

# Proyecto métodos numéricos

Métodos numéricos

Andrés Holguín R, Julian A. Caipa P., Santiago Marin B.

# Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica, Facultad de Ingeniería, Sede Bogotá



### Índice

- 1. Objetivos
- 2. Introducción al problema
- 3. Método de Newton Raphson
- 4. Solución al problema
- 5. Resultados NR simultáneo
- 6. Comparación métodos NR
- 7. Análisis de error
- 8. Resultados vs simulación
- 9. Conclusiones
- 10. Referencias



# Objetivos

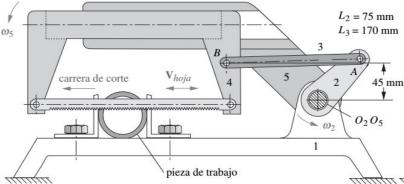
- Resolver un problema aplicado a la ingeniería implementando los conceptos adquiridos en el curso de métodos numéricos.
- Realizar el proceso de resolución de mecanismos mediante el uso recurrente de métodos numéricos como procedimiento de solución del problema.
- Implementar el método de Newton Raphson para lograr determinar los perfiles cinemáticos del mecanismo a partir del movimiento ejercido por el eje de un motor.



# Introducción al problema

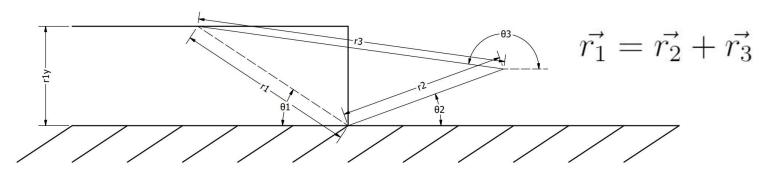
- Se tiene una sierra eléctrica compuesta de un mecanismo de transmisión de movimiento radial a lineal.
- El motor ejerce movimiento en el eslabón **2**, resultando en un movimiento lineal en **B**.

Es necesario realizar el análisis cinemático del mecanismo para el diseño del mismo.





### Diagrama general del problema



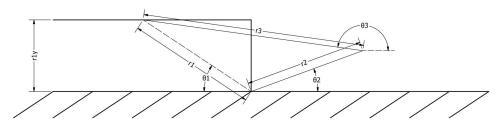
- $\vec{r_1}$ : Eslabón formado por  $\vec{r_2} + \vec{r_3}$ .
- $V_r$ : Velocidad lineal de  $\vec{r_1}$ .
- $A_r$ : Aceleración lineal de  $\vec{r_1}$ .

- $\theta_1$ : Ángulo de  $\vec{r_1}$  respecto a la horizontal.
- $\omega_1$ : Velocidad angular de  $\theta_1$ .
- $\alpha_1$ : Aceleración angular de  $\theta_1$ .

- $\theta_3$ : Ángulo de  $\vec{r_3}$  respecto a la horizontal.
- $\omega_3$ : Velocidad angular de  $\theta_3$ .
- $\alpha_3$ : Aceleración angular de  $\theta_3$ .



### Ecuaciones de posición



Describir las ecuaciones de ligadura y de componentes en el eje X y el eje Y.

$$\vec{r_1} = \vec{r_2} + \vec{r_3}$$

$$Fx(t) = 0 = -r_1(t)Cos(\theta_1(t)) + r_2Cos(\theta_2(t)) + r_3Cos(\theta_2(t))$$

$$Fy(t) = 0 = r_1Sen(\theta_1(t)) - r_2Sen(\theta_2(t)) - r_3Sen(\theta_2(t))$$

$$Fc(t) = 0 = r_1(t)Sen(\theta_1(t)) - r_{1y}$$



#### Ecuaciones de velocidad

Realizar el proceso de derivación de las ecuaciones de posición.

$$\frac{\partial Fx(t)}{\partial t} = 0 = \omega_1 r_1 \sin(\theta_1) - V_r \cos(\theta_1) - \omega_2 r_2 \sin(\theta_2) - \omega_3 r_3 \sin(\theta_3)$$

$$\frac{\partial Fy(t)}{\partial t} = 0 = V_r \sin(\theta_1) + \omega_1 r_1 \cos(\theta_1) - \omega_2 r_2 \cos(\theta_2) - \omega_3 r_3 \cos(\theta_3)$$

$$\frac{\partial Fc(t)}{\partial t} = 0 = V_r \sin(\theta_1) + \omega_1 r_1 \cos(\theta_1)$$



#### Ecuaciones de aceleración

Realizar el proceso de derivación de las ecuaciones de velocidad.

$$\frac{\partial^2 Fx(t)}{\partial t^2} = 0 = r_1 \cos(\theta_1) \ \omega_1^2 + 2 V_r \sin(\theta_1) \ \omega_1 - r_2 \cos(\theta_2) \ \omega_2^2 - r_3 \cos(\theta_3) \ \omega_3^2 - r_2 \cos(\theta_1) + \alpha_1 r_1 \sin(\theta_1) - \alpha_2 r_2 \sin(\theta_2) - \alpha_3 r_3 \sin(\theta_3)$$

$$\frac{\partial^2 Fy(t)}{\partial t^2} = 0 = -r_1 \sin(\theta_1) \ \omega_1^2 + 2 V_r \cos(\theta_1) \ \omega_1 + r_2 \sin(\theta_2) \ \omega_2^2 + r_3 \sin(\theta_3) \ \omega_3^2 + r_3 \sin(\theta_1) + r_2 \sin(\theta_1) + r_3 \cos(\theta_1) + r_3 \cos(\theta_1$$

$$\frac{\partial^2 Fc(t)}{\partial t^2} = 0 = -r_1 \sin(\theta_1) \omega_1^2 + 2 V_r \cos(\theta_1) \omega_1 + a_r \sin(\theta_1) + \alpha_1 r_1 \cos(\theta_1)$$



### Método de Newton Raphson

Condiciones iniciales del motor en reposo:  $\theta_2 = 0$ ,  $\omega_2 = 0$  y  $\alpha_2 = 0$ 

Cota de error:  $\varepsilon < 10^{-6}$ 

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \\ \theta_3 \\ v_1 \\ \omega_1 \\ \omega_3 \\ a_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ -0,5 \\ 3 \\ -0,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m \\ rad \\ rad \\ m s^{-1} \\ rad s^{-1} \\ rad s^{-1} \\ rad s^{-2} \\ rad s^{-2} \\ rad s^{-2} \end{bmatrix}$$

$$x_{n+1} = x_n - J_F(x_n)^{-1} F(x_n)$$

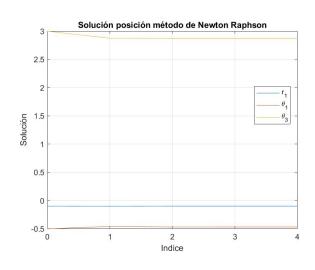
$$J_F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

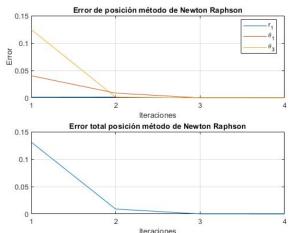


# Newton Raphson consecutivo: Posición

$$F(x_n) = \begin{pmatrix} Fx(t) \\ Fy(t) \\ Fc(t) \end{pmatrix}$$

$$x_n = \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m \\ rad \\ rad \end{bmatrix}$$





$$r_1 = -0.099672 m$$

$$r_1 = -0.099672 m$$
  $\theta_1 = -0.468422 rad$   $\theta_3 = 2.873694 rad$ 

$$\theta_3 = 2,873694 \ rad$$

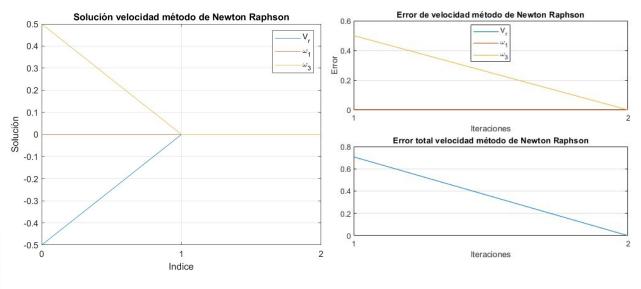


### Newton Raphson consecutivo: Velocidad

$$F(x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Fx(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial Fy(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial Fc(t)}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$$J_{vel} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1) & r_1 \sin(\theta_1) & -r_3 \sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_1) & r_1 \cos(\theta_1) & -r_3 \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_1) & r_1 \cos(\theta_1) & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_n = \begin{pmatrix} v_r \\ \omega_1 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m \ s^{-1} \\ rad \ s^{-1} \\ rad \ s^{-1} \end{bmatrix}$$



$$V_r = 0 \ m \ s^{-1}$$

$$\omega_1 = 0 \ rad \ s^{-1}$$

$$\omega_3 = 0 \ rad \ s^{-1}$$

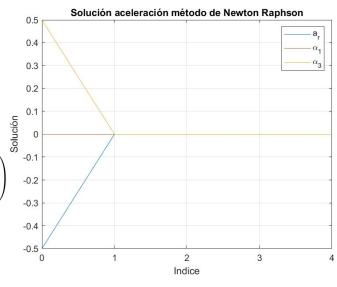


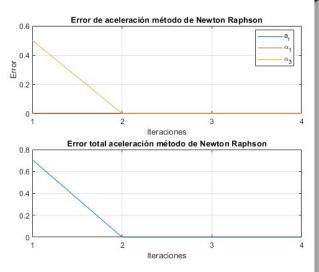
# Newton Raphson consecutivo: Aceleración

$$F(x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Fx(t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 Fy(t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 Fc(t)}{\partial t^2} \end{pmatrix}$$

$$J_{ac} = \begin{pmatrix} \sin(\theta_1) & r_1 \cos(\theta_1) & 0\\ -\cos(\theta_1) & r_1 \sin(\theta_1) & -r_3 \sin(\theta_3)\\ \sin(\theta_1) & r_1 \cos(\theta_1) & -r_3 \cos(\theta_3) \end{pmatrix}$$

$$x_n = \begin{pmatrix} a_r \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m \ s^{-2} \\ rad \ s^{-2} \\ rad \ s^{-2} \end{bmatrix}$$





$$A_r = 0 \ m \ s^{-2}$$

$$A_r = 0 \ m \ s^{-2}$$
  $\alpha_1 = 0 \ rad \ s^{-2}$ 

$$\alpha_3 = 0 \ rad \ s^{-2}$$

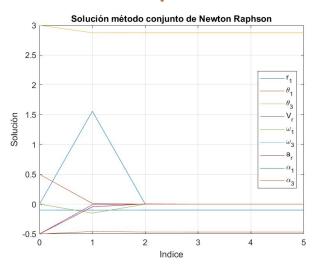
#### Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica, Facultad de Ingeniería, Sede Bogotá

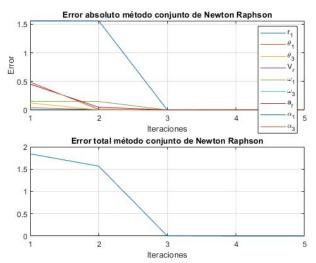


# Newton Raphson simultáneo

$$F(x_n) = \begin{pmatrix} Fx(t) \\ Fy(t) \\ Fc(t) \\ \frac{\partial Fx(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial Fy(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial Fy(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial Fz(t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 Fx(t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 Fy(t)}{\partial t^2} \end{pmatrix}$$

$$x_{n} = \begin{pmatrix} r_{1} \\ \theta_{1} \\ \theta_{3} \\ v_{r} \\ \omega_{1} \\ \omega_{3} \\ a_{r} \\ \alpha_{1} \\ \alpha_{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ -0,5 \\ 3 \\ 0,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m \\ rad \\ rad \\ m s^{-1} \\ rad s^{-1} \\ rad s^{-1} \\ m s^{-2} \\ rad s^{-2} \\ rad s^{-2} \\ rad s^{-2} \end{bmatrix}$$





$$r_1 = -0.099672 m$$
  
 $V_r = 0 m s^{-1}$   
 $A_r = 0 m s^{-2}$ 

$$\theta_1 = -0.468422 \ rad$$

$$\omega_1 = 0 \ rad \ s^{-1}$$

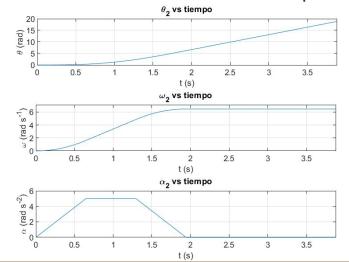
$$\alpha_1 = 0 \ rad \ s^{-2}$$

$$\theta_3 = 2,873694 \ rad$$
$$\omega_3 = 0 \ rad \ s^{-1}$$
$$\alpha_3 = 0 \ rad \ s^{-2}$$



# Solución del problema

- Tiempo de primera revolución: 1.883 s
- Aceleración máxima: 5 rad s^-2
- Velocidad final constante: 61 rpm

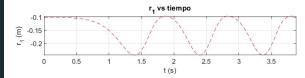


- Se solucionan 1000 puntos en total.
- La semilla del punto (i+1) es el resultado del punto i.
- Se resuelve para ambas versiones del Newton Raphson.

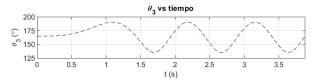
$$x_{n} = \begin{pmatrix} r_{1} \\ \theta_{1} \\ \theta_{3} \\ v_{1} \\ \omega_{1} \\ \omega_{3} \\ a_{1} \\ \alpha_{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0997 \\ -0,4684 \\ 2,8737 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m \\ rad \\ rad \\ m s^{-1} \\ rad s^{-1} \\ rad s^{-1} \\ m s^{-2} \\ rad s^{-2} \\ rad s^{-2} \\ rad s^{-2} \end{bmatrix}$$

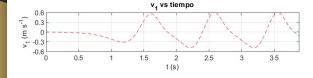


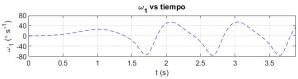
### Resultados método de NR simultáneo

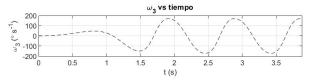


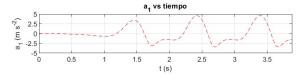


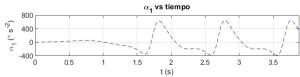


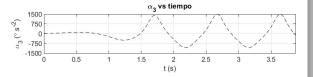








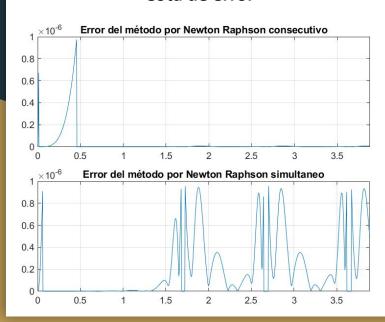




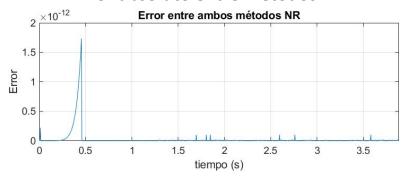


# Comparación métodos NR

#### Cota de error



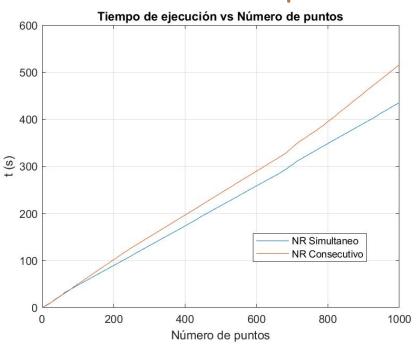
#### Error absoluto entre métodos

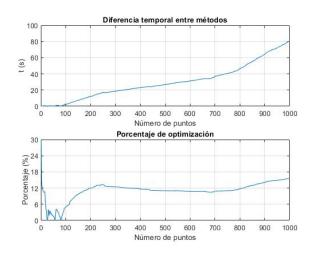


Ambos métodos cumplen con la cota de error establecida, y el error absoluto entre ellos es casi nulo.



# Comparación métodos NR





El método de NR simultáneo es más rápido que su contraparte, donde se obtienen resultados aproximadamente iguales.



#### Solución analítica

#### Posición

$$\theta_3 = \pi - \operatorname{asin}\left(\frac{r_{1y} - r_2 \sin(\theta_2)}{r_3}\right)$$

$$\theta_1 = \operatorname{acot}\left(\frac{r_2 \cos(\theta_2) + r_3 \cos(\theta_3)}{r_{1y}}\right)$$

$$r_1 = -\frac{\omega_2 r_2 \cos(\theta_2)}{r_3 \cos(\theta_3)}$$

#### Velocidad

$$\begin{aligned} \omega_3 = & \cot \left( \frac{r_2 \cos (\theta_2) + r_3 \cos (\theta_3)}{r_{\text{ly}}} \right) \\ \omega_1 = & -\frac{V_r \tan (\theta_1)}{r_1} \\ V_r = & -\cos (\theta_1) \left( \omega_2 r_2 \sin (\theta_2) + \omega_3 r_3 \sin (\theta_3) \right) \end{aligned}$$

#### **Aceleración**

$$\alpha_{3} = \frac{r_{2} \sin(\theta_{2}) \ \omega_{2}^{2} + r_{3} \sin(\theta_{3}) \ \omega_{3}^{2} - \alpha_{2} r_{2} \cos(\theta_{2})}{r_{3} \cos(\theta_{3})}$$

$$\alpha_{1} = \omega_{1}^{2} \tan(\theta_{1}) - \frac{2 V_{r} \omega_{1} + a_{r} \tan(\theta_{1})}{r_{1}}$$

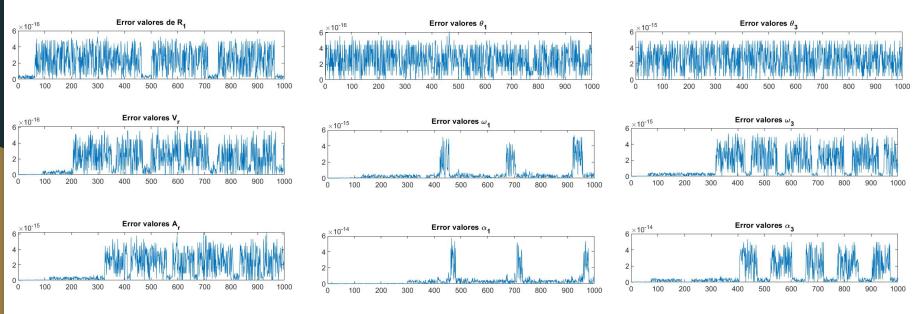
$$A_{r} = r_{1} \omega_{1}^{2} - r_{2} \cos(\theta_{1}) \cos(\theta_{2}) \ \omega_{2}^{2} - r_{3} \cos(\theta_{1}) \cos(\theta_{3}) \ \omega_{3}^{2}$$

$$-\alpha_{2} r_{2} \cos(\theta_{1}) \sin(\theta_{2}) - \alpha_{3} r_{3} \cos(\theta_{1}) \sin(\theta_{3})$$

#### Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica, Facultad de Ingeniería, Sede Bogotá

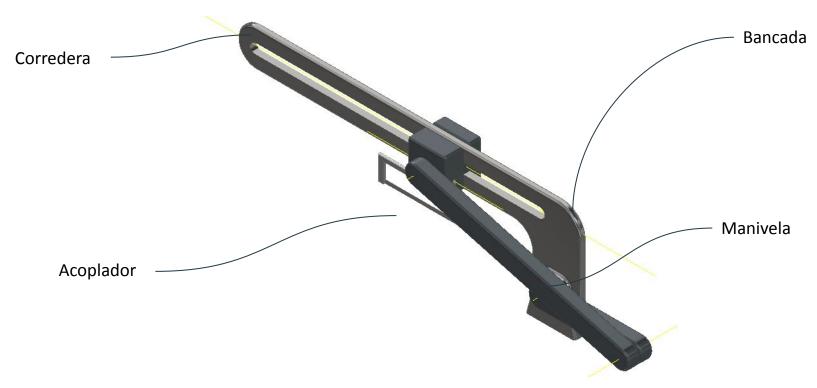


#### Error absoluto solución NR



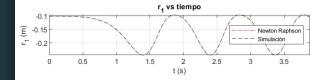
Todos los errores son menores a  $10^{-13}$ 

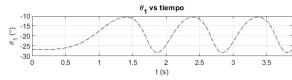
### Simulación en Inventor

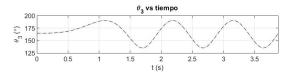


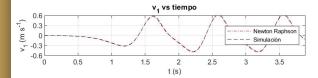


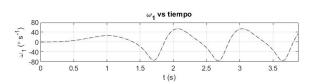
#### Resultados vs Simulación

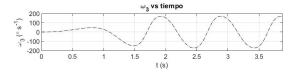


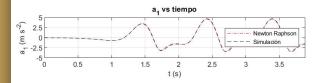


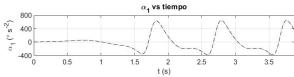


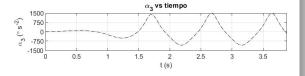














#### Conclusiones

- Se obtienen los mismos resultados resolviendo el mecanismo de manera simultánea y consecutiva. Además, de forma simultánea se soluciona más eficientemente.
- Solucionar el mecanismo por el método genera un error absoluto con la solución exacta siempre menor a  $10^{-13}$ , por lo que se tiene una alta exactitud.
- Los resultados de simulación corresponden con los resultados del método, estableciendo la veracidad del mismo.



#### Referencias

- I. Myzka, H. David, Máquinas y Mecanismos, Pearson, México, 2012
- II. Chapra, S. C., & Canale, R. P. Numerical methods for engineers. McGraw-Hill Higher Education, Boston, 2006
- III. Mathews, J.H. & Fink, K.D. Métodos numéricos con Matlab. Prentice Hall, Madrid, 2000