Instituto de Tecnologia - UFPA
Faculdade de Eng. Mecânica

Disciplina: Mecânica dos Sólidos I

Parte 3:
Deformação: conceitos básicos

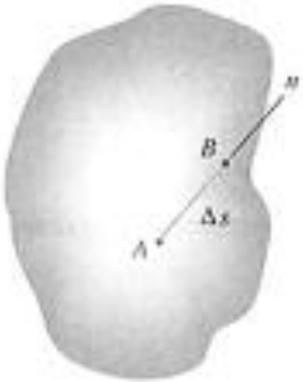
Professor: Leonardo Dantas Rodrigues

Quando uma força é aplicada a um corpo, tende a mudar sua forma e/ou tamanho. Tais mudanças são denominadas **deformações**.

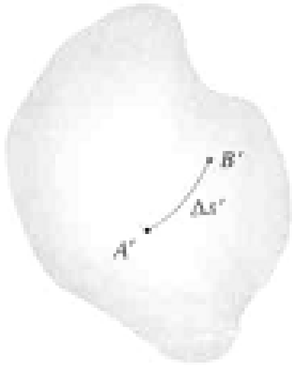
A adequação de uma estrutura ou máquina pode depender das ***deformações*** produzidas pelas cargas aplicadas a estas, bem como as tensões induzidas por estas cargas.

Deformação específica normal

É o alongamento ou contração de um segmento de reta por unidade de comprimento.



(a) Corpo indeformado



(b) Corpo deformado

Figura 3.1

A deformação média ao longo do segmento AB é:

$$\varepsilon_{med} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} \qquad (3.1)$$

Para chegar aos valores de deformações reais ao longo do segmento AB, pode-se trabalhar com segmentos de reta cada vez menores, com B tendendo a A, chegando-se a

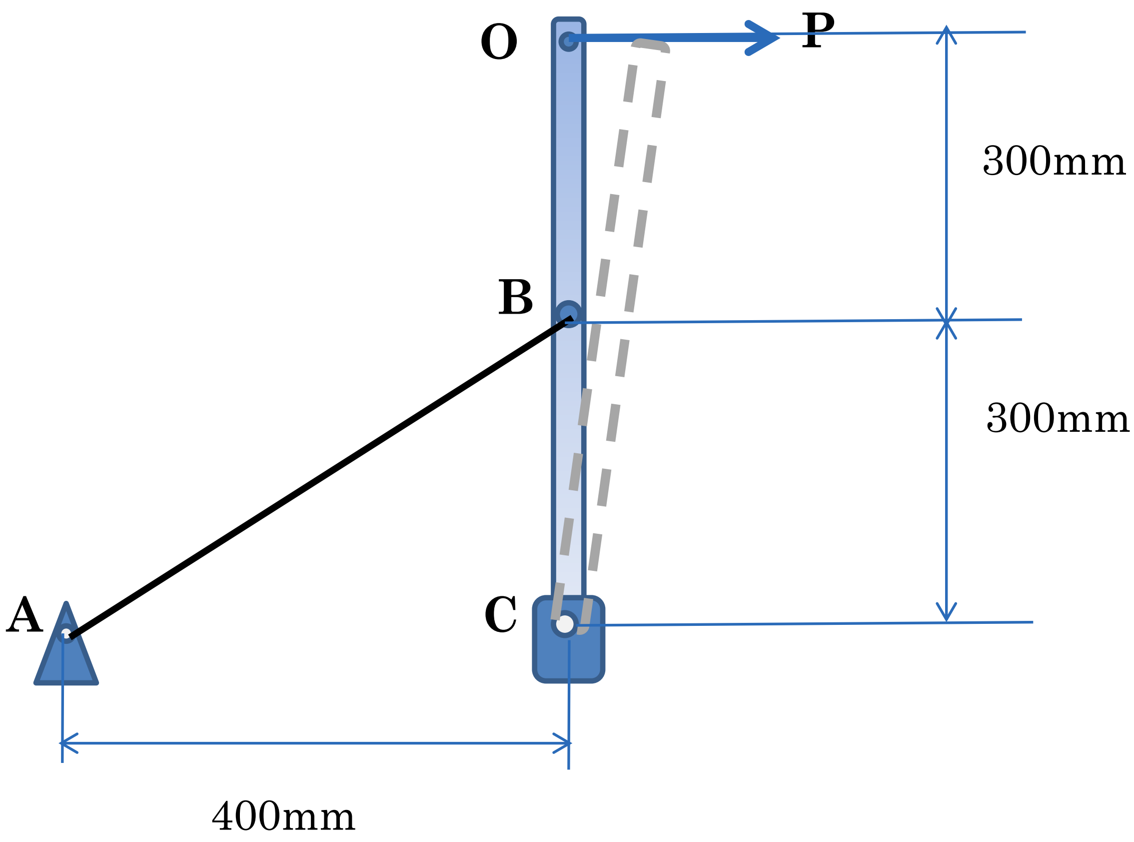
$$\varepsilon = \lim_{B \to A\, eixo\, n} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} \qquad (3.2)$$

Unidades: por ser resultado de uma relação entre comprimentos, **ε é adimensional.** Porém, por convenção, costuma-se trabalhar com **percentual (%)**, ou mesmo indicar m/m, in/in, mm/mm, etc...

Como os valores são quase sempre muito baixos, é muito comum trabalhar com o **prefixo micro ($\mu = 10^{-6}$)**.

Deformação específica normal

Exercício 3.1: Determine a deformação no cabo de aço AB da figura abaixo, sabendo que a força P aplicada na barra rígida OBC, faz com que a mesma, se desloque segundo um ângulo de 0,3º com relação à sua posição inicial



Deformação específica normal

Usa-se em engenharia a deformação específica por uma questão de padronização

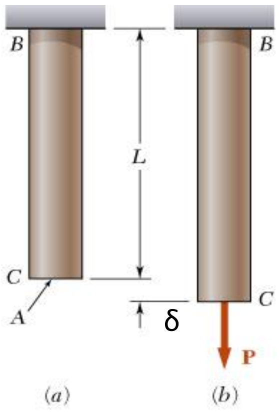


Figura 3.2

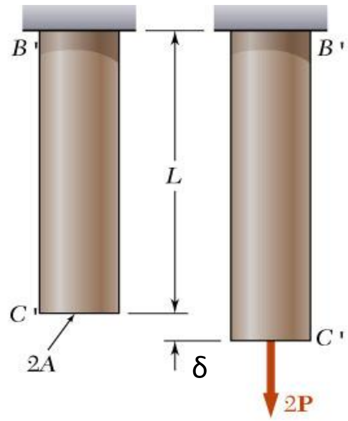


Figura 3.3

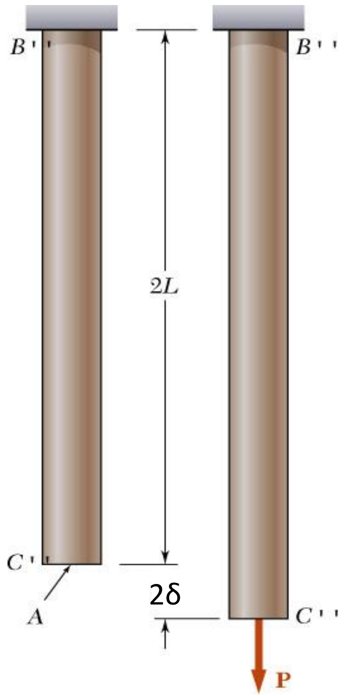


Figura 3.4

$$\sigma = \frac{P}{A} = \text{tensão}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \text{deformação normal}$$

$$\sigma = \frac{2P}{2A} = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{2\delta}{2L} = \frac{\delta}{L}$$

Em todos os casos, a tensão é a mesma. E para estabelecer uma relação direta com a deformação, que independa da geometria, usa-se a **deformação específica.**

Diagrama Tensão x Deformação

A relação entre os valores de tensão e deformação (específica) é uma propriedade do material e não depende da geometria da estrutura. Esta relação é dada pelo diagrama **tensão x deformação**, obtido por meio de ensaios de tração padronizados

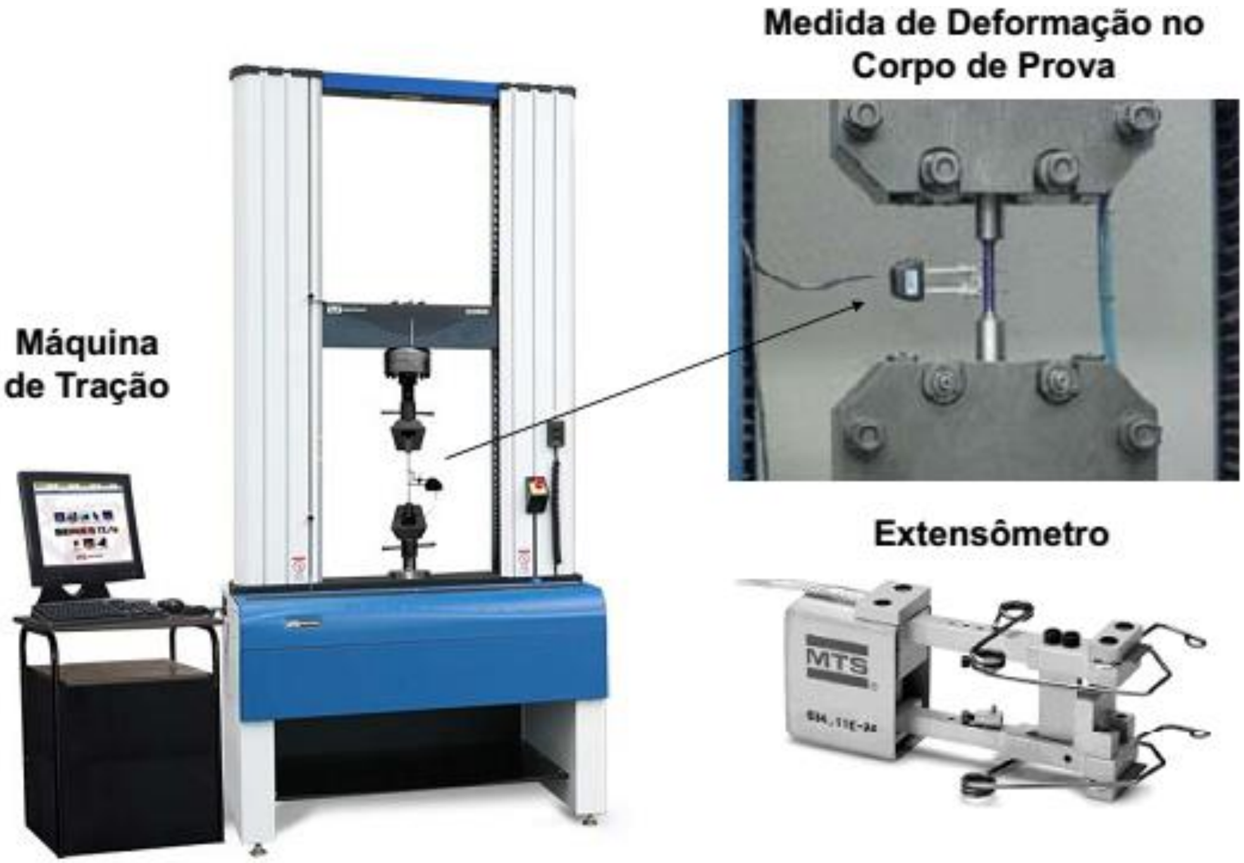


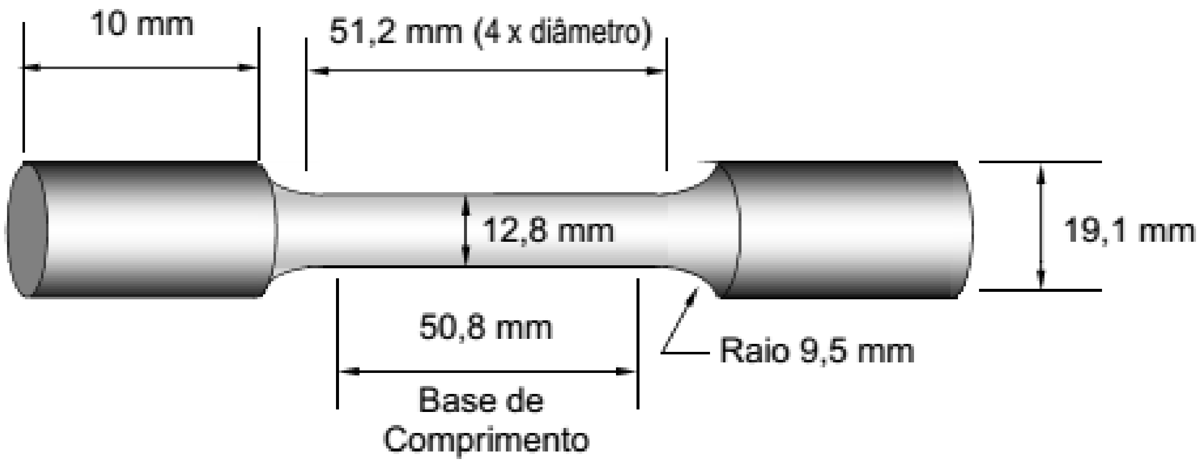
Figura 3.5: aparatos para um ensaio de tração

Diagrama Tensão x Deformação

Algumas Normas Técnicas de Ensaio de Tração

- **ASTM E8:2004** –Standard Test Methods for - Tension Testing of Metallic Materials
- **ISO 527:1993** Parts 1-5–Plastics-Determination of tensile • ISO 527:1993 Parts 1-5 Plastics -Determination of tensile properties
- **ISO 6892:1998** –Metallic materials - Tensile testing at ambient temperature
- **NBR-ISO 6892:2002** –Materiais metálicos - Ensaio de tração à temperatura ambiente tração à temperatura ambiente
- **NBR 6673:1981** –Produtos planos de aço - Determinação das propriedades mecânicas a tração - Método de ensaio

Diagrama Tensão x Deformação



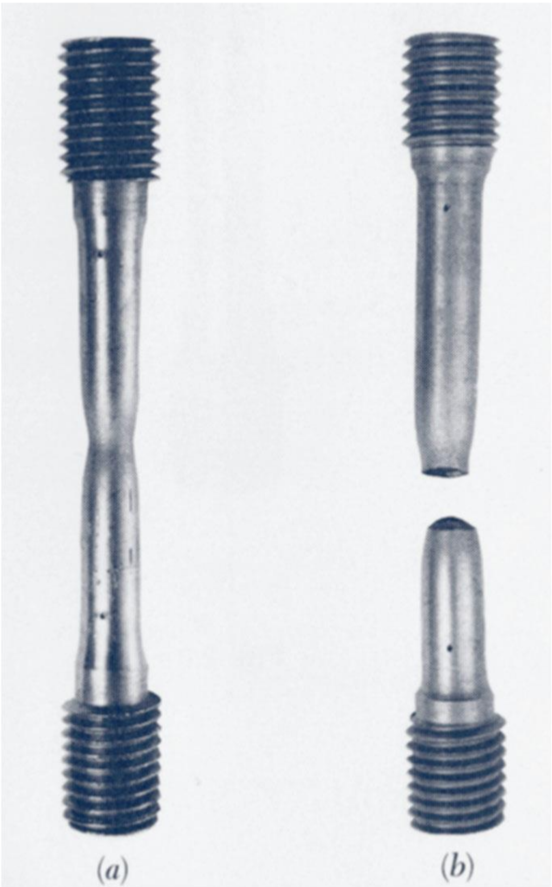
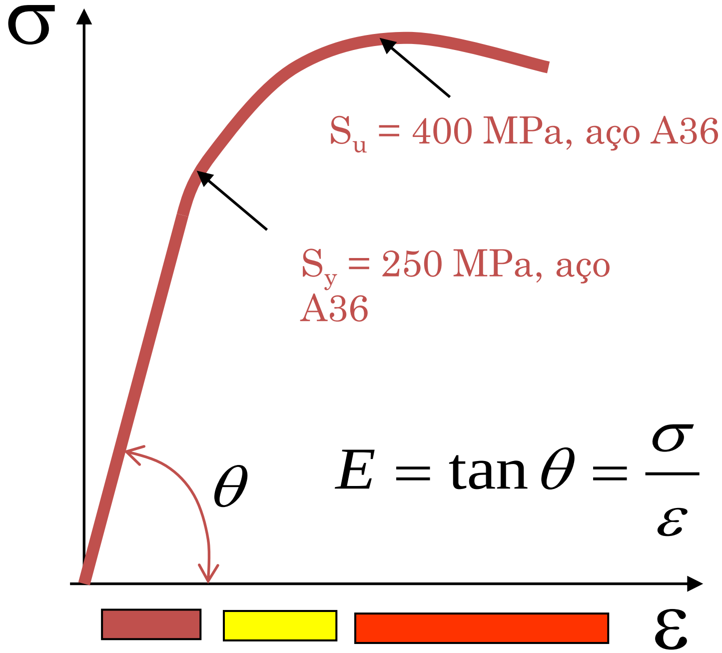


Figura 3.5: Corpo de Prova (CP) padrão Norma ASTM:E8 e CP real de material dúctil ensaiado

Diagrama Tensão x Deformação
(Módulo de Elasticidade)

À relação entre tensão e deformação no regime elástico, dá-se o nome de **Módulo de Elasticidade ou Módulo de Young**



$$E = \tan\theta = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad (3.3)$$

Regime elástico: deformações elásticas >> pláticas

Regime elasto-plástico: deformações elásticas e plásticas com a mesma ordem de grandeza

Regime plástico: deformações plásticas >> elásticas

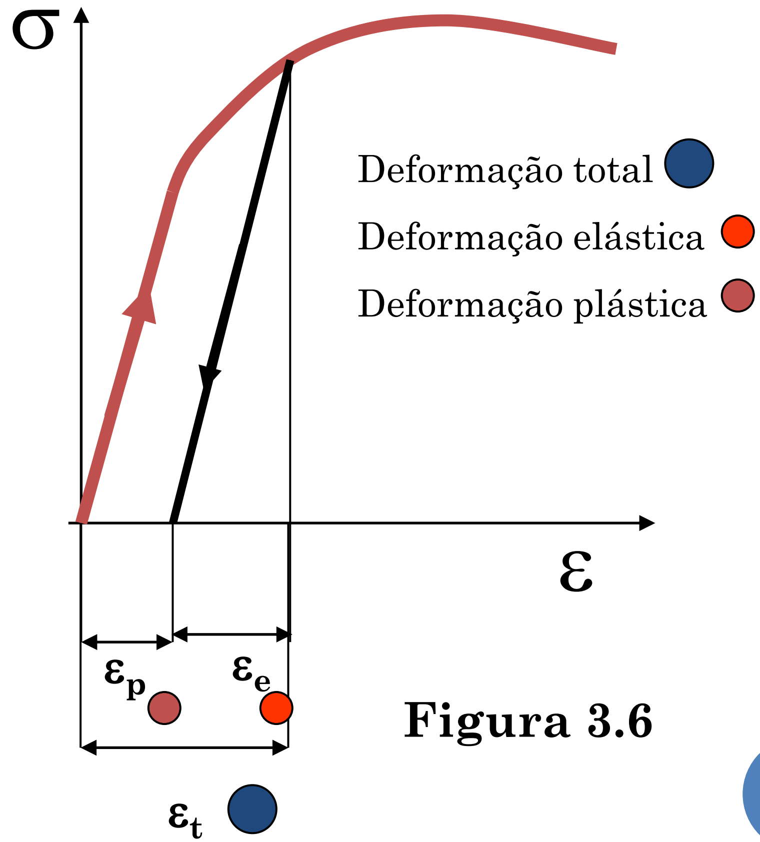


Figura 3.6

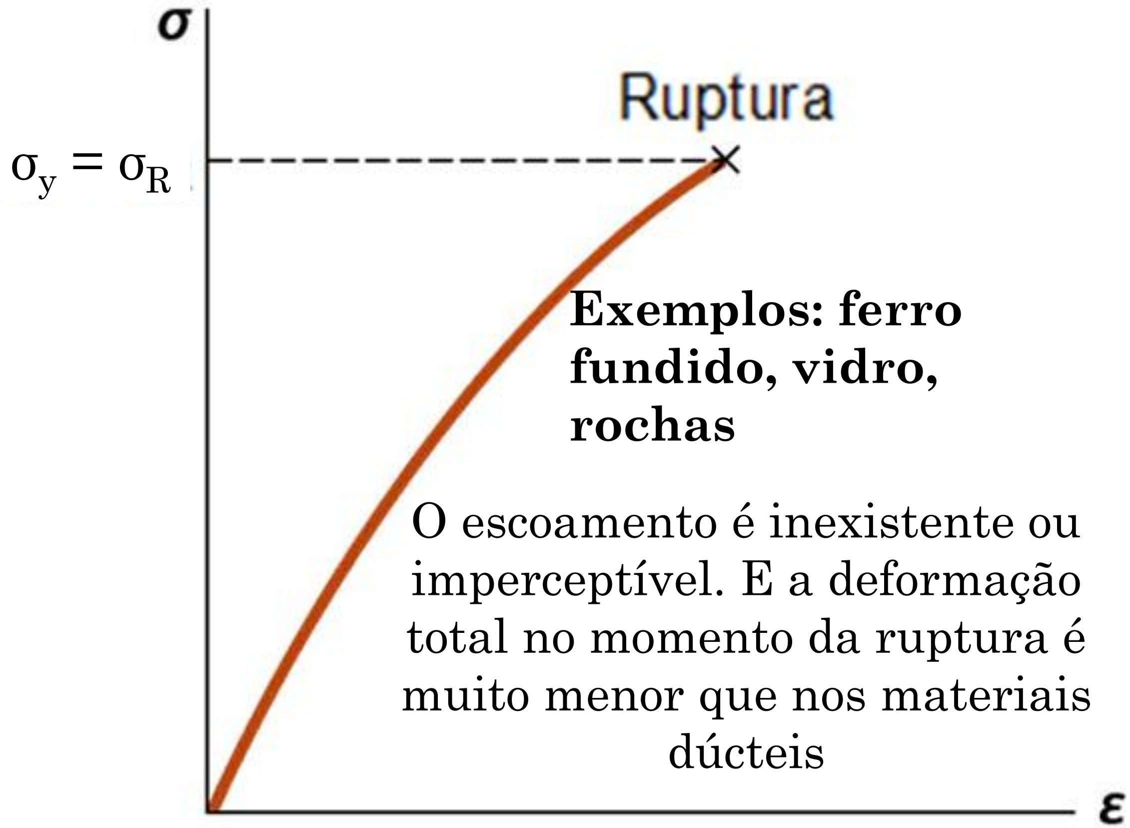
E ≈ Aços (200 GPa), Alumínio (70 GPa)

Diagrama Tensão x Deformação
(Materiais Frágeis)

No CP, nota-se que não há estricção, diferente do CP da figura 3.5.

Para os materiais frágeis, a falha é comandada essencialmente pela tensão normal máxima.

Para os materiais dúcteis, a falha é provocada pela máxima tensão cisalhante.



Exemplos: ferro fundido, vidro, rochas

O escoamento é inexistente ou imperceptível. E a deformação total no momento da ruptura é muito menor que nos materiais dúcteis

Figura 3.7: Diagrama tensão-deformação para um material frágil típico.

COEFICIENTE DE POISSON

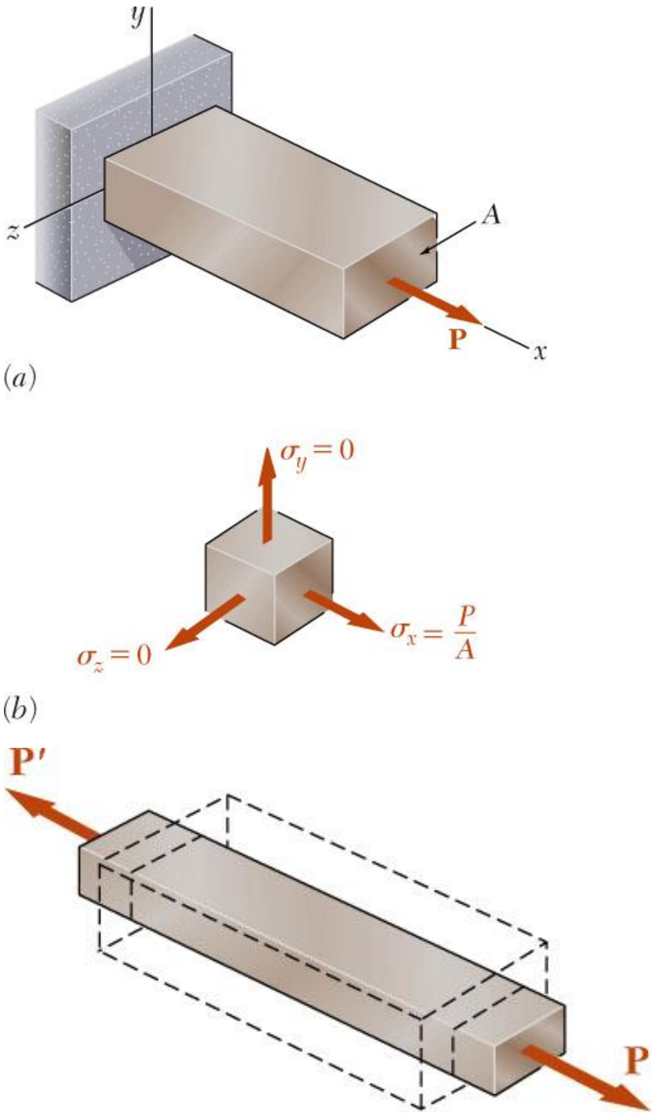


Figura 3.8

Para um barra delgada submetida a uma carga axial:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \sigma_y = \sigma_z = 0 \qquad (3.4)$$

A deformação na direção **x** é acompanhada por uma contração em direções ortogonais. Assumindo que o material é homogêneo e isotrópico (sem dependência direcional),

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0$$

Coeficiente de Poisson é definido como:

$$\nu = -\left|\frac{\text{deformação transversal}}{\text{deformação axial}}\right| = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

(3.5)

Lei de Hook Generalizada

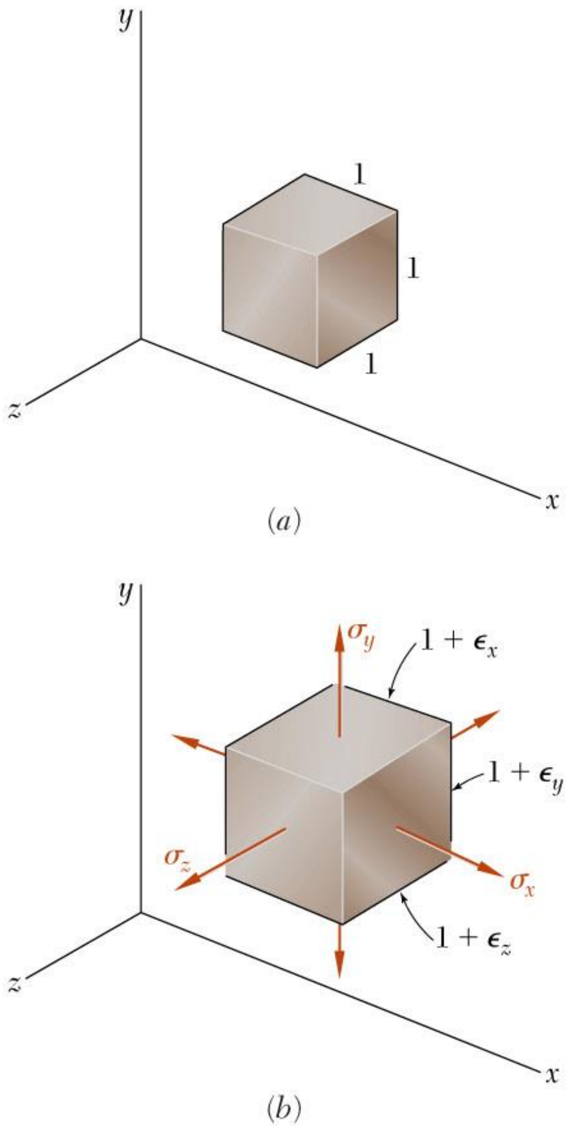


Figura 3.9

Para um elemento sujeito a um carregamento multiaxial, as componentes da deformação específica normal são expressas em função das componentes de tensão e podem ser determinadas a partir do *princípio da superposição*. Isto requer:

1) A deformação linearmente relacionada a tensão.
2) A deformação resultante é pequena

(ε_x , ε_y e ε_y <<1).

Com estas restrições, tem-se:

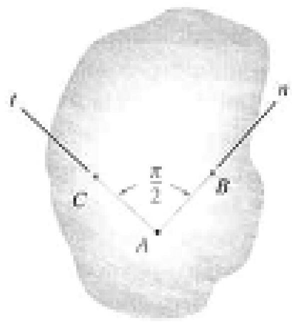
$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \qquad (3.6)$$

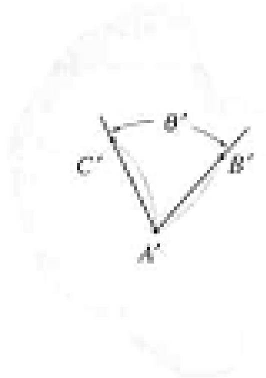
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

Deformações de Cisalhamento

É a mudança de ângulo entre dois segmentos de reta inicialmente perpendiculares



(a) Corpo indeformado



(b) Corpo deformado

Figura 3.10

Podemos definir a deformação cisalhante no ponto associada aos eixos n e t como:

$$\gamma_{nt} = \frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{B \to A(n) \\ C \to A(t)}} \theta' \qquad (3.7)$$

Podemos também relacionar as deformações cisalhantes às tensões cisalhantes por:

$$\tau_{nt} = G\gamma_{nt} \qquad (3.8)$$

Onde **G** é o **Módulo de Cisalhamento** e, em materiais isotrópicos, é obtido pela relação:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (3.9)$$

Deformações cisalhantes (ou distorções angulares), só alteram a forma, mantendo o tamanho de suas arestas.

Exercício com Deformação Cisalhante

Exercício 3.2: Considere uma placa de borracha com comprimento de 50mm, altura 20 mm e espessura 10 mm. A mesma é fixa entre duas placas de aço, conforme mostrado na figura 3.11a. O conjunto sofre uma carga P horizontal na placa de aço superior, que faz com que a borracha seja deformada, como mostrado na figura 3.11b. Sabendo que o módulo de cisalhamento da borracha é 0,3 MPa, determine a força P aplicada.

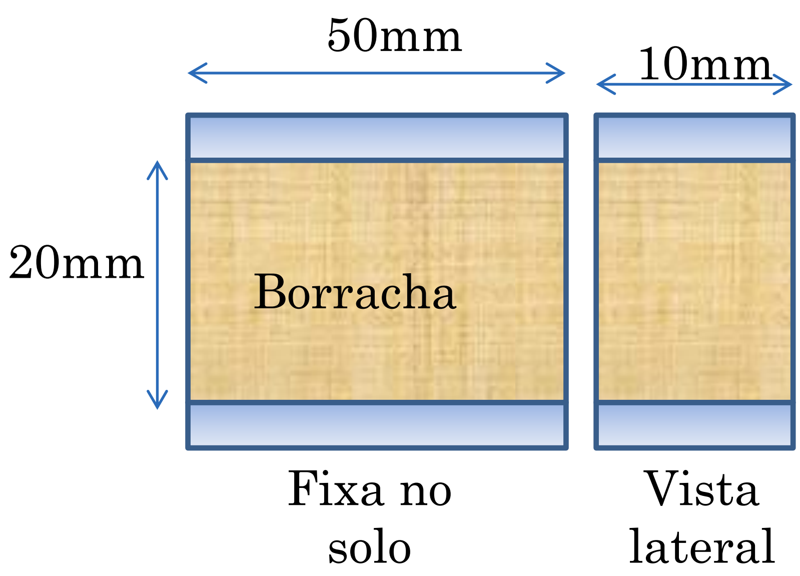


Figura 3.11a

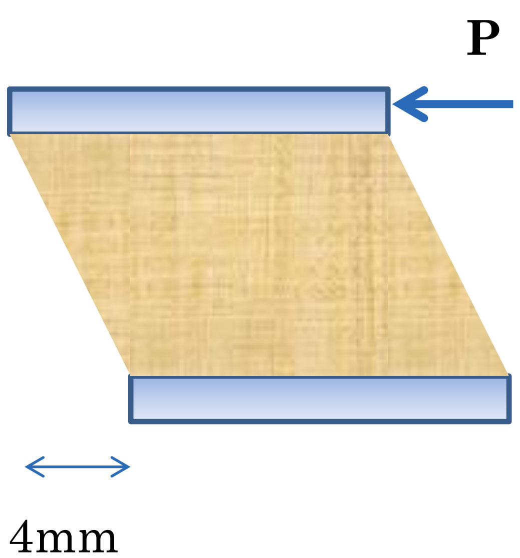
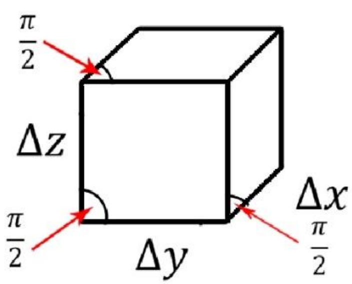


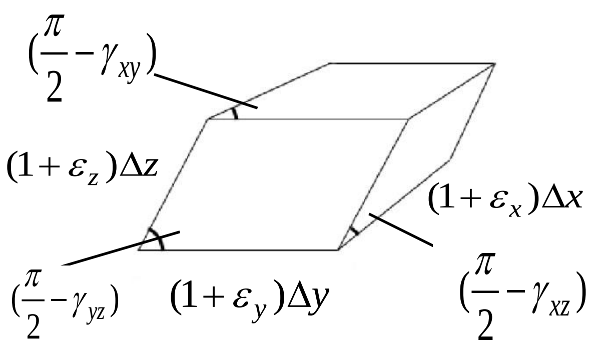
Figura 3.11b

Relações Constitutivas (caso geral)

Considerando que o elemento da figura 3.12 está submetido a tensões normais nas direções x, y e z e a tensões cisalhantes nos três planos, temos:



(a) Corpo indeformado



(b) Corpo deformado

Figura 3.12

$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \qquad (3.10)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

Tensões normais só geram Deformações normais, que só provocam mudança de volume no elemento.

Tensões cisalhantes só geram Deformações cisalhantes (ou distorções angulares).

DEFORMAÇÕES (VARIAÇÕES DE COMPRIMENTO) EM ELEMENTOS SOB CARGA AXIAL

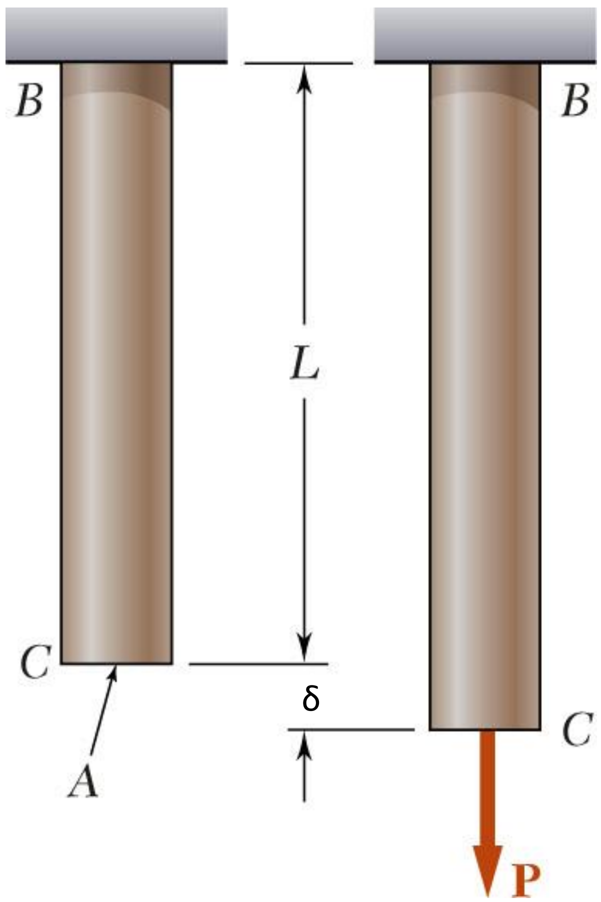


Figura 3.13

Para a Lei de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

A definição de deformação específica:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

Transformando e substituindo a equação anterior na equação acima, temos

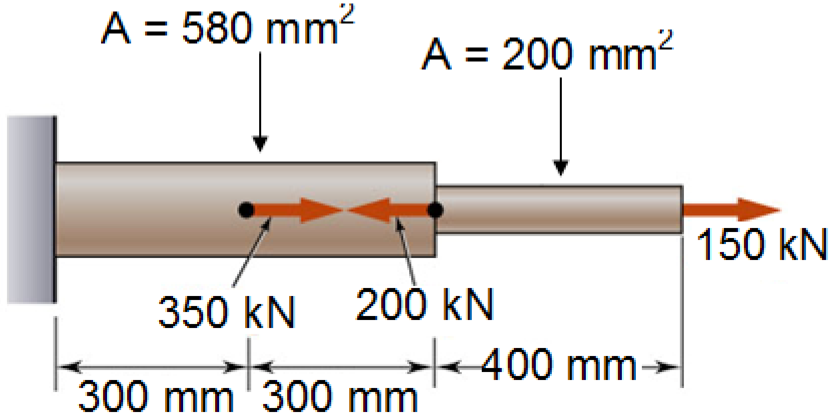
$$\delta = \frac{PL}{AE} \qquad (3.11)$$

Para barras com carregamentos em outros pontos, diversas seções transversais e diferentes materiais, tem-se:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \qquad (3.12)$$

Deformações (variações de comprimento) em elementos sob carga axial

Exemplo 3.1: Determine a deformação da barra de aço mostrada na figura submetida às forças dadas.



$$E = 200\,GPa$$

Figura 3.14

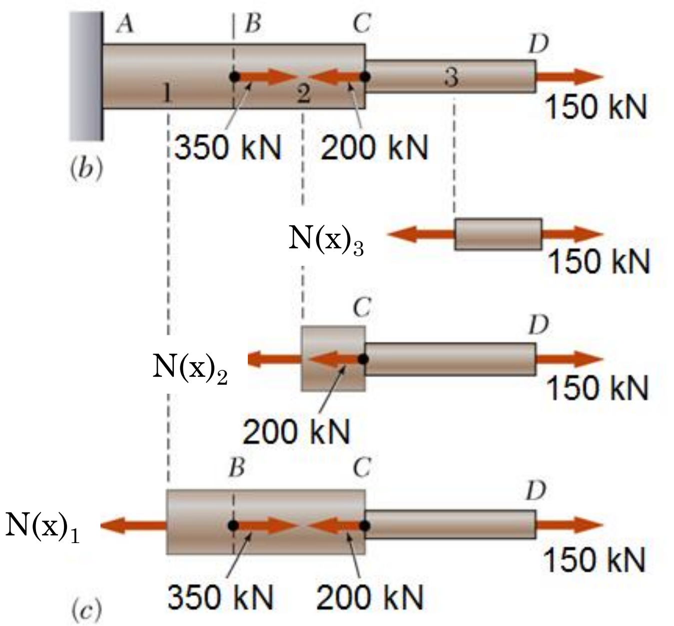
ETAPAS PARA SOLUÇÃO:

- Achar a reação em A
- Dividir a barra em componentes de acordo com a aplicação das forças.
- Aplicar uma análise de corpo livre de cada componente para determinar as forças internas.
- Calcular a deformação total da barra.

DEFORMAÇÕES (VARIAÇÕES DE COMPRIMENTO) EM ELEMENTOS SOB CARGA AXIAL

Exemplo 3.1: SOLUÇÃO

1. Divisão da barra em três partes
2. DCL de cada parte.



$L_1 = L_2 = 300\,\text{mm}.$ $L_3 = 400\,\text{mm}.$

$A_1 = A_2 = 580\,\text{mm}^2$ $A_3 = 200\,\text{mm}^2$

Forças internas a partir da aplicação de $\sum F_x = 0$ nos DCL's:

$$N(x)_1 = P_1 = 300\,\text{kN} = 300\times 10^3\ \text{N}$$

$$N(x)_2 = P_2 = -50\,\text{kN} = -50\times 10^3\,\text{N}$$

$$N(x)_3 = P_3 = 150\,\text{kN} = 150\times 10^3\,\text{N}$$

Deformação total:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E}\left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3}\right)$$

$$= \frac{1}{200}\left[\frac{(300\times 300)}{580} + \frac{(-50\times 300)}{580} + \frac{(150\times 400)}{200}\right]$$

$$\delta = \frac{429{,}31}{200} = 2{,}15\,\text{mm}.$$

DEFORMAÇÕES (VARIAÇÕES DE COMPRIMENTO) EM ELEMENTOS SOB CARGA AXIAL

Exemplo 3.2: A barra rígida BDE (figura 3.15) é suspensa por duas barras AB e CD. A barra AB é feita de alumínio (E = 70 GPa) e tem uma área transversal de 500 mm²; A barra CD é feita de aço (E = 200 GPa) e tem uma área transversal de 600 mm².Para a força de 30 kN mostrada, determinar os deslocamentos dos pontos B, D e E.

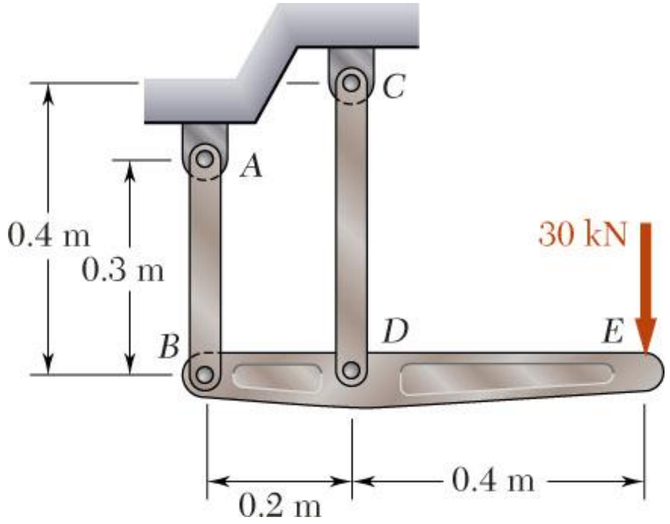


Figura 3.15

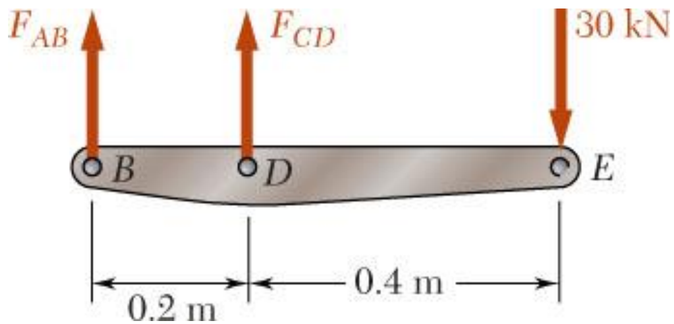
ETAPAS PARA SOLUÇÃO:

- Analisar o DCL da barra BDE para determinar as forças nas barras AB e CD;
Avaliar a deformação das barras AB e DC para encontrar os deslocamentos de B e D.
- Análise geométrica para determinar o deslocamento do ponto E.

DEFORMAÇÕES (VARIAÇÕES DE COMPRIMENTO) EM ELEMENTOS SOB CARGA AXIAL

Exemplo 3.2: SOLUÇÃO

1. DCL da Barra *BDE*



$$\sum M_B = 0$$

$$0 = -(30\,\text{kN} \times 0.6\,\text{m}) + F_{CD} \times 0.2\,\text{m}$$

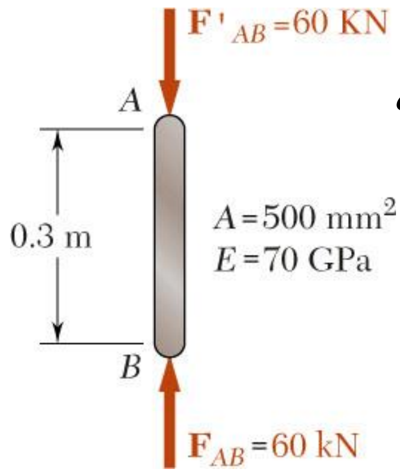
$$F_{CD} = +90\,\text{kN} \quad \textit{tração}$$

$$\sum \text{M}_\text{D} = 0$$

$$0 = -(30\,\text{kN} \times 0.4\,\text{m}) - F_{AB} \times 0.2\,\text{m}$$

$$F_{AB} = -60\,\text{kN} \quad \textit{compressão}$$

Deslocamento do ponto B:



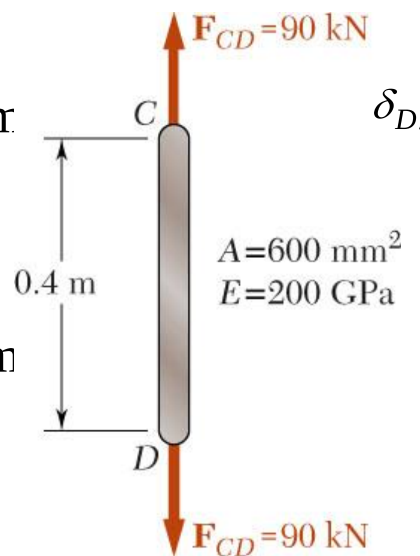
$$\delta_{B/A} = \delta_B - \cancel{\delta_A} = \frac{PL}{AE} \rightarrow \delta_B = \frac{PL}{AE}$$

$$= \frac{(-60\times10^3\,\text{N})(0.3\,\text{m})}{(500\times10^{-6}\,\text{m}^2)(70\times10^9\,\text{Pa})}$$

$$= -514\times10^{-6}\,\text{m}$$

$$\boxed{\delta_B = 0.514\,\text{mm}\uparrow}$$

Deslocamento do ponto *D*:



$$\delta_{D/C} = \delta_D - \cancel{\delta_C} = \frac{PL}{AE} \rightarrow \delta_D = \frac{PL}{AE}$$

$$= \frac{(90\times10^3\,\text{N})(0.4\,\text{m})}{(600\times10^{-6}\,\text{m}^2)(200\times10^9\,\text{Pa})}$$

$$= 300\times10^{-6}\,\text{m}$$

$$\boxed{\delta_D = 0.300\,\text{mm}\downarrow}$$

DEFORMAÇÕES (VARIAÇÕES DE COMPRIMENTO) EM ELEMENTOS SOB CARGA AXIAL

Exemplo 3.2: SOLUÇÃO

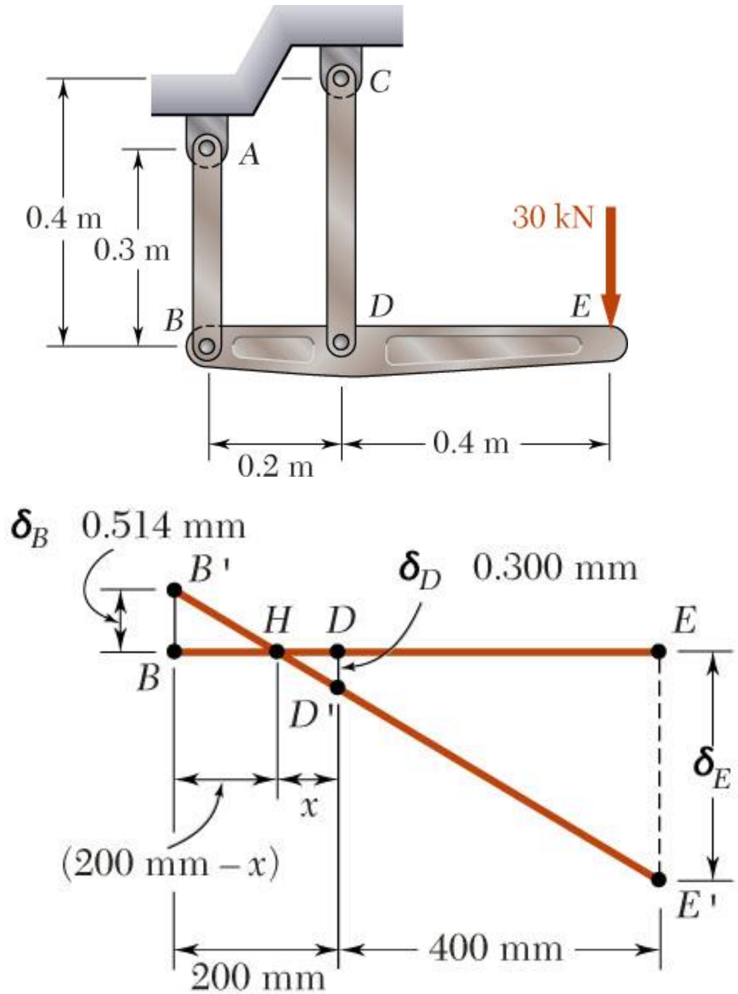


Figura 3.16

Deslocamento do ponto E: como a barra é rígida, os pontos B', D' e E' estão em uma reta e temos:

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD}$$

$$\frac{0.514\ \text{mm}}{0.300\ \text{mm}} = \frac{(200\ \text{mm}) - x}{x}$$

$$x = 73.7\ \text{mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD}$$

$$\frac{\delta_E}{0.300\ \text{mm}} = \frac{(400 + 73.7)\text{mm}}{73.7\ \text{mm}}$$

$$\delta_E = 1.928\ \text{mm}$$

$$\boxed{\delta_E = 1.928\ \text{mm} \downarrow}$$

Indeterminação Estática (Carga Axial)

Estruturas onde as reações nos apoios não podem ser determinadas apenas por meio das equações de equilíbrio são chamadas de estruturas ***estaticamente indeterminadas.***

A estrutura será estaticamente indeterminada sempre que ela for vinculada a mais apoios do que aqueles necessários para manter seu equilíbrio.

Nestes casos, além das equações de equilíbrio, devem ser usadas condições de compatibilidade geométrica.

Por exemplo, na figura 3.17, como A e B são fixos, o deslocamento de B em relação a A deve ser nulo e tem-se:

$$\delta_{A/B} = \frac{F_A L_{AC}}{AE} + \left(\frac{-F_B L_{CB}}{AE} \right) = 0 \quad (3.13)$$

Com esta condição e as equações de equilíbrio estático é possível determinar as reações e resolver o problema.

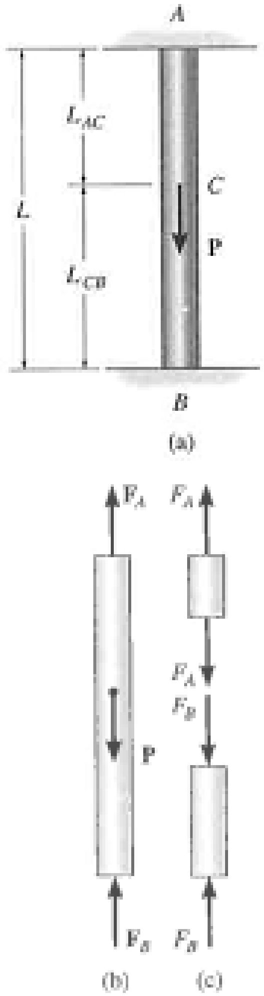


Figura 3.17

Indeterminação Estática (Carga Axial)

Exercício 3.3: Para a estrutura da figura 3.18, determinar o valor das reações em A e B para a barra de aço com os carregamentos mostrado, assumindo que não existe folgas entre os apoios e a barra.

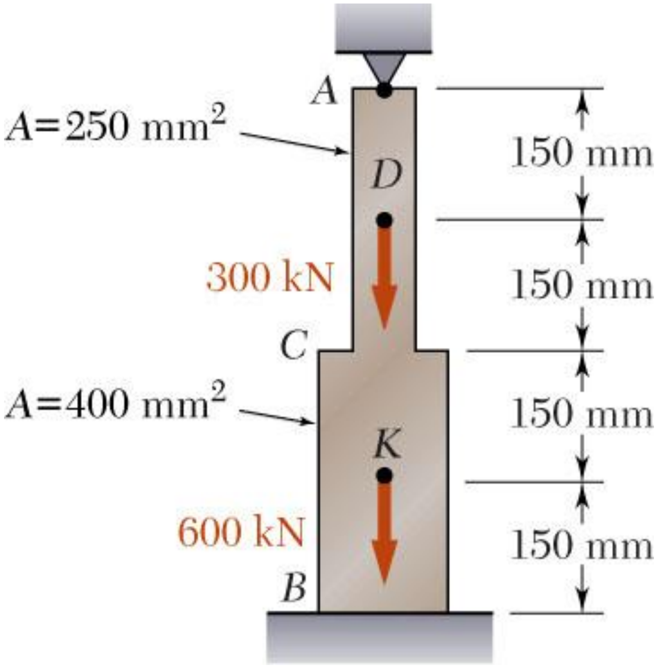


Figura 3.18

PROBLEMAS COM VARIAÇÕES DE TEMPERATURA

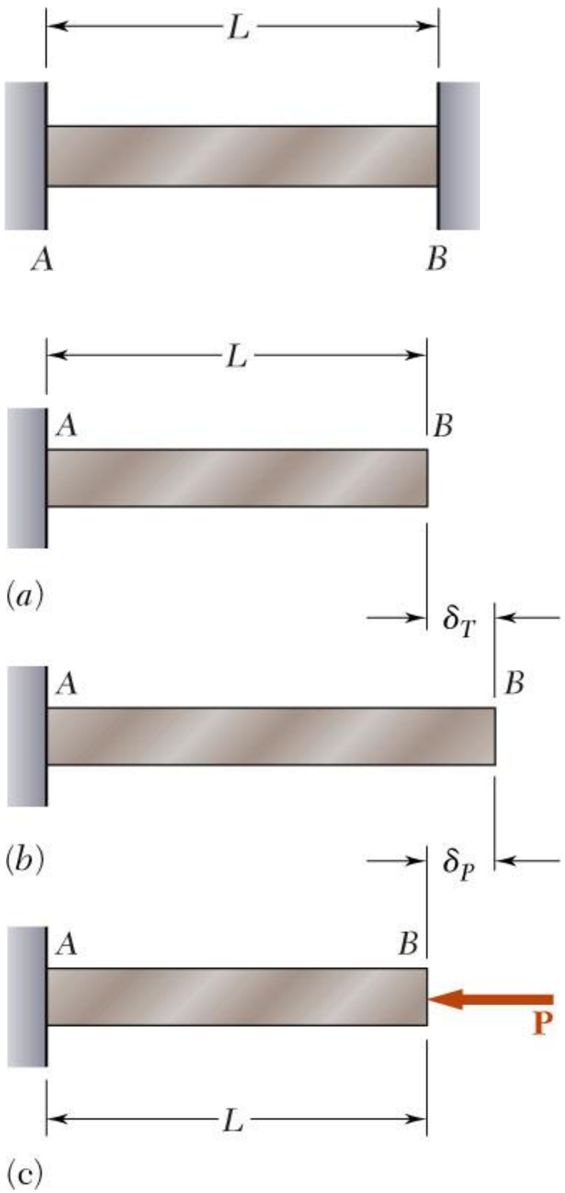


Figura 3.16

A mudança de temperatura numa barra resulta uma mudança no comprimento da mesma chamada de *deformação térmica*. **Não há tensão associada com a deformação térmica, a menos que a deformação seja contida por apoios.**

Solução (Figura 3.16):

Com a variação de temperatura, passará a existir reações nos dois apoios, que chamaremos de P:

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \qquad \delta_P = \frac{PL}{AE} \qquad (3.14)$$

$\alpha =$ coeficiente de dilatação térmica linear

A deformação térmica e a deformação provocada pela força de reação P devem ser compatíveis.

$$\delta = \delta_T + \delta_P = 0$$

$$\alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

$$P = -AE\alpha(\Delta T) \qquad (3.15)$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T)$$

PROBLEMAS COM VARIAÇÕES DE TEMPERATURA

Exercício 3.4: Determine os valores da tensão nas partes AC e BC da barra de aço mostrada na figura 3.10 quando a temperatura for de -45° C, sabendo que ambos os apoios rígidos foram ajustados na temperatura de 20° C. Determine também o deslocamento do ponto C. (E=200GPa e $\alpha=12\times10^{-6}$ /° C)

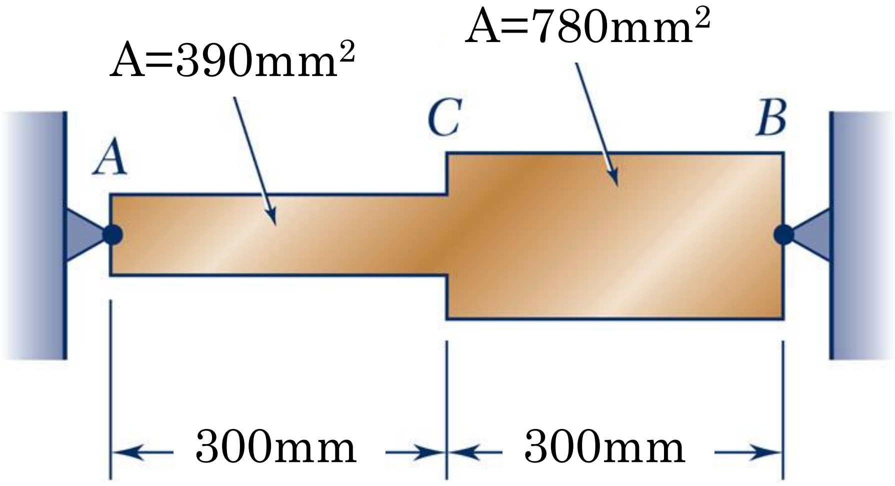
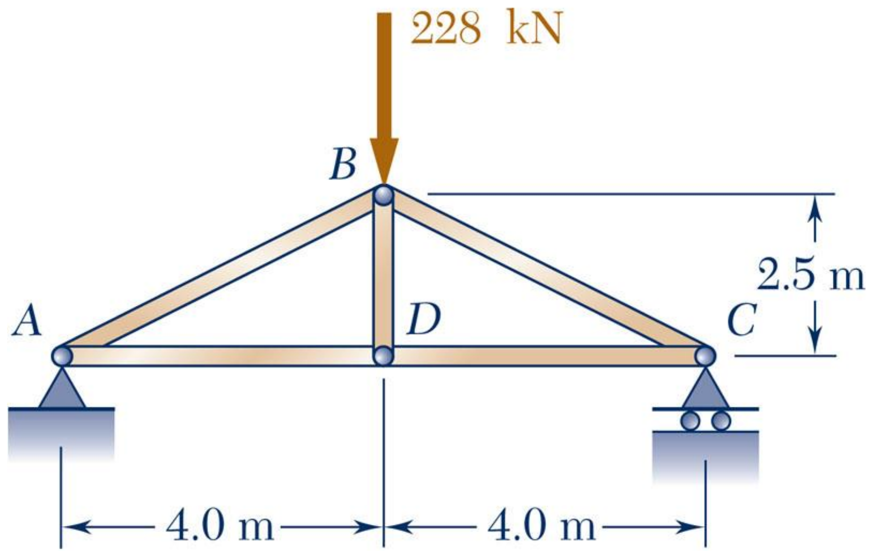


Figura 3.10

Exercícios gerais

Exercícios gerais

Exercício 3.5: Para a treliça de aço (E=200GPa) e o carregamento mostrado na figura 3.11, determine as deformações dos componentes *AB* e *AD*, sabendo que suas áreas de seção transversal são, respectivamente, 2400mm² e 1800mm².

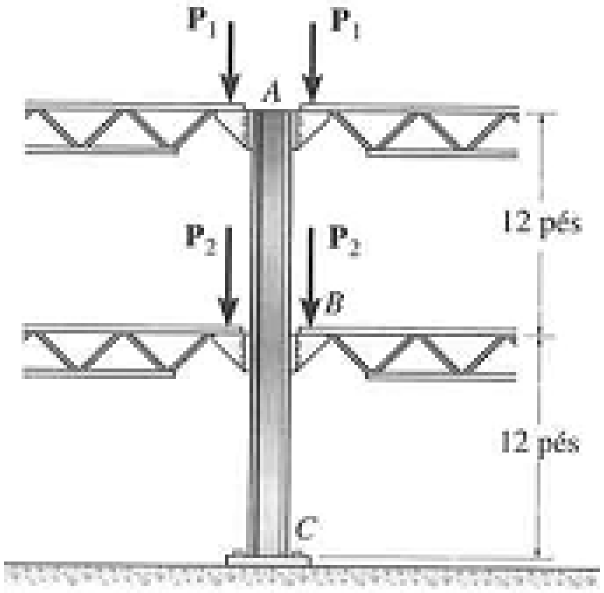


$$\delta_{AB} = -2{,}11\,mm$$
$$\delta_{AD} = 2{,}03\,mm$$

Figura 3.11

Exercícios gerais

Exercício 3.6: Uma coluna de aço A-36 ($E=29.10^3$ ksi) é usada para apoiar as cargas simétricas de apoios de dois pisos de um edifício (figura 3.12). Determinar as cargas P_1 e P_2 se A move-se 0,12 pol para baixo e B move-se 0,09 pol também para baixo quando as cargas são aplicadas. A coluna tem área de seção transversal de 23,4 pol^2.



$$P_1 = 70{,}7\ kip$$
$$P_2 = 141\ kip$$

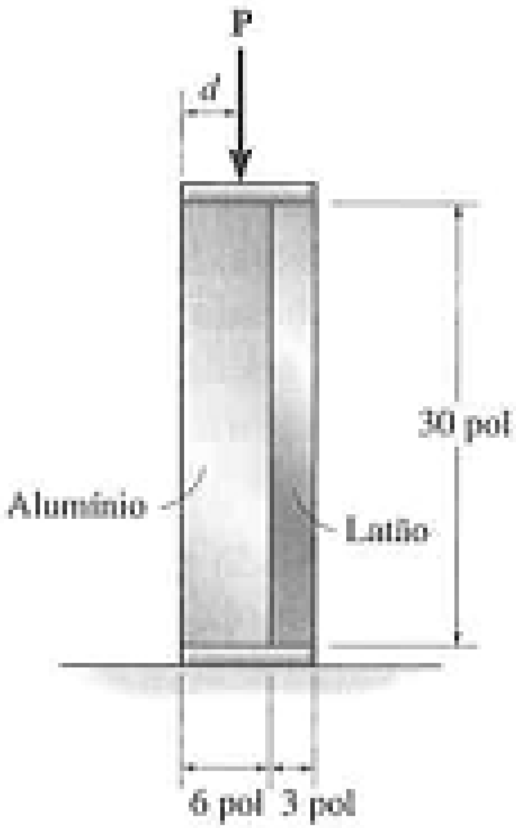
Figura 3.12

Exercícios gerais

Exercício 3.7: O conjunto (figura 3.13) consiste em um elemento de alumínio 6061-T6 e um elemento de latão C83400 que repousam sobre chapas rígidas. Determinar a distância d em que a força P deve ser colocada sobre as chapas, de modo que estas permaneçam horizontais quando os materiais se deformarem. Cada elemento tem largura de 8pol, e eles não estão unidos.

$$E_{Al} = 68{,}9\,GPa$$

$$E_{lat} = 101\,GPa$$



$d = 4{,}89\,pol$

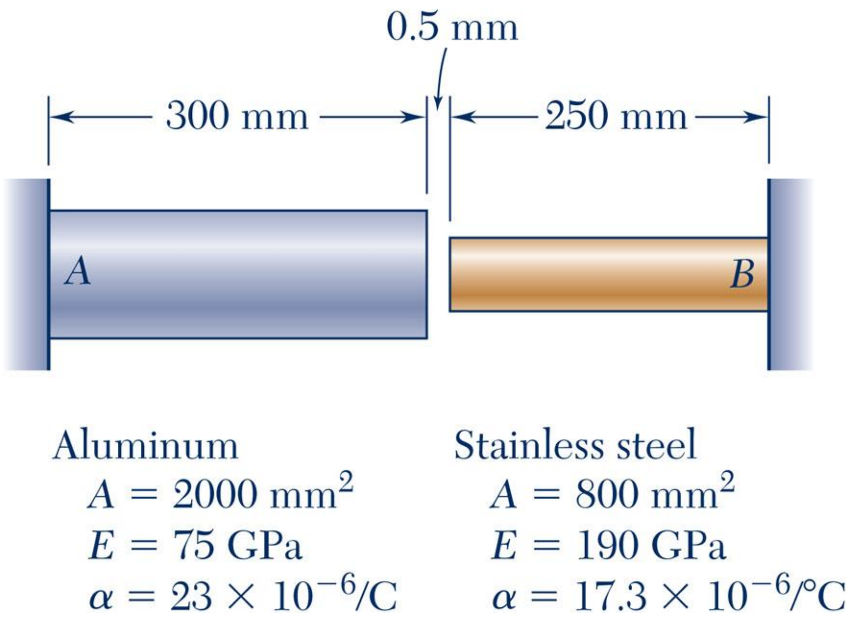
Figura 3.13

Exercícios gerais

Exercício 3.8: Na temperatura ambiente (20°C) existe um espaçamento de 0,5mm entre as extremidades das barras mostradas na figura 3.14. Algum tempo depois, quando a temperatura atingir 140°C, determine:

a) A tensão normal na barra de alumínio;

b) A variação de seu comprimento;



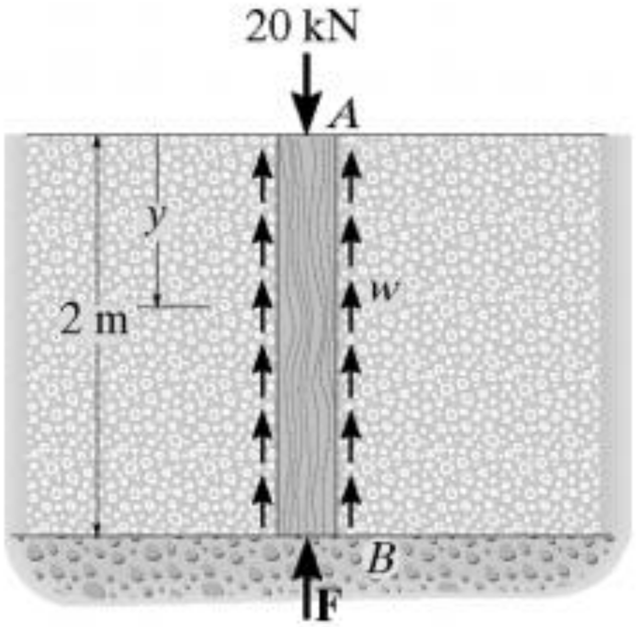
$a)\ -116{,}2 MPa$

$b)\ 0{,}363\ mm$

Figura 3.14

Exercícios gerais

Exercício 3.9: O poste é feito de uma madeira com E=13,1GPa e tem diâmetro de 60mm. Se estiver sujeito a uma carga de 20kN e o solo proporcionar resistência ao atrito w = 4kN/m uniformemente distribuída ao longo de seus lados, determine a força **F** na parte inferior do poste necessária para haver equilíbrio. Calcule também qual o deslocamento da parte superior, A, em relação à inferior, B. Despreze o peso do poste.



$$F = 12kN$$

$$\delta_{B/A} = -0{,}864mm$$

Figura 3.15

Exercícios gerais

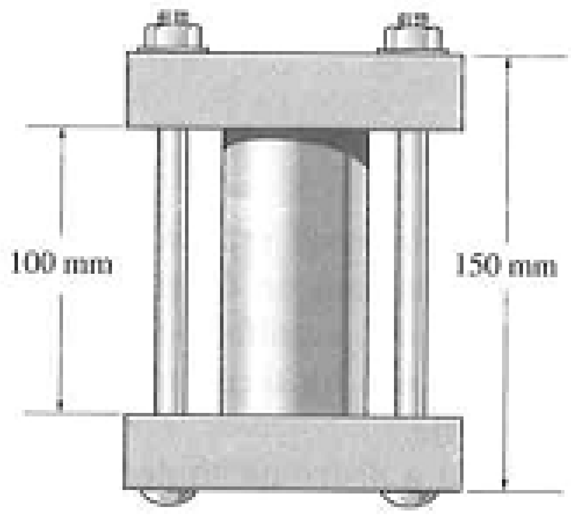
Exercício 3.10: O cilindro de 50mm de diâmetro, feito de Magnésio Mg 1004-T61, é colocado no fixador quando a temperatura é $T_1 = 15^o$ C (figura 3.16). Supondo que os dois parafusos do fixador, feitos de aço inoxidável 304, tenham diâmetro de 10mm e apertem o cilindro de leve com força desprezível contra as garras rígidas, determinar a temperatura em que a tensão normal média, ou no magnésio, ou no aço for de 12MPa.

$$\alpha_{Mg} = 26.10^{-6} /^o C$$

$$\alpha_{304} = 17.10^{-6} /^o C$$

$$E_{Mg} = 44,7 \ GPa$$

$$E_{304} = 193 \ GPa$$

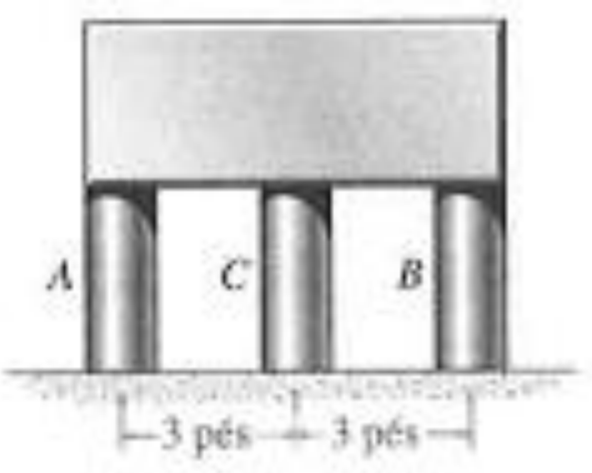


$$T_f = 244,5^o C$$

Figura 3.16

Exercícios gerais

Exercício 3.11: O bloco rígido tem um peso de 80 kip e deve ser suportado pelos poste A e B, feitos de aço A-36, e pelo poste C, feito de latão C83400 (figura 3.17). Supondo que todos os postes tenham o mesmo comprimento original antes de carregados, determine a tensão normal média desenvolvida em cada um quando o poste C é aquecido de modo que sua temperatura aumenta 20ºF. Cada poste tem área de seção transversal de 8pol².



$$\alpha_C = 9{,}8.10^{-6} \,/^o\, F$$

$$E_C = 14.10^3 \; kip\,/\,in^2$$

$$E_{A,B} = 29.10^3 \; kip\,/\,in^2$$

$$\sigma_A = \sigma_B = -2{,}93\; ksi$$

$$\sigma_C = -4{,}15\; ksi$$

Figura 3.17