23/12/29

Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác AD. Hạ DI vuông góc với AC. Khi đó ta có:

$$\frac{1}{AI} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}.$$

$DI \parallel AB$ (cùng vuông với AC), áp dụng định lý Ta-lét và tính chất đường phân giác:

$$\frac{CI}{IA} = \frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{CI + IA}{IA} = \frac{AB + AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{AC}{IA} = \frac{AB + AC}{AB}$$

$$\Rightarrow IA = \frac{AC \cdot AB}{AC + AB} \Rightarrow \frac{1}{AI} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \ (1)$$

Nhận thấy ΔIAD vuông cân tại $I \Rightarrow AD = AI\sqrt{2}$ hay $\frac{1}{AI} = \frac{\sqrt{2}}{AD}(2)$.

Từ (1) và (2) ta được hệ thức cần chứng minh.

1 Cho tam giác ABC vuông tại A. Dựng về phía ngoài hai tam giác vuông cân ABF, ACE. I', I lần lượt là giao điểm của FC, EB với AB, AC. Khi đó $\Delta AI'I$ vuông cân tại A và có cạnh góc vuông bằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$. **2** Cho tam giác ABC vuông tại A, DI vuông góc với AC với D là chân đường phân giác kẻ từ A. Gọi E là giao điểm của BI với đường vuông góc với AC. Khi đó ΔACE vuông cân tại C.