

## 1. Lí thuyết và nhận dạng các bài tập quy hoạch động.

### 1.1 Lí thuyết.

Nguyên lí Quy hoạch động có thể được hiểu như sau: *Quy hoạch động là lớp các bài toán mà quyết định ở bước thứ  $i$  phụ thuộc vào quyết định ở các bước đã xử lý trước đó.*

### 1.2 Nhận dạng các bài tập về quy hoạch động.

Một bài toán quy hoạch động phải thỏa mãn có thể sử dụng lời giải ở các trạng thái thấp hơn để tìm lời giải cho các trạng thái cao hơn và cuối cùng là lời giải tối ưu cho cả bài toán.

## 2. Các bước giải quyết một bài toán quy hoạch động.

### Bước 1: Xác định hàm mục tiêu.

+ Ở đây, theo nguyên lí của quy hoạch động, ta xây dựng hàm mục tiêu  $F(i)$  là kết quả của bước thứ  $i$ .

### Bước 2: Xây dựng bài toán cơ sở và công thức truy hồi.

+ Bài toán cơ sở là bài toán con nhỏ nhất mà ta có thể tính được kết quả dễ dàng.

+ Sau khi xây dựng bài toán cơ sở, ta sẽ tiến hành tìm công thức truy hồi của bài toán thứ  $i$  dựa trên kết quả của các bài toán trước đó.

### Bước 3: Lập bảng phương án.

+ Sử dụng công thức truy hồi và nghiệm các bài toán cơ sở tính nghiệm tất cả các bài toán con và lưu trữ chúng vào bảng phương án.

### Bước 4: Kết luận.

+ Tìm ra được nghiệm của bài toán

**Ví dụ:** Bài toán tìm số Fibonacci thứ  $N$ .

**Hàm mục tiêu :** Gọi  $F(i)$  là số fibonacci thứ  $i$ .

**Bài toán cơ sở :**  $F(1) = 1, F(2) = 1$ .

**Công thức truy hồi**

$$F(i) = F(i - 1) + F(i - 2).$$

**Lập bảng phương án :**

$i$	1	2	3	4	5	6	7	...	...
$F(i)$	1	1	2	3	5	8	13		

**Kết luận:** kết quả của bài toán là  $F(N)$

### 3. Các dạng toán quy hoạch động điển hình.

#### 3.1 Dãy các phần tử dài nhất thỏa mãn bài toán.

##### Câu 1. Tên bài: LIQ.CPP

Cho dãy  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Hãy tìm một dãy con tăng không ngắt dài nhất của dãy (dãy con có thể không liên tiếp). ( $N \leq 10^3$ ).

**Dữ liệu:** vào từ file văn bản **LIQ.INP**

+ Dòng đầu tiên chứa số nguyên  $N$  ( $1 \leq N \leq 10^3$ )

+ Tiếp theo là 1 dòng gồm  $N$  phần tử của dãy. Các số thuộc phạm vi *int*

**Kết quả:** ghi ra file văn bản **LIQ.OUT**: một số nguyên là kết quả bài toán

LIQ.INP	LIQ.OUT
5	4
1 3 2 2 5	

##### Câu 2. Tên bài: LIS.CPP

Cho dãy  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Hãy tìm một dãy con tăng ngắt dài nhất của dãy. Dãy con có các phần tử không nhất thiết phải liên tiếp.

**Dữ liệu:** vào từ file văn bản **LIS.INP**

+ Dòng đầu tiên chứa số nguyên  $N$  ( $1 \leq N \leq 10^5$ )

+ Dòng tiếp theo gồm  $N$  phần tử của dãy. Các số trong phạm vi *int*

**Kết quả:** ghi ra file văn bản **LIS.OUT**: một số nguyên là kết quả bài toán

**Ví dụ:**

LIS.INP	LIS.OUT
5	3
1 3 2 2 5	

##### Câu 3. Tên bài: TOWER.CPP

Trong một cuộc thi tìm người thông thái nhất đất nước, Tí được cho  $N$  hình trụ đứng với nhiều kích thước khác nhau và yêu cầu phải xếp được tòa tháp cao nhất từ các hình trụ theo đúng thứ tự từ 1 đến  $N$  sao cho khối ở trên phải được xếp khít với khối ở dưới, hay đường kính đáy của hình trên không vượt quá đường kính đáy hình dưới. Một khối trụ có thể dùng hoặc không dùng nhưng phải đúng theo thứ tự đã cho. Hãy giúp Tí giải bài toán này nhé các bạn.

**Dữ liệu:** vào từ file **TOWER.INP**

+ Dòng đầu ghi số nguyên dương  $N$  ( $N \leq 10^5$ ).

+  $N$  dòng tiếp theo mỗi dòng ghi 2 số  $R_i$  và  $H_i$  là bán kính đáy và chiều cao hình trụ thứ  $i$ . ( $1 \leq R_i \leq 500, 1 \leq H_i \leq 500$ ).



**Kết quả:** Ghi ra file **TOWER.OUT** một số nguyên duy nhất là chiều cao lớn nhất của tòa tháp xếp được.

TOWER.INP	TOWER.OUT
4	10
4 2	
2 5	
1 3	
3 1	

#### Câu 4. Tên bài: **STADIUM.CPP**

Sân bóng mini *ABC* nhận được rất nhiều đơn đặt sân từ  $n$  đội bóng. Đội bóng  $i$  muốn sử dụng sân bóng trong khoảng thời gian từ  $a_i$  đến  $b_i$  và trả tiền thuê là  $c_i$ . Hãy giúp ông chủ sân tính toán sắp xếp lịch để nhận được nhiều tiền nhất và thỏa mãn 2 đội bóng bất kì đều có khoảng thời gian sử dụng sân bóng là không giao nhau.

**Dữ liệu:** vào từ file **STADIUM.INP** gồm

- + Dòng đầu là số nguyên  $n$ , là số đội bóng đặt sân bóng ( $1 \leq n \leq 5000$ )
- +  $n$  dòng tiếp theo, mỗi dòng gồm 3 chỉ số  $a_i, b_i, c_i$  ( $1 \leq a_i, b_i, c_i \leq 10^4$ ) thể hiện thời gian mở đầu, kết thúc và tiền thuê sân của đội thứ  $i$ .

**Kết quả:** ghi ra file **STADIUM.OUT** số tiền lớn nhất mà chủ sân nhận được.

**Ví dụ:**

STADIUM.INP	STADIUM.OUT
5	13
1 3 4	
1 5 5	
3 6 2	
4 7 9	
5 7 6	

#### Câu 5. Tên bài: **EXP.CPP**

Cho  $N$  số tự nhiên  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Ban đầu các số được đặt liên tiếp theo đúng thứ tự cách nhau bởi dấu "?":  $A_1 ? A_2 ? \dots ? A_n$ . Cho trước số nguyên  $S$ , có cách nào thay các dấu ? bằng dấu + hay dấu - để được một biểu thức số học cho giá trị là  $S$  không?

**Dữ liệu:** vào từ file **EXP.INP** gồm:

- + Dòng đầu tiên là số  $N$  ( $1 \leq N \leq 500$ )
- + Dòng 2 gồm  $N$  số là các phần tử  $A_i$  ( $1 \leq A_i \leq 50$ )
- + Dòng 3 là một số  $S$ . ( $-25000 \leq S \leq 25000$ )

**Kết quả:** ghi ra file **EXP.OUT** chữ "YES" nếu tồn tại cách thỏa mãn, ra "NO" nếu không tồn tại.

*Ví dụ:*

EXP.INP	EXP.OUT
4 1 2 3 4 4	YES
5 2 3 1 4 5 14	NO

**Câu 6. Tên bài: SPSEQ.CPP**

Một dãy được xem là đẹp nếu nó là 1 dãy các số nguyên dương và có các đặc điểm sau:

- + Độ dài của dãy là 1 số lẻ:  $L = 2 * N + 1$
- +  $N + 1$  số nguyên đầu tiên của dãy tạo thành 1 dãy tăng
- +  $N + 1$  số nguyên cuối của dãy tạo thành 1 dãy giảm
- + Không có 2 số nguyên nào cạnh nhau trong dãy có giá trị bằng nhau

Ví dụ: 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1 là 1 dãy đẹp độ dài 9. Tuy nhiên, dãy 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 2 không là 1 dãy đẹp.

**Yêu cầu:** Trong các dãy con của dãy số cho trước, tìm dãy đẹp có độ dài dài nhất.

**Dữ liệu:** vào từ file SPSEQ.INP gồm:

- + Dòng 1: số nguyên dương  $N$  ( $N \leq 10^5$ ), độ dài dãy số.
- + Dòng 2:  $N$  số nguyên dương  $a_i$  ( $a_i \leq 10^9$ ).

**Kết quả:** ghi ra file SPSEQ.OUT là một số nguyên dương duy nhất là độ dài dãy đẹp dài nhất.

*Ví dụ:*

SPSEQ.INP	SPSEQ.OUT
19 1 2 3 2 1 2 3 4 3 2 1 5 4 1 2 3 2 2 1	9

**Câu 7. Tên bài: BEADS.CPP**

Trong một đợt đi du lịch ở Sầm Sơn, sáng sớm Trạng Tí thường đi dạo dọc bờ biển và nhặt những vỏ ốc rồi xâu chúng lại thành một chuỗi. Nguyên tắc tạo chuỗi ốc của Trạng Tí như sau: Ban đầu từ chuỗi rỗng, không có vỏ ốc; khi gặp một vỏ ốc mới, có thể lấy để xâu vào một trong hai đầu của chuỗi hoặc hoặc bỏ đi không lấy; cuối cùng nhận được một chuỗi vỏ ốc mà tính từ đầu chuỗi đến cuối chuỗi, các vỏ ốc có kích thước tăng dần (tăng ngật) và gồm càng nhiều vỏ ốc càng tốt.



**Yêu cầu:** Cho trước dãy  $A[1], A[2], \dots, A[n]$  là kích thước của các vỏ ốc mà Trạng Tí lần lượt gặp khi đi dọc bờ biển, hãy tìm cách nhặt và xâu chuỗi để được chuỗi gồm nhiều vỏ ốc nhất

**Dữ liệu:** vào từ file **BEADS.INP** gồm:

+ Dòng 1 chứa số nguyên dương  $n$  ( $n \leq 10^5$ )

+ Dòng 2 chứa  $n$  số nguyên dương  $A[1], A[2], \dots, A[n]$  ( $A_i \leq 10^9$ )

**Kết quả:** ghi ra file **BEADS.OUT** một số nguyên duy nhất là số lượng vỏ ốc trong chuỗi tạo được.

**Ví dụ:**

BEADS.INP	BEADS.OUT
5 4 4 5 3 1	4

#### **Câu 8. Tên bài: STICK.CPP**

Bình có  $N$  đoạn gỗ cần thi công ngày hôm nay. Để xử lý chúng bác cần thời gian để chuẩn bị :

+ Thời gian chuẩn bị cho đoạn gỗ đầu tiên là 1 phút.

+ Sau khi xử lý xong đoạn gỗ có chiều dài  $L$  và trọng lượng  $W$ , không mất thời gian xử lý nếu đoạn gỗ tiếp theo có độ dài  $L'$  và trọng lượng  $W'$  thỏa  $L \leq L'$  và  $W \leq W'$ . Ngược lại mất 1 phút để chuẩn bị.

Các bạn hãy giúp Bình tìm thời gian chuẩn bị ít nhất cho  $N$  đoạn gỗ.

**Ví dụ:** có 5 đoạn gỗ với các chỉ số : (9,4), (2,5), (1,2), (5,3) và (4,1) thì thời gian ít nhất là 2 phút vì có thể xử lý theo thứ tự như sau (4,1), (5,3), (9,4), (1,2), (2,5).

**Dữ liệu:** vào từ file **STICK.INP** gồm

+ Dòng đầu là số lượng test  $T$  ( $1 \leq T \leq 100$ )

+ Các dòng tiếp theo ứng với mỗi test có định dạng như sau:

+Dòng đầu là số nguyên dương  $N \leq 5000$ .

+Sau đó là  $N$  dòng gồm  $N$  cặp số nguyên dương  $L[i]$  và  $W[i]$  tương ứng là độ dài và trọng lượng của các khối gỗ. ( $L[i], W[i] \leq 10000$ )

**Kết quả:** ghi ra file **STICK.OUT**  $T$  dòng, mỗi dòng là thời gian ít nhất để chuẩn bị các đoạn gỗ của test đó.

*Ví dụ:*

STICK.INP	STICK.OUT
3	2
5	1
4 9	3
5 2	
2 1	
3 5	
1 4	
3	
2 2	
1 1	
2 2	
3	
1 3	
2 2	
3 1	

**Câu 9. Tên bài: NEMCHUA.CPP**

Nem chua Anh Dân là một cơ sở sản xuất lớn ở Thanh Hoá. Với thương hiệu đã xây dựng được hơn 30 năm và được nhiều người biết đến. Vào một ngày đẹp trời, VànhG được mời đến để thăm xưởng sản xuất nem chua, anh vô

cùng ngạc nhiên bởi khả năng gói nem siêu đẳng của các công nhân. Các công nhân được ngồi trong phòng khép kín ở khu vực sản xuất nhìn rất chuyên nghiệp, mỗi công nhân có một cái rô để đựng nem khi gói xong. VànhG với biệt danh là code khủng nhưng hay bị lũng nhĩ ra trong đầu một số nguyên dương  $M$ , và có một bài toán để về đố các bạn trên lớp của mình như sau: Cho  $N$  công nhân gói nem, mỗi công nhân gói được tương ứng số nem là  $a_1, a_2, \dots, a_N$ . Hãy chia  $N$  công nhân này thành  $M$  nhóm sao cho tổng chi phí của  $M$  nhóm là nhỏ nhất có thể. Chi phí của một nhóm được tính bằng chênh lệch giữa công nhân có số lượng nem nhiều nhất với công nhân có số lượng nem ít nhất trong nhóm đó. Nếu một nhóm có 0 hoặc 1 công nhân, chi phí của nhóm đó bằng 0

**Yêu cầu:** Hãy giúp VànhG tìm cách phân chia  $N$  công nhân vào  $M$  nhóm sao cho tổng chi phí là nhỏ nhất có thể.

**Dữ liệu:** vào từ file **NEMCHUA.INP** gồm:

- + Dòng đầu tiên là hai số nguyên  $N, M$  ( $0 \leq N, M \leq 200$ )
- + Dòng thứ 2 là  $N$  số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_N$  tương ứng là số nem mà công nhân thứ  $i$  gói được. ( $0 \leq a_i \leq 10^9$ ).

**Kết quả:** ghi ra file **NEMCHUA.OUT** một dòng duy nhất là tổng chi phí nhỏ nhất có thể.



**Yêu cầu:** Hãy giúp VànhG tìm cách phân chia N công nhân vào M nhóm sao cho tổng chi phí là nhỏ nhất có thể.

**Dữ liệu:** vào từ file **NEMCHUA.INP** gồm:

+ Dòng đầu tiên là hai số nguyên N, M ( $0 \leq N, M \leq 200$ )

+ Dòng thứ 2 là N số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_N$  tương ứng là số nem mà công nhân thứ i gói được. ( $0 \leq a_i \leq 10^9$ ).

**Kết quả:** ghi ra file **NEMCHUA.OUT** một dòng duy nhất là tổng chi phí nhỏ nhất có thể.

**Ví dụ:**

NEMCHUA.INP	NEMCHUA.OUT
8 3 5 2 3 10 7 2 6 8	4

**Giải thích:** Chia thành 3 nhóm (5 7 6 8), (10), và (2 3 2) chi phí từng nhóm tương ứng là  $8-5 = 3$ ,  $10 - 10 = 0$ ,  $3 - 2 = 1 \Rightarrow$  tổng chi phí là 4

**Câu 10.** Tên bài: **BUNDAU.CPP**

Bún Đậu Hoàng Long là một nhà hàng mới nổi trong ngành nghề bún đậu mắm tôm. Ở đây có không gian đẹp và thoáng. Có vị trí đắc địa, nằm ngay đối diện cổng trường lái của Học viện cảnh sát tại khu đô thị Hoàng Long (phường Long Anh, TP Thanh Hoá). Ở đây có rất nhiều món ăn đi kèm với bún đậu như: chả cốm, dồi sụn, chân giò...và còn được free nước uống. Tình

cờ VànhG đang lướt facebook thì biết được địa điểm này. Vào một ngày VànhG code toàn bị lũng nên anh quyết định đi đến Bún Đậu Hoàng Long để thưởng thức. Vừa đến nơi thì VànhG thấy trong bếp có N mẹt bún, mỗi mẹt bún có rất nhiều lá bún bên trong, các mẹt bún này được xếp thành hàng ngang trông rất là đẹp mắt, anh liền nghĩ ra một bài toán để đố các bạn trên lớp: cho N mẹt bún, trong các mẹt có các lá bún tương ứng là  $a_1, a_2, \dots, a_N$ . Hãy tìm các mẹt bún liên tiếp dài nhất mà có tổng các lá bún là một số nguyên tố.

**Yêu cầu:** Hãy giúp VànhG giải bài toán trên

**Dữ liệu:** vào từ file **BUNDAU.INP** gồm:

+ Dòng đầu tiên là số nguyên N ( $0 < N \leq 5 \cdot 10^3$ )

+ Dòng thứ 2 là N số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_N$  là số lá bún của các mẹt.  $0 \leq a_i \leq 10^3$

**Kết quả:** ghi ra file **BUNDAU.OUT** một dòng duy nhất là số lượng mẹt bún thoả mãn đề bài (nếu không có đáp án thoả mãn thì in ra -1)

**Ví dụ:**

BUNDAU.INP	BUNDAU.OUT
5 1 1 1 1 1	5