ELETROTÉCNICA

Circuitos de Corrente Alternada

PROF. ROGER CRUZ

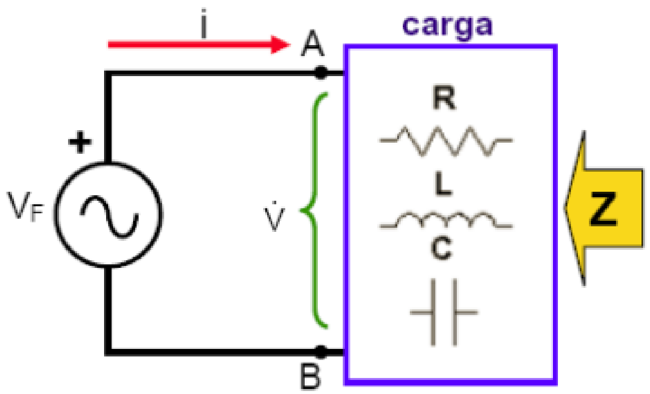
ACOMPANHAMENTO DO PLANO DE ENSINO

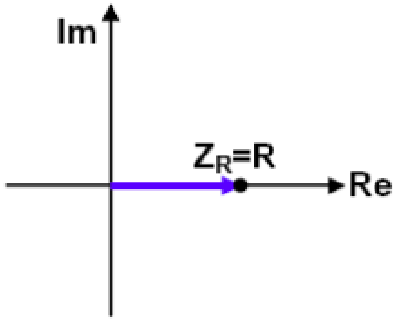
APRESENTACAO DO PLANO DE ENSINO/CORRENTE, TENSÃO, RESISTÊNCIA
POTÊNCIA ELÉTRICA, ENERGIA E EFICIÊNCIA
CIRCUITOS EM SÉRIE, LEI DE KIRCCHORFF DAS TENSÕES, DIVISOR DE TENSÃO
CIRCUITO EM PARALELO, LEI DE KIRCHHORFF DAS CORRENTES, DIVISOR DE CORRENTE
CIRCUITOS EM SÉRIE E PARALELO, CURTO CIRCUITO E CIRCUITO ABERTO
CARACTERÍSTICAS DA TENSÃO E DA CORRENTE ALTERNADAS
NÚMEROS COMPLEXOS, FASORES E OPERAÇÃO SOBRE FASORES
RESISTÊNCIA, REATÂNCIA CAPACITIVA, REATÂNCIA INDUTIVA E IMPEDÂNCIA
ASSOCIAÇÃO DE ELEMENTOS EM CIRCUITO DE CORRENTE ALTERNADA

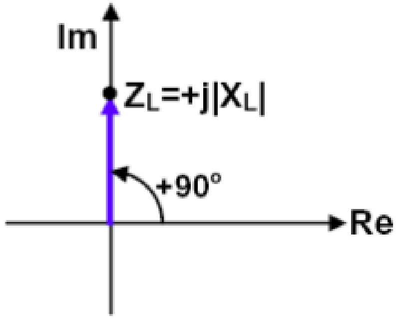
10.1 IMPEDÂNCIA

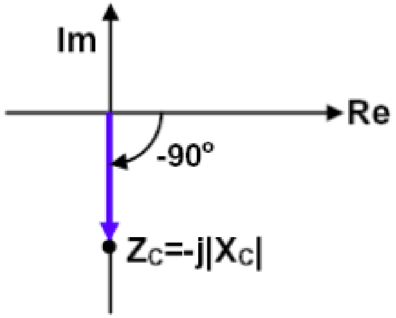
Impedância (Z) de um circuito é definida como a relação entre a tensão e a corrente que atravessa um bipolo de um circuito.

$$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}}$$



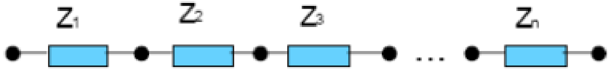






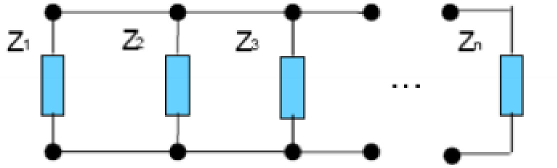
10.2 ASSOCIAÇÃO DE IMPEDÂNCIAS

$$Z_{eq} = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$



$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_n$$

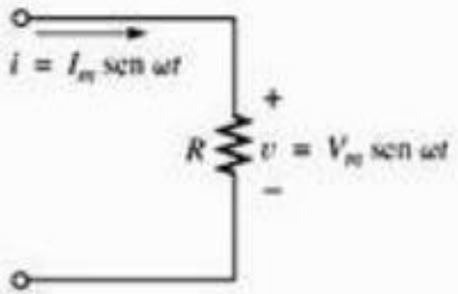
$$\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{Z_i} \right)$$



$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \ldots + \frac{1}{Z_n}$$

10.2 ASSOCIAÇÃO DE IMPEDÂNCIAS – ELEMENTOS RESISTIVOS

$$I_m = \frac{V_m}{R} \quad \text{ou} \quad V_m = I_m R$$



Como i e v estão em fase, o ângulo associado a i deve também ser 0º. Para satisfazer essa condição, θ_R tem de ser igual a 0º. Substituindo $\theta_R = 0º$, encontramos:

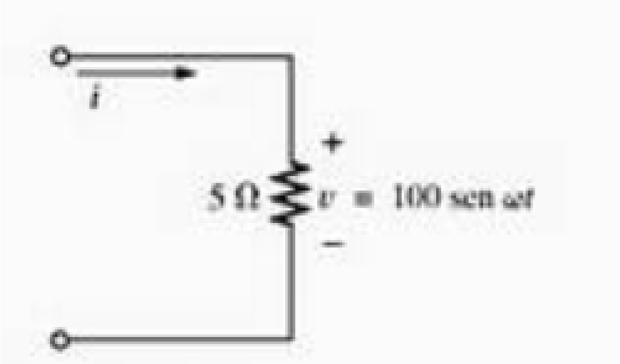
$$\mathbf{I} = \frac{V \angle 0^\circ}{R \angle 0^\circ} = \frac{V}{R} \underline{/0^\circ - 0^\circ} = \frac{V}{R} \angle 0^\circ$$

de maneira que, no domínio do tempo:

$$i = \sqrt{2}\left(\frac{V}{R}\right) \text{sen } \omega t$$

10.2 ASSOCIAÇÃO DE IMPEDÂNCIAS – ELEMENTOS RESISTIVOS

Exemplo: Determine a corrente i no circuito abaixo na forma trigonométrica e fasorial



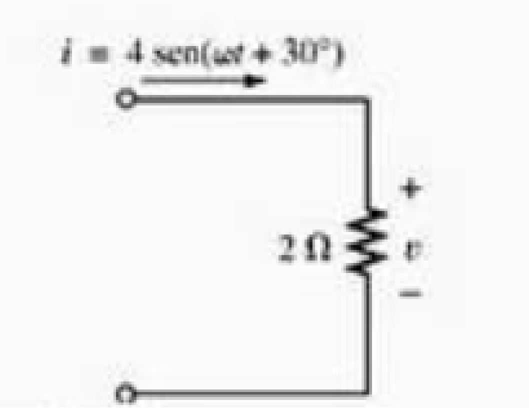
$$I = \frac{V}{Z_R} = \frac{70{,}71\angle 0^0}{5\angle 0^0} = 14{,}14\angle 0^0$$

v(t)= 100 sen(ωt) ->fasorialmente ->

$$i(t) = \sqrt{2}(14{,}14)sen(\omega t)$$

10.2 ASSOCIAÇÃO DE IMPEDÂNCIAS – ELEMENTOS RESISTIVOS

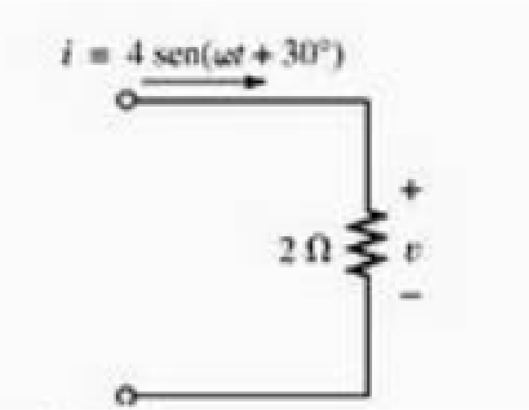
Exemplo: Determine a tensão v no circuito abaixo na forma trigonométrica e fasorial



$i(t) = 4\ sen(\omega t+30^0)$ ->fasorialmente ->

10.2 ASSOCIAÇÃO DE IMPEDÂNCIAS – ELEMENTOS RESISTIVOS

Exemplo: Determine a tensão v no circuito abaixo na forma trigonométrica e fasorial



$$I = 2{,}828\angle 30^0$$

i(t) = 4 sen(ωt+30^0) ->fasorialmente ->

$$V = IZ_R = (I\angle\theta)(R\angle 0^0) = (2{,}828\angle 30^0)(2\angle 0^0) = 5{,}656\angle 30^0 V$$
$$v(t) = \sqrt{2}(5{,}656)sen(\omega t + 30^0) = 8{,}0sen(\omega t + 30^0)$$

10.3 REATÂNCIA INDUTIVA

Aprendemos que no caso do indutor puro, a tensão está adianta 90^0 em relação à corrente e que a reatância do indutor é dada por X_L= jωL, em módulo X_L= ωL. Pela Lei de ohm:

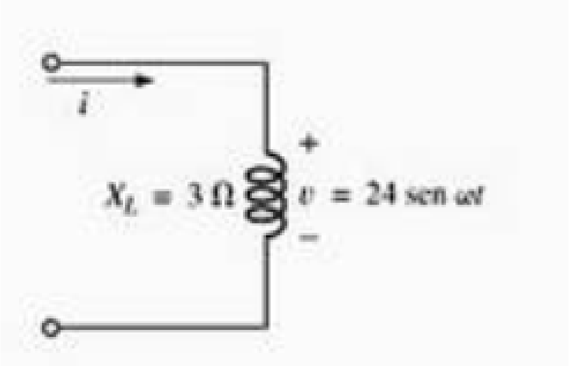
$$I = \frac{V\angle 0^0}{X_L\angle\theta_L} = \frac{V}{X_L}\angle 0^0 - \theta_L$$

Como v está adianta 90^0 em relação a *i*, a corrente deve ter um ângulo de -90^0 associado a ela. Deste modo:

$$Z_L = X_L\angle 90^0$$

10.3 REATÂNCIA INDUTIVA

Exemplo: Determine a corrente i no circuito abaixo:



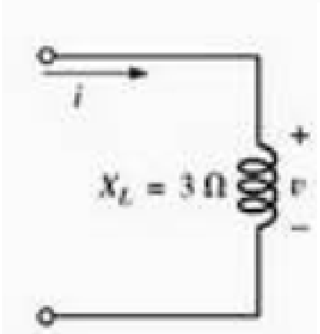
v(t)= 24 sen(ωt) ->fasorialmente -> $V = 16{,}968\angle 0^0$

$$I = \frac{V}{X_L} = \frac{V\angle\theta}{X_L\angle 90^0} = \frac{16{,}968\angle 0^0}{3\angle 90^0} = 5{,}656\angle -90^0\,A$$

$$i(t) = \sqrt{2}(5{,}656)sen(\omega t - 90^0) = 8{,}0sen(\omega t - 90^0)$$

10.3 REATÂNCIA INDUTIVA

Exemplo: Determine a tensão V no circuito abaixo:



$i = 5\,\text{sen}(\omega t + 30°)$

i(t)= 5 sen(ωt+30^0) ->fasorialmente -> $I = 3{,}535\angle 30^0$

$$V = IZ_L = (I\angle\theta)(X_L\angle 90^0) = (3{,}535\angle 30^0)(3\angle 90^0) = 10{,}605\angle 120^0 V$$

$$v(t) = \sqrt{2}(10{,}605)sen(\omega t + 120^0) = 15{,}0sen(\omega t + 120^0)$$

10.4 REATÂNCIA CAPACITIVA

Vimos que no caso do capacitor puro, a corrente fica adiantada em 90^0 em relação à tensão e que a reatância capacitiva X_c é dada por $1/j\omega C$ e em módulo $X_c = 1/\omega C$.
Dessa forma a corrente i precisa ter um ângulo de $+90^0$ em relação a tensão. Pela Lei de ohm:

$$I = \frac{V\angle 0^0}{X_C\angle -90^0} = \frac{V}{X_C}\angle 90^0$$

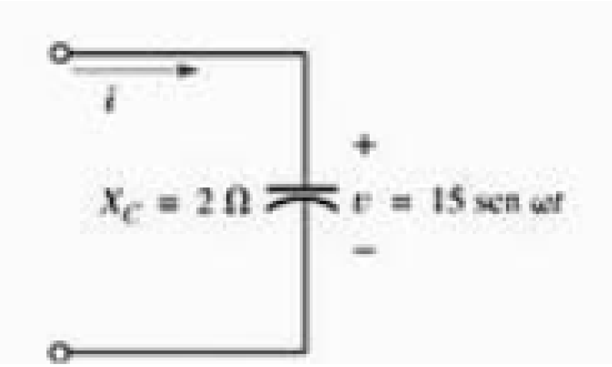
De maneira que a corrente i(t) na forma trigonométrica:

$$i(t) = \sqrt{2}\left(\frac{V}{X_C}\right) sen(\omega t + 90^0)$$

Desta forma: $Z_C = X_C\angle -90^0$

10.4 REATÂNCIA CAPACITIVA

Exemplo: Determine a corrente *i* no circuito abaixo na forma fasorial e trigonométrica.



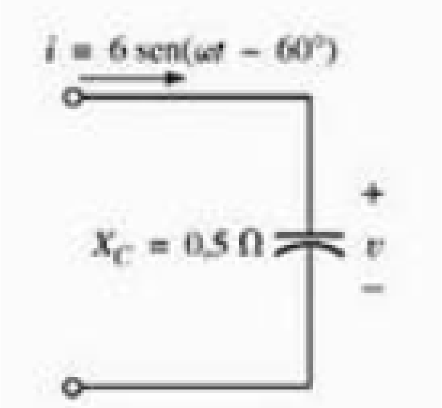
v(t)= 15 sen(ωt) ->fasorialmente -> $V = 10{,}60\angle 0^0$

$$I = \frac{V}{Z_C} = \frac{V\angle\theta}{X_C\angle -90^0} = \frac{10{,}605\angle 0^0}{2\angle -90^0} = 5{,}303\angle 90^0\,A$$

$$i(t) = \sqrt{2}(5{,}303)sen(\omega t + 90^0) = 7{,}5sen(\omega t + 90^0)$$

10.4 REATÂNCIA CAPACITIVA

Exemplo: Determine a tensão *v* no circuito abaixo na forma fasorial e trigonométrica.



i(t)= 6 sen(ωt-60^0) ->fasorialmente -> $I = 4{,}242\angle -60^0\,A$

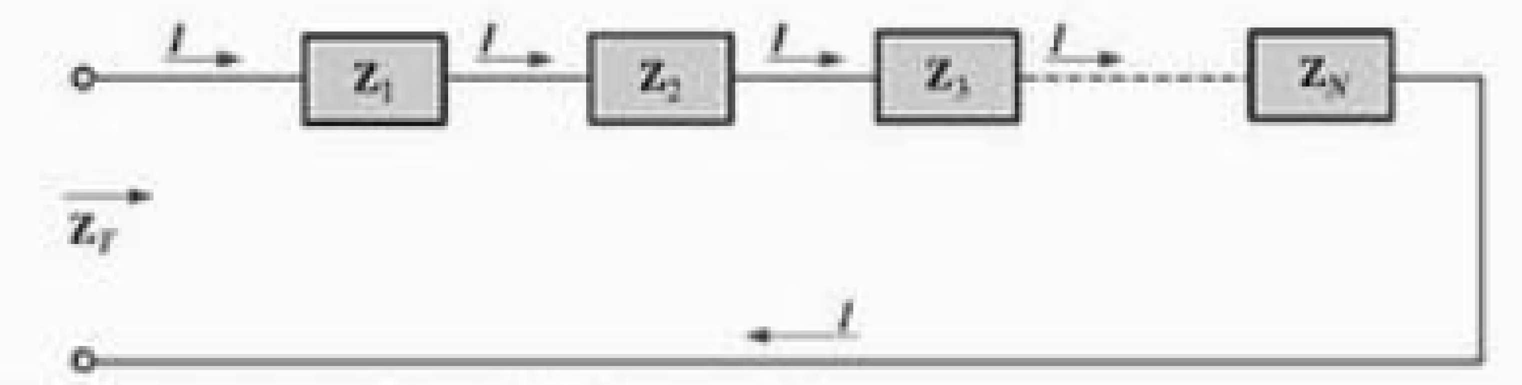
$$V = IZ_C = (I\angle\theta)(X_C\angle -90^0) = (4{,}242\angle -60^0)(0{,}5\angle -90^0) = 2{,}121\angle -150^0 V$$

$$v(t) = \sqrt{2}(2{,}121)sen(\omega t - 150^0) = 3{,}0sen(\omega t - 150^0)$$

10.5 CONFIGURAÇÃO EM SÉRIE

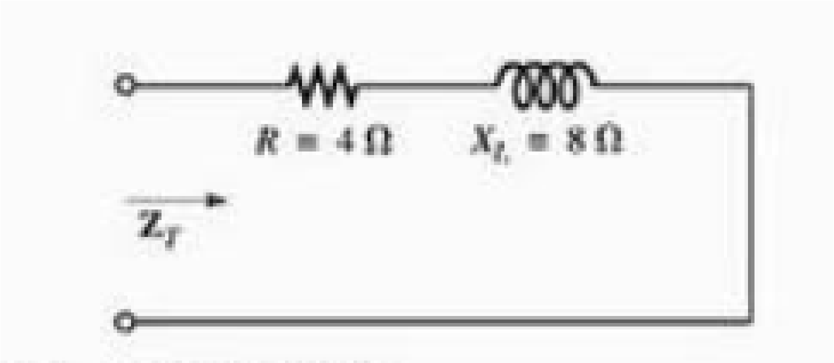
As propriedades gerais dos circuitos CA em série são as mesmas do circuitos em CC. Por exemplo, a impedância de um sistema é a soma das impedâncias individuais.

$$\boxed{\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_N}$$



10.5 CONFIGURAÇÃO EM SÉRIE

Exemplo: Qual a impedância total do circuito abaixo:



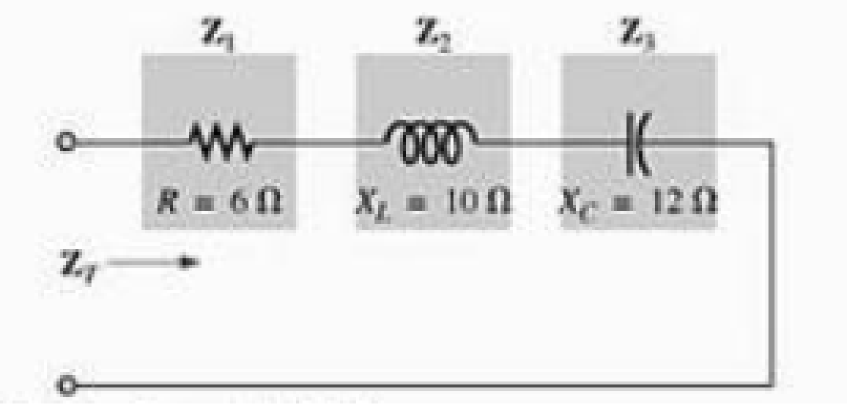
$$Z_T = Z_1 + Z_2 = R\angle 0^0 + X_L\angle 90^0$$

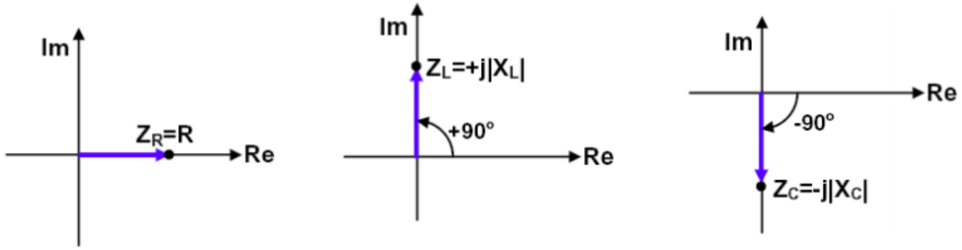
$$= R + jX_L = 4 + j8 \quad = C = Z\angle\theta = \sqrt{4^2 + 8^2}\angle \tan^{-1}\left(\frac{8}{4}\right)$$

$$Z_T = 8{,}944\angle 63{,}43^0$$

10.5 CONFIGURAÇÃO EM SÉRIE

Exemplo: Calcule a impedância total do circuito abaixo





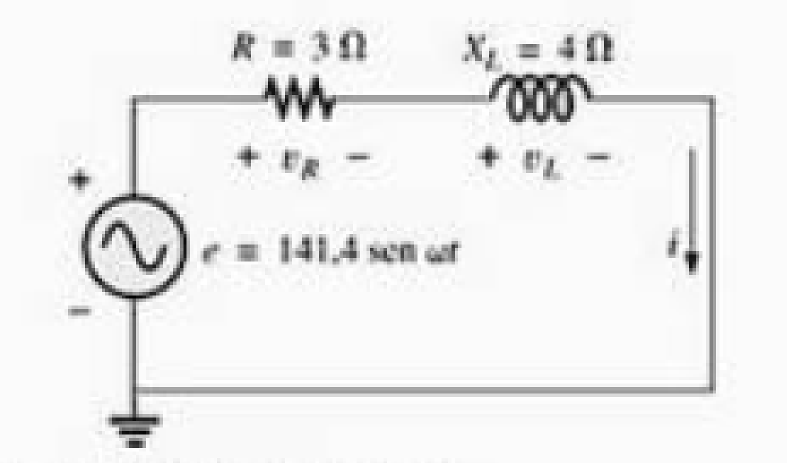
$$Z_T = Z_1 + Z_2 + Z_3 = R\angle 0^0 + X_L\angle 90^0 + X_C\angle -90^0$$

$$= R + jX_L - jX_C = 6 + j10 - j12 = 6 - 2j \quad = C = Z\angle\theta = \sqrt{6^2 + (-2)^2}\angle \tan^{-1}\left(\frac{-2}{6}\right)$$

$$Z_T = 6{,}324\angle -18{,}43^0$$

10.5 CONFIGURAÇÃO EM SÉRIE

Exemplo: Dado o circuito abaixo, calcule a corrente no circuito



$$Z_T = Z_1 + Z_2 = R\angle 0^0 + X_L\angle 90^0$$

$$= R + jX_L = 3 + j4 = C = Z\angle\theta = \sqrt{4^2+3^2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$Z_T = 5\angle 53{,}13^0$$

$$V = \frac{141{,}4}{\sqrt{2}}\angle 0^0 = 100\angle 0^0$$

$$I = \frac{V}{Z_T} = \frac{100\angle 0^0}{5\angle 53{,}13^0} = 20\angle -53{,}13^0\,A$$

$$i(t) = \sqrt{2}(20)sen(\omega t - 53{,}13^0) = 28{,}28sen(\omega t - 53{,}13^0)$$

10.5 FATOR DE POTÊNCIA

O fator de potência de um circuito pode ser calculado como

$$F_P = \cos(\theta_T) = \frac{R}{Z_T}$$

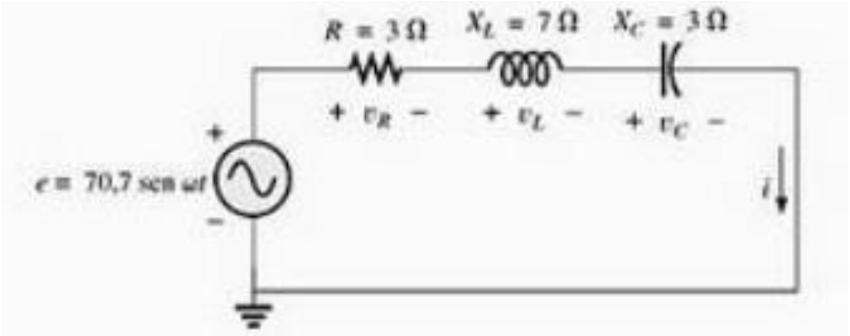
Para o circuito anterior temos:

$$F_P = \cos(53{,}13^0) = \frac{R}{Z_T} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$Pot_{Ativ} = i \ x \ v \, . \cos(\theta_z)$$

10.6 CIRCUITO RLC EM SÉRIE

Calcule a corrente e o fator de potência no circuito abaixo



$$Z_T = Z_1 + Z_2 + Z_3 = R\angle 0^0 + X_L\angle 90^0 + X_C\angle -90^0$$
$$= R + jX_L - jX_C = 3 + j7 - j3 = 3 + 4j$$
$$Z_T = 5\angle 53{,}13^0$$

$$V = \frac{70.7}{\sqrt{2}}\angle 0^0$$

$$I = \frac{V}{Z_C} = \frac{50\angle 0^0}{5\angle 53{,}13^0} = 10\angle -53{,}13^0\,A$$

$$i(t) = \sqrt{2}(10)sen(\omega t - 53{,}13^0) = 14{,}14sen(\omega t - 53{,}13^0)A$$

10.6 CIRCUITO RLC EM SÉRIE

O fator de potência será dada por:

$$F_P = \cos(\theta_T) = \frac{R}{Z_T} = \frac{3}{5} = 0,6$$

10.7 ADMITÂNCIA

Em circuito de corrente alternada, definimos a **admitância (Y)** como sendo igual a 1/Z. A unidade de admitância no sistema SI é o *siemens* (S).

É a medida de quanto um circuito admite, ou permite a passagem de corrente.

A impedância total se um circuito será $Y_T = 1/Z_T$

$$\boxed{\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \cdots + \mathbf{Y}_N}$$

$$\boxed{\frac{1}{\mathbf{Z}_T} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{1}{\mathbf{Z}_3} + \cdots + \frac{1}{\mathbf{Z}_N}}$$

10.7 ADMITÂNCIA

Para duas impedância em paralelo temos:

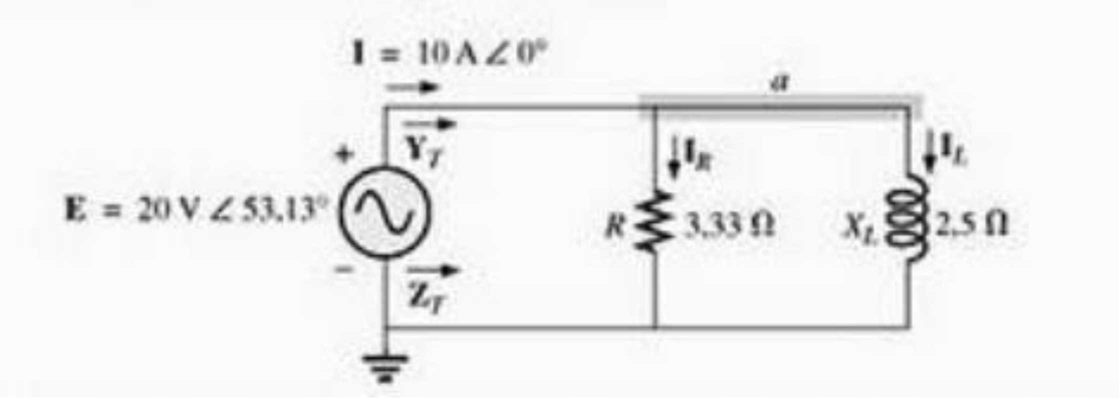
$$Z_T = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Para três impedância em paralelo temos:

$$Z_T = \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}$$

10.7 EXEMPLO

Calcule a impedância total e a corrente do circuito abaixo



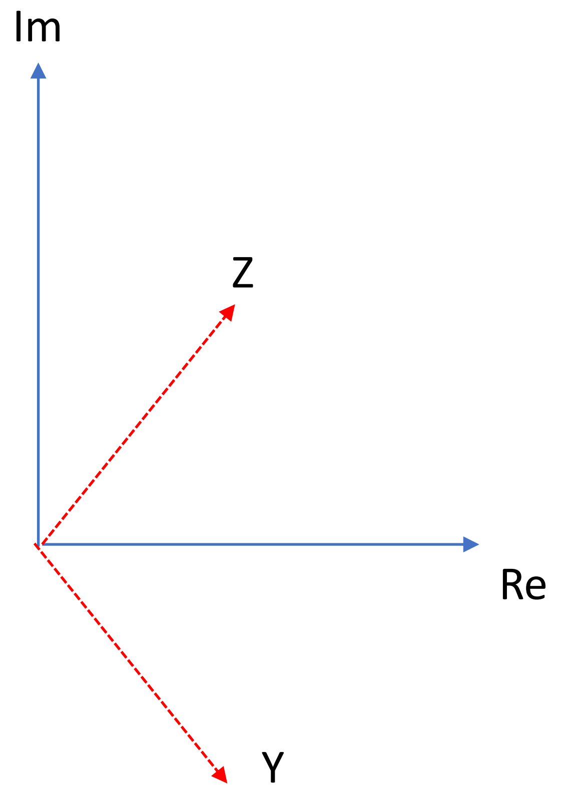
Para facilitar os cálculos iremos somar as **admintâncias**

$$Y_T = Y_1 + Y_2 = \frac{1}{R\angle 0^0} + \frac{1}{X_L\angle 90^0} = \frac{1}{3{,}33\angle 0^0} + \frac{1}{2{,}5\angle 90^0} =$$

$$= \frac{1\angle 0^0}{3{,}33} + \frac{1\angle -90^0}{2{,}5} = 0{,}3\angle 0^0\, S + 0.4\angle -90^0$$

$$= 0{,}3S - j0{,}4S$$

$$Y_T = 0{,}5\angle -53{,}13^0 \Rightarrow Z_T = \frac{1}{Y_T} = \frac{1}{0{,}5\angle -53{,}13^0} = 2\angle 53{,}13^0\,\Omega$$



10.7 EXEMPLO

Agora podemos calcular a corrente no circuito:

$$V = ZT\,.\,I$$

$$I = \frac{V}{Z_T} = \frac{20\angle 53{,}13^0}{2\angle 53{,}13^0} = 10\angle 0^0 A$$

$$i(t) = \sqrt{2}(10)sen(\omega t) = 14{,}14sen(\omega t)A$$

10.8 RESUMO DAS RELAÇÃO V e I

Relações entre Tensão e Corrente nos Elementos Passivos (RLC)					
Elemento	Comportamento	Domínio Tempo		Domínio Fasorial	
		Unidade	Relação	Relação	Unidade
Resistor	Corrente em fase com a tensão	Ohm, Ω	$R = \frac{v_R(t)}{i_R(t)}$	$R = \frac{\dot{V}_R}{\dot{I}_R}$	Ohm, Ω
Capacitor	Corrente adiantada 90° da tensão	Farad, F	$i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$	$X_C = \frac{\dot{V}_C}{\dot{I}_C}$	Ohm, Ω
Indutor	Corrente atrasada 90° da tensão	Henry, H	$v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$	$X_L = \frac{\dot{V}_L}{\dot{I}_L}$	Ohm, Ω
Impedância	Corrente defasada da tensão	Ohm, Ω	-	$Z = \frac{\dot{V}_Z}{\dot{I}_Z}$	Ohm, Ω

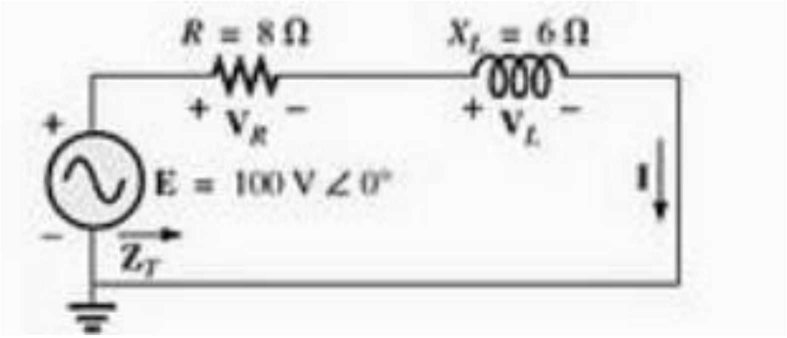
10.8 RESUMO DAS RELAÇÃO V e I

Relações entre Tensão e Corrente nos Elementos Passivos (RLC)					
	Unidade	Natureza	Forma Retangular	Forma Polar	Módulo
Resistência R	Ohm, Ω	Real	R	R	R
Reatância Capacitiva X_C	Ohm, Ω	Imaginário Negativo	$X_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$	$X_C = \lvert X_C \rvert \angle(-90^\circ)$	$\lvert X_C \rvert = \frac{1}{\omega \cdot C}$
Reatância Indutiva X_L	Ohm, Ω	Imaginário Positivo	$X_L = j \cdot \omega \cdot L$	$X_L = \lvert X_L \rvert \angle(+90^\circ)$	$\lvert X_L \rvert = \omega \cdot L$
Impedância Z	Ohm, Ω	Complexo	$Z = R \pm jX$	$Z = \lvert Z \rvert \angle \pm \phi$	$\lvert Z \rvert = \sqrt{R^2 + \lvert X \rvert^2}$

10.9 EXERCÍCIOS

1) Encontre a corrente *I* e *impedância total* no circuitos abaixo:

a)



$E = 100\ V\angle 0°$
$R = 8\ \Omega$
$XL = 6\ \Omega$

$$ZT = Z1 + Z2 = R\angle 0° + XL\angle 90° = 8 + j6 \Rightarrow \sqrt{8^2 + 6^2} \Rightarrow 10\Omega\angle\ 36{,}87\ °$$

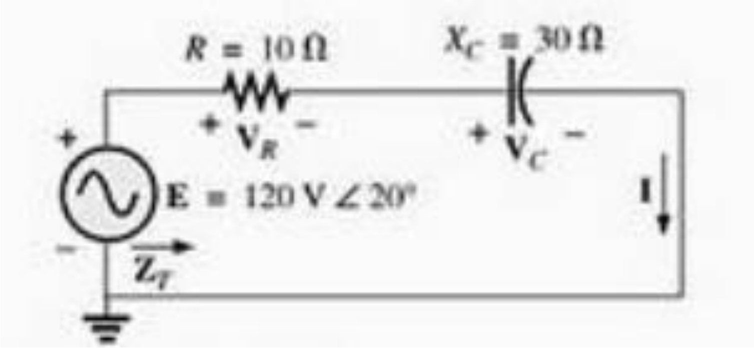
$$I = \frac{\dot{V}}{ZT} = \frac{100\ V\angle 0°}{10\Omega\angle\ 36{,}87\ °} = 10\ A\angle - 36{,}87\ °$$

i (t)= $10.\sqrt{2}\,.sen\ (\omega t\ - 36{,}87\ °) = 14{,}14\,.sen\ (\omega t\ - 36{,}87\ °)\ A$

10.9 EXERCÍCIOS

1) Encontre a corrente *I* e *impedância total* no circuitos abaixo:

b)



$E = 120\ V\angle 20°$
$R = 10\ \Omega$
$XC = 30\ \Omega$

$$ZT = Z1 + Z2 = 10\ \Omega\angle 0° + 30\ \Omega\angle\ -90°$$

$$= 10 - j30 \Rightarrow \sqrt{10^2 + 30^2} = 31{,}62\angle \tan^{-1}\left(-\frac{30}{10}\right)$$

$$= 31{,}62\Omega\angle\ -71{,}57°$$

$$I = \frac{\dot{V}}{ZT} = \frac{120\ V\angle 20°}{31{,}62\Omega\angle\ -71{,}57°} = 3{,}8\angle\ 91{,}57\ °$$

$$i(t) = 3{,}8.\sqrt{2}.sen(\ \omega t + 91{,}57°)$$

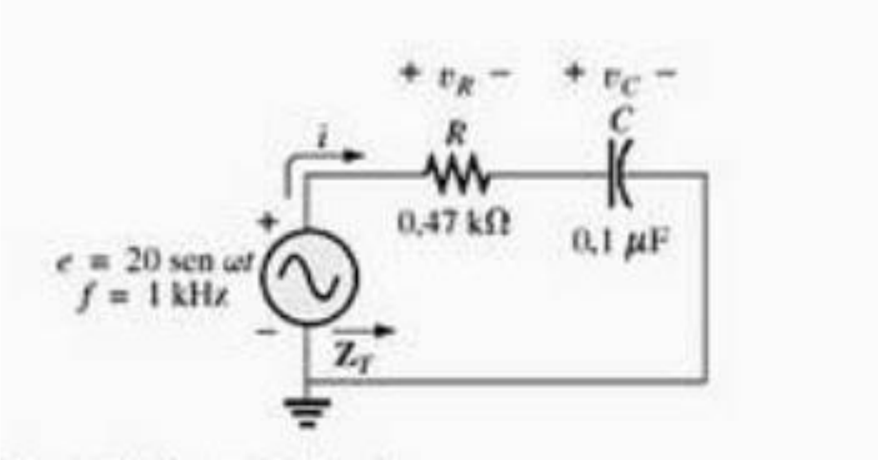
$$YT = \frac{1}{ZT} = \frac{1}{31{,}62\Omega\angle\ -71{,}57°}$$

$$YT = 0{,}0316\Omega\angle\ 71{,}57°$$

10.9 EXERCÍCIOS

1) Encontre a corrente *I* e *impedância total* no circuitos abaixo:

c)



$f = 1\ kHz \Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi.1000\ Hz = 6283{,}18\ rad/s$

$e = 20\ sen(\omega t)$

$R = 0{,}47\ k\Omega = 470\Omega\angle 0°$

$C = 0{,}1\mu F \Rightarrow |Xc| = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{6283{,}18\dfrac{rad}{s}.0{,}1.10^{-6}F}$

$|Xc| = 1603{,}03\ \Omega \Rightarrow 1603{,}03\ \Omega\angle -90°$

$\dot{V} = \dfrac{20}{\sqrt{2}}\angle 0° = 14{,}14\ V\angle 0°$

$ZT = Z1 + Z2 = 470\Omega\angle 0° + 1603{,}03\ \Omega\angle -90°$

$ZT = 470 + j1603{,}03 \Rightarrow \sqrt{(470)^2 + (1603{,}03)^2}\angle \tan^{-1}(-\dfrac{1603{,}03}{470})$

$ZT = 1670{,}51\angle -73{,}66°$

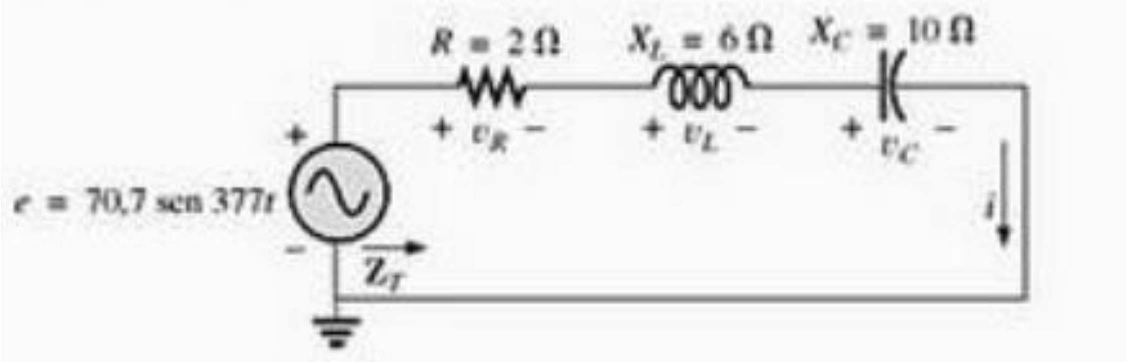
$I = \dfrac{\dot{V}}{ZT} = \dfrac{14{,}14\ V\angle 0°}{1670{,}51\angle -73{,}66°} = 8{,}46\ mA\angle 73{,}66° \Rightarrow i(t) = 8{,}46.\sqrt{2}.sen(\omega t + 73{,}66°)$

$i(t) = 11{,}96\ sen\ (\omega t + 73{,}66°)\ mA$

10.9 EXERCÍCIOS

1) Encontre a corrente *I* e *impedância total* no circuitos abaixo:

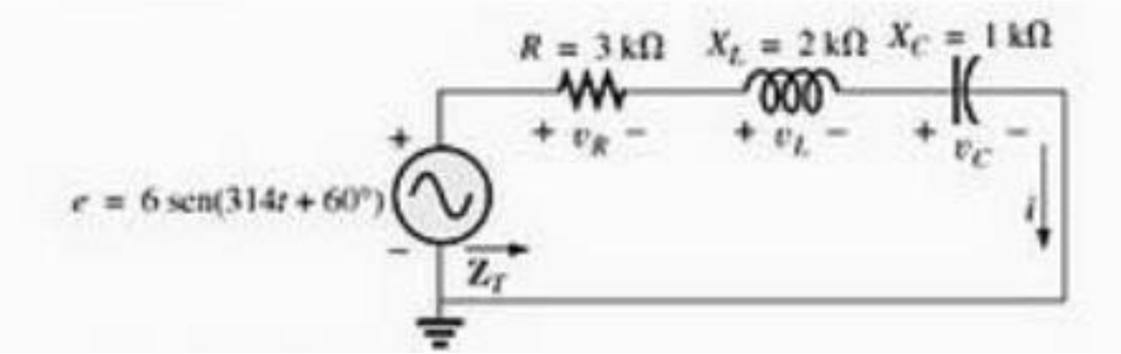
d)



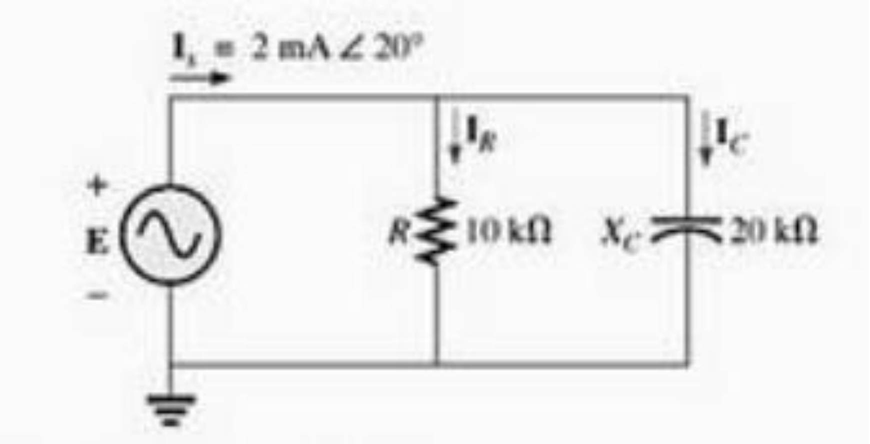
10.9 EXERCÍCIOS

1) Encontre a corrente *I* e *impedância total* no circuitos abaixo:

e)



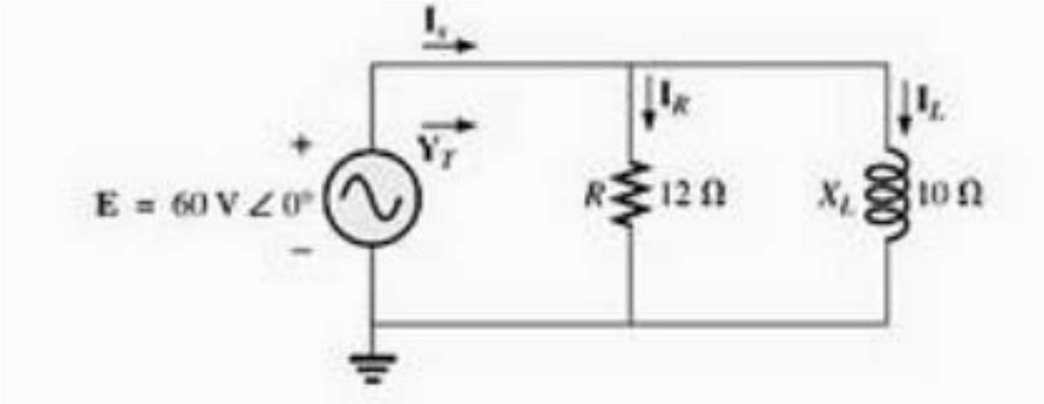
f)



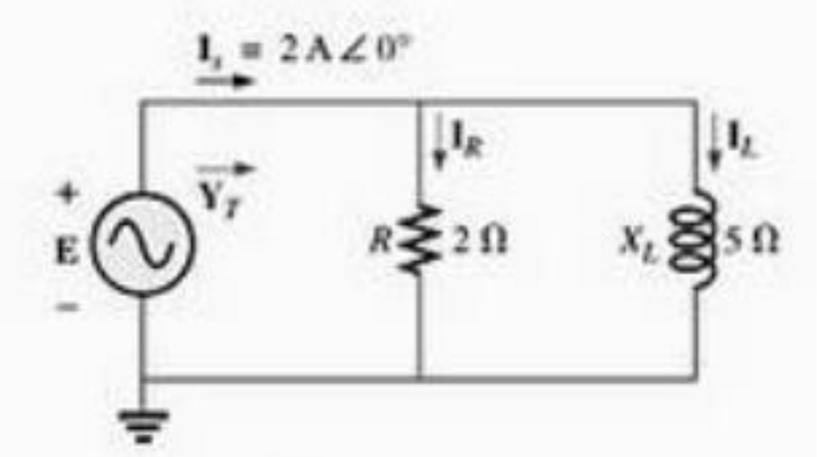
10.9 EXERCÍCIOS

1) Encontre a corrente *I* e *impedância total* no circuitos abaixo:

g)

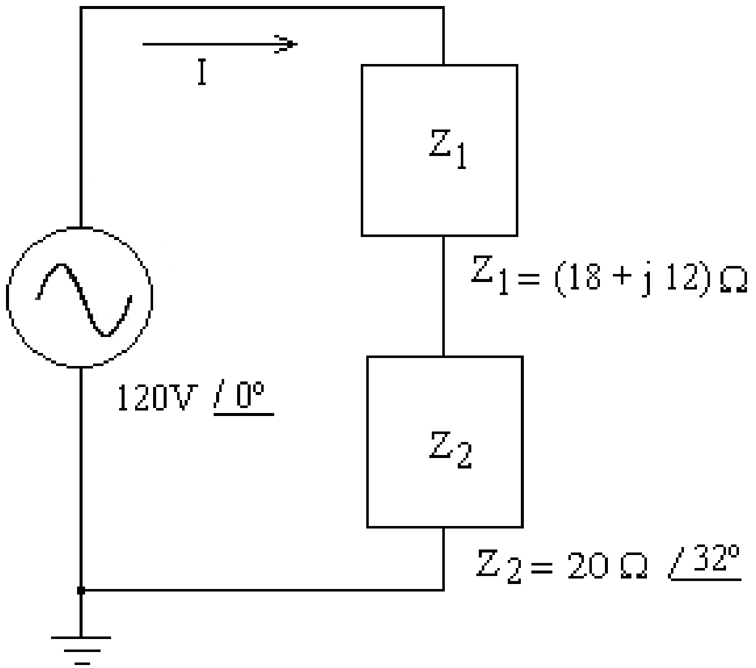


h)



10.10 ATIVIDADE ESTRUTURADA

Para o circuito mostrado abaixo, determine a impedância total equivalente na forma retangular, na forma polar e a corrente **I** resultante



Bibliografia

Boylestad, Robert L. **Introdução a Análise de Circuitos**. São Paulo, . 10ª Ed. LTC, 2014.

DOS SANTOS, Alex Ferreira. **Eletricidade Aplicada.** 1 ed, 2016.