Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

CENTRO DE GRAVIDADE, CENTRO DE MASSA E CENTRO GEOMÉTRICO

6.5. Teorema de Pappus e Guldinus

6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

- Os dois **teoremas de Pappus e Guldinus** são usados para encontrar a área da superfície e o volume de qualquer corpo de revolução;

- Eles foram desenvolvidos inicialmente por Pappus de Alexandria durante o quarto século d.C.;

- E reiterados bem depois pelo matemático suíço Paul Guldin, ou Guldinus (1577-1643).

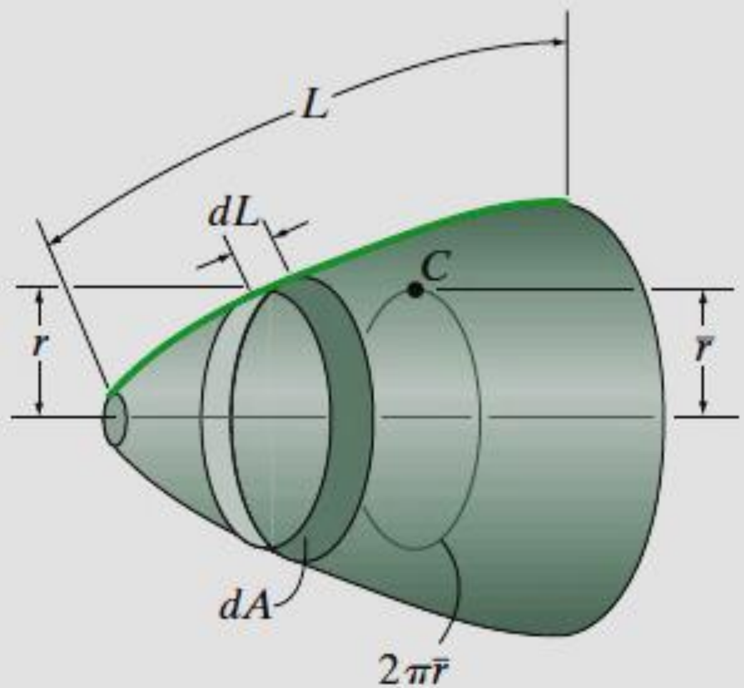
6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

Área da superfície:

- Se girarmos uma curva plana em torno de um eixo que não intercepte a curva, geraremos uma área da superfície de revolução;

- Por exemplo, a área da superfície na figura abaixo é formada girando-se a curva de comprimento $\boldsymbol{L}$ em torno do eixo horizontal;

- Para determinar essa área de superfície, primeiro vamos considerar o elemento de linha diferencial do comprimento $\boldsymbol{dL}$;



6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

Área da superfície:

- Se esse elemento for girado 2π radianos em torno do eixo, um anel tendo uma área de superfície será gerado como:

$$dA = 2\pi r\, dL$$

- Assim, a área da superfície do corpo inteiro é:

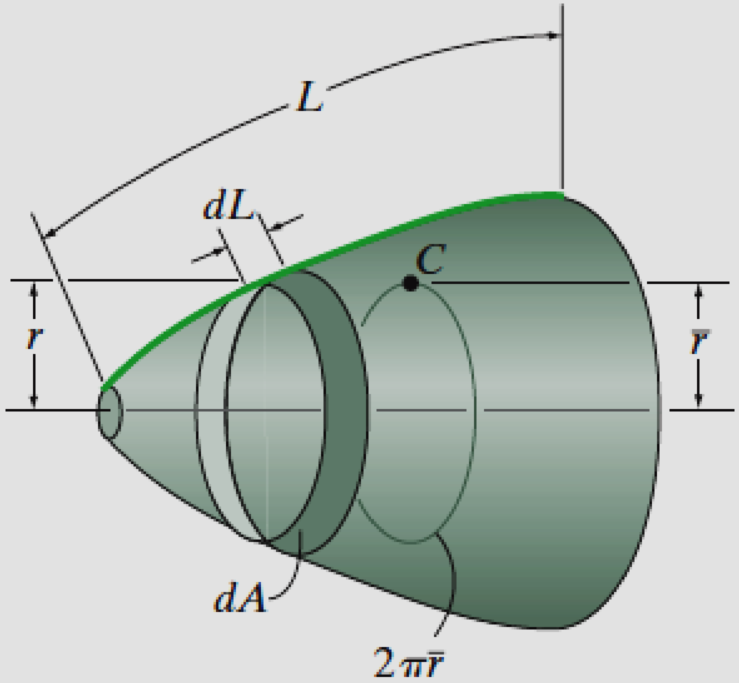
$$A = 2\pi \int r\, dL$$

- Como $\int r\, dL = \bar{r}\, L$, então: $\bar{r}L = \int \tilde{r}\, dL$

$$A = 2\pi\bar{r}L$$

- Se a curva for girada apenas por um ângulo de θ (radianos), então

$$\boxed{A = \theta\bar{r}L}$$



6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

Área da superfície:

$$\boxed{A = \theta\bar{r}L}$$

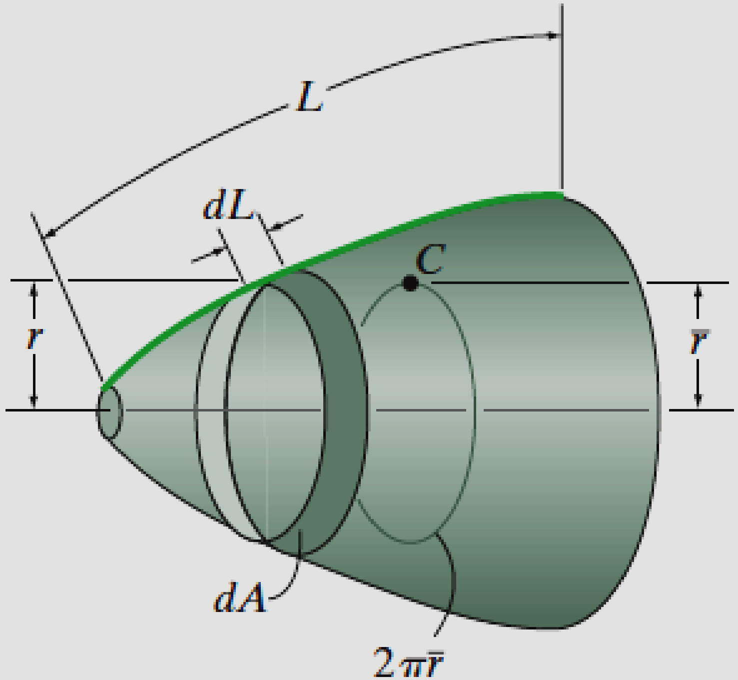
- **Onde:**

$\boldsymbol{A}$ − área da superfície de revolução;

$\boldsymbol{\theta}$ − ângulo de revolução medido em radianos, $\theta \leq 2\pi$;

$\boldsymbol{\bar{r}}$ − distância perpendicular do eixo de revolução ao centroide da curva geratriz;

$\boldsymbol{L}$ − comprimento da curva geratriz.

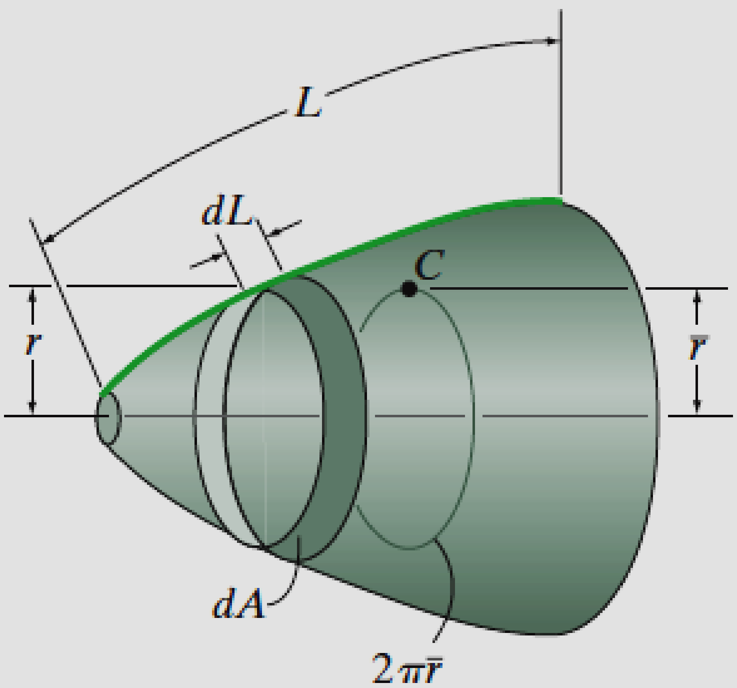


6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

Área da superfície:

- Portanto, **o primeiro teorema** de Pappus e Guldinus afirma que:

- *"A área de uma superfície de revolução é igual ao produto do comprimento da curva geratriz pela distância trafegada pelo centroide da curva na geração da área da superfície".*



$$\boxed{A = \theta \bar{r} L}$$

6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

Área da superfície:

$$A = \theta \bar{r} L$$

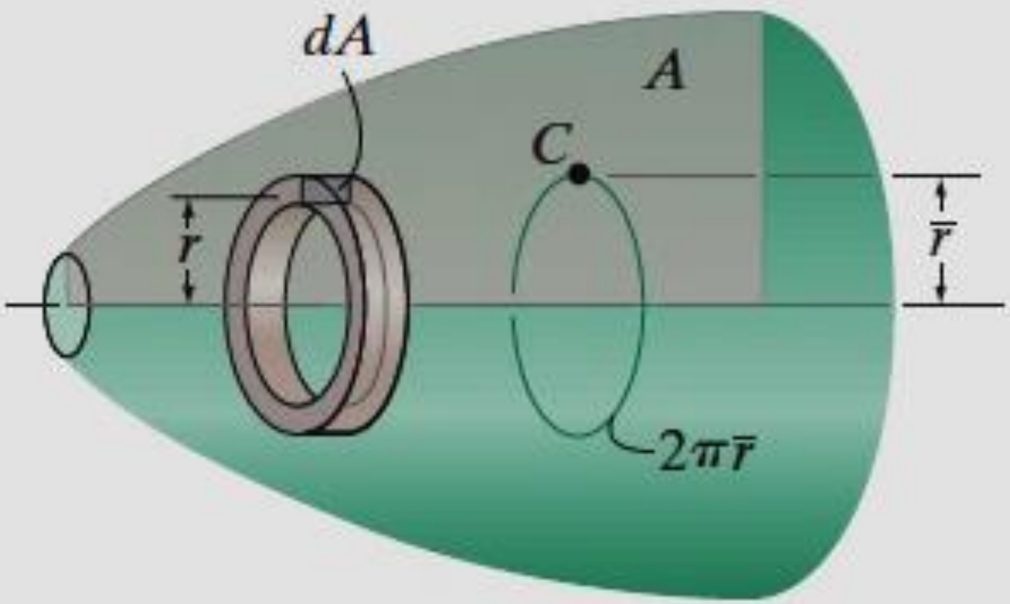
- A **quantidade de material** usada neste silo de armazenamento pode ser estimada usando-se o primeiro teorema de Pappus e Guldinus para determinar sua área de superfície.

6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

Volume:

- Um volume pode ser gerado pelo giro de uma área plana em torno de um eixo que não intercepte a área;

- Por exemplo, se girarmos a área sombreada ***A*** na figura abaixo em torno do eixo horizontal, ela gera o volume mostrado;



6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

Volume:

- Esse volume pode ser determinado primeiro pelo giro do elemento diferencial de área $\boldsymbol{dA}$ $\boldsymbol{2\pi}$ radianos em torno do eixo, de modo que é gerado um anel tendo o volume:

$$dV = 2\pi\, r\, dA$$

- O volume total é:

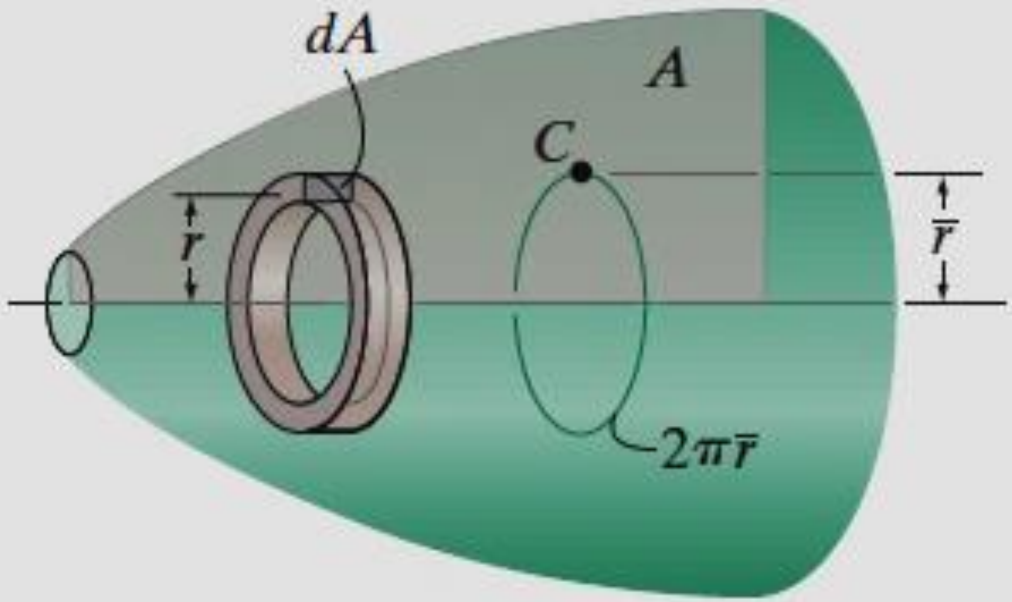
$$V = 2\pi \int r\, dA$$

- Porém, $\int r\, dA = \bar{r}A$, *logo teremos:*

$$V = 2\pi\, \bar{r} A$$

- Se a área só for girada por um ângulo $\boldsymbol{\theta}$ (radianos), então:

$$\boxed{V = \theta \bar{r} A}$$



6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

Volume:

$$\boxed{V = \theta \bar{r} A}$$

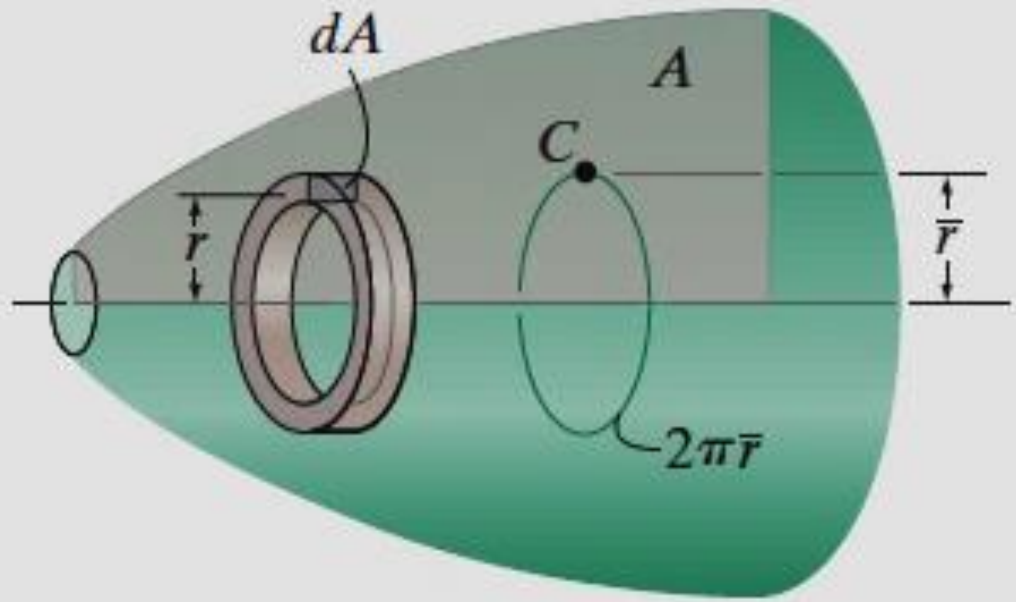
➢ **Onde:**

V – volume da área de revolução;

$\boldsymbol{\theta}$ – ângulo de revolução medido em radianos, $\theta \leq 2\pi$;

$\bar{\boldsymbol{r}}$ – distância perpendicular do eixo de revolução ao centroide da área geratriz;

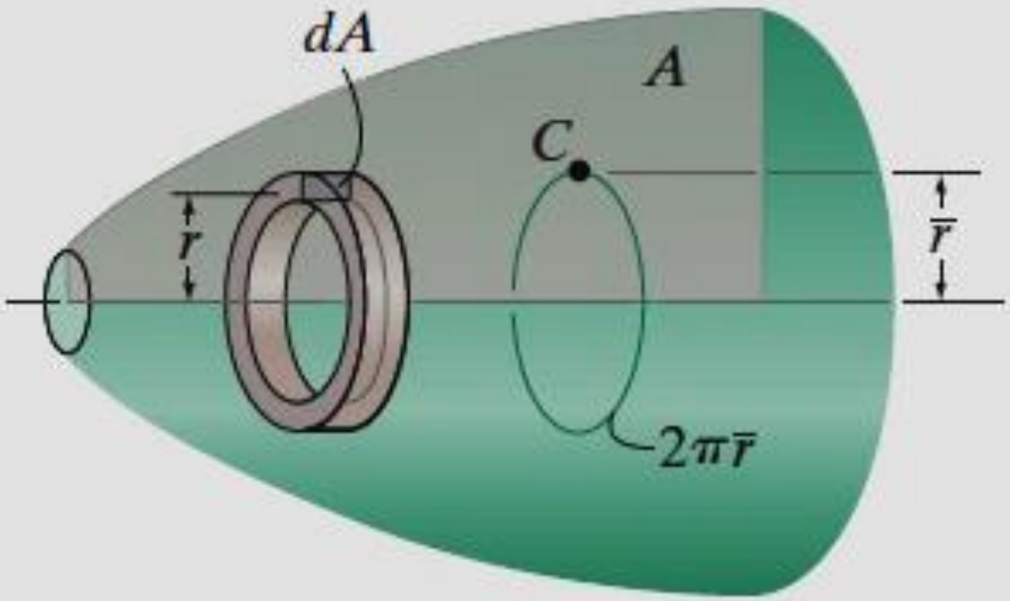
$\boldsymbol{A}$ – Área geratriz.



6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

Volume:

- Portanto, **o segundo teorema** de Pappus e Guldinus afirma que:
- *"O volume de um corpo de revolução é igual ao produto da área geratriz pela distância trafegada pelo centroide da área na geração do volume."*



$$\boxed{V = \theta \bar{r} A}$$

6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

Volume:

$$\boxed{V = \theta \bar{r} A}$$

- **O volume do fertilizante contido** dentro deste silo pode ser determinado por meio do segundo teorema de Pappus e Guldinus.

6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

Formatos compostos:

- Também podemos aplicar os dois teoremas anteriores a linhas ou áreas compostas de uma série de partes componentes;

- Neste caso, os totais de área de superfície ou de volume gerados são a adição das áreas de superfície ou de volumes gerados por cada uma das partes componentes;

- Se a distância perpendicular do eixo de revolução ao centroide de cada parte componente for $\tilde{r}$, então:

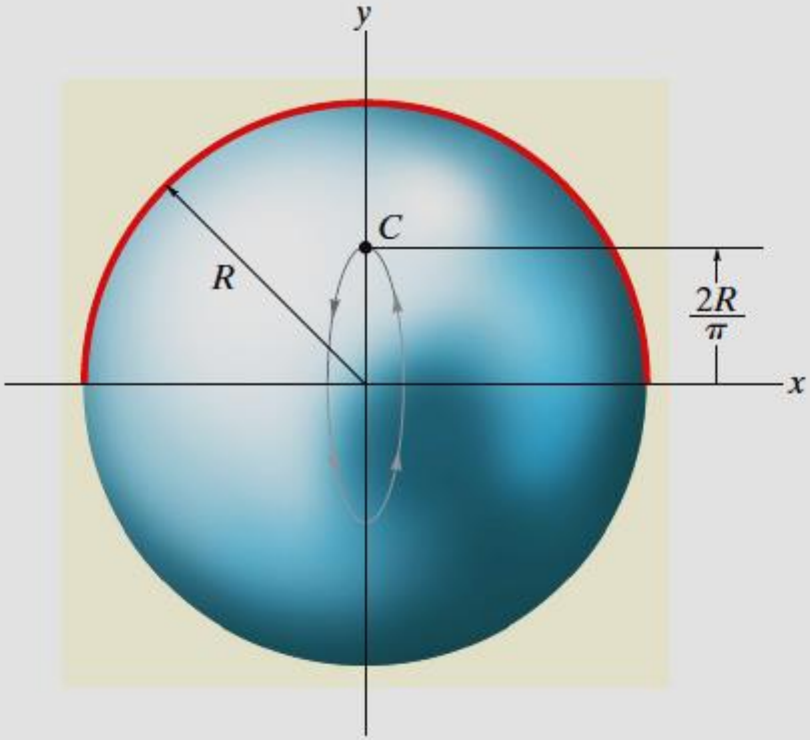
$$A = \theta \Sigma (\tilde{r} L)$$

$$V = \theta \Sigma (\tilde{r} A)$$

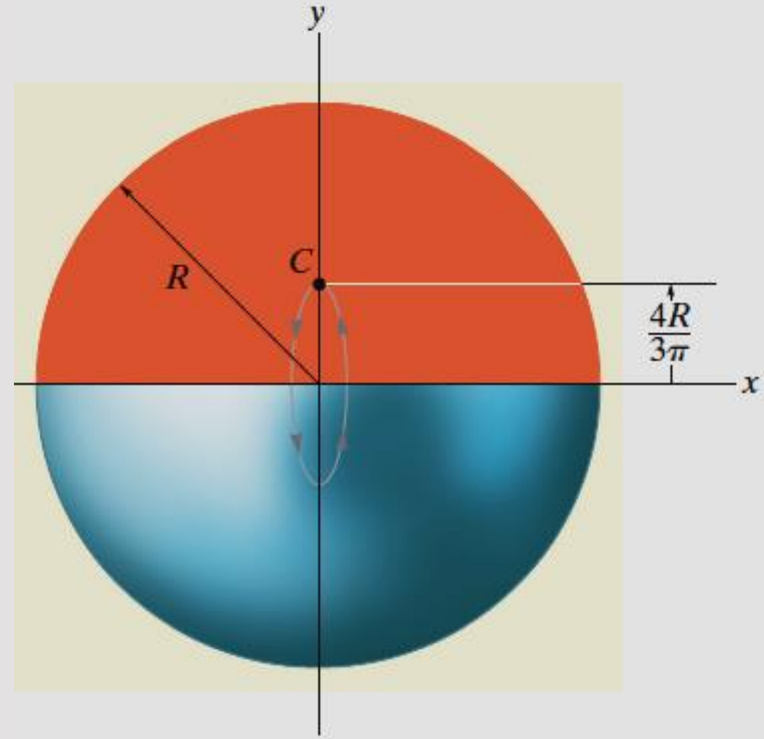
6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

Exercício 43:

Determine a área da superfície e o volume da esfera abaixo:



(a)



(b)

6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

Solução:

1) Área da superfície

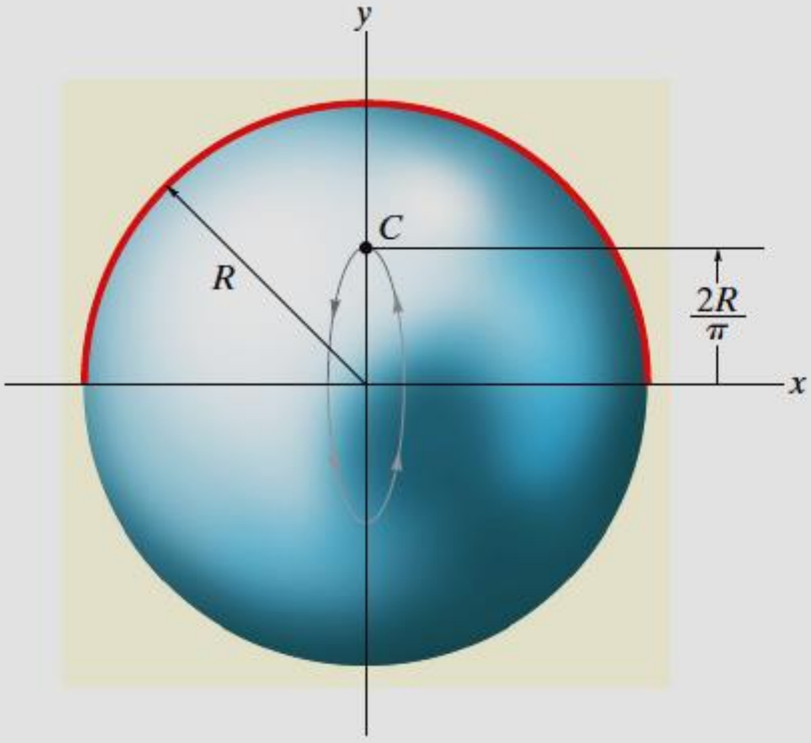
- A área da superfície da esfera é gerada quando um *arco* semicircular gira em torno do eixo $\boldsymbol{x}$;

- O centroide desse arco está localizado a uma distância $\bar{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{2R/\pi}$ a partir do eixo de revolução (eixo $\boldsymbol{x}$);

- Como o centroide se move por um ângulo de $\boldsymbol{\theta = 2\pi}\, rad$ para gerar a esfera, teremos:

$$A = \theta \bar{r} L$$

$$A = 2\pi\left(\frac{2R}{\pi}\right)\pi R = 4\pi R^2$$



(a)

6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

Solução:

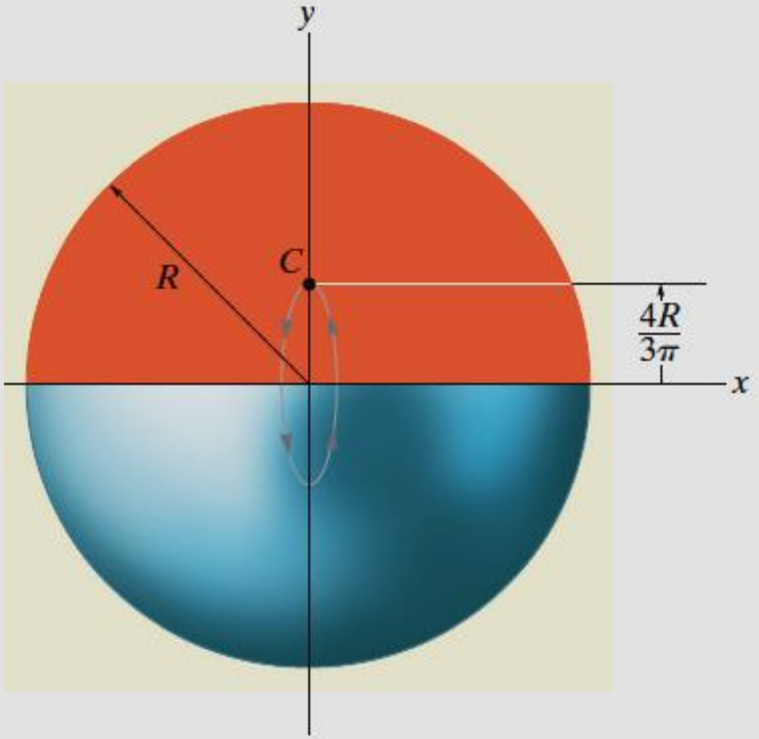
2) Volume

- O volume da esfera é gerado quando a *área* semicircular gira em torno do eixo $\boldsymbol{x}$;

- Determinando o centroide da área, ou seja, $\bar{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{4R/3\pi}$, teremos:

$$V = \theta \bar{r} A$$

$$V = 2\pi\left(\frac{4R}{3\pi}\right)\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

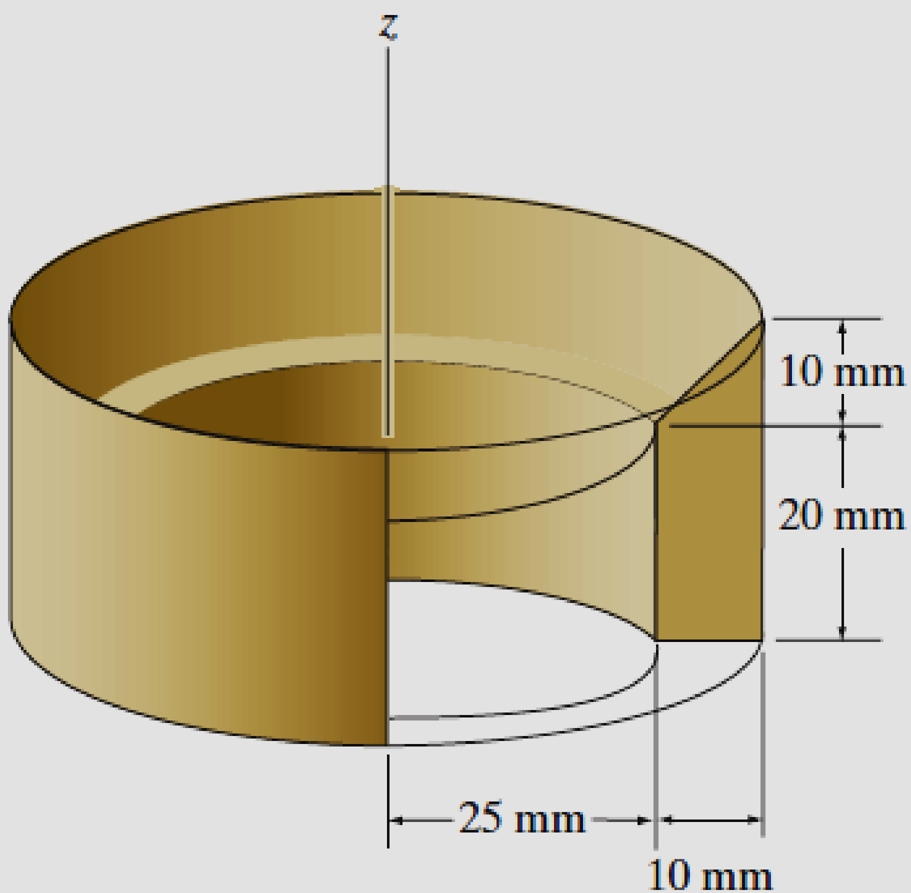


(b)

6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

Exercício 44:

- Determine a área da superfície e o volume do sólido completo mostrado na figura abaixo.



6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

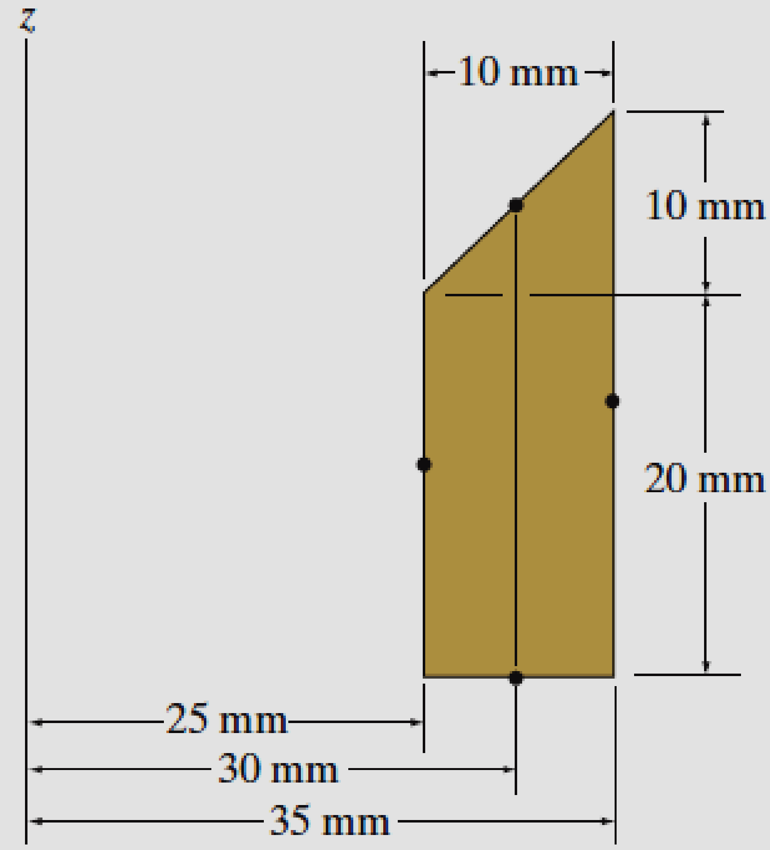
Solução:

1) Área da superfície

- A área da superfície é gerada ao girar os quatro segmentos de linha 2π radianos em torno do eixo z;

- As distâncias do centroide de cada segmento até o eixo z podemos ser conferidas na figura ao lado;

- Assim, temos que:



$$A = 2\pi\Sigma\tilde{r}L$$

$$= 2\pi\left[(25\text{ mm})(20\text{ mm}) + (30\text{ mm})\left(\sqrt{(10\text{ mm})^2 + (10\text{ mm})^2}\right)\right.$$

$$\left. + (35\text{ mm})(30\text{ mm}) + (30\text{ mm})(10\text{ mm})\right]$$

$$= 14290\text{ mm}^2$$

6.5. TEOREMA DE PAPPUS E GULDINUS

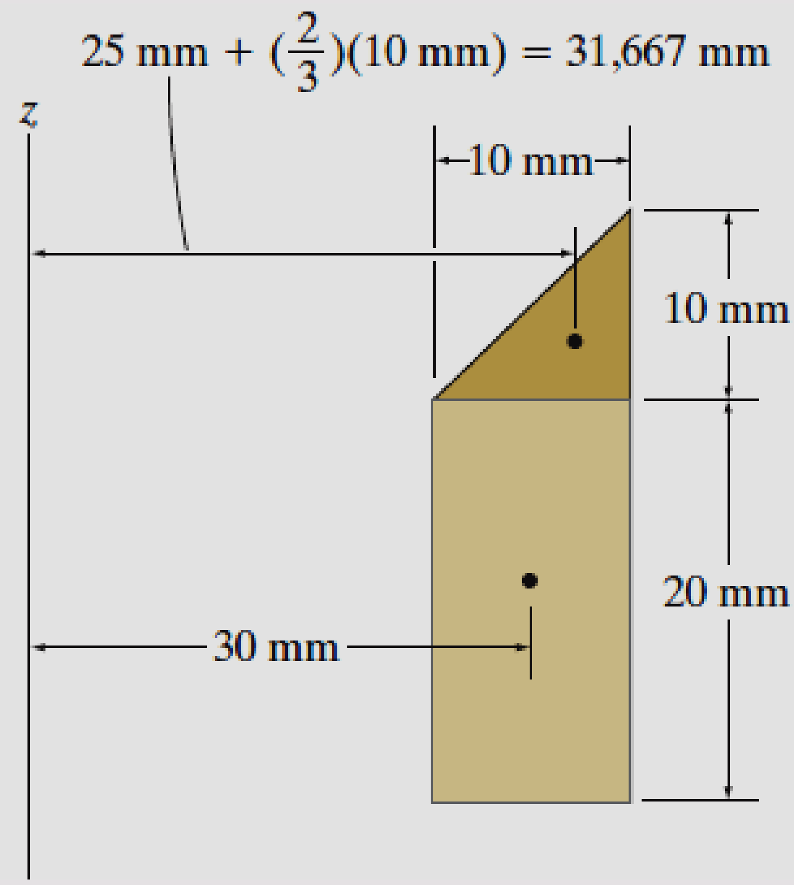
Solução:

2) Volume

- O volume do sólido é gerado quando os dois segmentos de área giram 2π radianos em torno do eixo z;

- As distâncias a partir do centroide de cada segmento até o eixo z também aparecem na figura;

- Assim, temos que:



$$V = 2\pi\Sigma\tilde{r}A$$

$$= 2\pi\left\{(31{,}667\text{ mm})\left[\frac{1}{2}(10\text{ mm})(10\text{ mm})\right] + (30\text{ mm})(20\text{ mm})(10\text{ mm})\right\}$$

$$= 47648\text{ mm}^3$$

ATÉ A PRÓXIMA!