Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

EQUILÍBRIO DE CORPOS RÍGIDOS, TRELIÇAS PLANAS E ESFORÇOS INTERNOS

Parte 1: Equilíbrio de um corpo rígido

4.1. Condições de equilíbrio do corpo rígido
4.2. Diagrama de corpo livre
4.3. Equações de equilíbrio
4.4. Membros de duas e de três forças
4.5. Equilíbrio em três dimensões
4.6. Restrições e determinância estática

Parte 2: Treliças planas

4.5. Método dos nós
4.6. Membros de força zero
4.7. Método das seções

Parte 3: Esforços internos

4.8. Cargas internas desenvolvidas em membros estruturais
4.9. Equações e diagramas de força cortante e de momento fletor
4.10. Relações entre carga distribuída, força cortante e momento fletor

PARTE 3: ESFORÇOS INTERNOS

4.10. Relações entre carga distribuída, força cortante e momento fletor

4.10. RELAÇÕES ENTRE CARGA DISTRIBUÍDA, FORÇA CORTANTE E MOMENTO FLETOR

- Se uma viga está sujeita a várias forças concentradas, momentos de binário e cargas distribuídas, o método de construção dos diagramas de força cortante e de momento fletor discutidos anteriormente pode tornar-se maçante;

- Sendo assim, discutiremos sobre um método mais simples para construir esses diagramas;

- Trataremos de um método baseado nas relações diferenciais que existem entre a carga, a força cortante e o momento fletor.

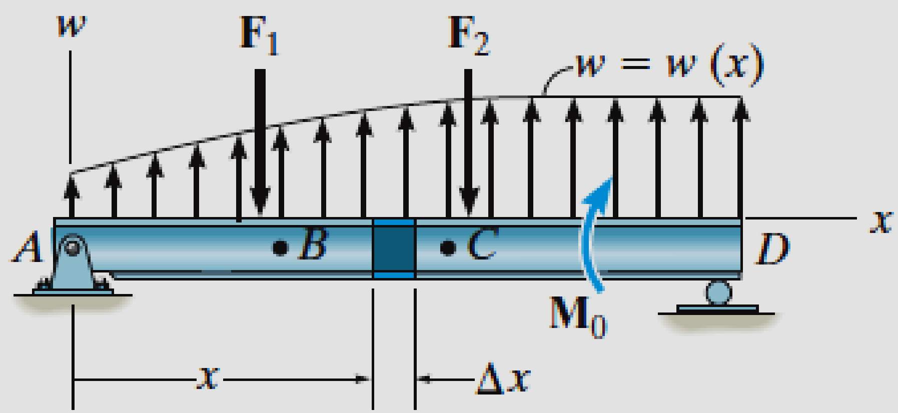
4.10. RELAÇÕES ENTRE CARGA DISTRIBUÍDA, FORÇA CORTANTE E MOMENTO FLETOR

Carga distribuída:

- Considere a viga ***AD*** mostrada na figura ao lado, que está sujeita a uma carga arbitrária $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ e uma série de forças e de momentos de binário concentrados;

- Na discussão a seguir, a carga distribuída será considerada positiva quando age para cima, conforme mostrado;

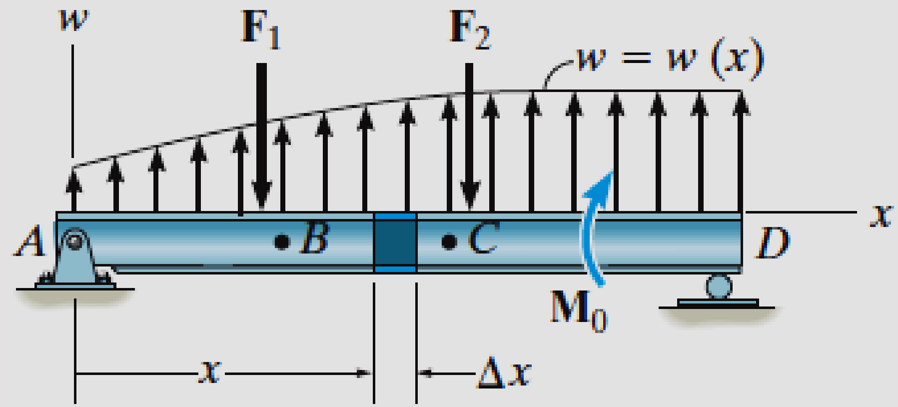
- Um diagrama de corpo livre para um pequeno segmento da viga tendo um comprimento $\boldsymbol{\Delta x}$ é escolhido em um ponto $\boldsymbol{x}$ ao longo da viga, que *não* está sujeito a uma força ou a um momento de binário concentrado;

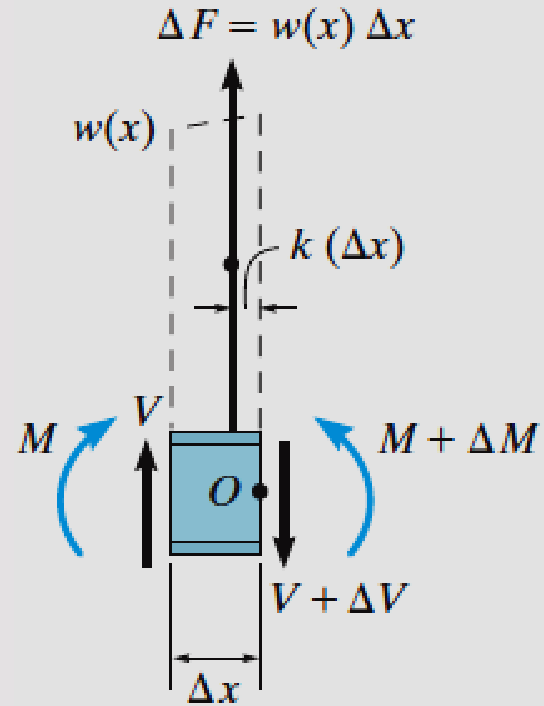


4.10. RELAÇÕES ENTRE CARGA DISTRIBUÍDA, FORÇA CORTANTE E MOMENTO FLETOR

Carga distribuída:

- Logo, quaisquer resultados obtidos não se aplicarão nesses pontos de carga concentrada;
- Consideramos que a força cortante e o momento fletor mostrados no diagrama de corpo livre atuam no sentido positivo, de acordo com a convenção de sinal estabelecida;
- Observe que tanto a força cortante como o momento fletor que atuam sobre a face direita precisam ser aumentados por uma pequena quantidade finita, a fim de manter o segmento em equilíbrio;
- A carga distribuída foi substituída por uma força resultante $\Delta \boldsymbol{F} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\,\Delta \boldsymbol{x}$, que atua a uma distância fracionária $\boldsymbol{k}(\Delta \boldsymbol{x})$ a partir da extremidade direita





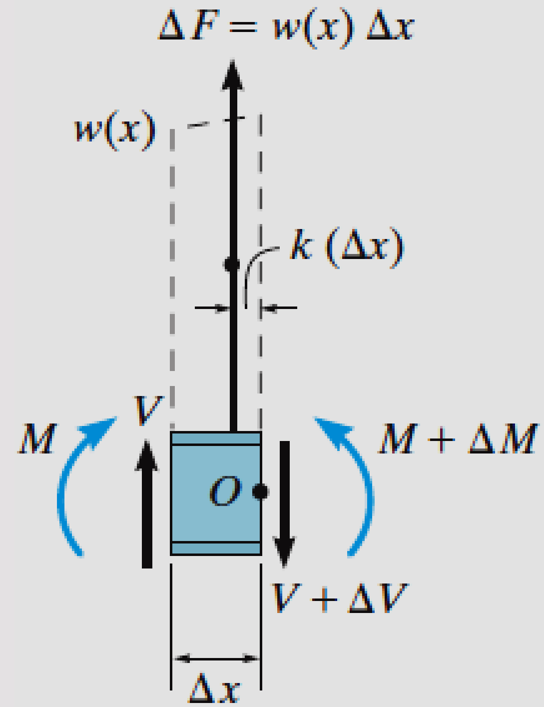
4.10. RELAÇÕES ENTRE CARGA DISTRIBUÍDA, FORÇA CORTANTE E MOMENTO FLETOR

Relação entre a carga distribuída e a força cortante:

- Se aplicarmos a equação de equilíbrio de forças ao segmento, então:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V + w(x)\,\Delta x - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = w(x)\,\Delta x$$



- Dividindo por Δx e fazendo $\Delta x \rightarrow 0$, obtemos:

$$\frac{dV}{dx} = w(x)$$

Inclinação do diagrama da força cortante = Intensidade da carga distribuída

- Se reescrevermos a equação anterior na forma $\boldsymbol{dV = w(x)dx}$ e realizarmos a integração entre dois pontos quaisquer ***B*** e ***C*** na viga, veremos que:

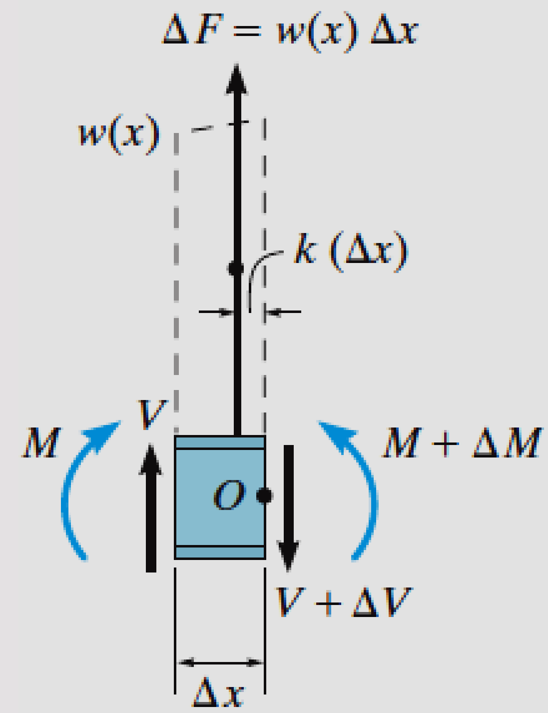
$$\Delta V = \int w(x)\,dx$$

Variação na força cortante = Área sob a curva de carregamento

4.10. RELAÇÕES ENTRE CARGA DISTRIBUÍDA, FORÇA CORTANTE E MOMENTO FLETOR

Relação entre a força cortante e o momento fletor:

- Se aplicarmos a equação de equilíbrio de momentos em relação ao ponto ***O*** no diagrama de corpo livre, obtemos:



$$\circlearrowleft +\Sigma M_O = 0; \quad (M + \Delta M) - [w(x)\Delta x]\, k\Delta x - V\Delta x - M = 0$$

$$\Delta M = V\Delta x + k\, w(x)\Delta x^2$$

- Dividindo os dois lados dessa equação por Δx e fazendo $\Delta x \to 0$, obtemos:

$$\frac{dM}{dx} = V$$

Inclinação do diagrama de momento fletor = Força cortante

- Se reescrevermos a equação na forma $dM = \int V dx$ e integrada entre dois pontos *B* e *C* quaisquer na viga, temos:

$$\Delta M = \int V\, dx$$

Variação no momento fletor = Área sob o diagrama da força cortante

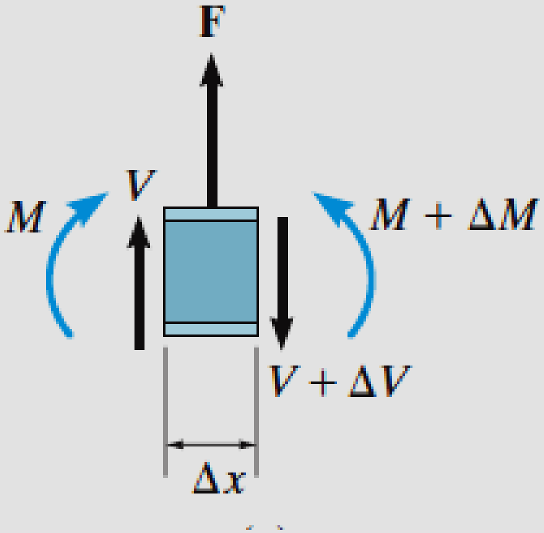
4.10. RELAÇÕES ENTRE CARGA DISTRIBUÍDA, FORÇA CORTANTE E MOMENTO FLETOR

Força:

- Um diagrama de corpo livre de um segmento pequeno da viga, tomado sob uma das forças, é mostrado na figura ao lado;

- Aqui, o equilíbrio de forças requer:

$$\uparrow + \sum F_y = F + V - (V + \Delta V) = 0 \therefore \Delta V = F$$



- Como a variação na força cortante é positiva, o seu diagrama "saltará" para cima quando $\boldsymbol{F}$ atuar para cima na viga;

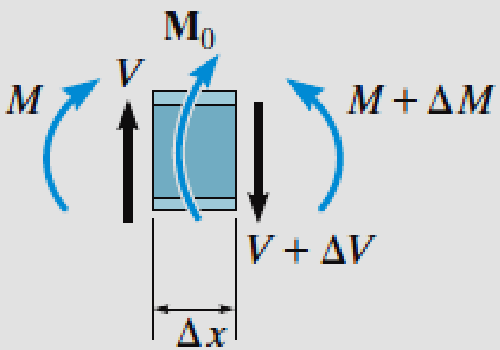
- De modo semelhante, o salto na força cortante $(\Delta \boldsymbol{V})$ é para baixo quando $\boldsymbol{F}$ atua para baixo.

4.10. RELAÇÕES ENTRE CARGA DISTRIBUÍDA, FORÇA CORTANTE E MOMENTO FLETOR

Momento de binário:

- Se removermos um segmento da viga que está localizado no momento de binário $\boldsymbol{M_o}$, o resultado é o diagrama de corpo livre mostrado na figura ao lado;

- Nesse caso, fazendo $\Delta x \rightarrow 0$, o equilíbrio de momentos requer:



$$\sum M = -M - M_o - V(\Delta x) - (V + \Delta V)(\Delta x) + M + \Delta M = 0$$

$$M_o = \Delta M$$

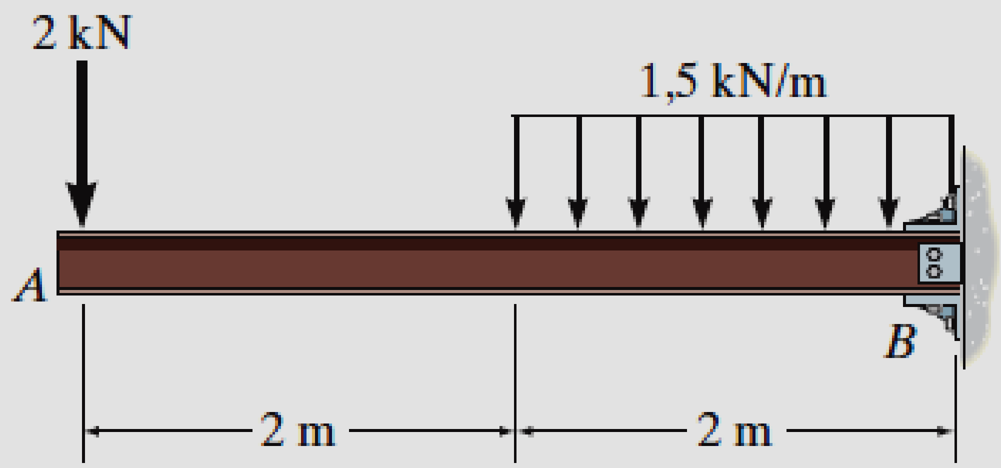
- Assim, a variação no momento é positiva, ou o diagrama do momento “saltará” para cima se $\mathbf{M_o}$ estiver no sentido horário;

- De modo semelhante, o salto $\boldsymbol{\Delta M}$ é para baixo quando $\boldsymbol{M_o}$ está em sentido anti-horário.

4.10. RELAÇÕES ENTRE CARGA DISTRIBUÍDA, FORÇA CORTANTE E MOMENTO FLETOR

Exercício 29:

- Determine os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga em balanço mostrada na figura abaixo.



4.10. RELAÇÕES ENTRE CARGA DISTRIBUÍDA, FORÇA CORTANTE E MOMENTO FLETOR

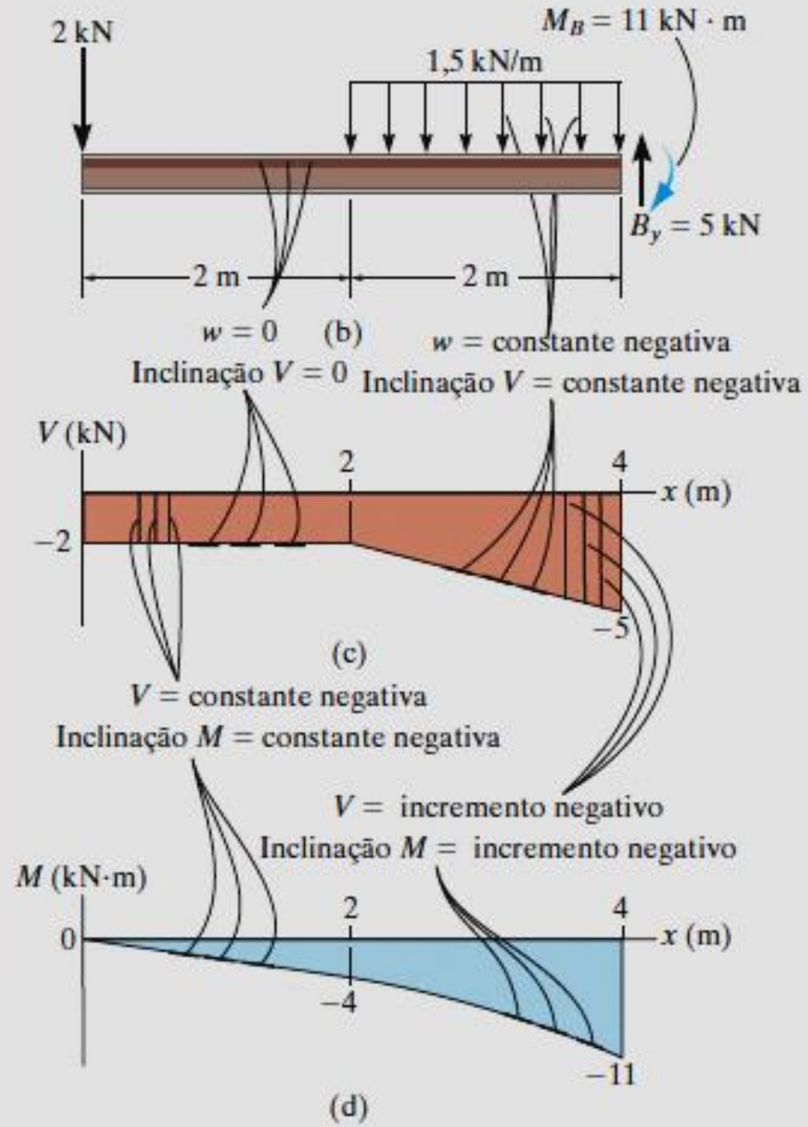
Solução:

- As reações no engastamento $\boldsymbol{B}$ estão mostradas na figura b.

1) Diagrama de força cortante:

- A força cortante na extremidade $\boldsymbol{A}$ é $-\mathbf{2}\ \boldsymbol{kN}$. Esse valor é esboçado no gráfico em $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (figura *c*);
- Observe como o diagrama é construído seguindo as inclinações definidas pela carga $\boldsymbol{w}$;
- A força cortante em $\boldsymbol{x} = \mathbf{4}\ \boldsymbol{m}$ é $-\mathbf{5}\ \boldsymbol{kN}$, a reação na viga;
- Esse valor pode ser verificado encontrando-se a área sob a carga distribuída; ou seja,

$$V\big|_{x=4\text{ m}} = V\big|_{x=2\text{ m}} + \Delta V = -2\text{ kN} - (1{,}5\text{ kN/m})(2\text{ m})$$
$$= -5\text{ kN}$$



4.10. RELAÇÕES ENTRE CARGA DISTRIBUÍDA, FORÇA CORTANTE E MOMENTO FLETOR

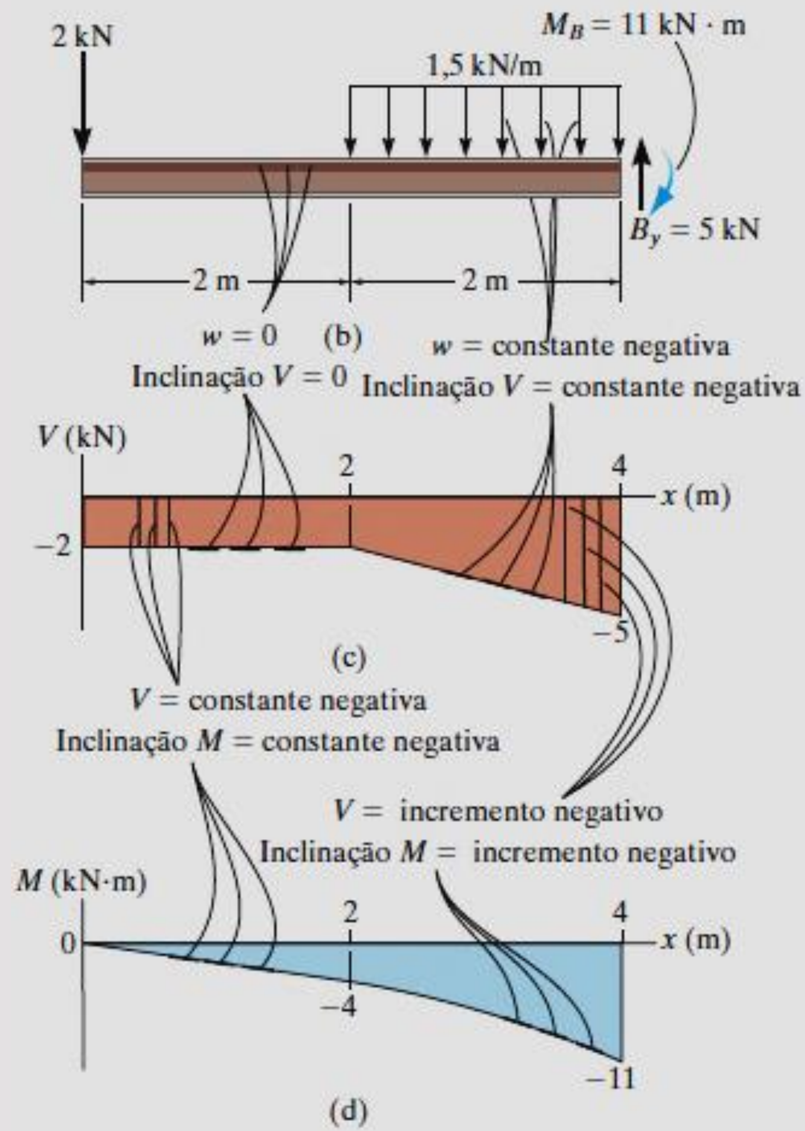
Solução:

2) Diagrama de momento fletor:

- O momento fletor zero em $x = 0$ está esboçado na figura *d*;
- A construção do diagrama de momento fletor é baseada no conhecimento de sua inclinação, que é igual à força cortante em cada ponto;
- A variação do momento entre $x = 0$ e $x = 2$ é determinada a partir da área sob o diagrama de força cortante;
- Logo, o momento fletor em $x = 2\ m$ é:

$$M\big|_{x=2\text{ m}} = M\big|_{x=0} + \Delta M = 0 + [-2\text{ kN}(2\text{ m})]$$

$$= -4\text{ kN}\cdot\text{m}$$



4.10. RELAÇÕES ENTRE CARGA DISTRIBUÍDA, FORÇA CORTANTE E MOMENTO FLETOR

Solução:

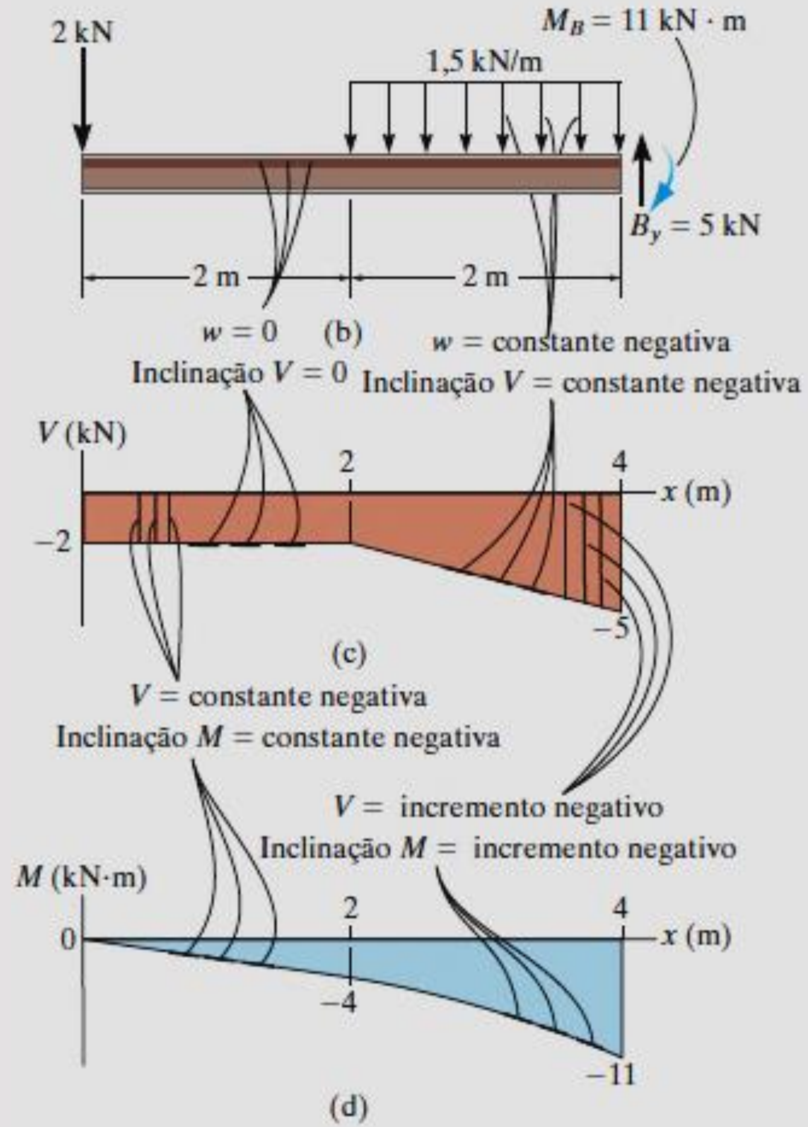
2) Diagrama de momento fletor:

- O momento fletor em $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{4}\,\boldsymbol{m}$ é:

$$M|_{x=4} = M|_{x=2} + \Delta M$$

$$M|_{x=4} = -4kN.m + \frac{(-5kN - 2kN).2m}{2}$$

$$M|_{x=4} = -11\;kN.m$$



ATÉ A PRÓXIMA!