Polos y Zeros

Sistemas Multivariables

Sistemas Multivariables

Si un sistema tiene más de una entrada o salida, se denomina multivariable (SIMO, MISO, MIMO).

- Los polos para sistemas multivariables se definen igual que para sistemas de tipo SISO.
- Por otro lado, para los sistemas MIMO hay varios tipos de ceros y la discusión sobre ceros es compleja.

H.H. Rosenbrock, "Teoría de estado-espacio y multivariable", T. Nelson, Londres, 1070.

P.J. Antsaklis y A.N. Michel, "A Linear Systems Primer", Birkhauser, Boston, 2007.

Sistemas Multivariables

Una matriz importante es la de Rosenbrock

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -X(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Y(s) \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$
$$CX(s) + DU(s) = Y(s)$$

or

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$
$$Y(s) = \left(C(sI - A)^{-1} B + D \right) U(s)$$

Zeros de Transmisión

$$H(s) = C\Phi(s)B + D = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$= \frac{C[adj(sI-A)]B}{|sI-A|} + D = \frac{C[adj(sI-A)]B + D|sI-A|}{|sI-A|} = \frac{N(s)}{\Delta(s)} = \frac{N_c(s)}{\Delta_c(s)}$$

$$\textit{transmission zeros at} \quad p_N(s) = |N_c(s)| = 0 \qquad N_c(s) \longleftrightarrow \text{Pierde Rango}$$

Recuerde que Y (s) = H (s) U (s). Está siempre es posible encontrar una entrada u (t) con frecuencia en un cero de transmisión que produce un salida y (t) que no contiene esa frecuencia. Esto significa hay transmisión cero a esa frecuencia. La transmisión los ceros también se denominan ceros de bloqueo.

Ejemplo 1 – Zeros de Transmisión

$$H(s) = \frac{1}{s^2+4}\begin{bmatrix} 2 & s \\ -2(s-2) & 1 \end{bmatrix} = \frac{N(s)}{d(s)}$$

1. Polos
2. Zeros de Transmisión
3. Espacio Nulo (Kernel)

Ejemplo 1 – Zeros de Transmisión

$$H(s) = \frac{1}{s^2+4}\begin{bmatrix} 2 & s \\ -2(s-2) & 1 \end{bmatrix} = \frac{N(s)}{d(s)}$$

Polos

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^t u_{-1}(t) \longrightarrow y(t) = -\sin 2t\, u_{-1}(t)$$

Zeros

$$|N(s)| = \left|\begin{bmatrix} 2 & s \\ -2(s-2) & 1 \end{bmatrix}\right| = 2s^2 - 4s + 2 = 2(s-1)^2$$

$$N(s=1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2(1-2) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N(s=1)\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{1}{s^2+4}\begin{bmatrix} 2 & s \\ -2(s-2) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\frac{1}{s-1}$$

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{1}{s^2+4}\begin{bmatrix} -2(s-1) \\ -2(s-1) \end{bmatrix}\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s^2+4}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Zeros de Acoplamiento

Ceros de desacoplamiento de entrada

Los ceros de desacoplamiento de entrada son aquellos valores de “s” para los cuales la matriz de acoplamiento de entrada pierde rango, es decir, tiene rango menor que “n”.

$$P_I(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix}$$

Ceros de desacoplamiento de salida

Los ceros de desacoplamiento de salida son aquellos valores de “s” para los cuales la matriz de acoplamiento de salida pierde rango, es decir, tiene rango menor que n.

$$P_O(s) = \begin{bmatrix} sI - A \\ -C \end{bmatrix}$$

NOTA: Los que los ceros de desacoplamiento de entrada deben ser un subconjunto de los polos. (Por qué?)

Ejemplo 2 – Zeros de Acoplamiento

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u = \mathrm{A}x + \mathrm{B}u$$

$$\mathrm{y} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} x = \mathrm{C}x$$

$$\boxed{\mathrm{P(s)} = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix}}$$

Función de Transferencia

Ejemplo 2 – Zeros de Acoplamiento

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}u=Ax+Bu \qquad y=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}x=Cx$$

$$\boxed{P(s)=\begin{bmatrix}sI-A & B\\ -C & D\end{bmatrix}}$$

Función de Transferencia

$$H(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{1}{(s+2)(s+4)}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+6 & 1\\ -8 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(s+2)(s+4)}\begin{bmatrix}s+2 & s+2\\ -2(s+2) & -2(s+2)\end{bmatrix}=\frac{1}{(s+4)}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}=\frac{N_c(s)}{\Delta_c(s)}$$

Ejemplo 2 – Zeros de Acoplamiento

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu \qquad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} x = Cx$$

$$\boxed{P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix}}$$

$$\Delta(s) = |sI - A| = \left| \begin{bmatrix} s & -1 \\ 8 & s+6 \end{bmatrix} \right| = s^2 + 6s + 8 = (s+2)(s+4)$$

$$P(s) = \begin{matrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 8 & s+6 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \text{loses rank where } s=-2$$

Ejemplo 2 – Zeros de Acoplamiento

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu \qquad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} x = Cx$$

$$\boxed{P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{P_1(s) = [sI - A \;\; B]}$$

$$\boxed{P_2(s) = \begin{bmatrix} sI - A \\ -C \end{bmatrix}}$$

$$P_1(s) = \begin{matrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 8 & s+6 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$P_2(s) = = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 8 & s+6 \\ -2 & -1 \\ \cancel{4} & \cancel{2} \end{bmatrix} \text{ loses rank where } s=-2$$