Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

CÁLCULO VETORIAL E EQUILÍBRIO DE PARTÍCULAS

Cálculo vetorial

1.1. Escalares e vetores
1.2. Operações vetoriais
1.3. Adição de forças vetoriais
1.4. Adição de um sistema de forças coplanares
1.5. Vetores cartesianos
1.6. Adição e subtração de vetores cartesianos
1.7. Vetores posição
1.8. Vetor força orientado ao longo de uma reta
1.9. Produto escalar

Equilíbrio de partículas

1.10. Condição de equilíbrio de um ponto material
1.11. Diagrama de corpo livre
1.12. Sistemas de forças coplanares
1.13. Sistemas de forças tridimensional

CÁLCULO VETORIAL

Cálculo vetorial

1.5. Vetores cartesianos
1.6. Adição e subtração de vetores cartesianos
1.7. Vetores posição
1.8. Vetor força orientado ao longo de uma reta
1.9. Produto escalar

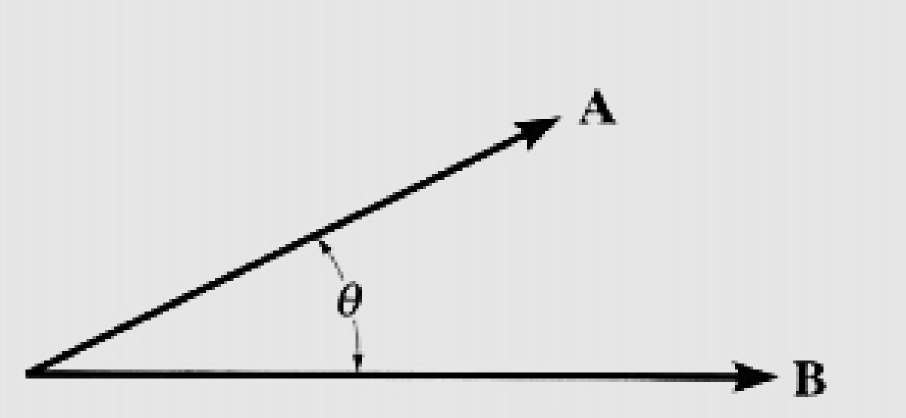
1.9. PRODUTO ESCALAR

- Às vezes, em estática, é necessário calcular o ângulo entre duas retas ou os componentes de uma força paralela ou perpendicular a uma reta;

- Em duas dimensões, tais problemas podem ser resolvidos por trigonometria, considerando que é fácil de visualizar a geometria;

- Em três dimensões, em geral, a visualização é difícil e então é preciso utilizar métodos vetoriais para a solução;

- O produto escalar é um método particular para multiplicar dois vetores;

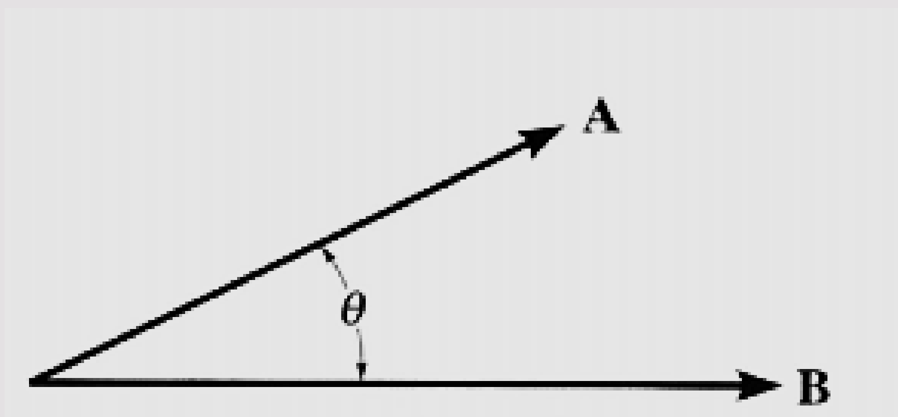


1.9. PRODUTO ESCALAR

- O produto de dois vetores **A** e **B**, escrito **A.B** é lido como “A escalar B”;

- O **produto escalar** é definido como o produto das intensidades de **A** e **B** e do cosseno do ângulo θ formado entre as origens desses dois vetores.

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta}$$



1.9. PRODUTO ESCALAR

Leis das operações:

1. Lei comutativa:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

2. Multiplicação por escalar:

$$a(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (a\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})a$$

3. Lei distributiva:

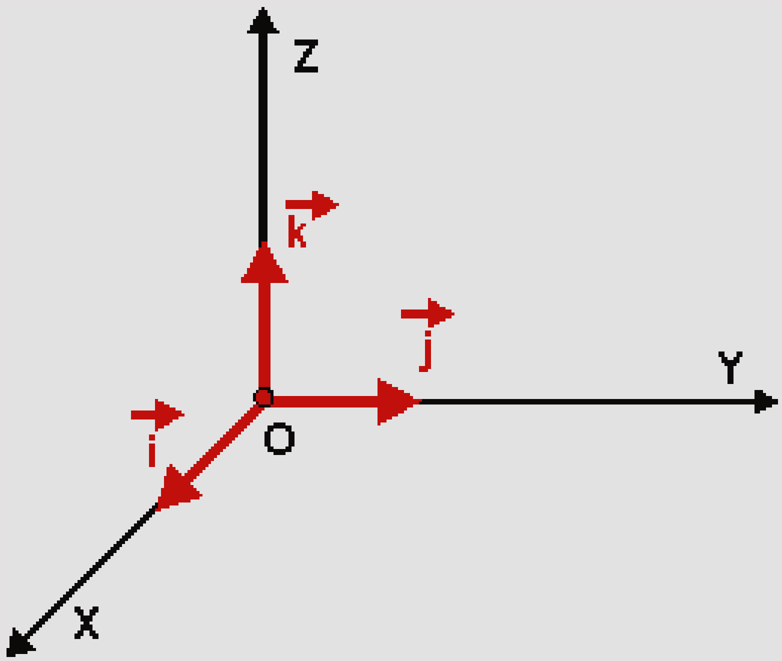
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$$

1.9. PRODUTO ESCALAR

➢ O produto escalar de cada um dos vetores unitários cartesianos é dado por:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1 \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1 \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0 \qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0 \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0$$



1.9. PRODUTO ESCALAR

➢ O produto escalar de cada um dos vetores unitários cartesianos é dado por:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1 \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1 \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0 \qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0 \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0$$

➢ Considerando o produto escalar de dois vetores gerais **A** e **B** expressos na forma vetorial cartesiana, temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k})\cdot(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k})\\ &= A_xB_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) + A_xB_y(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + A_xB_z(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})\\ &+ A_yB_x(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}) + A_yB_y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k})\\ &+ A_zB_x(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\end{aligned}$$

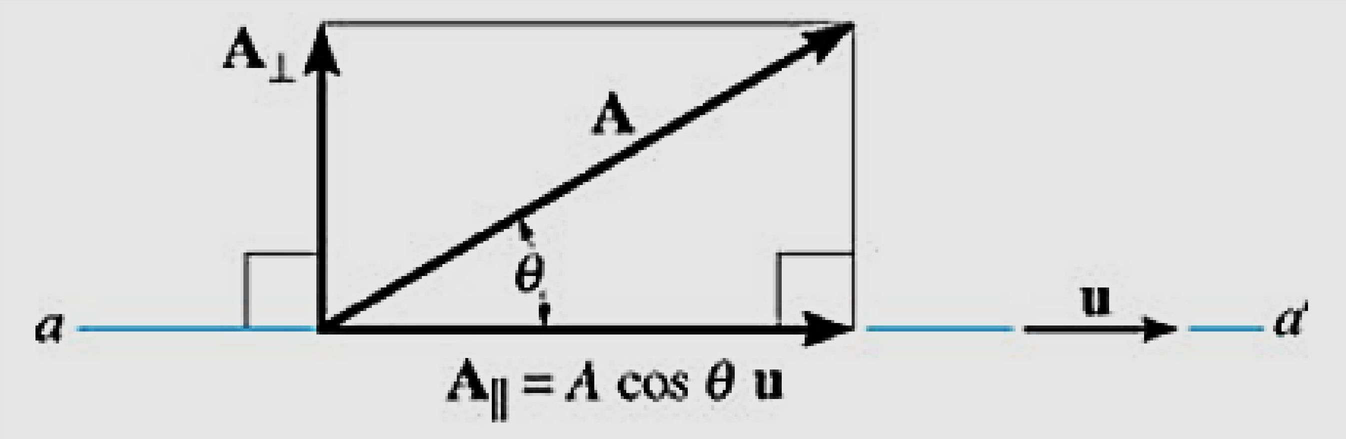
$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

1.9. PRODUTO ESCALAR

- O ângulo formado entre dois vetores (os vetores **A** e **B**, por exemplo) ou retas que se interceptam:

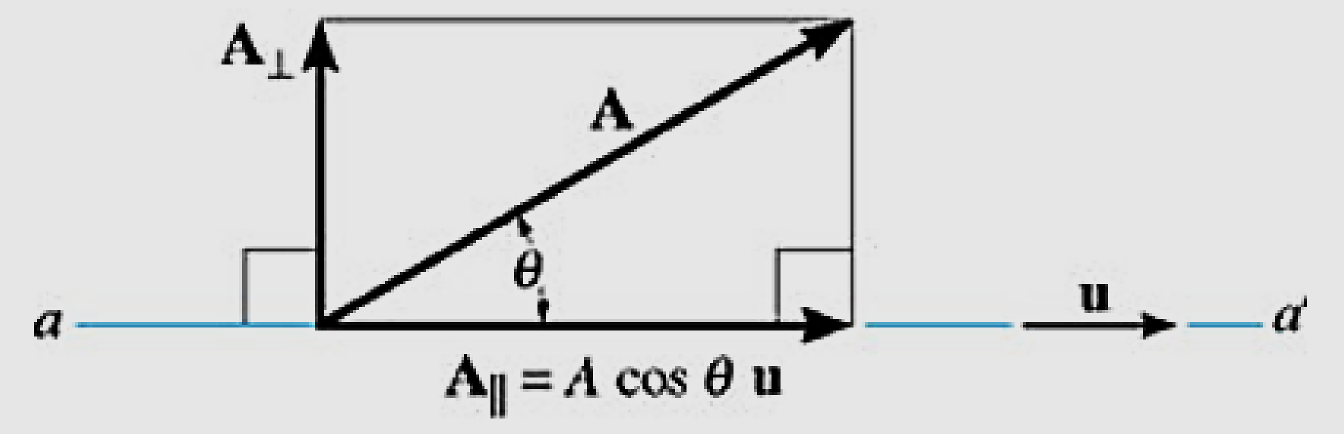
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}\right) \qquad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

- O componente paralelo de uma reta *a* de um vetor:



1.9. PRODUTO ESCALAR

- O componente paralelo de uma reta a de um vetor:



$$A_\parallel = A\cos\theta = \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}$$

$$\mathbf{A}_\parallel = A\cos\theta\;\mathbf{u} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\parallel + \mathbf{A}_\perp$$

$$\mathbf{A}_\perp = \mathbf{A} - \mathbf{A}_\parallel$$

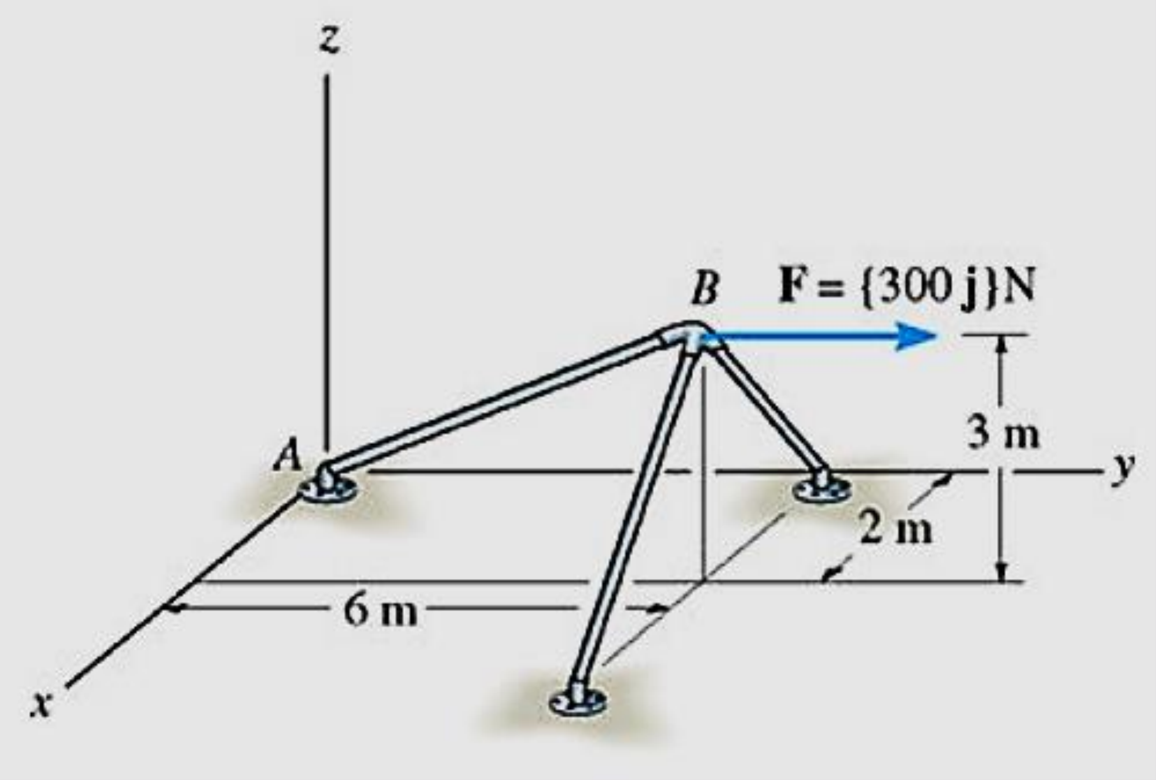
$$\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}/A)$$

$$A_\perp = A\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

$$A_\perp = \sqrt{A^2 - A_\parallel{}^2}$$

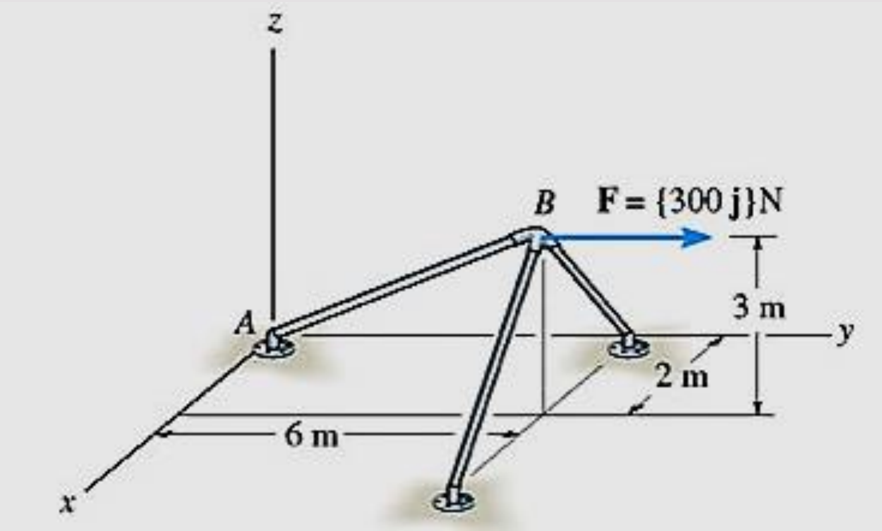
1.9. PRODUTO ESCALAR

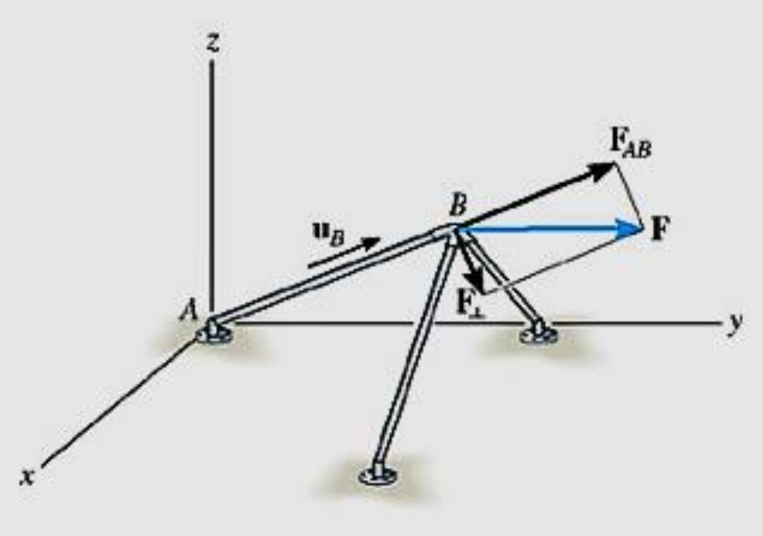
EXERCÍCIO 5: A estrutura mostrada na figura está submetida a uma força horizontal. Determine a intensidade dos componentes dessa força paralela e perpendicular ao elemento AB.



1.9. PRODUTO ESCALAR

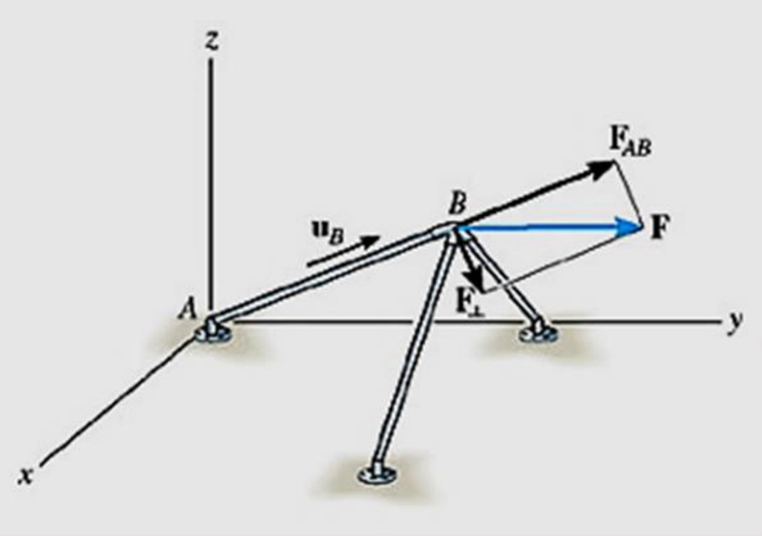
SOLUÇÃO:





1.9. PRODUTO ESCALAR

<u>SOLUÇÃO:</u>

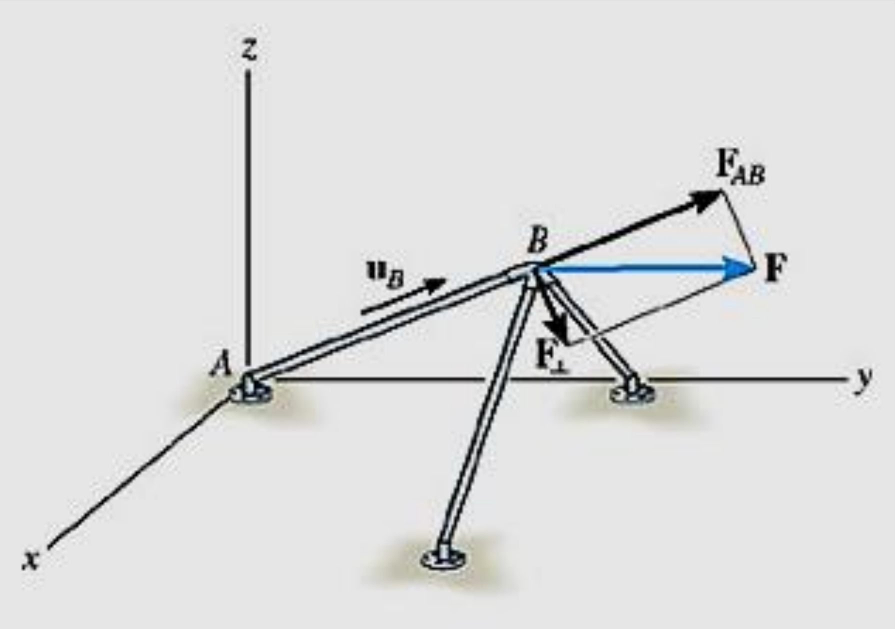


- A intensidade da força **F** ao longo da barra *AB* é igual ao produto escalar de **F** pelo vetor unitário $\boldsymbol{u}_B$;
- O vetor unitário é dado por:

$$\mathbf{u}_B = \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = \frac{2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (3)^2}} = 0{,}286\mathbf{i} + 0{,}857\mathbf{j} + 0{,}429\mathbf{k}$$

1.9. PRODUTO ESCALAR

SOLUÇÃO:



➢ E a força $\mathbf{F}_{AB}$:

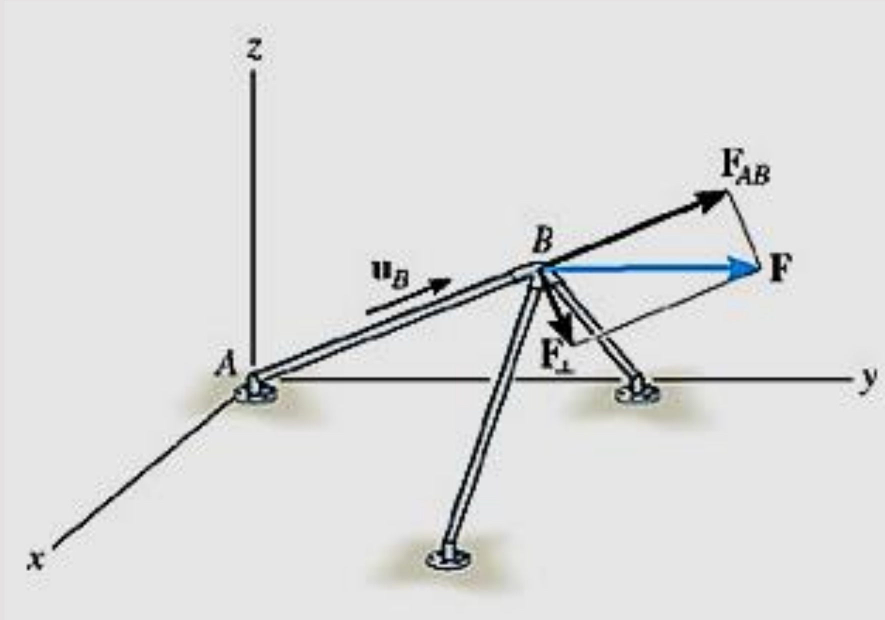
$$F_{AB} = F\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_B = (300\mathbf{j})\cdot(0{,}286\mathbf{i} + 0{,}857\mathbf{j} + 0{,}429\mathbf{k})$$

$$= (0)(0{,}286) + (300)(0{,}857) + (0)(0{,}429)$$

$$= 257{,}1\text{ N}$$

1.9. PRODUTO ESCALAR

SOLUÇÃO:



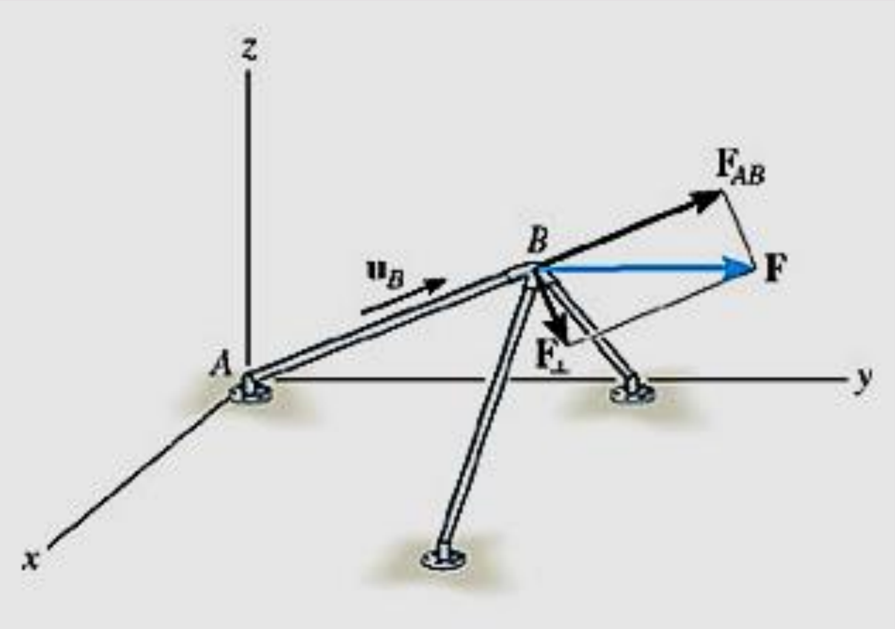
- Como o resultado de $\mathbf{F}_{AB}$ é um escalar positivo, significa que este vetor tem mesma direção e sentido que o vetor unitário $\boldsymbol{u}_B$;

- Logo, podemos dizer que $\mathbf{F}_{AB}$ expresso na forma cartesiana é dado por:

$$\mathbf{F}_{AB} = F_{AB}\mathbf{u}_B = (257{,}1\text{ N})(0{,}286\mathbf{i} + 0{,}857\mathbf{j} + 0{,}429\mathbf{k})$$
$$= \{73{,}5\mathbf{i} + 220\mathbf{j} + 110\mathbf{k}\}\text{ N}$$

1.9. PRODUTO ESCALAR

SOLUÇÃO:



- $\mathbf{F}_{AB}$ é a componente paralela. E quanto à componente perpendicular?
- $\mathbf{F}_\perp$ é a componente perpendicular e é dada por:

$$\mathbf{F}_\perp = \mathbf{F} - \mathbf{F}_{AB} = 300\mathbf{j} - (73{,}5\mathbf{i} + 220\mathbf{j} + 110\mathbf{k})$$

$$= \{-73{,}5\mathbf{i} + 80\mathbf{j} - 110\mathbf{k}\}\ \mathrm{N}$$

ATÉ A PRÓXIMA!