UMR 8184

Thema

THÉORIE ÉCONOMIQUE,
MODÉLISATION ET APPLICATIONS

Endogénéité et estimation par variables instrumentales

Aristide E. Houndetoungan

28 Septembre 2022

Introduction

- Modèle linéaire-en-moyennes : $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$.
- Hypothèse d'exogénéité des $\mathbf{X}$ (hypothèse H.3, chapitre 1) : $\mathbb{E}(\varepsilon_i|\mathbf{x}_i) = 0 \ \forall\ i$.
- Elle implique que ($\forall\ i$) :
  - $\mathbb{E}\left(\varepsilon_i\right) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}\left(\mathbb{E}\left(\varepsilon_i|\mathbf{x}_i\right)\right) = 0$,
  - $\mathbb{E}\left(\varepsilon_i\mathbf{x}_i\right) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}\left(\mathbb{E}\left(\varepsilon_i\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_i\right)\right) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}\left(\mathbb{E}\left(\varepsilon_i|\mathbf{x}_i\right)\mathbf{x}_i\right) = 0$.
- Elle est cruciale pour montrer que $\mathbb{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}) = \boldsymbol{\beta}_0$ et $\text{plim}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}) = \boldsymbol{\beta}_0$.

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}),$$
$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon},$$
$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}} = \boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Donc,

$$\mathbb{E}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}|\mathbf{X}\right) = \boldsymbol{\beta} + \mathbb{E}\left(\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X}\right) = \boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\,\mathbb{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X}\right) = \boldsymbol{\beta},$$
$$\mathbb{E}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}\right) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}\left(\mathbb{E}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}|\mathbf{X}\right)\right) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}\left(\boldsymbol{\beta}\right) = \boldsymbol{\beta}.$$

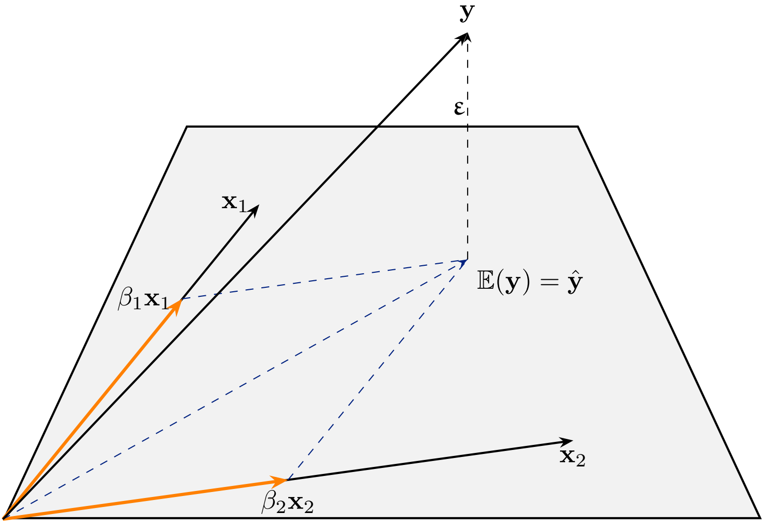
Aussi,

$$\text{plim}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}\right) = \boldsymbol{\beta} + \text{plim}\left(\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{n}\right)^{-1}\frac{\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n}\right),$$
$$\text{plim}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}\right) = \boldsymbol{\beta} + \text{plim}\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{n}\right)^{-1}\text{plim}\left(\frac{\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n}\right).$$

On suppose que $\text{plim}\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{n}\right) = \mathbf{Q}_{\mathbf{xx}}$ et par la loi des grands nombres (LGN), $\text{plim}\left(\frac{\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n}\right) = \mathbb{E}\left(\varepsilon_i\mathbf{x}_i\right) = 0$. Donc,

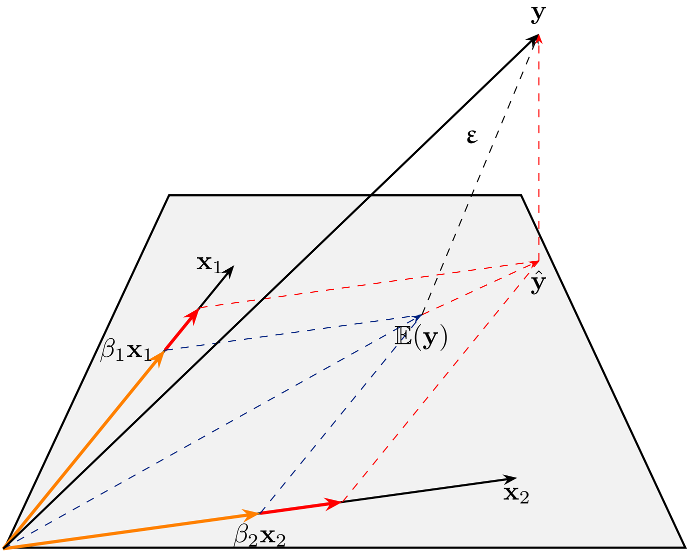
$$\text{plim}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}\right) = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Q}_{\mathbf{xx}}^{-1} \times 0,$$
$$\text{plim}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}\right) = \boldsymbol{\beta}.$$

- Projection de $\mathbf{y}$ dans l'espace de $\mathbf{x}$ en cas **d'exogénéité**.



- L'estimateur des MCO est convergent.

- Projection de $\mathbf{y}$ dans l'espace de $\mathbf{x}$ en cas **d'endogénéité**.



- L'estimateur des MCO n'est pas convergent.

Endogénéité

- L'hypothèse d'exogénéité entre $\mathbf{x}_i$ et ε_i n'est pas souvent vérifiée.
- Exemples :

1. Omission de variables pertinentes : (demande d'essence, E)
   - Vrai modèle : $\log(E) = \beta_1 + \beta_2 \log(prix) + \beta_3 \log(revenu) + \varepsilon$
   - Spécification : $\log(E) = \beta_1 + \beta_2 \log(prix) + \omega$
   - Le terme d'erreur $\omega = \beta_3 \log(revenu) + \varepsilon$ peut être corrélé au prix.
2. Erreur de mesure ou variable proxy
   - Vrai modèle : $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$

     Mais en pratique x est mesuré par $\tilde{x} = x + u$
   - Spécification : $y = \beta_1 + \beta_2 \tilde{x} + \omega$
   - Le terme d'erreur $\omega = -\beta_2 u + \varepsilon$ peut être corrélé à $\tilde{x}$.

3. Simultanéité (Offre et Demande)

$$\begin{cases} \text{Offre :} & Y_O = \beta_1 + \beta_2 Prix + \beta_3 Prix\_intrant + \varepsilon_O, \\ \text{Demande :} & Y_D = \alpha_1 + \alpha_2 Prix + \alpha_3 Revenu + \varepsilon_D, \\ \text{Equilibre :} & Y_O = Y_D \end{cases}$$

A partir de l'équilibre,

$Prix = (\alpha_1 - \beta_1 + \alpha_3 Revenu - \beta_3 Prix\_intrant + \varepsilon_D - \varepsilon_O)/(\beta_2 - \alpha_2)$. Le prix est corrélé à ε_D.

4. Effet de traitement endogène
   - $Revenu = \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta} + \gamma Education + \varepsilon$

     Facteurs inobservés (par l'économètre) qui expliquent le revenu et le niveau d'éducation. L'éducation est potentiellement corrélée à ε.

- Endogénéité : $\mathbb{E}(\varepsilon_i|\mathbf{x}_i) \neq 0$.
- Biais de l'estimateur des MCO.

$$\mathbb{E}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}|\mathbf{X}\right) = \boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\underbrace{\mathbb{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X}\right)}_{\neq \mathbf{0}},$$

$$\mathbb{E}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}|\mathbf{X}\right) \neq \boldsymbol{\beta} \quad \text{en général.}$$

- Non convergence de l'estimateur des MCO.

$$\operatorname{plim}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}\right) = \boldsymbol{\beta} + \operatorname{plim}\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{n}\right)^{-1}\operatorname{plim}\left(\frac{\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n}\right).$$

$$\operatorname{plim}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}\right) = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Q}_{\mathbf{xx}}^{-1}\underbrace{\mathbb{E}\left(\varepsilon_i\mathbf{x}_i\right)}_{\neq \mathbf{0}},$$

$$\operatorname{plim}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}\right) \neq \boldsymbol{\beta} \quad \text{en général.}$$

- Application avec R : script `non_convergence.mco.R`

Variables Instrumentales

- Modèle linéaire simple : $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$, avec endogénéité $\mathbb{E}(\varepsilon|x) \neq 0$.
- Instrument (ou Variable Instrumentale) pour x est une variable z ayant la propriété suivante : variations de z sont associées à des variations de x mais n'entrainent pas à une variation de y (hormis la voie indirecte via x).

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r] & x \arrow[r] & y \\ & \varepsilon \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

- Autrement dit, z est un instrument de x dans le modèle $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$, si :
  1. z n'est pas corrélé à ε,
  2. z est corrélé à x.

- **Exemple 1 : Simultanéité (Offre et Demande)**

$$\begin{cases} \text{Offre} \;: & Y_O = \beta_1 + \beta_2 Prix + \beta_3 Prix\_intrant + \varepsilon_O, \\ \text{Demande} : & Y_D = \alpha_1 + \alpha_2 Prix + \alpha_3 Revenu + \varepsilon_D, \\ \text{Equilibre} : & Y_O = Y_D \end{cases}$$

A partir de l'équilibre,

$Prix = (\alpha_1 - \beta_1 + \alpha_3 Revenu - \beta_3 Prix\_intrant + \varepsilon_D - \varepsilon_O)/(\beta_2 - \alpha_2)$. Le prix est une variable endogène dans l'Equation de demande. Un instrument possible du prix est le prix des intrants.

- **Exemple 2 : Impact de l'éducation sur le salaire**
- L'éducation est endogène.
- Instrument 1 : distance entre l'adresse de résidence et l'université ou le collège [voir Card, David. (1993). *Using geographic variation in college proximity to estimate the return to schooling*.].
  - Cet instrument requiert la prise en compte de régresseurs supplémentaires tels que des indicatrices de zones non métropolitaines .
- Instrument 2 : Mois de naissance [voir Angrist, Joshua D., et Alan B. Keueger. (1991). *Does compulsory school attendance affect schooling and earnings ?*].

  Cet instrument est souvent critiqué dans la littérature [voir Bound, Jaeger, et Baker. (1995). *Problems with instrumental variables estimation when the correlation between the instruments and the endogenous explanatory variable is weak.*].

Hypothèses

- **Hypothèses de la méthode des MCO**

  H.1. Linéarité : $y_i = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i$.

  H.2. Indépendance linéaire des variables explicatives : $\text{rang}(\mathbf{X}) = K$.

  H.3. Exogénéité des variables explicatives : $\mathbb{E}(\varepsilon_i|\mathbf{x}_i) = 0 \implies \varepsilon_i \perp \mathbf{x}_i$.

  H.4. Homoscédasticité et non autocorrélation des erreurs.

  H.5. Normalité des erreurs : chaque ε_i suit une distribution normale.

  H.6. $(\varepsilon_1, \mathbf{x}_1)$, ..., $(\varepsilon_n, \mathbf{x}_n)$ sont i.i.d.

- Dans ce chapitre, l'hypothèse H.3. n'est pas vérifiée : $\mathbb{E}(\varepsilon_i|\mathbf{x}_i) \neq 0$.
- Existence d'un ensemble de variables additionnelles, $\mathbf{Z}$
  - **exogènes par rapport** à ε : $\mathbb{E}(\varepsilon|\mathbf{z}) = 0$;
  - **fortement corrélées** avec $\mathbf{X}$.
- La matrice $\mathbf{Z}$ de dimension $n \times L$ est appelée matrice des variables instrumentales.

- **Hypothèses additionnelles**

H.7. $(\varepsilon_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{z}_1)$, ..., $(\varepsilon_n, \mathbf{x}_n, \mathbf{z}_n)$ sont i.i.d.

H.8. $\mathbb{E}(\varepsilon_i|\mathbf{z}_i) = 0$ pour tout i (exogénéité de $\mathbf{Z}$ par rapport à $\boldsymbol{\varepsilon}$).

- H.8. implique que $\mathbb{E}(\mathbf{z}_i\varepsilon_i) = \mathbb{E}_{\mathbf{z}}\left(\mathbb{E}(\mathbf{z}_i\varepsilon_i|\mathbf{z}_i)\right) = \mathbb{E}_{\mathbf{z}}\left(\mathbf{z}_i\,\mathbb{E}(\varepsilon_i|\mathbf{z}_i)\right) = 0$.
- Par la LGN, $\text{plim}\,\dfrac{\mathbf{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n} = \mathbb{E}(\mathbf{z}_i\varepsilon_i) = \mathbf{0}$.

H.9. $\text{plim}\,\dfrac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{n} = \mathbf{Q}_{\mathbf{zz}}$ est une matrice finie et définie positive.

H.10. $\text{plim}\,\dfrac{\mathbf{Z}'\mathbf{X}}{n} = \mathbf{Q}_{\mathbf{zx}}$ est une matrice finie non nulle $L \times K$ de rang K.

- H.10. requiert que $\mathbf{Z}$ soit corrélé à $\mathbf{X}$ et que $L \geq K$. Modèle non identifié si $L < K$, juste identifié si $L = K$ et sur identifié si $L > K$
- Seuls des régresseurs du modèle initial ne peuvent pas constituer $\mathbf{Z}$.
- Naturellement, toutes les variables explicatives non corrélées à ε sont incluses dans $\mathbf{Z}$. Ces variables sont par la suite complétées par des variables additionnelles (autres que des régresseurs) comme instruments des variables explicatives endogènes (exclues de $\mathbf{Z}$).

Méthode des variables instrumentales (IV)

- S'utilise seulement lorsque $L = K$.

$$\text{plim}\left(\frac{\mathbf{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n}\right) = \text{plim}\left(\frac{\mathbf{Z}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}{n}\right) = \mathbf{0}$$
$$\text{plim}\left(\frac{\mathbf{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n}\right) = \text{plim}\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{y}}{n}\right) - \text{plim}\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{X}}{n}\right)\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$$
$$\text{plim}\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{X}}{n}\right)\boldsymbol{\beta} = \text{plim}\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{y}}{n}\right)$$

Si $L = K$, alors $\mathbf{Z}'\mathbf{X}$ est une matrice carrée et $\text{plim}\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{X}}{n}\right)$ est inversible. Donc,

$$\boldsymbol{\beta} = \left[\text{plim}\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{X}}{n}\right)\right]^{-1}\text{plim}\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{y}}{n}\right)$$

- L'estimateur de variable instrumentale est alors (si $L = K$).

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{Z}'\mathbf{y} \tag{1}$$

- Par construction, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}}$ est convergent : $\text{plim}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}}\right) = \boldsymbol{\beta}$.
- En remplaçant $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dans l'Eq. (1), on a,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}} = \left(\mathbf{Z}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{Z}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{Z}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\boldsymbol{\varepsilon},$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}} = \boldsymbol{\beta} + \left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{X}}{n}\right)^{-1}\frac{\mathbf{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n}.$$

- En grand échantillon, $\frac{\mathbf{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \frac{\sigma^2}{n}\mathbf{Q}_{\mathbf{zz}}\right)$. Donc,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\beta}, \frac{\sigma^2}{n}\mathbf{Q}_{\mathbf{zx}}^{-1}\mathbf{Q}_{\mathbf{zz}}\mathbf{Q}_{\mathbf{zx}}^{-1}\right) \tag{2}$$

- Un estimateur convergent de σ^2 est,

$$\hat{\sigma}^2_{\text{IV}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}}\right)^2. \tag{3}$$

- En pratique, la variance asymptotique de $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}}$ est estimée par,

$$\text{Est.Asy.}\,\mathbb{V}\mathbf{ar}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}}\right) = \hat{\sigma}^2_{\text{IV}}(\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})(\mathbf{X}'\mathbf{Z})^{-1}. \tag{4}$$

Méthode des doubles moindres carrés

- Modèle : $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$.
- Méthode plus générale $(L \geq K)$.
- Si $L > K$, alors $\mathbf{X}'\mathbf{Z}$ n'est plus une matrice carrée et est donc non inversible.
- Doubles moindres carrés : méthode en deux étapes.
  - **Etape 1 :** Projeter chaque terme du modèle dans l'espace formé par $\mathbf{Z}$ et on obtient,

$$\mathbf{P_z y} = \mathbf{P_z X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{P_z}\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{5}$$

    où $\mathbf{P_z} = \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'$.

    Autrement dit, on régresse $\mathbf{y}$ et chaque $\mathbf{X}$ sur $\mathbf{Z}$ et on calcule la variable dépendante prédite.
  - **Etape 2 :** Appliquer la méthode des MCO à l'Eq. (5).

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}} = \left[\mathbf{X}'\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}\right]$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}} = \left[\mathbf{X}'\mathbf{P_z X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\mathbf{P_z y}\right] \tag{6}$$

- Modèle projeté : $\mathbf{P_z y} = \mathbf{P_z X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{P_z}\boldsymbol{\varepsilon}$.
- Intuition : Nouvelle variable explicative $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{P_z X}$ exogène par rapport au nouveau terme d'erreur $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{P_z}\boldsymbol{\varepsilon}$. En effet,

$$\text{plim}\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{n}\right) = \text{plim}\left(\frac{(\mathbf{P_z X})'\mathbf{P_z}\boldsymbol{\varepsilon}}{n}\right) = \text{plim}\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{P_z}'\mathbf{P_z}\boldsymbol{\varepsilon}}{n}\right) = \text{plim}\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{P_z}\boldsymbol{\varepsilon}}{n}\right),$$

$$\text{plim}\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{n}\right) = \text{plim}\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n}\right),$$

$$\text{plim}\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{n}\right) = \text{plim}\left[\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{Z}}{n}\right)\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{n}\right)^{-1}\left(\frac{\mathbf{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n}\right)\right]$$

$$\text{plim}\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{n}\right) = \text{plim}\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{Z}}{n}\right)\text{plim}\left[\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{n}\right)^{-1}\right]\text{plim}\left(\frac{\mathbf{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n}\right),$$

$$\text{plim}\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{n}\right) = \mathbf{0}.$$

- Donc $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}}$ est convergent.

- $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}} = \left[\mathbf{X}'\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}\right]$
- En remplaçant $\mathbf{y}$ par $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, on a,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}} = \boldsymbol{\beta} + \left[\mathbf{X}'\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}\right],$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}} = \boldsymbol{\beta} + \left[\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{Z}}{n}\right)\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{n}\right)^{-1}\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{X}}{n}\right)\right]^{-1}\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{Z}}{n}\right)\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{n}\right)^{-1}\left(\frac{\mathbf{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n}\right).$$

- En grand échantillon, $\dfrac{\mathbf{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \dfrac{\sigma^2}{n}\mathbf{Q}_{\mathbf{zz}}\right)$. Donc,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\beta}, \frac{\sigma^2}{n}\left(\mathbf{Q}_{\mathbf{zx}}'\mathbf{Q}_{\mathbf{zz}}^{-1}\mathbf{Q}_{\mathbf{zx}}\right)^{-1}\right) \tag{7}$$

- Un estimateur convergent de σ^2 est,

$$\hat{\sigma}^2_{\text{2SLS}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}}\right)^2. \tag{8}$$

- En pratique, la variance asymptotique de $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}}$ est estimée par,

$$\text{Est.Asy.}\,\mathbb{V}\mathbf{ar}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}}\right) = \hat{\sigma}^2_{\text{2SLS}}\left(\mathbf{X}'\mathbf{P}_{\mathbf{z}}\mathbf{X}\right)^{-1}. \tag{9}$$

Tests de spécification

Tests de Hausman et de Wu

- Une variable peut être considérée à tort comme endogène.
- Avec un instrument valide pour cette variable, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}}$ ou $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}}$ est pourtant convergent.
- Puisque la variable n'est pas endogène, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}$ est aussi convergent. Mieux encore, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}$ est BLUE (variance plus petite que celles de $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}}$ et $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}}$).
- Important de tester si la variable est effectivement endogène (hypothèse alternative) ou non (hypothèse nulle).
- Si le test ne rejette pas l'hypothèse nulle, il est alors préférable de garder $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}$ qui est plus précis que $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}}$ et $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}}$.
- Deux tests couramment utilisés : test de **Hausman** et test de **Wu**.

- **Hypothèse nulle :** $\mathbf{X}$ est exogène ; **Hypothèse alternative :** $\mathbf{X}$ est endogène ;

- <u>**Test de Hausman**</u>

- **Intuition** : Sous l'hypothèse nulle, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}}$ (ou $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}}$), ainsi que $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}$ sont convergents et devraient être très proches. Le test compare donc $\mathbf{d} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}$ à $\mathbf{0}$. Si $\mathbf{d}$ est trop éloigné de $\mathbf{0}$, on rejette l'hypothèse nulle. Dans le cas contraire, on ne la rejette pas.

- Statistique du test :

$$H = \mathbf{d}' \left\{ \text{Est.Asy.} \, \mathbb{V}\mathbf{ar} \left(\mathbf{d} \right) \right\}^{-1} \mathbf{d} \tag{10}$$

- Hausman montre que,

$$\text{Est.Asy.} \, \mathbb{V}\mathbf{ar} \left(\mathbf{d} \right) = \hat{\sigma}^2_{\text{MCO}} \left(\left(\mathbf{X}' \mathbf{P_z} \mathbf{X} \right)^{-1} - \left(\mathbf{X}' \mathbf{X} \right)^{-1} \right). \tag{11}$$

- La statistique d'Hausman $H \sim \chi^2(K)$ si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Z}$ n'ont pas de variables communes, ce qui est rarement le cas (généralement le vecteur de "uns" associé à l'intercept est inclus dans $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Z}$).
- En présence de variables communes dans $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Z}$, le rang de la matrice à inverser, Est.Asy. $\mathbb{V}\mathbf{ar}\,(\mathbf{d})$, est $K* < K$, où K^* est le nombre de variables explicatives endogènes, et on a besoin de recourir à un inverse généralisé.
- La statistique H suit alors une $\chi^2(K^*)$ sous l'hypothèse nulle.

- **Test de Wu**

- Soit $\mathbf{X}^*$ les K^* variables explicatives dans $\mathbf{X}$ exclues de $\mathbf{Z}$.
- On estime par MCO le modèle,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \hat{\mathbf{X}}^*\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}^*, \tag{12}$$

où $\hat{\mathbf{X}}^*$ est la variation dépendante prédite lorsque $\mathbf{X}^*$ est régressé sur $\mathbf{Z}$; i.e., $\hat{\mathbf{X}}^* = \mathbf{P_z}\mathbf{X}^*$.

- Tester l'endogénéité revient à tester si $\boldsymbol{\gamma} = 0$ (test classique de nullité de coefficients). Si on rejette l'hypothèse $\boldsymbol{\gamma} = 0$, alors $\mathbf{X}^*$ est endogène.

Tests de spécification

Test de suridentification

- Méthode de IV est développée autour des conditions d'orthogonalité : $\mathbb{E}(\mathbf{z}_i\varepsilon_i) = 0$.
- Contrepartie empirique est l'équation de moments $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{z}_i\varepsilon_i = 0$.
- Si $L = K$, alors l'équation de moments est un système de K équations à K inconnues et la solution est $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}$.
- Lorsque $L > K$, le système n'a pas de solution. Mais le modèle est estimé par projection dans l'espace des Z. Rien ne garantit que la solution $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}}$ vérifie toujours l'équation de moments.
- Le test de suridentification consiste donc à vérifier si $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{z}_i\varepsilon_i = 0$ dans le cas où $L > H$. L'hypothèse nulle est $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{z}_i\varepsilon_i = 0$.

- Soit $\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{z}_i \hat{\varepsilon}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{z}_i \left(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}} \right)$.
- La statistique du test est,

$$\bar{S} = \bar{\mathbf{m}}' \, \mathbb{V}\mathbf{ar}\left(\bar{\mathbf{m}}\right)^{-1} \bar{\mathbf{m}}, \tag{13}$$

- Sous l'hypothèse nulle $\bar{S} \sim \chi^2(L - K)$.
- Sous l'hypothèse nulle,

$$\mathbb{V}\mathbf{ar}\left(\bar{\mathbf{m}}\right) = \frac{\hat{\sigma}^2}{n} \mathbf{Z}'\mathbf{Z}.$$

En pratique cette variance peut être remplacée par un estimateur convergent,

$$\text{Est.}\, \mathbb{V}\mathbf{ar}\left(\bar{\mathbf{m}}\right) = \frac{\hat{\sigma}^2_{\text{2SLS}}}{n} \mathbf{Z}'\mathbf{Z}.$$

Instruments faibles

- Deux conditions d'un instrument :
  1. **exogènes par rapport** à ε : $\mathbb{E}(\varepsilon|\mathbf{z}) = 0$;
  2. **fortement corrélées** avec $\mathbf{X}$.
- Les chercheurs se sont plus focalisés sur l'exogénéité (condition 1). Une littérature de plus en plus abondante soutient qu'une plus grande attention doit être également accordée à la corrélation entre l'instrument et la variable endogène.
- L'exogénéité garantit la convergence de l'estimateur. Toutefois, lorsque la corrélation entre $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{X}$ est faible, i.e., quand $(1/n)\mathbf{Z}'\mathbf{X} \approx 0$, un certain nombre de problèmes ont été mis en lumière :
  - estimateur imprécis car $\mathbb{V}\mathbf{ar}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}}\right)$ est plus grande ;
  - estimateur fortement biaisé vers celui des MCO.

- Tester la faiblesse/force des instruments.
- Dans le cas d'une seule variable x^* endogène instrumentée par $\mathbf{z}^*$, on estime le modèle,

$$x_i^* = \mathbf{z}_i^{*\prime}\boldsymbol{\pi} + v_i. \tag{14}$$

  Pour que l'instrument soit fort, la statistique de Fisher du modèle doit être supérieure à 10.
- Cette méthode est seulement valide dans le cas d'une seule variable explicative endogène.

- En présence de plusieurs variables explicatives endogènes, Godfrey (1999) propose une méthode alternative.
- Pour chaque variable explicative endogène, on calcule,

$$R_k^2 = \frac{\left[\left(\mathbf{X}'\mathbf{X} \right)^{-1} \right]_{kk}}{\left[\left(\mathbf{X}'\mathbf{P_z}\mathbf{X} \right)^{-1} \right]_{kk}}, \quad (15)$$

  où l'indice kk signifie le $k^{\text{ème}}$ élément de la diagonale de la matrice.
- R_k^2 et il s'interprète comme un R^2 usuel. Lorsqu'il est proche de 1 la $k^{\text{ème}}$ variable explicative endogène est bien instrumentée (instruments forts).

Méthode des moments généralisée (GMM)

- Conditions de moments de la population conduisent à des contreparties empiriques qui peuvent être utilisées pour estimer les paramètres.
- Exemple :
  - Conditions de moments : $\mathbb{E}(\mathbf{z}_i \varepsilon_i) = \mathbb{E}(\underbrace{\mathbf{z}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}_{\text{Fonct. de Moment}}) = 0.$
  - Contrepartie Empirique : $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{z}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) = 0$ qui implique $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}$, si $L = K$.
- L'estimateur GMM généralise celui des MCO, IV, 2SLS et bien d'autres.
- Basé sur la contrepartie empirique de conditions de moments.
- Les conditions de moments nécessitent une fonction de moments.

- **Fonction de moments :** généralement notée $\mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \theta)$, une fonction de dimension $L \geq K$, où $K = \dim(\theta)$ et θ est le paramètre à estimer, qui satisfait la condition,

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \theta)\right) = \mathbf{0}. \tag{16}$$

La contrepartie empirique implique,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \theta) = \mathbf{0}. \tag{17}$$

- Lorsque $K = L$, l'Eq. (17) admet généralement une unique solution et on parle simplement de méthode des moments (MM).

Exemples de fonctions de moments

- **Modèle linéaire-en-moyennes avec exogénéité**

- Si $\mathbf{x}$ est exogène, alors

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \theta) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_i, \theta) = \mathbf{x}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) \tag{18}$$

satisfait les conditions de moments.

- En effet, $\mathbb{E}(\mathbf{x}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})) = \mathbb{E}(\mathbf{x}_i\varepsilon_i) = 0$.
- Avec la contrepartie empirique $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \theta) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$, on peut montrer que l'estimateur de MM est $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MM}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$.
- L'estimateur des MCO est donc un estimateur de MM.

- **Modèle linéaire-en-moyennes avec endogénéité**

- La condition d'orthogonalité des instruments peut être utilisée pour définir la fonction de moments :

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \theta) = \mathbf{z}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}). \tag{19}$$

- En effet, $\mathbb{E}(\mathbf{z}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})) = \mathbb{E}(\mathbf{z}_i\varepsilon_i) = 0$.
- Avec la contrepartie empirique $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{z}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$, on peut montrer que si $L = K$, l'estimateur de MM est $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MM}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}$.
- L'estimateur de variables instrumentales est donc un estimateur de MM.

- **Modèle non linéaire**

- Modèle : $y_i = h(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}) + \varepsilon_i$, où h est une fonction non linéaire.
- Le terme d'erreur est $\varepsilon_i = y_i - h(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})$. La condition d'orthogonalité des instruments peut être utilisée pour définir la fonction de moments.

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{m}_i \left(y_i - h(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})\right). \tag{20}$$

  où $\mathbf{m}_i$ peut contenir des instruments ou des variables explicatives exogènes. $\mathbf{m}_i$ peut être aussi une fonction d'instrument et de variables explicatives exogènes.
- Il est important d'inclure suffisamment d'instruments et de variables explicatives exogènes dans $\mathbf{m}_i$ quitte à ce que $\dim(\mathbf{m}_i) = \dim(\boldsymbol{\theta})$

Estimateur GMM

- Même si $L = K$, ce n'est pas toujours simple de trouver un θ qui satisfait la contrepartie empirique des conditions de moments (surtout dans le cas d'un modèle non linéaire). L'estimateur de méthode de moments de θ, notée θ_{MM}, est définie comme étant la valeur de θ qui minimise,

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \theta)\right]' \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \theta)\right]. \tag{21}$$

- Lorsque $L > K$, comme dans le cas de la méthode IV, la contrepartie empirique des conditions de moments n'admet pas de solution. On a alors recourt à l'estimateur GMM, noté $\hat{\theta}_{\text{GMM}}$, en minimisant

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \theta)\right]' \mathbf{W} \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \theta)\right], \tag{22}$$

où $\mathbf{W}$ est une matrice de poids de dimension $L \times L$.

- Dans le cas d'un modèle linéaire avec endogénéité, $\mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{z}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})$, Donc,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GMM}} = \left[\mathbf{X}'\mathbf{Z}\mathbf{W}\mathbf{Z}'\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\mathbf{Z}\mathbf{W}\mathbf{Z}'\mathbf{y}\right], \tag{23}$$

- Si $\mathbf{W} = \left(\frac{1}{N}\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)^{-1}$, alors $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GMM}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{2SLS}}$.
- L'estimateur de doubles moindres carrés est aussi un estimateur GMM.
- Il est également possible de définir $\mathbf{W}$ pour que l'estimateur GMM soit optimale (faible variance), noté $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{OGMM}}$. Dans ce cas, l'estimation se fait en deux étapes.
    - Etape 1 : On calcule $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GMM}}$ avec $\mathbf{W} = \mathbf{I}$.
    - Etape 2 : On calcule ensuite $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{OGMM}}$ avec $\mathbf{W} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GMM}})\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i'$.
- La variance de l'estimateur OGMM est robuste à l'hetéroscédasticité.

- Application avec R : script `iv-gmm.R`