Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

MOMENTO DE INÉRCIA DE ÁREA E MOMENTO DE INÉRCIA DE MASSA

Parte 1:

7.1. Definição de momentos de inércia para áreas

7.2. Teorema dos eixos paralelos para uma área

7.3. Raio de giração de uma área

Parte 2:

7.4. Momento de inércia de massa

7.5. Teorema dos eixos paralelos

7.6. Raio de giração

MOMENTO DE INÉRCIA DE ÁREA E MOMENTO DE INÉRCIA DE MASSA

Parte 1:

7.1. Definição de momentos de inércia para áreas

7.2. Teorema dos eixos paralelos para uma área

7.3. Raio de giração de uma área

7.1. DEFINIÇÃO DE MOMENTOS DE INÉRCIA PARA ÁREAS

- Sempre que uma carga distribuída atua perpendicularmente a uma área e sua intensidade varia linearmente, o cálculo do momento da distribuição de carga em relação a um eixo envolverá uma integral na forma:

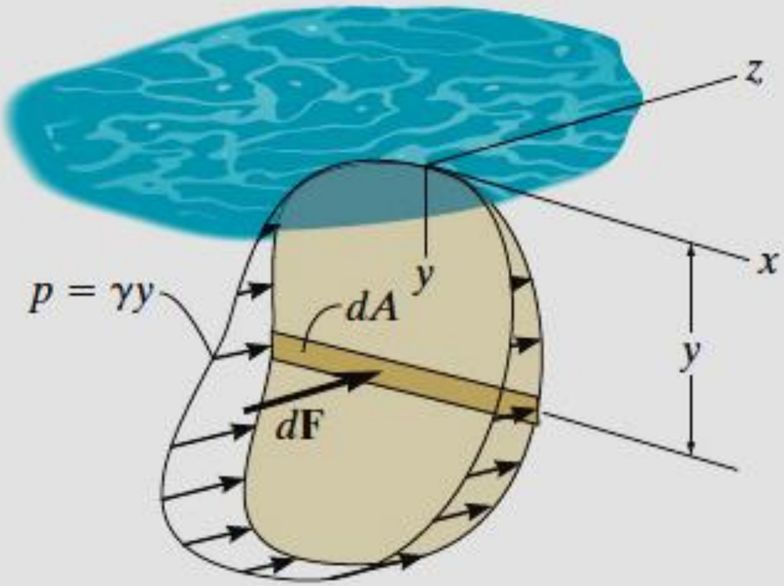
$$\int \boldsymbol{y^2\,dA}$$

- Por exemplo, considere a chapa n que está sujeita à pressão $\boldsymbol{p}$, que varia linearmente com a profundidade, de modo que:

$$\boldsymbol{p = \gamma y}$$

- Assim, a força que atua sobre a área diferencial $\boldsymbol{dA}$ da chapa é:

$$\boldsymbol{dF = pdA = (\gamma y)dA}$$

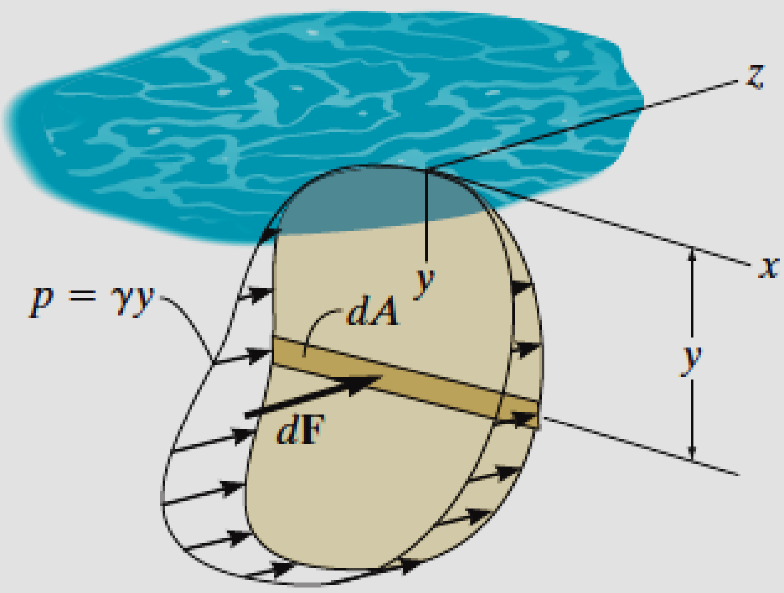


7.1. DEFINIÇÃO DE MOMENTOS DE INÉRCIA PARA ÁREAS

- O momento dessa força em relação ao eixo $\boldsymbol{x}$ é, portanto:

$$dM = ydF = y(\gamma y)dA = \gamma y^2 dA$$

$$M = \gamma \int y^2 dA$$



- A integral $\int y^2\, dA$ às vezes é denominada "segundo momento" da área em relação a um eixo (o eixo $\boldsymbol{x}$);

- Porém, mais frequentemente é denominada ***momento de inércia da área***.

7.1. DEFINIÇÃO DE MOMENTOS DE INÉRCIA PARA ÁREAS

- Então por definição, os momentos de inércia de uma área diferencial dA em elação aos eixos x e y são, respectivamente:

$$dI_x = y^2 dA$$

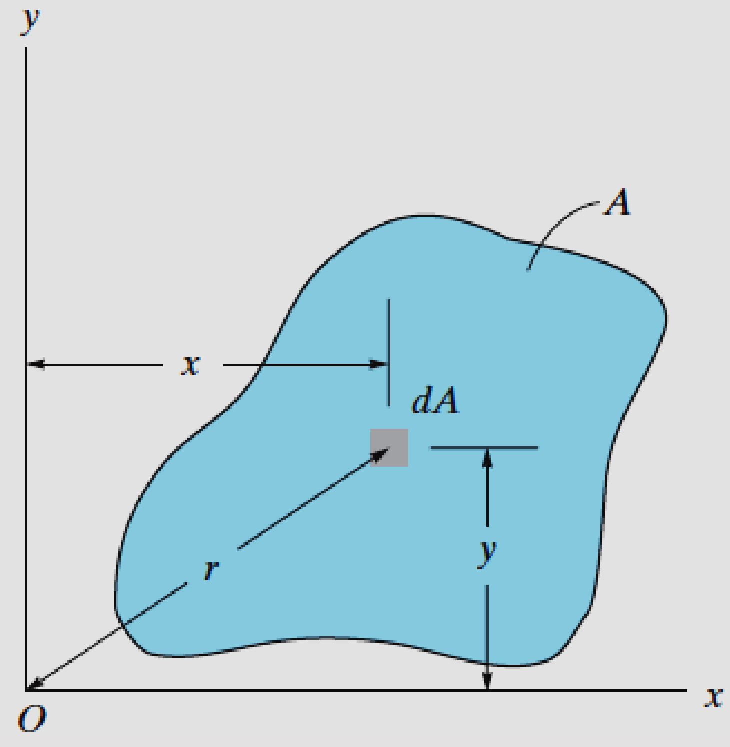
$$\int dI_x = \int y^2 dA$$

$$I_x = \int y^2 dA$$

- Para a área total A, os **momentos de inércia** são determinados por integração, ou seja,

$$I_x = \int_A y^2 \, dA$$

$$I_y = \int_A x^2 \, dA$$



7.1. DEFINIÇÃO DE MOMENTOS DE INÉRCIA PARA ÁREAS

- Também podemos formular essa quantidade para $\boldsymbol{dA}$ em relação ao “polo” $\boldsymbol{O}$ ou eixo $\boldsymbol{z}$;

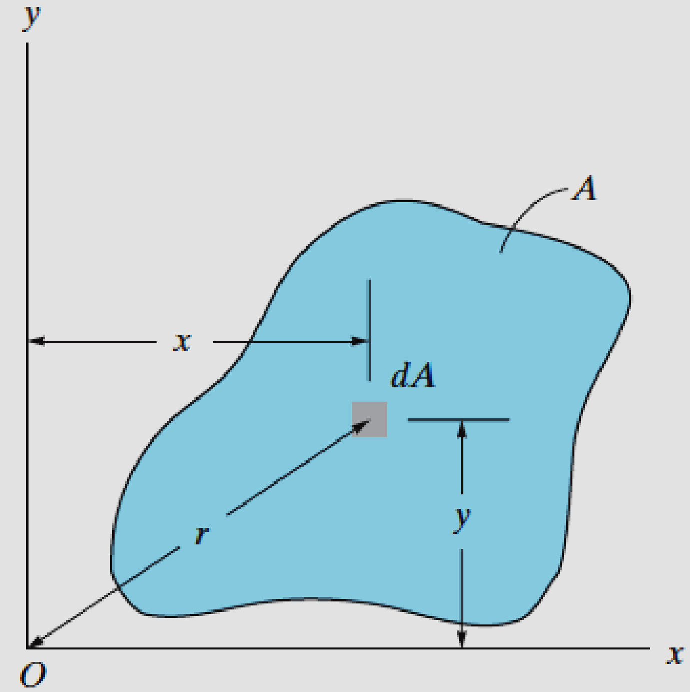
- Isso é conhecido como o **momento de inércia polar**;

- Ele é definido como $\boldsymbol{dJ_o} = \boldsymbol{r^2 dA}$, em que r é a distância perpendicular do polo (eixo $\boldsymbol{z}$) até o elemento $\boldsymbol{dA}$;

- Para a área completa, o momento de inércia polar é:

$$J_O = \int_A r^2\, dA = I_x + I_y$$

- Essa relação é possível porque $\boldsymbol{r^2 = x^2 + y^2}$;



- Por essas formulações, vemos que $\boldsymbol{I_x, I_y}$ e $\boldsymbol{J_o}$ sempre serão positivos, pois envolvem o produto entre distância ao quadrado e área;

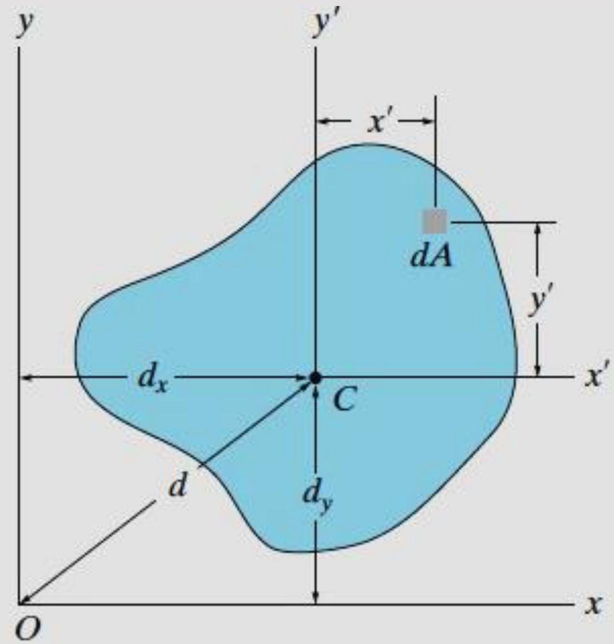
- Além disso, as unidades para momento de inércia envolvem o comprimento elevado à quarta potência, por exemplo, $\boldsymbol{m^4}$, $\boldsymbol{mm^4}$.

7.2. TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS PARA UMA ÁREA

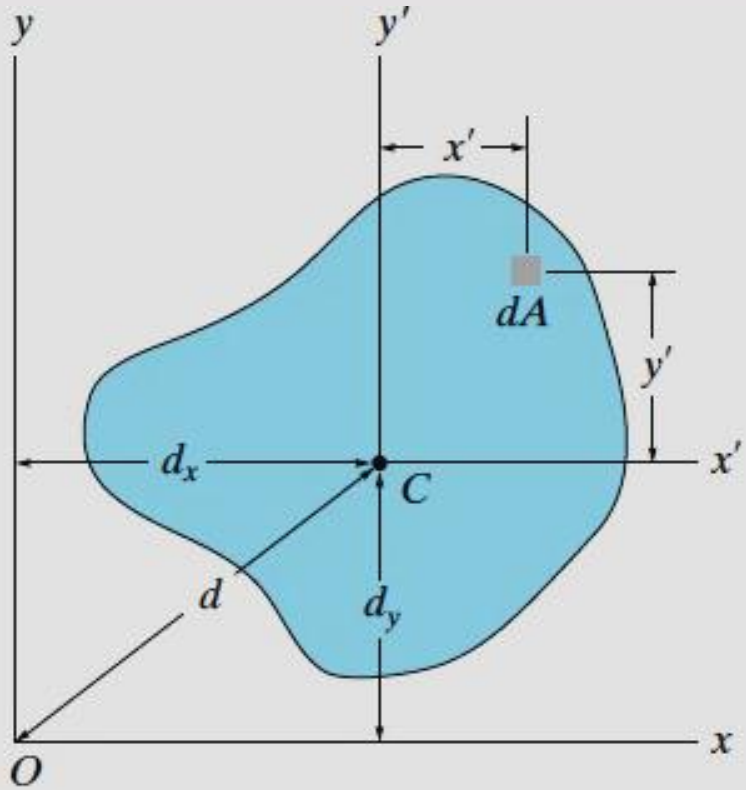
- O **teorema dos eixos paralelos** pode ser usado para determinar o momento de inércia de uma área em relação a qualquer eixo que seja paralelo a um eixo passando pelo centroide e em relação ao qual o momento de inércia seja conhecido;

- Para desenvolver esse teorema, vamos considerar a determinação do momento de inércia da área sombreada em relação ao eixo $\boldsymbol{x}$;

- Para começar, escolhemos um elemento diferencial $\boldsymbol{dA}$ localizado a uma distância qualquer $\boldsymbol{y'}$ do eixo centroidal $\boldsymbol{x'}$.



7.2. TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS PARA UMA ÁREA



- Se a distância entre os eixos paralelos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x'}$ for $\boldsymbol{d_y}$, o momento de inércia de *dA* em relação ao eixo $\boldsymbol{x}$ é $\boldsymbol{dI_x = (y' + d_y)^2 dA}$;

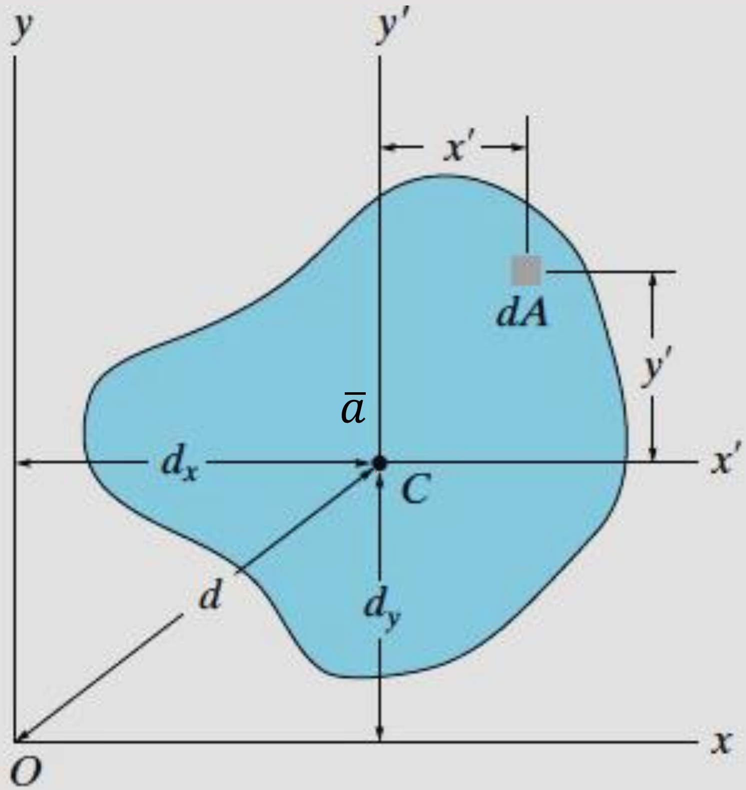
- Para a área total:

$$\boldsymbol{I_x = \int_A (y' + d_y)^2 dA}$$

$$\boldsymbol{I_x = \int_A y'^2 dA + 2d_y \int_A y' dA + d_y^2 \int_A dA}$$

$$\boldsymbol{I_x = \int_A \left(y'^2 + 2y'd_y + d_y^2\right)} dA$$

7.2. TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS PARA UMA ÁREA



$$\boldsymbol{I_x = \int_A y'^2 dA + 2d_y \int_A y' dA + d_y^2 \int_A dA}$$

- A primeira integral representa o momento de inércia de área em relação ao eixo centroidal**,** $\boldsymbol{\bar{I}_{x'}}$**;**

- A segunda integral é zero, pois o eixo $\boldsymbol{x'}$ passa pelo centroide $\boldsymbol{C}$ da área; ou seja:

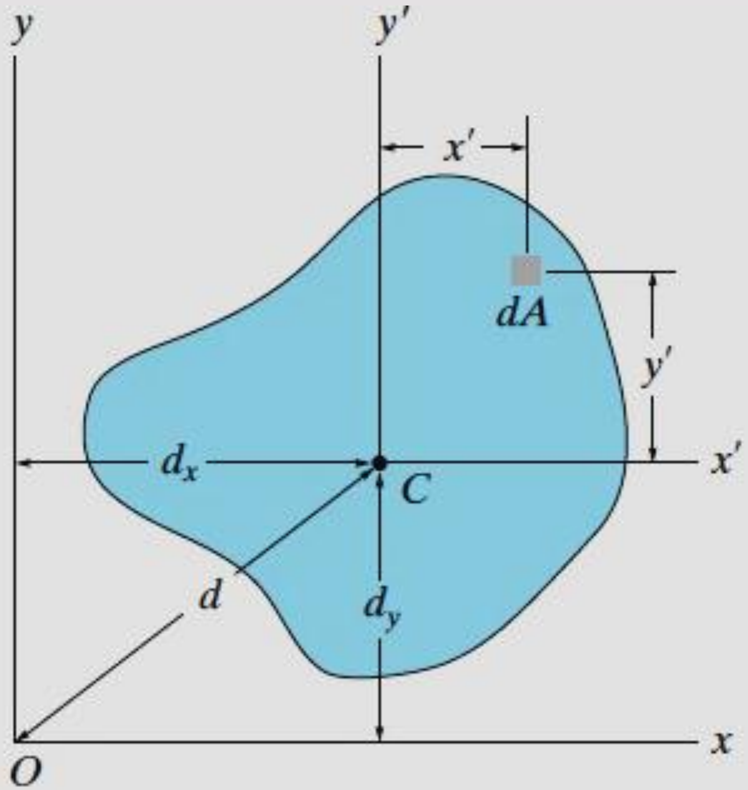
a

$$\boldsymbol{\int_A y' dA = \bar{y}' \int d\,A}$$

$$\boldsymbol{\bar{y}' = \frac{\int_A y' dA}{\int d\,A} = 0}, pois\ \boldsymbol{\bar{y}'} = 0$$

7.2. TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS PARA UMA ÁREA

$$I_x = \int_A y'^2 dA + 2d_y \int_A y' dA + d_y^2 \int_A dA$$



- A terceira representa a área total;
- Sendo assim, o resultado final é, então:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

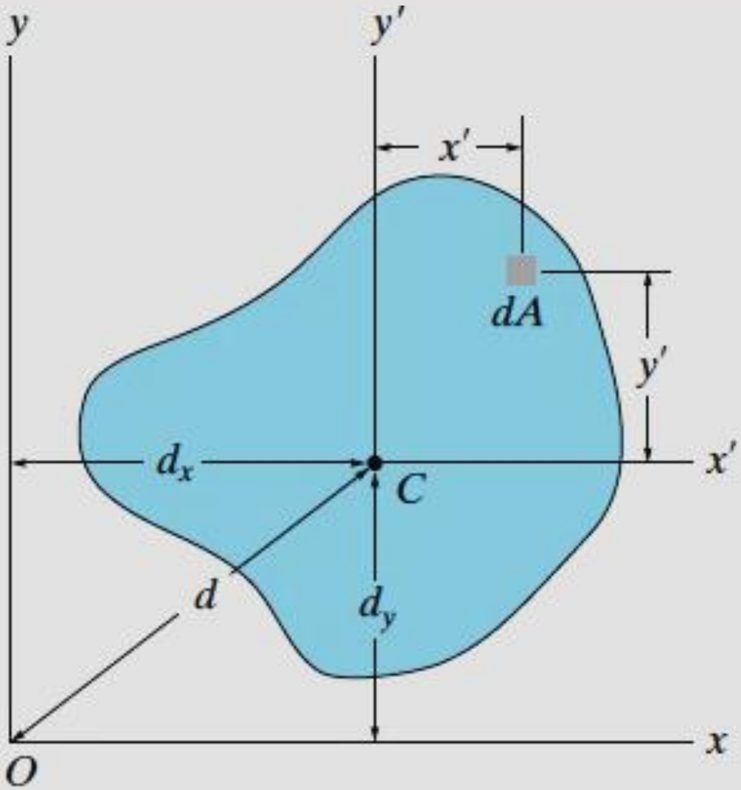
- Uma expressão semelhante pode ser escrita para I_y, ou seja,

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2$$

- E, finalmente, para o momento de inércia polar, como $\bar{J}_C = \bar{I}_{x'} + \bar{I}_{y'}$ e $d^2 = d_x^2 + d_y^2$, temos:

$$J_o = \bar{J}_C + Ad^2$$

7.2. TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS PARA UMA ÁREA



$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2$$

$$J_o = \bar{J}_C + Ad^2$$

- O formato de cada uma dessas três equações indica que o momento de inércia de uma área em relação a um eixo é igual a seu momento de inércia em relação a um eixo paralelo passando pelo centroide da área mais o produto entre a área e o quadrado da distância perpendicular entre os eixos.

7.3. RAIO DE GIRAÇÃO DE UMA ÁREA

- O **raio de giração** de uma área em relação a um eixo tem unidades de comprimento e é uma quantidade normalmente usada para projetos de colunas na mecânica estrutural;

- Se as áreas e os momentos de inércia forem conhecidos, os raios de giração serão determinados pelas fórmulas:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$

- O formato dessas equações é facilmente lembrado, pois é semelhante ao usado para encontrar o momento de inércia de uma área diferencial em relação a um eixo:

- Por exemplo,

$$I_x = k_x^2 A \quad \rightarrow \quad dI_x = y^2 dA \rightarrow I_x = y^2 A$$

7.3. RAIO DE GIRAÇÃO DE UMA ÁREA

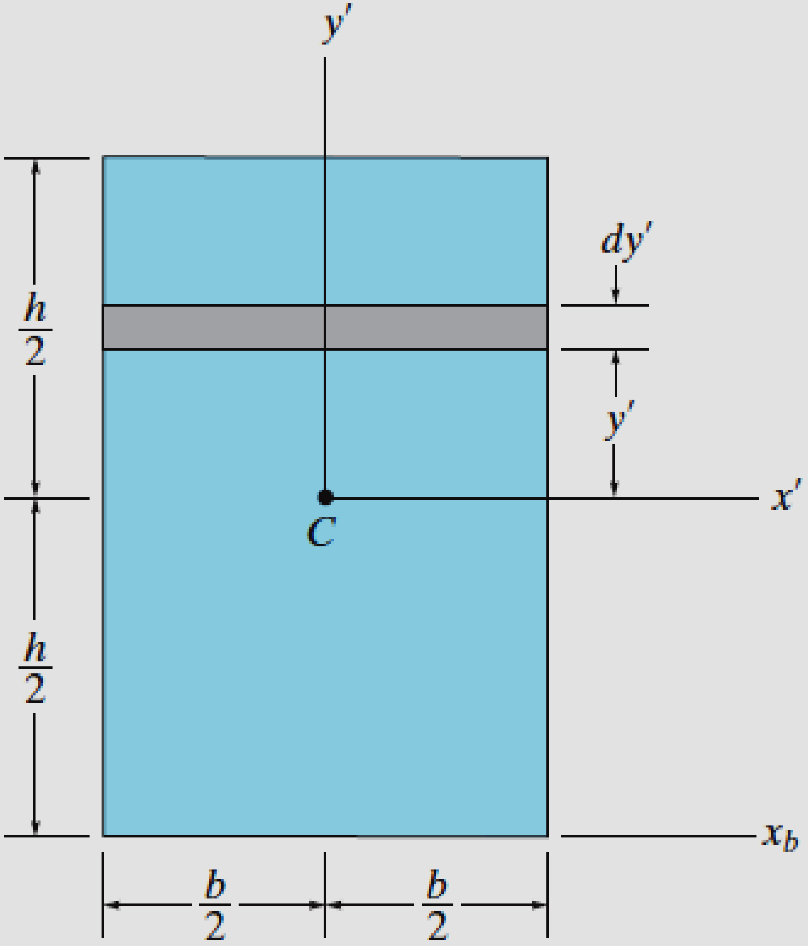
Exercício 37:

- Determine o momento de inércia da área retangular mostrada na figura ao lado em relação a:

a) O eixo centroidal $\boldsymbol{x}$';

b) O eixo $\boldsymbol{x_b}$ passando pela base do retângulo; e

c) o polo ou eixo $\boldsymbol{z'}$ perpendicular ao plano $\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{y'}$ e passando pelo centroide $\boldsymbol{C}$.



Solução:

Parte a)

- O elemento diferencial é escolhido para integração;

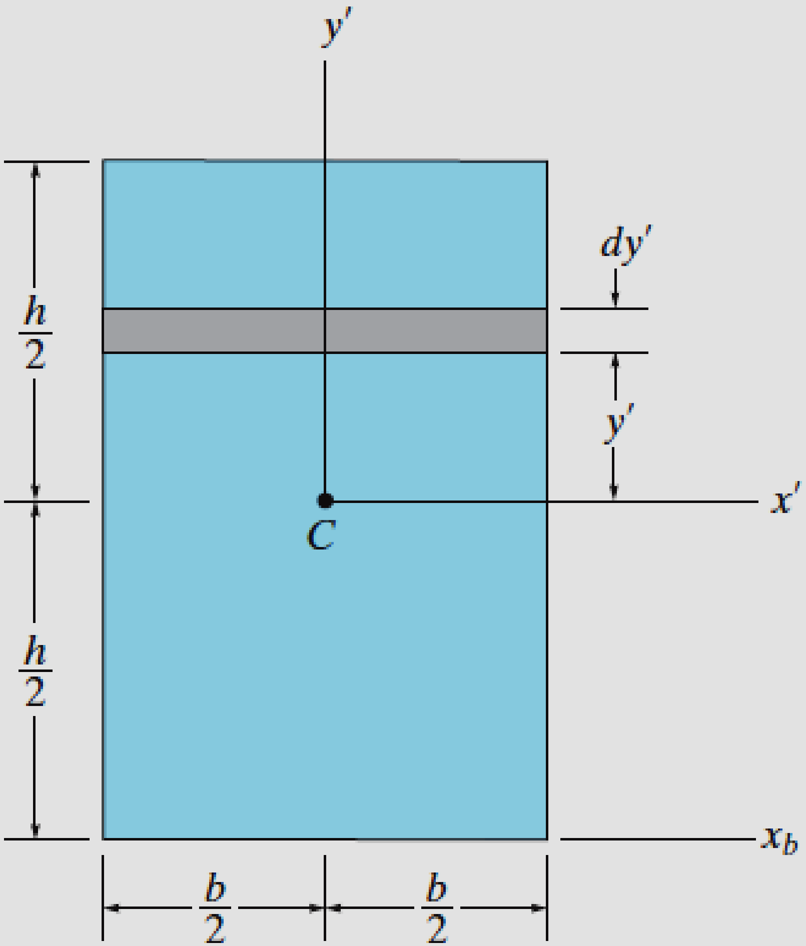
- Em razão de seu posicionamento e de sua orientação, *todo o elemento* está a uma distância $\boldsymbol{y}$' do eixo $\boldsymbol{x}$';

- Aqui, integra-se de $\boldsymbol{y}' = -\boldsymbol{h}/\mathbf{2}$ a $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{h}/\mathbf{2}$;

- Como $\boldsymbol{dA} = \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{dy}'$, então:

$$\bar{I}_{x'} = \int_A y'^2\,dA = \int_{-h/2}^{h/2} y'^2(b\,dy') = b\int_{-h/2}^{h/2} y'^2\,dy'$$

$$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$$



7.3. RAIO DE GIRAÇÃO DE UMA ÁREA

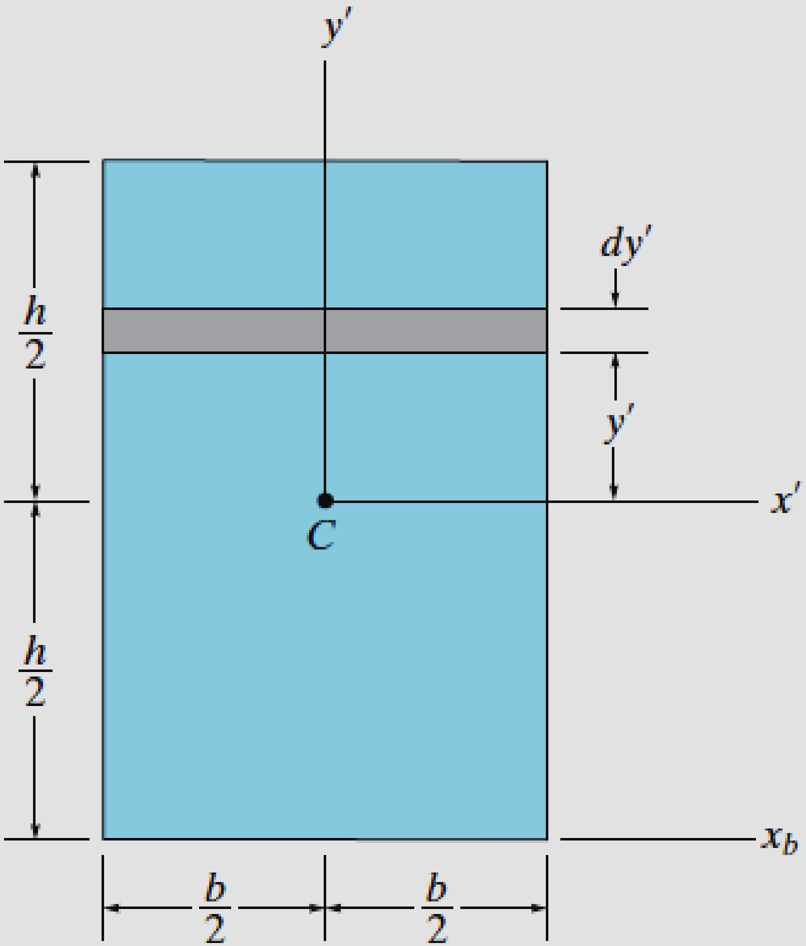
Solução:
Parte b)

- O momento de inércia em relação a um eixo passando pela base do retângulo pode ser obtido usando o resultado da **parte (a)** e aplicando o teorema dos eixos paralelos:

$$I_{x_b} = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$= \frac{1}{12}bh^3 + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}bh^3$$

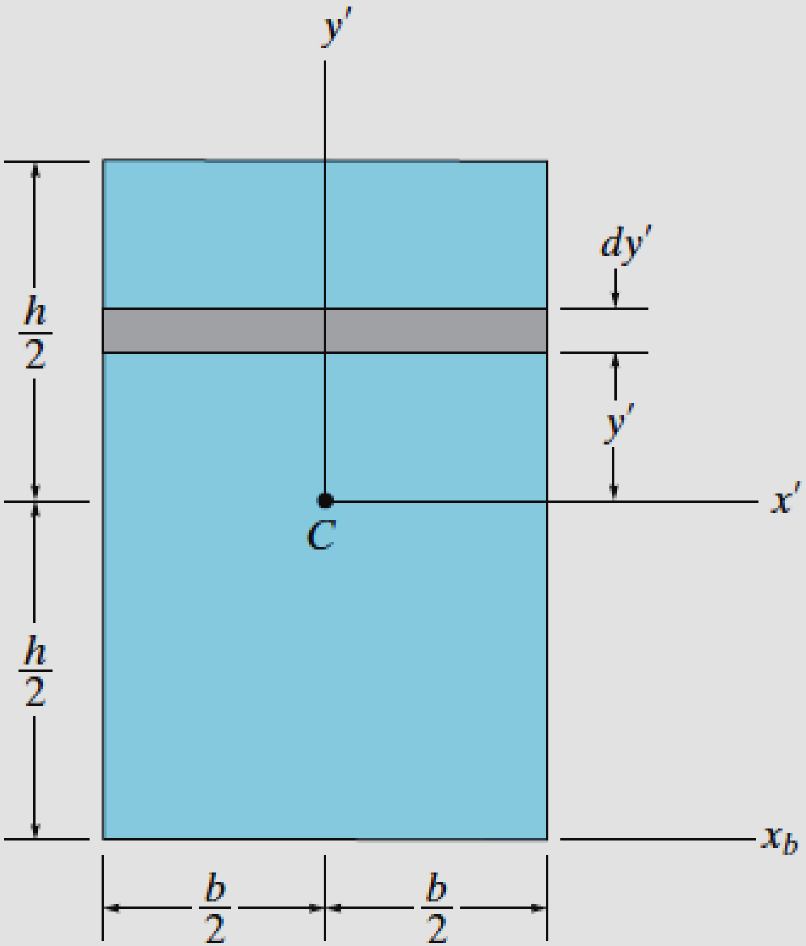


7.3. RAIO DE GIRAÇÃO DE UMA ÁREA

Solução:
Parte c)

Para calcular o momento de inércia polar em relação ao ponto $\boldsymbol{C}$, primeiramente temos de obter $\bar{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{y'}}$, que pode ser encontrado trocando entre si as dimensões $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{h}$ no resultado da **parte (a)**, ou seja,

$$\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}hb^3$$



- Então o momento de inércia polar em relação a ***C*** é:

$$J_C = \bar{I}_{x'} + \bar{I}_{y'}$$

$$J_C = \frac{1}{12}bh^3 + \frac{1}{12}hb^3$$

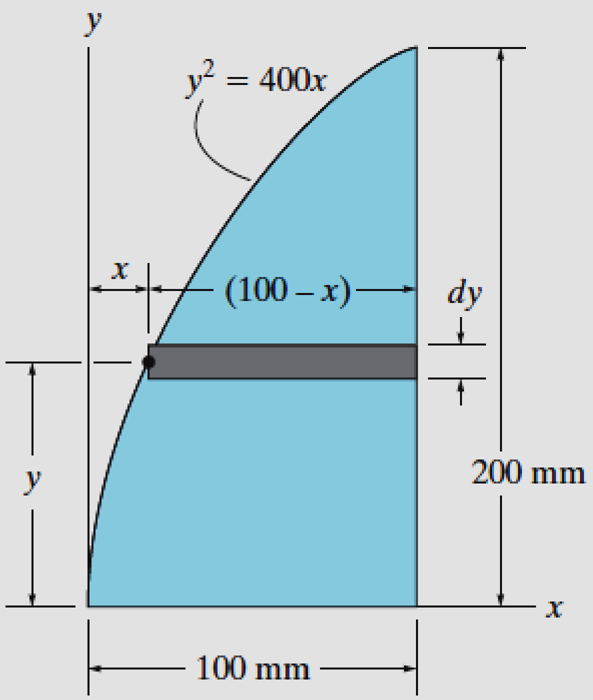
$$J_C = \frac{1}{12}bhh^2 + \frac{1}{12}hbb^2$$

$$J_C = \frac{1}{12}bh\left(b^2 + h^2\right)$$

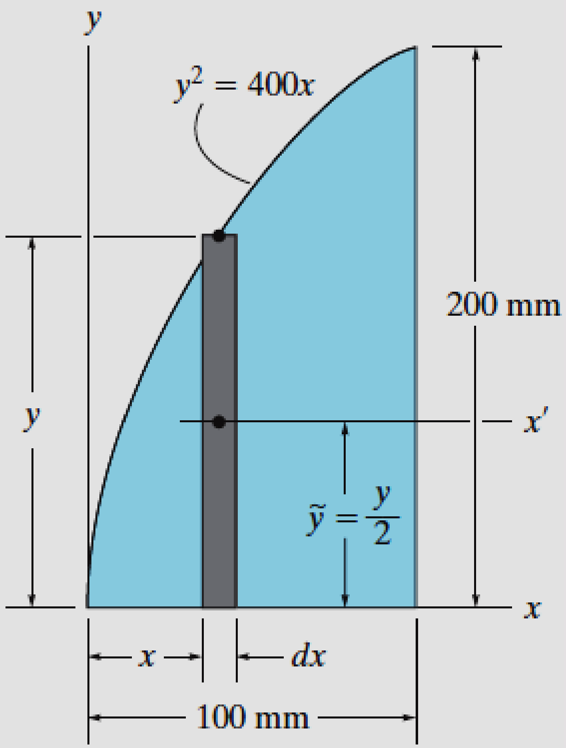
7.3. RAIO DE GIRAÇÃO DE UMA ÁREA

Exercício 38:

- Determine o momento de inércia da área sombreada mostrada na figura abaixo em relação ao eixo ***x***.



(a)



(b)

7.3. RAIO DE GIRAÇÃO DE UMA ÁREA

Solução:

Caso 1)

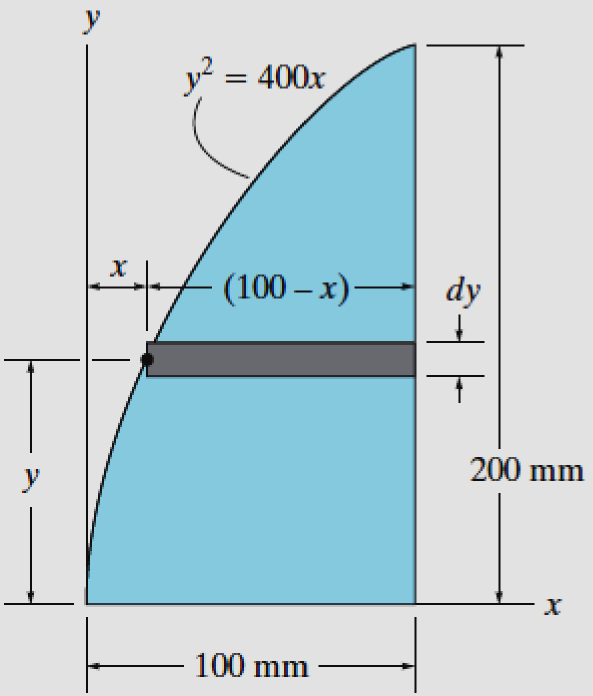
- Um elemento diferencial de área que é paralelo ao eixo **x**, é escolhido para integração;

- Como esse elemento tem espessura dy e cruza a curva no ponto arbitrário (x, y), sua área é:

$$dA = (100 - x)\,dy$$

- Além disso, o elemento está à mesma distância y do eixo x;

- Logo, a integração em relação a y, de $y = 0$ a $y = 200\,mm$, produz:



(a)

7.3. RAIO DE GIRAÇÃO DE UMA ÁREA

Solução:

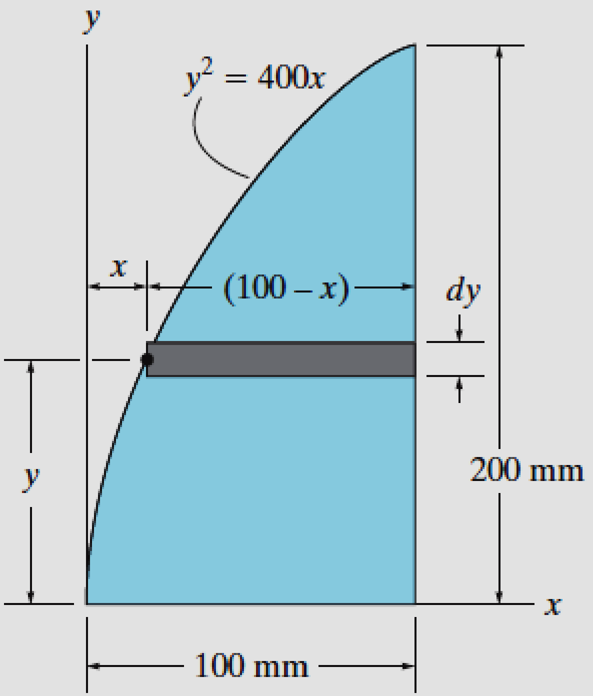
Caso 1)

➢ Logo, a integração em relação a $\boldsymbol{y}$, de $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ a $\boldsymbol{y} = \mathbf{200}\ \boldsymbol{mm}$, produz:

$$I_x = \int_A y^2\, dA = \int_0^{200\text{ mm}} y^2(100 - x)\, dy$$

$$= \int_0^{200\text{ mm}} y^2\left(100 - \frac{y^2}{400}\right) dy = \int_0^{200\text{ mm}} \left(100y^2 - \frac{y^4}{400}\right) dy$$

$$= 107(10^6)\ \text{mm}^4$$



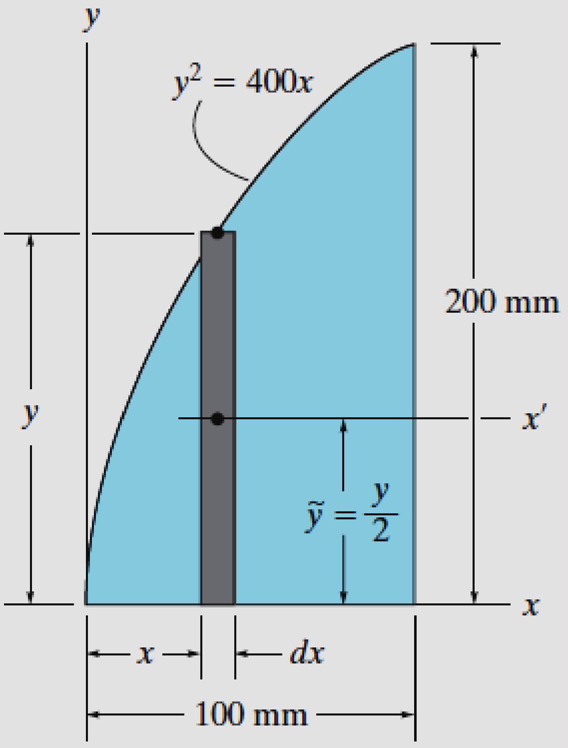
(a)

7.3. RAIO DE GIRAÇÃO DE UMA ÁREA

Solução:

Caso 2)

- Um elemento diferencial *paralelo* ao eixo $\boldsymbol{y}$ é escolhido para integração;
- O elemento escolhido cruza a curva no *ponto arbitrário* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$;
- Nesse caso, todos os pontos do elemento **não** se encontram à mesma distância do eixo $\boldsymbol{x}$;
- Portanto, o teorema dos eixos paralelos precisa ser usado para determinar o momento de inércia do elemento em relação a esse eixo.



(b)

7.3. RAIO DE GIRAÇÃO DE UMA ÁREA

Solução:

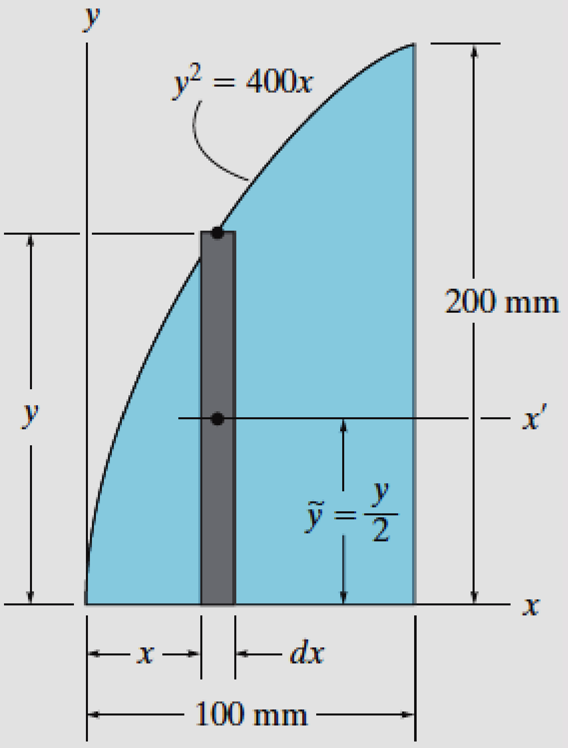
Caso 2)

- Para um retângulo de base $\boldsymbol{b}$ e altura $\boldsymbol{h}$, o momento de inércia em torno de seu eixo centroidal foi determinado na **parte (a)** do exemplo anterior;

- Lá, descobriu-se que $\boldsymbol{I_x = \frac{1}{12}bh^3}$;

- Para o elemento diferencial neste caso, $\boldsymbol{b = dx}$ e $\boldsymbol{h = y}$, e assim, $\boldsymbol{dI_x = \frac{1}{12}dxy^3}$;

- Como o centroide do elemento dista $\boldsymbol{y = \frac{y}{2}}$ a partir do eixo $\boldsymbol{x}$, o momento de inércia do elemento em relação a esse eixo é:



$$dI_x = d\bar{I}_{x'} + dA\,\tilde{y}^2 = \frac{1}{12}dx\,y^3 + y\,dx\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}y^3\,dx$$

(b)

7.3. RAIO DE GIRAÇÃO DE UMA ÁREA

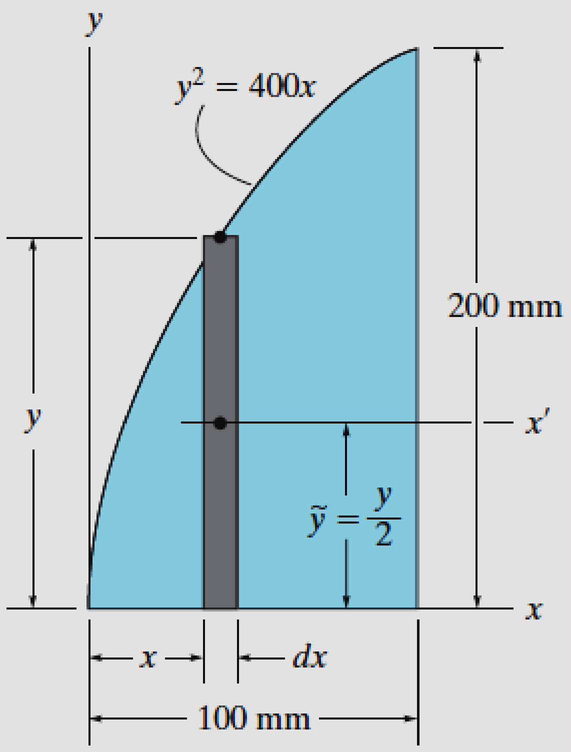
Solução:

Caso 2)

➢ A integração em relação a $\boldsymbol{x}$, de $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ a $\boldsymbol{x} = \mathbf{100}\ \boldsymbol{mm}$, produz:

$$I_x = \int dI_x = \int_0^{100\text{ mm}} \frac{1}{3} y^3\, dx$$

$$= \int_0^{100\text{ mm}} \frac{1}{3} (400x)^{3/2}\, dx = 107(10^6)\text{ mm}^4$$



(b)

OBRIGADO PELA ATENÇÃO!