Proyecto métodos numéricos

Métodos numéricos

Andrés Holguín R, Julian A. Caipa P., Santiago Marin B.

Índice

Objetivos

- Resolver un problema aplicado a la ingeniería implementando los conceptos adquiridos en el curso de métodos numéricos.
- Realizar el proceso de resolución de mecanismos mediante el uso recurrente de métodos numéricos como procedimiento de solución del problema.
- Implementar el método de Newton Raphson para lograr determinar los perfiles cinemáticos del mecanismo a partir del movimiento ejercido por el eje de un motor.

Introducción al problema

- Se tiene una sierra eléctrica compuesta de un mecanismo de transmisión de movimiento radial a lineal.
- El motor ejerce movimiento en el eslabón **2**, resultando en un movimiento lineal en **B**.
- Es necesario realizar el análisis cinemático del mecanismo para el diseño del mismo.

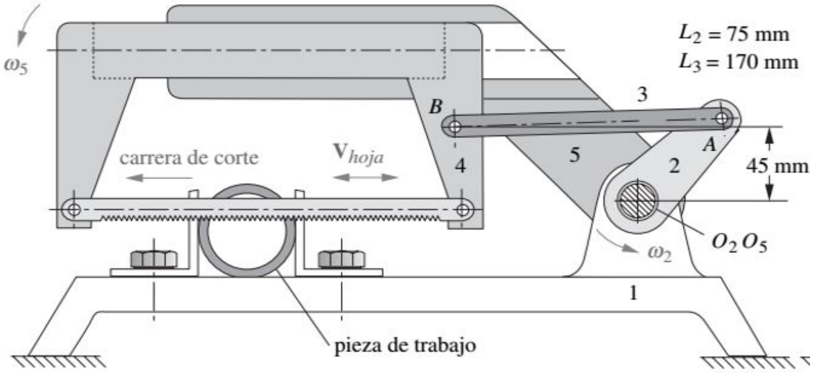
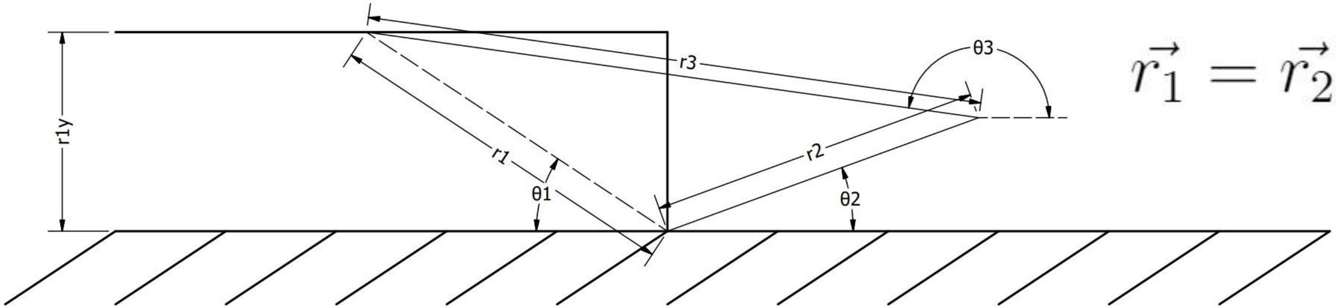


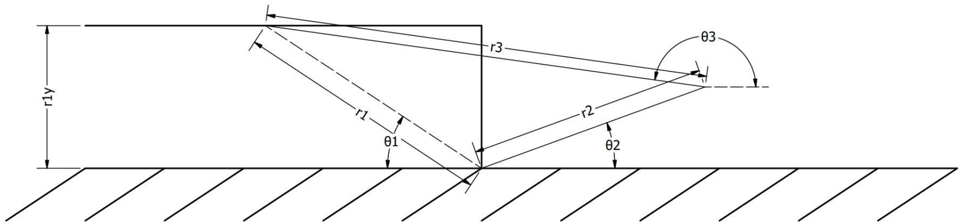
Diagrama general del problema



$$\vec{r_1} = \vec{r_2} + \vec{r_3}$$

- $\vec{r_1}$: Eslabón formado por $\vec{r_2} + \vec{r_3}$.
- V_r: Velocidad lineal de $\vec{r_1}$.
- A_r: Aceleración lineal de $\vec{r_1}$.
- θ_1: Ángulo de $\vec{r_1}$ respecto a la horizontal.
- ω_1: Velocidad angular de θ_1.
- α_1: Aceleración angular de θ_1.
- θ_3: Ángulo de $\vec{r_3}$ respecto a la horizontal.
- ω_3: Velocidad angular de θ_3.
- α_3: Aceleración angular de θ_3.

Ecuaciones de posición



Describir las ecuaciones de ligadura y de componentes en el eje X y el eje Y.

$$\vec{r_1} = \vec{r_2} + \vec{r_3}$$

$$Fx(t) = 0 = -r_1(t)Cos(\theta_1(t)) + r_2Cos(\theta_2(t)) + r_3Cos(\theta_2(t))$$

$$Fy(t) = 0 = r_1Sen(\theta_1(t)) - r_2Sen(\theta_2(t)) - r_3Sen(\theta_2(t))$$

$$Fc(t) = 0 = r_1(t)Sen(\theta_1(t)) - r_{1y}$$

Ecuaciones de velocidad

Realizar el proceso de derivación de las ecuaciones de posición.

$$\frac{\partial Fx(t)}{\partial t} = 0 = \omega_1 \, r_1 \sin(\theta_1) - V_r \cos(\theta_1) - \omega_2 \, r_2 \sin(\theta_2) - \omega_3 \, r_3 \sin(\theta_3)$$

$$\frac{\partial Fy(t)}{\partial t} = 0 = V_r \sin(\theta_1) + \omega_1 \, r_1 \cos(\theta_1) - \omega_2 \, r_2 \cos(\theta_2) - \omega_3 \, r_3 \cos(\theta_3)$$

$$\frac{\partial Fc(t)}{\partial t} = 0 = V_r \sin(\theta_1) + \omega_1 \, r_1 \cos(\theta_1)$$

Ecuaciones de aceleración

Realizar el proceso de derivación de las ecuaciones de velocidad.

$$\frac{\partial^2 Fx(t)}{\partial t^2} = 0 = r_1 \cos(\theta_1)\, {\omega_1}^2 + 2\, V_r \sin(\theta_1)\, \omega_1 - r_2 \cos(\theta_2)\, {\omega_2}^2 - r_3 \cos(\theta_3)\, {\omega_3}^2$$
$$- a_r \cos(\theta_1) + \alpha_1\, r_1 \sin(\theta_1) - \alpha_2\, r_2 \sin(\theta_2) - \alpha_3\, r_3 \sin(\theta_3)$$

$$\frac{\partial^2 Fy(t)}{\partial t^2} = 0 = -r_1 \sin(\theta_1)\, {\omega_1}^2 + 2\, V_r \cos(\theta_1)\, \omega_1 + r_2 \sin(\theta_2)\, {\omega_2}^2 + r_3 \sin(\theta_3)\, {\omega_3}^2$$
$$+ a_r \sin(\theta_1) + \alpha_1\, r_1 \cos(\theta_1) - \alpha_2\, r_2 \cos(\theta_2) - \alpha_3\, r_3 \cos(\theta_3)$$

$$\frac{\partial^2 Fc(t)}{\partial t^2} = 0 = -r_1 \sin(\theta_1)\, \omega_1^2 + 2\, V_r \cos(\theta_1)\, \omega_1 + a_r \sin(\theta_1) + \alpha_1\, r_1 \cos(\theta_1)$$

Método de Newton Raphson

Condiciones iniciales del motor en reposo: $\theta_2 = 0,\ \omega_2 = 0$ y $\alpha_2 = 0$

Cota de error: $\varepsilon < 10^{-6}$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \\ \theta_3 \\ v_1 \\ \omega_1 \\ \omega_3 \\ a_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ -0{,}5 \\ 3 \\ -0{,}5 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m \\ rad \\ rad \\ m\ s^{-1} \\ rad\ s^{-1} \\ rad\ s^{-1} \\ m\ s^{-2} \\ rad\ s^{-2} \\ rad\ s^{-2} \end{bmatrix}$$

$$x_{n+1} = x_n - J_F(x_n)^{-1}\, F(x_n)$$

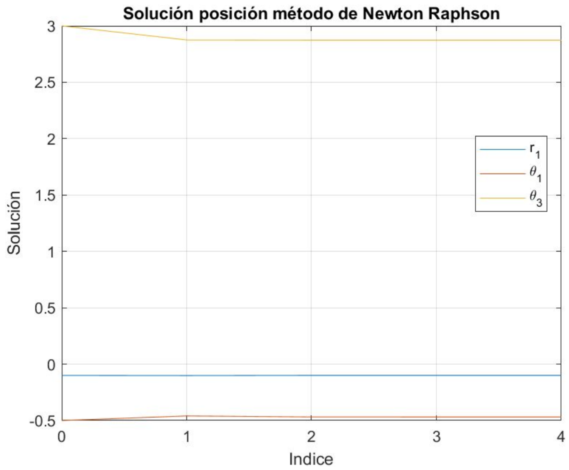
$$J_F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

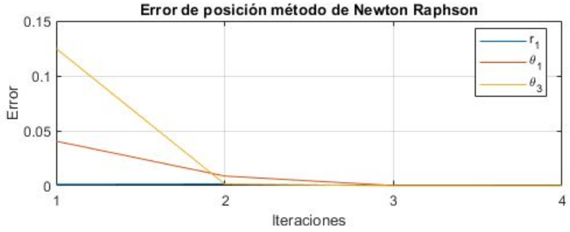
Newton Raphson consecutivo: Posición

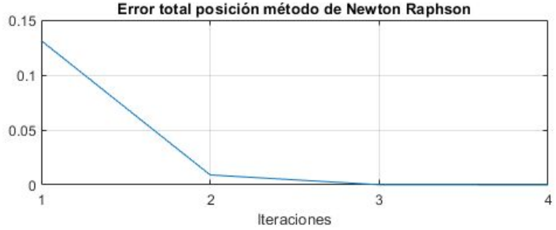
$$F(x_n) = \begin{pmatrix} Fx(t) \\ Fy(t) \\ Fc(t) \end{pmatrix}$$

$$J_{pos} = \begin{pmatrix} \sin(\theta_1) & r_1 \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & r_{1y}\left(\cot(\theta_1)^2 + 1\right) & -r_3 \sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & -r_3 \cos(\theta_3) \end{pmatrix}$$

$$x_n = \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ -0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m \\ rad \\ rad \end{bmatrix}$$







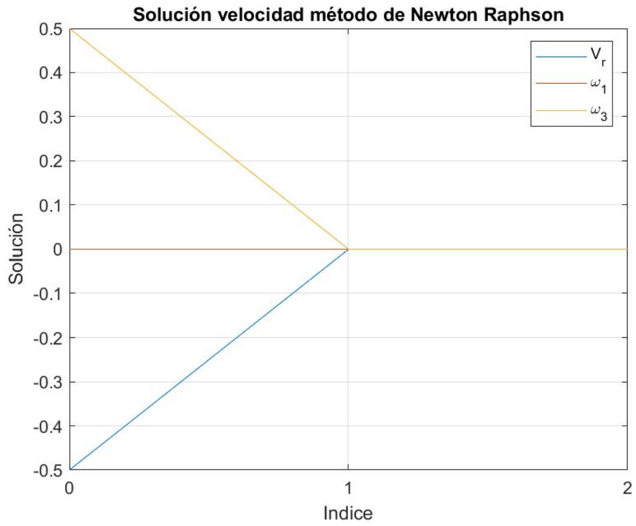
$r_1 = -0{,}099672\ m$ $\qquad \theta_1 = -0{,}468422\ rad$ $\qquad \theta_3 = 2{,}873694\ rad$

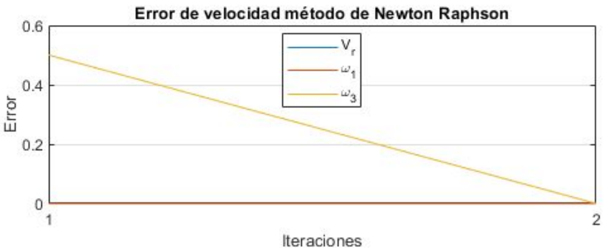
Newton Raphson consecutivo: Velocidad

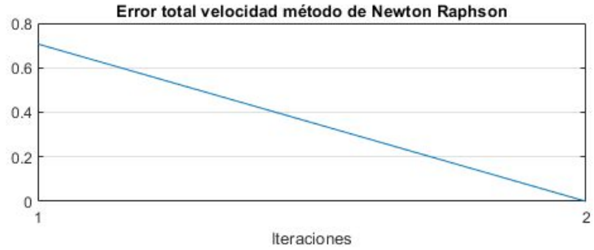
$$F(x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Fx(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial Fy(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial Fc(t)}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$$J_{vel} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1) & r_1 \sin(\theta_1) & -r_3 \sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_1) & r_1 \cos(\theta_1) & -r_3 \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_1) & r_1 \cos(\theta_1) & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_n = \begin{pmatrix} v_r \\ \omega_1 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m\ s^{-1} \\ rad\ s^{-1} \\ rad\ s^{-1} \end{bmatrix}$$







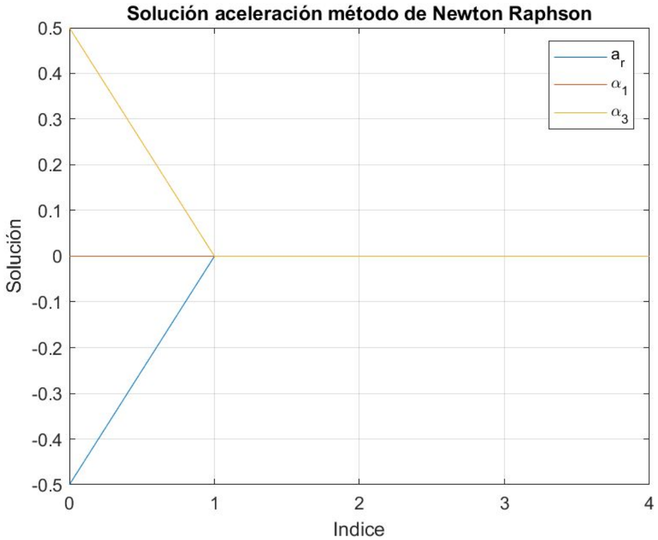
$$V_r = 0\ m\ s^{-1} \qquad \omega_1 = 0\ rad\ s^{-1} \qquad \omega_3 = 0\ rad\ s^{-1}$$

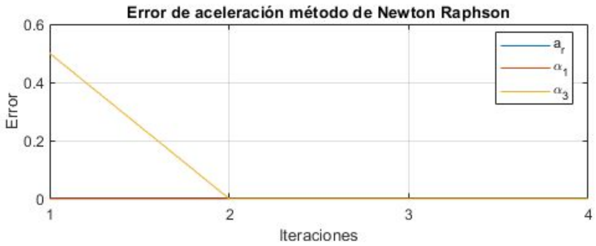
Newton Raphson consecutivo: Aceleración

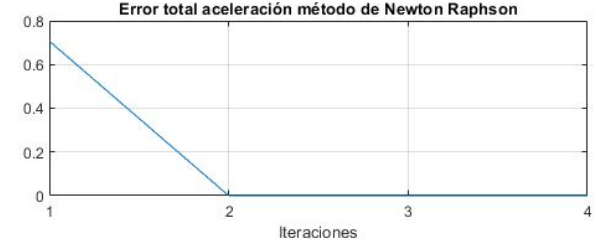
$$F(x_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 Fx(t)}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 Fy(t)}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 Fc(t)}{\partial t^2} \end{pmatrix}$$

$$J_{ac} = \begin{pmatrix} \sin(\theta_1) & r_1 \cos(\theta_1) & 0 \\ -\cos(\theta_1) & r_1 \sin(\theta_1) & -r_3 \sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_1) & r_1 \cos(\theta_1) & -r_3 \cos(\theta_3) \end{pmatrix}$$

$$x_n = \begin{pmatrix} a_r \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m\ s^{-2} \\ rad\ s^{-2} \\ rad\ s^{-2} \end{bmatrix}$$





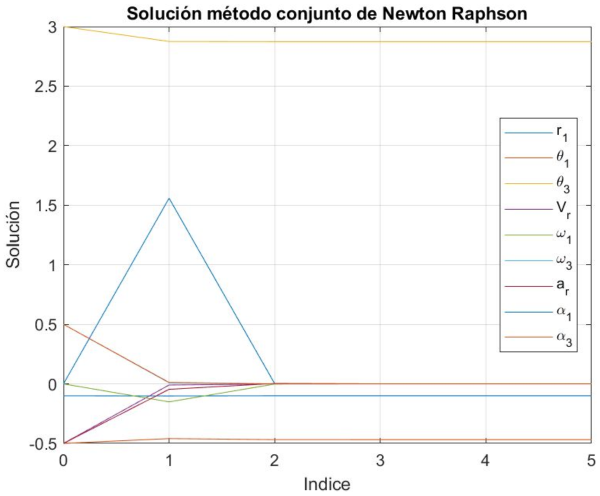


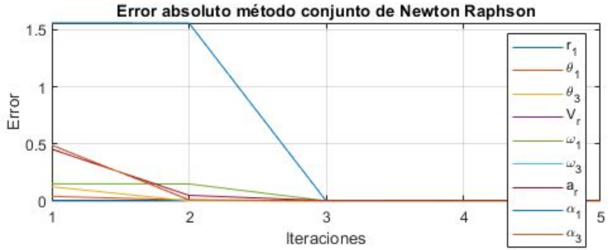
$A_r = 0\ m\ s^{-2}$ $\qquad \alpha_1 = 0\ rad\ s^{-2}$ $\qquad \alpha_3 = 0\ rad\ s^{-2}$

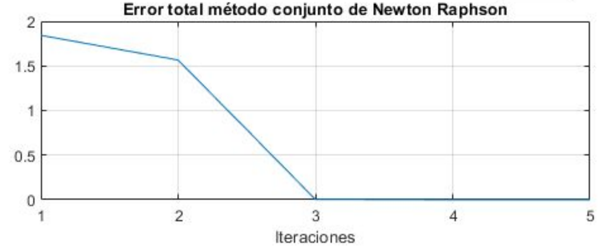
Newton Raphson simultáneo

$$F(x_n) = \begin{pmatrix} Fx(t) \\ Fy(t) \\ Fc(t) \\ \frac{\partial Fx(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial Fy(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial Fc(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 Fx(t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 Fy(t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 Fc(t)}{\partial t^2} \end{pmatrix}$$

$$x_n = \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \\ \theta_3 \\ v_r \\ \omega_1 \\ \omega_3 \\ a_r \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ -0{,}5 \\ 3 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m \\ rad \\ rad \\ m\,s^{-1} \\ rad\,s^{-1} \\ rad\,s^{-1} \\ m\,s^{-2} \\ rad\,s^{-2} \\ rad\,s^{-2} \end{bmatrix}$$







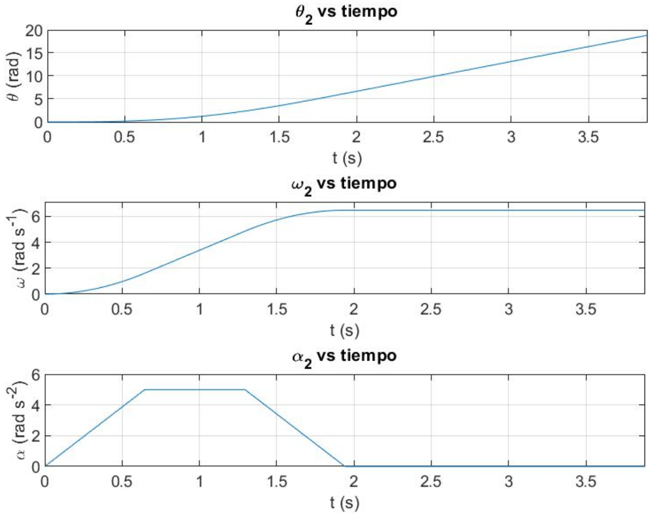
$$r_1 = -0{,}099672\ m \qquad \theta_1 = -0{,}468422\ rad \qquad \theta_3 = 2{,}873694\ rad$$

$$V_r = 0\ m\,s^{-1} \qquad \omega_1 = 0\ rad\,s^{-1} \qquad \omega_3 = 0\ rad\,s^{-1}$$

$$A_r = 0\ m\,s^{-2} \qquad \alpha_1 = 0\ rad\,s^{-2} \qquad \alpha_3 = 0\ rad\,s^{-2}$$

Solución del problema

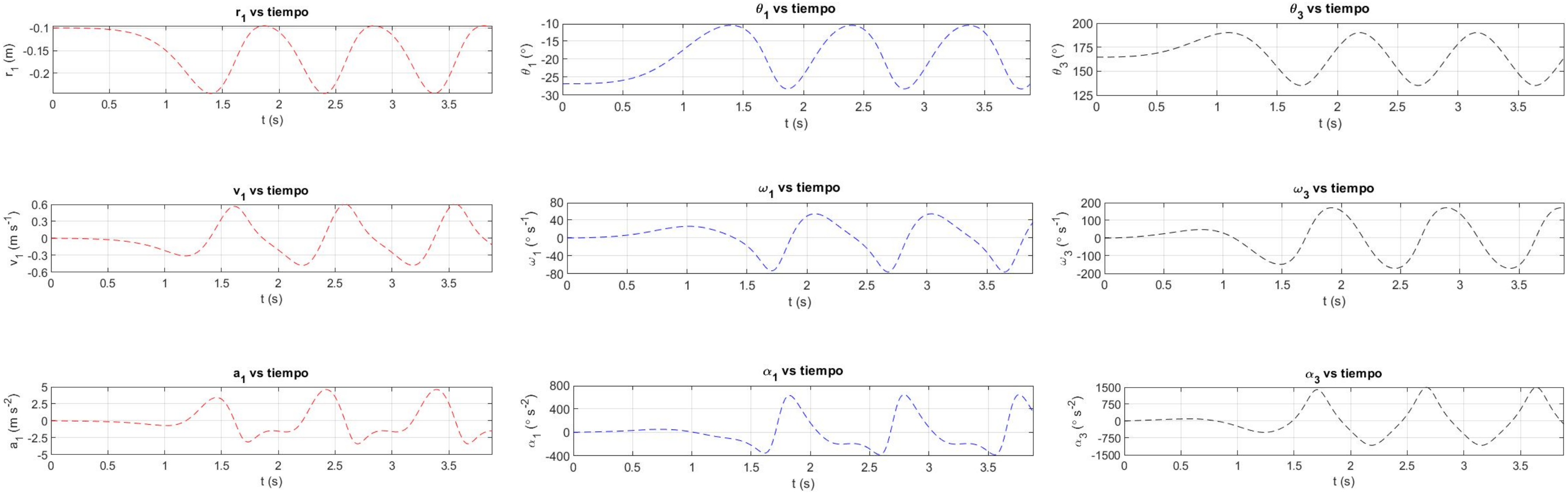
- Tiempo de primera revolución: 1.883 s
- Aceleración máxima: 5 rad s^-2
- Velocidad final constante: 61 rpm



- Se solucionan 1000 puntos en total.
- La semilla del punto (i+1) es el resultado del punto i.
- Se resuelve para ambas versiones del Newton Raphson.

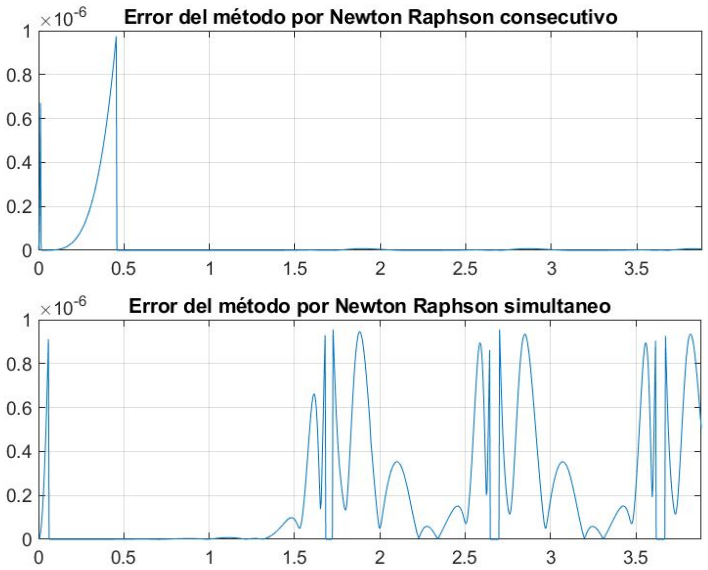
$$x_n = \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \\ \theta_3 \\ v_1 \\ \omega_1 \\ \omega_3 \\ a_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}0997 \\ -0{,}4684 \\ 2{,}8737 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m \\ rad \\ rad \\ m\ s^{-1} \\ rad\ s^{-1} \\ rad\ s^{-1} \\ m\ s^{-2} \\ rad\ s^{-2} \\ rad\ s^{-2} \end{bmatrix}$$

Resultados método de NR simultáneo

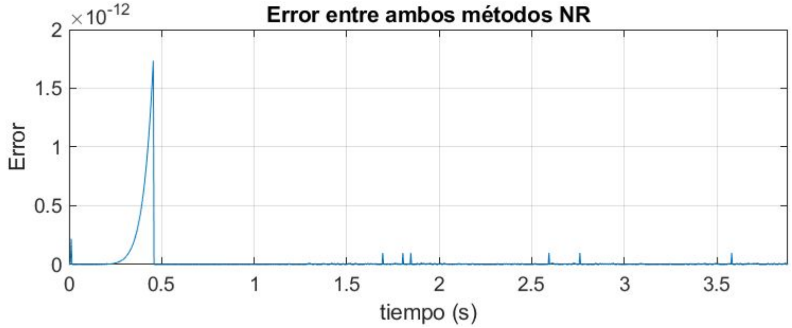


Comparación métodos NR

Cota de error

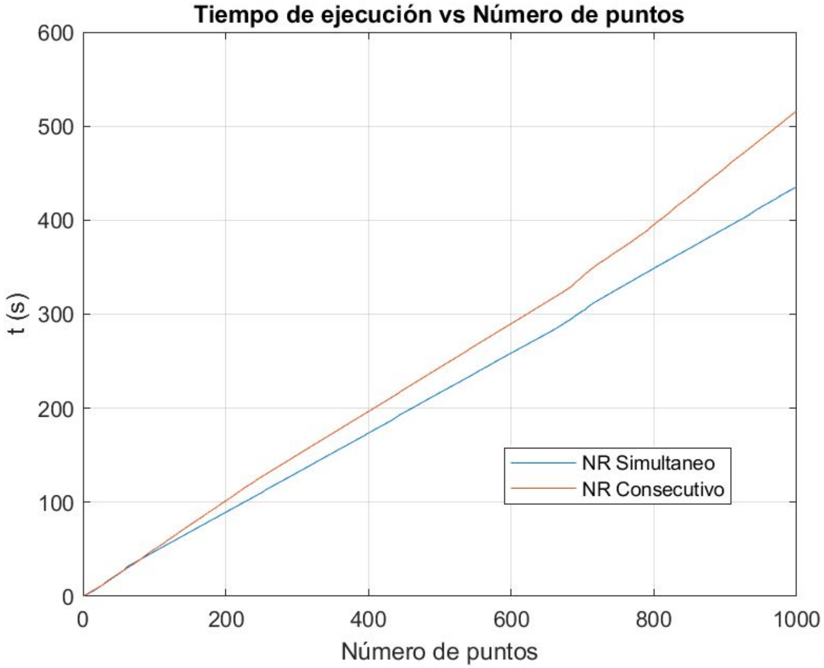


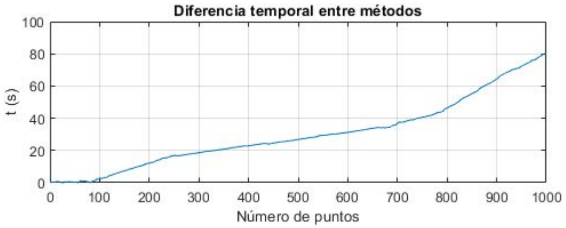
Error absoluto entre métodos



Ambos métodos cumplen con la cota de error establecida, y el error absoluto entre ellos es casi nulo.

Comparación métodos NR





El método de NR simultáneo es más rápido que su contraparte, donde se obtienen resultados aproximadamente iguales.

Solución analítica

Posición

$$\theta_3 = \pi - \operatorname{asin}\left(\frac{r_{1y} - r_2 \sin(\theta_2)}{r_3}\right)$$

$$\theta_1 = \operatorname{acot}\left(\frac{r_2 \cos(\theta_2) + r_3 \cos(\theta_3)}{r_{1y}}\right)$$

$$r_1 = -\frac{\omega_2\, r_2 \cos(\theta_2)}{r_3 \cos(\theta_3)}$$

Velocidad

$$\omega_3 = \operatorname{acot}\left(\frac{r_2 \cos(\theta_2) + r_3 \cos(\theta_3)}{r_{1y}}\right)$$

$$\omega_1 = -\frac{V_r \tan(\theta_1)}{r_1}$$

$$V_r = -\cos(\theta_1)\ (\omega_2\, r_2 \sin(\theta_2) + \omega_3\, r_3 \sin(\theta_3))$$

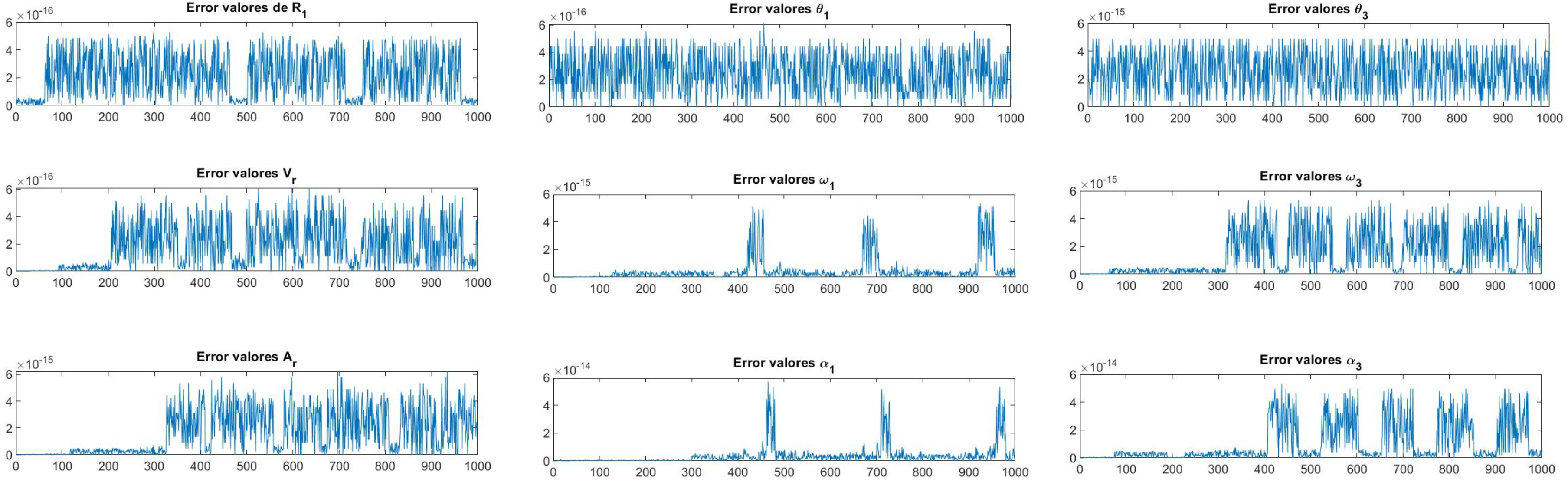
Aceleración

$$\alpha_3 = \frac{r_2 \sin(\theta_2)\ {\omega_2}^2 + r_3 \sin(\theta_3)\ {\omega_3}^2 - \alpha_2\, r_2 \cos(\theta_2)}{r_3 \cos(\theta_3)}$$

$$\alpha_1 = {\omega_1}^2 \tan(\theta_1) - \frac{2\, V_r\, \omega_1 + a_r \tan(\theta_1)}{r_1}$$

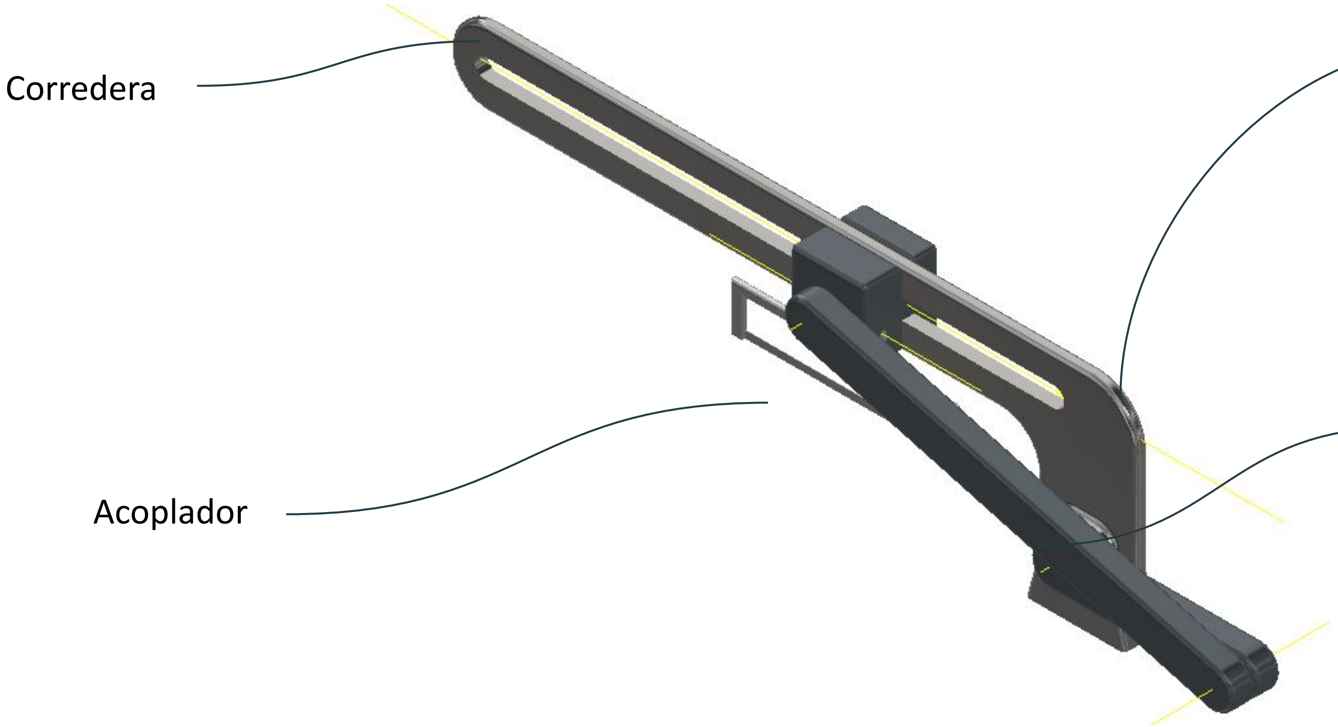
$$A_r = r_1\, {\omega_1}^2 - r_2 \cos(\theta_1)\ \cos(\theta_2)\ {\omega_2}^2 - r_3 \cos(\theta_1)\ \cos(\theta_3)\ {\omega_3}^2 \\ - \alpha_2\, r_2 \cos(\theta_1)\ \sin(\theta_2) - \alpha_3\, r_3 \cos(\theta_1)\ \sin(\theta_3)$$

Error absoluto solución NR

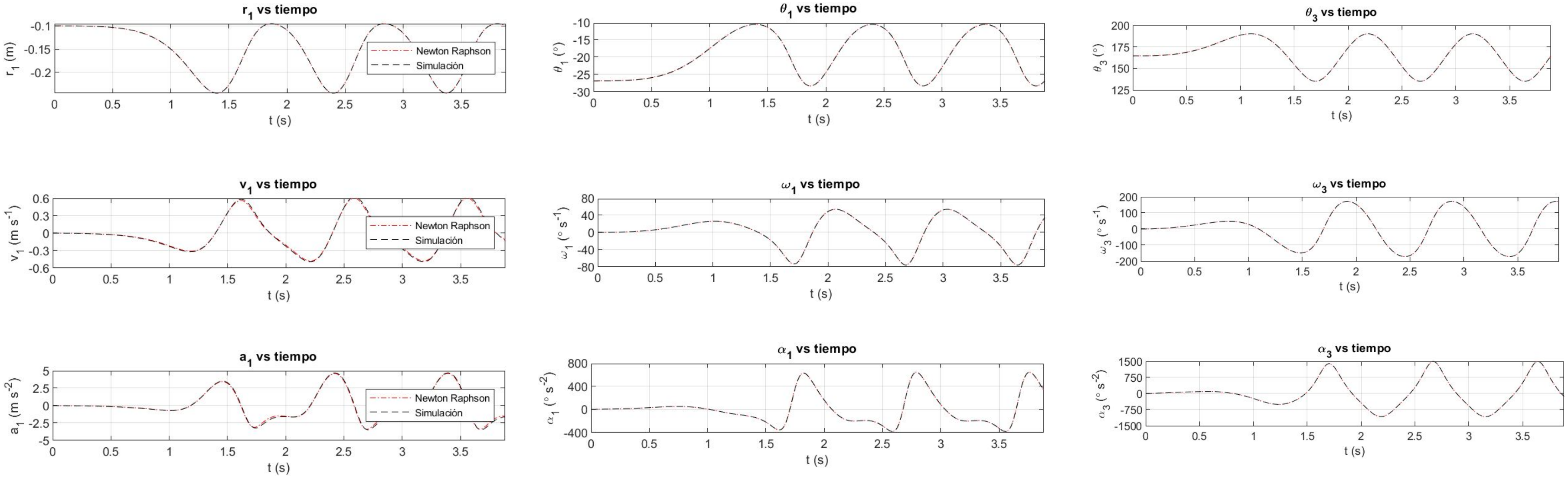


Todos los errores son menores a 10^{-13}

Simulación en Inventor



Resultados vs Simulación



Conclusiones

- Se obtienen los mismos resultados resolviendo el mecanismo de manera simultánea y consecutiva. Además, de forma simultánea se soluciona más eficientemente.
- Solucionar el mecanismo por el método genera un error absoluto con la solución exacta siempre menor a 10^{-13}, por lo que se tiene una alta exactitud.
- Los resultados de simulación corresponden con los resultados del método, estableciendo la veracidad del mismo.

Referencias

I. Myzka,H,David.(2012).Máquinas y Mecanismos.4.Ed.

II. Chapra, S. C., & Canale, R. P. Numerical methods for engineers. McGraw-Hill Higher Education, Boston, 2006

III. Mathews, J.H. & Fink, K.D. Métodos numéricos con Matlab. Prentice Hall, Madrid, 2000