

Control Robusto y Técnicas de Diseño \mathcal{H}^∞

Jorge Sofrony

19 de agosto de 2012

Introducción

- Muchas de las técnicas de control desarrolladas en la década de 1950 aun cuentan con una gran acogida en la industria, donde mas del 90 % de los problemas de control se resuelven con técnicas de PID
- Esta preferencia continua a pesar de los desarrollos que se han realizado en cuanto a mecanismos y electrónica los cuales permiten implementar fácilmente técnicas complejas de control
- Retos del diseño de controladores “modernos”:
 - garantizar que el sistema sea *insensible* a perturbaciones e incertidumbre
 - diseñar directamente para sistemas multivariables altamente complejos
 - diseñar para sistemas no lineales
- El control clásico no supe estas necesidades completamente, por lo que es necesario recurrir a técnicas modernas de control

Introducción - Control Clásico

- El control clásico se basa en cerrar lazos de forma sucesiva
 - para sistemas multivariables (MIMO) se escogen pares de entrada/salida (I/O) a controlar
 - posteriormente se utilizan técnicas como el RL, Bode o Nyquist de manera secuencial
- Las principales ventajas de este esquema de control son
 - la posibilidad de utilizar la experiencia como factor para escoger los pares de I/O
 - la trasabilidad del sistema, facilitando la verificación del buen funcionamiento del mismo (esto también aplica para casos de funcionamiento con fallas)
- Los sistemas de control clásico se fundamenta en la teoría *lineal* de señales y sistemas, y por lo tanto su diseño se realiza alrededor de un punto de operación preestablecido (planta linealizada).
- Se puede lograr que el sistema tenga un mayor rango de operación utilizando técnicas de compensación (e.g. Anti-Windup) o de tabulación de ganancia.
- La mayoría de técnicas de diseño clásico son métodos desarrolladas en el dominio de la frecuencia que ofrecen un alto nivel de transparencia e intuición, facilitando el trabajo para ingenieros no expertos

Introducción - Control Robusto

- El control robusto tiene una filosofía de diseño similar a la del control clásico, el cual se fundamenta en el análisis y síntesis utilizando métodos frecuenciales
- Lo novedoso de las técnicas de control robusto es proponer métodos de diseño que permitan la síntesis de controladores *realmente* multivariables, tomando en cuenta la incertidumbre de señal y de modelamiento
- Una de las desventajas de dichas técnicas es la alta complejidad matemática, tanto en diseño como en implementación, lo cual las hace poco atractivas para la industria.
- Hoy en día existen herramientas que facilitan la implementación de controladores robustos en aplicaciones industriales de alta complejidad, aumentando el numero de aplicaciones exitosas documentadas en las ultimas dos décadas

Introducción - Ejemplo

- Considere el sistema Masa-Resorte-Amortiguador (con saturación) que se muestra en la figura

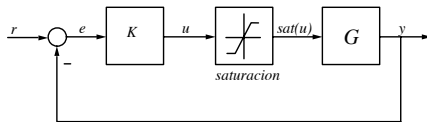


Figura: Sistema Masa Resorte Amortiguador con saturación

- Asuma que el sistema tiene una representación donde las matrices (A, B, C, D) estén dadas por

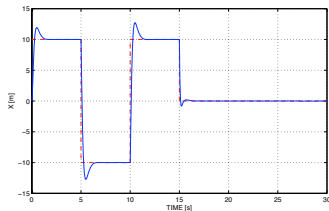
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

- La saturación es un bloque no lineal que se define como

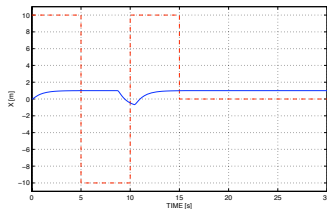
$$sat(u) = \begin{cases} \bar{u} \times sign(u) & |u| > \bar{u} \\ u & |u| \leq \bar{u} \end{cases}$$

Introducción - Ejemplo

- Inicialmente podemos considerar el sistema lineal, es decir, consideramos que el sistema no presenta saturación de su señal de control ($sat(u) = u, \forall u$).
- Considere un controlador PID tal que el sistema en lazo cerrado tenga error de estado estable menor al 10 %, un factor de amortiguamiento mayor a $\zeta > 0,707$ y un tiempo de establecimiento $T_s < 1\text{seg}$



Sistema sin saturación

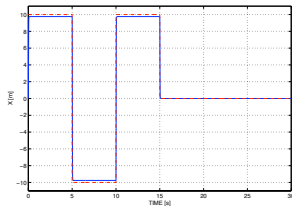


Sistema con Saturación

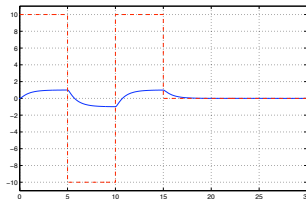
- Sin embargo, si consideramos que la fuerza de actuación está limitada tal que $-\bar{u} \leq u \leq \bar{u}$, donde $\bar{u} = 10$, podemos observar como el sistema pierde su capacidad de seguimiento de la señal de referencia, con grandes retardos de tiempo y *bloqueo* en saturación

Introducción - Ejemplo

- El sistema con saturación de entrada puede ser visto como uno de incertidumbre multiplicativa de entrada, donde podemos diseñar un controlador robusto utilizando la técnica de sensibilidad mixta S/KS



Sistema sin saturación



Sistema con Saturación

- Como se puede observar en las figuras, el sistema se mantiene en fase con respecto a la señal de referencia aun ante la presencia del bloque de saturación
- Podemos observar que el sistema saturado tiene un gran error de estado estable que es físicamente imposible de suprimir puesto nuestra señal de referencia no es viable en amplitud

Fundamentos y Notación - Señales y Sistemas

- Señal: Algunas definiciones y características
 - Algo que transporta algún tipo de **información**
 - Se presentan debido a una repuesta a cierto evento, o son la causa de cierto evento
 - En principio, siempre pueden ser medidas y corresponden, por lo general, a alguna cantidad física
 - Por lo general pueden ser graficadas

La noción general de señal es que esta es algo que es *función de una variable independiente*; esta señal se denota $x(t)$. Tal señal generalmente (pero no siempre) varía con el tiempo.

- Función: Es una tripla $(f, \mathcal{D}, \mathcal{R})$, donde $f(\cdot)$ es la función, \mathcal{D} es el dominio y \mathcal{R} es el rango.
 - Se dice que la función $f(\cdot)$ es un mapeo del dominio al rango, i.e. $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$
 - En ingeniería se asume que el dominio es el tiempo, el cual es el espacio uni-dimensional de los reales, y que el rango es el espacio n -dimensional de los reales (por lo general se asume que $n = 1$). Por tal motivo definimos una función de la siguiente manera

$$f(t) : \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}^n$$

- Sistema: Algunas definiciones y características
 - Algo que procesa, de alguna manera, una señal
 - Algo que produce una reacción en respuesta a un estímulo externo
 - Algo que produce una salida a partir de una entrada.

Nuestra noción general de un sistema es que este es un *operador que produce una salida $y(t)$ en respuesta a una señal de entrada $u(t)$* .

Fundamentos y Notación - Señales y Sistemas

- Norma Euclidiana: Sea x un vector columna en \mathcal{R}^n . La norma euclidiana se define como

$$\|x\| = \sqrt{x^T x}$$

donde x^T denota la transpuesta de una matriz

- Norma \mathcal{L}_2 : Podemos medir el tamaño de una señal $x(t)$ a través de su norma \mathcal{L}_2 , la cual esta definida como

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}$$

El espacio de señales con norma $\|\cdot\|_2$ finita se conoce como el espacio \mathcal{L}_2 y se define como

$$\mathcal{L}^2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < \infty\}$$

Teorema de Parseval: Asuma que $\hat{x}(j\omega)$ es la transformada de Fourier de la señal $x(t)$ y asuma que $\hat{x}^*(j\omega)$ denota la transpuesta compleja conjugada. La norma \mathcal{L}_2 , en el dominio de la frecuencia se define como

$$\|\hat{x}\|_2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}^*(j\omega) \hat{x}(j\omega) d\omega \right\}^{\frac{1}{2}}$$

El *Teorema de Parseval* dice que la norma \mathcal{L}_2 en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo son exactamente iguales

Fundamentos y Notación - Señales y Sistemas

- Norma \mathcal{L}_2 Inducida: Cuando tratamos con sistemas, i.e $G(s)$, hablamos de la norma \mathcal{L}_2 inducida, definida como el factor de ganancia que existe entre la entrada y salida de un sistema para una entrada $u(\omega)$ dada. Asumiendo $\|u(\omega)\|_2 = 1$.

$$\frac{y(\omega)}{u(\omega)} = \frac{\|G(j\omega)u(\omega)\|_2}{\|u(\omega)\|_2} = \|G(j\omega)u(\omega)\|_2 \leq \|G(j\omega)\|_2$$

- Norma \mathcal{H}^∞ : La norma \mathcal{H}^∞ se define utilizando la definición de valores singulares (norma \mathcal{L}_2 inducida) de un sistema y escogiendo el pico como función de la frecuencia

$$\|G(s)\|_\infty = \max_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega))$$

- Noma de Henkel: La norma de Henkel de un sistema estable se obtiene cuando se aplica una señal de entrada $u(t)$ hasta $t = 0$ ($u(t) = 0 \forall t > 0$), y se trata de maximizar la relación de las normas \mathcal{L}_2 de las señales de entrada y salida

$$\|G\|_H = \max_{u(t)} \frac{\sqrt{\int_0^\infty \|z(\tau)\|_2^2 d\tau}}{\sqrt{\int_{-\infty}^0 \|u(\tau)\|_2^2 d\tau}}$$

Fundamentos y Notación - Señales y Sistemas

- **Valores Singulares:** Los sistemas MIMO poseen grados de libertad adicionales, haciendo que los valores propios del sistema no sean una buena medida de su ganancia. Podemos definir los valores propios del sistema como

$$\sigma_i(G) = \frac{\|Gu_i\|_2}{\|u_i\|_2} = \|Gu_i\|_2$$

donde u_i es una base normal definiendo la dirección de las señales de salida, i.e. todos los vectores son linealmente independientes y $\|u_i\|_2 = 1$.

De esta manera podemos definir el máximo y el mínimo valor singular como

$$\bar{\sigma} = \max_{u \neq 0} \frac{\|Gu\|_2}{\|u\|_2} \quad \underline{\sigma} = \min_{u \neq 0} \frac{\|Gu\|_2}{\|u\|_2}$$

- **Porque?:** Considere el sistema multivariable $G(s) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definido como una matriz de funciones de transferencia tal que su valor en estado estable esta dado por $G(0) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Ahora considere entradas de magnitud unitaria de la siguiente manera

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0,707 \\ 0,707 \end{bmatrix}$$

Las respectivas salidas son

$$y_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad y_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad y_3 = \begin{bmatrix} 6,36 \\ 3,54 \end{bmatrix}$$

donde

$$\|y_1\|_2 = 5,83 \quad \|y_2\|_2 = 4,47 \quad \|y_3\|_2 = 7,30$$

Como se puede observar, los valores propios no son una buena medida de la ganancia del sistema ya que estos no tienen en cuenta la dirección de la entrada

Fundamentos y Notación - Teorema de la Pequeña Ganancia

Theorem

Considere el sistema retroalimentado mostrado en la figura

$$\|M\|_\infty \leq \gamma_1 \quad \|\Delta\|_\infty \leq \gamma_2$$

γ_1 y γ_2 siendo la máxima norma inducida \mathcal{L}_2 de M y Δ respectivamente. La interconexión " $M - \Delta$ " es estable si

$$\gamma_1 \gamma_2 < 1$$

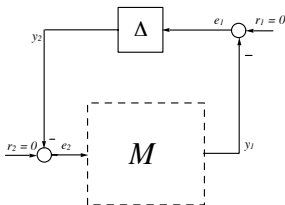


Figura: Interconexión $M - \Delta$

Fundamentos y Notación - Estabilidad según Lyapunov

- Considere un sistema general de la forma $\dot{x} = f(x)$, donde x son los estados del sistema, y donde podemos hacer las siguientes definiciones
 - **Punto de Equilibrio:** Asuma que el sistema tiene condiciones iniciales $x_0 = x_e$ y que no existen perturbaciones externas. Se dice que x_e es un punto de equilibrio si y solo si $\dot{x} = f(x_e) = 0$ para todo instante de tiempo $t > t_0$. Un punto de equilibrio puede definirse como el lugar donde las derivadas del sistema se desvanecen, es decir

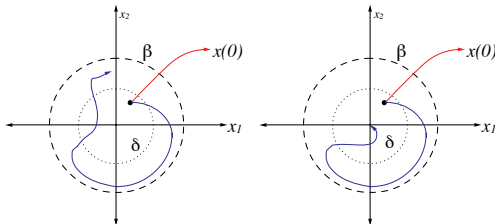
$$\dot{x}_e = f(x_e) = 0$$

- **Primer Método de Lyapunov:** Se dice que el punto de equilibrio de un sistema es estable si para cualquier escalar β existe otro escalar $\delta(\beta)$ tal que

$$\|x_0 - x_e\| < \delta(\beta) \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \beta \quad \forall t \geq 0$$

Se dice que el sistema es asintóticamente estable si adicionalmente

$$\|x_0 - x_e\| < \delta(\beta) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$$

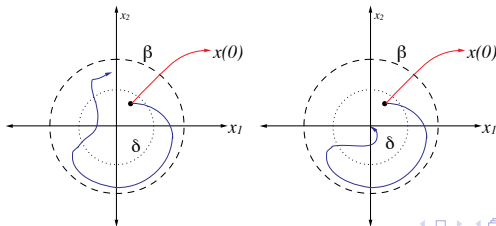


Sistemas Retroalimentados - Estabilidad según Lyapunov

Theorem

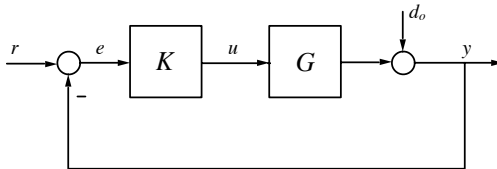
Considere el sistema LTI $\dot{x} = f(x, u)$ y asuma que el punto $x = 0$ es un punto de equilibrio contenido en $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ (i.e. \mathcal{X} se denomina la región de atracción)

- Asuma que existe una función $V(x)$ continuamente diferenciable tal que
 - $V(x) > 0 \ \forall x \neq 0$
 - $V(0) = 0$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) \rightarrow \infty$
- Entonces si,
 - $\dot{V}(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathcal{X}$, el sistema es localmente estable con región de atracción \mathcal{X}
 - $\dot{V}(x) < 0 \ \forall x \in \mathcal{X}$, el sistema es localmente estable con región de atracción \mathcal{X}
- Si $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ en los argumentos anteriores, estos siguen siendo validos pero de forma global



Sistemas Retroalimentados

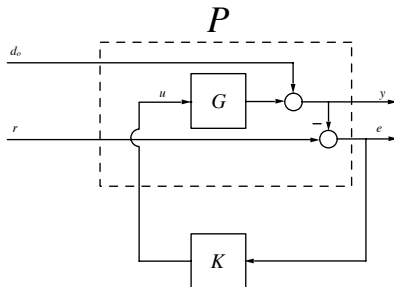
- Considere el sistema retroalimentado mostrado en la siguiente figura



- Podemos definir un grupo de cuatro funciones de transferencia que describen, en su totalidad, el comportamiento del sistema en lazo cerrado
 - 1 La función de sensibilidad esta definida como la función de transferencia
$$S_0 = \frac{e(s)}{d_0(s)} = (I + GK)^{-1}$$
 - 2 La función de sensibilidad complementaria esta definida como la función de transferencia
$$T_0 = \frac{y(s)}{r(s)} = (I + GK)^{-1} GK$$
 - 3 La función de que define la relación entre la referencia $r(s)$ y la señal de control $u(s)$ esta dada por KS_0
 - 4 La función de Lazo Abierto se define como $L = GK$

Sistemas Retroalimentados - Problema de Planta Generalizada

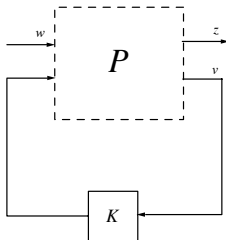
- Considere el sistema retroalimentado mostrado en la siguiente figura, y note que este es equivalente a la figura anterior, con la adición de una salida que representa el error del sistema



- Este sistema puede ser simplificado a la representación mostrada en la figura, donde
 - P se denomina la planta generalizada
 - $w = [d_o^T r^T]^T$ son las señales exógenas (en estas incluimos perturbaciones, referencias, etc)
 - $z = [y^T e^T]^T$ es la señal *objetivo*
 - v es la señal de salida retroalimentada (en este caso la señal de error e)
 - u es la señal de control.

Sistemas Retroalimentados - Problema de Planta Generalizada

- Para este problema específico planteado, nuestra planta generalizada esta dada por P , donde

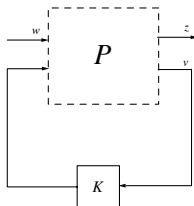


$$\begin{aligned} z &= y - r &= d_0 - r + Gu \\ v &= e &= -d_0 + r - Gu \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & -I & G \\ -I & I & -G \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

Sistemas Retroalimentados - Problema de Planta Generalizada

- Este sistema se puede implementar en **Matalab** de la siguiente manera:



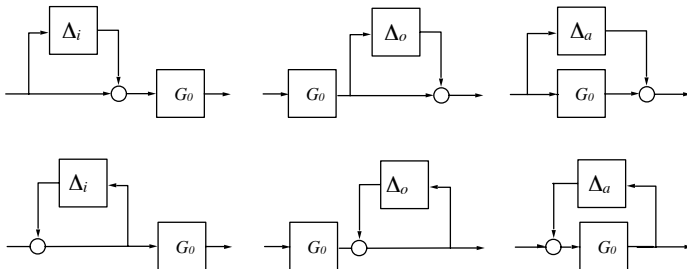
- ```

s=zpk('s');
G=(1)/(s^2+10*s+10);
W1=1*(s+100)/(1*s+1); W2=[]; W3=15;
P=augw(G,W1,W2,W3);
[K,CL,GAM]=hinfsyn(P);
sigma(CL,ss(GAM));

```

## Sistemas Retroalimentados - Incertidumbre

- Aunque existen varios tipos de incertidumbre, clasificadas según su arquitectura y estructura interna, solo mencionaremos tres tipos de arquitectura puesto son los más comunes
  - Incertidumbre Multiplicativa de Entrada:**  $G = G_0(I + \Delta_i)$
  - Incertidumbre Multiplicativa de Salida:**  $(I + \Delta_o)G = G_0$
  - Incertidumbre Aditiva:**  $G = G_0 + \Delta_a$



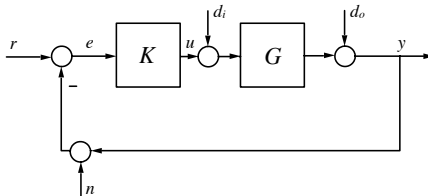
- Incertidumbre Inversa Multiplicativa de Entrada:**  $G = G_0(I - \Delta_i)^{-1}$
  - Incertidumbre Inversa Multiplicativa de Salida:**  $G = (I - \Delta_o)^{-1}G_0$
  - Incertidumbre Inversa Aditiva:**  $G = (I - G_0\Delta_a)^{-1}G_0$
- Es posible analizar la estabilidad de sistemas inciertos retroalimentados utilizando el SGT

## Control Robusto - Objetivos

- **Desempeño Nominal:** el controlador LTI debe garantizar que el sistema cuente con un buen nivel de atenuación de perturbaciones de entrada y/o salida (actuadores y sensores), una adecuada atenuación de ruido de medición, un buen nivel de desempeño en el seguimiento y desacople de las señales de referencia
- **Estabilidad Robusta:** el controlador LTI debe garantizar que el sistema sea estable, incluyendo casos donde se cuente con la presencia de incertidumbre (aditiva, multiplicativa de entrada o de salida) no estructurada, según ciertas especificaciones de robustez
- **Desempeño Robusto:** el controlador LTI debe garantizar que el sistema cuente con un buen nivel de atenuación de perturbaciones de entrada y/o salida (actuadores y sensores), una adecuada atenuación de ruido de medida, un buen nivel de desempeño en el seguimiento y desacople de las señales de referencia, para todos los posibles modelos LTI de la planta definidos por cierta incertidumbre (por lo general estructurada)

## Control Robusto - Sistema en Lazo Cerrado

- Consideremos la siguiente figura



- Las señales de salida y entrada,  $u$  y  $y$  respectivamente estén dadas por

$$y = T_0 r + S_0 G d_i + S_0 d_0 - T_0 \eta$$

$$u = K S_0 r - K S_0 d_0 + S_i d_i - K S_0 \eta$$

donde

$$\begin{array}{lll} S_0 & = & (1 + GK)^{-1} \\ S_i & = & (1 + KG)^{-1} \end{array} \quad \begin{array}{lll} T_0 & = & (1 + GK)^{-1} GK \\ T_i & = & KG(1 + KG)^{-1} \end{array} \quad \begin{array}{lll} T_0 + S_0 & = & I \\ T_i + S_i & = & I \end{array}$$

## Control Robusto - Especificaciones de Diseño Utilizando $T$ y $S$

Los objetivos generales del diseño de controladores se puede encapsular en las siguientes especificaciones dadas en términos de  $T$  y  $S$

- ➊ Atenuación de perturbaciones de salida ( $d_0$ ) en la salida ( $y$ )  $\rightarrow \bar{\sigma}(S_0)$  pequeño
- ➋ Atenuación de perturbaciones de salida ( $d_0$ ) en la salida ( $u$ )  $\rightarrow \bar{\sigma}(KS_0)$  pequeño
- ➌ Atenuación de perturbaciones de entrada ( $d_i$ ) en la salida ( $u$ )  $\rightarrow \bar{\sigma}(S_i)$  pequeño
- ➍ Atenuación de perturbaciones de entrada ( $d_i$ ) en la salida ( $y$ )  $\rightarrow \bar{\sigma}(S_0)$  pequeño
- ➎ Atenuación de ruido de medición ( $\eta$ ) en la salida ( $y$ )  $\rightarrow \bar{\sigma}(T_0)$  pequeño
- ➏ Atenuación de ruido de medición ( $\eta$ ) en la salida ( $u$ )  $\rightarrow \bar{\sigma}(KS_0)$  pequeño
- ➐ Para tener buen seguimiento de referencia  $\rightarrow \bar{\sigma}(T_0)$  y  $\underline{\sigma}(T_0) \approx 1$
- ➑ Para limitar la acción de control  $\rightarrow \bar{\sigma}(KS_0)$

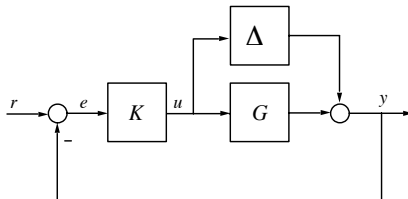
Adicionalmente los objetivos de robustez pueden ser expresados de la siguiente manera

- ➊ Estabilidad robusta con incertidumbre multiplicativa de entrada  $\rightarrow \bar{\sigma}(T_i)$  pequeño
- ➋ Estabilidad robusta con incertidumbre multiplicativa de salida  $\rightarrow \bar{\sigma}(T_0)$  pequeño
- ➌ Estabilidad robusta con incertidumbre aditiva  $\rightarrow \bar{\sigma}(KS_0)$  pequeño

## Control Robusto - Especificaciones utilizando $T$ y $S$

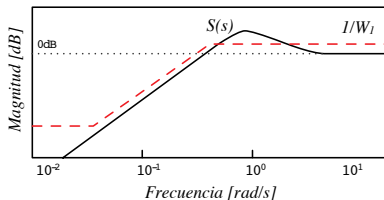
### Porque las tres especificaciones de robustez?

Realizaremos un ejemplo a forma de prueba puesto que el procedimiento se puede extender a otras arquitecturas. Tomaremos como ejemplo el caso de un sistema con incertidumbre aditiva, lo cual nos permite verificar fácilmente los otros dos casos ya que  $\Delta_{ai} = G_0\Delta_i$  y  $\Delta_{a0} = \Delta_0G_0$ . Observe la siguiente figura donde podemos hallar  $M$  como la función de transferencia que va de la señal que sale de la incertidumbre  $\Delta$  a la señal de entrada a la misma. Después de reducir el sistema obtenemos  $M = KS_0$ . Concluimos la prueba haciendo uso del SGT donde para garantizar que el sistema sea estable, debemos asegurar que la desigualdad  $\|\Delta\|_2\|KS_0\|_2 < 1$  se cumpla. De aquí es evidente que uno de nuestros objetivos de robustez es lograr que la ganancia de  $KS_0$  sea lo mas pequeña posible



## Control Robusto - Especificaciones utilizando $T$ y $S$

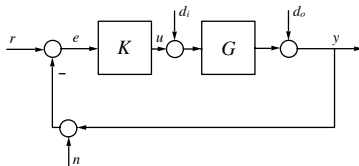
- Debido a que existen ciertas restricciones ( $T_0 + S_0 = I$  y  $T_i + S_i = I$ )
  - No podemos cumplir todas las especificaciones y debemos lograr estos objetivos a distintas frecuencias
  - Requerimos que el sistema atenúe ruido de medición y sea robusto a incertidumbres a altas frecuencias
  - Requerimos que el sistema atenúe perturbaciones y tenga buenas propiedades de seguimiento de referencias a bajas frecuencias
  - Pueden existir ciertas restricciones de desempeño debidas a ceros de fase no mínima y saturación entre otros





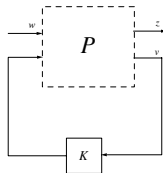
# Técnicas de Diseño $\mathcal{H}^\infty$ - Definición del Problema

- Consideremos la siguiente figura



## Señales de Interés

- $r$  : señal de referencia
- $d_0$  : señal de perturbación a la entrada de la planta
- $\eta$  : señal de ruido de medición
- $y$  : señal de salida
- $e$  : señal de error de seguimiento de referencia
- $u$  : señal de control



## Señales de Interés

- $w$  : señales exógenas
- $y$  : señales de salidas medidas
- $z$  : señales de interés
- $u$  : señal de control

## Técnicas de Diseño $\mathcal{H}^\infty$ - Definición del Problema

- Participando  $P$  acorde a las dimensiones de de las señales de entrada/salida

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

donde

$$u = Ky$$

- Después de un redacción algebraica podemos encontrar que

$$z = (P_{11} + P_{12}(1 - P_{22})^{-1}P_{21})w = F_l(P, K)w$$

- $F_l(P, K)$  se denomina el mapa lineal fraccional y es una transformación lineal fraccional (LFT) inferior
- Nuestro principal objetivo es encontrar un controlador  $K(s)$  tal que

$$\inf_K \|F_l(P, K)\|_\infty = \inf_K \max_{\omega} \bar{\sigma}(F_l(P, K)(j\omega)) = \inf_K \max_{w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$$

## Técnicas de Diseño $\mathcal{H}^\infty$ - Definición Problema

- No es necesario obtener el controlador optimo, y podemos considerar el problema de encontrar un controlador suboptimo tal que

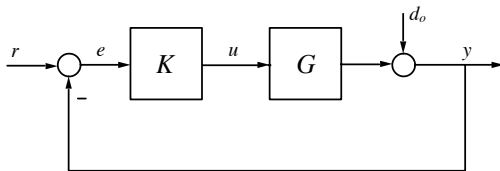
$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$$

donde  $\gamma > \gamma_{min}$ ,  $\gamma_{min}$  siendo el valor optimo

- Este problema se puede resolver de forma eficiente utilizando el algoritmo de Doyle, donde se realiza una iteración en gamma hasta encontrar un valor cercano al optimo.
- Hasta el momento el planteamiento del problema se ha realizado de forma muy general
- Debido a que debemos encapsular *nuestros* objetivos dentro del esquema de control  $\mathcal{H}^\infty$ , surgen algunas preguntas
  - Que señales debemos escoger como exógenas ( $w$ ) y de interés ( $z$ ) tal que nuestros objetivos se vean reflejados en ellas?
  - Como conformamos nuestra matriz aumentada  $P$ ?
- Respuesta: Esta es una tarea que depende de la naturaleza del problema, por lo que se estudiarán casos típicos

## Diseño de Controladores $\mathcal{H}^\infty$ de Sensibilidad Mixta

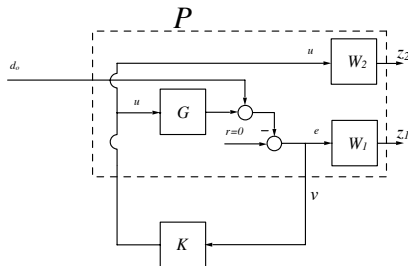
- Considere el sistema retroalimentado con perturbación de salida como se muestra en la figura
- Deseamos un sistema con las siguientes características
  - Atenuación a baja frecuencia de perturbaciones  $d_0$  en la salida  $y$
  - El ancho de banda de la señal de control es limitado
  - Robustez a incertidumbres aditivas de alta frecuencia
- Esto se traduce en tratar de obtener un valor singular  $\bar{\sigma}(S_0)$  pequeño a altas frecuencias y un valor singular  $\bar{\sigma}(KS_0)$  pequeño a bajas frecuencias



## Diseño de Controladores $\mathcal{H}^\infty$ de Sensibilidad Mixta

- Debido a que nuestros objetivos se alcanzan a distintas frecuencias, debemos incluir filtros, o *pesos*,  $W_1$  y  $W_2$
- El problema de diseño  $S/KS$  tiene como objetivo encontrar un  $K(s)$  tal que la ganancia  $\mathcal{H}^\infty$  de los sistemas de interés  $S/KS$  se lo menor posible

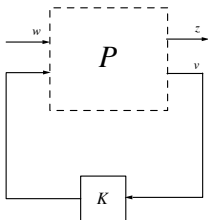
$$\inf_K \left\| \begin{bmatrix} W_1 S_0 \\ W_2 K S_0 \end{bmatrix} \right\|_\infty$$



Diseño de Controladores  $\mathcal{H}^\infty$  de Sensibilidad Mixta-Planta Generalizada  $S/KS$ 

- Considere el sistema de la figura donde tenemos

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_1 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 S_0 \\ W_2 K S_0 \\ y \end{bmatrix}$$

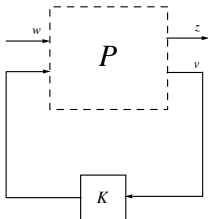


- Considere el sistema de la figura donde tenemos

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_1 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 S_0 \\ W_2 K S_0 \\ y \end{bmatrix}$$

- Observando que  $z_1 = P_{11}w + P_{12}u = W_1(w + Gu)$  y que  $z_2 = W_2u$ , podemos concluir que

$$P = \left[ \begin{array}{c|c} W_1 & W_1 G \\ \hline 0 & W_2 \\ \hline -1 & -G \end{array} \right]$$

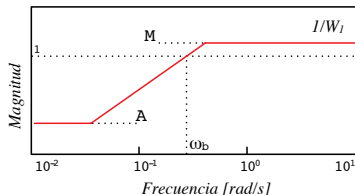


Diseño de Controladores  $\mathcal{H}^\infty$  de Sensibilidad Mixta - Funciones de Peso

- Considere el objetivo  $W_1 S_0 \leq 1$ , donde  $W_1$  es un filtro pasabajas dado por

$$W_1 = \frac{s/M + \omega_B}{s + \omega_B A}$$

- Cabe observar que lo requerimientos de diseño a distintas frecuencias debe ser encapsulado en  $1/W_1$  ya que  $S_0 \leq 1/W_1$
- Para valores de  $A = 0,1$ ,  $M = 10$  y  $\omega_B = 3 \times 10^{-1}$
- Escoger pesos no es una ciencia exacta y por lo tanto se debe iterar hasta conseguir los resultados deseados



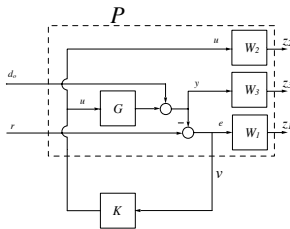


# Diseño de Controladores $\mathcal{H}^\infty$ de Sensibilidad Mixta - Solución del Problema

- Considere la planta generalizada  $P$ , la cual incluye pesos  $W_1$ ,  $W_2$ , y  $W_3$

$$P = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right]$$

- **Problema:**



- Encontrar un controlador  $K(s)$  que garantice estabilidad robusta del sistema  $P(s)$  bajo las condiciones de diseño
- Encontrar el menor valor posible del índice de desempeño  $\gamma$  tal que

$$\inf_K \|F_l(P, K)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\|_\infty = \gamma > \gamma_{min}$$

- Existen varios métodos para resolver este problema de optimización  $\mathcal{H}^\infty / \mathcal{H}^2$ , pero debido a que debemos iterar en  $\gamma$ , estos son por lo general computacionalmente costosos

# Diseño de Controladores $\mathcal{H}^\infty$ de Sensibilidad Mixta - Solución del Problema

**Algoritmo General**[Doyle/Glover]: Existe un controlador  $K(s)$  ta; que  $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$  si

- ①  $X_\infty \geq 0$  es la solución de la ecuación de Ricatti

$$A^T X_\infty + X_\infty A + C_1^T C_1 + X_\infty (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty = 0$$

tal que  $\operatorname{Re} \lambda_i(A - B_2 B_2^T X_\infty) + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty) < 0, \forall i$

- ②  $Y_\infty \geq 0$  es la solución de la ecuación de Ricatti

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T + B_1^T B_1 + X_\infty (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T B_2) X_\infty = 0$$

tal que  $\operatorname{Re} \lambda_i(A - C_2^T C_2 Y_\infty) + \gamma^{-2} Y_\infty C_1^T C_1) < 0, \forall i$

- ③  $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma$
- ④ El controlador *central* esta dada por la siguiente representación de estado

$$K(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_\infty & Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array} \right]$$

donde

$$A_\infty = A + B_2 F_\infty) + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$$

$$F_\infty = -B_2^T X_\infty \quad L_\infty = -Y_\infty C_2^T \quad Z_\infty = (I - \gamma^{-2} X_\infty Y_\infty)^{-1}$$

## Diseño de Controladores $\mathcal{H}^\infty$ de Sensibilidad Mixta - Solución del Problema

- El controlador central  $K(s)$  tiene un numero de estados igual a la suma de los estados de la planta y los estados de los pesos (en el caso del problema  $S/KS$ ,  $W_1$  y  $W_2$ )
- Cabe anotar que la solución presentada anteriormente hace uso de varios supuestos; tal vez los de resaltar son  $D_{11} = 0$ ,  $D_{22} = 0$ ,  $D_{12}D_{12}^T = I$  y  $D_{12}^TD_{12} = I$
- Para un obtener un valor *suboptimo* pero apropiado de  $\gamma$ , podemos realizar una búsqueda por bisección hasta alcanzar un nivel de tolerancia aceptable, i.e.  $|\gamma_{min} - \gamma| < Tol$
- Este algoritmo ya hace parte de la caja de herramientas de control robusto de Matlab y hace uso de la función **hinfsyn**

## Conformado de Lazo $\mathcal{H}^\infty$ - Definición del Problema

- La técnica de conformado de lazo  $\mathcal{H}^\infty$  surge como alternativa al problema de sensibilidad mixta
- Resumiendo, esta técnica pretende garantizar estabilidad robusta y desempeño moldeando la función de lazo abierto y no las funciones  $S$ ,  $KS$  y  $T$
- Al asumir incertidumbre coprime, esta técnica de diseño tiende a garantizar mayores márgenes de robustez
- Uno de los inconvenientes es que no podemos garantizar estabilidad del sistema en lazo cerrado a partir de sus propiedades de lazo abierto, esto se acentúa al tratar con sistemas multivariados
- Debido a que nuestras especificaciones de diseño estén dadas en términos de  $S$ ,  $KS$  y  $T$ , las cuales son funciones de lazo cerrado, debemos hacer una “traducción” para expresarlas en términos de nuestra función de lazo abierto

## Conformado de Lazo $\mathcal{H}^\infty$ - Definición del Problema

- Para realizar esta re-interpretación, necesitaremos las siguientes identidades
  - $\sigma_i(A) - \bar{\sigma}(B) \leq \bar{\sigma}_i(A + B) \leq \sigma_i(A) + \bar{\sigma}(B) \Rightarrow \underline{\sigma}(A) - 1 \leq \underline{\sigma}(A + 1) \leq \underline{\sigma}(A) + 1$
  - $\bar{\sigma}(A^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A)}$
- Utilizando estas identidades y asumiendo que  $\bar{\sigma}(KG) > \underline{\sigma}(KG) > 1$  podemos deducir la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{\underline{\sigma}(KG) + 1} \leq \underline{\sigma}(S_i) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(KG) - 1}$$

$$\frac{1}{\underline{\sigma}(GK) + 1} \leq \underline{\sigma}(S_0) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(GK) - 1}$$

- Con estas propiedades de los valores singulares podemos encapsular las especificaciones e diseño utilizando las función de lazo abierto  $L(s)$
- De esta manera podemos hacer las siguientes aproximaciones entre funciones de lazo cerrado y lazo abierto
  - Si  $\bar{\sigma}(KG) \ll 1$  para un cierto rango de frecuencia, entonces  $\bar{\sigma}(T_i) \approx \bar{\sigma}(KG)$
  - Si  $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$  para un cierto rango de frecuencia, entonces  $\bar{\sigma}(T_0) \approx \bar{\sigma}(KG)$
  - Si  $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$  para un cierto rango de frecuencia, entonces  $\bar{\sigma}(S_0G) \approx \frac{1}{\underline{\sigma}(K)}$  y  $\bar{\sigma}(KS_0) \approx \frac{1}{\underline{\sigma}(G)}$
- Ya estamos listos para re-escribir nuestros objetivos de diseño

# Conformado de Lazo $\mathcal{H}^\infty$ - Especificaciones de Diseño Utilizando $L$ y $K$

- ❶ Atenuación de perturbaciones de salida ( $d_0$ ) en la salida ( $y$ )
  - $\underline{\sigma}(GK)$  debe ser grande dentro del rango de frecuencias donde  $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$
- ❷ Atenuación de perturbaciones de salida ( $d_0$ ) en la entrada ( $u$ )
  - $\bar{\sigma}(K)$  debe ser pequeño dentro del rango de frecuencias donde  $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$
- ❸ Atenuación de perturbaciones de salida ( $d_0$ ) en la salida ( $u$ )
  - $\frac{1}{\underline{\sigma}(G)}$  debe ser pequeño dentro del rango de frecuencias donde  $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$
- ❹ Atenuación de perturbaciones de salida ( $d_i$ ) en la salida ( $y$ )
  - $\underline{\sigma}(K)$  debe ser grande dentro del rango de frecuencias donde  $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$
- ❺ Atenuación de perturbaciones de salida ( $d_i$ ) en la entrada ( $u$ )
  - $\underline{\sigma}(KG)$  debe ser grande dentro del rango de frecuencias donde  $\underline{\sigma}(KG) \gg 1$
- ❻ Atenuación de ruido de medición ( $\eta$ ) en la salida ( $y$ )
  - $\bar{\sigma}(GK)$  debe ser pequeño dentro del rango de frecuencias donde  $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$
- ❼ Atenuación de ruido de medición ( $\eta$ ) en la entrada ( $u$ )
  - $\bar{\sigma}(K)$  debe ser pequeño dentro del rango de frecuencias donde  $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$
- ❽ Atenuación de ruido de medición ( $\eta$ ) en la entrada ( $u$ )
  - $\frac{1}{\underline{\sigma}(GK)}$  debe ser grande dentro del rango de frecuencias donde  $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$
- ❾ Para obtener buen seguimiento de la señal de referencia ( $r$ )
  - $\underline{\sigma}(KG)$  debe ser grande dentro del rango de frecuencias donde  $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$
- ❿ Para limitar los niveles y ancho de banda de la señal de control ( $u$ )
  - $\bar{\sigma}(K)$  debe ser pequeño dentro del rango de frecuencias donde  $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$
- ⓫ Para limitar los niveles y ancho de banda de la señal de control ( $u$ )
  - $\frac{1}{\underline{\sigma}(G)}$  debe ser pequeño dentro del rango de frecuencias donde  $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$

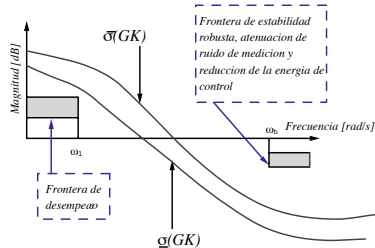
## Conformado de Lazo $\mathcal{H}^\infty$ - Especificaciones de Diseño Utilizando $L$ y $K$

- ❶ Para obtener estabilidad robusta ante incertidumbre multiplicativa de entrada
  - $\bar{\sigma}(KG)$  debe ser pequeño dentro del rango de frecuencias donde  $\bar{\sigma}(KG) \ll 1$
- ❷ Para obtener estabilidad robusta ante incertidumbre multiplicativa de salida
  - $\bar{\sigma}(GK)$  debe ser pequeño dentro del rango de frecuencias donde  $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$
- ❸ Para obtener estabilidad robusta ante incertidumbre aditiva
  - $\bar{\sigma}(K)$  debe ser pequeño dentro del rango de frecuencias donde  $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$
- ❹ Para obtener estabilidad robusta ante incertidumbre aditiva
  - $\frac{1}{\underline{\sigma}(G)}$  debe ser grande dentro del rango de frecuencias donde  $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$

# Conformado de Lazo $\mathcal{H}^\infty$ - Metodología de Diseño

En general,

- Se desea atenuar perturbaciones y obtener buen seguimiento de referencia a bajas frecuencias
- Se desea atenuar ruido de medición y sea robustamente estable ante incertidumbre que ocurren a altas frecuencia
- Se desea una señal de control de amplitud moderada y que tenga un ancho de banda con pocas componentes de alta frecuencia.
- En la siguiente figura se muestra gráficamente las especificaciones de diseño y como lograrlas





## Conformado de Lazo $\mathcal{H}^\infty$ - Metodología de Diseño

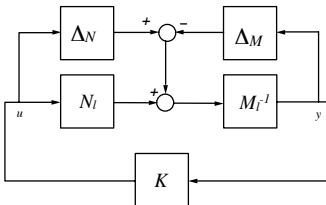
- Encontrar un controlador  $K(s)$  tal que se cumplan las especificaciones de diseño (los *valores singulares* de la función de lazo  $L = GK$  tienen la forma deseada) es relativamente sencillo
- Encontrar un controlador  $K(s)$  tal que simultáneamente se garantice estabilidad en lazo cerrado es un problema no trivial
- Para sistemas SISO la relación entre estabilidad en lazo cerrado y el margen de ganancia y fase de la función de lazo abierto es relativamente sencilla, aunque existen ciertas limitaciones
- Debido a que estamos tratando con sistemas multivariables, y adicionalmente estamos utilizando los valores singulares del sistema, garantizar estabilidad de lazo cerrado basándose en las propiedades de la función de lazo es más complicado
- La metodología de conformado de lazo  $\mathcal{H}^\infty$  consta de dos partes
  - 1 Se moldea el lazo para que se cumplan las especificaciones de diseño
  - 2 Se encuentra un controlador  $K(s)$  que estabiliza el sistema y el cual optimiza, en el sentido  $\mathcal{H}^\infty$ , los márgenes de robustez del sistema

## Conformado de Lazo $\mathcal{H}^\infty$ - Metodología de Diseño

- Considere la arquitectura que se muestra en la siguiente figura
- El filtro  $W_1(s)$  se utiliza para moldear el lazo, garantizando características deseadas, e.g. acción integral y velocidades de descenso
- $W_2$  es una matriz escalar diagonal y se utiliza para dar peso relativo a las distintas salidas del sistema
- Una vez se realice una selección apropiada de los pesos  $W_1$  y  $W_2$ , se procede a diseñar el controlador  $K(s)$  tal que se garantice estabilidad robusta ante la presencia de incertidumbre coprime de la planta, i.e.  $G_\Delta = (M + \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N)$

## Conformado de Lazo $\mathcal{H}^\infty$ - Metodología de Diseño

- Considere que contamos con el sistema moldeado  $G = W_2 G_0 W_1$  ( $G_0$  es la planta nominal), y que este tiene una factorización coprima de la forma  $G = M^{-1}N$
- **Problema:**



- Encontrar un controlador  $K(S)$  tal que se garantice la estabilidad robusta de la planta incierta  $G_\Delta = \{(M + \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N) : \|\delta_N \Delta_M\|_\infty < \epsilon\}$
- Encontrar el mayor margen de estabilidad donde

$$\gamma_{min} = \inf_K \left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (1 - GK)^{-1} M^{-1} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\epsilon_{max}}$$

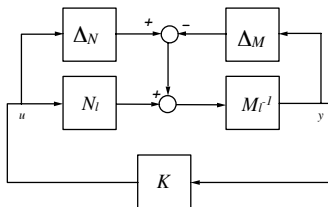
$\epsilon_{max}$  es la máxima ganancia de perturbación permitida, i.e.  $\|\Delta\|_\infty \leq \epsilon_{max}$

## Conformado de Lazo $\mathcal{H}^\infty$ - Metodología de Diseño

El sistema  $G(s)$  es robustamente estable ante la presencia de incertidumbre coprime si existe un controlador  $K(s)$  que garantice  $\gamma_{\min} \leq \frac{1}{\epsilon_{\max}}$ , donde  $\gamma_{\min}$  es el margen de estabilidad (según la definición dada anteriormente) y  $\epsilon_{\max}$  es un escalar que acota la ganancia de la incertidumbre

### Demostración.

- La prueba puede realizarse utilizando el teorema de la pequeña ganancia (SGT), por lo que comenzamos esta prueba reorganizando el sistema bajo el esquema “ $M - \Delta$ ” como se muestra en la figura



## Conformado de Lazo $\mathcal{H}^\infty$ - Metodología de Diseño

- Después de reducir el sistema podemos concluir que

$$u = (1 - KG)^{-1}KM^{-1}\phi = K(1 - GK)^{-1}M^{-1}\phi$$

$$y = (1 - GK)^{-1}M^{-1}\phi$$

- Reorganizando el sistema

$$z = \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (1 - GK)^{-1}M^{-1}\phi$$

$$\phi = (\Delta)z = \begin{bmatrix} \Delta_N & \Delta_M \end{bmatrix}$$

- $\gamma_{min}$  dictamina el margen de estabilidad del sistema y es la ganancia de la función de transferencia que va de  $\phi$  a  $[u^T \ y^T]^T$
- La prueba de basa en la aplicación directa del teorema de la ganancia pequeña donde podemos concluir que si  $\|\Delta\|_\infty \leq \epsilon$ , el sistema es estable si  $\gamma_{min}\epsilon < 1$
- Cabe anotar que el subíndice *max* que se agrega al termino  $\epsilon$  indica nuestro deseo de encontrar estabilidad para un amplio rango de incertidumbres, i.e. el mayor  $\epsilon$  admitido por el sistema.



## Conformado de Lazo $\mathcal{H}^\infty$ - Solución del problema

**Algoritmo General:** Existe un controlador  $K(s)$  tal que  $\left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (1 - GK)^{-1} M^{-1} \right\|_\infty \leq \gamma$  si

- 1  $X \geq 0$  es la solución de la ecuación de Ricatti

$$\tilde{A}^T X + X \tilde{A} - X B S^{-1} B^T X + C^T R^{-1} C = 0$$

- 2  $Z$  es la solución de la ecuación de Ricatti

$$\tilde{A} Z + Z \tilde{A}^T - Z C^T R^{-1} C Z + B S^{-1} B^T = 0$$

donde

$$\tilde{A} = B S^{-1} D^T C \quad S = (1 + D^T D) \quad R = (1 + D D^T)$$

- 3 El controlador  $K(s)$  que garantiza

$$\left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (1 - GK)^{-1} M^{-1} \right\|_\infty < \gamma$$

donde  $\gamma > \gamma_{min}$ , esta dado por

$$K(s) = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix}$$

$$A_k = A + B F + \gamma^2 (L^T)^{-1} Z C^T (C D F)$$

$$B_k = \gamma^2 (L^T)^{-1} Z C^T$$

$$C_k = B^T X$$

$$D_k = -D^T$$

donde

$$F = -S^{-1} (D^T C + B^T X) \quad L = (1 - \gamma^2) I + X Z$$

## Conformado de Lazo $\mathcal{H}^\infty$ - Solución del problema

- El menor valor del índice de estabilidad robusta se denota  $\gamma_{min}$  y esta dado por

$$\gamma_{min} = \left[ 1 - \|N M\|_H^2 \right]^{\frac{1}{2}} = (1 + \rho(XZ)) \frac{1}{2}$$

- No hay iteración en  $\gamma$  y el algoritmo de implementaciones particularmente simple.
- Cabe anotar que aunque el algoritmo es simple computacionalmente, la selección apropiada de pesos es crucial para garantizar buen desempeño del sistema
- El diseño del controlador es un procedimiento relativamente sencillo debido a que no hay selección de pesos y el problema no depende de la incertidumbre
- La aplicabilidad de los controladores de conformado de lazo en  $\mathcal{H}^\infty$  es alta debido a su gran flexibilidad (comparado con controladores de sensibilidad mixta en  $\mathcal{H}^\infty$ ) y sencillez (comparado con controladores de síntesis  $\mu$ )

## Conformado de Lazo $\mathcal{H}^\infty$ - Arquitectura de control

- Considere el sistema de tipo Newton-Langrange representado de la siguiente forma

$$\hat{M}(q)\ddot{q} = \tau - \hat{C}(q, \dot{q}) - \hat{g}(q)$$

donde  $(\hat{\cdot})$  denota el sistema *real* y  $(\cdot)$  denota el sistema nominal

- Utilizando la técnica de control de dinámica inversa *cancelamos* las no linealidades de la siguiente forma

$$\tau = M(q)u + C(q, \dot{q}) + g(q)$$

donde obtenemos el siguiente sistema

$$\hat{M}(q)\ddot{q} = M(q)u + C(q, \dot{q}) + g(q) - \hat{C}(q, \dot{q}) - \hat{g}(q)$$

- Si definimos  $(\tilde{\cdot}) = (\cdot) - (\hat{\cdot})$  podemos re-escribir el sistema como

$$\ddot{q} = \hat{M}(q)^{-1}M(q)u + \hat{M}(q)^{-1}(\tilde{C}(q, \dot{q}) + \tilde{g}(q)) = u + \eta(q, \dot{q})$$

done  $\eta(q, \dot{q}) = \hat{M}(q)^{-1}(\tilde{M}(q) + \tilde{C}(q, \dot{q}) + \tilde{g}(q))$

- Observe que si no existe incertidumbre de modelo,  $\eta(q, \dot{q}) = 0$ , y por lo tanto nuestro sistema se reduce a un doble integrador, i.e.  $\ddot{q} = u$
- Sin embargo, si nuestro modelo real difiere del nominal, tendremos un sistema incierto y por lo tanto debemos tener en cuenta estas perturbaciones del modelo



## Conformado de Lazo $\mathcal{H}^\infty$ - Arquitectura de control

- El sistema se puede modelar como un doble integrador con incertidumbre multiplicativa de entrada e inversa aditiva
- Definiendo  $\Delta_i = \hat{M}(q)^{-1}\tilde{M}(q, \dot{q})$ , y utilizando las propiedades de simetría de la matriz  $M(q)$ , podemos modelar la incertidumbre multiplicativa de entrada como una matriz diagonal  $\Delta_i = \text{diag}\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$
- La incertidumbre aditiva inversa esta dada por  $\Delta_a = \hat{M}(q)^{-1}(\tilde{C}(q, \dot{q}) + \tilde{g}(q))$  y se puede modelar como una conexión en serie entre una matriz escalar y un filtro (el cual captura los efectos frecuenciales de esta incertidumbre)
- Así, nuestro esquema de control es el que muestra en la figura

