Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

FORÇA, MOMENTO E SISTEMAS EQUIVALENTES

Parte 1:

2.1. Formulação escalar do momento de uma força
2.2. Produto vetorial
2.3. Formulação vetorial do momento de uma força

Parte 2:

2.4. Princípios dos momentos
2.5. Momento de uma força em relação a um eixo específico
2.6. Momento de um binário
2.7. Sistemas equivalentes

FORÇA, MOMENTO E SISTEMAS EQUIVALENTES

Parte 1:

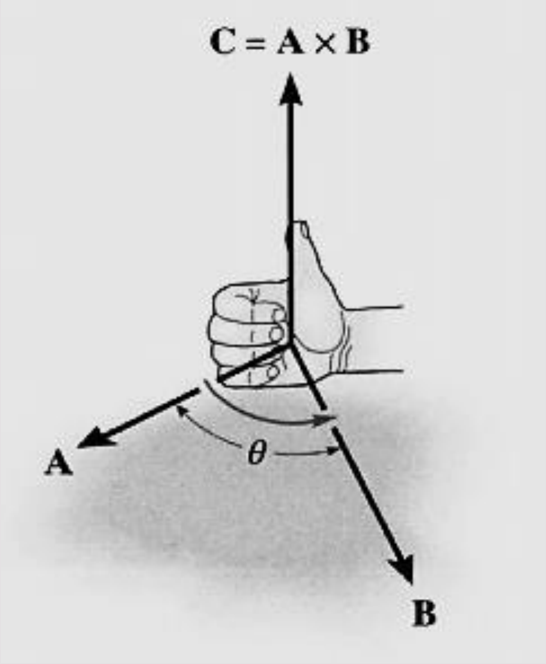
2.2. Produto vetorial
2.3. Formulação vetorial do momento de uma força

2.2. PRODUTO VETORIAL

- O produto vetorial de dois vetores **A** e **B** produz um vetor **C**, o qual é escrito como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

- Este produto é lido com "**C** igual ao produto vetorial **A** e **B**";

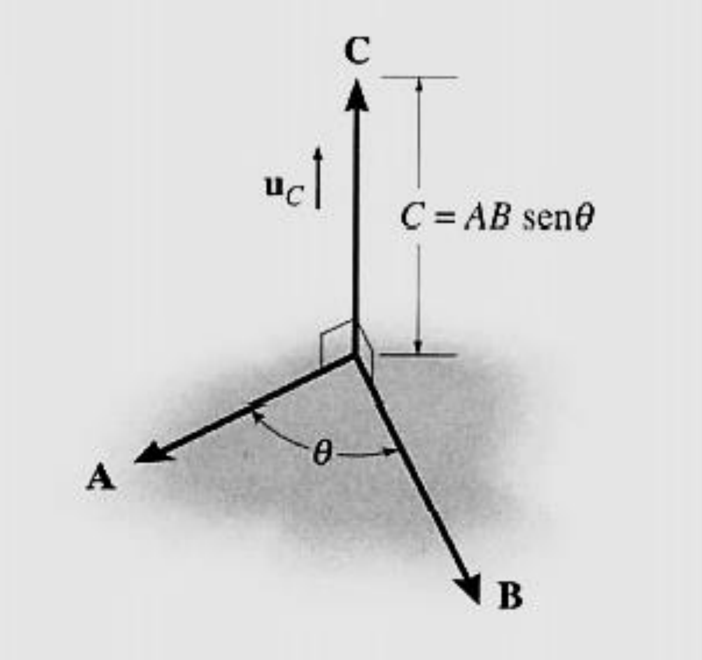


2.2. PRODUTO VETORIAL

- A **intensidade** de **C** é definida como o produto das intensidades de **A** e **B** e o seno do ângulo θ entre os dois vetores, prolongando-os, se necessário, de modo que suas origens se localizem no mesmo ponto;

- Ou seja, a intensidade é dada por:

$$C = AB\, sen\theta$$

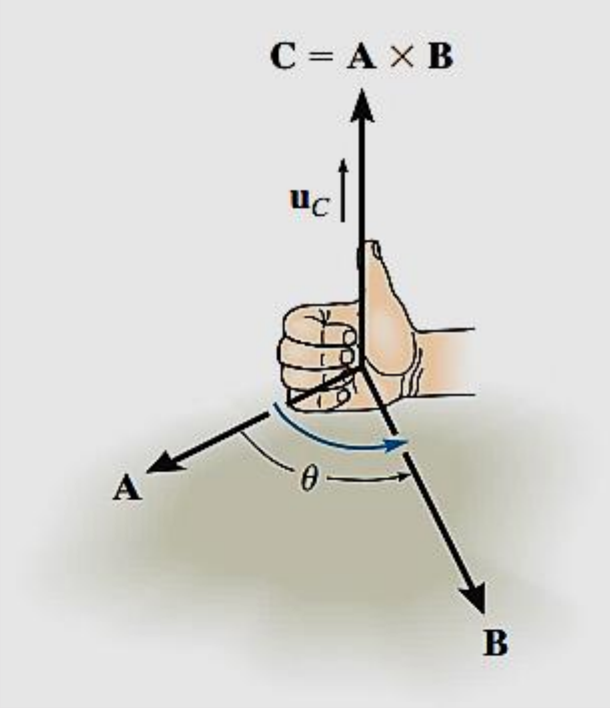


2.2. PRODUTO VETORIAL

- A **direção** do vetor **C** é perpendicular ao plano contendo **A** e **B**, de modo que seu **sentido** é determinado pela regra da mão direta;

- Conhecendo a intensidade, a direção e o sentido, do vetor **C**, podem expressá-lo tal como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB\, sen\theta)\boldsymbol{u}_C$$



Onde:

- O escalar *AB* define a intensidade do vetor **C;**

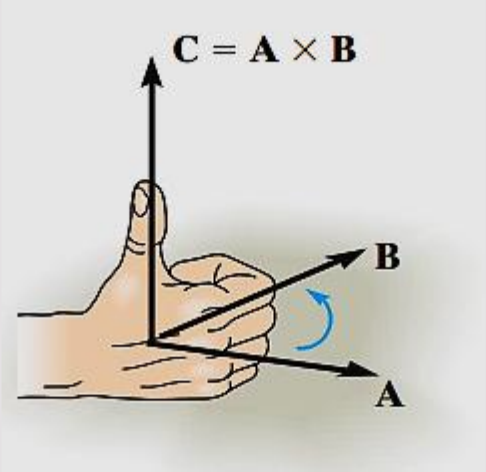
- O vetor unitário $\boldsymbol{u}_C$ define sua direção e o sentido;

2.2. PRODUTO VETORIAL

Leis de operação:

1. O produto vetorial é não-comutativo:

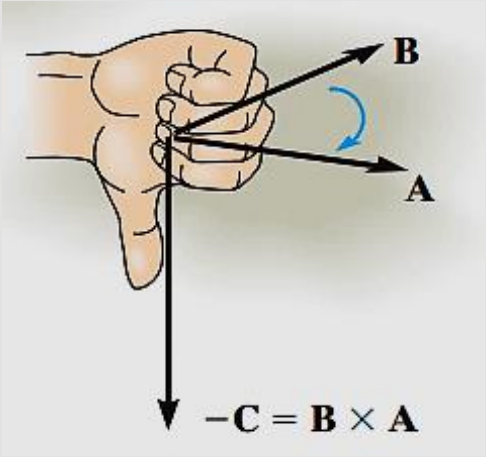
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$



2. Multiplicação por um escalar:

$$a(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (a\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})a$$

- A intensidade, direção e sentido do vetor resultante são as mesmas em cada um dos casos;

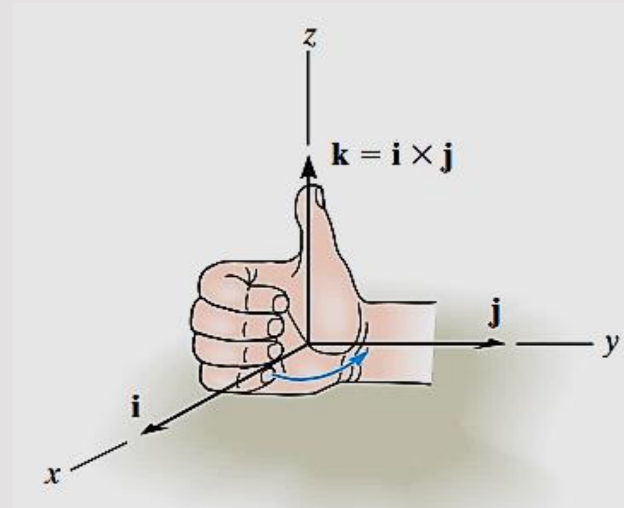


3. Lei distributiva:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{D})$$

2.2. PRODUTO VETORIAL

Formulação vetorial cartesiana:



- Tratando-se, por exemplo, do produto vetorial entre dois vetores unitários, ***i*** x ***j***, a intensidade do vetor resultante é:

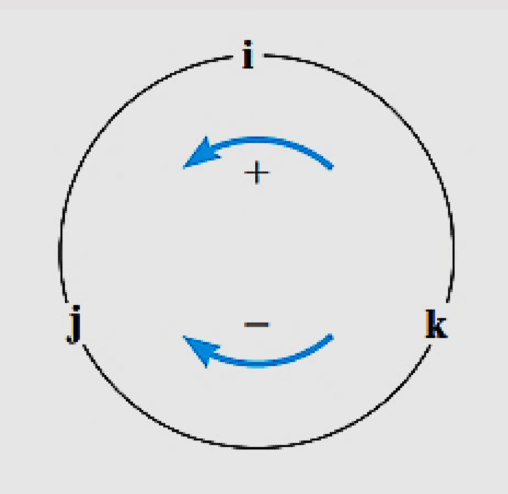
$$(i)(j)(\text{sen}90°) = (1)(1)(1) = 1$$

- A direção e o sentido são definidas pela regra da mão direita, que indica que o vetor resultante aponta na direção de +**k**. Logo:

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = (1)\mathbf{k}$$

- De maneira semelhante, para os demais produtos:

$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$	$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$	$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0$
$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$	$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$	$\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$
$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$



2.2. PRODUTO VETORIAL

Formulação vetorial cartesiana:

- Agora realizando o produto vetorial entre os vetores **A** e **B**, sendo estes expressos na forma de vetores cartesianos, temos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \times (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\
&= A_xB_x(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + A_xB_y(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + A_xB_z(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\
&\quad + A_yB_x(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + A_yB_y(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\
&\quad + A_zB_x(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k} \times \mathbf{k})
\end{aligned}$$

- Efetuando a operação e combinando os termos, obtemos:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}$$

2.2. PRODUTO VETORIAL

Formulação vetorial cartesiana:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}$$

- Esta equação pode ser expressa de forma mais compacta através do determinante de uma matriz:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

- A primeira linha de elementos consistes em vetores unitários, ***i***, ***j***, **k**;

- A segunda e terceira linhas representam os componentes *x*, *y*, *z* dos vetores **A** e **B**, respectivamente.

2.2. PRODUTO VETORIAL

Formulação vetorial cartesiana:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

- O determinante desta matriz, por definição, pode ser encontrado da seguinte maneira:

Para o elemento **i**: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y)$

Para o elemento **j** : $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\mathbf{j}(A_xB_z - A_zB_x)$

Para o elemento **k**: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x)$

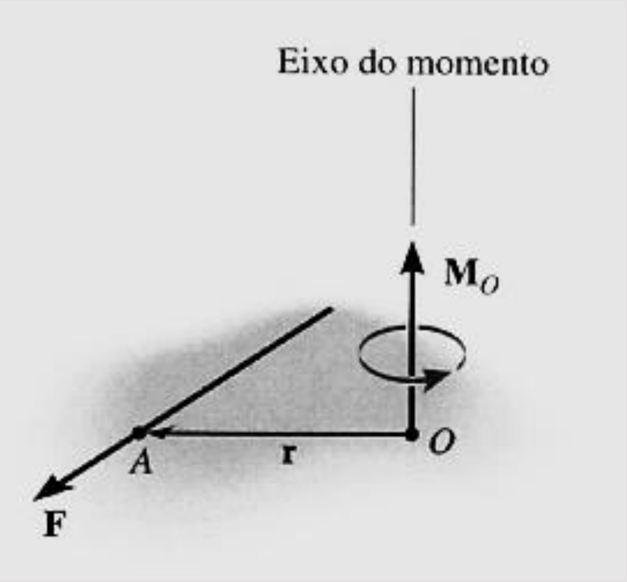
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}$$

2.3. FORMULAÇÃO VETORIAL DO MOMENTO DE UMA FORÇA

- O momento de uma força **F** em relação a um ponto *O* ou, mais especificamente, em relação ao eixo de momento que passa por *O* perpendicularmente ao plano contendo *O* e **F**, pode ser expresso na forma de um produto vetorial:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

- Onde **r** representa o vetor posição traçado de *O* a qualquer ponto da linha que passa por **F** (linha de ação do vetor força);

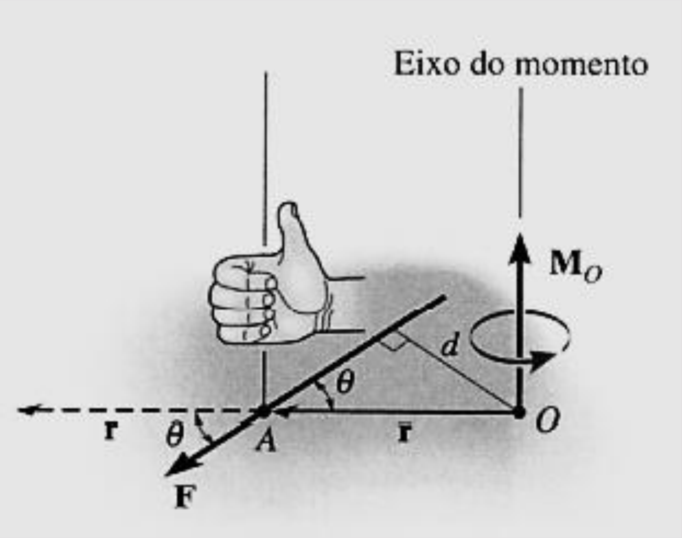


2.3. FORMULAÇÃO VETORIAL DO MOMENTO DE UMA FORÇA

- O momento $\mathbf{M}_O$ obtido a partir de um produto vetorial tem sua direção e sentido bem determinados;

- A intensidade é definida como sendo:

$$M_O = r\,F\,sen\theta = F(r\,sen\theta) = Fd$$



- A **direção** e o **sentido** são definidos pela regra da mão direita, conforme a aplicação do produto vetorial;

2.3. FORMULAÇÃO VETORIAL DO MOMENTO DE UMA FORÇA

- Consideremos um vetor força **F** aplicado a um ponto A. Deste modo, o momento criado por **F** será, em relação a *O*:

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}$$

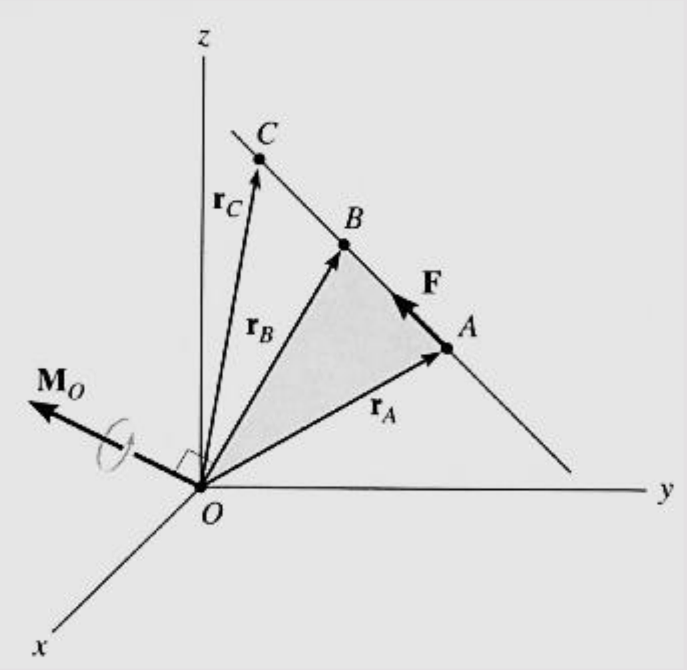
- **r** pode ser traçado de *O* a qualquer ponto da linha de ação de **F**. Logo, **F** pode ser aplicada nos pontos B e C, deste modo, temos que o momento:

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}$$

- Com isso, o momento obtido deste produto vetorial é o mesmo;

- Ou seja, **F** apresenta a propriedade de um vetor deslizante e, assim, pode agir em qualquer ponto sobre sua linha de ação para gerar o mesmo momento em relação a *O;*

- A isto é chamado de **princípio da transmissibilidade**.



2.3. FORMULAÇÃO VETORIAL DO MOMENTO DE UMA FORÇA

- Conforme um sistema de coordenadas x, y, z, vetor posição **r** e o vetor força **F** pode ser expressos como vetores cartesianos, cujo o produto vetorial é o momento de uma força, dado por:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

- Onde r_x, r_y, r_z representam os componentes x, y, z do vetor posição traçado de *O* a qualquer ponto sobre a linha de ação da força;

- F_x, F_y, F_z são os componentes x, y, z do vetor força;

- Desenvolvendo o determinante da matriz, temos que:

$$\mathbf{M}_O = (r_yF_z - r_zF_y)\mathbf{i} - (r_xF_z - r_zF_x)\mathbf{j} + (r_xF_y - r_yF_x)\mathbf{k}$$

2.3. FORMULAÇÃO VETORIAL DO MOMENTO DE UMA FORÇA

- Analisando a figura ao lado:

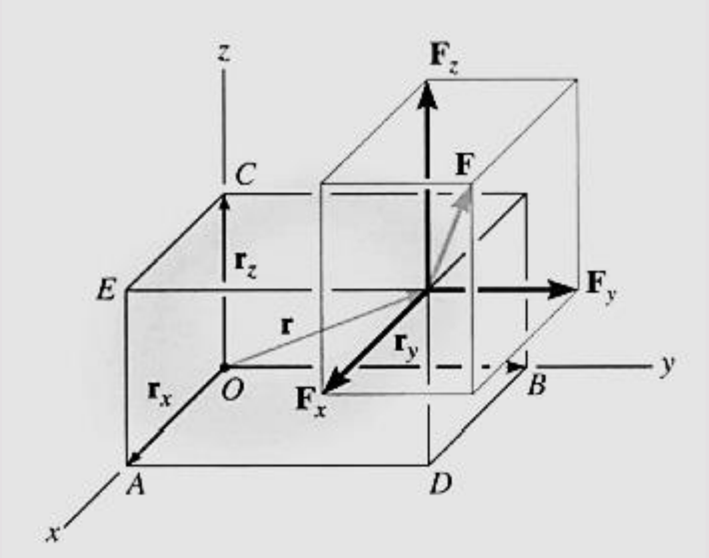
- O componente $\mathbf{i}$ do momento $\mathbf{M_O}$ é obtido a partir dos momentos de $\mathbf{F_x}$, $\mathbf{F_y}$, $\mathbf{F_z}$ em relação ao eixo *x*;

- Contudo $\mathbf{F_x}$ não cria nenhum momento nem tendência de rotação em relação ao eixo *x*, devido essa força ser paralela a esse eixo;

- A linha de ação de $\mathbf{F_y}$ passa pelo ponto E, de modo que a intensidade do momento de $\mathbf{F_y}$ em relação ao ponto A no eixo x seja $\mathrm{r_z F_y}\mathbf{i}$; pela regra da mão direita, este componente atua no sentido negativo de **i**;

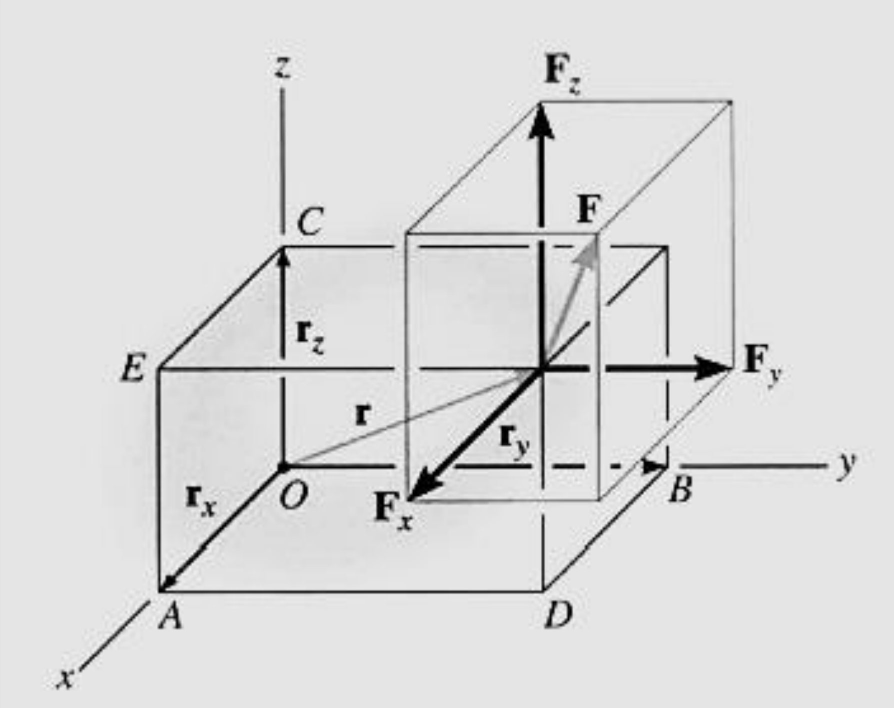
- Da mesma forma, $\mathbf{F_z}$ contribui com um componente do momento dado por $\mathrm{r_y F_y i}$, que atua no sentido positivo de **i**;

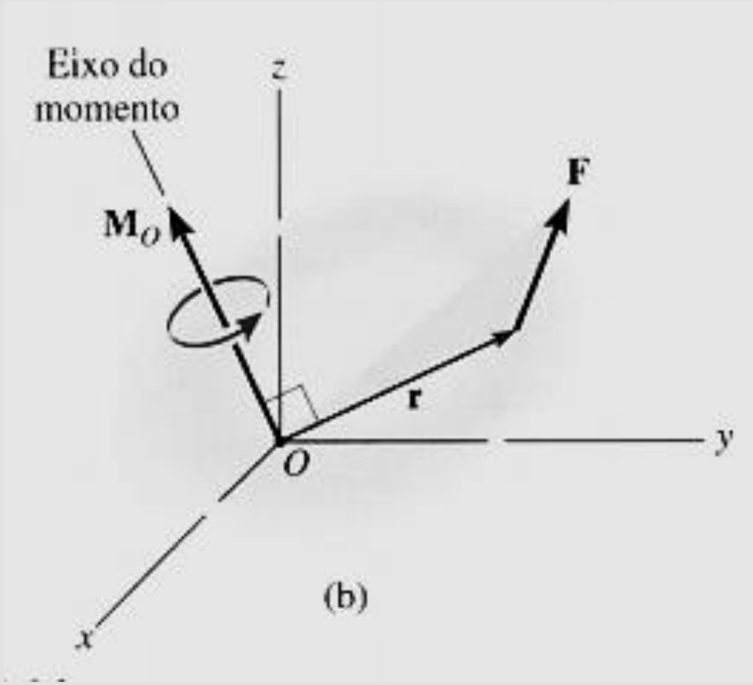
- Assim, $(M_O)_x = \left(r_y F_z - r_z F_y\right)$.



2.3. FORMULAÇÃO VETORIAL DO MOMENTO DE UMA FORÇA

- Da mesma forma para os componentes **j** e **k** do momento $\mathbf{M_O}$, mostrando que a forma expandida do determinante representa o momento do vetor força **F** em relação ao ponto *O*.

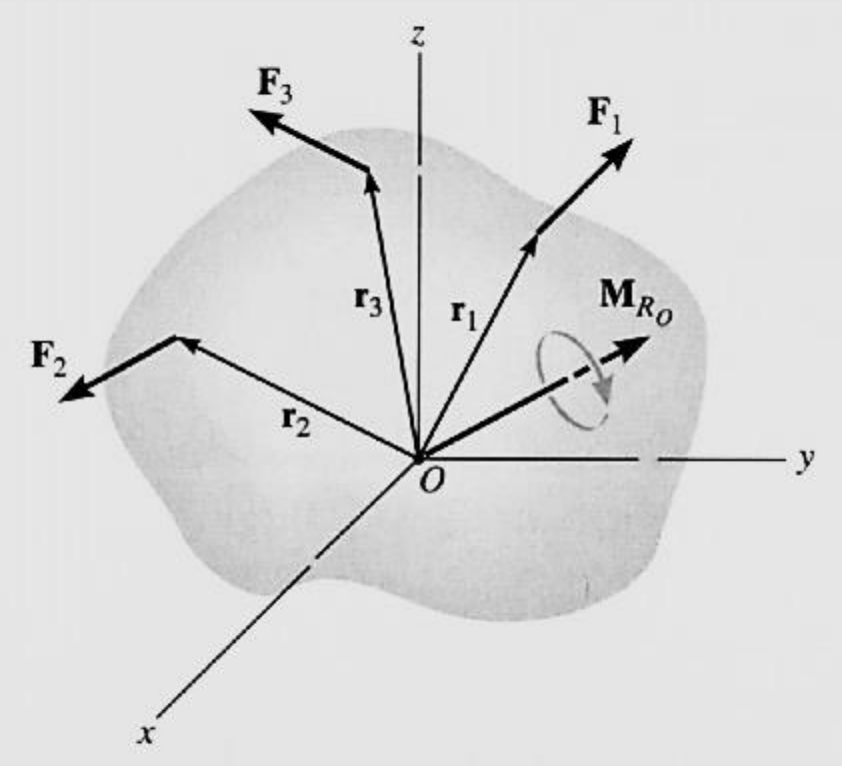




2.3. FORMULAÇÃO VETORIAL DO MOMENTO DE UMA FORÇA

- No caso de um corpo sujeito à ação de um sistema de forças, o momento resultante das forças em relação ao ponto *O* pode ser obtido pela soma vetorial:

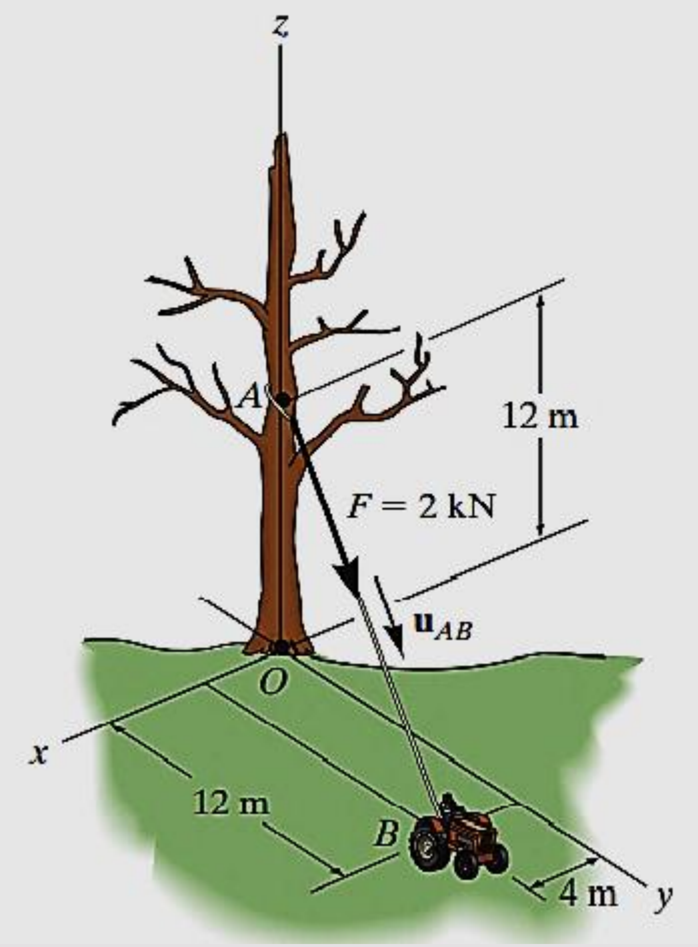
$$\boldsymbol{M}_{R_O} = \sum (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})$$



2.3. FORMULAÇÃO VETORIAL DO MOMENTO DE UMA FORÇA

Exercício 11:

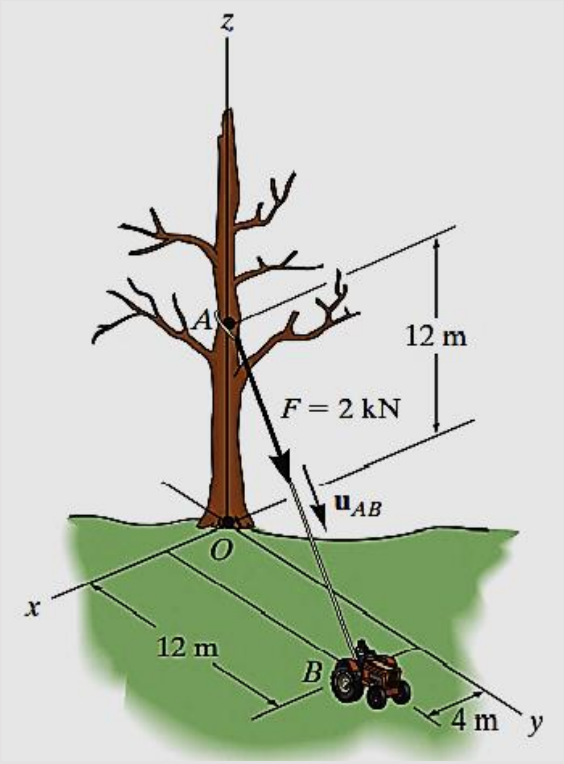
- Determine o momento que a força **F** exercida por um trator em uma árvore em relação ao ponto *O*. Expresse o resultado na forma de um vetor cartesiano.



2.3. FORMULAÇÃO VETORIAL DO MOMENTO DE UMA FORÇA

Solução:

- Para determinar o momento em relação ao ponto O, é necessário encontrar os vetores posição $\mathbf{r}_A$ e $\mathbf{r}_B$;



$$\boldsymbol{r}_A = 12\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_B = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$$

- Já o vetor posição $\boldsymbol{r}_{AB}$ é definido conforme o circuito de vetores:

$$\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_{AB} = \boldsymbol{r}_B \therefore \boldsymbol{r}_{AB} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$$

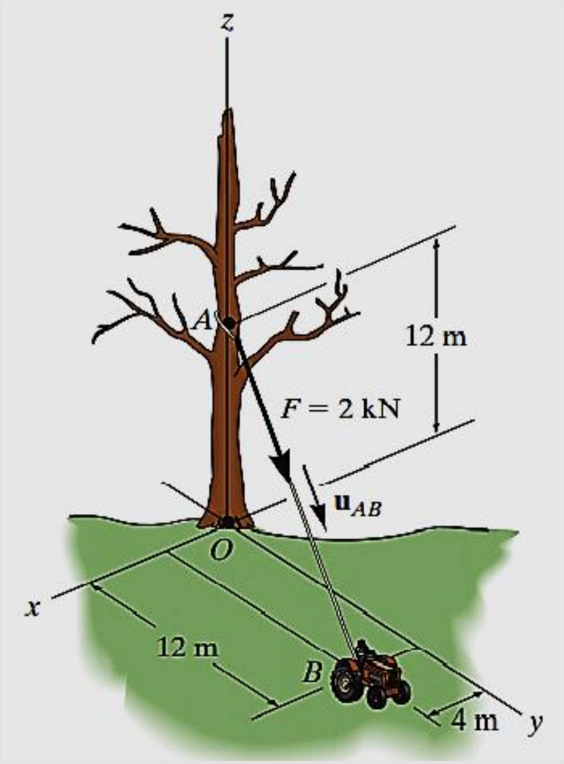
$$\boldsymbol{r}_{AB} = (4\mathbf{i} + 12\mathbf{j}\ ) - (12\boldsymbol{k}\ )$$

$$\boldsymbol{r}_{AB} = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 12\boldsymbol{k}$$

2.3. FORMULAÇÃO VETORIAL DO MOMENTO DE UMA FORÇA

Solução:

- **F** pode ser expressa como vetor cartesiano:



$$\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{u}_{AB}$$

- Sendo $\boldsymbol{u}_{AB}$ dado por:

$$\boldsymbol{u}_{AB} = \frac{\boldsymbol{r}_{AB}}{r_{AB}}$$

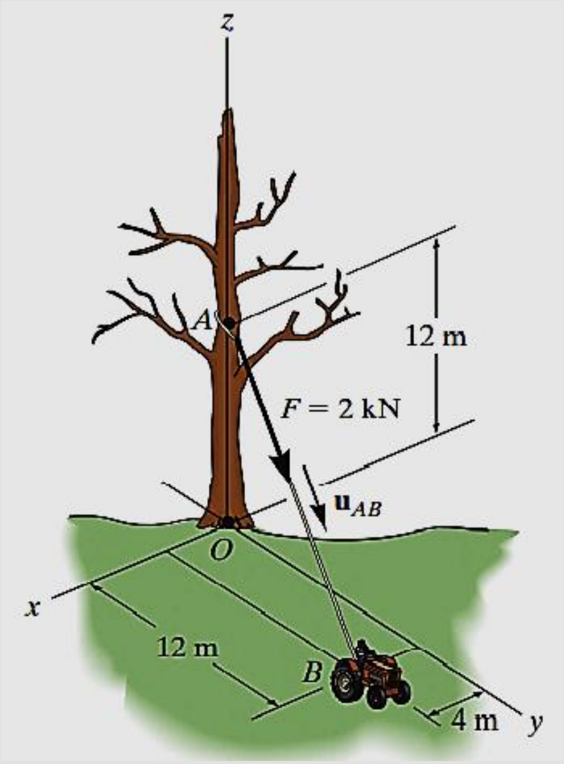
- Logo:

$$\boldsymbol{F} = F\frac{\boldsymbol{r}_{AB}}{r_{AB}} = 2kN\left(\frac{\{4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 12\boldsymbol{k}\}\mathrm{m}}{\sqrt{(4m)^2+(12m)^2+(-12m)^2}}\right)$$

2.3. FORMULAÇÃO VETORIAL DO MOMENTO DE UMA FORÇA

Solução:

➢ **F** pode ser expressa como vetor cartesiano:



$$\boldsymbol{F} = F\frac{\boldsymbol{r}_{AB}}{r_{AB}} = 2kN\left(\frac{\{4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 12\boldsymbol{k}\}\text{m}}{\sqrt{(4m)^2 + (12m)^2 + (-12m)^2}}\right)$$

$$\boldsymbol{F} = \{0{,}4588\boldsymbol{i} + 1{,}376\boldsymbol{j} - 1{,}376\boldsymbol{k}\}kN$$

2.3. FORMULAÇÃO VETORIAL DO MOMENTO DE UMA FORÇA

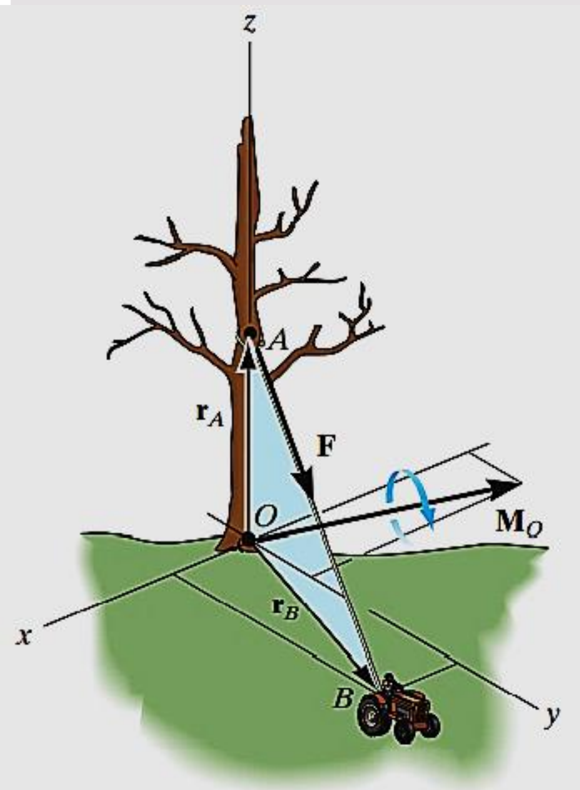
Solução:

- Deste modo o momento $\mathbf{M}_O$ da força **F** em relação ao ponto *O* é dado por:

$$\boldsymbol{M_O} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 0{,}4588 & 1{,}376 & -1{,}376 \end{vmatrix}$$

$$= [0(-1{,}376) - 12(1{,}376)]\boldsymbol{i} - [0(-1{,}376) - 12(0{,}4588)]\boldsymbol{j} + [0(1{,}376) - 0(0{,}4588)]\mathbf{k}$$

$$= \{-16{,}5\boldsymbol{i} + 5{,}51\boldsymbol{j}\}kN.\mathrm{m}$$



$$\boldsymbol{M_O} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 12 & 0 \\ 0{,}4588 & 1{,}376 & -1{,}376 \end{vmatrix}$$

$$= [12(-1{,}376) - 0(1{,}376)]\boldsymbol{i} - [4(-1{,}376) - 0(0{,}4588)]\boldsymbol{j} + [4(1{,}376) - 12(0{,}4588)]\mathbf{k}$$

$$= \{-16{,}5\boldsymbol{i} + 5{,}51\boldsymbol{j}\}kN.\mathrm{m}$$

OBRIGADO PELA ATENÇÃO!