Measurement and Control

Seminario de Robótica

Jorge Sofrony

Universidad Nacional de Colombia

Julio de 2009

1. Introduccion
2. Control Independiente de Eslabones
3. Control Multivariable y Dinámica Inversa
4. Ejemplo

Control de Robots

- Control de robots: Determinar el historial de entradas en cada eslabón de tal forma que el efector final realice una tarea determinada con el desempe no requerido
- Las entradas pueden ser, entre otros
  - fuerzas
  - voltajes
  - corrientes
  - torques
- Las tareas a realizar pueden estar dadas como una secuencia de posiciones/orientaciones o como un camino continuo

Control de Robots

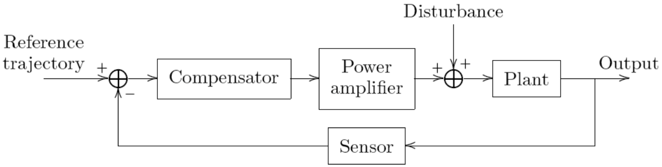
- Las caracteristicas de los distintos tipos de controladores pueden variar dependiendo de
  - Tipo de tarea (punto-a-punto, trayectorias)
  - Arquitectura mecánica (cartesiana, tipo codo)
  - Desempe no (rapidez, precision, rango de operacion)
- Esta seccion se dividira en estrategias de control de una-entrada-una-salida (SISO) y estrategias de control multivariable (MIMO)

Control de Robots

- Comenzaremos por dar una serie de definiciones y notacion estandar utilizada a lo largo de esta seccion
- Se continuara exponiendo las caracteristicas del contrl SISO y control independiente de eslabones
- Continuaremos exponiendo algunas tecnicas multivariables de control, i.e. control de ganancia variable, SMC y control adaptativo.
- La seccion finalizara con un ejemplo de dise no

Control Independiente de Eslabones

- Consideremos inicialmente el problema de control mas sencillo, i.e. control independiente de eslabones
  - Cada eje es tratado como SISO
  - El acoplamiento entre eslabones es tomado como una perturbación
- La estructura básica de control se muestra a continuación

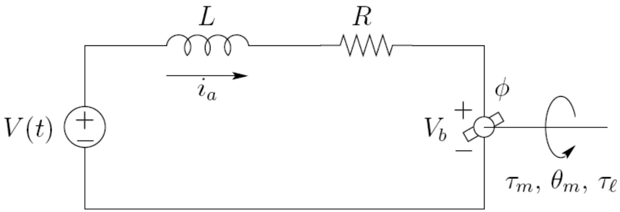


Control Independiente de Eslabones

- El problema de control se puede caracterizar por dos grandes objetivos
  - seguimiento de referencia
  - rechazo perturbaciones
- La idea general es controlar *unicamente* el actuador (neumatico, electromecanico) relacionado con la poscion de una de las articulaciones
- Aunque existen varios tipos de motores (Paso-a-Paso, AC, sin escobillas entre otros), unicamente estudiaremos el control de servomotores D.C.

Control Independiente de Eslabones

- A continuacion se muestra una figura con el esquema electromecanico de un motor D.C. de iman permanente en el estator



Control Independiente de Eslabones

- De esta forma se pueden plantear las ecuaciones (electrica y mecanica) de l asiguiente manera

$$\begin{aligned} V &= R_a i_a + \frac{d(i_a)}{dt} L_a + V_b \\ \tau_m &= J_m \ddot{\theta} + B\dot{\theta} + \tau_l \end{aligned}$$

donde V es el voltaje de alimentacion al motor, V_b es el voltaje contra-electromotriz, J_m es la inercia del rotor del motor, B es el coeficiente de friccion viscosa del motor y τ_l es el un toruqe (variable) de caraga externo.

Control Independiente de Eslabones

- El modelo dinamico del sistema esta dado por

$$\frac{\theta_m}{v} = \frac{K_m}{s\left[(LS + R)(J_m S + B_m) + K_b K_m\right]}$$

  donde se hace uso de la ecuaciones de transduccion
  - $\tau_m = K_m i_a$
  - $V_b = K_b \dot{\theta}$
- Las constantes K_m y K_b son intresecas al motor
- Si estas estan dadas en unidades SI, tenemos $K_m = K_b$

Control Independiente de Eslabones

- Podemos suponer en general que la constate electrica es mucho mas rapida que la mecanica, por lo que podemos despreciar el efecto de la inductancia L
- De esta manera podemos reducir el modelo dinamico a una expresino de la forma

$$\frac{\theta_m}{v} \approx \frac{K_m/R}{s\left[J_m s + (B_m + K_b K_m/R)\right]} = \frac{K_r}{s\left[J_r s + B_r\right]}$$

- Este modelo reducido facilita el analisis de estabilidad y vuelve el proceso de diseño un poco mas intuitivo

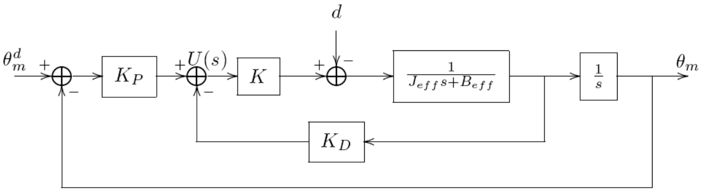
Control Independiente de Eslabones

- Seguimiento de “Punto Fijo”: Se asume que la referencia es constante (set-point tracking), por lo que para un manipuladopr de *n*-articulaciones se tiene que $r_i = (q_i^d, \dot{q}_i^d), \quad i = [1, 2, \dots, n]$, donde q_i^d es un valor constante, y $\dot{q}_i^d = 0$
- El problema de seguimiento de referencia constante es comun para aplicacciones de seguimiento punto-a-punto o CN
- Este esquema de control es utilizada en aplicaciones con bajos timepos de respeusta y grandes relaciones de reduccion

Control de Referencia Fija

- Comenzaremos con un compensador **PD** donde la se nal de control corresponde a

$$u(t) = K_p(\theta^d - \theta) - K_d\dot{\theta}$$



Control de Referencia Fija

- Defina $\Omega_1(s) = J_r s^2 + (B_r + K_r K_d)s + K_r K_p$ tal que

$$E(s) = \frac{J_r s^2 + (B_r + K_r K_d)s\theta_d}{\Omega_1(s)} + \frac{1}{\Omega_1(s)} D(s)$$

- Por el teorema del valor final

$$e_{ss} = lim_{s \to 0} sE(s) = \frac{D}{K_r K_p}$$

- Como la magnitud del torque de carga es inversamente proporcional a la reducción utilizada, el error puede hacerse cercano a cero con grandes reducciones y un K_p grande.

Control de Referencia Fija

- Para el sistema resultante de segundo orden tenemos que los polos del sistema estan determinados por

$$s^2 + \frac{B + K_r K_d}{J_r} s + \frac{K_r K_p}{J_r} = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

- De esta manera podemos dise nar de manera intuitiva nestro controlador PD
- Usualmente $\zeta = 1$ (Críticamente amortiguado) y la frecuencia natural ω_n se escoge relativamente alta para una buena velocidad de respuesta.

Control de Referencia Fija

- Ejemplo: Para un sistema descrito por

$$G = \frac{1}{s(s+1)} \quad , \quad \zeta = 1$$

tenemos $K_p = \frac{\omega_n J_r}{K_r}$, $K_d = \frac{2\omega_n \zeta J_r - B_r}{K_r}$. La siguinete tabla muestra los parametros para distintos valores de ω_n

ω_n	K_p	K_d
4	16	7
8	64	15
12	144	23

IMAGEN DE SIMULACION

Control de Referencia Fija

- Como vimos anteriormente, el controlador PD exhibe error de estado estable debido a perturbaciones
- Podemos hacer este error cero si utilizamos un controlador **PID**, i.e. agergamos un integrador en el lazo directo tal que

$$u(s) = (K_p + \frac{K_i}{s})(\theta^d - \theta) - K_d s\theta$$

Control de Referencia Fija

- Esta nueva ley de control porduce un sistema en lazo cerrado de la forma

$$\theta(s) = K_r \frac{K_d s^2 K_p s + K_i}{\Omega_2(s)} \theta^d(s) - \frac{s}{\Omega_2(s)} D(s)$$

donde $\Omega_2(s) = J_r s^3 + (B_r + K_r K_d)s^2 + K_r K_p s + K_r K_i$

- Aplicando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz concluimos que para guarantizar estabilidad

$$K_i < \frac{(B_r + K_r K_d)K_p}{J_r}$$

- Es fácil darse cuenta que $e_{ss} = 0$

Control de Referencia Fija

- Es difícil escoger K_p, K_d, K_i, pero se puede dividir en:
  - K_d: Tipo de respuesta
  - K_i: $e_{ss} = 0$
- Restricciones:Tenemos varios fenomenos pueden restringir el desempeño del controlador.
  - Saturación de voltaje de alimentación, de torque, de corriente
  - Flexibilidad en los acoples, lo cual limita el ancho de banda del sistema de control

Control de Referencia Fija

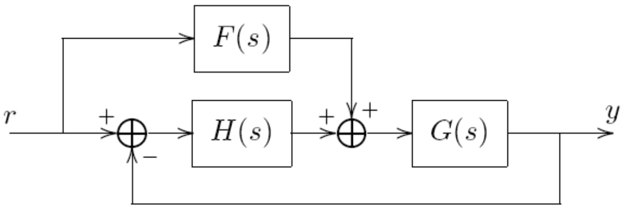
- Ejemplo: MOTOR SATURACION !!!!!!

Control de Lazo Directo

- El control realimentado PD/PID asume que la referencia es estática, i.e. $\dot{q}^d = 0$
- Esto no se puede asumir como cierto en el caso de tareas se seguimientos de trayectorias, donde $\dot{q}^d \neq 0$
- Adicionalmente, el metodo de control con lazo directo (feed-forward) puede reducir el efecto de perutrbaciones variantes en el tiempo
- Durante este desarrollo asumiremos que la referencia es una señal arbitraria pero acotada

Control de Lazo Directo

- Considere el esquema de la figura



donde θ_d es una señal arbitraria, $G(s)$ es la planta (estrictamente propia) y $H(s)$ es el controlador (propio)

Control de Lazo Directo

- $F(s)$ es el filtro de lazo directo, el cual se superpone a la señal de control $u(s)$
- Puede ser fácilmente verificado que para una perturbacion $D(s)$

$$E(s) = \frac{qd}{pd + qc} D(s)$$

donde

$$G = \frac{q}{p}, \quad H = \frac{c}{d}, \quad F = \frac{a}{b}$$

- De aqui obtenemos el sistema en lazo cerrado

$$T = \frac{q\,[cb + ad]}{b\,[pd + qc]}$$

Control de Lazo Directo

- Para garantizar estabilidad estabilidad, necesitamos que $b \in \mathbb{R}H^{\infty}$ y $[pd + qc] \in \mathbb{R}H^{\infty}$
- Si escogemos $F(s) = \frac{1}{G(s)}$, i.e. $a = p$ y $b = q$, $T(s) = \mathbf{I}$ y por lo tanto el error de estado estable será cero.
- Es impotante anotar que podemos escoger $F = \frac{1}{G(s)}$ solo si G es de fase mínima y estrictamente propio

Control de Lazo Directo

- Asuma que $G = \frac{K_r}{J_r s^2 + B_r s}$ y $H = K_p + K_d s$, donde podemos escoger nuestro filtro de lazo directo como $F = J_r s^2 + B_r s$
- Cabe anotar que $F(s)$ no es propia, por lo cual la derivada directa de la entrada no es viable
- Sin embargo, podemos asumir que $(\dot{q}^d, \ddot{q}^d)$ son pre-calculados
- Es fácil darse cuenta que el error de estado estable ante la presencia de perturbaciones tipo escalón está dado por la ecuación $-D/K_p$

Control de Lazo Directo

- Para este esquema de control

$$V = \frac{J_r}{K_r}\ddot{\theta}^d + \frac{B_r}{K_r}\dot{\theta}^d + K_d\dot{e} + K_p e$$

- Pdemos expresar el sistema en terminos del erro de la siguinte manera

$$J_r\ddot{e} + (B_r + K_r K_d)\dot{e} + K_r K_p e = d$$

- Podemos concluir que el error tiende a cero si no hay perturbaciones, i.e. $d(t) = 0$

Diseño en Espacio de Estados

- Los contradores PD/PID pueden ser adecuados para aplicaciones donde la flexibilidad de los eslabones es despreciable y la saturación es leve
- Para aplicaciones con problemas mas serios, puede ser util un metodo de dise no mas flexible, i.e. realimentacion de estados
- El sistema de motor D.C. puede ser expresado en variables de estado de la forma

$$x_1 = \theta_l \qquad x_2 = \dot{\theta}_l$$
$$x_3 = \theta_m \qquad x_4 = \dot{\theta}_m$$

donde θ_l es el ángulo de la carga y θ_m es el ángulo del motor

Diseño en Espacio de Estados

- Las ecuaciones diferenciales que describen el sistema están dadas por:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{K}{J_l}x_1 - \frac{B_l}{J_l}x_2 + \frac{K}{J_l}x_3 \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= -\frac{K}{J_m}x_1 - \frac{B_l}{J_m}x_4 - \frac{K}{J_m}x_3 + \frac{1}{J_m}u
\end{aligned}
$$

Diseño en Espacio de Estados

- Describiendo el sistema en forma estándar

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

tenemos que las matrices constantes están dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{J_l} & -\frac{B_l}{J_l} & \frac{K}{J_l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{J_m} & 0 & -\frac{K}{J_m} & \frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_m} \end{bmatrix}$$

- Definiendo la salida como

$$y = Cx$$

podemos escoger como señal medible, cualquier estado
- Por ejemplo, si medimos θ_l, tenemos que $c = [1, 0, 0, 0]$

Diseño en Espacio de Estados

- La función de transferencia se puede hallar de la siguiente manera:

$$G(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$$

- La ley de control de realimentacion de estados es

$$u = -\sum_{i=1}^{n} k_i x_i + k_f r = -Ku + k_f r$$

- Reemplazndo en nuestra representacion de estado, tenemos

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bk_f r$$

- Bajo la suposicion de controlabilidad, los polos de $(A - BK)$ pueden ser ubicados arbitraraimente

Diseño en Espacio de Estados

- Existen varios algoritmos de ubicacion de polos que permiten un dise no agil e intuitivo
- A continuacion se presentara la tecnica d dise no LQR (Regulador Lineal Cuadratico), donde nuestro objetivo no es el de ubicar polos, sino minimizar una cierta funcion de interes, por ejmplo

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u dt$$

donde las matrices $Q \geq 0$ and $R > 0$ son parametros de dise no; J se denomina la funcion de costo y tambien es positiva.

Diseño en Espacio de Estados

- Utilizando el segundo metodo de Lyapunoy para un candidato cuadratico de la forma $V(x) = x^T Px$, podemos minimizas nuestra funcion de costo guarantizando desempe no y estabilidad
- De esta manera obtenemos

$$u = -Kx = -R^{-1}B^T Px$$

donde la matriz $P = P^T > 0$ se obtiene de la solucion de la ecuacion de Riccati

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Diseño en Espacio de Estados

- Observe que podemos dividir nuestros objetivos en dos
  1. Gurantizar que $\dot{V} < 0$ paratodo x
  2. Minimizar la funcion de costo $\mathcal{J}$ para alguna señal señal de control u
- Si se gurantiza que $\dot{V}_a(x) < 0$, donde $V_a(x) = V(x) + J$, podemos observar que
  1. $\dot{V}(x) < 0$, guarantizando estabilidad
  2. $min_{x,u=-Kx} \int_0^\infty x^T Qx + u^T Rudt \leq x^T(0)Px(0)$, guarantizando desempe no

Diseño en Espacio de Estados

- El mayor inconveniente es que la ley de control es funcion de todos los estados del sistema, lo que muchas veces es altamente costoso o fisicamente imposible
- Por tal motivo se recurre a los *Observadores de Estado*, de los cuales el mas conocido es el *Filtro de Kallman*
- El problema de observacion de estados se considera como el problema dual al de realimentacion de estado.

Control Multivariable y Dinámica Inversa

- Ahora consideraremos técnicas de control más avanzadas de control robusto.
- Por lo general, estas técnicas son técnicas LTI y por lo tanto no son directamente aplicables
- El esquema de control de dinámica inversa nos ayuda en este respecto, ya que es un caso especial de linealización por retroalimentación (feedback linearization)

Control Multivariable y Dinámica Inversa

- Comenzaremos por definir el control por par calculado (o dinamica inversa), haciendo una separacion entre tareas en el espacio articular/trabajo
- Continuaremos definiendo la incertidumbre de linealización
- El problema de incertidumbre paramétrica será resuelto mediante técnicas de control robusto, donde se utilizaran tecnicas de ganacia variable, control adaptativo y SMC

Dinámica Inversa: Espacio Articular

- Considere el sistema dinámico que define un robot *n*-articulado de la siguiente manera

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})q + g(q) = u$$

- El objetivo es encontrar una señal de control (posiblemente no lineal)

$$u = h(q,\dot{q},t)$$

  tal que el sistema resultante sea lineal
- En general esta no es una tarea simple, sin embargo en nuestro caso las cosas son bastante sencillas

Dinámica Inversa: Espacio Articular

- Por inspección, es fácil darse cuenta que

$$u = M(q)a_q + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} = a_q$$

  donde a_q es una señal de control por definir
- El sistema ahora tiene las dinamicas de n doble integradores desacoplados
- El resultado del control de dinámica inversa es de utilidad ya que podemos asumir que la "nueva" planta es LTI

Dinámica Inversa: Espacio Articular

- La se nal de a_q puede provenir de alguna ley de control, posiblemente lineal
- Una forma de escoger esta se nal de control es

$$a_q = \ddot{q}^d - K_p\tilde{q} - K_d\dot{\tilde{q}}$$

donde $\tilde{q} = q - q^d$, $\dot{\tilde{q}} = \dot{q} - \dot{q}^d$ y K_p, K_d son matrices diagonales

- Note que la señal de referencia debe contener, adicionalmente, las aceleracion de la se nal de referencia, i.e. $r = [q^d, \dot{q}^d, \ddot{q}^d]$
- El controlador es de tipo PD con la adicion del componente de aceleración en el lazo directo

Dinámica Inversa: Espacio Articular

- Utilizando la definicion de a_q, podemos expresar el sistema en las nuevas coordenadas de error, $\tilde{q}$, tal que

$$\ddot{\tilde{q}} + K_d\dot{\tilde{q}} + K_d\tilde{q} = 0$$

- K_p, K_d se pueden escoger dependiendo segun las consideraciones existentes para sistemas de segundo orden.
- Note que el nuevo sistema en lazo cerrado es una colección de n sistemas desacoplados de segundo orden

$$\ddot{\tilde{q}}_k + K_{dk}\dot{\tilde{q}} + K_{pk}\tilde{q}_k = \ddot{\tilde{q}}_k + 2\zeta_k\dot{\tilde{q}}_k + \omega_{n_k}^2\tilde{q}_k$$

Dinámica Inversa: Espacio Articular

- La filosofia detras del control por par calculado es la de realizar una transformacino de entrada de tipo torque, a una entrada de tipo aceleración
- Si asumimoa que la entrada al sistemas es aceleración, tenemos

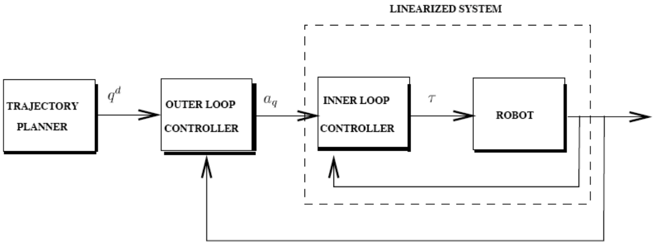
$$\ddot{q} = a_q$$

el torque necesario para producir esta aceleración es

$$\begin{aligned} a_q &= M(q)\left[u - C(q,\dot{q})\dot{q} - g(q)\right] \\ u &= M^{-1}(q)a_q + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) \end{aligned}$$

Dinámica Inversa: Espacio Articular

- La implementación requiere cálculos en tiempo real
- En consecuencia, el equipo de computo debe pensarse para soportar estos cálculos
- La arquitectura de control propuesta contempla un doble lazo de control como se muestra en la figura



Dinámica Inversa: Espacio de Trabajo

- Asuma que tenemos el vector $X \in \mathbb{R}^6$ el cual representa la posición y orientacion de un sistema segun una representacion minima en $\mathcal{SO}(3)$
- Utilizando el Jacobiano podemos encontrar la siguiente relacion

$$\dot{x} = J(q)\dot{q} \;\Rightarrow\; \ddot{x} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q}$$

- Observe que si escogemos a_q como

$$a_q = J^{-1}(q)\left[a_x - \dot{J}(q)\dot{q}\right]$$

el sistema resultante en el espacio de trabajo esta dado por

$$\ddot{x} = a_x$$

Dinámica Inversa: Espacio de Trabajo

- Al igual que en el caso del par calculado para el contrl en el espacio articular, podemos escoger

$$a_x = x^d - K_p(\tilde{x}) - K_d\dot{\tilde{x}}$$

donde $\tilde{x} = (x - x^d)$, $\dot{\tilde{x}} = (\dot{x} - \dot{x}^d)$

- Las dinamicas del error de seguimiento esta dado por

$$\ddot{\tilde{x}} + K_d\dot{\tilde{x}} + K_p\tilde{x} = 0$$

- Ahora podemos especificar trayectorias directamente en el espacio de trabajo sin cambiar el lazo interno de control
- Sin embargo note que ahora debemos calcular el Jacobiano y su derivada para construir la señal de control a_q

Dinámica Inversa: Espacio de Trabajo

- Si el sistema tiene 6 G.d.L. (i.e. eslabones), $J(q)$ es una matrix cuadrada y por lo tanto el Jacobiano tiene inversa
- Para sistemas con un numero de eslabones $n \neq 6$, el Jacobiano ya no es una matriz cuadrada y por lo tanto debemos usar la pseudo-inversa
- Es importnte que observar que el control en el espacio de trabajo solo puede ser implementado si el Jacobiano es no singular para todas las configuraciones necesarias.

Control PD: Analisis Multivariable

- Para el caso de control independiente de eslabones, se asumio que el control SISO tipo PD/PID de cada actuador estabilizaba el sistema no lineal.
- En esta seccion se probara que en efecto, el esuqema de control desacoplado propuesto anteriormente, estabiliza el sistema acoplado no lineal.
- Inicialmente se asumira que no hay terminos gravitacionales, lo cual implica que el origen es asintoticamente estable, i.e. el error de seguimiento tiende a cero
- Se porcedera a incluir los efectos gravitacionales y analizra la estabilidad y desempe no (en ete caso e_{ss}) del sistema en lazo cerrado

Control PD: Analisis Multivariable

- Considere un manipulador *n*-articulado y la ley de control $u = K_p\tilde{q} - K_d\dot{q}$
- Para facilitar el analisis de estabilidad, escogeremos una funcion candidata de Lyapunov de la forma

$$V = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\tilde{q}K_p\tilde{q}$$

- Es sencillo observar que la funcion propuesta es positiva defnida y radialmente desbordada. Resta probar que su deriva con respecto al timepo es negtiva definida

Control PD: Analisis Multivariable

- Asumiendo $g(q) = 0$

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= \ddot{q}^T M(q)\dot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q} - \dot{q}K_p\tilde{q} \\
&= (u - C(q,\dot{q})\dot{q})^T\dot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q} - \dot{q}^T K_p\tilde{q} \\
&= (-K_d\dot{q} + K_p\tilde{q})^T\dot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T(\dot{M}(q) - 2C(q,\dot{q}))\dot{q} - \dot{q}^T K_p\tilde{q} \\
&= -\dot{q}^T K_d\dot{q}
\end{aligned}
$$

- Podemos observar que $\dot{V} = -\dot{q}K_d\dot{q} \leq 0$, lo que signfica que no podemos concluir estabilidad debido a que $\dot{V} = 0$ para $\dot{q} = 0$ y $q \neq 0$

Control PD: Analisis Multivariable

- Utilizando el Principio de Invarianza de LaSalle, podemos concluir que el conjunto invariante mas grande se da cuando $\dot{q}^* = 0$ y $\ddot{q}^* = 0$ tal que

$$\ddot{q}^* = M^{-1}(q^*)[u^* - C(q^*, \dot{q}^*)\dot{q}^*] = 0$$

- De esta ecuacion podemos conluir que

$$u^* = K_p\tilde{q} - K_d\dot{q}^* = 0$$

y por lo tanto $\tilde{q} = 0$

- En otras palabra, el conjunto invariante mas grande es el origen; el origen es asintoticamente estable

Control PD: Analisis Multivariable

- Si ahora asumimos que $g(q) \neq 0$, realizando un procedimiento parecido al anterior, podemos concluir que el sistema es estable
- El termino gravitacional impone nuevas restricciones sobre el desempe no del sistema donde el error de estado estable no sera nulo

Control PD: Analisis Multivariable

- Asumiendo que el sistema es estable, sabemos que en estado estable $\dot{q}_{ss} = 0$ y por lo tanto

$$K_p \tilde{q}_{ss} = g(q_{ss})$$

- Este termino se denomina el torque de retencion, el cual debe contrarrestar los efectos de la gravedad
- Observe que este error se puede reducir con altas ganancias K_p o introduciendo un integrador en el controlador

Control Robusto: Ganancia Variable

- Uno de los mayores inconvenientes del control con Dinamica Inversa es que los parámetros no son conocidos exactamente, por ejemplo un manipulador que transporta masas variables
- Si este es el caso, la linealizacion no es exacta y el sistema presentará error estacionario e incluso inestabilidad en algunos casos
- El control robusto, en general, se encarga de diseñar controladores tal que el desempeño del sistema se garantice aún ante la presencia de incertidumbre paramétrica, de dinámicas no modeladas y de se nal

Control Robusto: Ganancia Variable

- Considere el sistema *nominal* descrito por el siguiente modelo
$$\hat{M}(q)\ddot{q} + \hat{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \hat{g}(q) = u$$
- Sin embargo la presencia de incertidumbres hace que el sistema *real* este descrito por
$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = u$$
- El controlador de Dinamica Inversa esta dado por
$$u = \hat{M}(q)a_q + \hat{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \hat{g}(q)$$
- Reemplazando obtenemos el siste
$$\ddot{q} = M^{-1}(q)\left[\hat{M}(q)a_q + (\hat{C}(q,\dot{q}) - C(q,\dot{q}))\dot{q} + (\hat{g}(q) - g(q))\right]$$

Control Robusto: Ganancia Variable

- Definiendo $\tilde{(\cdot)} = \hat{(\cdot)} - (\cdot)$, podemos reescribir la ecuación anterior como

$$
\begin{aligned}
\ddot{q} &= M^{-1}(q)\left[(\tilde{M}(q) + M(q))a_q + \tilde{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \tilde{g}(q)\right] \\
&= a_q + M^{-1}(q)(\tilde{M}(q)a_q + \tilde{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \tilde{g})
\end{aligned}
$$

- De esta forma se puede expresar el sistema incierto como

$$\ddot{q} = a_q + \eta(q, \dot{q}, a_q)$$

- Observe que el sistema puede ser interpretado como un sistema lineal (el ya conocido doble integrdaor) con incertidumbre representado por

$$\eta = Ea_q + M^{-1}(\tilde{C}\dot{q} + \tilde{g}) \;\; y \;\; E = (M^{-1}\hat{M} - \mathbf{I})$$

Control Robusto: Ganancia Variable

- El sistema resultante es no lineal (en virtud de la incertidumbre)
- Adicionalmnte, el sistema es acoplado por lo que no hay garantía de que un controlador PD/PID estabilice el sistema
- Una de las tecnicas mas comunes para mejorar el desemp no y la robustes de este tipo de controladores es utilizar ganacias variable
- A continuacion expondremos una metodologia que permite encontrar esta ganancia variable baja la suposicion de cierta cota en la incertidumbre

Control Robusto: Ganancia Variable

- Considere una señal de control a_q de la forma

$$a_q = \ddot{q}^d - K_p\tilde{q} - K_d\dot{\tilde{q}} + \delta_a$$

donde δ_a es una señal de control utilizada para lidiar con las incertidumbres

- En términos del error de seguimiento $(e = [(q - d^q)^T \ \ (\dot{q} - \dot{q}^d)^T]^T)$, el sistema en lazo cerrado es

$$\dot{e} = Ae + B\delta_a + B\eta$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Control Robusto: Ganancia Variable

- La idea detras del metodo expuesto es acotar la incertidumbre mediante una funcion escalar tal que

$$\|\eta\| < \rho(e, t)$$

- El termino δ_a es dise nado para contrarrestar los efecetos nocivos de la incertidumbre, guarantizando estabilidad con acotamineto terminal

Control Robusto: Ganancia Variable

- Reemplaza a_q en η, obtenemos

$$\eta = E\delta_a + E\left[\ddot{q}^d - K_p\tilde{q} - K_p\dot{\tilde{q}}\right] + M^{-1}\left[\tilde{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \tilde{g}(q)\right]$$

- Observe que

$$\|E\| = \left\|M^{-1}\hat{M} - \mathbf{I}\right\| \leq \mathbf{I}$$

- Asumiendo que $\underline{M} < \left\|M^{-1}\right\| < \overline{M}$ y tomando $\hat{M}$ como el promedio (i.e. $1/2(\underline{M} + \overline{M})$),

$$\left\|M^{-1}\hat{M} - \mathbf{I}\right\|^2 \leq \frac{\overline{M} - \underline{M}}{\overline{M} + \underline{M}} < 1$$

Control Robusto: Ganancia Variable

- De forma general, podemos asumir que existe una cota para η de la forma

$$\|\eta\| \leq \alpha \|\delta_a\| + \gamma_1 \|e\| + \gamma_2 \|e\|^2 + \gamma_3$$

donde $\alpha = \|E\|$ y las constantes γ_1, γ_2, y γ_3 son no negativas

- Suponiendo que $\|\delta_a\| \leq \rho(e, t)$ (esto lo debemos corroborar después) tenemos

$$\|\eta\| \leq \alpha\rho(e, t) + \gamma_1 \|e\| + \gamma_2 \|e\|^2 + \gamma_3 := \rho(e, t)$$

Control Robusto: Ganancia Variable

- Despejando $\rho(e,t)$ y observando que $\alpha = \|E\| < 1$, tenemos

$$\rho(e,t) = \frac{1}{1-\alpha)}\left[\gamma_1 \|e\| + \gamma_2 \|e\|^2 + \gamma^3\right]$$

- Ahora defina δ_a como

$$\delta_a = \begin{cases} -\rho\frac{B^T Pe}{\|B^T Pe\|} & \|B^T Pe\| \neq 0 \\ 0 & \|B^T Pe\| = 0 \end{cases}$$

- Nos resta probar estabilidad del sistema

Control Robusto: Ganancia Variable

- Escoja un candidato de ecuación de Lyapunov de la forma

$$V = e^T \rho e \geq 0$$

donde su derivada esta dado por

$$\dot{V} = \dot{e}^T Pe + e^T P\dot{e} = e^T(A^T P + PA)e + 2e^T PB(\delta_a + \eta)$$

- Asumiendo que $A \in \mathbb{R}H^\infty$, sabemos que existe una matrix $Q \geq 0$ tal que

$$A^T P + PA = -Q$$

- Por tal motivo debemos preocuparnos por el término $2e^T PB(\delta_a + \eta)$

Control Robusto: Ganancia Variable

- Definiendo $\omega = B^T Pe$ podemos reescribir el termino d einteres como

$$2e^T PB(\delta_a + \eta) = \omega^T(-\rho \frac{\omega}{\|\omega\|} + \eta)$$

- Se puede observar que existen dos casos
  - $\underline{\omega = 0}$: Para este caso, este término se desvanece y tenemos

$$\dot{V} \leq -e^T Qe \leq 0$$

  - $\underline{\omega \neq 0}$: Utilizando la desigualdad de Cuachy-Schwartz y notando que $\|\eta\| \leq \rho(e, t)$, tenemos que

$$\omega^T(-\rho \frac{\omega}{\|\omega\|} + \eta) \leq -\rho \|\omega\| + \|\eta\| \|\omega\| \leq 0$$

    y por lo tanto

$$\dot{V} \leq -e^T Qe \leq$$

Control Robusto: Ganancia Variable

- Otra forma de obtener una descripcion para δ_a es expandiendo la función de $V(e)$ donde

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e^T(A^TP + PA)e + 2e^TPB\delta_a + 2e^TPB\eta \\ &< e^T(A^TP + PA)e + 2e^TPB\delta_a + 2\left\|B^TPe\right\|\|\eta\| \\ &< e^T(A^TP + PA)e + 2e^TPB\delta_a + 2\rho\left\|B^TPe\right\|\end{aligned}$$

- Observe que, para el caso donde $B^TPe \neq 0$, si escogemos

$$\delta_a = -\rho\frac{B^TPe}{\left\|B^TPe\right\|}$$

se guarantiza que

$$\dot{V} \leq e^TQe$$

Control Robusto: Ganancia Variable

- Observen que la señal de control no está definida en el subespacio
$$\mathcal{E} = \left\{ e \in \mathbb{R}^n ; B^T P e = 0 \right\}$$
- Una de las mayores desventajas de usar señales de control discontinuas es el efecto de “chattering” o sobreactuación
- Una forma de darle solución a este problema es definir soluciones de forma general o soluciones de Filipov
- Defina la se nal de control adiconal
$$\delta_a = \begin{cases} -\rho \frac{B^T P e}{\left\| B^T P e \right\|} & \left\| B P^T e \right\| > \epsilon \\ -\frac{\rho}{\epsilon} B^T P e & \left\| B^T P e \right\| \leq \epsilon \end{cases}$$

Control Robusto: Ganancia Variable

- La señal de control ahora es continua, evitando problemas de sobreactuación
- Sin embargo, para el analisis de estabilidad debemos considerar tres casos: $\|B^T Pe\| = 0$, $\|B^T Pe\| > \epsilon$ y $\|B^T Pe\| \leq \epsilon$
- El analisis de los dos primeros casos es identico al expuesto anterior
- Nos resta probar estabilidad en la tercera región $\|B^T Pe\| \leq \epsilon$

Control Robusto: Ganancia Variable

- Consideren nuevamente la función candidata de Lyapunov $V = e^T P e$, y su derivada

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e^T(A^T P + PA)e + 2e^T PB(\delta_a + \eta) \\ &\leq e^T(A^T P + PA)e + 2e^T PB(\delta_a + \rho\frac{B^T Pe}{\left\|B^T Pe\right\|})\end{aligned}$$

- Para $\left\|B^T Pe\right\| \leq \epsilon$, tenemos que $\delta_a = -\frac{\rho}{\epsilon}B^T Pe$ y

$$2e^T PB(\delta_a + \rho\frac{B^T Pe}{\left\|B^T Pe\right\|}) = -2\frac{\rho}{\epsilon}\left\|B^T Pe\right\|^2 + 2\rho\left\|B^T Pe\right\|$$

Control Robusto: Ganancia Variable

- Esta expresión tiene un maximo (con respecto a $\|B^T Pe\|$) en $\|B^T Pe\| = \frac{\epsilon}{2}$, tal que

$$\dot{V} < e^T(A^T P + PA)e + \rho\frac{\epsilon}{2}$$

- Podemos concluir que par logar que $\dot{V} < 0$

$$e^T Qe > \epsilon\frac{\rho}{2}$$

- Observando que

$$\underline{\lambda}(Q)\|e\|^2 \leq e^T Qe \leq \overline{\lambda}(Q)\|e\|^2$$

obtenemos

$$\|e\| > \left(\frac{\epsilon\rho}{2\underline{\lambda}(Q)}\right)^{1/2} := \delta$$

Control Robusto: Ganancia Variable

- Noten que el error de estado estable está limitado por δ, la cual es función de ϵ y ρ
- Considere que S_δ es el conjunto de nivel (level set) más pequeño dentro del cual esta contenida una bola $B(\delta)$
- Podemos concluir que el sistema en lazo cerrado es terminalmente acotado con respecto a $B(\delta)$ FIGURA !!!

Control Robusto: Modo Deslizante (SMC)

- El control deslizante es una técnica de control no lineal, y no requiere de linealizacion del sistema
- La mayor ventaja de esta tecnica de control es su insensibilidad a incertidumbres
- La principal desventaja es que depende de la función $sgn(\cdot)$, la cual es discontinua alrededor de cero

Control Robusto: Modo Deslizante (SMC)

- Considere el sistema no lineal de segundo orden descrito por
$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = h(x) + f(x)u$$
- Ahora asuma que existe una superficie tal que $S(x) = 0$ tal que si $x \in S(x)$, x se deslizará al punto de equilibrio
- Considere la superficie
$$S = ax_1 + x_2$$
y observe que si $x \in \mathbb{R}$
$$x_2 = ax_1 \quad \dot{x}_1 = -ax_1$$
- Si se alcanza la superficie $S = 0$, el sistema es estable sin importar $h(x)$ y $f(x)$

Control Robusto: Modo Deslizante (SMC)

- Observe que la variable S cumple la relación

$$\dot{S} = a\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = ax2 + h(x) + f(x)u$$

- Tomando una función candidata de Lyapunov de la forma $V(x) = \frac{1}{2}S^T S$ tenemos

$$\dot{V} = S\dot{S} = S(ax_2 + h(x) + f(x)u)$$

Control Robusto: Modo Deslizante (SMC)

- Si asumimos que existe un $\rho(x)$ tal que

$$\left|\frac{ax_2 + h(x)}{f(x)}\right| \leq \rho(x)$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{V} &= S(ax_2 + h(x)) + Sf(x)u \\ &\leq \rho(x)f(x)\left|S\right| + Sf(x)u\end{aligned}$$

Control Robusto: Modo Deslizante (SMC)

- Tomando la señal de control como $u = \beta(x)sgn(S)$ donde

$$sgn(S) = \begin{cases} 1 & s > 0 \\ 0 & s = 0 \\ -1 & s < 0 \end{cases}$$

  obtenems

$$\dot{V} \leq \rho(x)f(x)\left|S\right| - f(x)(\rho(x) + \beta_0)Ssgn(S)$$

- Suponiedo que $\beta(x) \leq \beta_0 + \rho(x)$ y que $f(x) = f_0 + \hat{f}(x)$ donde $f_0 > 0$

$$\dot{V} \leq -f_0\beta_0\left|S\right|$$

  por lo que el sistema es estable

Control Robusto: Modo Deslizante (SMC)

- El problema radica ahora en encontrar una ley de control tal que el sistema alcance (en timepo finito)la superficie $S = 0$ y se mantenga en ella
- Para esto asuma que $W = \sqrt{V} = \|S\|$, tal que satisface la desigualdad

$$D^+ W \leq -f_0 \beta_0$$

- Por el lema de la comparación podemos concluir que $S = 0$ para algún tiempo T, i.e.

$$W(S(t)) \leq W(S(0)) - f_0 \beta_0 t$$
$$\|S(t)\| \leq \|S(0)\| - f_0 \beta_0 t$$

Control Robusto: Modo Deslizante (SMC)

- Por lo tanto el sistema de control consta de dos fases
  1. Fase de alcance: Fase durante la cual el sistema trata de lograr $S = 0$
  2. Fase de deslizamiento: durante la cual las dinámicas del sistema están confinadas a la superficie $S = 0$
- Observe que para el control SMC, no necesitamos conocer las dinámicas exactas de sistemas
- Unicsmente debemos conocer $\rho(x)$ ya que durante el deslizamiento las dinámicas son independientes de $h(x)$ y $f(x)$

Control Robusto: Modo Deslizante (SMC)

- Ejemplo: Considere un péndulo rigido donde su dinámica está dada por

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -glsin(x_1 + \delta_1) - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{ml^2}u$$

y deseamos estabilizar el péndulo alrededor de $\delta_1 = \pi/2$, donde $x_1 = \theta - \delta_1$ y $x_2 = \dot{\theta}$

- Los coeficientes constantes $g, \; l, \; b, \; m$ son la gravedad, la longitud del péndulo, el coeficiente de fricción viscosa y la masa del péndulo respectivamente

Control Robusto: Modo Deslizante (SMC)

- Asumiendo que $|x_1| \leq \pi, \;\; |x_2 + x_1| \leq \pi$, $m \in [0{,}05 \;\; 0{,}5]$, $l \in [1 \;\; 1{,}5]$, $b \in [0 \;\; 0{,}1]$ podemos obtener una cota superior de la forma

$$\begin{aligned} \left|\frac{ax_2 + h(x)}{f(x)}\right| &= \left|l^2(m-k)x_2 - mglcos(x_1)\right| \\ &\leq l^2 \left|mk\right|(2\pi) + mgl \leq 3{,}68 \end{aligned}$$

- Podemos escoger $a = 1$ y $k_c = 4$ para así obtener una señal de control de la forma

$$u = -k_c sgn(x_2 + x_1)$$

Control Robusto: Modo Deslizante (SMC)

- Las gráficas muestran el controlador SM ideal FIGURAS !!!!

Control Robusto: Modo Deslizante (SMC)

- Al incluir un retardo de actuación por medio de incertidumbre de actuadores no modelados (i.e $\frac{1}{(0{,}0S+1)^2}$), podemos observar el fenómeno de sobreactuación FIGURA

Control Robusto: Modo Deslizante (SMC)

- La sobreactuación puede reducirse mediante dos técnicas:
  1. Utilizar una parte continua en el control, tal que $u = u_c + v$
  2. Utilizar la función $sat(\cdot)$ en lugar de la función discontinua $sgn(\cdot)$
- Unicamente presentaremos el primer método, si escogemos

$$u = \left| \frac{ax_2 + \hat{h}(x)}{\hat{f}(x)} \right| + \nu$$

donde $\hat{h}$ y $\hat{f}$ son los valores nominales del sistema; $h(x)$ y $f(x)$ son los valores reales

Control Robusto: Modo Deslizante (SMC)

- Suponga que $\left|\frac{\delta}{h(x)}\right| < \rho(x)$, donde δ es una cota definada sobre la incertidumbre
- La señal ν representa la parte discontinua de tal manera que $\nu = -\beta(x)sgn(S)$
- Debido a que $\rho(x)$ es una cota superior de las perturbaciones de parámetros, esta será por lo general menor a la cota superior de todo el sistema, por lo cual la ganancia $\beta(x)$ será menor que en el caso estándar

Control Robusto: Modo Deslizante (SMC)

- FIGURASS DE ESTOOOO

Control Robusto: Control Adaptativo

- Los metodos de control adaptativo se basna en l propiedad de lienalidad de parametros
- Aunque hoy en dia existen varios metodos de diseño, los primeros resultados se basan en la linealizacion por dinamica inversa
- A diferencia de otras tecnicas de control robusto donde se asume que los parametros nominale son fijos, el contol adaptativo estima estos parametros segun un ley de adaptacion

Control Robusto: Control Adaptativo

- Considere el sistema incierto descrito anteriormente, y un esquema de control por dinamica inversa donde

$$a_q = \ddot{q}^d - K_p\tilde{q} - K_d\dot{\tilde{q}}$$

- Utilizando la propiedad de lienalidad de parametros, se puede probar que

$$\ddot{\tilde{q}} + K_p\tilde{q} + K_d\dot{\tilde{q}} = \hat{M}^{-1}Y(q,\dot{q},\ddot{q})\tilde{\theta}$$

donde $Y(q,\dot{q},\ddot{q})$ es el regresor, y $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$ donde $\hat{\theta}$ es la estimacion del vector de parametros

Control Robusto: Control Adaptativo

- Representando el sistema en variables de estado

$$\dot{e} = Ae + B\Phi\tilde{\theta}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \Phi = \hat{M}^{-1} Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$$

- Igual que antes, asumimos que la matrix A es Hurwitz y por lo tanto

$$A^T P + PA = -Q$$

Control Robusto: Control Adaptativo

- La ley de adaptacion esta dada por

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma^{-1}\Phi^T B^T P e$$

  donde Γ es una matriz definida positiva
- La estabilidad del sistema se guarantiza mediante la convergencia global a cero del error y acotamiento del error de estimacion
- Escoja una funcion candidata de Lyapunov de la forma

$$V = e^T P e + \tilde{\theta}^T \Gamma \tilde{\theta}$$

- Para probar estabilidad debemos probar que la derivada de V con respecto al timepo es negativa definida

Control Robusto: Control Adaptativo

- Despues de algunas reducciones algebraicas, y asumiendo que θ es constante

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + \dot{\tilde{\theta}}^T \Gamma \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^T \Gamma \dot{\tilde{\theta}} \\ &= -e^T Q e + 2\tilde{\theta}^T (\Phi^T B^T P e + \Gamma \dot{\hat{\theta}}) \end{aligned}$$

- Es facil observar que con la ley de adaptacion propuesta

$$\dot{V} = -e^T Q e \leq 0$$

- Sin embargo, al no contener terminos negativos en $\tilde{\theta}$, solo podemos concluir estabilidad con los siguinetes inconvenientes
  - Falta de robustes a perturbaciones externas
  - Flata de convergencia en la estimacino de parametros.

Control Robusto: Control Adaptativo

- Mediante analisis mas detallado, podemos concluir estabilidad asintotica del error de seguimiento y acotamiento del esrror de estimacion
- Note que $\dot{V} \leq 0 \rightarrow V(t) \leq V(0)$
- Adicionalmnete sabemos que V es una funcion que suma una serie de termino nonegativos conteniendo $\tilde{q}$ y $\tilde{\theta}$
- Podemos cocnluir que si V es acotada, $\tilde{q}$ y $\tilde{\theta}$ son acotadas

Control Robusto: Control Adaptativo

- Note que si asumino que $V(0)$ es acotada, e integrando a ambo lados de $\dot{V} \leq -e^T Qe$

$$V(t) - V(0) = -\int_{[} 0]^t e^T(\sigma) Qe(\sigma) d\sigma < \infty$$

- De esta forma el error del sistems es una funcion cuadratica integrable.
- De esta forma, si la velocidad del error es acotada, entonces el error converge a cero (Lema de Barbalat)

Control Robusto: Control Adaptativo

-