Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

SISTEMAS SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

3.1. Reduções adicionais de um sistema de forças e momentos

3.2. Reduções de um sistema simples de cargas distribuídas

3.2. REDUÇÕES DE UM SISTEMA SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

- Algumas vezes, um corpo pode estar sujeito a um carregamento que está distribuído sobre sua superfície;

- Por exemplo, a pressão do vento sobre a superfície de um cartaz de propaganda (outdoor), a pressão da água dentro de um tanque ou o peso da areia sobre o piso de uma caixa de armazenamento são cargas distribuídas;

- A pressão exercida em cada ponto da superfície indica a intensidade da carga, a qual é medida usando pascal Pa (ou N/m²) em unidades do SI.

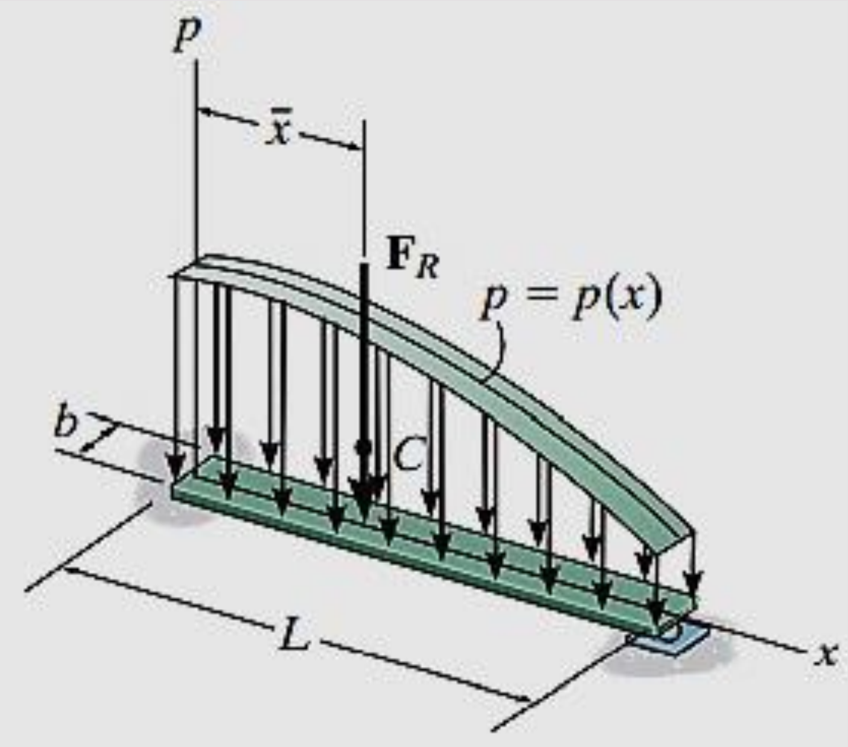
A pilha de tijolos cria um carregamento triangular distribuído sobre a viga de madeira.

3.2. REDUÇÕES DE UM SISTEMA SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

Carregamento ao longo de um único eixo

- Consideremos a viga (ou placa) na figura abaixo, que possui uma largura constante e está sujeita a um carregamento de pressão que varia apenas ao longo do eixo *x*;

- Esse carregamento pode ser descrito pela função $p = p(x)$ N/m²;



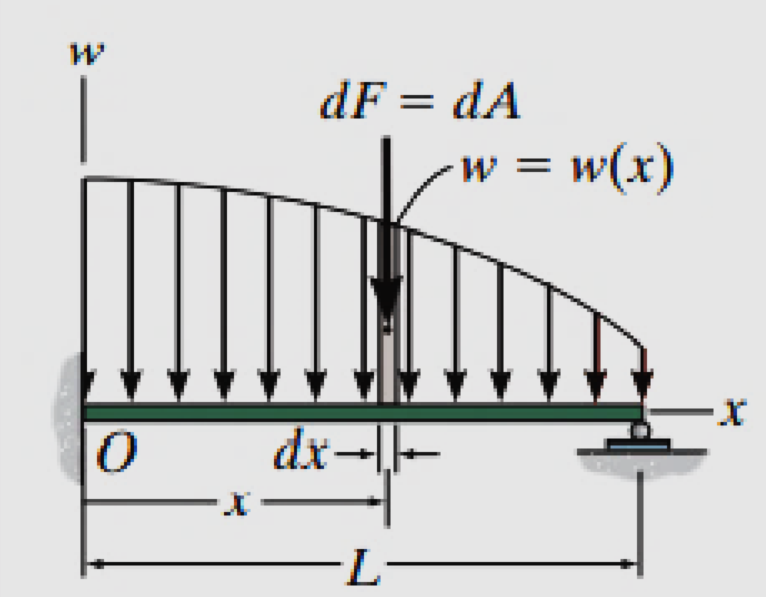
3.2. REDUÇÕES DE UM SISTEMA SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

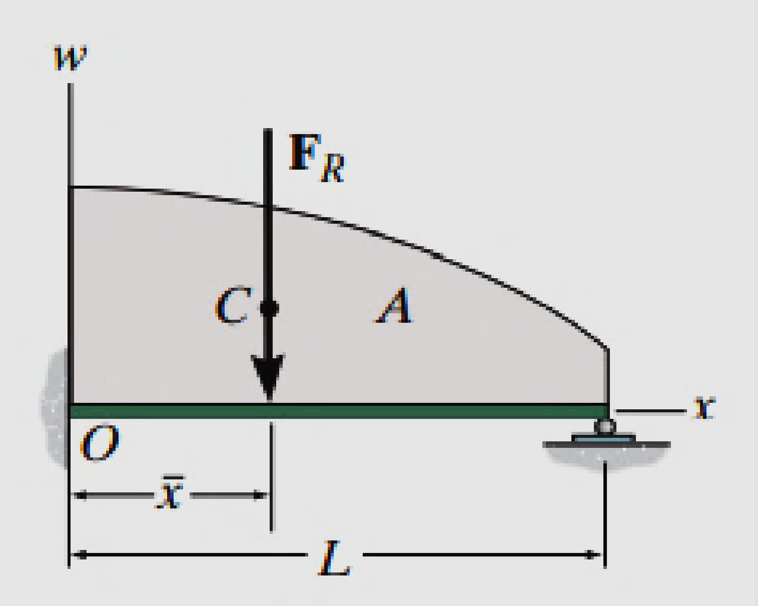
Carregamento ao longo de um único eixo

- Esse carregamento contém somente uma variável *x* e, por isso, também podemos representá-lo como um carregamento distribuído coplanar;

- Para isso, multiplicamos a função de carregamento pela largura *b* da viga, tal que w(x) = p(x).*b* N/m, que indica a força por unidade de comprimento;

- Podemos substituir esse sistema de forças paralelas coplanares por uma única força resultante equivalente $\boldsymbol{F_R}$, que age em uma posição específica sobre a viga;





3.2. REDUÇÕES DE UM SISTEMA SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

a) Intensidade da força resultante

- A intensidade de $\boldsymbol{F_R}$ é equivalente à soma de todas as forças do sistema ($\boldsymbol{F_R} = \sum \boldsymbol{F}$);

- Nesse caso, precisamos usar integração porque existe um número infinito de forças paralelas $d\boldsymbol{F}$ agindo sobre a viga;

- Como $d\boldsymbol{F}$ está agindo sobre um elemento de comprimento dx e $w(x)$ é uma força por unidade de comprimento, então, $d\boldsymbol{F} = w(x)\,dx = d\boldsymbol{A}$;

- Em outras palavras, a intensidade de $d\boldsymbol{F}$ é determinada pela área diferencial em cinza $d\boldsymbol{A}$ abaixo da curva de carregamento. Para o comprimento inteiro L, temos:

$$+\downarrow F_R = \Sigma F; \qquad \boxed{F_R = \int_L w(x)\,dx = \int_A dA = A}$$

- A força resultante é igual a área sob o carregamento.

3.2. REDUÇÕES DE UM SISTEMA SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

b) Posição da força resultante

- Aplicando-se $M_{R_O} = \sum M$, a posição a posição $\bar{x}$ da linha de ação de $\boldsymbol{F_R}$ pode ser determinada igualando-se os momentos da força resultante e da distribuição das forças paralelas em relação ao ponto *O* (o eixo *y*);

- Como $d\boldsymbol{F}$ produz um momento de $xdF = xw(x)dx$ em relação a *O*, então, para o comprimento inteiro, temos:

$$\circlearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O; \qquad -\bar{x}F_R = -\int_L xw(x)\,dx$$

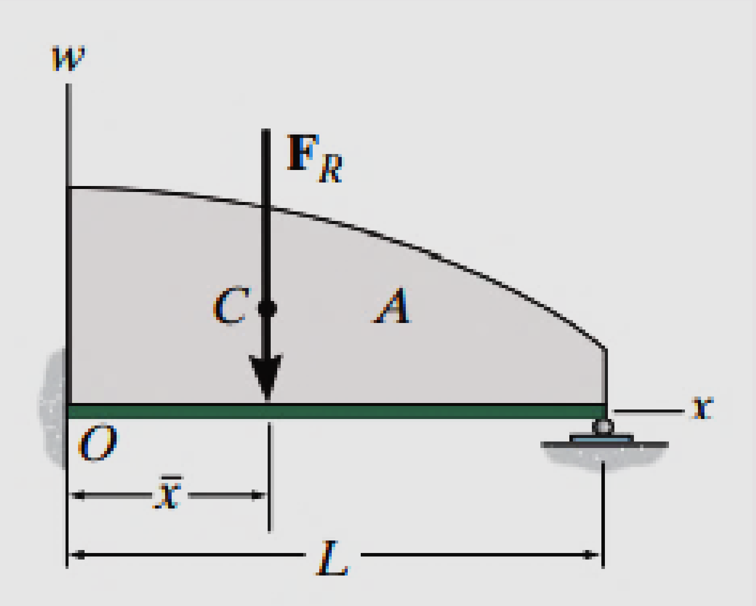
- Resolvendo a equação para $\bar{x}$, temos:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_L xw(x)\,dx}{\displaystyle\int_L w(x)\,dx} = \frac{\displaystyle\int_A x\,dA}{\displaystyle\int_A dA}}$$

3.2. REDUÇÕES DE UM SISTEMA SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

- Essa coordenada $\bar{x}$ localiza o centro geométrico ou centroide da área sob o carregamento distribuído;

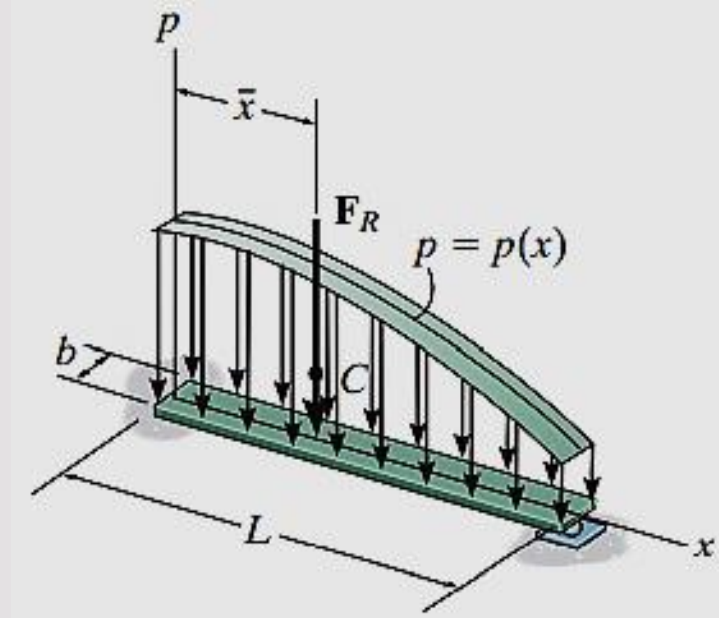
- Em outras palavras, a força resultante tem uma linha de ação que passa pelo centroide *C* (centro geométrico) da área sob o diagrama de carregamento;



$$F_R = \int_L w(x)\,dx = \int_A dA = A$$

$$\bar{x} = \frac{\int_L x w(x)\,dx}{\int_L w(x)\,dx} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}$$

3.2. REDUÇÕES DE UM SISTEMA SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS



- Uma vez que $\bar{x}$ é determinado, $\boldsymbol{F_R}$, por simetria, passa pelo ponto $(\bar{x}, 0)$ na superfície da viga;

- Portanto, neste caso, a força resultante possui uma intensidade igual ao volume sob a curva de carregamento $p = p(x)$ e uma linha de ação que passa pelo centroide (centro geométrico) desse volume.

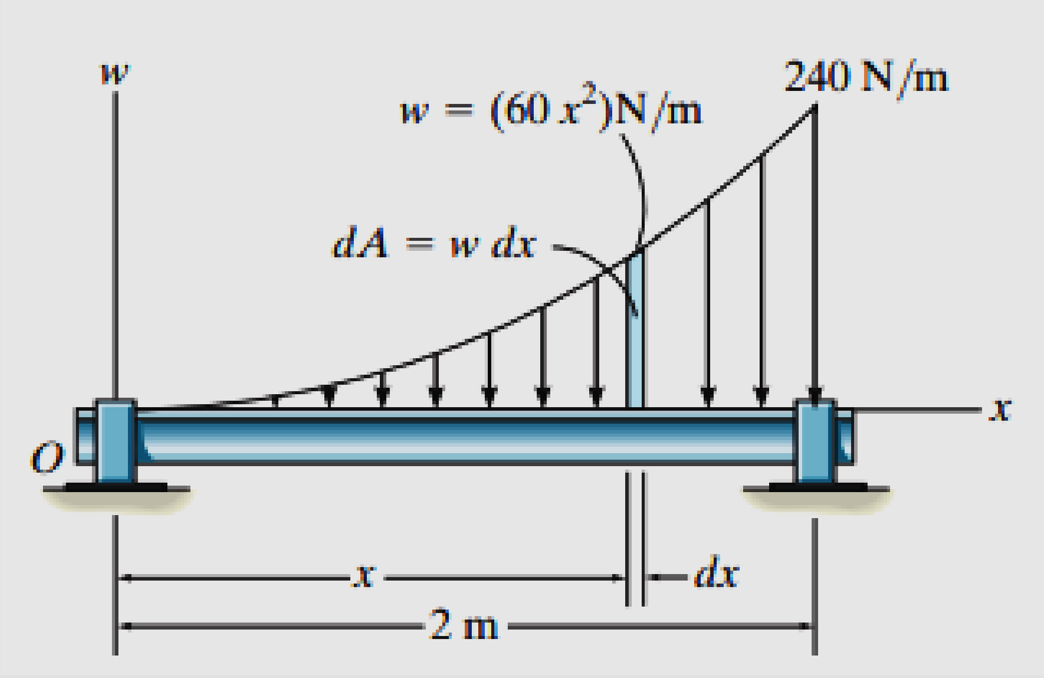
$$F_R = \int_L w(x)\,dx = \int_A dA = A$$

$$\bar{x} = \frac{\int_L x w(x)\,dx}{\int_L w(x)\,dx} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}$$

3.2. REDUÇÕES DE UM SISTEMA SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

Exercício 19:

- Determine a intensidade e a posição da força resultante equivalente que age sobre o eixo na figura abaixo.



3.2. REDUÇÕES DE UM SISTEMA SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

Solução:

- Como $w = w(x)$ é fornecido, este problema será revolvido por integração;
- O elemento diferencial possui uma área $dA = w\,dx = 60x^2\,dx$. Logo:

$$+\downarrow F_R = \Sigma F$$

$$F_R = \int_A dA = \int_0^{2\text{ m}} 60x^2\,dx = 60\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\text{ m}} = 60\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

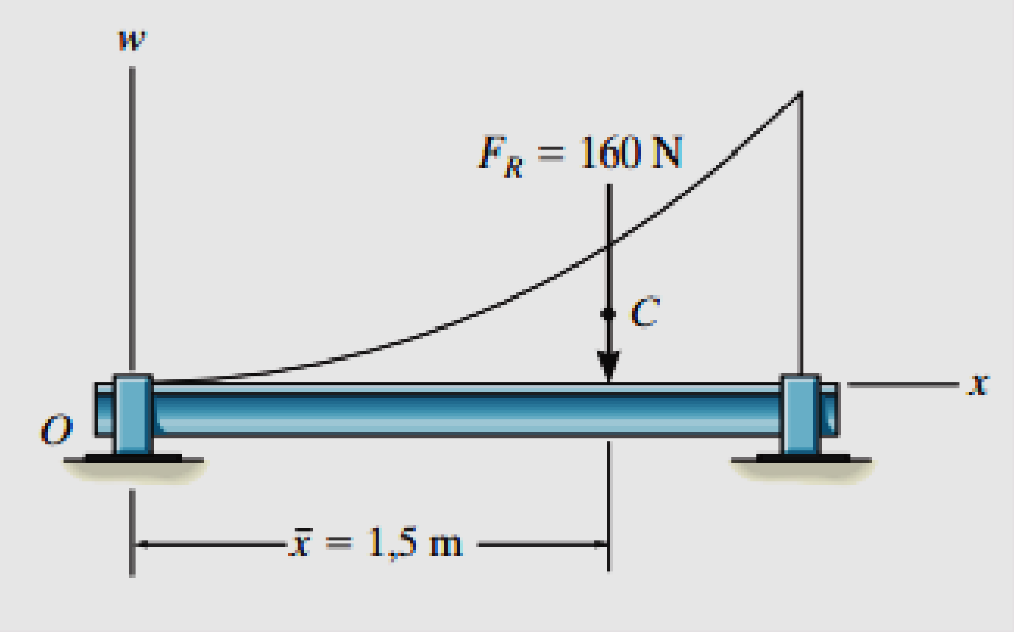
$$F_R = 160\text{ N}$$

3.2. REDUÇÕES DE UM SISTEMA SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

Solução:

➢ A posição $\bar{x}$ de $\boldsymbol{F_R}$, medida a partir do ponto *O*, é determinada por:

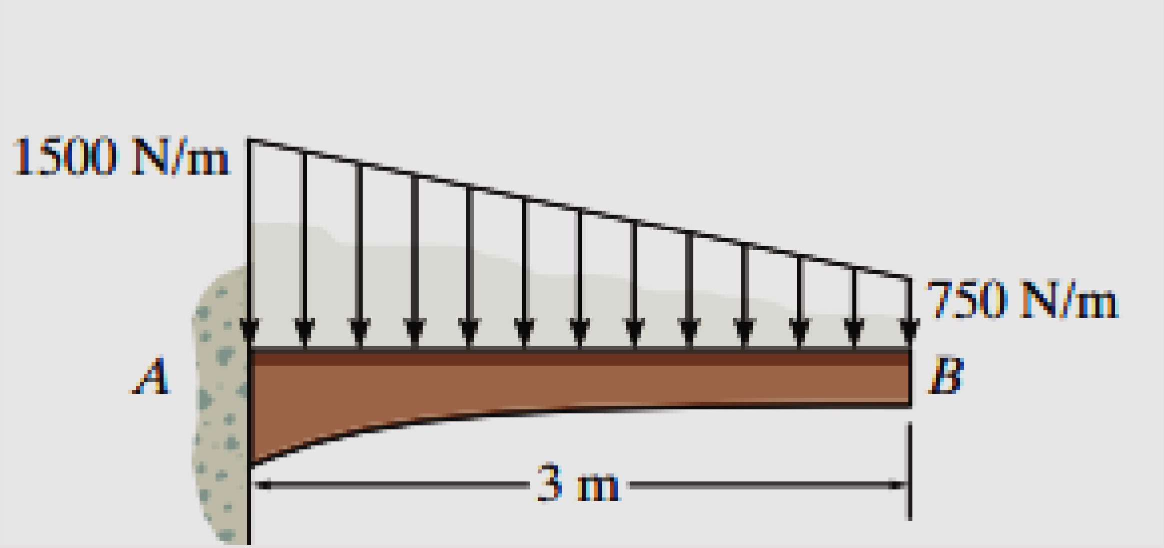
$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{2\text{ m}} x(60x^2)\,dx}{160\text{ N}} = \frac{60\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{2\text{ m}}}{160\text{ N}} = \frac{60\left(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right)}{160\text{ N}} = 1{,}5\text{ m}$$



3.2. REDUÇÕES DE UM SISTEMA SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

Exercício 20:

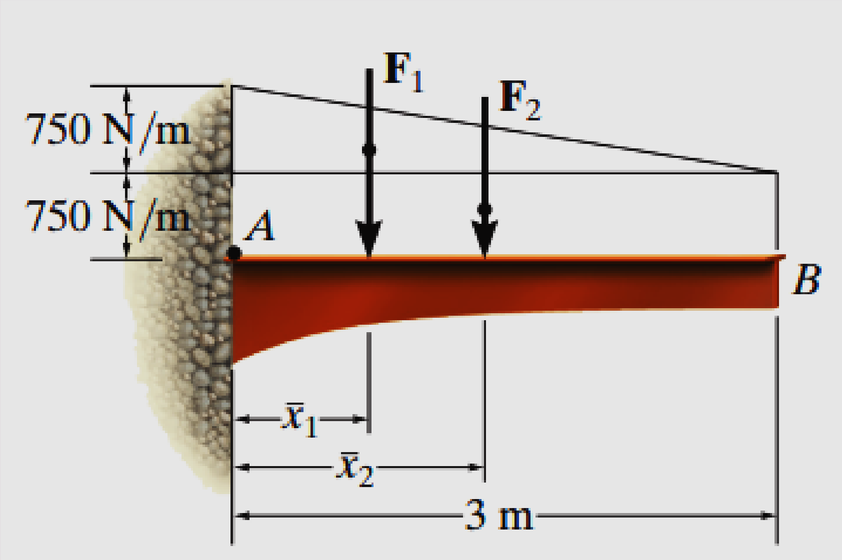
- Um determinado material exerce um carregamento distribuído sobre a viga como mostra a figura abaixo. Determine a intensidade e a posição da resultante equivalente dessa carga.



3.2. REDUÇÕES DE UM SISTEMA SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

Solução:

- A área do diagrama do carregamento é um trapézio. Assim, dividiremos o carregamento trapezoidal em um carregamento retangular e triangular, como mostra a figura abaixo.



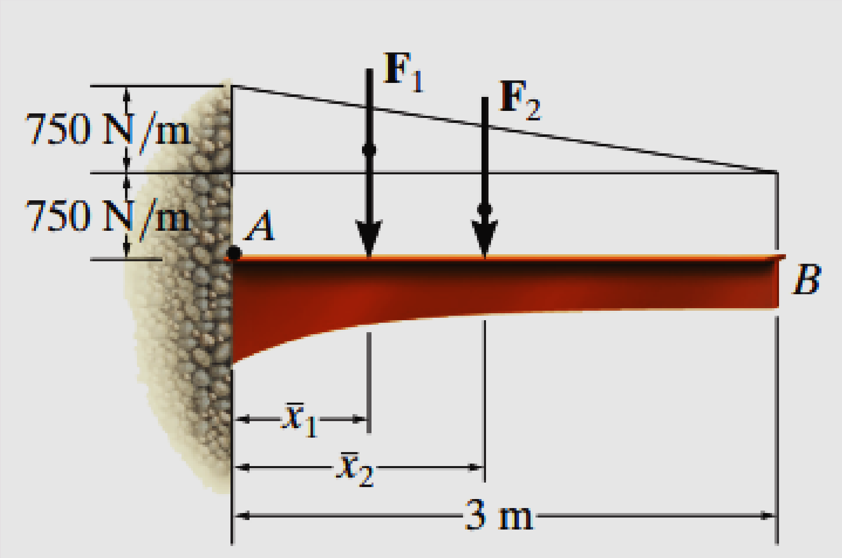
- A intensidade da força representada por cada um desses carregamentos é igual à sua área associada:

$$F_1 = \tfrac{1}{2}(3\text{ m})(750\text{ N/m}) = 1125\text{ N}$$

$$F_2 = (3\text{ m})(750\text{ N/m}) = 2250\text{ N}$$

3.2. REDUÇÕES DE UM SISTEMA SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

Solução:



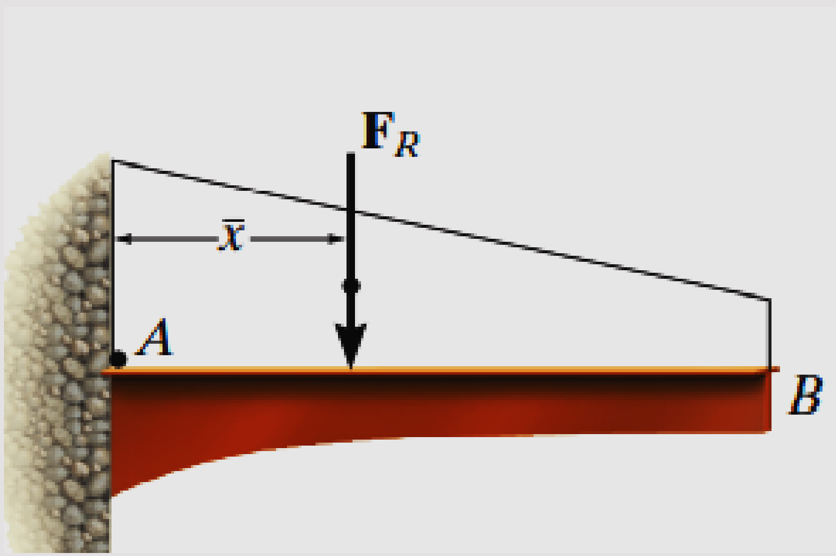
- As linhas de ação dessas forças paralelas agem através dos respectivos centroides de suas áreas associadas e, portanto, interceptam a viga em:

$$\bar{x}_1 = \tfrac{1}{3}(3\ \text{m}) = 1\ \text{m}$$

$$\bar{x}_2 = \tfrac{1}{2}(3\ \text{m}) = 1{,}5\ \text{m}$$

3.2. REDUÇÕES DE UM SISTEMA SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

Solução:



- As duas forças paralelas $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$ podem ser reduzidas a uma única resultante $\boldsymbol{F_R}$. A intensidade de $\boldsymbol{F_R}$ é:

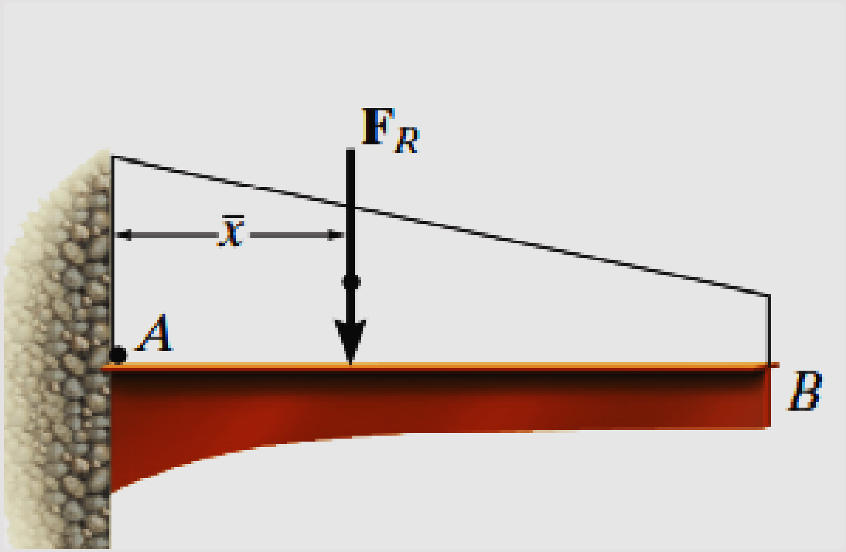
$$+\downarrow F_R = \Sigma F$$

$$F_R = 1125 + 2250 = 3{,}375(10^3)\ \text{N}$$

$$= 3{,}375\ \text{kN}$$

3.2. REDUÇÕES DE UM SISTEMA SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

Solução:



- Podemos determinar a posição de $\boldsymbol{F_R}$ em relação ao ponto *A*:

$$\curvearrowright + (M_R)_A = \Sigma M_A$$

$$\bar{x}(3375) = 1(1125) + 1{,}5(2250)$$

$$\bar{x} = 1{,}333 \text{ m}$$

ATÉ A PRÓXIMA!