Ejercicios SS

Universidad Nacional de Colombia

Técnicas de control

2023

Andrés Holguin restrepo

Exercise 1 (Transfer functions. Definitions and derivations)

In this exercise we will derive some basic equations that may come in handy later on. We will also remember what the transfer function is and how it is defined.

a) Given an LTI system in state space form (Equations 1 - 2), derive the equations of the transfer function of the system using the Laplace transform.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$
$$y = Cx + Du \tag{2}$$

Hint: You should remember that when deriving transfer function of the system, all initial conditions are set to zero. Remember that the formula for the Laplace transform derivative is: $\mathcal{L}\{\frac{d}{dt}f(t)\} = sF(s) - f(0)$

Escribiendo las ecuaciones en el dominio de Laplace, donde se tiene en cuenta condiciones iniciales f(0)=0:

$$\mathrm{sX}(s) - f(0) = \mathrm{AX}(s) + \mathrm{BU}(s)$$
$$\mathrm{sX}(s) = \mathrm{AX}(s) + \mathrm{BU}(s)$$

$$Y(s) = \mathrm{CX}(s) + \mathrm{DU}(s)$$

Ahora se multiplica la segunda ecuación por $U(s)^{-1}$ para poder obtener la relación Y(s)/U(s) y de este modo la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \mathrm{CX}(s)U(s)^{-1} + D$$

Despejando X(s) de la primera ecuación:

$$X(s) = (\mathrm{sI} - A)^{-1}\mathrm{BU}(s)$$

Remplazando $X(s)$ en el resultado anterior:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(\mathrm{sI} - A)^{-1}B + D$$

De este modo se obtiene la función de transferencia.

b) Using your newly derived formula from the previous task, find the transfer functions $g_{x_1} = \frac{x_1(s)}{F(s)}$ and $g_{x_2} = \frac{x_2(s)}{F(s)}$ for the two mass spring-damper system from the exercise 4. Are they similar? Why? (*Use MATLAB.*) Again, the system equations were:

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F \tag{3}$$
$$m_1\ddot{x}_1 = k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 \tag{4}$$

Se reescriben estas dos ecuaciones en un modelo de variables de estado, teniendo en cuenta que:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \theta_2 &= \dot{\theta}_1 \\ \theta_4 &= \dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

De este modo, se tiene que:

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1+k_2}{m_1} & -\dfrac{c_1+c_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & \dfrac{c_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{c_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{c_2}{m_2} \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{m_2} \end{bmatrix} F$$

Para el caso: $g_{x1}(s)$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\theta$$

Para el caso: $g_{x2}(s)$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\theta$$

De este modo se determinan las funciones de transferencia:

```
syms k_1 k_2 c_1 c_2 s m_1 m_2 s F
A=[0 1 0 0; -(k_1+k_2)/m_1 -(c_1+c_2)/m_1 k_2/m_1 c_2/m_1;0 0 0 1; k_2/m_2 c_2/m_2 -k_2/m_2 -c_
B=[0 0 0 1/m_2].';C_x1=[1 0 0 0];C_x2=[0 0 1 0];D=0;
G_x1=simplify(collect(C_x1*(s*eye(4)-A)^-1*B+D,s))
```

G_x1 =

$$\frac{c_2\, s + k_2}{(m_1\, m_2)\, s^4 + (c_1\, m_2 + c_2\, m_1 + c_2\, m_2)\, s^3 + (c_1\, c_2 + k_1\, m_2 + k_2\, m_1 + k_2\, m_2)\, s^2 + (c_1\, k_2 + c_2\, k_1)\, s + k_1\, k_2}$$

```
G_x2=simplify(collect(C_x2*(s*eye(4)-A)^-1*B+D,s))
```

G_x2 =

$$\frac{m_1\, s^2 + (c_1 + c_2)\, s + k_1 + k_2}{(m_1\, m_2)\, s^4 + (c_1\, m_2 + c_2\, m_1 + c_2\, m_2)\, s^3 + (c_1\, c_2 + k_1\, m_2 + k_2\, m_1 + k_2\, m_2)\, s^2 + (c_1\, k_2 + c_2\, k_1)\, s + k_1\, k_2}$$

Analizando los dos resultados, se determina que ambos tienen el mismo polinomio característico debido a que parten del mismo sistema, sin embargo el numerador cambia entre las dos funciones de transferencia teniendo en cuenta la salida de cada una de estas.

c) Consider the system given by the equation $\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 10y(t) = \dot{u}(t) + 10u(t)$. Derive the transfer function $g(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$ of this system.

Realizando la transformada de laplace asumiendo condiciones iniciales nulas:

$$s^2Y(s) + 5\mathrm{s}\mathrm{Y}(s) + 10Y(s) = \mathrm{s}\mathrm{U}(s) + 10U(s)$$

Resolviendo para Y(s)/U(s):

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+10}{s^2+5s+10}$$

3

Exercise 3 (Basic controller design)

Consider a linear time-invariant system given by:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

where $\omega \in [1, 2]$ is a constant parameter. Define $\mathbf{A}(\omega) = \begin{bmatrix} \omega & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

a) For which values of ω is the system controllable? For which values of ω is it observable?

```
clear
syms omega;
A=[omega 1; 0 0];B=[0;1];C=[1 0];
```

Primero se calcula la matriz de controlabilidad:

$$C_M = [B\ \mathrm{AB}]$$

```
CM=[B A*B]
```

```
CM =
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
det(CM)
```

ans = -1

```
rank(CM)
```

ans = 2

Como se evidencia, el determinante es -1 y el rango siempre es 2 independientemente de ω, por lo que el sistema es controlable para cualquier valor ω.

Ahora se calcula la matriz de observabilidad:

```
OM=[C;C*A]
```

OM =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}$$

```
det(OM)
```

ans = 1

```
rank(OM)
```

ans = 2

Como se evidencia, el determinante es 1 y asi mismo el rango siempre es 2, independientemente de ω, por lo que el sistema es observable para cualquier valor ω.

b) Assume that ω is known. Design a gain matrix $\mathbf{K}(\omega) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ such that the closed-loop system under the feedback control law $u(t) = \mathbf{K}(\omega)\mathbf{x}(t)$ has eigenvalues equal to -1. *The gain matrix is allowed to depend on* ω.

Los eigenvalores de lazo cerrado del sistema se pueden determinar mediante las raices de la ecuación característica: det(sI − (A − BK)) = 0

```
syms s k_1 k_2
K=[k_1,k_2]
```

K = $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$

```
collect(det(s*eye(2) -(A - B*K))==0,s)
```

ans = $s^2 + (k_2 - \omega)\, s + k_1 - k_2\, \omega = 0$

de este modo, para obtener valores de eigenvalores -1, se soluciona para:

$$s^2 + (k_2 - \omega)\, s + k_1 - k_2\, \omega = (s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1 = 0$$

De este modo, agrupando valores, se tiene que:

$$2 = k_2 - \omega$$
$$1 = k_1 - k_2\omega$$

Solucionando:

$$k_2 = 2 + \omega$$
$$k_1 = 1 + 2\omega + \omega^2$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 + 2\omega + \omega^2 \\ 2 + \omega \end{bmatrix}$$

c) Design a gain matrix $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ such that the real part of eigenvalues of the closed-loop system under the feedback control law $u(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ is less than or equal to -1 for every $\omega \in [1, 2]$ (As shown above the term K_2 in the vector $\mathbf{K}$ is assumed to be equal to -4). Derive a condition on K_1 for the above setting. *The gain matrix* ***is not*** *allowed to depend on* ω.

(no está terminado el desarrollo)

Para $\omega = 2$

```
omega=2;
A=[omega 1; 0 0];B=[0;1];C=[1 0];
syms k_1
K=[k_1,-4]
```

K = $\begin{pmatrix} k_1 & -4 \end{pmatrix}$

```
Eig2=solve(collect(det(s*eye(2) -(A - B*K)),s)==0)
```

Eig2 =

$$\begin{pmatrix} 3 - \sqrt{1 - k_1} \\ \sqrt{1 - k_1} + 3 \end{pmatrix}$$

```
solve(Eig2(1)==-1,k_1)
```

ans = -15

```
solve(Eig2(2)==-1)
```

```
ans =

Empty sym: 0-by-1
```

Para $\omega = 1$

```
omega=1;
A=[omega 1; 0 0];B=[0;1];C=[1 0];
Eig1=solve(collect(det(s*eye(2) -(A - B*K)),s)==0)
```

Eig1 =

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{9-4\,k_1}}{2} \\ \frac{\sqrt{9-4\,k_1}}{2} + \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

```
solve(Eig1(1)==-1)
```

ans = -10

```
solve(Eig1(2)<=-1)
```

```
ans =

Empty sym: 0-by-1
```

Se establece entonces un valor $K_1 = -15$. Este permite que uno de los eigenvalores siempre tenga valor real menor o igual a 1 para el rango $\omega \in [1, 2]$

```
K=[-15,-4];
```

Para $\omega = 2$

```
omega=2;A=[omega 1; 0 0];
Eig2=double(solve(collect(det(s*eye(2) -(A - B*K)),s)==0))
```

```
Eig2 = 2×1
    -1
     7
```

Para $\omega = 1$

```
omega=1;A=[omega 1; 0 0];
Eig1=double(solve(collect(det(s*eye(2) -(A - B*K)),s)==0))
```

```
Eig1 = 2×1
   -1.6533
    6.6533
```