Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

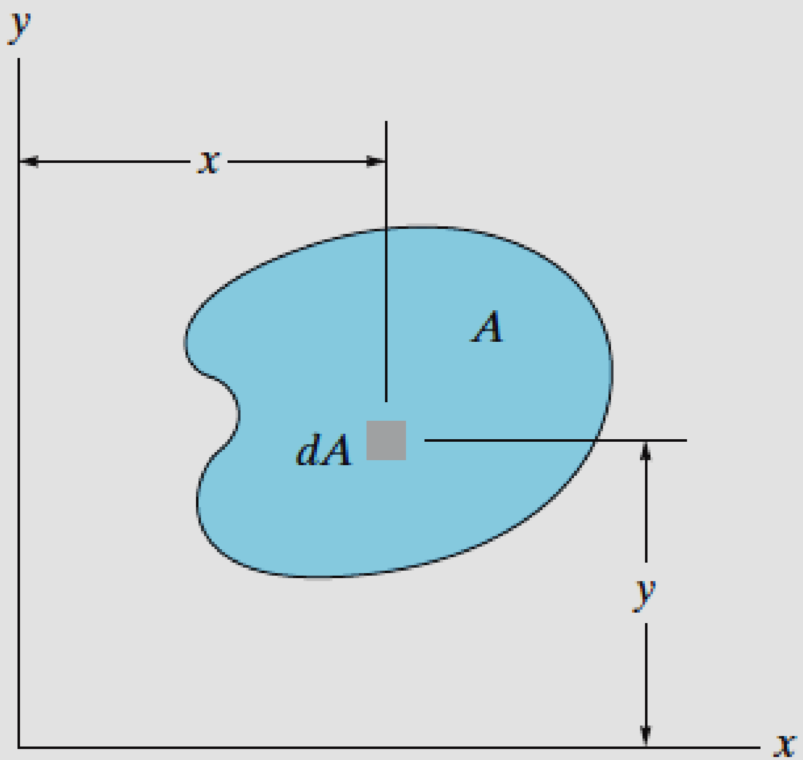
MOMENTO DE INÉRCIA DE ÁREA

7.8. Produto de inércia de uma área

7.8. PRODUTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA

- O produto de inércia é uma propriedade de área necessária para determinarmos **os momentos de inércia máximo e mínimo de uma área**;

- Esses valores máximo e mínimo são propriedades importantes, necessárias para projetar membros estruturais e mecânicos como vigas, colunas e eixos.



$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

7.8. PRODUTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA

- Assim como o momento de inércia, o produto de inércia tem unidades de comprimento elevadas à quarta potência, por exemplo, $\boldsymbol{m^4}$ ou $\boldsymbol{mm^4}$;

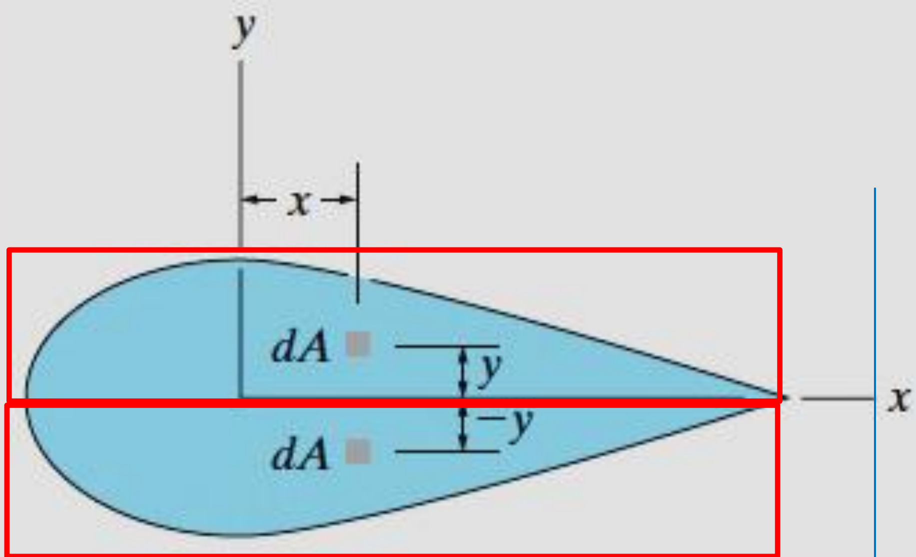
- Porém, como $\boldsymbol{x}$ ou $\boldsymbol{y}$ podem ser negativos, o produto de inércia pode ser positivo, negativo ou zero, dependendo da posição e da orientação dos eixos de coordenadas;

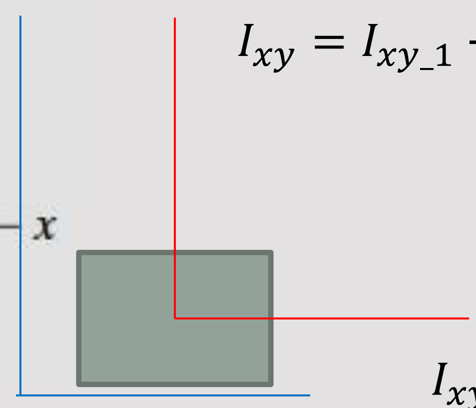
- Por exemplo, o produto de inércia $\boldsymbol{I_{xy}}$ de uma área será zero se o eixo $\boldsymbol{x}$ (ou $\boldsymbol{y}$) for um eixo de simetria da área.

$$I_{xy\_1} = \int xydA$$

$$I_{xy\_2} = -\int xydA$$

$$I_{xy} = I_{xy\_1} - I_{xy\_2}$$



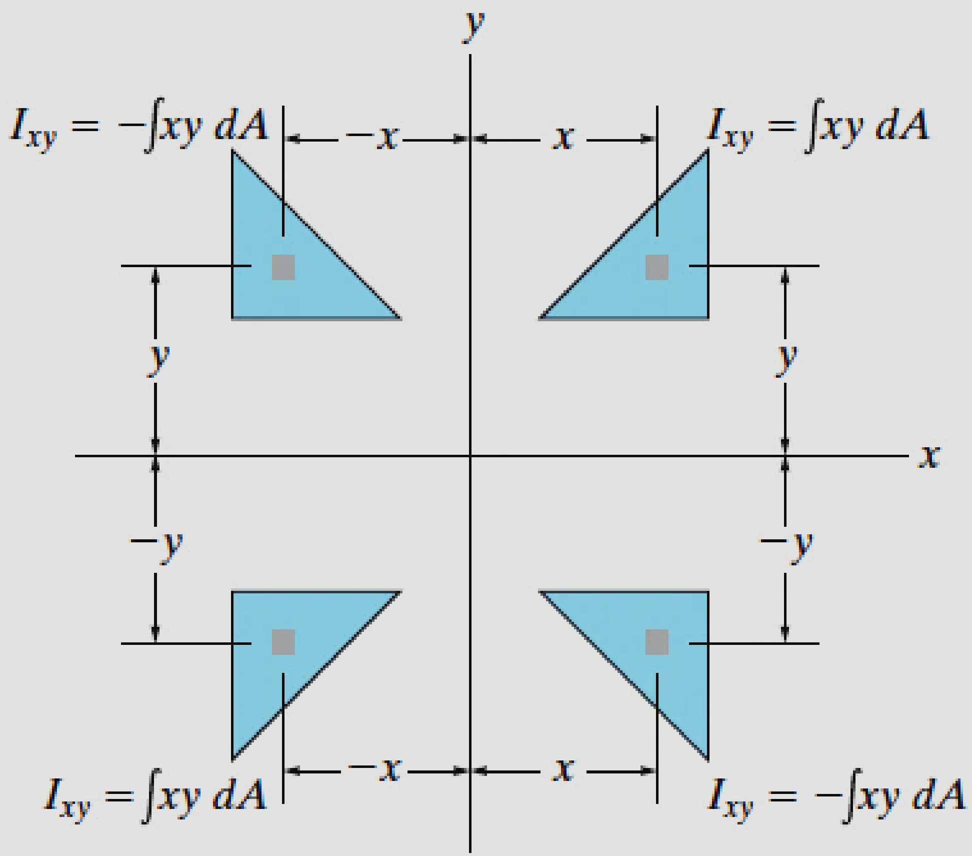


$I_{xy} = 0$ $\quad$ $I_{xy} = 0$

7.8. PRODUTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA

- Segue-se também, pela definição de I_{xy} , que o "sinal" dessa quantidade depende do quadrante onde a área está localizada;

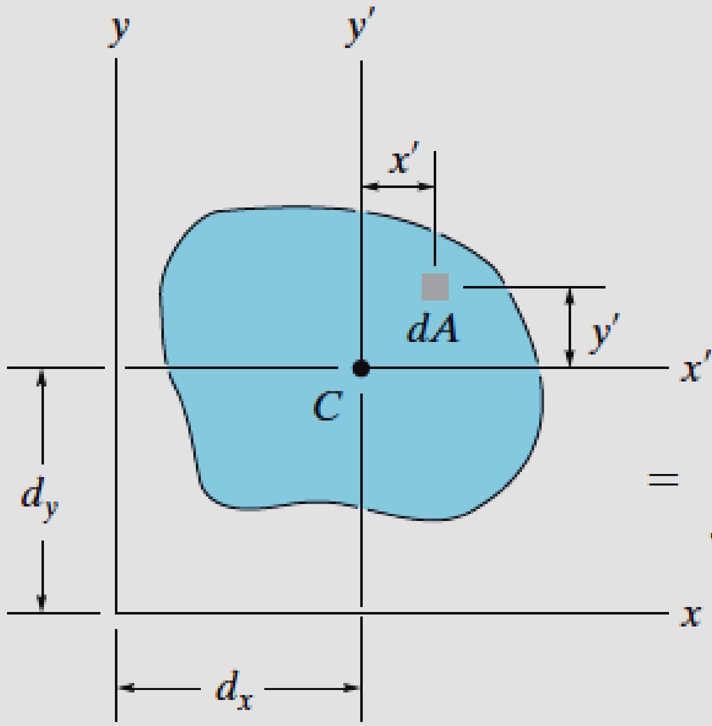
- Se a área for girada de um quadrante para outro, o sinal de I_{xy} mudará.



7.8. PRODUTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA

Teorema dos eixos paralelos

$$dI_{xy} = (x' + d_x)\,(y' + d_y)\,dA.$$



$$I_{xy} = \int_A (x' + d_x)(y' + d_y)\,dA$$

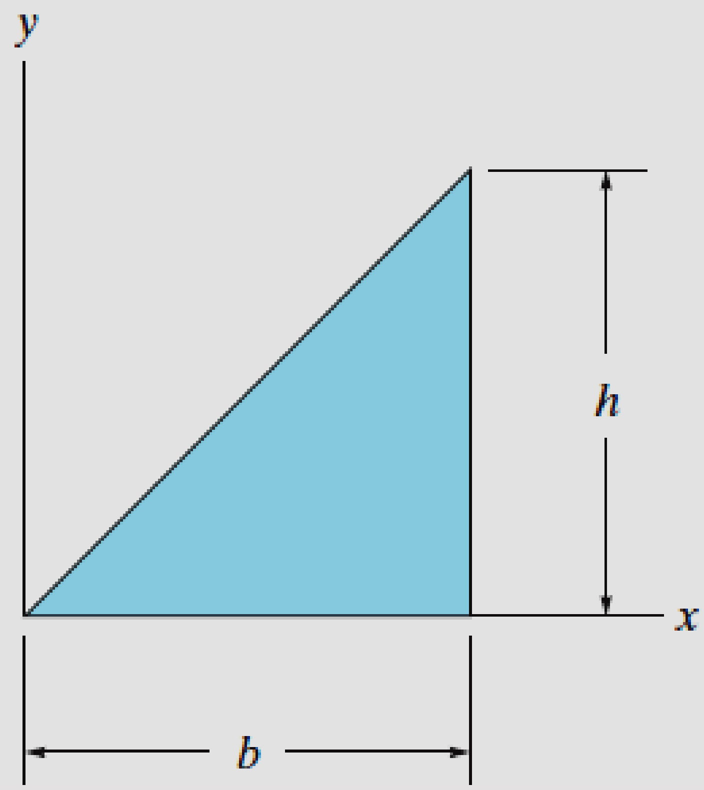
$$= \int_A x'y'\,dA + d_x \int_A y'\,dA + d_y \int_A x'\,dA + d_x d_y \int_A dA$$

$$\boxed{I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y}$$

7.8. PRODUTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA

Exercício 48:

- Determine o produto de inércia I_{xy} do triângulo mostrado na figura abaixo.



7.8. PRODUTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA

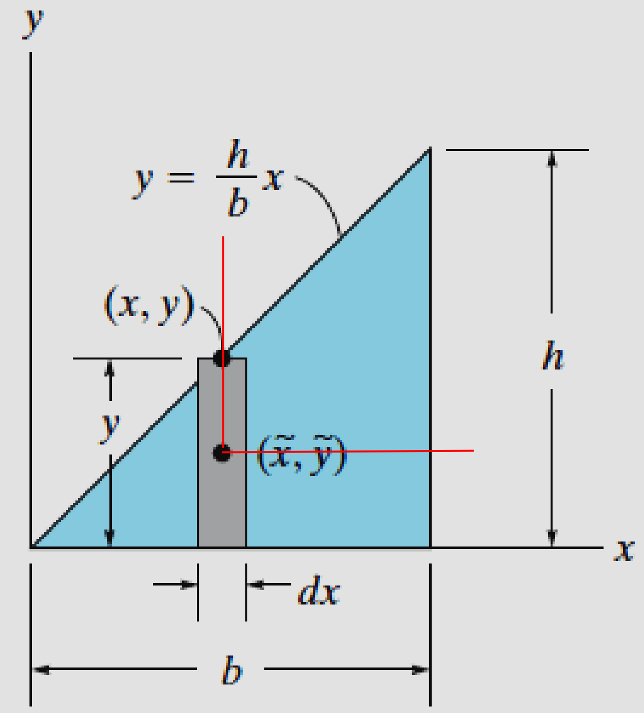
Solução 1:

- Um elemento diferencial que tem espessura dx tem área $dA = y\,dx$;
- O produto de inércia desse elemento em relação aos eixos x e y é determinado usando o teorema dos eixos paralelos.

$$dI_{xy} = d\bar{I}_{x'y'} + dA\,\tilde{x}\,\tilde{y}$$

$$dI_{xy} = 0 + (y\,dx)x\left(\frac{y}{2}\right) = \left(\frac{h}{b}x\,dx\right)x\left(\frac{h}{2b}x\right)$$

$$= \frac{h^2}{2b^2}x^3\,dx$$

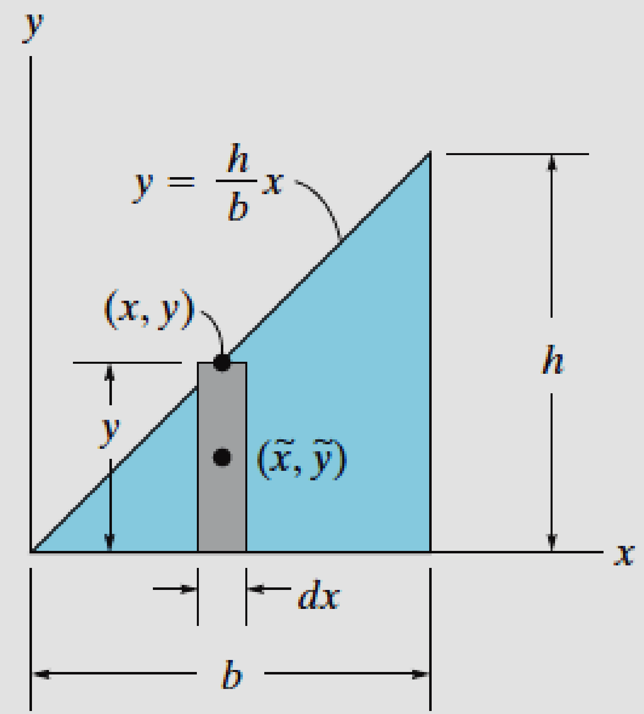


7.8. PRODUTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA

Solução 1:

- Fazendo a integração em relação a $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ até $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, temos:

$$I_{xy} = \frac{h^2}{2b^2}\int_0^b x^3\,dx = \frac{b^2h^2}{8}$$



7.8. PRODUTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA

Solução 2:

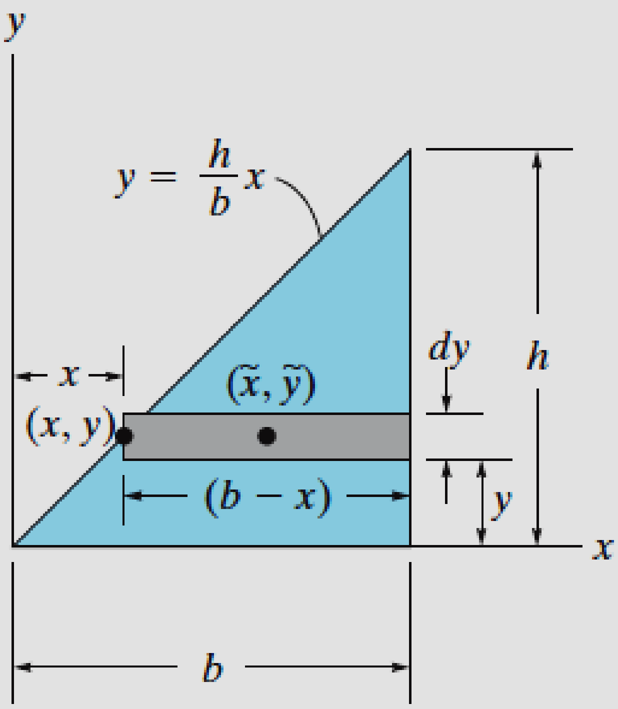
➢ Um elemento diferencial de espessura $\boldsymbol{dy}$ também pode ser usado. Este tem área $\boldsymbol{dA} = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dy}$:

$$dI_{xy} = d\bar{I}_{x'y'} + dA\,\tilde{x}\,\tilde{y}$$

$$= 0 + (b - x)\,dy\left(\frac{b + x}{2}\right)y$$

$$= \left(b - \frac{b}{h}y\right)dy\left[\frac{b + (b/h)y}{2}\right]y$$

$$= \frac{1}{2}y\left(b^2 - \frac{b^2}{h^2}y^2\right)dy$$



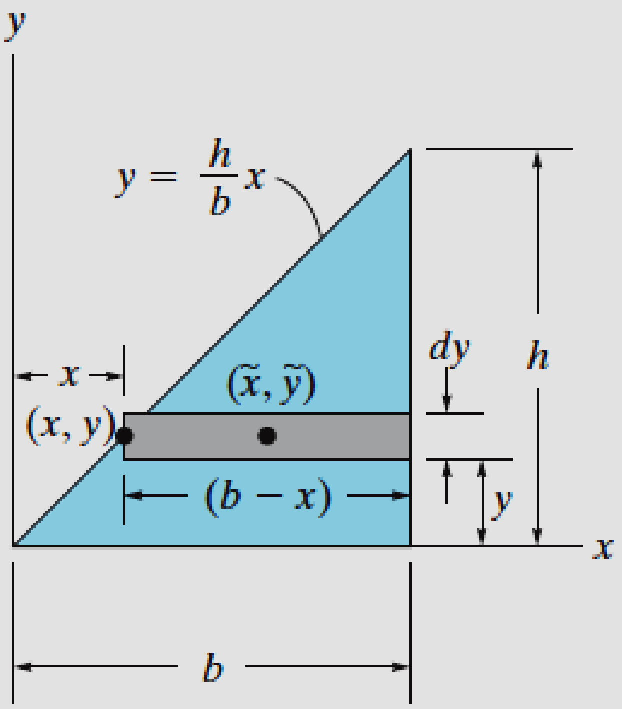
7.8. PRODUTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA

Solução 2:

- Fazendo a integração em relação a $\boldsymbol{y}$ de $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ até $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}$, temos:

$$I_{xy} = \frac{1}{2}\int_0^h y\left(b^2 - \frac{b^2}{h^2}y^2\right)dy$$

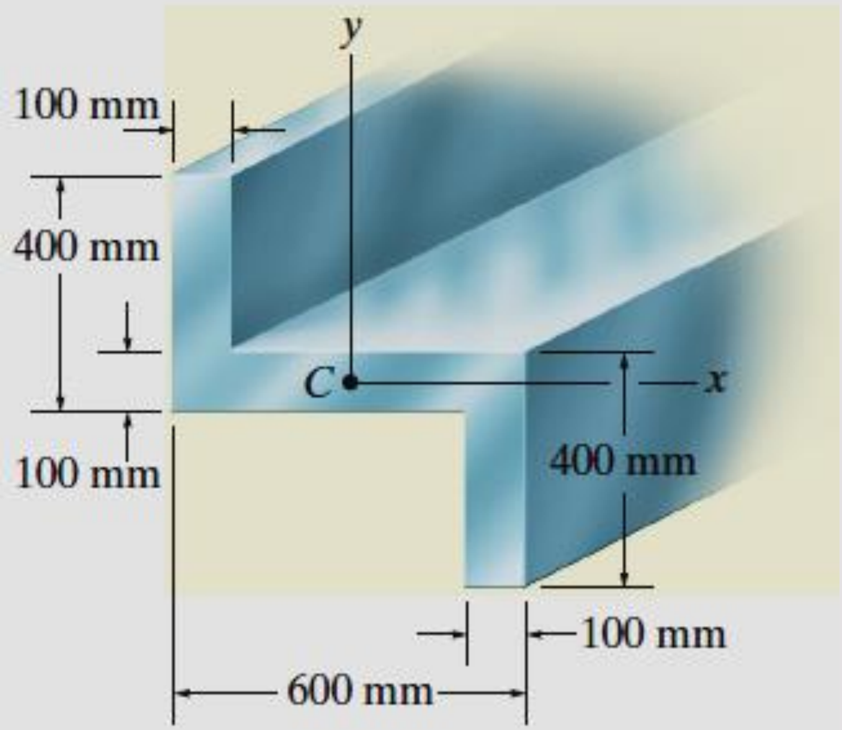
$$= \frac{b^2h^2}{8}$$



7.8. PRODUTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA

Exercício 49:

- Determine o produto de inércia da seção transversal do membro mostrado na figura abaixo em relação aos eixos centroidais x e y.



7.8. PRODUTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA

Solução:

- Retângulo ***A***:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + Ad_x d_y$$

$$= 0 + (300)(100)(-250)(200) = -1{,}50(10^9)\ \text{mm}^4$$

- Retângulo ***B***:

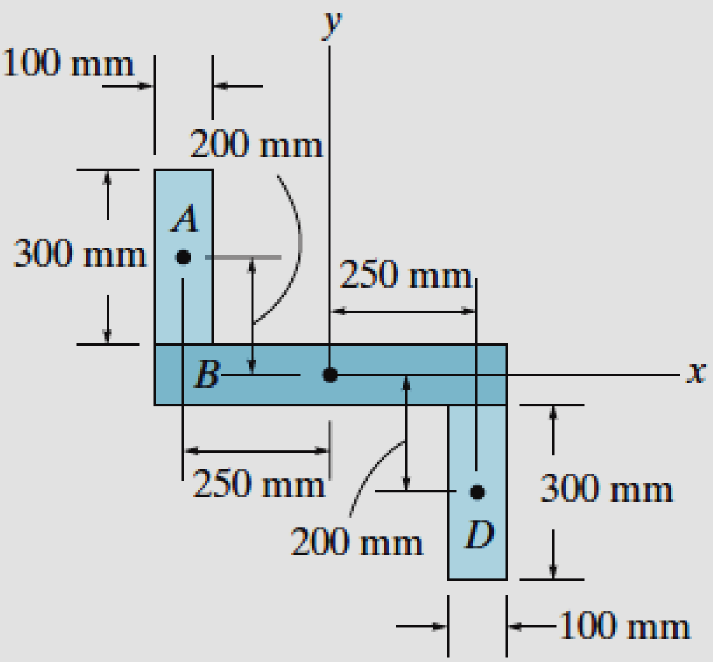
$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + Ad_x d_y$$

$$= 0 + 0 = 0$$

- Retângulo ***D***:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + Ad_x d_y$$

$$= 0 + (300)(100)(250)(-200) = -1{,}50(10^9)\ \text{mm}^4$$

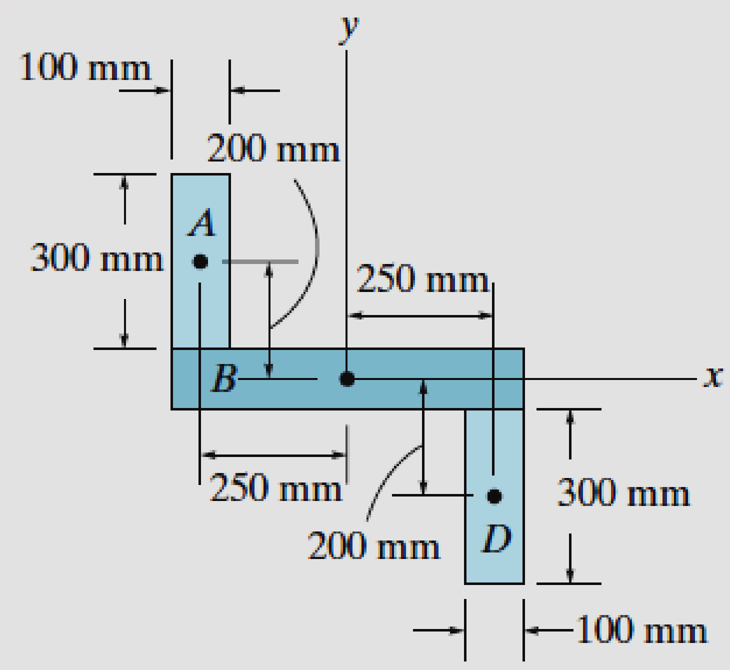


7.8. PRODUTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA

Solução:

- O produto de inércia de toda a seção transversal será:

$$I_{xy} = -1{,}50(10^9) + 0 - 1{,}50(10^9) = -3{,}00(10^9)\ \text{mm}^4$$



ATÉ A PRÓXIMA!