

## Endogénéité et estimation par variables instrumentales

Aristide E. Houndetoungan

28 Septembre 2022

# Introduction

- Modèle linéaire-en-moyennes :  $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ .
- Hypothèse d'exogénéité des  $\mathbf{X}$  (hypothèse H.3, chapitre 1) :  $\mathbb{E}(\varepsilon_i|\mathbf{x}_i) = 0 \ \forall \ i$ .
- Elle implique que ( $\forall \ i$ ) :
  - $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}(\mathbb{E}(\varepsilon_i|\mathbf{x}_i)) = 0$ ,
  - $\mathbb{E}(\varepsilon_i\mathbf{x}_i) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}(\mathbb{E}(\varepsilon_i\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_i)) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}(\mathbb{E}(\varepsilon_i|\mathbf{x}_i)\mathbf{x}_i) = 0$ .
- Elle est cruciale pour montrer que  $\mathbb{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}) = \boldsymbol{\beta}_0$  et  $\text{plim}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}}) = \boldsymbol{\beta}_0$ .

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}),$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon},$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MCO}} = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Donc,

$$\mathbb{E} \left( \hat{\beta}_{\text{MCO}} | \mathbf{X} \right) = \beta + \mathbb{E} \left( (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\varepsilon | \mathbf{X} \right) = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbb{E} (\varepsilon | \mathbf{X}) = \beta,$$

$$\mathbb{E} \left( \hat{\beta}_{\text{MCO}} \right) = \mathbb{E}_{\mathbf{X}} \left( \mathbb{E} \left( \hat{\beta}_{\text{MCO}} | \mathbf{X} \right) \right) = \mathbb{E}_{\mathbf{X}} (\beta) = \beta.$$

Aussi,

$$\text{plim} \left( \hat{\beta}_{\text{MCO}} \right) = \beta + \text{plim} \left( \left( \frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{n} \right)^{-1} \frac{\mathbf{X}'\varepsilon}{n} \right),$$

$$\text{plim} \left( \hat{\beta}_{\text{MCO}} \right) = \beta + \text{plim} \left( \frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{n} \right)^{-1} \text{plim} \left( \frac{\mathbf{X}'\varepsilon}{n} \right).$$

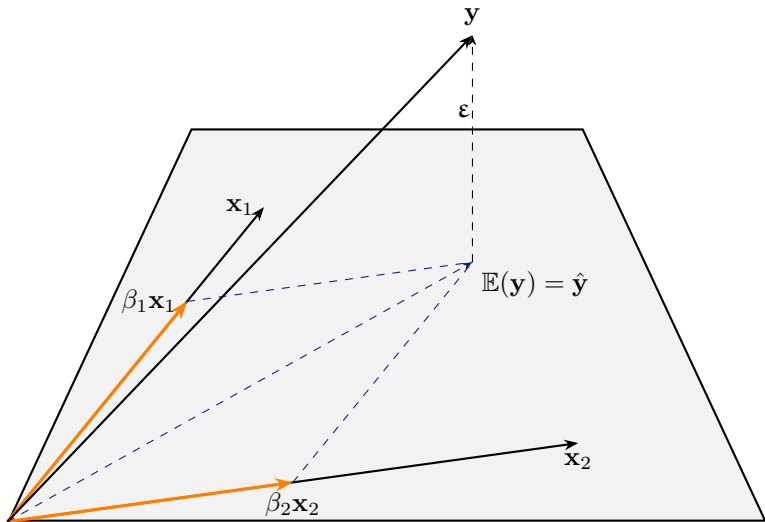
On suppose que  $\text{plim} \left( \frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{n} \right) = \mathbf{Q}_{\mathbf{xx}}$  et par la loi des grands nombres

(LGN),  $\text{plim} \left( \frac{\mathbf{X}'\varepsilon}{n} \right) = \mathbb{E} (\varepsilon_i \mathbf{x}_i) = 0$ . Donc,

$$\text{plim} \left( \hat{\beta}_{\text{MCO}} \right) = \beta + \mathbf{Q}_{\mathbf{xx}}^{-1} \times 0,$$

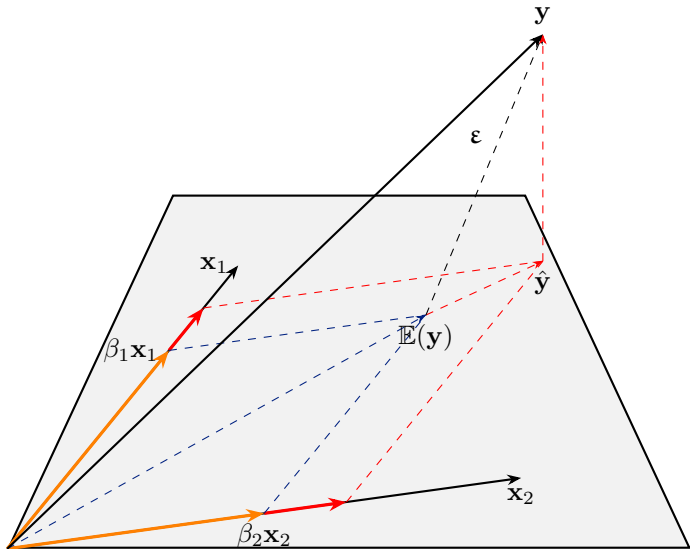
$$\text{plim} \left( \hat{\beta}_{\text{MCO}} \right) = \beta.$$

- Projection de  $y$  dans l'espace de  $x$  en cas **d'exogénéité**.



- L'estimateur des MCO est convergent.

- Projection de  $y$  dans l'espace de  $x$  en cas **d'endogénéité**.



- L'estimateur des MCO n'est pas convergent.

# Endogénéité

- L'hypothèse d'exogénéité entre  $\mathbf{x}_i$  et  $\varepsilon_i$  n'est pas souvent vérifiée.
- Exemples :
  - ① Omission de variables pertinentes : (demande d'essence,  $E$ )
    - Vrai modèle :  $\log(E) = \beta_1 + \beta_2 \log(\text{prix}) + \beta_3 \log(\text{revenu}) + \varepsilon$
    - Spécification :  $\log(E) = \beta_1 + \beta_2 \log(\text{prix}) + \omega$
    - Le terme d'erreur  $\omega = \beta_3 \log(\text{revenu}) + \varepsilon$  peut être corrélé au prix.
  - ② Erreur de mesure ou variable proxy
    - Vrai modèle :  $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$   
Mais en pratique  $x$  est mesuré par  $\tilde{x} = x + u$
    - Spécification :  $y = \beta_1 + \beta_2 \tilde{x} + \omega$
    - Le terme d'erreur  $\omega = -\beta_2 u + \varepsilon$  peut être corrélé à  $\tilde{x}$ .

### ③ Simultanéité (Offre et Demande)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Offre :} \quad Y_O = \beta_1 + \beta_2 \textit{Prix} + \beta_3 \textit{Prix\_intransit} + \varepsilon_O, \\ \text{Demande :} \quad Y_D = \alpha_1 + \alpha_2 \textit{Prix} + \alpha_3 \textit{Revenu} + \varepsilon_D, \\ \text{Equilibre :} \quad Y_O = Y_D \end{array} \right.$$

A partir de l'équilibre,

$\textit{Prix} = (\alpha_1 - \beta_1 + \alpha_3 \textit{Revenu} - \beta_3 \textit{Prix\_intransit} + \varepsilon_D - \varepsilon_O) / (\beta_2 - \alpha_2)$ . Le prix est corrélé à  $\varepsilon_D$ .

### ④ Effet de traitement endogène

- $\textit{Revenu} = \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta} + \gamma \textit{Education} + \varepsilon$

Facteurs inobservés (par l'économètre) qui expliquent le revenu et le niveau d'éducation. L'éducation est potentiellement corrélée à  $\varepsilon$ .

- Endogénéité :  $\mathbb{E}(\varepsilon_i|\mathbf{x}_i) \neq 0$ .
- Biais de l'estimateur des MCO.

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}_{\text{MCO}}|\mathbf{X}) = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon|\mathbf{X})}_{\neq 0},$$

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}_{\text{MCO}}|\mathbf{X}) \neq \beta \quad \text{en général.}$$

- Non convergence de l'estimateur des MCO.

$$\text{plim}(\hat{\beta}_{\text{MCO}}) = \beta + \text{plim}\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{n}\right)^{-1} \text{plim}\left(\frac{\mathbf{X}'\varepsilon}{n}\right).$$

$$\text{plim}(\hat{\beta}_{\text{MCO}}) = \beta + \mathbf{Q}_{\mathbf{xx}}^{-1} \underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_i\mathbf{x}_i)}_{\neq 0},$$

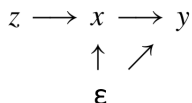
$$\text{plim}(\hat{\beta}_{\text{MCO}}) \neq \beta \quad \text{en général.}$$

- Application avec R : script `non_convergence.mco.R`



# Variables Instrumentales

- Modèle linéaire simple :  $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$ , avec endogénéité  $\mathbb{E}(\varepsilon|x) \neq 0$ .
- **Instrument** (ou **Variable Instrumentale**) pour  $x$  est une variable  $z$  ayant la propriété suivante : variations de  $z$  sont associées à des variations de  $x$  mais n'entraînent pas à une variation de  $y$  (hormis la voie indirecte via  $x$ ).



- Autrement dit,  $z$  est un instrument de  $x$  dans le modèle  $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$ , si :
  - ①  $z$  n'est pas corrélé à  $\varepsilon$ ,
  - ②  $z$  est corrélé à  $x$ .

- **Exemple 1 : Simultanéité (Offre et Demande)**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Offre :} \quad Y_O = \beta_1 + \beta_2 \textit{Prix} + \beta_3 \textit{Prix\_intransant} + \varepsilon_O, \\ \text{Demande :} \quad Y_D = \alpha_1 + \alpha_2 \textit{Prix} + \alpha_3 \textit{Revenu} + \varepsilon_D, \\ \text{Equilibre :} \quad Y_O = Y_D \end{array} \right.$$

A partir de l'équilibre,

$\textit{Prix} = (\alpha_1 - \beta_1 + \alpha_3 \textit{Revenu} - \beta_3 \textit{Prix\_intransant} + \varepsilon_D - \varepsilon_O) / (\beta_2 - \alpha_2)$ . Le prix est une variable endogène dans l'Equation de demande. Un instrument possible du prix est le prix des intrants.

- **Exemple 2 : Impact de l'éducation sur le salaire**

- L'éducation est endogène.

- Instrument 1 : distance entre l'adresse de résidence et l'université ou le collège [voir Card, David. (1993). *Using geographic variation in college proximity to estimate the return to schooling.*].
  - Cet instrument requiert la prise en compte de régresseurs supplémentaires tels que des indicatrices de zones non métropolitaines .
- Instrument 2 : Mois de naissance [voir Angrist, Joshua D., et Alan B. Keueger. (1991). *Does compulsory school attendance affect schooling and earnings ?*].

Cet instrument est souvent critiqué dans la littérature [voir Bound, Jaeger, et Baker. (1995). *Problems with instrumental variables estimation when the correlation between the instruments and the endogenous explanatory variable is weak.*].

# Hypothèses

- Hypothèses de la méthode des MCO

H.1. Linéarité :  $y_i = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i$ .

H.2. Indépendance linéaire des variables explicatives :  $\text{rang}(\mathbf{X}) = K$ .

H.3. Exogénéité des variables explicatives :  $\mathbb{E}(\varepsilon_i | \mathbf{x}_i) = 0 \implies \varepsilon_i \perp \mathbf{x}_i$ .

H.4. Homoscédasticité et non autocorrélation des erreurs.

H.5. Normalité des erreurs : chaque  $\varepsilon_i$  suit une distribution normale.

H.6.  $(\varepsilon_1, \mathbf{x}_1), \dots, (\varepsilon_n, \mathbf{x}_n)$  sont i.i.d.

- Dans ce chapitre, l'hypothèse H.3. n'est pas vérifiée :  $\mathbb{E}(\varepsilon_i | \mathbf{x}_i) \neq 0$ .

- Existence d'un ensemble de variables additionnelles,  $\mathbf{Z}$

  - exogènes par rapport à  $\varepsilon$  :  $\mathbb{E}(\varepsilon | \mathbf{z}) = 0$  ;

  - fortement corrélées avec  $\mathbf{X}$ .

- La matrice  $\mathbf{Z}$  de dimension  $n \times L$  est appelée matrice des variables instrumentales.

## • Hypothèses additionnelles

H.7.  $(\varepsilon_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{z}_1), \dots, (\varepsilon_n, \mathbf{x}_n, \mathbf{z}_n)$  sont i.i.d.

H.8.  $\mathbb{E}(\varepsilon_i | \mathbf{z}_i) = 0$  pour tout  $i$  (exogénéité de  $\mathbf{Z}$  par rapport à  $\varepsilon$ ).

- H.8. implique que  $\mathbb{E}(\mathbf{z}_i \varepsilon_i) = \mathbb{E}_{\mathbf{z}} (\mathbb{E}(\mathbf{z}_i \varepsilon_i | \mathbf{z}_i)) = \mathbb{E}_{\mathbf{z}} (\mathbf{z}_i \mathbb{E}(\varepsilon_i | \mathbf{z}_i)) = 0$ .

- Par la LGN,  $\text{plim} \frac{\mathbf{Z}' \boldsymbol{\varepsilon}}{n} = \mathbb{E}(\mathbf{z}_i \varepsilon_i) = \mathbf{0}$ .

H.9.  $\text{plim} \frac{\mathbf{Z}' \mathbf{Z}}{n} = \mathbf{Q}_{\mathbf{zz}}$  est une matrice finie et définie positive.

H.10.  $\text{plim} \frac{\mathbf{Z}' \mathbf{X}}{n} = \mathbf{Q}_{\mathbf{zx}}$  est une matrice finie non nulle  $L \times K$  de rang  $K$ .

- H.10. requiert que  $\mathbf{Z}$  soit corrélé à  $\mathbf{X}$  et que  $L \geq K$ . Modèle non identifié si  $L < K$ , juste identifié si  $L = K$  et sur identifié si  $L > K$
- Seuls des régresseurs du modèle initial ne peuvent pas constituer  $\mathbf{Z}$ .
- Naturellement, toutes les variables explicatives non corrélées à  $\varepsilon$  sont incluses dans  $\mathbf{Z}$ . Ces variables sont par la suite complétées par des variables additionnelles (autres que des régresseurs) comme instruments des variables explicatives endogènes (exclues de  $\mathbf{Z}$ ).

## Méthode des variables instrumentales (IV)

- S'utilise seulement lorsque  $L = K$ .

$$\text{plim} \left( \frac{\mathbf{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n} \right) = \text{plim} \left( \frac{\mathbf{Z}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}{n} \right) = \mathbf{0}$$

$$\text{plim} \left( \frac{\mathbf{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n} \right) = \text{plim} \left( \frac{\mathbf{Z}'\mathbf{y}}{n} \right) - \text{plim} \left( \frac{\mathbf{Z}'\mathbf{X}}{n} \right) \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$$

$$\text{plim} \left( \frac{\mathbf{Z}'\mathbf{X}}{n} \right) \boldsymbol{\beta} = \text{plim} \left( \frac{\mathbf{Z}'\mathbf{y}}{n} \right)$$

Si  $L = K$ , alors  $\mathbf{Z}'\mathbf{X}$  est une matrice carrée et  $\text{plim} \left( \frac{\mathbf{Z}'\mathbf{X}}{n} \right)$  est inversible.

Donc,

$$\boldsymbol{\beta} = \left[ \text{plim} \left( \frac{\mathbf{Z}'\mathbf{X}}{n} \right) \right]^{-1} \text{plim} \left( \frac{\mathbf{Z}'\mathbf{y}}{n} \right)$$

- L'estimateur de variable instrumentale est alors (si  $L = K$ ).

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{IV}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{Z}'\mathbf{y} \quad (1)$$

- Par construction,  $\hat{\beta}_{IV}$  est convergent :  $\text{plim}(\hat{\beta}_{IV}) = \beta$ .
- En remplaçant  $y = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$  dans l'Eq. (1), on a,

$$\hat{\beta}_{IV} = (\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{Z}'\mathbf{X}\beta + (\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{Z}'\varepsilon = \beta + (\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{Z}'\varepsilon,$$

$$\hat{\beta}_{IV} = \beta + \left( \frac{\mathbf{Z}'\mathbf{X}}{n} \right)^{-1} \frac{\mathbf{Z}'\varepsilon}{n}.$$

- En grand échantillon,  $\frac{\mathbf{Z}'\varepsilon}{n} \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \frac{\sigma^2}{n} \mathbf{Q}_{zz}\right)$ . Donc,

$$\hat{\beta}_{IV} \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}\left(\beta, \frac{\sigma^2}{n} \mathbf{Q}_{zx}^{-1} \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{Q}_{zx}^{-1}\right) \quad (2)$$

- Un estimateur convergent de  $\sigma^2$  est,

$$\hat{\sigma}_{IV}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( y_i - \mathbf{x}'_i \hat{\beta}_{IV} \right)^2. \quad (3)$$

- En pratique, la variance asymptotique de  $\hat{\beta}_{IV}$  est estimée par,

$$\text{Est.Asy. Var}(\hat{\beta}_{IV}) = \hat{\sigma}_{IV}^2 (\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{Z}'\mathbf{Z}) (\mathbf{X}'\mathbf{Z})^{-1}. \quad (4)$$

# Méthode des doubles moindres carrés

- Modèle :  $y = X\beta + \varepsilon$ .
- Méthode plus générale ( $L \geq K$ ).
- Si  $L > K$ , alors  $X'Z$  n'est plus une matrice carrée et est donc non inversible.
- Doubles moindres carrés : méthode en deux étapes.
  - **Etape 1** : Projeter chaque terme du modèle dans l'espace formé par  $Z$  et on obtient,

$$P_z y = P_z X\beta + P_z \varepsilon. \quad (5)$$

où  $P_z = Z(Z'Z)^{-1}Z'$ .

Autrement dit, on régresse  $y$  et chaque  $X$  sur  $Z$  et on calcule la variable dépendante prédite.

- **Etape 2** : Appliquer la méthode des MCO à l'Eq. (5).

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{2SLS} &= [X'Z (Z'Z)^{-1} Z'X]^{-1} [X'Z (Z'Z)^{-1} Z'y] \\ \hat{\beta}_{2SLS} &= [X'P_z X]^{-1} [X'P_z y]\end{aligned} \quad (6)$$



- Modèle projeté :  $\mathbf{P}_z \mathbf{y} = \mathbf{P}_z \mathbf{X} \beta + \mathbf{P}_z \varepsilon$ .
- Intuition : Nouvelle variable explicative  $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{P}_z \mathbf{X}$  exogène par rapport au nouveau terme d'erreur  $\tilde{\varepsilon} = \mathbf{P}_z \varepsilon$ . En effet,

$$\text{plim} \left( \frac{\tilde{\mathbf{X}}' \tilde{\varepsilon}}{n} \right) = \text{plim} \left( \frac{(\mathbf{P}_z \mathbf{X})' \mathbf{P}_z \varepsilon}{n} \right) = \text{plim} \left( \frac{\mathbf{X}' \mathbf{P}_z' \mathbf{P}_z \varepsilon}{n} \right) = \text{plim} \left( \frac{\mathbf{X}' \mathbf{P}_z \varepsilon}{n} \right).$$

$$\text{plim} \left( \frac{\tilde{\mathbf{X}}' \tilde{\varepsilon}}{n} \right) = \text{plim} \left( \frac{\mathbf{X}' \mathbf{Z} (\mathbf{Z}' \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}' \varepsilon}{n} \right),$$

$$\text{plim} \left( \frac{\tilde{\mathbf{X}}' \tilde{\varepsilon}}{n} \right) = \text{plim} \left[ \left( \frac{\mathbf{X}' \mathbf{Z}}{n} \right) \left( \frac{\mathbf{Z}' \mathbf{Z}}{n} \right)^{-1} \left( \frac{\mathbf{Z}' \varepsilon}{n} \right) \right]$$

$$\text{plim} \left( \frac{\tilde{\mathbf{X}}' \tilde{\varepsilon}}{n} \right) = \text{plim} \left( \frac{\mathbf{X}' \mathbf{Z}}{n} \right) \text{plim} \left[ \left( \frac{\mathbf{Z}' \mathbf{Z}}{n} \right)^{-1} \right] \text{plim} \left( \frac{\mathbf{Z}' \varepsilon}{n} \right),$$

$$\text{plim} \left( \frac{\tilde{\mathbf{X}}' \tilde{\varepsilon}}{n} \right) = \mathbf{0}.$$

- Donc  $\hat{\beta}_{2SLS}$  est convergent.

- $\hat{\beta}_{2SLS} = [\mathbf{X}'\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{X}]^{-1}[\mathbf{X}'\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}]$

- En remplaçant  $\mathbf{y}$  par  $\mathbf{X}\beta + \varepsilon$ , on a,

$$\hat{\beta}_{2SLS} = \beta + [\mathbf{X}'\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{X}]^{-1}[\mathbf{X}'\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\varepsilon],$$

$$\hat{\beta}_{2SLS} = \beta + \left[ \left( \frac{\mathbf{X}'\mathbf{Z}}{n} \right) \left( \frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{n} \right)^{-1} \left( \frac{\mathbf{Z}'\mathbf{X}}{n} \right) \right]^{-1} \left( \frac{\mathbf{X}'\mathbf{Z}}{n} \right) \left( \frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{n} \right)^{-1} \left( \frac{\mathbf{Z}'\varepsilon}{n} \right).$$

- En grand échantillon,  $\frac{\mathbf{Z}'\varepsilon}{n} \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \frac{\sigma^2}{n}\mathbf{Q}_{zz}\right)$ . Donc,

$$\hat{\beta}_{2SLS} \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}\left(\beta, \frac{\sigma^2}{n}(\mathbf{Q}'_{zx}\mathbf{Q}_{zz}^{-1}\mathbf{Q}_{zx})^{-1}\right) \quad (7)$$

- Un estimateur convergent de  $\sigma^2$  est,

$$\hat{\sigma}_{2SLS}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( y_i - \mathbf{x}'_i \hat{\beta}_{2SLS} \right)^2. \quad (8)$$

- En pratique, la variance asymptotique de  $\hat{\beta}_{2SLS}$  est estimée par,

$$\text{Est.Asy. Var} \left( \hat{\beta}_{2SLS} \right) = \hat{\sigma}_{2SLS}^2 (\mathbf{X}'\mathbf{P}_z\mathbf{X})^{-1}. \quad (9)$$

# Tests de spécification

## Tests de Hausman et de Wu

- Une variable peut être considérée à tort comme endogène.
- Avec un instrument valide pour cette variable,  $\hat{\beta}_{IV}$  ou  $\hat{\beta}_{2SLS}$  est pourtant convergent.
- Puisque la variable n'est pas endogène,  $\hat{\beta}_{MCO}$  est aussi convergent. Mieux encore,  $\hat{\beta}_{MCO}$  est BLUE (variance plus petite que celles de  $\hat{\beta}_{IV}$  et  $\hat{\beta}_{2SLS}$ ).
- Important de tester si la variable est effectivement endogène (hypothèse alternative) ou non (hypothèse nulle).
- Si le test ne rejette pas l'hypothèse nulle, il est alors préférable de garder  $\hat{\beta}_{MCO}$  qui est plus précis que  $\hat{\beta}_{IV}$  et  $\hat{\beta}_{2SLS}$ .
- Deux tests couramment utilisés : test de **Hausman** et test de **Wu**.

- **Hypothèse nulle** :  $X$  est exogène ; **Hypothèse alternative** :  $X$  est endogène ;

- **Test de Hausman**

- **Intuition** : Sous l'hypothèse nulle,  $\hat{\beta}_{2SLS}$  (ou  $\hat{\beta}_{IV}$ ), ainsi que  $\hat{\beta}_{MCO}$  sont convergents et devraient être très proches. Le test compare donc  $d = \hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta}_{MCO}$  à  $0$ . Si  $d$  est trop éloigné de  $0$ , on rejette l'hypothèse nulle. Dans le cas contraire, on ne la rejette pas.
- Statistique du test :

$$H = d' \{ \text{Est.Asy. Var} (d) \}^{-1} d \quad (10)$$

- Hausman montre que,

$$\text{Est.Asy. Var} (d) = \hat{\sigma}_{MCO}^2 \left( (X'P_z X)^{-1} - (X'X)^{-1} \right). \quad (11)$$

- La statistique d'Hausman  $H \sim \chi^2(K)$  si  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Z}$  n'ont pas de variables communes, ce qui est rarement le cas (généralement le vecteur de "uns" associé à l'intercept est inclus dans  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Z}$ ).
- En présence de variables communes dans  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Z}$ , le rang de la matrice à inverser,  $\text{Est.Asy. Var}(\mathbf{d})$ , est  $K^* < K$ , où  $K^*$  est le nombre de variables explicatives endogènes, et on a besoin de recourir à un inverse généralisé.
- La statistique  $H$  suit alors une  $\chi^2(K^*)$  sous l'hypothèse nulle.

- Test de Wu

- Soit  $\mathbf{X}^*$  les  $K^*$  variables explicatives dans  $\mathbf{X}$  exclues de  $\mathbf{Z}$ .
- On estime par MCO le modèle,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \hat{\mathbf{X}}^*\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}^*, \quad (12)$$

où  $\hat{\mathbf{X}}^*$  est la variation dépendante prédite lorsque  $\mathbf{X}^*$  est régressé sur  $\mathbf{Z}$  ; i.e.,  $\hat{\mathbf{X}}^* = \mathbf{P}_z \mathbf{X}^*$ .

- Tester l'endogénéité revient à tester si  $\boldsymbol{\gamma} = 0$  (test classique de nullité de coefficients). Si on rejette l'hypothèse  $\boldsymbol{\gamma} = 0$ , alors  $\mathbf{X}^*$  est endogène.

# Tests de spécification

## Test de suridentification

- Méthode de IV est développée autour des conditions d'orthogonalité :

$$\mathbb{E}(\mathbf{z}_i \varepsilon_i) = 0.$$

- Contrepartie empirique est l'équation de moments  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i \varepsilon_i = 0$ .
- Si  $L = K$ , alors l'équation de moments est un système de  $K$  équations à  $K$  inconnues et la solution est  $\hat{\beta}_{IV} = (\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{Z}'\mathbf{y}$ .
- Lorsque  $L > K$ , le système n'a pas de solution. Mais le modèle est estimé par projection dans l'espace des  $Z$ . Rien ne garantit que la solution  $\hat{\beta}_{2SLS}$  vérifie toujours l'équation de moments.
- Le test de suridentification consiste donc à vérifier si  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i \varepsilon_i = 0$  dans le cas où  $L > H$ . L'hypothèse nulle est  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i \varepsilon_i = 0$ .

- Soit  $\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i \hat{\varepsilon}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i \left( y_i - \mathbf{x}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}}_{2SLS} \right)$ .
- La statistique du test est,

$$\bar{S} = \bar{\mathbf{m}}' \mathbb{V}\text{ar}(\bar{\mathbf{m}})^{-1} \bar{\mathbf{m}}, \quad (13)$$

- Sous l'hypothèse nulle  $\bar{S} \sim \chi^2(L - K)$ .
- Sous l'hypothèse nulle,

$$\mathbb{V}\text{ar}(\bar{\mathbf{m}}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{n} \mathbf{Z}'\mathbf{Z}.$$

En pratique cette variance peut être remplacée par un estimateur convergent,

$$\text{Est. } \mathbb{V}\text{ar}(\bar{\mathbf{m}}) = \frac{\hat{\sigma}_{2SLS}^2}{n} \mathbf{Z}'\mathbf{Z}.$$



# Instruments faibles

- Deux conditions d'un instrument :
  - ① **exogènes par rapport** à  $\varepsilon$  :  $\mathbb{E}(\varepsilon|\mathbf{Z}) = 0$  ;
  - ② **fortement corrélées** avec  $\mathbf{X}$ .
- Les chercheurs se sont plus focalisés sur l'exogénéité (condition 1). Une littérature de plus en plus abondante soutient qu'une plus grande attention doit être également accordée à la corrélation entre l'instrument et la variable endogène.
- L'exogénéité garantit la convergence de l'estimateur. Toutefois, lorsque la corrélation entre  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{X}$  est faible, i.e., quand  $(1/n)\mathbf{Z}'\mathbf{X} \approx 0$ , un certain nombre de problèmes ont été mis en lumière :
  - estimateur imprécis car  $\text{Var}\left(\hat{\beta}_{2\text{SLS}}\right)$  est plus grande ;
  - estimateur fortement biaisé vers celui des MCO.

- Tester la faiblesse/force des instruments.
- Dans le cas d'une seule variable  $x^*$  endogène instrumentée par  $\mathbf{z}^*$ , on estime le modèle,

$$x_i^* = \mathbf{z}_i^{*'} \boldsymbol{\pi} + v_i. \quad (14)$$

Pour que l'instrument soit fort, la statistique de Fisher du modèle doit être supérieure à 10.

- Cette méthode est seulement valide dans le cas d'une seule variable explicative endogène.

- En présence de plusieurs variables explicatives endogènes, Godfrey (1999) propose une méthode alternative.
- Pour chaque variable explicative endogène, on calcule,

$$R_k^2 = \frac{\left[ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \right]_{kk}}{\left[ (\mathbf{X}'\mathbf{P}_z\mathbf{X})^{-1} \right]_{kk}}, \quad (15)$$

où l'indice  $kk$  signifie le  $k^{\text{ème}}$  élément de la diagonale de la matrice.

- $R_k^2$  et il s'interprète comme un  $R^2$  usuel. Lorsqu'il est proche de 1 la  $k^{\text{ème}}$  variable explicative endogène est bien instrumentée (instruments forts).

# Méthode des moments généralisée (GMM)

- Conditions de moments de la population conduisent à des contreparties empiriques qui peuvent être utilisées pour estimer les paramètres.
- Exemple :
  - Conditions de moments :  $\mathbb{E}(\mathbf{z}_i \varepsilon_i) = \mathbb{E}(\underbrace{\mathbf{z}_i (y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})}_{\text{Fonct. de Moment}}) = 0$ .
  - Contrepartie Empirique :  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i (y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}) = 0$  qui implique  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} = (\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{Z}'\mathbf{y}$ , si  $L = K$ .
- L'estimateur GMM généralise celui des MCO, IV, 2SLS et bien d'autres.
- Basé sur la contrepartie empirique de conditions de moments.
- Les conditions de moments nécessitent une fonction de moments.

- **Fonction de moments** : généralement notée  $\mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta})$ , une fonction de dimension  $L \geq K$ , où  $K = \dim(\boldsymbol{\theta})$  et  $\boldsymbol{\theta}$  est le paramètre à estimer, qui satisfait la condition,

$$\mathbb{E}(\mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta})) = \mathbf{0}. \quad (16)$$

La contrepartie empirique implique,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}. \quad (17)$$

- Lorsque  $K = L$ , l'Eq. (17) admet généralement une unique solution et on parle simplement de méthode des moments (MM).

# Exemples de fonctions de moments

- **Modèle linéaire-en-moyennes avec exogénéité**

- Si  $\mathbf{x}$  est exogène, alors

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) \quad (18)$$

satisfait les conditions de moments.

- En effet,  $\mathbb{E}(\mathbf{x}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})) = \mathbb{E}(\mathbf{x}_i\varepsilon_i) = \mathbf{0}$ .
- Avec la contrepartie empirique  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$ , on peut montrer que l'estimateur de MM est  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MM}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y}$ .
- L'estimateur des MCO est donc un estimateur de MM.

## ● Modèle linéaire-en-moyennes avec endogénéité

- La condition d'orthogonalité des instruments peut être utilisée pour définir la fonction de moments :

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{z}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}). \quad (19)$$

- En effet,  $\mathbb{E}(\mathbf{z}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})) = \mathbb{E}(\mathbf{z}_i\varepsilon_i) = \mathbf{0}$ .
- Avec la contrepartie empirique  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$ , on peut montrer que si  $L = K$ , l'estimateur de MM est  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MM}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{Z}'\mathbf{y}$ .
- L'estimateur de variables instrumentales est donc un estimateur de MM.

- **Modèle non linéaire**

- Modèle :  $y_i = h(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}) + \varepsilon_i$ , où  $h$  est une fonction non linéaire.
- Le terme d'erreur est  $\varepsilon_i = y_i - h(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})$ . La condition d'orthogonalité des instruments peut être utilisée pour définir la fonction de moments.

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{m}_i (y_i - h(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})) . \quad (20)$$

où  $\mathbf{m}_i$  peut contenir des instruments ou des variables explicatives exogènes.  $\mathbf{m}_i$  peut être aussi une fonction d'instrument et de variables explicatives exogènes.

- Il est important d'inclure suffisamment d'instruments et de variables explicatives exogènes dans  $\mathbf{m}_i$  quitte à ce que  $\dim(\mathbf{m}_i) = \dim(\boldsymbol{\theta})$



# Estimateur GMM

- Même si  $L = K$ , ce n'est pas toujours simple de trouver un  $\theta$  qui satisfait la contrepartie empirique des conditions de moments (surtout dans le cas d'un modèle non linéaire). L'estimateur de méthode de moments de  $\theta$ , notée  $\theta_{MM}$ , est définie comme étant la valeur de  $\theta$  qui minimise,

$$\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \theta) \right]' \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \theta) \right]. \quad (21)$$

- Lorsque  $L \geq K$ , comme dans le cas de la méthode IV, la contrepartie empirique des conditions de moments n'admet pas de solution. On a alors recourt à l'estimateur GMM, noté  $\hat{\theta}_{GMM}$ , en minimisant

$$\left[ \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \theta) \right]' \mathbf{W} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \theta) \right], \quad (22)$$

où  $\mathbf{W}$  est une matrice de poids de dimension  $L \times L$ .

- Dans le cas d'un modèle linéaire avec endogénéité,  $g(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{z}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})$ ,  
Donc,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GMM}} = [\mathbf{X}'\mathbf{Z}\mathbf{W}\mathbf{Z}'\mathbf{X}]^{-1}[\mathbf{X}'\mathbf{Z}\mathbf{W}\mathbf{Z}'\mathbf{y}], \quad (23)$$

- Si  $\mathbf{W} = \left(\frac{1}{N}\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)^{-1}$ , alors  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GMM}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{2SLS}}$ .
- L'estimateur de doubles moindres carrés est aussi un estimateur GMM.
- Il est également possible de définir  $\mathbf{W}$  pour que l'estimateur GMM soit optimale (faible variance), noté  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{OGMM}}$ . Dans ce cas, l'estimation se fait en deux étapes.
  - Etape 1 : On calcule  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GMM}}$  avec  $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ .
  - Etape 2 : On calcule ensuite  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{OGMM}}$  avec  $\mathbf{W} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GMM}})\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i'$ .
- La variance de l'estimateur OGMM est robuste à l'hétéroscédasticité.
- Application avec R : script `iv-gmm.R`