Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

MOMENTO DE INÉRCIA DE ÁREA E MOMENTO DE INÉRCIA DE MASSA

Parte 1:

7.1. Definição de momentos de inércia para áreas

7.2. Teorema dos eixos paralelos para uma área

7.3. Raio de giração de uma área

Parte 2:

7.4. Momento de inércia de massa

7.5. Teorema dos eixos paralelos

7.6. Raio de giração

MOMENTO DE INÉRCIA DE ÁREA E MOMENTO DE INÉRCIA DE MASSA

Parte 2:

7.4. Momento de inércia de massa

7.5. Teorema dos eixos paralelos

7.6. Raio de giração

7.4. MOMENTO DE INÉRCIA DE MASSA

- O momento de inércia de massa de um corpo é uma medida de sua resistência à aceleração angular;

- É usado na dinâmica para estudar o movimento de rotação;

- Considere o corpo rígido mostrado na figura ao lado. Definimos o momento de inércia da massa do corpo em relação ao eixo $\boldsymbol{z}$ como:

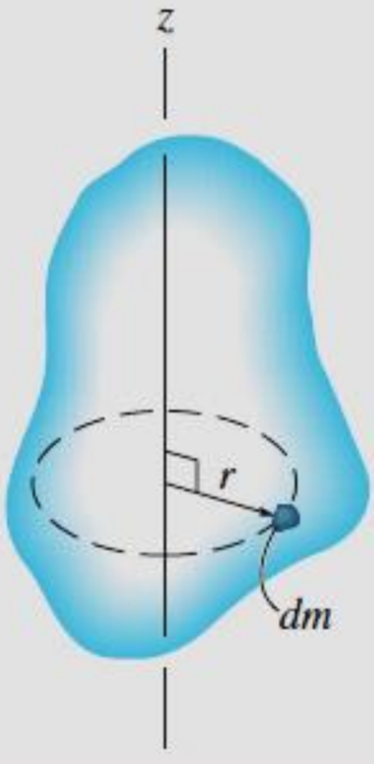
$$I = \int_m r^2\, dm$$

- Aqui, $\boldsymbol{r}$ é a distância perpendicular do eixo até o elemento arbitrário dm;

- Como a formulação envolve $\boldsymbol{r}$, o valor de $\boldsymbol{I}$ é exclusivo para cada eixo em relação ao qual ele é calculado;

- O eixo que geralmente é escolhido, porém, passa pelo centro de massa $\boldsymbol{G}$ do corpo;

- A unidade comum usada para essa medida é $\boldsymbol{kg\,.\,m^2}$.



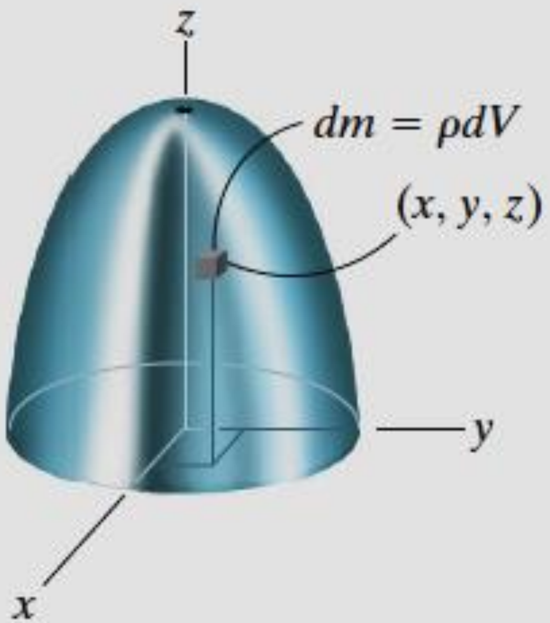
7.4. MOMENTO DE INÉRCIA DE MASSA

- Se o corpo consiste em um material tendo densidade $\boldsymbol{\rho}$, então $\boldsymbol{dm} = \boldsymbol{\rho}\, \boldsymbol{dV}$;

- Substituindo isso na equação anterior, o momento de inércia do corpo é calculado usando-se elementos de volume para integração;

- Ou seja:

$$I = \int_V r^2 \rho \, dV$$

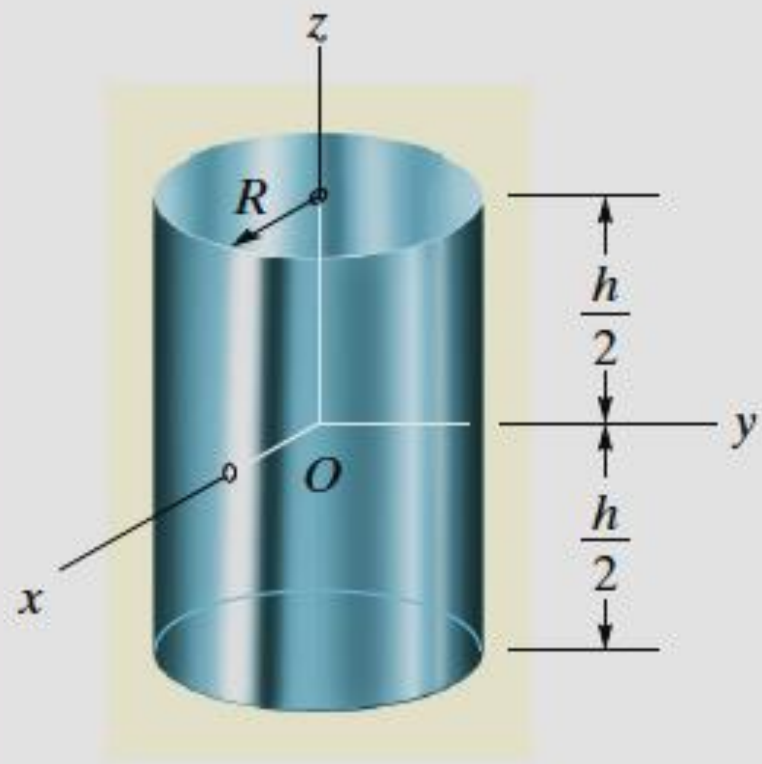


- Para a maioria das aplicações, $\boldsymbol{\rho}$ será uma constante e, assim, esse termo pode ser fatorado da integral, e a integração é, então, puramente uma função da geometria.

7.4. MOMENTO DE INÉRCIA DE MASSA

Exercício 39:

- Determine o momento de inércia de massa do cilindro mostrado na figura abaixo em relação ao eixo z, considerando que a densidade do material, ρ, é constante.



7.4. MOMENTO DE INÉRCIA DE MASSA

Solução:

- O volume do elemento é:

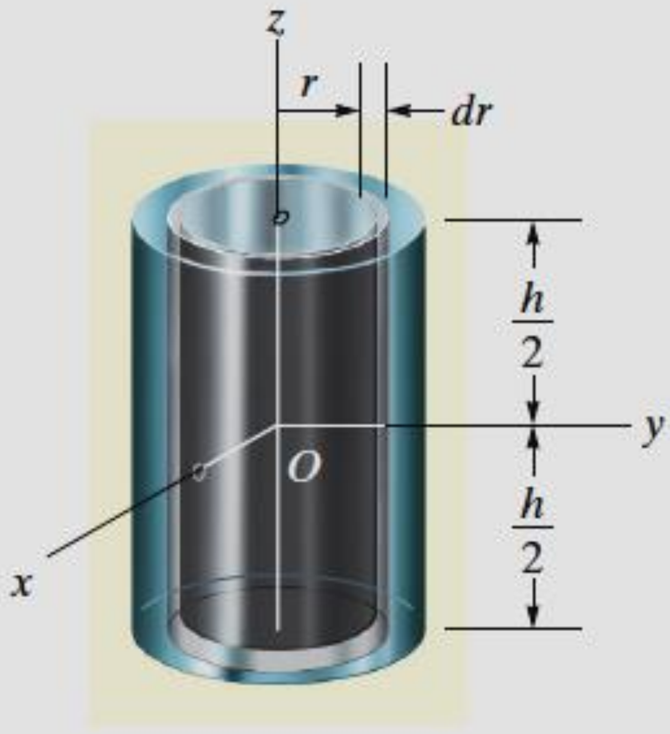
$$dV = (2\pi r)(h)dr$$

- Portanto, a massa será:

$$dm = \rho dV = \rho(2\pi r h dr)$$

- Como *todo o elemento* está à mesma distância r do eixo z, o momento de inércia do elemento é:

$$dI_z = r^2\,dm = \rho 2\pi h r^3\,dr$$



7.4. MOMENTO DE INÉRCIA DE MASSA

Solução:

- Integrando-se por todo o cilindro, obtém-se:

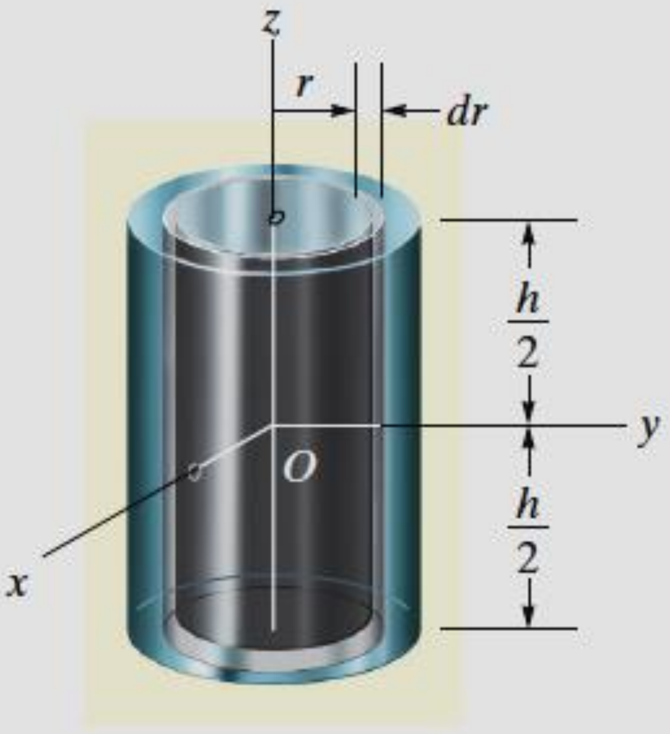
$$I_z = \int_m r^2\,dm = \rho 2\pi h \int_0^R r^3\,dr = \frac{\rho\pi}{2} R^4 h$$

- Como a massa do cilindro é:

$$m = \int_m dm = \rho 2\pi h \int_0^R r\,dr = \rho\pi h R^2$$

- Logo:

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2$$

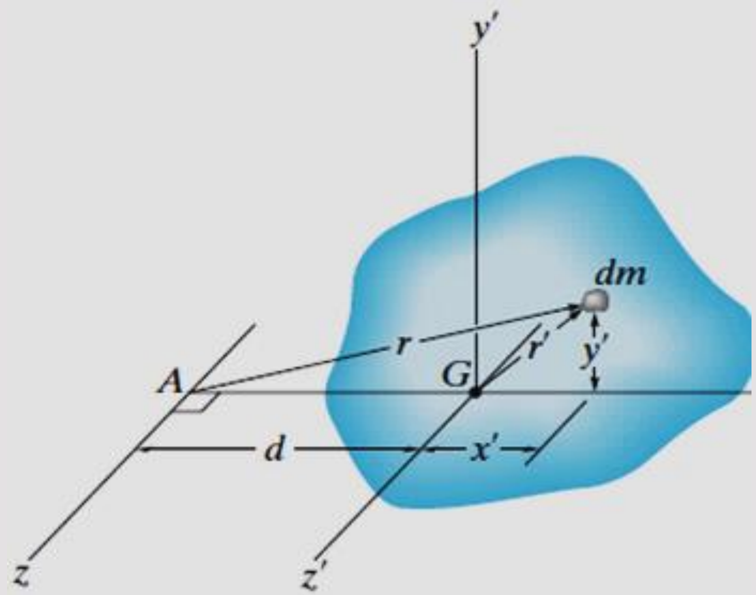


7.5. TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

- Se o momento de inércia do corpo em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa for conhecido, o momento de inércia em relação a qualquer outro eixo paralelo pode ser determinado usando o teorema dos eixos paralelos;

- O eixo $\boldsymbol{z}'$ passa pelo centro de massa $\boldsymbol{G}$, ao passo que o eixo paralelo $\boldsymbol{z}$ correspondente está afastado por uma distância constante d;

- Selecionando o elemento de massa diferencial dm, que está localizado no ponto $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')$ e usando o teorema de Pitágoras, $\boldsymbol{r}^2 = (\boldsymbol{d} + \boldsymbol{x}')^2 + \boldsymbol{y}'^2$, o momento de inércia do corpo em relação ao eixo $\boldsymbol{z}$ é:



$$I = \int_m r^2\, dm = \int_m [(d + x')^2 + y'^2]\, dm = \int_m (x'^2 + y'^2)\, dm + 2d \int_m x'\, dm + d^2 \int_m dm$$

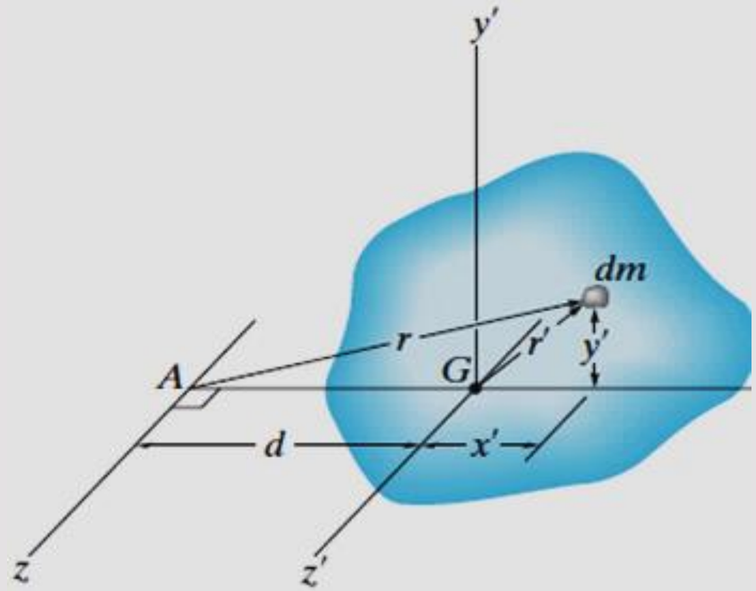
7.5. TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

$$I = \int_m (x'^2 + y'^2)\, dm + 2d \int_m x'\, dm + d^2 \int_m dm$$

- Como $\boldsymbol{r'^2} = \boldsymbol{x'^2} + \boldsymbol{y'^2}$, a primeira integral representa $\boldsymbol{I_G}$;
- A segunda integral é igual a zero, pois o eixo $\boldsymbol{z}$' passa pelo centro de massa do corpo, $\boldsymbol{G}$, ou seja:

$$\int_m \boldsymbol{x' dm} = \boldsymbol{\overline{x}'} \int \boldsymbol{d\,m}$$

$$\boldsymbol{\overline{x}'} = \frac{\int_m \boldsymbol{x' dm}}{\int \boldsymbol{d\,m}} = \boldsymbol{0}, pois\ \boldsymbol{\overline{x}} = 0$$



7.5. TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

$$I = \int_m (x'^2 + y'^2)\, dm + 2d \int_m x'\, dm + d^2 \int_m dm$$

- Finalmente, a terceira integral é a massa total m do corpo;

- Logo, o momento de inércia em relação ao eixo $\boldsymbol{z}$ torna-se:

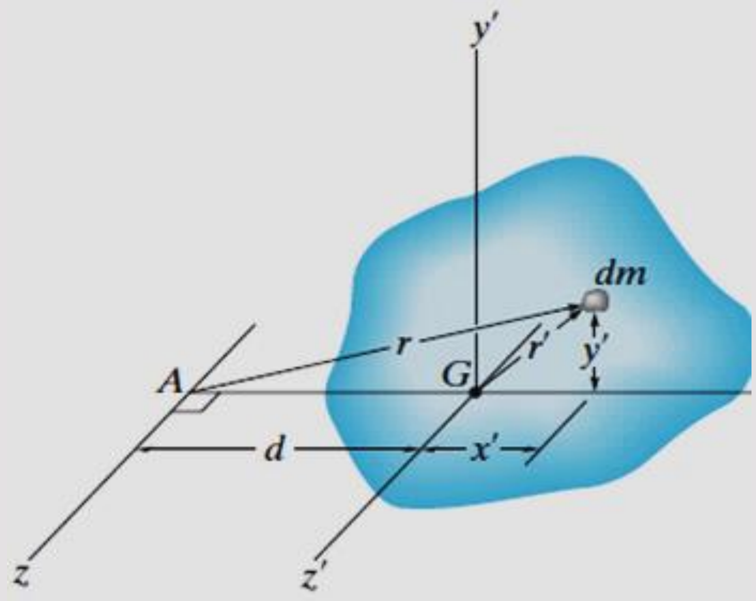
$$I = I_G + md^2$$

- Onde:

- $\boldsymbol{I_G}$ $=$ momento de inércia em relação ao eixo $\boldsymbol{z'}$ passando pelo centro de massa ***G;***

- $\boldsymbol{m}$ $=$ massa do corpo;

- $\boldsymbol{d}$ $=$ distância entre os eixos paralelos;



7.6. RAIO DE GIRAÇÃO

- Ocasionalmente, o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo específico é reportado nos manuais de engenharia através do *raio de giração*, *k*;

- Esse valor tem unidades de comprimento, e quando ele e a massa do corpo *m* são conhecidos, o momento de inércia pode ser determinado pela equação:

$$I = mk^2 \quad \text{ou} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

- Observe a *semelhança* entre a definição de *k* nessa fórmula e *r* na equação:

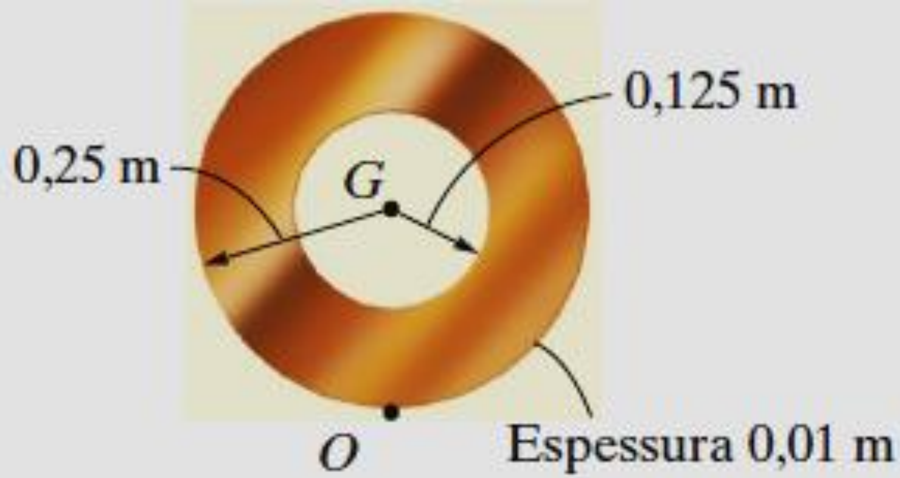
$$\boldsymbol{dI = r^2 dm}$$

- Esta equação define o momento de inércia de um elemento de massa diferencial $\boldsymbol{dm}$ do corpo em relação a um eixo.

7.6. RAIO DE GIRAÇÃO

Exercício 40:

- Se a chapa mostrada na figura abaixo tem densidade de $\boldsymbol{8000\ kg/m^3}$ e espessura de $\boldsymbol{10\ mm}$, determine seu momento de inércia de massa em relação a um eixo perpendicular à tela e passando pelo pino em $\boldsymbol{O}$.



(a)

7.6. RAIO DE GIRAÇÃO

Solução:

- A chapa consiste em duas partes componentes: o disco com raio de 250 mm menos um disco com raio de 125 mm:

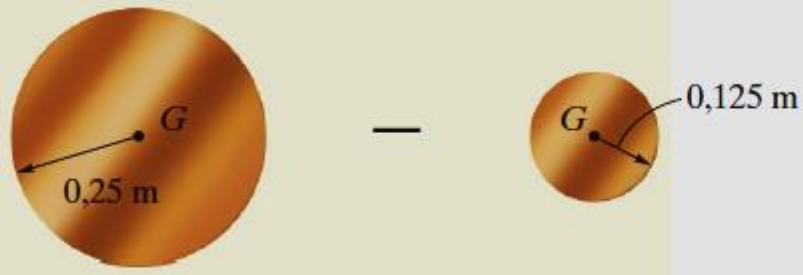
- O momento de inércia em relação a $\boldsymbol{O}$ pode ser determinado achando o momento de inércia de cada uma dessas partes em relação a $\boldsymbol{O}$ e depois somando algebricamente os resultados;

- Os cálculos são realizados por meio do teorema dos eixos paralelos em conjunto com a fórmula do momento de inércia de massa de um disco circular, $\boldsymbol{I_G = \frac{1}{2}mr^2}$;

7.6. RAIO DE GIRAÇÃO

Solução:

1) Disco



- O momento de inércia de um disco em relação a um eixo perpendicular ao plano do disco e que passa por $\boldsymbol{G}$ é $\boldsymbol{I_G = \frac{1}{2}mr^2}$;

- O centro de massa dos dois discos está a 0,25 m do ponto *O*. Assim,

$$m_d = \rho_d V_d = 8000 \text{ kg/m}^3 \, [\pi(0{,}25 \text{ m})^2(0{,}01 \text{ m})] = 15{,}71 \text{ kg}$$

$$(I_O)_d = \tfrac{1}{2}m_d r_d^2 + m_d d^2$$

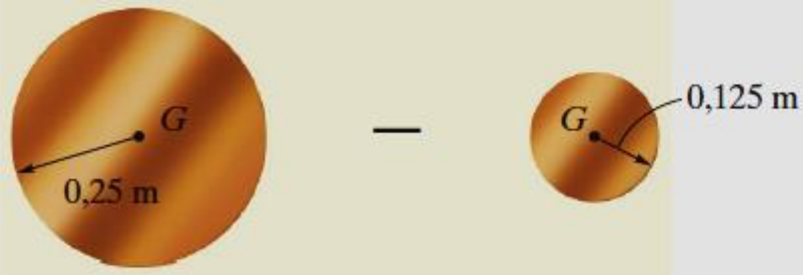
$$= \tfrac{1}{2}(15{,}71 \text{ kg})(0{,}25 \text{ m})^2 + (15{,}71 \text{ kg})(0{,}25 \text{ m})^2$$

$$= 1{,}473 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

7.6. RAIO DE GIRAÇÃO

Solução:

2) Furo



- Para o disco menor (furo), temos:

$$m_h = \rho_h V_h = 8000 \text{ kg/m}^3 \, [\pi(0{,}125 \text{ m})^2(0{,}01 \text{ m})] = 3{,}93 \text{ kg}$$

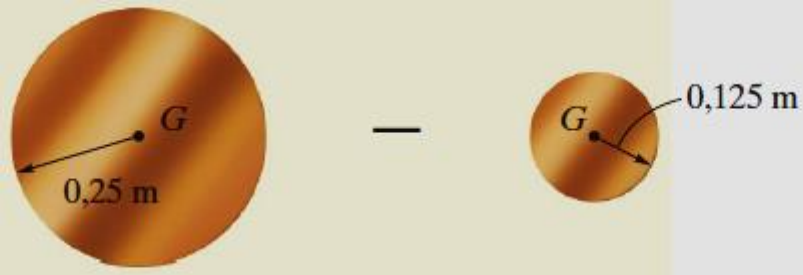
$$(I_O)_h = \frac{1}{2} m_h r_h^2 + m_h d^2$$

$$= \frac{1}{2}(3{,}93 \text{ kg})(0{,}125 \text{ m})^2 + (3{,}93 \text{ kg})(0{,}25 \text{ m})^2$$

$$= 0{,}276 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

7.6. RAIO DE GIRAÇÃO

Solução:



- Sendo assim, o momento de inércia da placa em relação ao pino será:

$$I_O = (I_O)_d - (I_O)_h$$

$$= 1{,}473\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 - 0{,}276\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$= 1{,}20\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

ATÉ A PRÓXIMA!