

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

a, b, c sabit sayılar ve x bilinmeyen olmak üzere,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

tipindeki denklemlere ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler adı verilir. Bu denklemin kökleri,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

olmak üzere,

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$$

sayılarıdır. Buna göre,

1. $\Delta > 0$ ise, farklı reel sayılarıdır.
2. $\Delta = 0$ ise, kökler reel ve eşittir.
3. $\Delta < 0$ ise, kökler reel değildir.

Örnek: $x^2 - 4x - 5 = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm: $a = 1, b = -4, c = -5$ olduğundan

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4.1(-5) = 36$$

dir. Buna göre verilen denklemin iki farklı reel kökü vardır. Bu kökler

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{36}}{2.1} = 5,$$

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{36}}{2.1} = -1$$

dir.

$$y = ax^2 + bx + c$$

biçimindeki bir fonksiyonun grafiğini çizmek için şu yolu izlemekte fayda vardır.

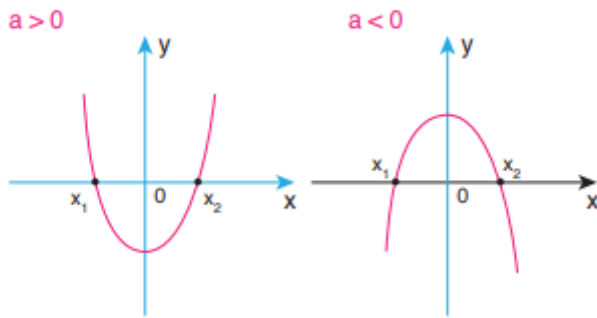
İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

$f(x) = ax^2 + bx + c$ üç terimlisinin işaretini $\Delta = b^2 - 4ac$ nin durumuna göre inceleyelim.

- i. $\Delta > 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçekte kökleri x_1 ve x_2 dir.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
f(x)	a'nın işaretinin aynısı	a'nın işaretinin tersi	a'nın işaretinin aynısı	a'nın işaretinin aynısı

Parabolle ifadesi:



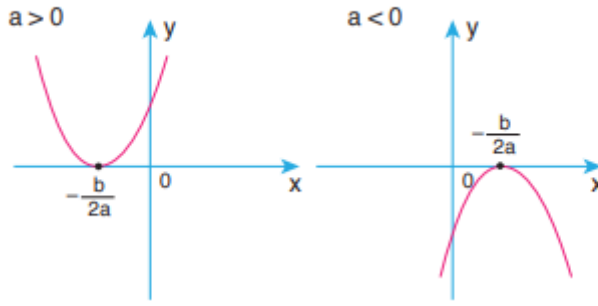
- ii. $\Delta = 0$ ise

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçekte kökleri

$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ dır.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	a'nın işaretinin aynısı	a'nın işaretinin aynısı	a'nın işaretinin aynısı

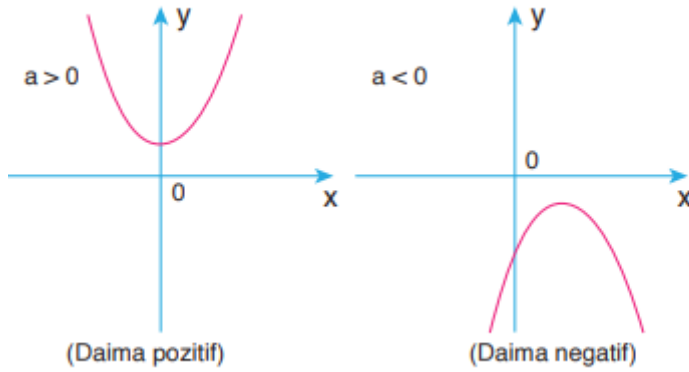
Parabolle ifadesi:



iii. $\Delta < 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçek kökleri yoktur.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	a'nın işaretinin aynısı	

Parabolle ifadesi:



Not

İşaret tablosu oluşturulurken kullanılacak gösterimler:

	Payın kökü		Paydanın kökü
Tek katlı	●	○	○
Çift katlı	●●	○ ○	○ ○
	Eşitlik	Eşit olmama	Eşitlik ve eşit olmama

1. Aşağıdaki denklemleri sağlayan kökleri bulunuz.

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

d) $2x^2 + x - 15 = 0$

b) $x^2 + 5x - 14 = 0$

e) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

c) $x^2 + 10x + 25 = 0$

f) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

1) a) $\{1, 3\}$

b) $\{-7, 2\}$

c) $\{-5\}$

d) $\left\{-3, \frac{5}{2}\right\}$

e) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

f) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

SORU:

$$(x - 2)^2 \cdot (x^2 + 2x - 3) \geq 0$$

eşitsizliğin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

B) $(-\infty, -1) \cup [3, \infty)$

C) $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$

D) $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

E) $(-\infty, -3] \cup [-1, \infty)$

SORU:

$x^2 - 2x - 6 = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-6, 1\}$

B) $\{-2, 3\}$

C) $\{3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\}$

D) $\{2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}\}$

E) $\{1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}\}$

SORU:

$x^2 + 4x - 6 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 2 D) $\frac{7}{3}$ E) 3

SORU:

$x^2 - 7x + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise

aşağıdakilerden hangileri doğrudur? ($x_1 > x_2$)

I) $x_1 + x_2 = -7$

II) $x_1 \cdot x_2 = 3$

III) $x_1 - x_2 = \sqrt{37}$

- A) I B) II C) III D) I,II E) II,III

SORU:

$$(x^2 - 4) \cdot (x^2 + 5x) = 3 \cdot (x^2 + 7x + 10)$$

Aşağıdakilerden hangisi yukarıdaki denklemin köklerinden biri değildir?

- A) -5 B) -2 C) -1 D) 3 E) 4

SORU:

$x^2 - 4x - 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}\}$ B) $\{1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}\}$

C) $\{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$ D) $\{3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\}$

E) $\{4 - \sqrt{3}, 4 + \sqrt{3}\}$

SORU:

$x^2 - 2x - 24 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulun.

SORU:

$3x^2 - 14x + 8 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulun.

SORU:

$\frac{3x+1}{x^2+1} > 1$ eşitsizliğini sağlamayan sayıların kümesini bulun.

Hatırlatma :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Diskriminant $\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$

- I) $\Delta > 0$ ise iki farklı reel kök var.
- II) $\Delta = 0$ ise bir tane reel kök var.
- III) $\Delta < 0$ ise reel kökü yoktur.

SORU:

$3x^2 - 5x - 2 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

CEVAP:

$3x^2 - 5x - 2 = 0$ denkleminde $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49 > 0$ olduğundan denklemin farklı iki reel kökü vardır. Denklemin kökleri çarpanlara ayırma yöntemiyle $(3x + 1) \cdot (x - 2) = 0$
 $x_1 = -\frac{1}{3}$ veya $x_2 = 2$ olarak bulunur.

$a = 3 > 0$ olduğundan işaret tablosunun en sağ aralığı (+) ile başlayıp sola doğru tek katlı köklerde işaret değiştirerek en soldaki aralığa kadar devam eder.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$3x^2 - 5x - 2$	+	○	○	+

$3x^2 - 5x - 2 > 0$ eşitsizliğinde istenen aralıklar (+) olan aralıklardır. Bu aralıklar işaret tablosunda taralı olarak gösterilmiştir.

Böylece $3x^2 - 5x - 2 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\text{ÇK} = (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (2, \infty)$ olur.

SORU:

$x^2 - 2x + 3 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

CEVAP:

$x^2 - 2x + 3 = 0$ denkleminde $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$ olduğundan denklemin reel kökü yoktur.

$a = 1 > 0$ olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) > 0$ olur.

x	$-\infty$	reel kök yok	$+\infty$
$x^2 - 2x + 3$	+		

Tabloda görüldüğü gibi $x^2 - 2x + 3 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\emptyset = \{ \}$ olur.

SORU:

$x^2 < 3 - 2x$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

CEVAP:

$$x^2 < 3 - 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 3 < 0$$

$x^2 + 2x - 3 = 0$ denkleminin kökleri

$$(x + 3) \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \text{ veya } x_2 = 1 \text{ olarak bulunur.}$$

$x^2 + 2x - 3$ ifadesinde $a = 1 > 0$ olduğundan işaret tablosunun en sağ aralığı (+) ile başlayıp sola doğru tek katlı köklerde işaret değiştirerek en soldaki aralığa kadar devam eder. Eşitsizliğin işaret tablosu aşağıdaki gibi elde edilir.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x^2 + 2x - 3$	+	○	○	+

Böylece $x^2 + 2x - 3 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\emptyset K = (-3, 1)$ olur.

SORU:

$(x^2 - 4x + 4) \cdot (x - 5) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

CEVAP:

$(x^2 - 4x + 4) \cdot (x - 5) = (x - 2)^2 \cdot (x - 5) = 0$ denkleminin kökleri

$(x - 2)^2 = 0$ veya $x - 5 = 0$ eşitliklerinden

$x_1 = x_2 = 2$ (çift katlı kök) veya $x_3 = 5$ olarak bulunur.

Burada bulunan 2 ve 5 değerleri, \geq sembolü kullanıldığı için çözüm kümesine dâhildir. Bu durumda işaret tablosu aşağıdaki gibi olur.

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
$x^2 - 4x + 4$	+	●	+	+
$x - 5$	-	-	●	+
$(x^2 - 4x + 4) \cdot (x - 5)$	$(+) \cdot (-) = -$	●	$(+) \cdot (-) = -$	$(+) \cdot (+) = +$

$(x^2 - 4x + 4) \cdot (x - 5) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\text{ÇK} = [5, \infty) \cup \{2\}$ olarak bulunur.

SORU:

$\frac{x-5}{3-x} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

CEVAP:

$\frac{x-5}{3-x}$ ifadesinde pay ve paydanın kökleri
 $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$
 $3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$ olur.

$\frac{1 \cdot x - 5}{3 - 1 \cdot x}$ ifadesinde $\frac{1}{-1} = -1 < 0$ olduğundan işaret tablosu (-) ile başlar.

x	$-\infty$	3	5	∞
$\frac{x-5}{3-x}$	-	○	●	-

İşaret tablosuna göre $\frac{x-5}{3-x} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\text{ÇK} = (3, 5]$ olur.

SORU:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ x + 3 < 0 \end{array} \right\} \text{eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.}$$

CEVAP:

$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0$ olduğundan denklemin kökleri $x_1 = -2$ veya $x_2 = 3$ olur.
 $x + 3 = 0$ denkleminin kökü $x_3 = -3$ olarak bulunur.

Bulunan bu köklerle ilgili işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$	-3	-2	3	$+\infty$
$x^2 - x - 6$	+	+	•	•	+
$x + 3$	-	○	+	+	+

$x^2 - x - 6 \geq 0$ olan bölgeler taranır.

$x + 3 < 0$ olan bölge taranır.

Taralı bölgelerdeki ortak noktalar çözüm kümesini oluşturur.

Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi $\text{ÇK} = (-\infty, -3)$ olur.

SORU:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x^2 + x < 0 \end{array} \right\} \text{eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.}$$

CEVAP:

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 1) = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = 2$ veya $x_2 = 1$ olur.

$x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x + 1) = 0$ denkleminin kökleri $x_3 = 0$ ve $x_4 = -1$ olarak bulunur.

Bulunan bu köklerle ilgili işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	+	+	●	-	+
$x^2 + x$	+	○	-	○	+	+

$x^2 - 3x + 2 \geq 0$ olan bölgeler taranır. $x^2 + x < 0$ olan bölge taranır.

Taralı bölgelerdeki ortak noktalar, çözüm kümesini oluşturur.

Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi $\text{ÇK} = (-1, 0)$ olur.