

# Entrega 1: Modelación de Balancín Eólico

Felipe Forero, Andrés Holguín, Andrés Morales  
 Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica  
 Universidad Nacional de Colombia  
 Bogotá, Colombia  
 Email: {anforero, aholguinr, amoralesma} @unal.edu.co

## I. DISEÑO MECÁNICO

El diseño mecánico del aerobalancín buscaba un fácil ensamble y un proceso de manufactura rápido y económico, basados en este principio se diseñaron 3 piezas manufacturadas en corte laser con las que se construyó el balancín. Adicionalmente se debió imprimir en 3D un acople para cambiar el modelo de Driver utilizado para alimentar el motor. La

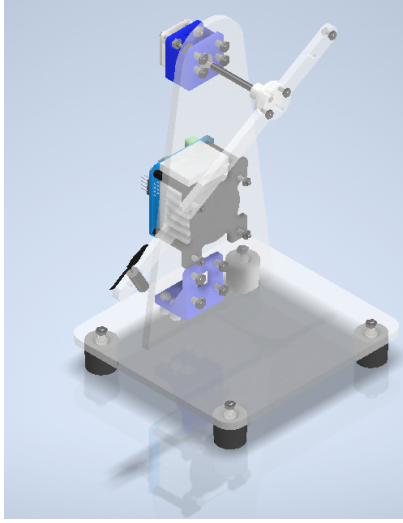


Figura 1. Modelo CAD del Balancín Eólico.

fig 1 muestra un modelo 3D del sistema empleado. Planos y explosionado en Anexo.

## II. DISEÑO ELECTRÓNICO

El diseño electrónico del proyecto se basa en la utilización de una placa de desarrollo Arduino UNO y las conexiones requeridas para la utilización de un puente H *BTS7960*, y el encoder magnético *AS5600* en modo digital, empleando un protocolo de comunicación *I<sup>2</sup>C*. El circuito esquemático del proyecto puede ser consultado en los anexos de este informe.

## III. MODELO MATEMÁTICO DEL SISTEMA

Para desarrollar el modelo del sistema, se tiene un enfoque de fuerzas basado en las leyes de Newton, para lo cual se plantea el diagrama de cuerpo libre del prototipo según la figura 2. De esta forma, al aplicar la segunda ley de Newton para rotación se tiene la ecuación 2

$$\sum M = I \cdot \ddot{\theta} \quad (1)$$

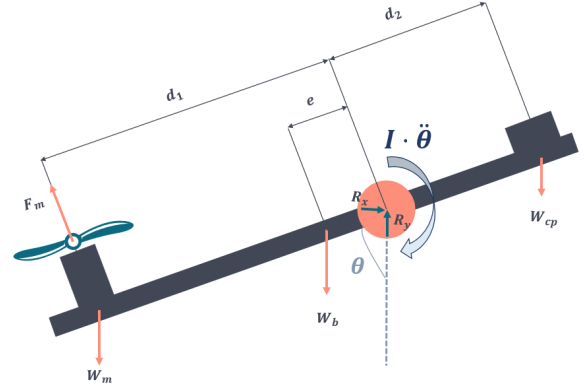


Figura 2. Diagrama de cuerpo libre para el sistema de Balancín Eólico.

$$d_1 \cdot F_m + (W_{cp} \cdot d_2 - W_m \cdot d_1 - W_b \cdot e) \cdot \sin(\theta) - \mu \cdot \dot{\theta} = I \cdot \ddot{\theta} \quad (2)$$

Los coeficientes de la expresión corresponden a los parámetros de la planta que deben ser identificados. Observando que la ecuación 2 no es lineal dada la presencia de la función sinusoidal obteniéndose un sistema no lineal de segundo orden de este modelo, se debe tener en cuenta la limitación de varias técnicas de control de ser aplicables a sistemas lineales, motivo por el cual se plantea realizar una linealización en punto de operación de la planta.

## IV. LINEALIZACIÓN DEL MODELO

Con base en lo anterior, la linealización del modelo no lineal de la planta se realiza a partir de una serie de potencias de Taylor, para esto se define la función de la aceleración angular.

$$\alpha(F_m, \theta, \dot{\theta}) = a \cdot F_m + b \cdot \sin(\theta) + c \cdot \dot{\theta} \quad (3)$$

En la expresión 3, los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  tienen por valor:

$$a = \frac{d_1}{I} \quad (4)$$

$$b = \frac{W_{cp} \cdot d_2 - W_m \cdot d_1 - W_b \cdot e}{I} \quad (5)$$

$$c = -\frac{\mu}{I} \quad (6)$$

A partir de esta parametrización, a continuación se realiza la evaluación de la función y sus derivadas parciales en sobre el punto de linealización.

$$\alpha(F_m, \theta, \dot{\theta})|_{(F_m^*, \theta^*, \dot{\theta}^*)} = a \cdot F_m^* + b \cdot \sin(\theta^*) + c \cdot \dot{\theta}^* \quad (7)$$

$$\frac{\partial \alpha(F_m, \theta, \dot{\theta})}{\partial F_m} \Big|_{(F_m^*, \theta^*, \dot{\theta}^*)} = a \quad (8)$$

$$\frac{\partial \alpha(F_m, \theta, \dot{\theta})}{\partial \theta} \Big|_{(F_m^*, \theta^*, \dot{\theta}^*)} = b \cdot \cos(\theta^*) \quad (9)$$

$$\frac{\partial \alpha(F_m, \theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} \Big|_{(F_m^*, \theta^*, \dot{\theta}^*)} = c \quad (10)$$

Al emplear las ecuaciones (7) a (10), se determina la linealización según la ecuación (11).

$$\bar{\alpha} = a \cdot \bar{F}_m + b \cdot \cos(\theta^*) \cdot \bar{\theta} + c \cdot \bar{\dot{\theta}} \quad (11)$$

Donde  $(\bar{\cdot})$  corresponde a las funciones  $\alpha$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\theta$  y  $F_m$  trasladadas al punto de operación. De esta manera se pueden calcular los 4 puntos de operación que se encuentran especificados por el problema de diseño en el rango  $[-30^\circ, 30^\circ]$  respecto a la horizontal, con lo que para el caso del modelo empleado será  $[60^\circ, 120^\circ]$ . De esta manera, la ecuación (12) representa la

Tabla I  
PUNTOS ANGULARES DE LINEALIZACIÓN PARA EL SISTEMA

$\theta^*$	$\cos \theta^*$
60	0.5000
75	0.2588
105	-0.2588
120	-0.5000

función de transferencia del modelo linealizado en el punto de operación del sistema.

$$G(s) = \frac{\bar{\theta}(s)}{\bar{F}_m(s)} = \frac{a}{s^2 - c \cdot s - b \cdot \cos(\theta^*)} \quad (12)$$

## V. IDENTIFICACIÓN DE LA PLANTA

Con base en los resultados obtenidos anteriormente, es necesario realizar pruebas de identificación de los parámetros de la planta como lo son  $\mu$  y  $F_m$ . Para esto, se realizan experimentos específicos para determinar sus valores.

### V-A. Constante de fuerza del motor

Lo primero a considerar para la relación *fuerza-alimentación motor*, es la denominada *zona muerta*. Para este caso, se define aquella región en donde a pesar de generar una alimentación al motor, el balancín no logra moverse, sin importar que el motor esté girando o no. Luego de hacer pruebas, se define que esta zona, en términos de PWM y de voltaje, está entre  $[0 \ 3] \% y [0 \ 265] mV$  respectivamente.

Lo segundo a considerar es la zona de saturación del motor. En términos de PWM, se tiene un valor máximo de  $100 \% PWM$  y mínimo de 0. En términos de voltaje, la zona de saturación superior es de  $4.73 V$ . Este valor se determina al realizar mediciones de voltaje del motor con un  $PWM = 100 \%$ . Comprendiendo que se realizan pruebas con una fuente de  $5 V$ , se entiende que esta pérdida de voltaje se atribuye a la carga ejercida del motor. Ahora, teniendo en cuenta que no se realizará inversión de giro, el valor de saturación inferior es de  $0 V$ .

Ya definidas estas dos secciones, se realiza el siguiente experimento para determinar la constante de fuerza que el motor logra ejercer en el sistema:

*Variar el contrapeso del balancín y determinar el valor de voltaje y de PWM utilizado tal que se establezca a un ángulo de  $0^\circ$  respecto a la horizontal. A partir de estos valores, calcular la fuerza ejercida por el motor para generar el equilibrio estático del balancín.*

Mediante un análisis estático, se define que la fuerza del motor para caso de estabilización horizontal descrita en la ecuación (13).

$$F_m = \frac{W_{cp} \cdot d_2 + W_m \cdot d_1 + W_b \cdot e}{d_1} \quad (13)$$

De esta ecuación, se tienen los siguientes valores constantes:

$$\begin{aligned} m_m &= 3.5 [g] & d_1 &= 13.3 [cm] \\ m_b &= 13.4 [g] & e &= 4.7 [cm] \end{aligned}$$

Dicho esto, en la tabla II se exponen los resultados obtenidos. De estos resultados se pueden hacer diversos análisis. El

Tabla II  
PRUEBAS DE PWM CON CONTRAPESO VARIABLE EN ESTADO ESTABLE HORIZONTAL

n	PWM [%]	Voltaje [V]	Contrapeso [g]	d2 [m]	Fuerza [mN]
1	6.0	0.66	20	-0.045	15.79
2	8.0	0.87	19	-0.045	19.11
3	12.5	1.36	15	-0.045	32.39
4	15.0	1.55	13	-0.045	39.03
5	20.0	1.87	9	-0.045	52.30
6	32.0	2.49	0	-0.045	82.18
7	55.0	3.29	7	0.095	131.23
8	75.0	3.95	14	0.095	180.28
9	90.0	4.39	20	0.095	222.32

primero es con base al sistema Fuerza-Voltaje producido. En la teoría, esta relación debería describirse por una ecuación exponencial, sin embargo, se debe tener en cuenta que el motor utilizado tiene voltaje nominal de  $3.7 V$ , por lo que al llegar a valores superiores, se van a generar pérdidas en el sistema debido al calentamiento y desgaste del mismo. De este modo, en la figura 3 se evidencia la relación Fuerza vs Voltaje del motor. A partir de estos resultados, se define una curva de

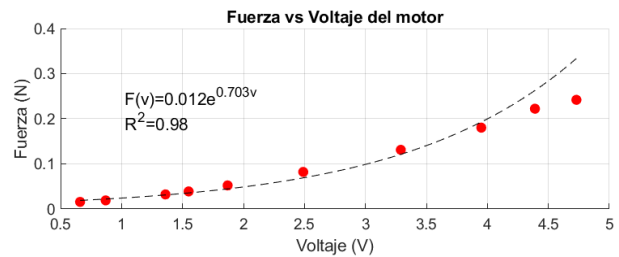


Figura 3. Relación Fuerza vs Voltaje del motor.

mejor ajuste con un coeficiente de determinación asociado:

$$F_v(v) = 0.012e^{0.703v} \quad R^2 = 0.98$$

Como se puede evidenciar, para valores de voltaje mayores al nominal de 3.7 V, se empieza a evidenciar una pérdida esperada de fuerza debido a los motivos mencionados anteriormente.

Sumado a esto, es importante analizar las dinámicas del puente H implementado, ya que este es clave para la relación PWM-Voltaje. Al igual que con la relación Fuerza-Voltaje, véase la figura 4 para evidenciar los resultados obtenidos. A partir de estos resultados, se observa que la curva de

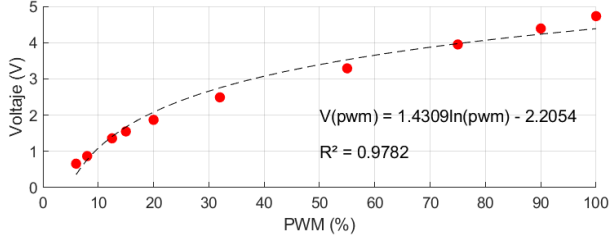


Figura 4. Relación Voltaje del motor vs PWM de control.

mejor ajuste se describe por una función logarítmica con un coeficiente de determinación asociado:

$$F_p(pwm) = 1.4309\ln(pwm) - 2.2054 \quad R^2 = 0.9782$$

Este comportamiento es causado por la no linealidad del puente H al ser sometido a cargas externas como el motor, ya que la exigencia energética requerida genera disminuciones en la capacidad de entrega de voltaje.

Con todo y lo anterior, es importante determinar la relación directa entre PWM y la fuerza del motor, acoplando los dos sistemas mencionados anteriormente. Para esto, se generan dos posibilidades: Generar una función compuesta  $F_v \circ F_p(pwm) = F_v(F_p(pwm))$ ; Generar la relación directa obtenida entre la fuerza y los valores de PWM. Sin importar cualquiera de las dos posibilidades, los resultados deberían ser similares.

Dicho esto, en la figura 5 se evidencian los resultados obtenidos por los dos métodos de aproximación y los valores experimentales obtenidos. De estos resultados, se tienen las

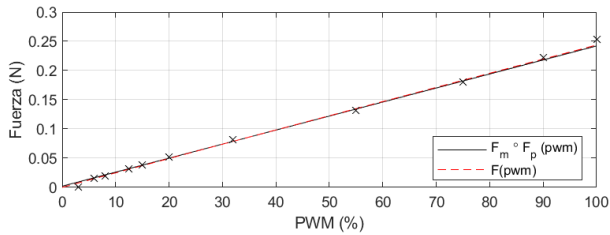


Figura 5. Relación Fuerza del motor vs PWM de control.

dos ecuaciones de aproximación de la relación *Fuerza* vs *PWM*:

$$F_v \circ F_p(pwm) = 0.002546pwm^{0.9905}$$

$$F(pwm) = 0.0024pwm + 0.0021$$

Como se puede evidenciar, a pesar de que la función compuesta describe una exponencial, este valor exponencial es de  $0.9905 \approx 1$ , motivo por el cual su comportamiento se asemeja a una ecuación lineal como lo es en el caso de  $F(pwm)$ . Así mismo, asumiendo este comportamiento lineal, la pendiente de ambos casos es muy semejante entre ellos y pueden ser definidos como esta constante de fuerza del motor. Para obtener un valor más preciso, se decide por promediar estos dos valores, definiendo que:

$$k_m = 0.0025 \left[ \frac{N}{\%} \right] \quad (14)$$

#### V-B. Coeficiente de fricción viscosa

Ahora, para determinar el coeficiente de fricción viscosa del motor, el cual es generado por la fricción del viento, el rodamiento, los cables, entre otros factores, se diseña un experimento consistente en generar diversos procesos de oscilación libre del balancín, donde se suelta a diversas referencias de ángulos respecto a la horizontal. De este modo, se obtienen curvas senoidales moduladas por una función exponencial negativa, donde la parte exponencial está relacionada con el coeficiente deseado dada la siguiente ecuación diferencial:

$$(W_{cp} \cdot d_2 - W_m \cdot d_1 - W_b \cdot e) \cdot \sin(\theta) - \mu \cdot \dot{\theta} = I \cdot \ddot{\theta} \quad (15)$$

De esta forma, la solución de la ecuación relaciona el coeficiente  $\beta$  de la exponencial con los parámetros de la ecuación según la expresión 16.

$$\mu = 2 \cdot I \cdot \beta \quad (16)$$

En la imagen 6, se observan dos gráficas: en primer lugar los datos sin procesar se observan en de color azul; posteriormente, se procesaron los datos, eliminando los datos iniciales donde no se había soltado el balancín, así como los datos cuando el mecanismo alcanzó su posición final. Finalmente, se le aplicó un offset que trasladó verticalmente el punto final de la planta al origen teniendo en cuenta que el cambio de esa posición se debe a la presencia del contrapeso. Al repetir el

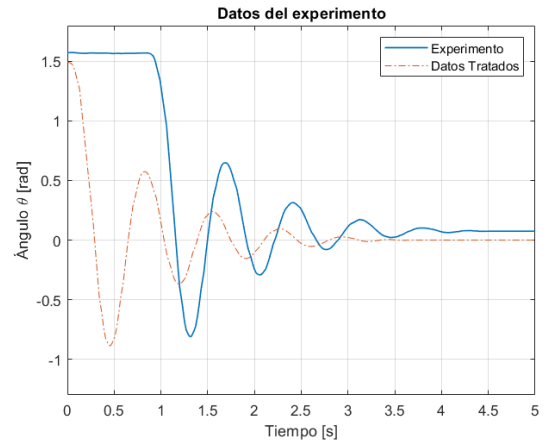


Figura 6. Resultados del experimento.

experimento tres veces, y utilizar los picos de la función para

establecer una regresión exponencial, véase Fig. 7. Se termina por establecer un rango para el parámetro  $\beta$ .

$$1.14 \leq \beta \leq 1.25 \quad (17)$$

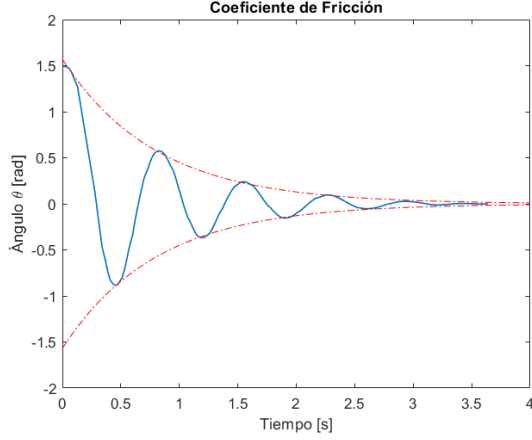


Figura 7. Regresión exponencial.

## VI. PARÁMETROS FINALES DEL MODELO

Teniendo en cuenta los experimentos realizados y la validación de los modelos lineal y no lineal, en la tabla III se consignan los parámetros utilizados para el diseño de controladores. La validación del modelo no lineal con la planta

Tabla III  
PARÁMETRO DEL MODELO NO LINEAL

Parámetro	Valor	Unidades
$W_{cp}$	0.014	$N$
$W_m$	0.030	$N$
$W_b$	0.106	$N$
$d_1$	130.75	$mm$
$d_2$	50.75	$mm$
$e$	41.91	$mm$
$I$	$5.8 \times 10^{-5}$	$kg \cdot m^2$
$k_m$	0.00118	$N \cdot \%^{-1}$
$\mu$	$1.45 \times 10^{-4}$	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$

real se efectúa con una comparativa de respuestas de ambos sistemas a dos señales de referencia (Fig 8)

Con la primera señal de validación se compararon los datos de la simulación no lineal, con los experimentales (Fig 9) Debido a la discrepancia de respuestas, se realiza *fine-tuning* de los parámetros para optimizar el ajuste.

Con base en estos procesos iterativos de validación, se establecen los siguientes valores de la planta:  $\beta = 1.667$ ,  $I = 1.5 \times 10^{-4}$  y  $k_m = 0.00118$ , validando el modelo sobre el resultado experimental.

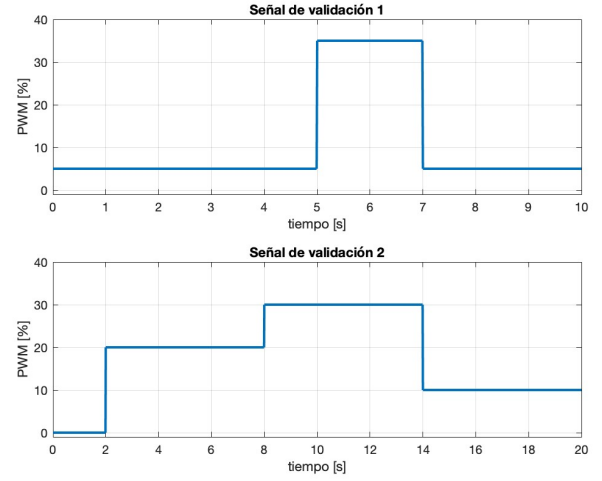


Figura 8. Señales de validación de planta

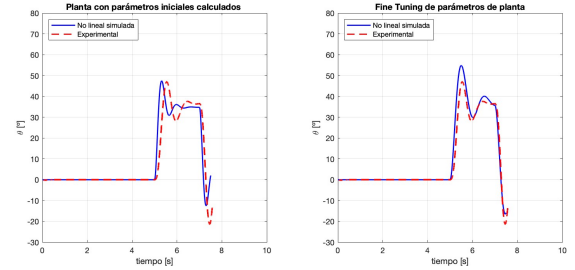


Figura 9. Validación experimental con señal 1 de referencia

## VII. DISEÑO DE CONTROLADORES

### VII-A. PID

Para desarrollar el primer controlador especificado para el proyecto, se debe tener en cuenta que se busca un controlador PID con un punto de operación sobre la horizontal, en este caso con  $\theta = 0^\circ$ ,  $90^\circ$  teniendo en cuenta el modelo planteado en el presente documento. Al realizar la linealización del modelo de la planta para dicho punto de operación se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$G = \frac{a}{s(bs + c)} \quad (18)$$

A partir de la ecuación (18) se puede realizar el diseño de ganancias PID, empleando el método Root Locus.

*VII-A1. Ganancias:* Después de realizar el proceso iterativo para el controlador PID, se definen las siguientes ganancias:

$$G_P = 0.4$$

$$G_I = 0.645$$

$$G_D = 0.06$$

Adicionalmente el equipo de trabajo decide diseñar e implementar una red de adelanto para hacer frente a la incertidumbre del modelo e incrementar su robustez.

$$C_{red} = \frac{0.1144 \cdot s + 1}{0.0474 \cdot s + 1} \quad (19)$$

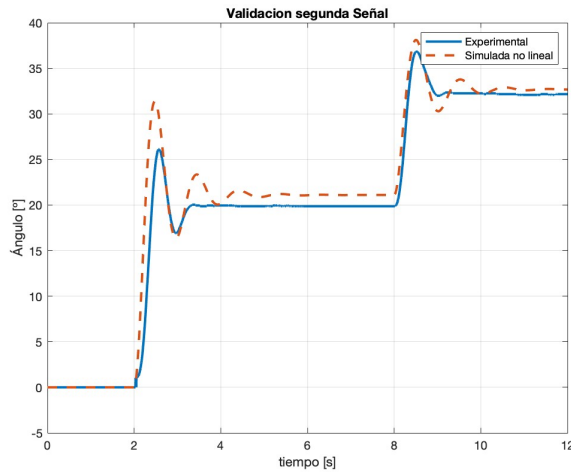


Figura 10. Validación segunda señal

**VII-A2. Análisis de lazo cerrado:** Para corroborar este diseño, en la figura 11 se evidencia el lugar de las raíces de la planta en lazo cerrado. Con base en estos resultados, se pueden

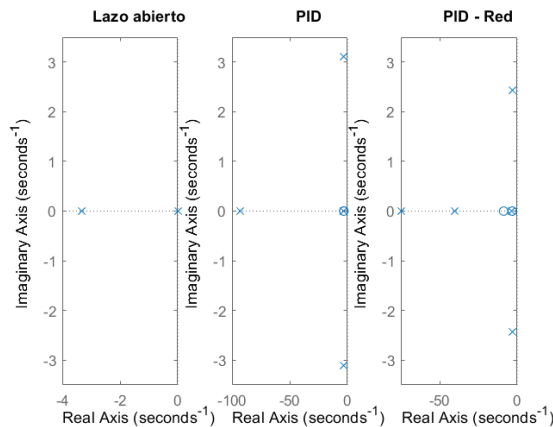


Figura 11. Lugar de las raíces para el sistema en lazo abierto y lazo cerrado.

calcular los resultados obtenidos del controlador mediante la respuesta al paso de la planta, visto en la figura 12. Analizando las respuestas al escalón unitario de los dos controladores, se observa como al implementar la red de adelanto, a pesar de que el sistema se vuelve un poco más lento, su robustez aumenta, elemento que puede visualizarse en el sobrepico del sistema que se ve reducido del 20 % al 13 %.

**VII-A3. Validación de resultados:** Para finalizar el análisis del controlador, es clave realizar una validación de resultados mediante pruebas experimentales. Para esto, se van a realizar pruebas del controlador tanto en simulación como en implementación y se van a comparar las respuestas, lo que permitirá establecer la veracidad del modelo no lineal determinado anteriormente.

Como se evidencia en la figura 13, el resultado de la simulación tiene un menor desempeño a los resultados ob-

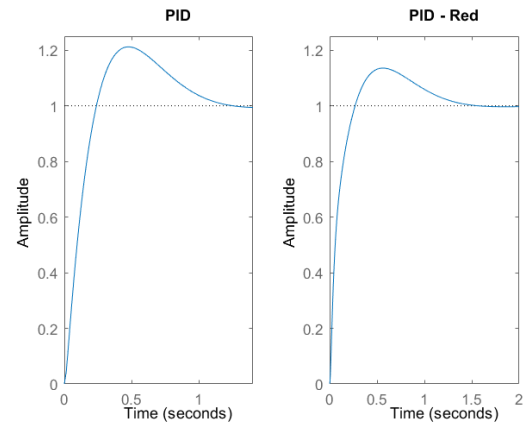


Figura 12. Respuesta al paso unitario de la planta y controlador en lazo cerrado.

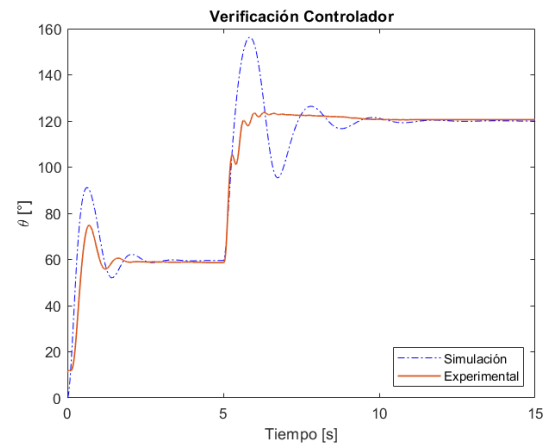


Figura 13. Resultado de prueba de validación para controlador PID con red de adelanto.

tenidos experimentalmente, se debe verificar apropiadamente este diseño, de cara a futuras entregas del proyecto ya que esto sale de espectro para esta versión del mismo.

## VIII. CONCLUSIONES

- La linealización de sistemas no lineales en un punto de operación establecido permite implementar técnicas de control de sistemas lineales a sistemas no lineales siempre y cuando se mantenga una zona de operación cercana al punto de operación establecido.
- La identificación de parámetros físicos de los sistemas es clave para poder diseñar técnicas de control óptimas para el sistema, ya que esto permite reducir la incertidumbre de la planta y además poder realizar simulaciones semejantes a la realidad.
- La implementación de un controlador PID permite generar un buen seguimiento de referencias para el balancín, sin embargo debido a la linealidad del mismo, no es óptimo para trabajar en zonas alejadas del punto de operación.