyonunun x = a noktasındaki **soldan limiti** denir ve

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell_1$$

biçiminde gösterilir.

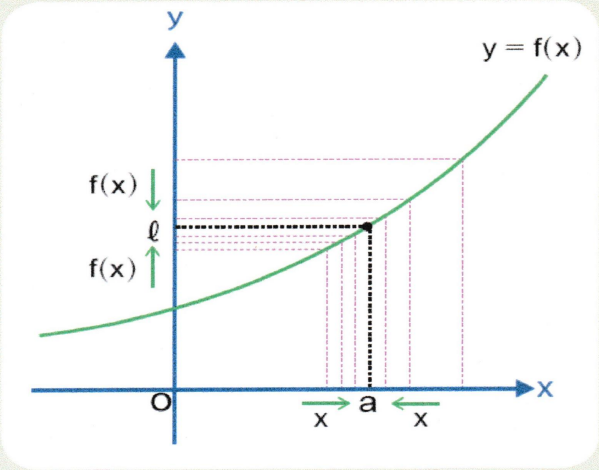


Yanda verilen f(x) fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, a ya sağdan yaklaşırken f(x) in ℓ_2 gerçek sayısına yaklaştığı görülmektedir.

ℓ_2 gerçek sayısına f(x) fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki **sağdan limiti** denir ve

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell_2$$

biçiminde gösterilir.



Yanda verilen f(x) fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, a ya soldan ve sağdan yaklaşırken f(x) in ℓ gerçek sayısına yaklaştığı görülmektedir.

ℓ gerçek sayısına f(x) fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki **limiti** denir ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

biçiminde gösterilir.

✓ Bir f(x) fonksiyonunun $x = a$ noktasında limitinin olması için bu noktadaki sağdan ve soldan limitleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell_1 \text{ ve } \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell_2 \text{ olmak üzere } \ell_1 = \ell_2 = \ell \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \ell \text{ olur.}$$

✓ Bir f(x) fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki sağdan ve soldan limitleri birbirine eşit değilse fonksiyonun bu noktada limiti yoktur.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \text{ limiti yoktur.}$$

✓ Bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa bu limit tektir.

SONUC

Bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için fonksiyonun o noktada tanımlı olma zorunluluğu yoktur.

Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti, fonksiyonun o noktadaki değerinden farklı olabilir.

LİMİT

x değişkeni a ya soldan yaklaştığında $(x \to a^-)$ f(x) fonksiyonu da L_1 reel sayısına yaklaşıyorsa "f(x) in x = a daki soldan limiti L_1 dir." denir ve $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$ şeklinde gösterilir.

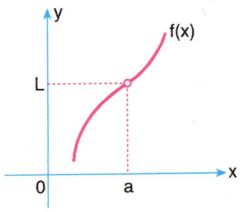
x değişkeni a ya sağdan yaklaştığında $(x \to a^+)$ f(x) fonksiyonu da L_2 reel sayısına yaklaşıyorsa "f(x) in x = a daki sağdan limiti L_2 dir." denir ve $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$ şeklinde gösterilir.

Soldan limit, sağdan limite eşit ise fonksiyonun limiti vardır. Farklı ise fonksiyonun limiti yoktur.

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ ise $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ dir. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ise $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ yoktur.

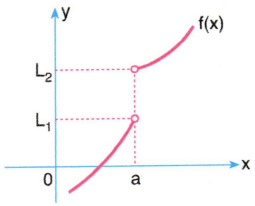
ÖRNEK 2

Aşağıda grafikleri verilen bazı fonksiyonların x = a noktasındaki limitleri bulunmuştur. İnceleyiniz.



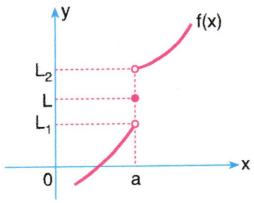
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$



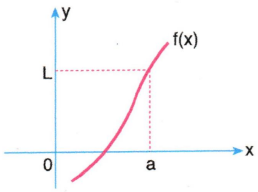
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ yoktur.



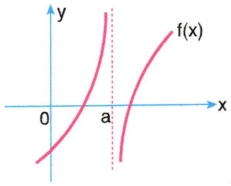
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ yoktur.



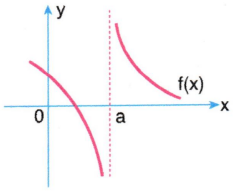
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$



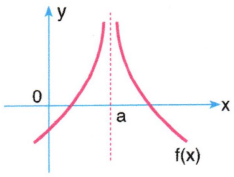
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ yoktur.



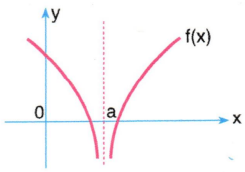
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ yoktur.



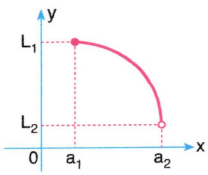
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$



$f : [a_1, a_2) \to R$ ise

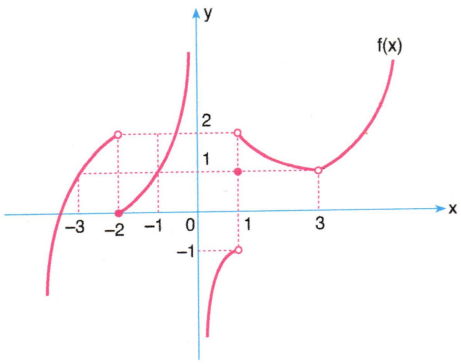
$\lim\limits_{x \to a_1} f(x) = \lim\limits_{x \to a_1^+} f(x) = L_1$

$\lim\limits_{x \to a_2} f(x) = \lim\limits_{x \to a_2^-} f(x) = L_2$

a_1 noktasındaki limit, sağdan limitle,

a_2 noktasındaki limit, soldan limitle belirlenir.

ÖRNEK 5



Yukarıda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun x in $-3, -2, -1, 0, 1$ ve 3 değerlerinden bazıları için var olan limitlerini bulunuz.

Çözüm

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) =$ yoktur.

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ yoktur.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$ yoktur

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$ yoktur

⇒ $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında limiti olsun.

$n \in \mathbb{Z}$ için

$\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$

Limitle İlgili Özellikler

f ve g, $x = a$ noktasında limitleri olan iki fonksiyon olmak üzere,

- $\forall c \in R$ için $\lim\limits_{x \to a} c = c$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x). \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\forall c \in R$ için $\lim\limits_{x \to a} [c.f(x)] = c. \lim\limits_{x \to a} f(x)$
- $g(x) \neq 0$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

- $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ise $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ dır.
- $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x \to a} f(x)\right|$
- n tek doğal sayı ise ya da n çift doğal sayı iken x in a sayısına yakın tüm değerleri için $f(x) \geq 0$ ise $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ dir.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ ve x in a sayısına yakın tüm değerleri için $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ise $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$ dir.
- $c \in R^+$ olmak üzere, $\lim\limits_{x \to a} c^{f(x)} = c^{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$
- $\lim\limits_{x \to a} [\log_b f(x)] = \log_b [\lim\limits_{x \to a} f(x)]$

ESEN YAYINLARI

ÖRNEK 6

Aşağıda bazı limitler hesaplanmıştır. İnceleyiniz.

- $\lim\limits_{x \to 5} 7 = 7$
- $\lim\limits_{x \to 3} 5x = 5.3=15$
- $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 5) = 3.2+5=6+5=11$
- $\lim\limits_{x \to 0} [(x^2 + 2).(x + 3)] = (0^2+2).(0+3)$

  $= 2.3=6$
- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2}{x + 2} = \dfrac{2^2-2}{2+2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 1} (3x^2 + 4x + 1) = 3.1^2+4.1+1=8$

ÖRNEK 7

$\lim\limits_{x \to 1} |x^2 - x - 3|$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

$|1^2-1-3|=|-3|=3$

ÖRNEK 8

$f(x) = (2x + 1).|x + 3| + 4$ ise $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

$f(-5)=(2.-5+1).|-5+3|+4$

$= -9.2+4 = -18+4$

$= -14$

ÖRNEK 9

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x^2 - 7|}{x + 1}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\dfrac{|2^2-7|}{2+1} = \dfrac{|4-7|}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

ÖRNEK 10

$\lim\limits_{x \to 3} 2^{x^2-x-2}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

$2^{3^2-3-2} = 2^{9-5} = 2^4 = 16$

ÖRNEK 11

$\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x^2 + 5x - 2}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

$\sqrt{1^2+5.1-2} = \sqrt{1+5-2} = \sqrt{4} = 2$

ÖRNEK 12

$\lim\limits_{x \to -1} \sqrt[3]{x^2 + 4x - 2}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

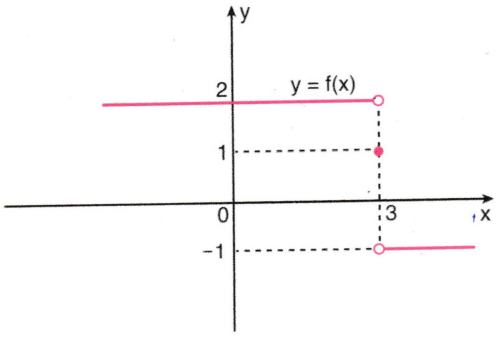
ÖRNEK 13

$\lim\limits_{x \to 3} [\log_5(x^2 + 1)]$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

ESEN YAYINLARI

1.



Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

I. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$ (Doğru)

II. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -1$ (Doğru)

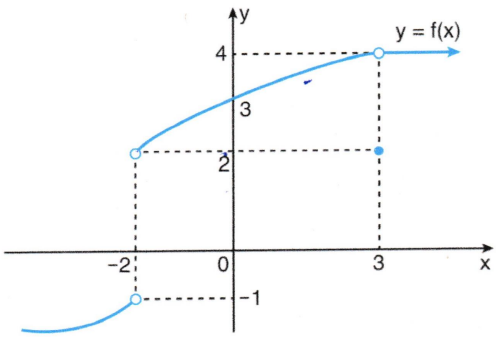
III. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$ yoktur (Doğru)

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II
D) I ve III E) I, II ve III

III. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

2.



Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

I. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 2$ (Doğru)

II. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -1$ (Doğru)

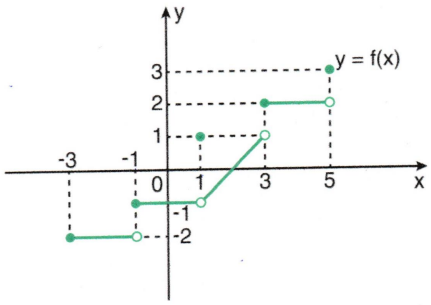
III. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$ yoktur (Yanlış)

öncüllerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II
D) I ve II E) II ve III

III. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4$ tür

3.



f: [–3, 5] → ℝ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

I. $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -2$ (Doğru)

II. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$ yoktur (Yanlış)

III. $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 5$ (Yanlış)

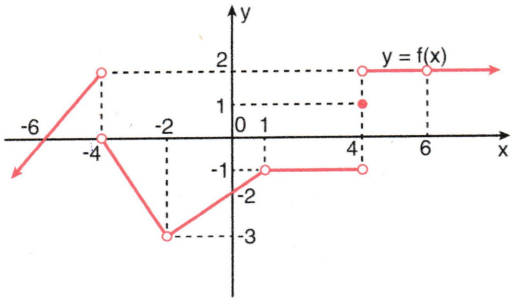
öncüllerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II
D) I ve III E) I, II ve III

II. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$ dir.

III. $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 2$

4.



Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, kaç farklı noktada f(x) fonksiyonunun limiti yoktur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

x = –4 ve x = 4 apsisli noktalarda limit yoktur.

MATEMATİĞİN İLACI

1. $\lim\limits_{x \to -3} 5 \cdot (x^3 + 4x + 2)$

limitinin sonucu kaçtır?

A) −195 B) −185 C) −165 D) −145 E) −125

$\lim\limits_{x \to -3} 5.(x^3+4x+2) = 5.((-3)^3+4.(-3)+2)$

$= 5.(-37)$

$= -185$ bulunur.

2. $f(x) = x^3 - 2x$

$g(x) = x^2 - 3x + 4$

olmak üzere,

$\lim\limits_{x \to -2} [f(x) \cdot g(x)] = f(-2).g(-2)$

limitinin sonucu kaçtır?

A) −81 B) −72 C) −56 D) −24 E) 24

- $f(-2) = (-2)^3 - 2.(-2) = -4$
- $g(-2) = (-2)^2 - 3.(-2) + 4 = 14$
- $f(-2).g(-2) = (-4).14 = -56$ bulunur

3. $\lim\limits_{x \to 2} |x^2 - 3x - 10| = |2^2 - 3.2 - 10|$

$= 12$ bulunur.

limitinin sonucu kaçtır?

A) −12 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

4. $f(x) = \sqrt[3]{-2x^3 + x^2 - 7}$ $\rightarrow f(1) = \sqrt[3]{-2+1-7}$

$f(1) = \sqrt[3]{-8} = -2$

olduğuna göre,

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = ?$

limitinin sonucu kaçtır?

A) −2 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

5. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + a, & x \geq 1 \\ 3x - 1, & x < 1 \end{cases}$

fonksiyonunun x = 1 noktasında limiti olduğuna göre, a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

$\lim\limits_{x \to 1^-} (3x-1) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2-3x+a)$

$3-1 = 1-3+a$

$4 = a$ bulunur.

6. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x - a, & x > 3 \\ 0, & x = 3 \\ 2x + b, & x < 3 \end{cases}$

fonksiyonunun x = 3 noktasında limiti vardır.

Buna göre, a + b toplamı kaçtır?

A) 8 B) 6 C) −6 D) −8 E) −12

$\lim\limits_{x \to 3^-} (2x+b) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2-5.x-a)$

$6+b = 9-15-a$

$6+b = -6-a$

$a+b = -12$

7. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{|x - 1|} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(x-3)(x-1)}{-(x-1)} = 2$ bulunur

limitinin sonucu kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 1 D) 2 E) 4

8. $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(3^{\frac{1}{x}} + 2^x + 5\right) = 3^{\frac{1}{0^-}} + 2^{0^-} + 5$

$= 3^{-\infty} + 1 + 5$

limitinin sonucu kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

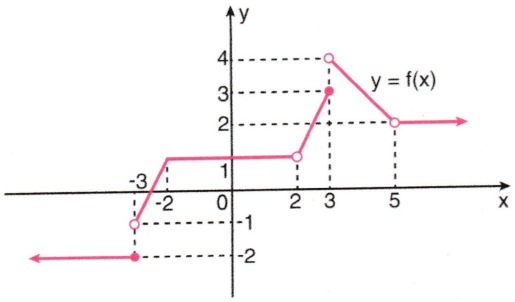
$= \left(\frac{1}{3}\right)^{\infty} + 6$

$= 0 + 6$

$= 6$

MATEMATİĞİN İLACI

5.



Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

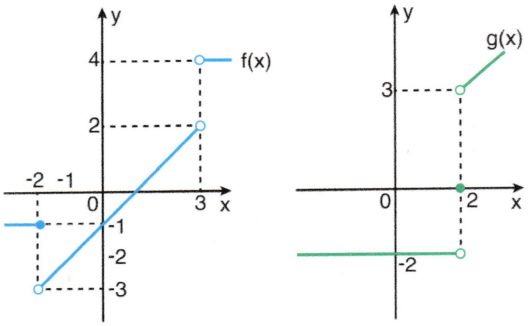
$$\lim_{x\to -3^+} f(x) + \lim_{x\to 3^-} f(x) + \lim_{x\to 5^+} f(x) = (-1)+3+2$$

$= 4$ bulunur.

işleminin sonucu kaçtır?

A) −3 B) −2 C) −1 D) 4 E) 5

6.



Şekilde f(x) ve g(x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre,

$$\lim_{x\to 2^+} (f \circ g)(x) = \lim_{x\to 2^+} f(\underbrace{g(x)}_{3^+}) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$$

limitinin sonucu kaçtır?

A) −3 B) −1 C) 2 D) 3 E) 4

7.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x^2-4|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -4$$

limitinin sonucu kaçtır?

A) 4 B) 2 C) 0 D) −4 E) −6

$x < 2$ için $|x^2-4| = -(x^2-4)$ olur.

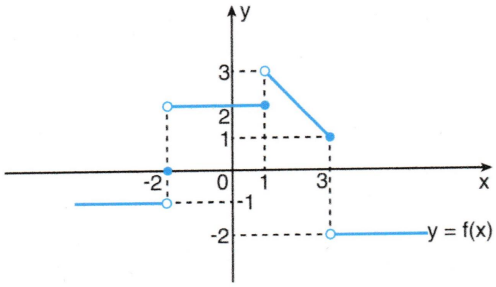
8.

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{\overset{(-)}{|3-x|}(x+9)}{3-x} = \lim_{x\to 3^+} \frac{\overset{-1}{\cancel{(x-3)}}.(x+9)}{\cancel{3-x}} = -12$$

limitinin sonucu kaçtır?

A) −12 B) −6 C) 0 D) 9 E) 12

9.



Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

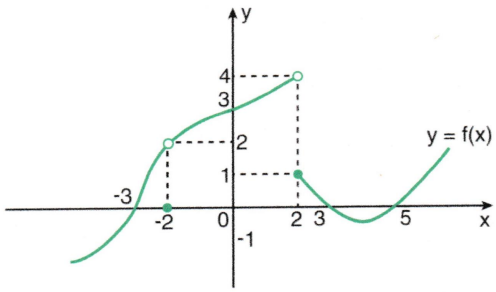
Buna göre,

$$\lim_{x\to 3^-} (f \circ f)(x) = \lim_{x\to 3^-} f(\underbrace{f(x)}_{1^+}) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$$

limitinin sonucu kaçtır?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

10.



Şekildeki y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna, göre aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

A) $\lim_{x\to -2} f(x)$ = yoktur B) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$ C) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$

D) $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$ E) $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$ olduğundan A şıkkı yanlıştır.

1. E	2. D	3. A	4. B	5. B
6. E	7. D	8. A	9. E	10. A

MATEMATİĞİN İLACI