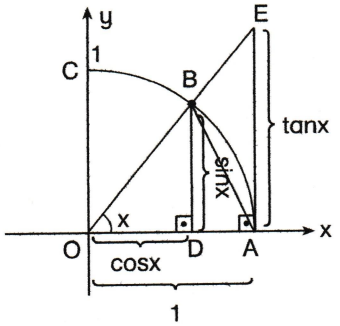
TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ dir.

İspat



Yukarıdaki şekilde birim çemberde görüldüğü gibi

i) $A(ABO) = \dfrac{1}{2}.|OA|.|BD|$

$= \dfrac{1}{2}1.\sin x = \dfrac{\sin x}{2}$

ii) $A(OAE) = \dfrac{1}{2}.|OA|.|AE|$

$= \dfrac{1}{2}.1.\tan x = \dfrac{\tan x}{2}$

iii) AOB daire diliminin alanı

$A(AOB) = \dfrac{\pi r^2.x}{2\pi} = \dfrac{\pi.1^2.x}{2\pi} = \dfrac{x}{2}$

i, ii ve iii deki alanları sıralarsak

$\dfrac{\sin x}{2} \le \dfrac{x}{2} \le \dfrac{\tan x}{2}$

$\sin x \le x \le \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sin x \le x \quad , \quad x \le \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\dfrac{\sin x}{x} \le 1 \quad , \quad \cos x \le \dfrac{\sin x}{x}$

ise $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$

her üç tarafın limitini alalım.

$\lim\limits_{x\to 0} \cos x < \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} < \lim\limits_{x\to 0} 1$

$1 \le \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} < \lim\limits_{x\to 0} 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ dir.

Bu özellikten yararlanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin px}{qx} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{px}{\sin qx} = \dfrac{p}{q}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan px}{qx} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{px}{\tan qx} = \dfrac{p}{q}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin px}{qx} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan px}{\tan qx} = \dfrac{p}{q}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin px}{\tan qx} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan px}{\sin qx} = \dfrac{p}{q}$

Burada üçüncü özellikde 1 ve 2 nin bir sonucudur gerçekten

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin px}{\sin qx} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin px}{x}}{\dfrac{\sin qx}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin px}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin qx}{x}} = \frac{p}{q}$$

Örnek 1

* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$ * $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\sin 3x} = \dfrac{5}{3}$

* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\tan 3x} = \dfrac{4}{3}$ * $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{7x} = \dfrac{3}{7}$

$$* \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\tan 5x}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{x}} = \frac{3}{5}$$

Örnek 2

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin^2 3x}{x^2}\right)$$ **limiti kaçtır?**

Çözüm

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}\right)^2$$

$$= 3^2 = 9 \text{ bulunur.}$$

Örnek 3

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{x.\cos 3x}\right)$$ **limiti kaçtır?**

Çözüm

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{x.\cos 3x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} . \frac{1}{\cos 3x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} . \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 3x}$$

$$= 2.\frac{1}{\cos 0} = 2.\frac{1}{1} = 2$$

Örnek 4

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2x+\sin 3x}{\tan 5x}\right)$$ **limiti kaçtır?**

Çözüm

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2x}{\tan 5x} + \frac{\sin 3x}{\tan 5x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\tan 5x} + \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Örnek 5

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin^2 2x}{x.\tan 3x}\right)$$ **limiti kaçtır?**

Çözüm

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin^2 2x}{x^2} . \frac{x}{\tan 3x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2 . \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan 3x}$$

$$= 2^2 . \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \text{ tür.}$$

Örnek 6

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2x+\sin 3x}{\sin 5x - 4x}\right)$$ **limiti kaçtır?**

Çözüm

Kesirli ifadenin pay ve paydasını x ' e bölelim.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x} - \frac{4x}{x}}$$

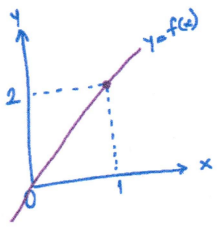
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 + \frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x} - 4}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} 2 + \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} - \lim\limits_{x\to 0} 4}$$

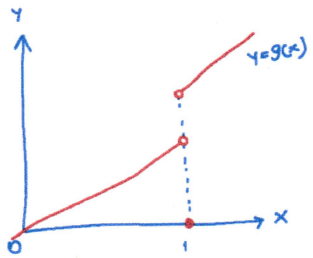
$$= \frac{2+3}{5-4} = \frac{5}{1} = 5$$

SÜREKLİLİK KONUSU

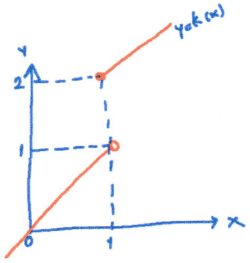
SÜREKLİLİK



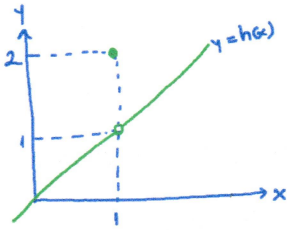
sürekli



süreksiz



süreksiz



süreksiz

$A \subset R$ ve $f: A \to R$ biçiminde tanımlı bir f fonksiyonu var olsun.

$a \in A$ olmak üzere, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ eşitliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna

$x=a$ noktasında "süreklidir" denir.

f fonksiyonu tanım kümesinin her noktasında sürekli ise

"f tanım kümesinde süreklidir" denir.

Tanım kümesi $[a,b]$ aralığı olan bir fonksiyonu ele alalım.

$c \in (a,b)$ olmak üzere

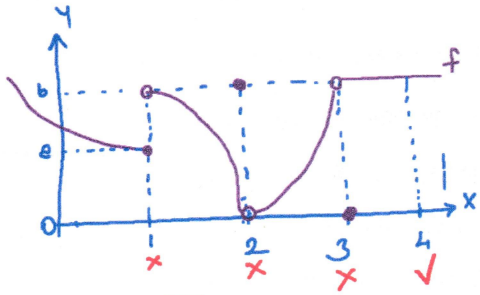
f'nin $x=c$ noktasında sürekli olması için gerekli şartları sıralayalım.

1) f fonksiyonunun $x=c$ noktasında tanımlı olmalıdır

2) $x=c$ noktasında limiti olmalı.

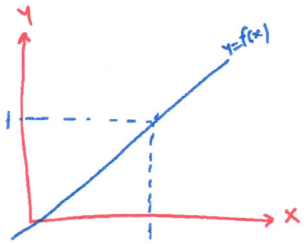
3) f'in $x=c$ noktasındaki limiti, f'in $x=c$'deki değerine eşit olmalıdır.

ÖRNEK:

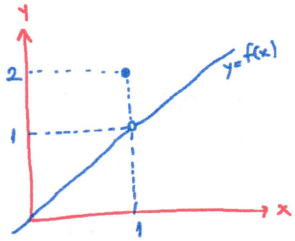


$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = f(c)}$$

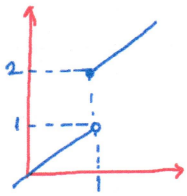
$\lim f(x) = f(1)$



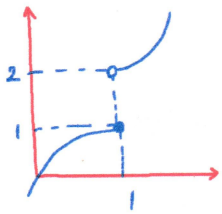
$1 = 1$ ✓



$1 = 2$ X

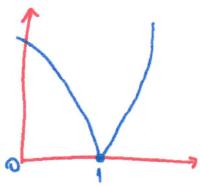


~~lim~~ X

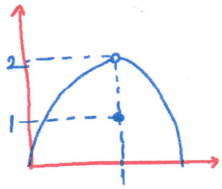


~~lim~~ X

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \quad ✓$$



$0 = 0$ ✓



$2 = 1$ X

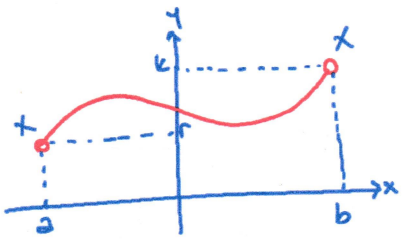
1) $f(1) = \cancel{\lim_{x \to 1} f(x)}$ süreksizdir.

2) $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$ süreksizdir

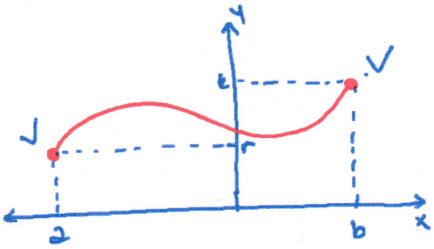
$b = 0$

3) $f(3) = \lim_{x \to 3} f(x)$ süreksizdir

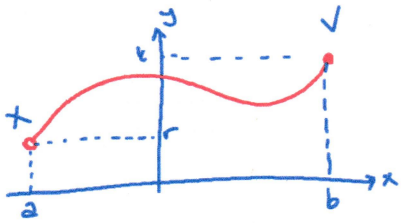
$0 = b$



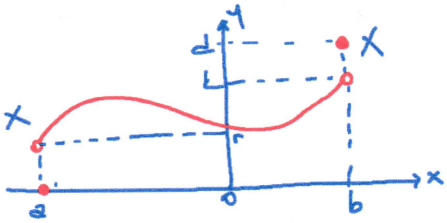
f, (a, b) aralığında süreklidir



f, [a, b] aralığında süreklidir

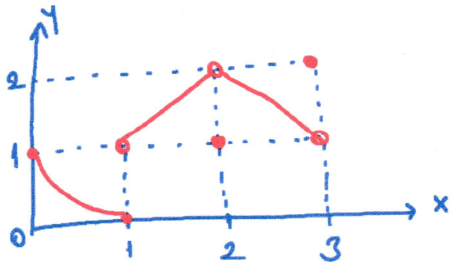


f, (a, b] aralığında süreklidir



f, (a, b) aralığında süreklidir.

ÖRNEK:



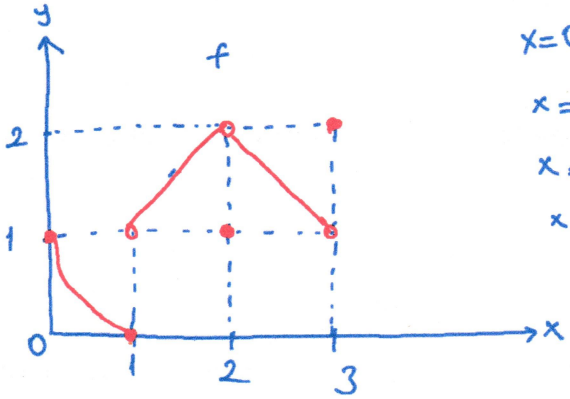
[0, 3] aralığında tanımlı f fonksiyonunun grafiği şekilde verilmiştir.
f fonksiyonu $x=0$, $x=1$, $x=2$ ve $x=3$ apsisli noktalarda sürekli mi yoksa süreksiz mi?

$x=0$ süreklidir

$x=1$ süreksizdir.

$x=2$ süreksizdir.

$x=3$ süreksizdir.

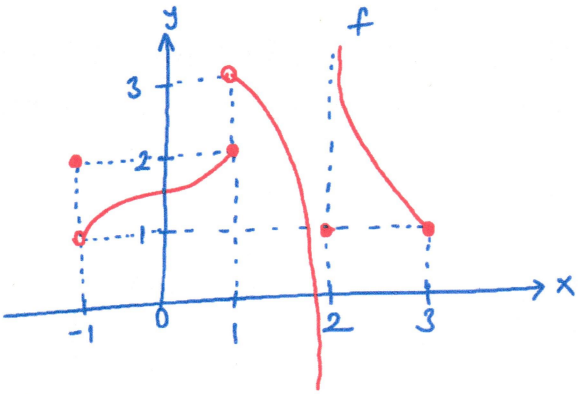


$x=0$ ✓

$x=1$ $\quad 1 \neq 0 = 0$ X

$x=2$ $\quad 2 = 2 \neq 1$ X

$x=3$ $\quad 1 \neq 2$ X



$x=-1$ $\quad 1 \neq 2$ X

$x=0$ ✓

$x=1$ $\quad 3 \neq 2 = 2$ X

$x=2$ $\quad \infty \neq -\infty \neq 1$ X

$x=3$ $\quad 1=1$ ✓

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} x+1 , & x \leq 1 \\ 2x , & 1 < x \leq 2 \\ x+1 , & x > 2 \end{cases}$$

1 2 ✓

fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları bulunuz.

$x=1$ süreklilik durumuna bakalım.

$\lim\limits_{x \to 1^+} = \lim\limits_{x \to 1^-} = f(1)$ $\qquad 2=2=2$ Süreklidir ✓

$\lim\limits_{x \to 1^+} 2x = 2*1 = 2$ $\qquad \lim\limits_{x \to 1^-} x+1 = 1+1 = 2$ $\qquad f(1) = x+1 = 1+1 = 2$

$x=2$ süreklilik durumuna bakalım.

$\lim\limits_{x \to 2^+} = \lim\limits_{x \to 2^-} = f(2)$ $\qquad 3 \neq 4 = 4 \Rightarrow$ Süreksiz X

$\lim\limits_{x \to 2^+} x+1 = 2+1 = 3$ $\qquad \lim\limits_{x \to 2^-} 2x = 2*2 = 4$ $\qquad f(2) = 2x = 2*2 = 4$

ÖRNEK :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , x \leq 1 \\ 2x & , 1 < x \leq 2 \\ x+1 & , x > 2 \end{cases}$$

fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları bulalım.

ÇÖZÜM: $x=1$ için süreklilik durumunu araştıralım;

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2x = 2*1 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = x+1 = 1+1 = 2 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 = f(1) = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

(süreklidir)

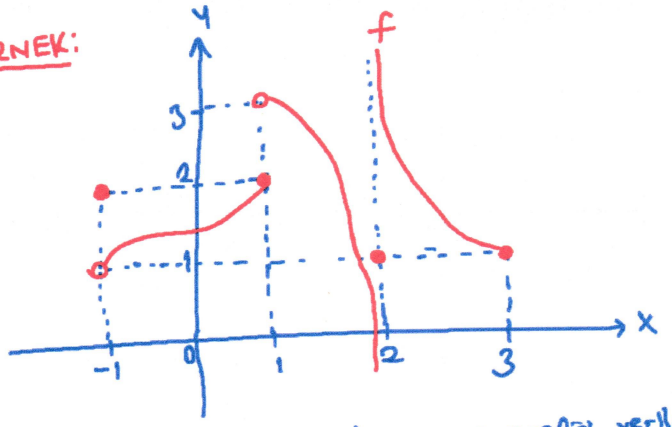
$x=2$ için süreklilik araştırması yapalım;

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2x = 2*2 = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = x+1 = 2+1 = 3 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 2} f(x) \text{ yoktur.}$$

$f(2) = 2*2 = 4$

süreksizdir.

ÖRNEK:



Yukarıda $f:[-1,3] \to R$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, fonksiyonunun sürekli ve süreksiz olduğu tam sayı değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$x=-1$ Süreksizdir.

$x=0$ Süreklidir

$x=1$ Süreksizdir.

$x=2$ Süreksizdir.

$x=3$ Süreklidir.

ÖRNEK:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2}{2^x+1} & , x>0 \\ 2 & , x=0 \\ x^2+x+1 & , x<0 \end{cases}$$

Süreklilik kümesi;

$\mathbb{R}-\{0\}$

fonksiyonunun süreklilik kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{x^2+2}{2^x+1} = \frac{0^2+2}{2^0+1} = \frac{0+2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = x^2+x+1 = 0^2+0+1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

$$f(0)=2$$

Süreksizdir.

KAYNAKLAR

- İHTİYAROĞLU F /ŞAHBAZ B. , Limit ve Süreklilik , APOTEMİ

ÖRNEK: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} m.\sin x + 3 & , x < 0 \\ n+1 & , x = 0 \\ m.n + \cos x & , x > 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli olduğuna göre $n-m$ farkı kaçtır?

$\lim\limits_{x \to 0^+} = \lim\limits_{x \to 0^-} = f(0)$ $\qquad \boxed{m.n+1 = 3 = n+1}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} m.n + \cos x = m.n + \cos 0 = m.n+1$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0^-} m.\sin x + 3 = m.0 + 3 = 3$

$f(0) = n+1$

$\boxed{m.n+1 = \boxed{3} = n+1}$

$2m+1 = 3$ $\qquad 3 = n+1$ $\qquad n - m = 1$

$2m = 2$ $\qquad \boxed{2 = n}$ $\qquad 2 - 1 = 1$

$\boxed{m = 1}$

ÖRNEK: $f(x) = \sqrt{|x-3| - |x+1|}$

fonksiyonunun tanımlı olduğu en geniş aralığı bulunuz bu aralıkta sürekliliğini inceleyiniz.

ÇÖZÜM: $|x-3| - |x+1| \geq 0$

$(|x-3|)^2 \geq (|x+1|)^2$

$\cancel{x^2} - 6x + 9 \geq \cancel{x^2} + 2x + 1$

$9 - 1 \geq 2x + 6x$

$8 \geq 8x$

$1 \geq x$ $\qquad (-\infty, 1]$

ÖRNEK

~~I)~~ $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$ $\qquad x=0$ tanımsız

~~II)~~ $g(x) = \sqrt{x-2}$ $\qquad x-2 < 0$ $\qquad x < 2$ $\qquad (-\infty, 2)$

✓ III) $h(x) = 2$

fonksiyonlarının hangilerinin her x gerçel sayısı için sürekli olduğunu bulunuz.

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-1|}{x-1} & , x<1 \\ ax+b & , x=1 \\ x-b & , x>1 \end{cases}$$

fonksiyonu her x gerçel sayısı için sürekli olduğune göre a*b'nin değeri kaçtır?

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x^2+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x).(1+x)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-\cancel{(x-1)}\cdot(1+x)}{\cancel{x-1}}$$

$$\lim_{x\to 1^-} -(1+x) = \lim_{x\to 1^-} -1-x = -1-1 = -2$$

$$\lim_{x\to 1^+} x-b = 1-b$$

$$f(1) = ax+b = a\cdot 1+b = a+b$$

$$-2 = 1-b = a+b$$

$$-2 = 1-b$$

$$\boxed{b=3}$$

$$a+3=-2$$

$$\boxed{a=-5}$$

$$a\cdot b = -5*3 = -15$$

KAYNAKLAR

- İHTİYAROĞLU F /ŞAHBAZ B. , Limit ve Süreklilik , APOTEMİ

LİMİT SÜREKLİLİK BÖLÜM 7

FONKSİYONLARDA SÜREKLİLİK

Yeni müfredat fonksiyonun tanımsız olduğu noktada sürekliliğinin araştırılmasını anlamsız olarak belirtmektedir. Dolayısıyla bir fonksiyonun bir noktada süreksizliğine karar vermek için fonksiyonun en az bir taraftan limiti ile görüntüsünün farklı olması yeterli olmaktadır.

BİR NOKTADA SÜREKLİLİK

$A \subset R$ için $f:A \to R$ bir fonksiyon olsun.

$a \in A$ olmak üzere, $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$ oluyorsa

f fonksiyonu a noktasında sürekli denir. Bir noktada sürekli olmayan fonksiyona o noktada **süreksiz bir fonksiyon** denir.

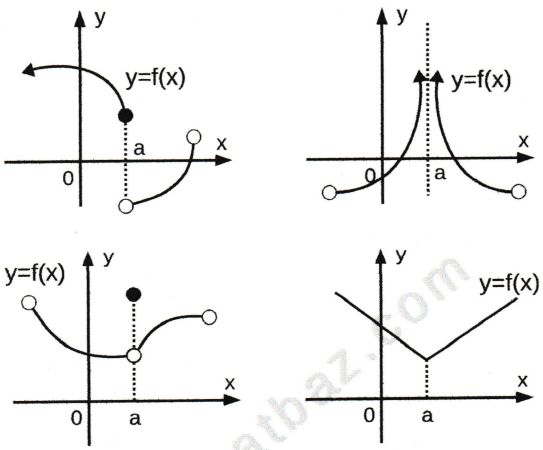
Tanıma göre f a da sürekli ise:

1) f fonksiyonu a da tanımlı,
2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ var ve
3) $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$

koşullarının üçü de gerçekleşmelidir.

Örnek...1 :

Grafiği aşağıdaki gibi olan fonksiyonlar x=a noktasında sürekli midir?



Örnek...2 :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & ; \quad x \geq 3 \\ \dfrac{x^2-x}{x^2-4} & ; \quad x<3 \end{cases}$$

fonksiyonu x=3 noktasında sürekli ise a kaçtır?

$f(3)=3^2+a$ $\quad 9+a=\frac{6}{5}$ $\quad a=-\frac{39}{5}$

$3^2+a=\frac{3^2-3}{3^2-4}$ $\quad \boxed{\frac{-39}{5}}$

Örnek...4 :

$$f(x)=\frac{\sqrt{41}}{x^3-x}$$ $x.(x^2-1) \to x.(x-1)(x+1)$

fonksiyonu reel sayılar kümesinde hangi noktalarda süreksizdir?

$\boxed{\{-1,0,1\}}$

TANIM KÜMESİNDE SÜREKLİLİK

$A \subset R$ ve $f:A \to R$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in A$ için f fonksiyonu sürekli ise f tanım kümesinde sürekli bir fonksiyondur denir. Örneğin polinom fonksiyonlar tanım kümesinde sürekli olan fonksiyonlardır.

SAĞDAN VE SOLDAN SÜREKLİLİK

1) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)=f(a)$ ise f soldan sürekli
2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)=f(a)$ ise f sağdan süreklidir

denir.

Bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması için sağdan ve soldan sürekli olması gerekir.

www.matbaz.com

Örnek...5 :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & ; x<5 \\ ax+4 & ; x=5 \\ (b-3)x+4a & ; x>5 \end{cases}$$

fonksiyonu 5 noktasında sağdan sürekli ise a−5b kaçtır?

$5a+4=5.(b-3)+4a$

$5a+4=5b-15+4a$

$a=5b-19$

$a-5b=-19$

$\boxed{-19}$

I ⊂ R ve f:I → R fonksiyonu a ∈ R olmak üzere x=a noktasında sürekli değil ise f fonksiyonu x=a noktasında süreksizdir denir.

BAZI FONKSİYONLARIN SÜREKSİZ OLDUĞU NOKTALARI BULMA

1) RASYONEL FONKSİYONLAR :

f(x)=P(x)/Q(x) ve P(x) ve Q(x)polinom fonksiyonlar ise Q(x)=0 olduğu noktalarda f de tanımsız olacağından bu noktalarda fonksiyon süreksizdir.

Örnek...6 :

$f(x)=\dfrac{5x-3}{x^2-5x+6}$ fonksiyonun süreksiz olduğu noktaların apsisleri toplamı kaçtır?

$(x-2).(x-3)$

$2+3=5$

$\boxed{5}$

2) İRRASYONEL FONKSİYONLAR:

$f(x)=\sqrt[2n]{g(x)}$ fonksiyonu $g(x)\geq 0$ için süreklidir.

Örnek...7 :

$f(x)=\sqrt[12]{2x-3}$ ve $g(x)=\dfrac{x^2}{x^2-x^4}$ fonksiyonları hangi noktalarda süreklidir?

$x^2.(1-x^2)\to x^2.(1+x)(1-x)$

$(0,-1,1)$

$2x-3\leq 0$

$x\leq \dfrac{3}{2}$

$[\dfrac{3}{2},\infty)$ $\mathbb{R}-\{0,-1,1\}$

3) PARÇALI FONKSİYONLAR :

Dalları oluşturan fonksiyonlarla beraber kritik noktalarda (yani fonksiyonun kural değiştirdiği noktalarda) süreklilik olup olmadığı araştırılmalıdır.

Örnek...8 :

Sağlıklı bir soru değil.!

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & ; x<0 \\ \ln(x+1) & ; x=0 \\ \dfrac{x}{x^2-1} & ; x>0 \end{cases}$$

hangi noktada süreksizdir?

$\boxed{\{0\}}$ (Not 1 tanım kümesinde yoktur)

Örnek...9 :

Fonksiyonların sürekli oldukları aralıkları yazınız?

a) $f(x)=3x^2-5x+2$

b) $h(x)=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$

c) $u(x)=\sqrt{x^2-x-12}$

d) $v(x)=\sqrt[3]{x-12}$

e) $t(x)=\begin{cases} x^2-1 & ; x\leq 0 \\ \dfrac{x^2-x}{x^2-4} & ; x>0 \end{cases}$

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $(-\infty,-3]\cup[4,\infty)$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}-\{0\}$

Örnek...10 :

$$t(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & ; x\neq 3 \\ \dfrac{m.\cos(x-3)}{x^2+9} & ; x=3 \end{cases}$$

$(x-3)(x+3)$

fonksiyonu reel sayılarda sürekli ise m değeri kaçtır?

$3+3=\dfrac{m.\cos 0}{18}$ $\to 1$

$m=108$

$\boxed{108}$

www.matbaz.com

BİR NOKTADA SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

$A \subset R$ olmak üzere $f:A \rightarrow R$ ve $g:A \rightarrow R$ $x=a \in A$ da sürekli iki fonksiyon ise $f \pm g$ $f.g$, $\frac{f}{g}$ ve $k.f$ $(k \in R)$ fonksiyonları da sürekli olur.

KAPALI BİR ARALIKTA SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

$f:[a,b] \rightarrow R$ tanım kümesinde sürekli bir fonksiyon ise

1) f fonksiyonu bu aralıkta sınırlıdır. Yani Her $x \in R$ için $|f(x)|<B$ olacak şekilde $B \in R$ vardır.

2) f fonksiyonu [a,b] aralığında maksimum ve minimum değerlerine sahiptir.

3) $a<x_1<x_2<b$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise
Bazı $c \in (x_1,x_2)$ öyle ki
$f(c) \in ((f(x_1),f(x_2))$

Örnek...11 :

$f:[-2,1] \rightarrow R$ $f(x)=x^2+3x$ fonksiyonu x eksenini keser mi?

evet

www.matbaz.com