Instituto de Tecnologia - UFPA
Faculdade de Eng. Mecânica

Disciplina: Mecânica dos Sólidos II

Parte 1: Transformações de Tensões

Professor: Leonardo Dantas Rodrigues

Transformações de Tensões

Técnica de fotoelasticidade aplicada a um gancho de guindaste. As franjas apontam a direção e magnitude das tensões principais.

Estado de Tensão (Tensor de Tensões)

• O estado de tensões mais geral em um dado ponto de interesse pode ser representado por **seis componentes,** que podem ser dispostos em uma matriz chamada **tensor de tensões**:

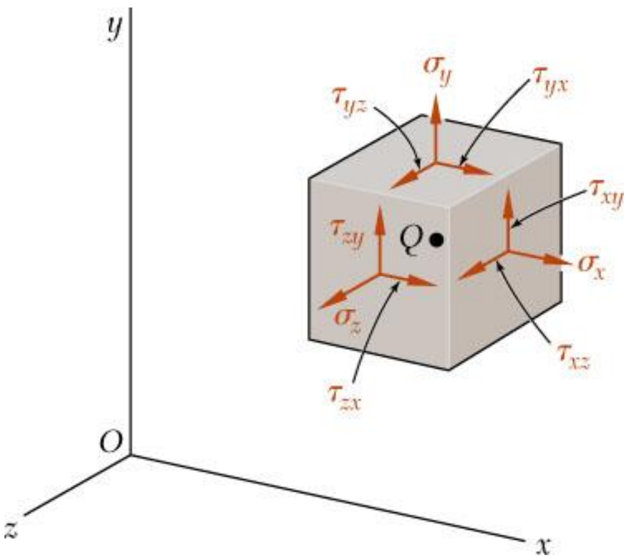


Figura 1.1: Estado de tensão no sistema x-y-z, representado em um cubo elementar

Tensões Normais

Tensões Cisalhantes

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Sendo que, por equilíbrio:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \; \tau_{xy} = \tau_{yx} \text{ e } \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Sinal da tensão de cisalhamento: positiva quando estiver para cima ou para a direita nas faces positivas do cubo elementar **(x^+, y^+ e z^+)** e para baixo e para a esquerda nas faces negativas **(x^-, y^- e z^-)**.

Estado de Tensão (Tensor de Tensões)

- O mais comum é se trabalhar no sistema de eixos x-y-z. Porém, não são raras as situações em que é necessário o cálculo do estado de tensão em outras direções.

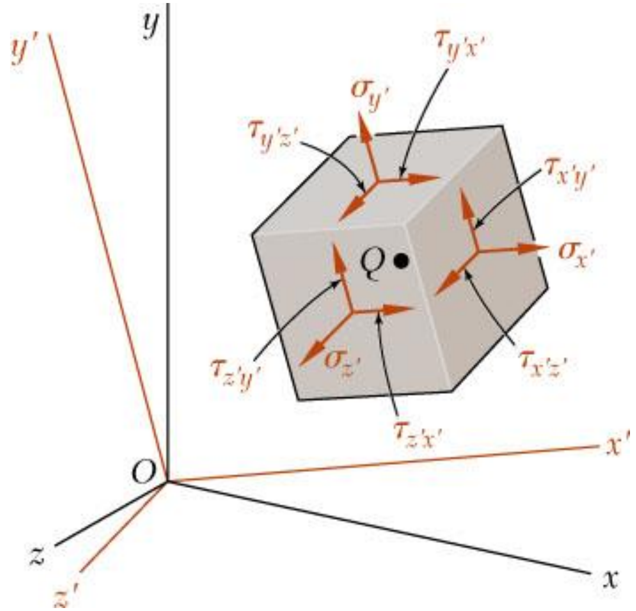


Figura 1.2: Estado de tensão em um sistema aleatório x'-y'-z'

$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix}$$

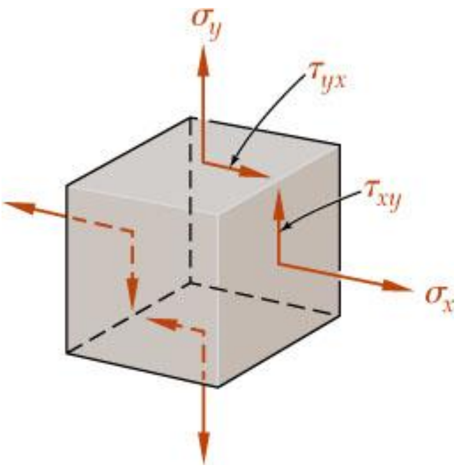
Sendo que, por equilíbrio:

$\tau_{x'z'} = \tau_{z'x'}$, $\tau_{x'y'} = \tau_{y'x'}$ e $\tau_{y'z'} = \tau_{z'y'}$

Uma vez obtido o estado de tensão em um sistema de referência, pode-se obter facilmente o estado de tensão em quaisquer outras direções.

Estado Plano de Tensão

Estado de tensões em que duas faces do paralelepípedo elementar estão livres de qualquer tensão. A grande maioria dos carregamentos reais podem ser representados por estados plano de tensões.



$$\sigma_x, \sigma_y \text{ e } \tau_{xy}$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Figura 1.3: Representação de um estado plano de tensões

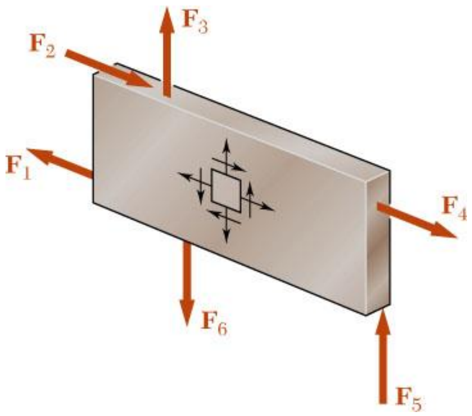


Figura 1.4: Exemplo de uma placa fina

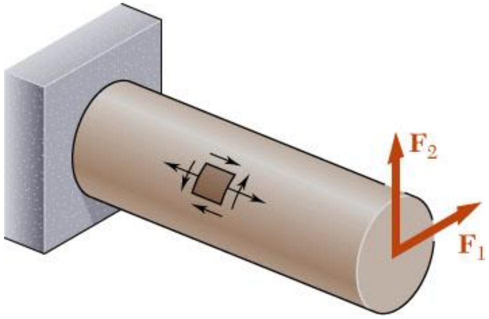


Figura 1.5: Exemplo de um eixo maciço

Transformação do Estado Plano de tensão

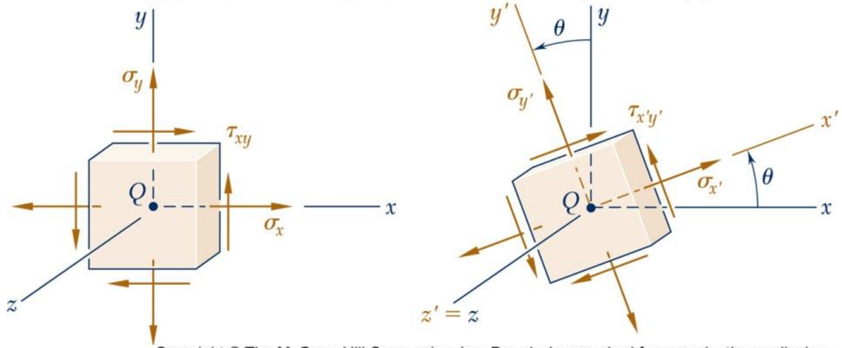


Figura 1.5: Estados planos de tensões nos planos: a) x-y; e b) x'-y'

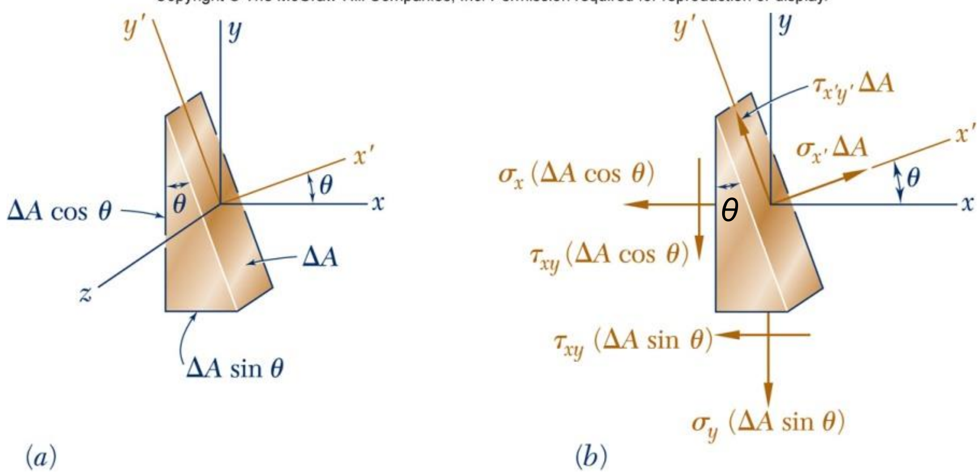


Figura 1.6: Representação mais usual, através de um triângulo retângulo com hipotenusa igual às arestas do cubo original.

Aplicando equilíbrios de força na fig. 1.6b, tem-se:

$$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow \sigma_{x'}\Delta A - \sigma_x(\Delta A\cos\theta)\cos\theta - \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)sen\theta$$

$$-\sigma_y(\Delta A sen\theta)sen\theta - \tau_{xy}(\Delta A sen\theta)\cos\theta = 0 \qquad (1.1)$$

$$\sum F_{y'} = 0 \Rightarrow \tau_{x'y'}\Delta A + \sigma_x(\Delta A\cos\theta)sen\theta - \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)\cos\theta$$

$$-\sigma_y(\Delta A sen\theta)\cos\theta + \tau_{xy}(\Delta A sen\theta)sen\theta = 0$$

Transformação do Estado Plano de tensão

Resolvendo as equações (1.1) para $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$, tem-se:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \mathrm{sen}^2\theta + 2\tau_{xy} \mathrm{sen}\,\theta \cos\theta \qquad (1.2)$$

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \mathrm{sen}\,\theta \cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta) \qquad (1.3)$$

Usando as seguintes relações trigonométricas:

$$\mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta \cos\theta \qquad \cos 2\theta = (\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta) \qquad (1.4)$$

$$\cos^2\theta = \frac{(1+\cos 2\theta)}{2} \qquad \mathrm{sen}^2\theta = \frac{(1-\cos 2\theta)}{2} \qquad (1.5)$$

Transformação do Estado Plano de tensão

As equações (1.2) e (1.3) podem ser reescritas como:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy} sen 2\theta \qquad (1.6)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sen 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (1.7)$$

Para determinar $\sigma_{y'}$, basta substituir θ por $\theta + 90^o$ em (1.6):

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy} sen 2\theta \qquad (1.8)$$

Transformação do Estado Plano de tensão

Exemplo 1.1: O estado plano de tensão em um ponto de uma estrutura é dado pelo elemento mostrado na figura 1.7. Determine o estado de tensão no ponto em outro elemento, orientado a 30º no sentido horário em relação à posição mostrada.

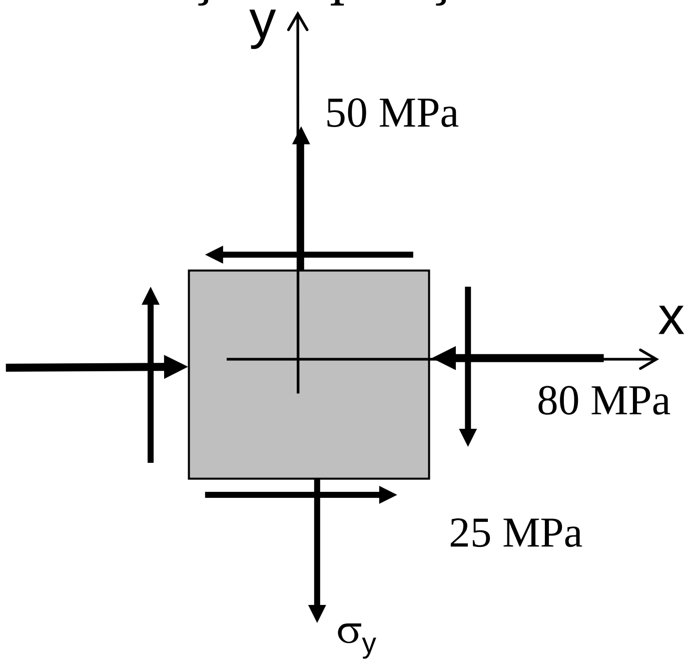


Figura 1.7

Pela convenção de sinal estabelecida, o estado de tensões em x-y tem as seguintes componentes:

$$\sigma_x = -80MPa \qquad \sigma_y = 50MPa \qquad \tau_{xy} = -25MPa$$

Transformação do Estado Plano de tensão

Exemplo 1.1: Solução

Basta aplicar as equações 1.6 a 1.8, tendo como base a figura 1.8 e a convenção estabelecida de que ângulos no sentido horário são negativos.

$$\sigma_{x'} = \frac{-80+50}{2} + \frac{-80-50}{2}\cos 2(-30^o) + (-25)sen2(-30^o)$$

$$\boxed{\sigma_{x'} = -25,8MPa}$$

$$\sigma_{y'} = \frac{-80+50}{2} + \frac{-80-50}{2}\cos 2(60^o) + (-25)sen2(60^o)$$

$$\boxed{\sigma_{y'} = -4,15MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{-80-50}{2}sen2(-30^o) + (-25)\cos 2(-30^o)$$

$$\boxed{\tau_{x'y'} = -68,8MPa}$$

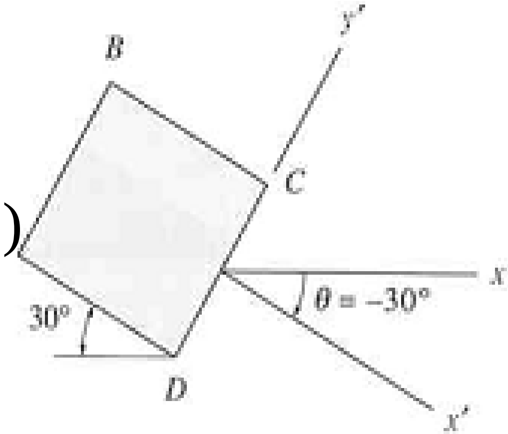


Figura 1.8

Tensões Principais no Plano

Em geral, uma das informações mais relevantes na análise de tensões é a orientação dos planos onde ocorrem as **tensões normais máxima e mínima**, a **máxima tensão de cisalhamento**, e os valores dessas tensões.

Para encontrar a orientação das **tensões normais máxima e mínima** (no plano), uma das formas é derivar a equação (1.6) em relação a θ e igualar o resultado a zero:

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.\cancel{2}.sen(2\theta) + \tau_{xy}.\cancel{2}.\cos(2\theta) = 0$$

Isolando os termos relacionados θ, tem-se:

$$tg(2\theta_p) = \frac{\tau_{xy}}{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}} \qquad (1.9)$$

A equação (1.9) fornece duas soluções $2\theta_{p1}$ e $2\theta_{p2}$, defasados em 180º. Sendo que, $\boldsymbol{\theta_{p1}}$ **e** $\boldsymbol{\theta_{p2}}$ são as direções das tensões normais máxima e mínima, respectivamente, em relação ao semieixo positivo x.

Tensões Principais no Plano

Substituindo os valores de θ_{p1} e θ_{p2} na equação (1.6), encontram-se os valores das tensões **normais máxima e mínima.**

O seno e o cosseno de $2\theta_{p1}$ e $2\theta_{p2}$ são obtidos a partir dos triângulos da figura (1.9), baseado na eq (1.9). Tem-se, para θ_{p1}:

$$sen(2\theta_{p1}) = \tau_{xy} \Bigg/ \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2}$$

$$\cos(2\theta_{p1}) = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \Bigg/ \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2} \qquad (1.10)$$

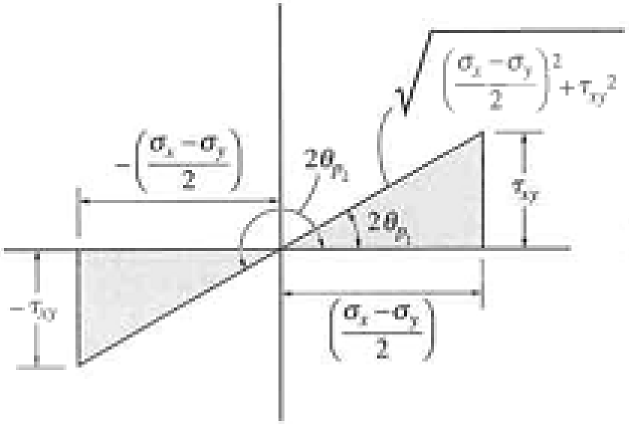


Figura 1.9

Para θ_{p2}:

$$sen(2\theta_{p2}) = -\tau_{xy} \Bigg/ \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2}$$

$$\cos(2\theta_{p2}) = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \Bigg/ \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2} \qquad (1.11)$$

Tensões Principais no Plano

Substituindo os dois conjuntos de relações trigonométricas (1.10) e (1.11) na equação (1.6), temos:

$$\sigma_{1,2} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} \qquad (1.12)$$

A equação 1.12 define os valores das tensões normais máxima e mínima no plano. Estas são chamadas **tensões principais**.

Nas faces onde atuam as tensões principais, o cisalhamento é nulo (figura 1.10)

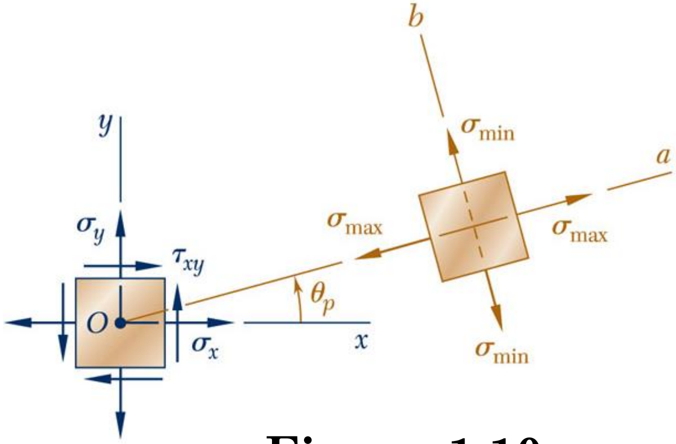


Figura 1.10

Pode-se também chegar às equações 1.12 calculando os ***autovalores*** *do tensor de tensões no estado plano. As direções de atuação das tensões principais são obtidas pelos* ***autovetores****.* ***(Exercício: Chegar à equação 1.12 pelos autovalores)***

Tensão de cisalhamento Máxima no Plano

Para determinar a orientação do elemento em cujas faces atua a tensão máxima de cisalhamento no plano, deriva-se a equação (1.7) e iguala-se o resultado a zero. Chega-se então a:

$$tg(2\theta_c) = -\frac{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}}{\tau_{xy}} \qquad (1.13)$$

As duas raízes da equação (1.13), θ_{c1} e θ_{c2} são defasados 45º dos ângulos θ_{p1} e θ_{p2} determinados anteriormente. Ou seja, **a orientação do elemento no qual atua a tensão de cisalhamento máxima no plano está a 45º do elemento onde atuam as tensões principais.**

Usando procedimento similar ao aplicado anteriormente para as tensões principais. Pode-se chegar ao valor da **tensão máxima de cisalhamento no plano,** substituindo o seno e o cosseno de $2\theta_c$ na equação (1.7):

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}} \qquad (1.14)$$

Tensão de cisalhamento Máxima no Plano

Substituindo ainda os valores de θ_c na equação (1.6), chega-se a:

$$\sigma_{med} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \qquad (1.15)$$

A tensão normal média atua nas faces onde atua a máxima tensão de cisalhamento no plano (figura 1.11).

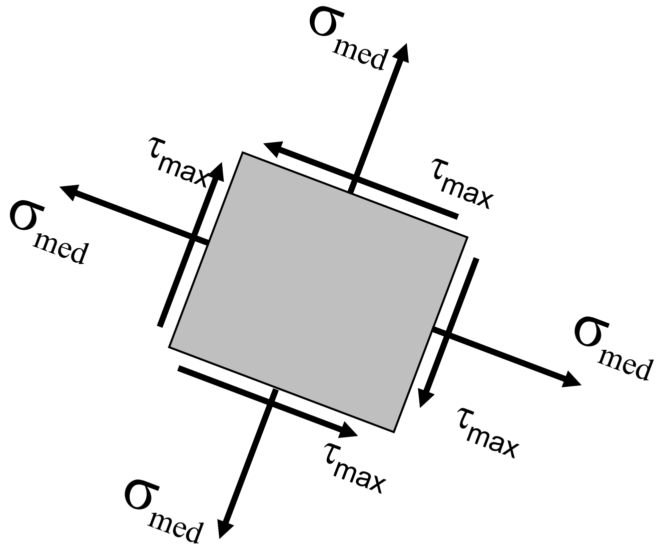


Figura 1.11

Tensões Principais e Tensão de cisalhamento Máxima no Plano

Exemplo 1.2: Quando a carga de torção T é aplicada à barra da figura 1.12, produz um estado de tensões de cisalhamento puro no material. Determinar: a) A tensão de cisalhamento máxima no plano; b) a tensão normal média; e c) As tensões principais no plano.

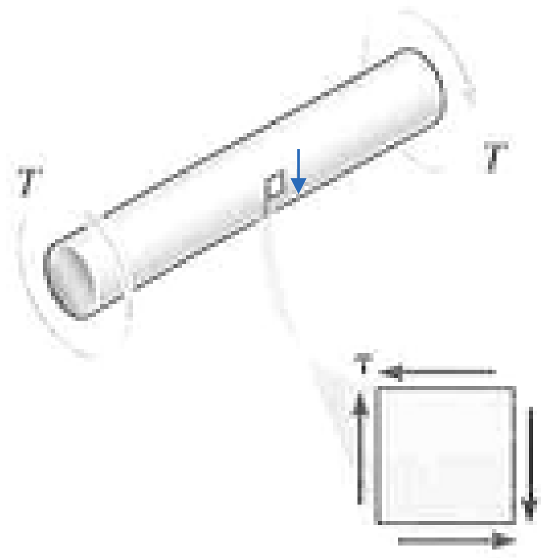


Figura 1.12

Pela convenção de sinal estabelecida, o estado de tensões em x-y tem as seguintes componentes:

$$\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = -\tau$$

Tensões Principais e Tensão de cisalhamento Máxima no Plano

Exemplo 1.2: SOLUÇÃO

- Tensão de cisalhamento máxima no plano:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} = \pm\tau$$

Os sinais negativo e positivo estão relacionados com a convenção estabelecida. Os sinais sempre se alternarão em positivo e negativo entre faces defasadas 90º para que haja o equilíbrio (testar na equação 1.7).

- Tensão normal média:

$$\sigma_{med} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} = \frac{(0+0)}{2} = 0$$

TENSÕES PRINCIPAIS E TENSÃO DE CISALHAMENTO MÁXIMA NO PLANO

Exemplo 1.2: SOLUÇÃO

- Tensões principais e suas orientações:

$$\sigma_{1,2} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} = 0 \pm \sqrt{0 + \tau^2} = \pm\tau$$

$$tg(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} = \frac{-2\tau}{(0-0)} \Rightarrow \theta_p = -45^o \ e \ \ 45^o$$

Para verificar qual desses ângulos é θ_{p1} e qual é θ_{p2} substitui-se um deles na equação (1.6):

$$\sigma_{x'} = 0 + 0\cos(2.45^o) - \tau sen(2.45^o) = -\tau$$

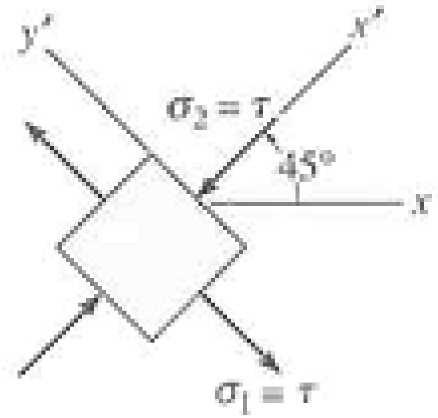


Figura 1.13

Portanto θ_{p1} = -45^0 e θ_{p2} = 45^o, como mostra a figura 1.13.

Tensões Principais e Tensão de cisalhamento Máxima no Plano

Exemplo 1.3: Quando a carga axial P é aplicada à barra da figura 1.14, produz um esforço de tração no material, como mostrado. Determinar: a) as tensões principais no plano; b) tensão de cisalhamento máxima no plano.

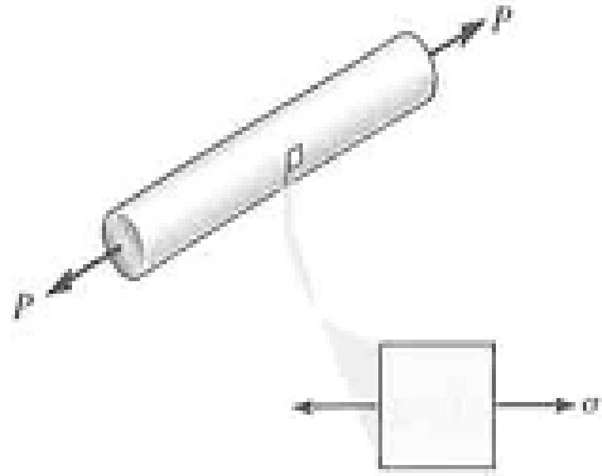


Figura 1.14

Pela convenção de sinal estabelecida, o estado de tensões em x-y tem as seguintes componentes:

$$\sigma_x = \sigma \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = 0$$

Tensões Principais e Tensão de cisalhamento Máxima no Plano

Exemplo 1.3: Solução

- Tensões principais:

$$\sigma_{1,2} = \left(\frac{\sigma + 0}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma - 0}{2}\right)^2} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma \; e \; \sigma_2 = 0$$

A direção das tensões principais está também mostrada na figura 1.12: **θ_{p1} = 0º e θ_{p2} = 90º**.

- Tensão de cisalhamento máxima no plano e suas direções:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma - 0}{2}\right)^2 + 0^2} = \pm\frac{\sigma}{2}$$

$$tg(2\theta_c) = -\frac{(\sigma - 0)}{2.0} \Rightarrow \theta_c = 45^o \; e \, 135^o$$

Tensões Principais e Tensão de cisalhamento Máxima no Plano

Exemplo 1.3: Solução

Para verificar em quais faces atuam as tensões cisalhantes +σ/2 e -σ/2, substitui-se um dos ângulos θ_c na equação (1.7):

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma - 0}{2} sen(2.45^o) + 0.\cos 2.45^o = -\frac{\sigma}{2}$$

Portanto, a tensão negativa -σ/2 atua na face perpendicular ao eixo x', como mostra a figura 1.15.

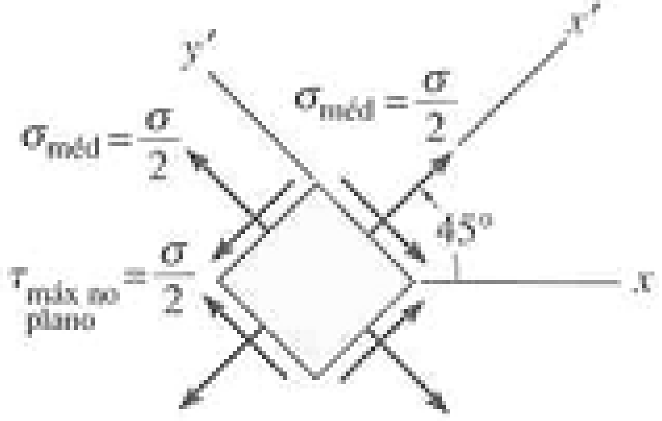


Figura 1.15

TENSÕES PRINCIPAIS E TENSÃO DE CISALHAMENTO MÁXIMA NO PLANO

Exercício 1.1: Em um trilho foi determinado o estado de tensões no ponto A, mostrado na figura. Para este mesmo ponto determine o estado de tensões principais e de cisalhamento máximo no plano. Indique esses estados em elementos adequadamente orientados.

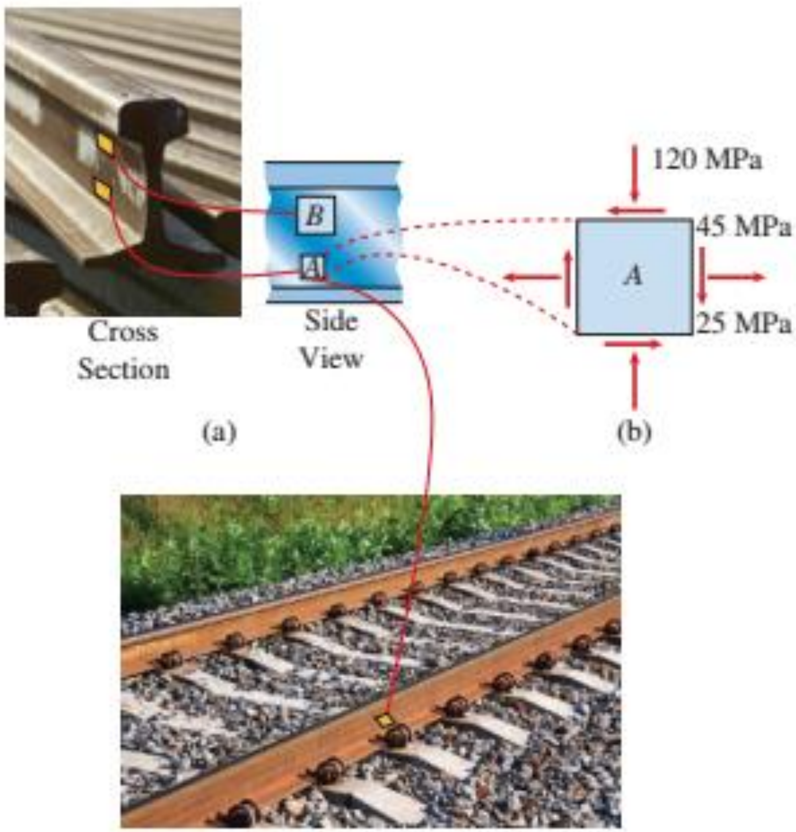


Figura 1.16

Tensões Principais e Tensão de cisalhamento Máxima no Plano

Exercício 1.2: Um determinado ponto em um chassis de um carro tem o estado de tensão mostrado na figura. Para este mesmo ponto determine o estado de tensões principais e de cisalhamento máximo no plano. Indique esses estados em elementos adequadamente orientados tendo x como referência.

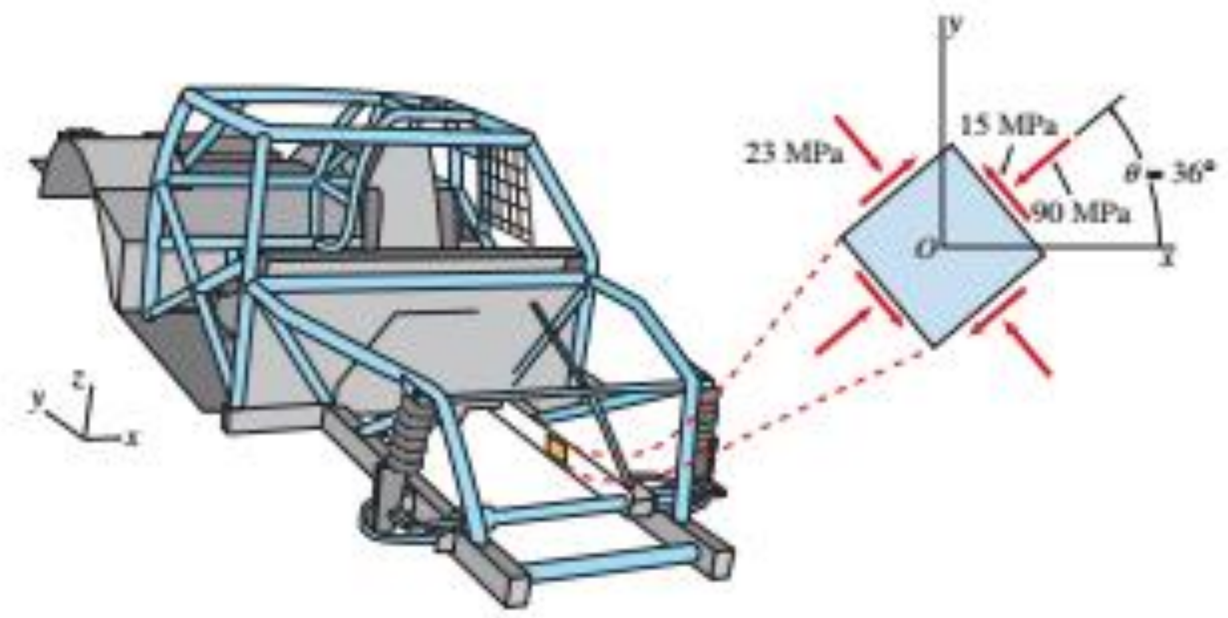


Figura 1.17

Tensões Principais e Tensão de cisalhamento Máxima no Plano

Exercício 1.3: Um tubo com diâmetro externo igual a 304,8 mm é fabricado a partir de uma placa com espessura de 6,35 mm que é soldada formando uma hélice orientada a 22,5º em relação ao plano perpendicular ao eixo do tubo. Sabendo que uma força axial P de 178 kN e que um torque de 9038 kN.mm são aplicados ao tubo, segundo as direções mostradas na figura 1.18, determine as tensões normal e tangencial à solda.

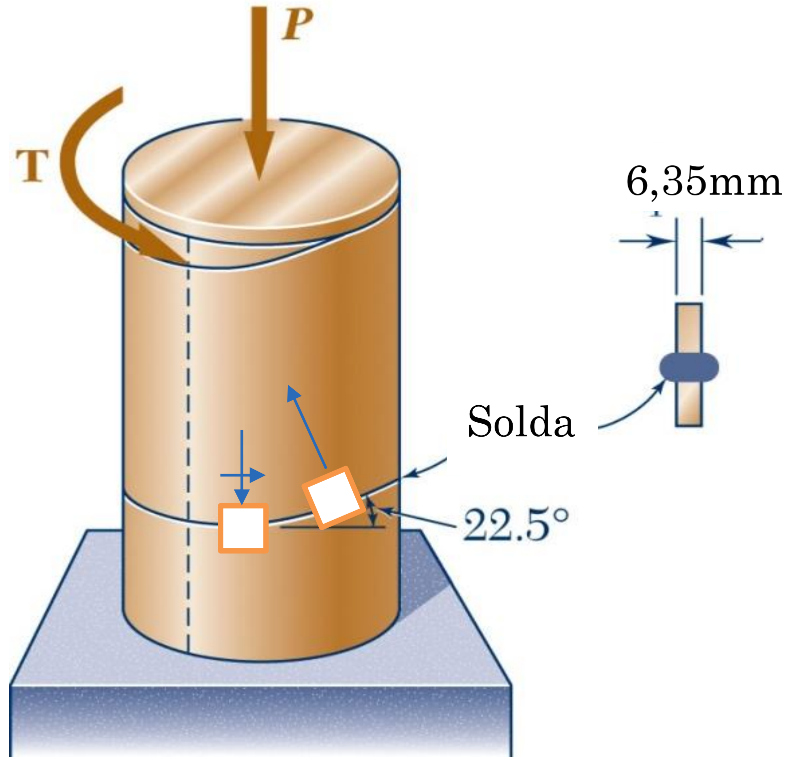


Figura 1.18

Tensões Principais e Tensão de cisalhamento Máxima no Plano

Exercício 1.4: Uma viga de seção retangular está submetida a uma carga inclinada (figura 1.19). Determinar as tensões principais e a de cisalhamento máxima no plano, que se desenvolvem nos pontos A e B. Mostrar os resultados em elementos adequadamente orientados.

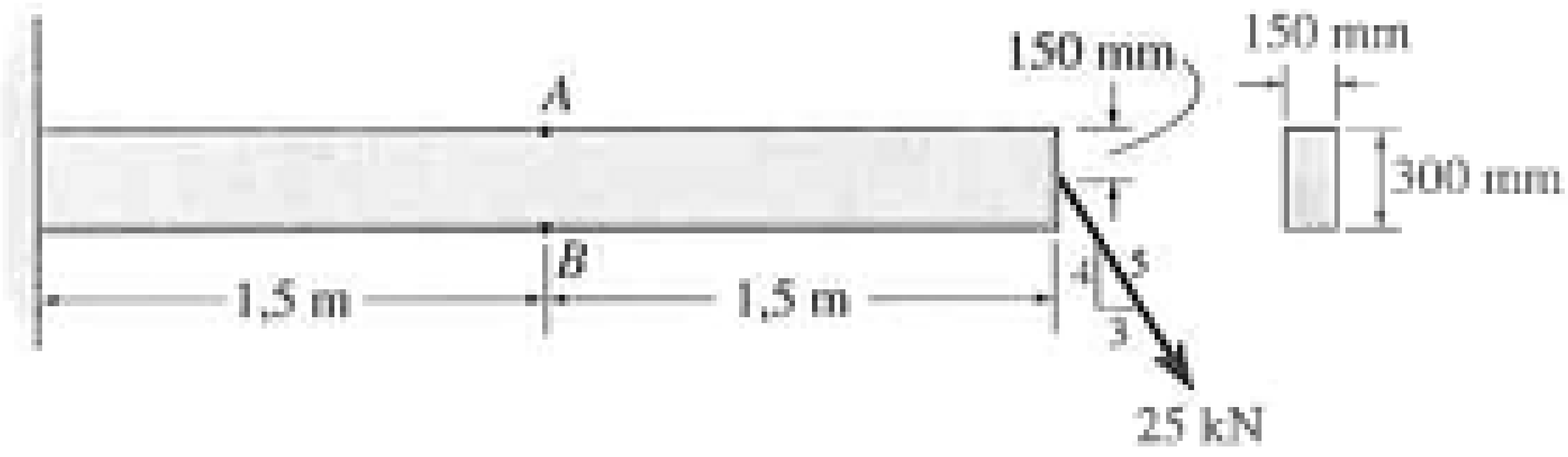


Figura 1.19

Círculo de Mohr – Estado plano de tensões

Desenvolvido pelo engenheiro alemão **Otto Mohr**, esta é uma metodologia gráfica, relativamente simples, para encontrar tensões em diferentes orientações e mesmo as tensões principais e máxima de cisalhamento.

Construção do Círculo de Mohr:

- Considerando o elemento da figura 1.10.

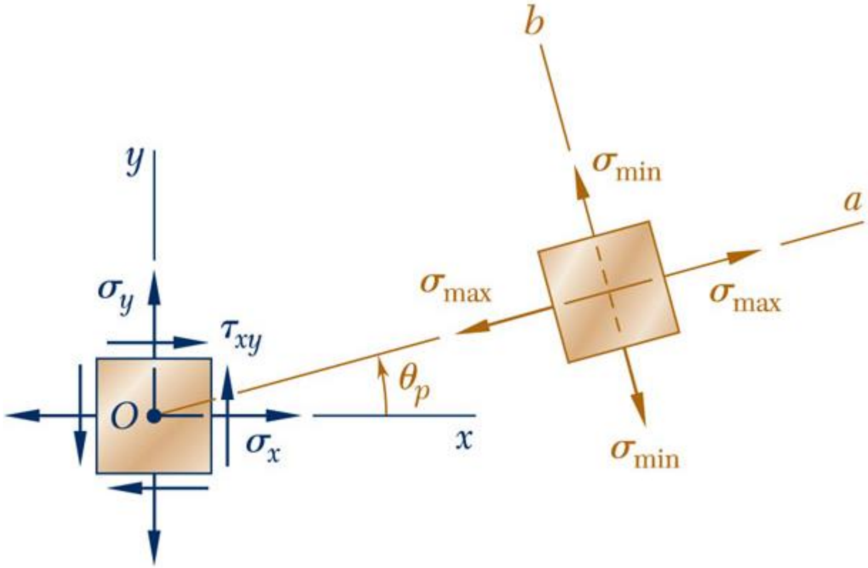


Figura 1.10 (repetida)

Círculo de Mohr – Estado plano de tensões

Construção do Círculo de Mohr (continuação): (figura 1.20)

• Primeiro define-se o sistema de eixos, sendo as tensões normais localizadas na abscissa (**σ**) e as de cisalhamento localizadas na ordenada (**τ**);

• Representamos um ponto **X** (σ_x, $-\tau_{xy}$) e um ponto **Y** (σ_y, τ_{xy}). Se τ_{xy} for positiva, como na figura 1.10, o ponto X estará localizado abaixo do eixo **σ** e o Y acima, ocorrendo o contrário em caso de τ_{xy} negativa;

• Unindo os pontos X e Y por uma reta definimos o ponto C, que é a interseção do segmento XY com o eixo **σ.**

• Traça-se então o círculo, de centro C e diâmetro XY.

Círculo de Mohr – Estado plano de tensões

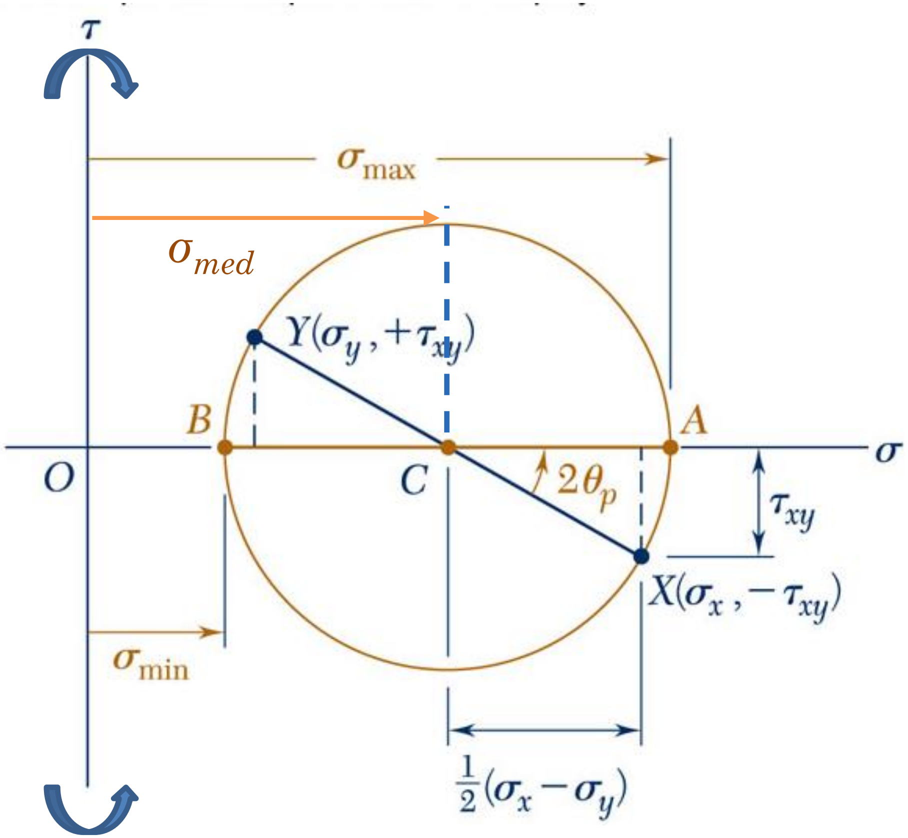


Figura 1.20

Observações importantes:

1. A abscissa do centro C do círculo é igual à tensão média;
2. O raio do círculo é igual à tensão de cisalhamento máxima no plano;
3. Concluímos assim que o círculo construído pode representar o estado de tensões apresentado na figura 1.10 em qualquer orientação;
4. Assim, as abscissas dos pontos A e B em que o círculo intercepta o eixo **σ** representam, respectivamente, as tensões principais $\boldsymbol{\sigma_{max}}$ **($\boldsymbol{\sigma_1}$)** e $\boldsymbol{\sigma_{min}}$ **($\boldsymbol{\sigma_2}$);**

CÍRCULO DE MOHR – ESTADO PLANO DE TENSÃO

Pode-se construir o Círculo de Mohr a partir de qualquer estado de tensão $\sigma_{x'}$,$\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$, usando os mesmo procedimentos estabelecidos anteriormente, como mostrado na figura (1.21).

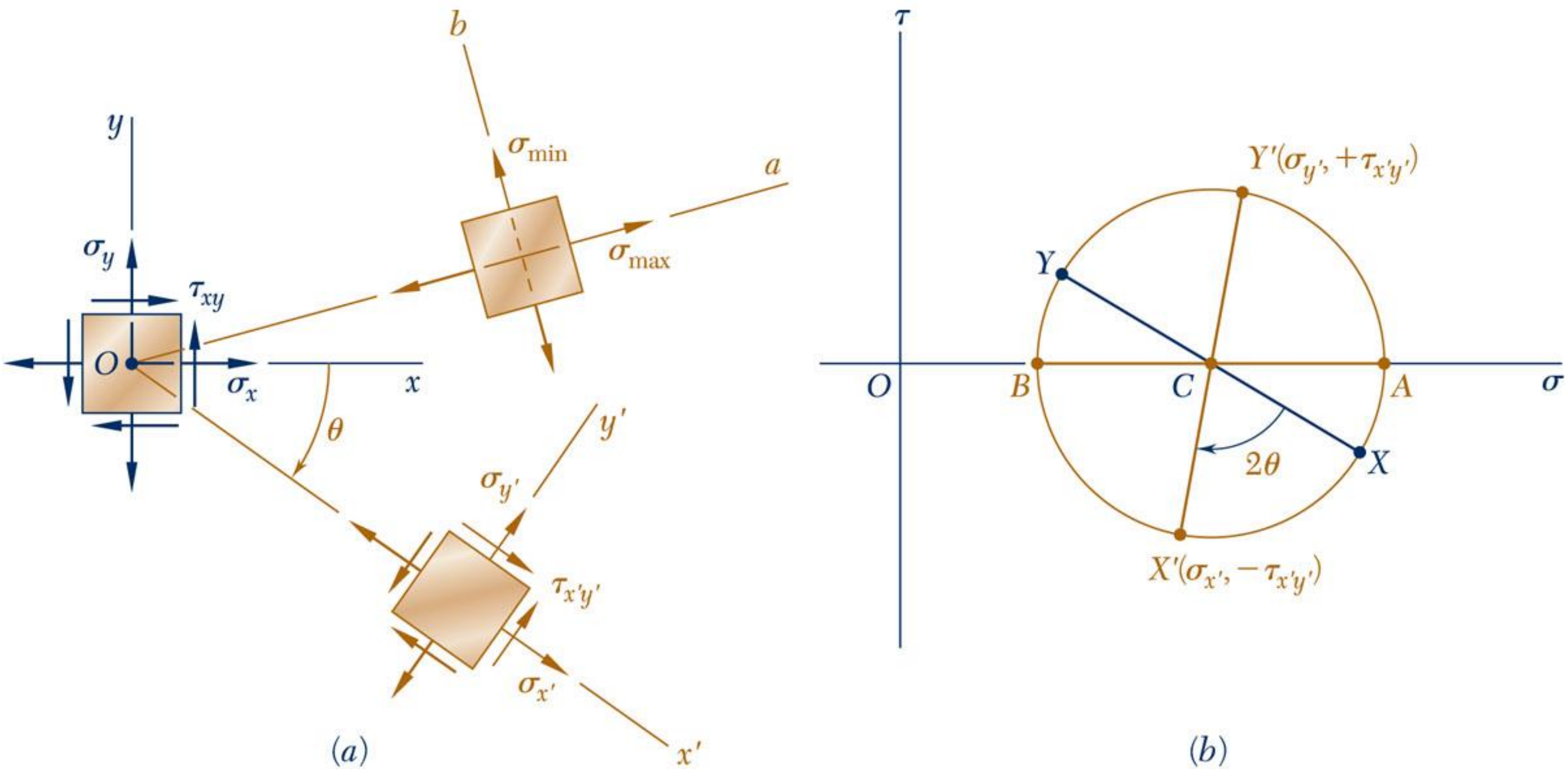
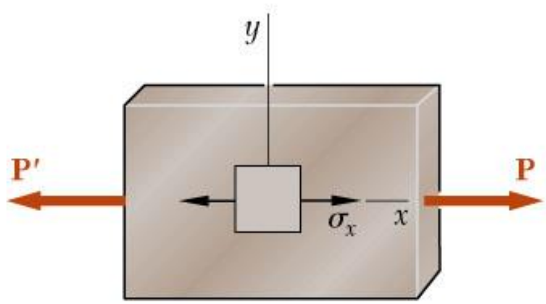


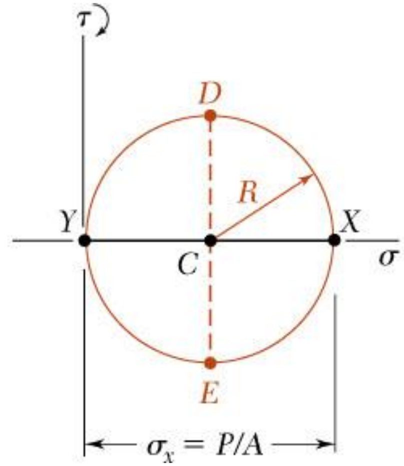
Figura 1.21

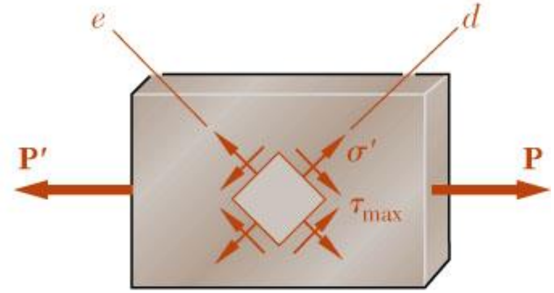
Círculo de Mohr – Estado plano de tensões (casos particulares)

Círculo de Mohr para carga axial centrada:

Figura 1.22





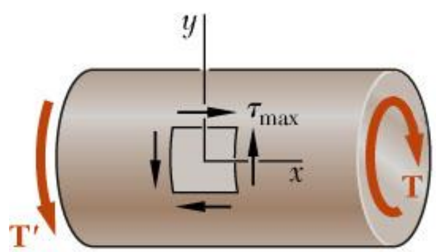


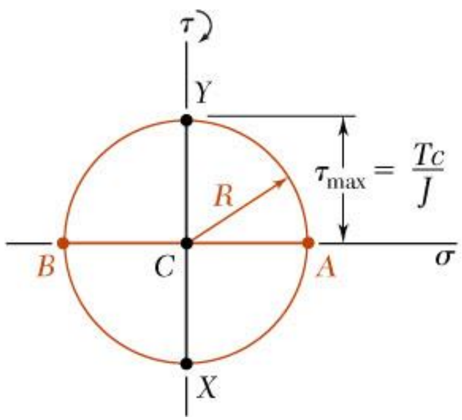
$$\sigma_x = \frac{P}{A}, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

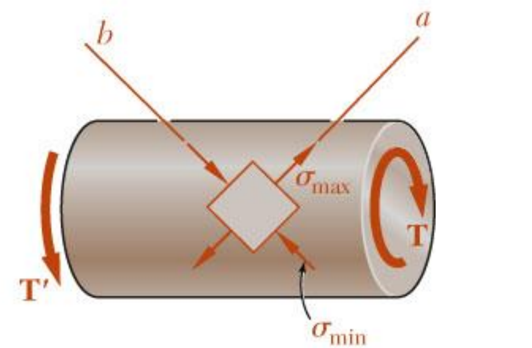
$$\sigma_{med} = \tau_{\max} = \frac{P}{2A}$$

Círculo de Mohr para carga de torção:

Figura 1.23







$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = \frac{Tc}{J}$$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \frac{Tc}{J}$$

CÍRCULO DE MOHR – ESTADO PLANO DE TENSÕES

Exemplo 1.4: Para o estado plano de tensões mostrado na figura 1.24:

(a) Construir o círculo de Mohr; e determinar: (b) os planos principais e as tensões principais, (c) a tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal média correspondente.

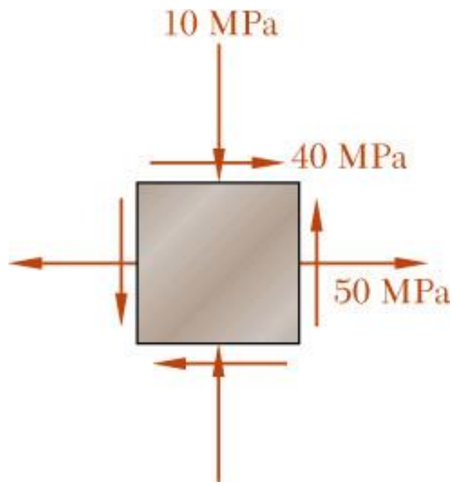


Figura 1.24

CÍRCULO DE MOHR – ESTADO PLANO DE TENSÕES

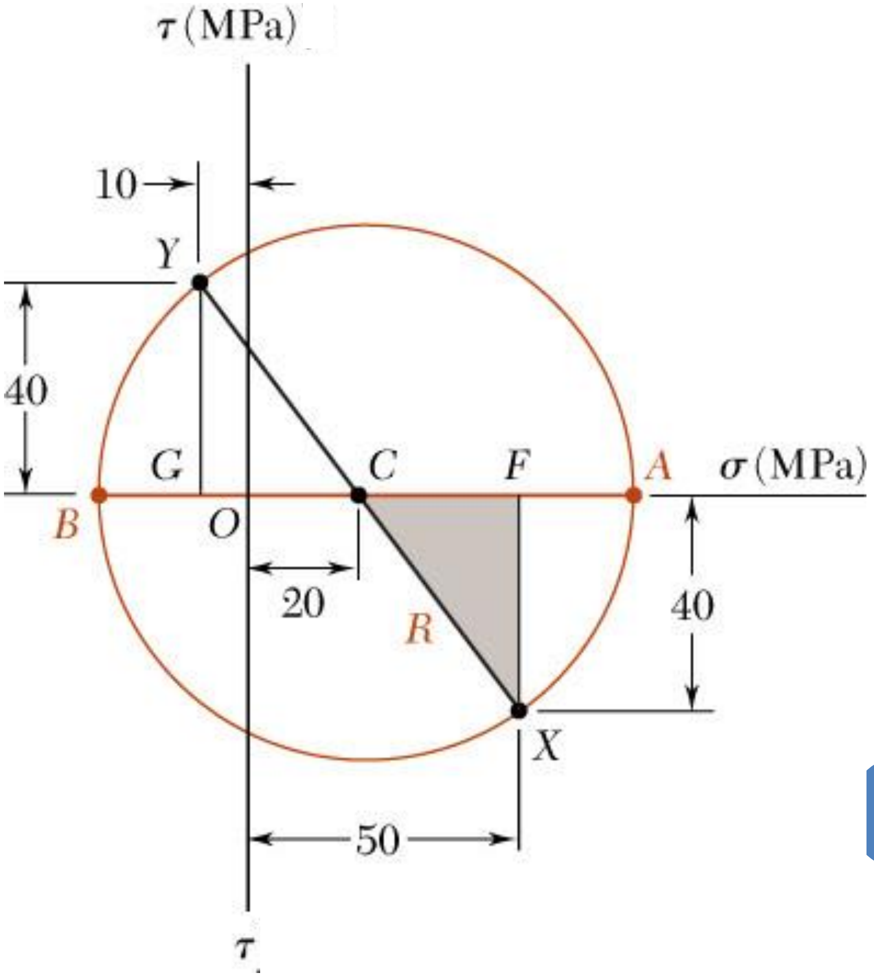
Exemplo 1.4: Solução

a) Para a construção do círculo de Mohr, usa-se:

$$\sigma_{méd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{(50)+(-10)}{2} = 20\,\text{MPa}$$

$$CF = 50 - 20 = 30\,\text{MPa} \qquad FX = 40\,\text{MPa}$$

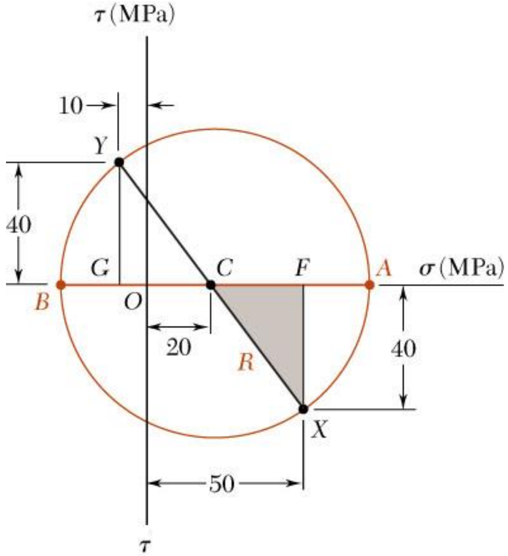
$$R = CX = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50\,\text{MPa}$$

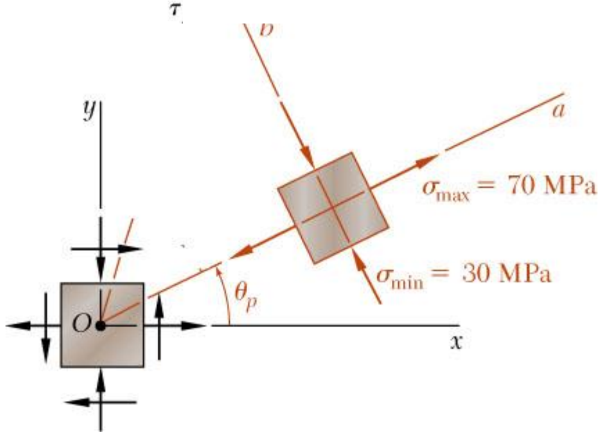


CÍRCULO DE MOHR – ESTADO PLANO DE TENSÕES

Exemplo 1.4: Solução

b) Tensões principais e suas orientações:





$$\sigma_{\max} = OA = OC + CA = 20 + 50$$

$$\boxed{\sigma_{\max} = 70\,\text{MPa}}$$

$$\sigma_{\min} = OB = OC - BC = 20 - 50$$

$$\boxed{\sigma_{\min} = -30\,\text{MPa}}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{40}{30}$$

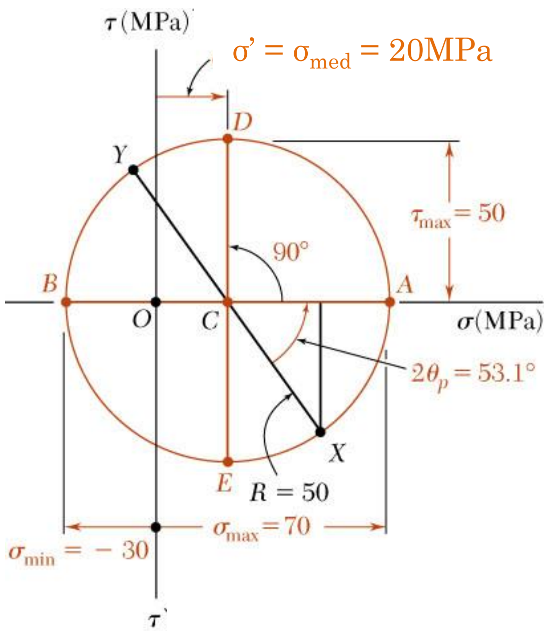
$$2\theta_p = 53.1°$$

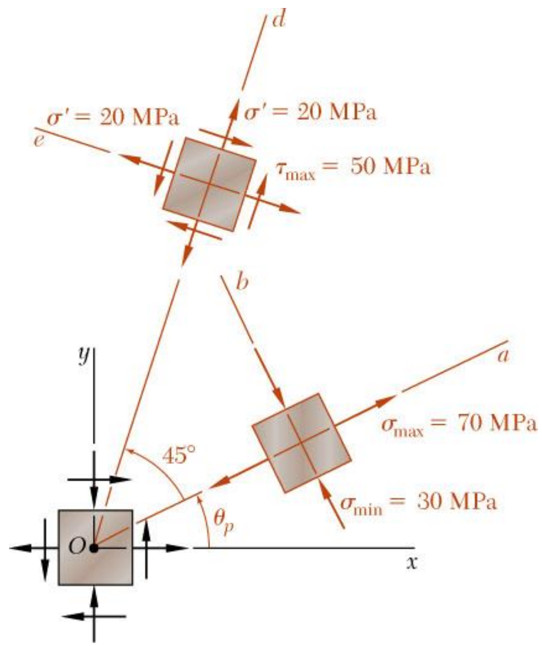
$$\boxed{\theta_{p1} = 26{,}6° \; e \; \theta_{p2} = 116{,}6°}$$

Círculo de Mohr – Estado plano de tensões

Exemplo 1.4: Solução

c) Tensão de cisalhamento máxima no plano e tensão normal média





$$\theta_c = \theta_p + 45°$$

$$\tau_{\max} = R$$

$$\sigma' = \sigma_{med}$$

$$\boxed{\theta_c = 71{,}6°}$$

$$\boxed{\tau_{\max} = 50\ \text{MPa}}$$

$$\boxed{\sigma' = 20\ \text{MPa}}$$

Círculo de Mohr – Estado plano de tensões

Execício 1.5: Para o estado plano de tensões mostrado na figura 1.25:

(a) Construir do círculo de Mohr; e determinar: (b) os planos principais e as tensões principais, (c) as componentes de tensão atuantes no elemento obtido pela rotação do elemento de 30º no sentido anti-horário.

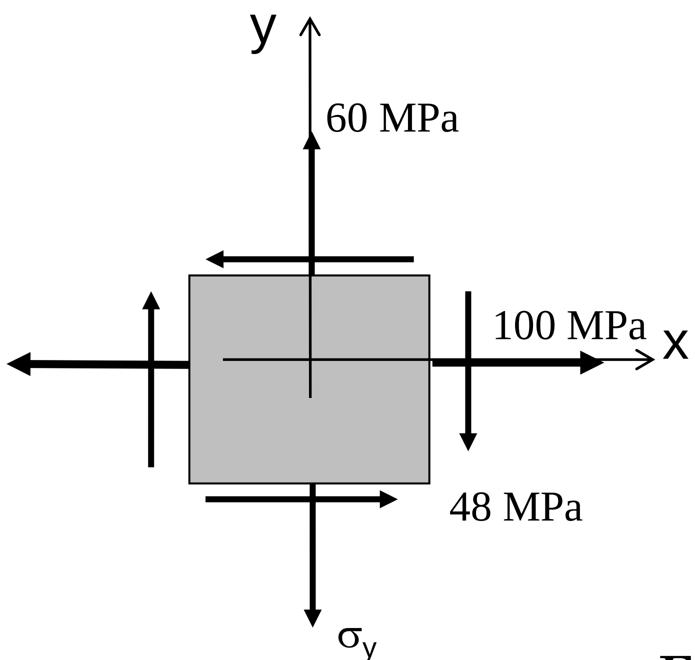
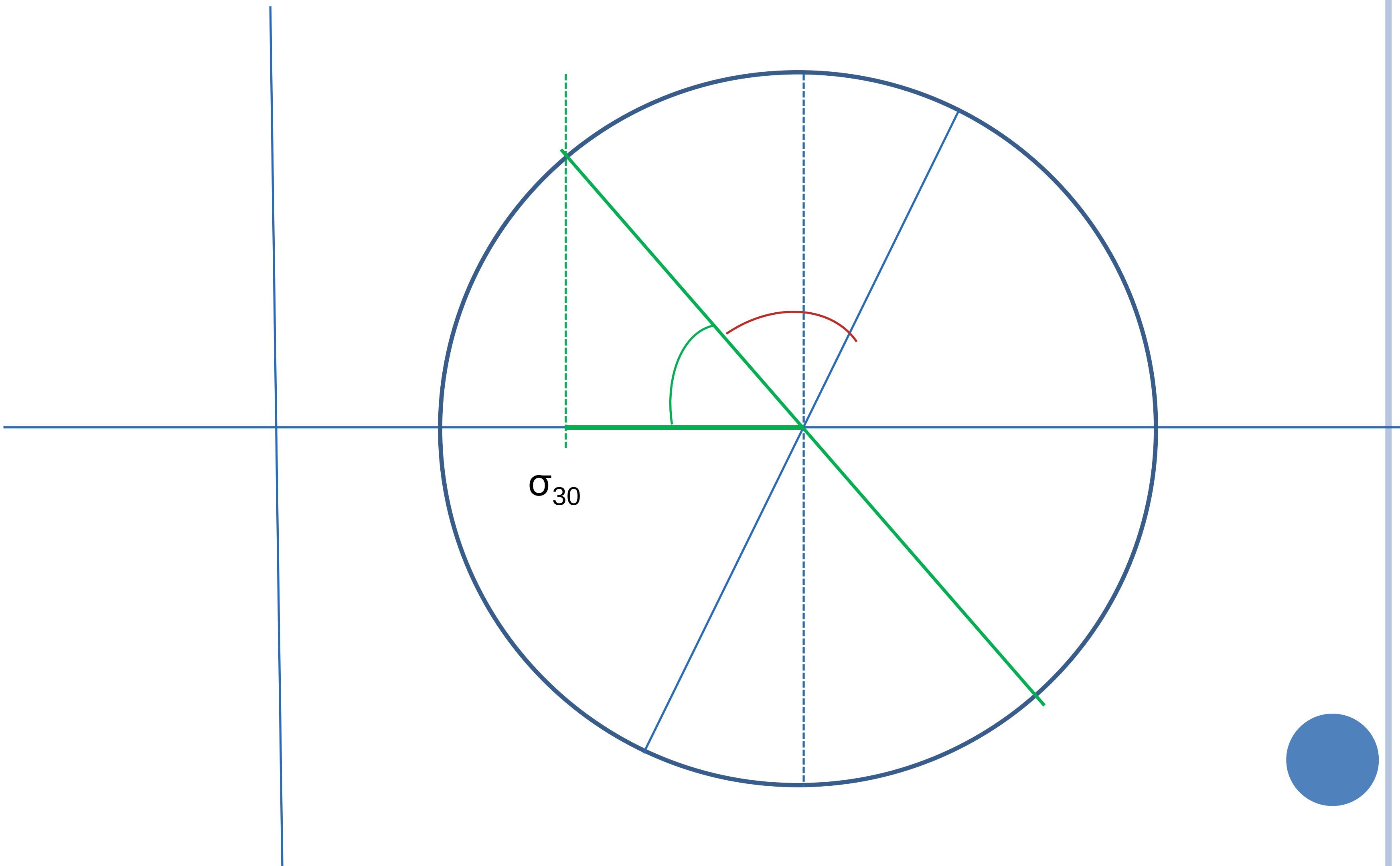


Figura 1.25

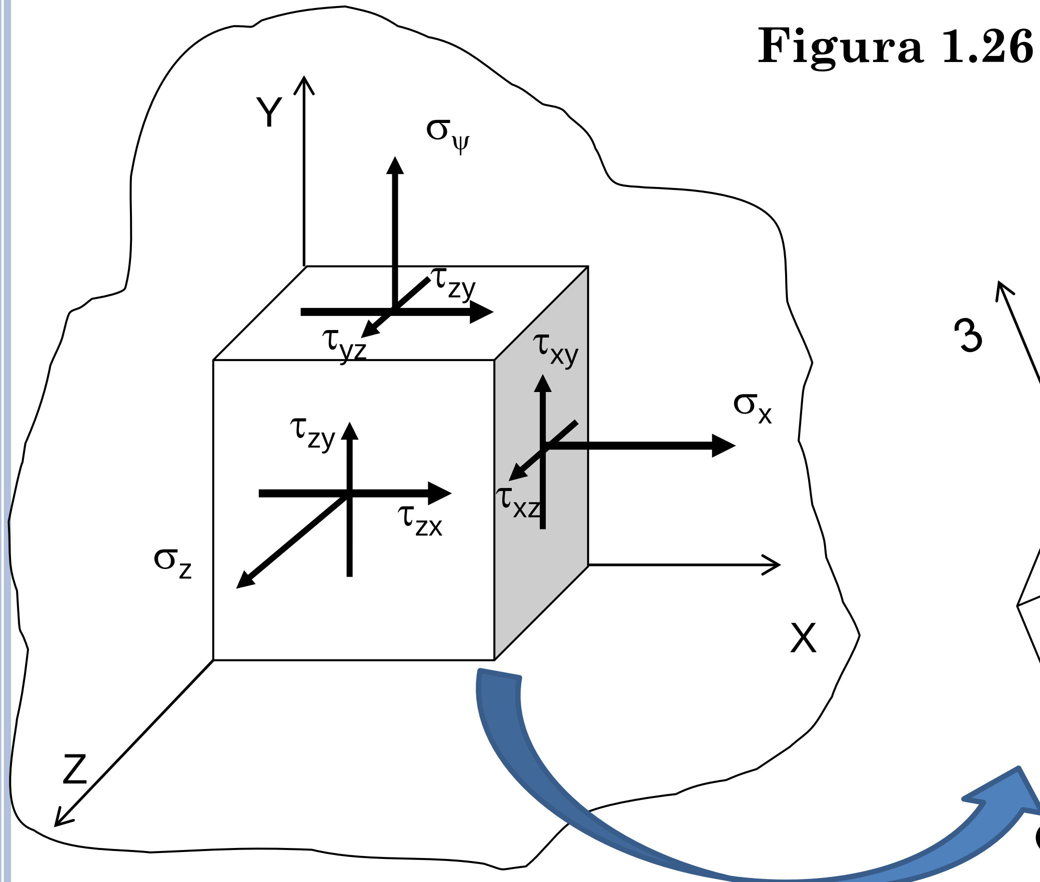
Círculo de Mohr – Estado plano de tensões

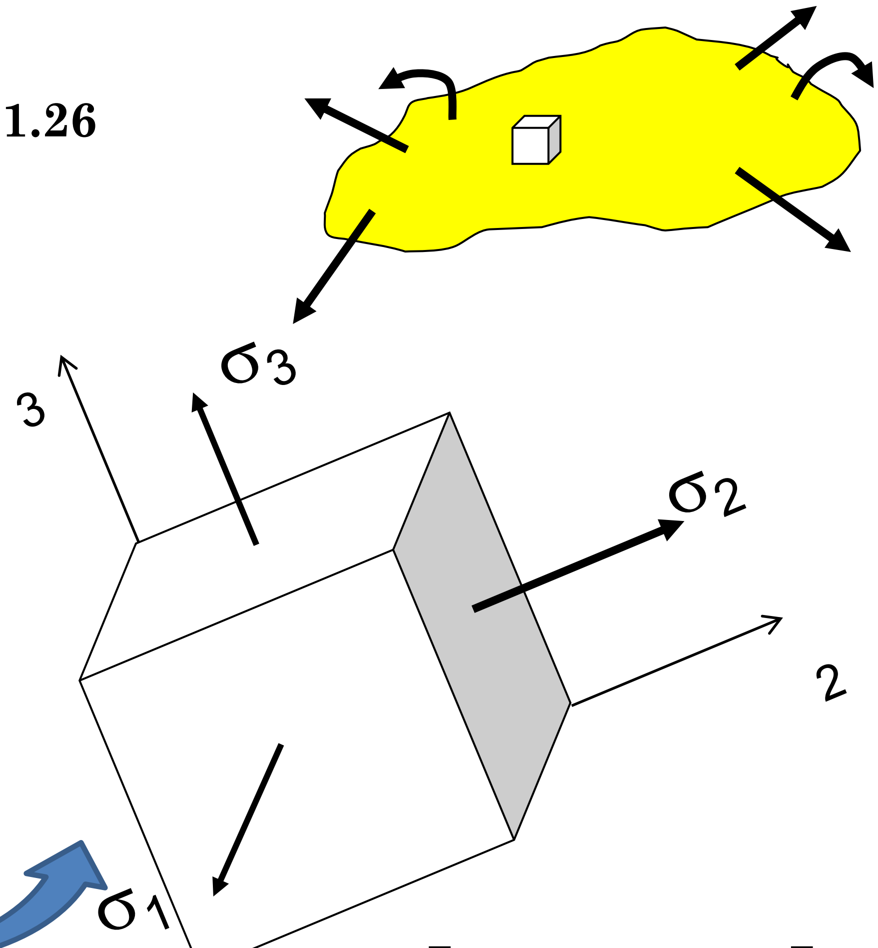
Exercício 1.5:



Estado Geral (triaxial) de Tensões

Figura 1.26





$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{bmatrix}$$

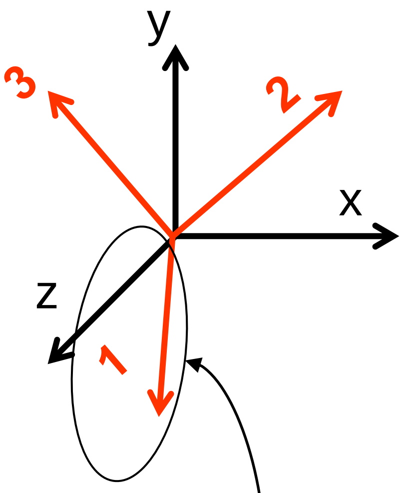
$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{bmatrix}$$

Estado Geral de Tensões

$$\sigma^3 - I_1.\sigma^2 + I_2.\sigma - I_3 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_z\sigma_x + \sigma_z\sigma_y - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{zy}^2 \\ I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2.\tau_x\tau_y\tau_z - \sigma_x\tau_{zy}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{cases}$$

Equação ou polinômio característico tem 3 raízes $\rightarrow \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ *que são os autovalores ou as tensões principais.*



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \longrightarrow [\sigma'] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

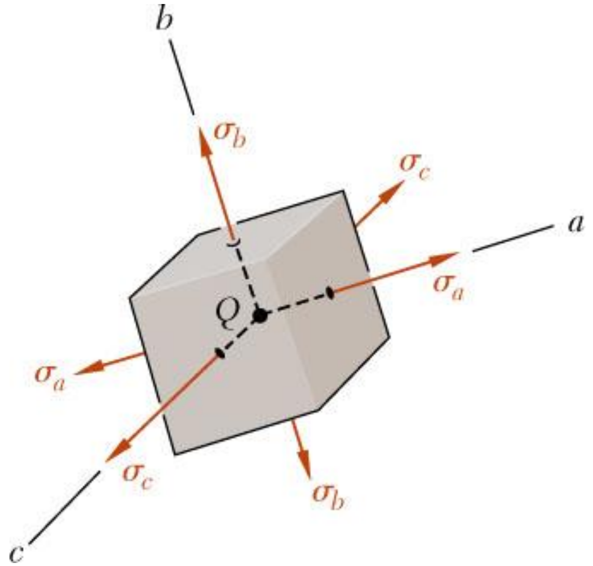
Planos Principais (autovetores):

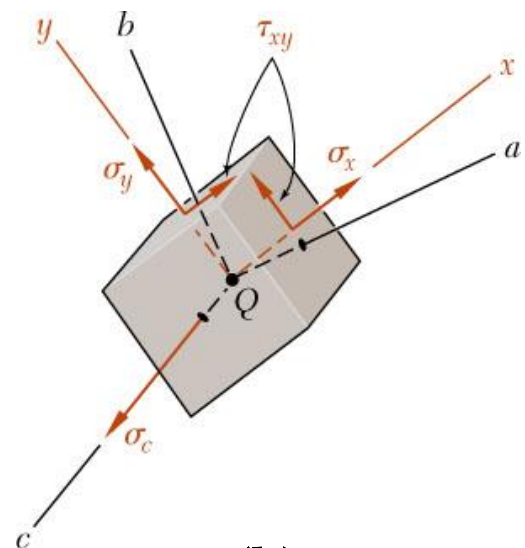
- são os planos onde atuam cada uma das tensões principais:

Determinação de v_1 $\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_1).v_{1x} + \tau_{yx}.v_{1y} + \tau_{zx}.v_{1z} = 0 \\ \tau_{xy}.v_{1x} + (\sigma_y - \sigma_1).v_{1y} + \tau_{zy}.v_{1z} = 0 \\ \tau_{xz}.v_{1x} + \tau_{yz}.v_{1y} + (\sigma_z - \sigma_1).v_{1z} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{pmatrix}$

Círculo de Mohr – Estado Geral de Tensões

Se o elemento mostrado na figura 1.27a (tensões principais) sofre uma rotação em torno de um dos eixos principais em Q – como o eixo C, por exemplo (figura 1.27b) – a transformação de tensões correspondente poderá ser analisada também pelo Círculo de Mohr.





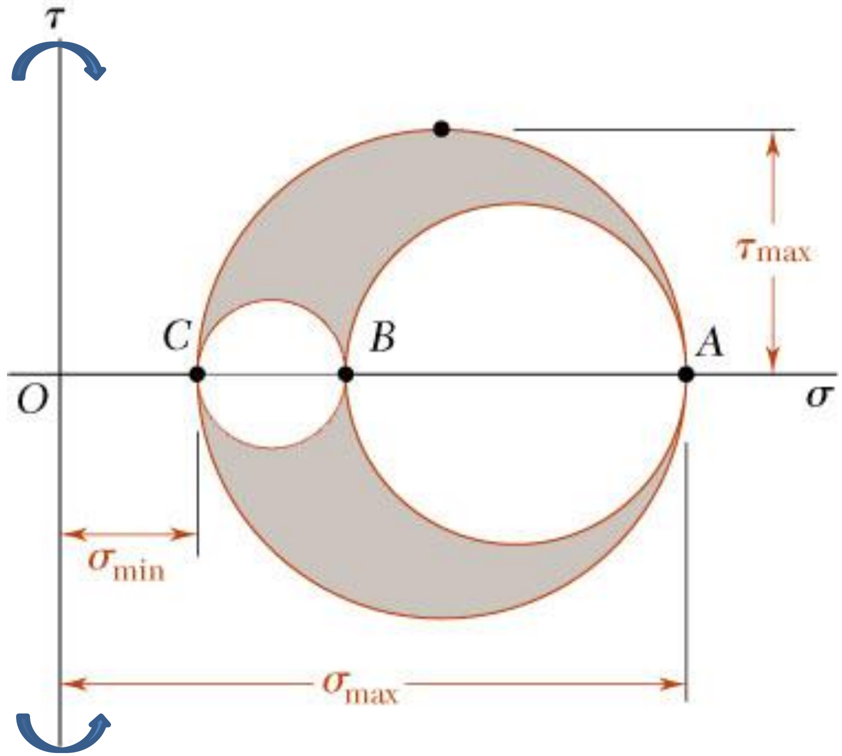
(a) **Figura 1.27** **(b)**

As tensões de cisalhamento que atuam nas faces perpendiculares ao eixo c permanecem nulas e a tensão normal σ_c também permanece igual.

Círculo de Mohr – Estado Geral de Tensões

Usamos, então, o círculo diâmetro AB para determinar as tensões, normal e de cisalhamento, que atuam nas faces do elemento quando ele sofre uma rotação em torno do eixo c (figura 1.28). Analogamente, os círculos de diâmetros BC e AC são usados para determinar as tensões, normal e de cisalhamento, que atuam nas faces do elemento quando ele sofre uma rotação em torno do eixo a e b, respectivamente.

Figura 1.28



Círculo de Mohr – Estado Geral de Tensões

Embora toda a análise tenha sido limitada em torno dos eixos principais, qualquer outra transformação de tensões a partir dos estados de tensões dos elementos mostrado nas figuras 1.27a e b levaria a pontos localizados na área sombreada da figura 1.28.

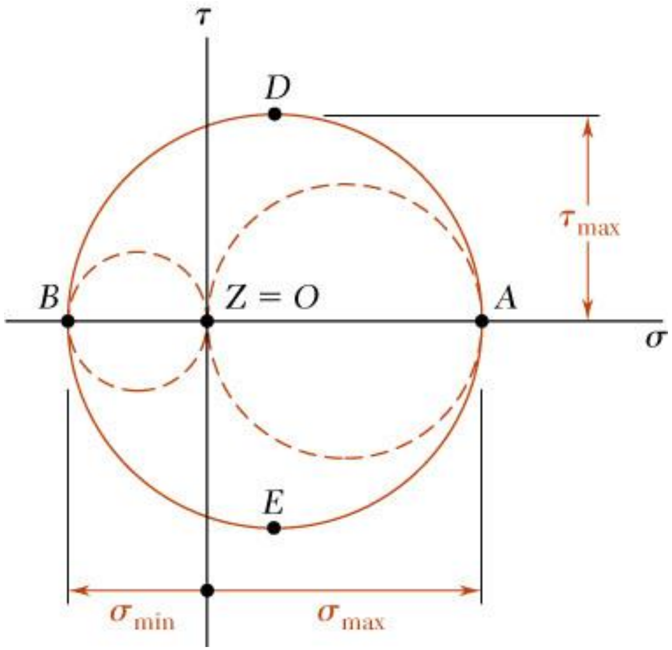
Até o momento, só definimos a máxima tensão de cisalhamento no plano. A partir da figura 1.28, pode-se definir também a máxima tensão de cisalhamento absoluta:

$$\tau_{\max_{abs}} = \frac{1}{2}\left|\sigma_{\max} - \sigma_{\min}\right| \; ou \; \frac{1}{2}\left|\sigma_1 - \sigma_3\right|, \quad (1.16)$$

$$sendo : \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

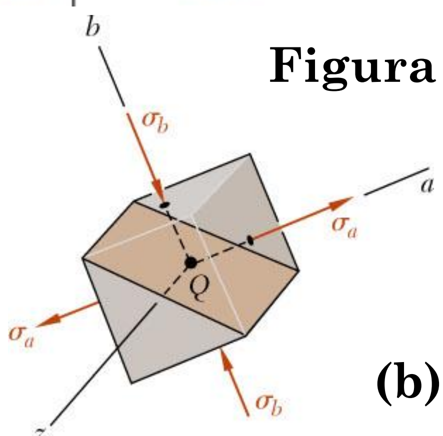
A correta utilização da equação 1.16 será essencial para a aplicação do critério de falha de Tresca, que será estudado mais adiante.

Círculo de Mohr – Estado Geral de Tensões (Particularização para o estado plano)



(a)

Figura 1.29



(b)

No caso do estado plano de tensão, o eixo perpendicular ao plano de tensão é um eixo principal (tensão normal e cisalhante são nulas).

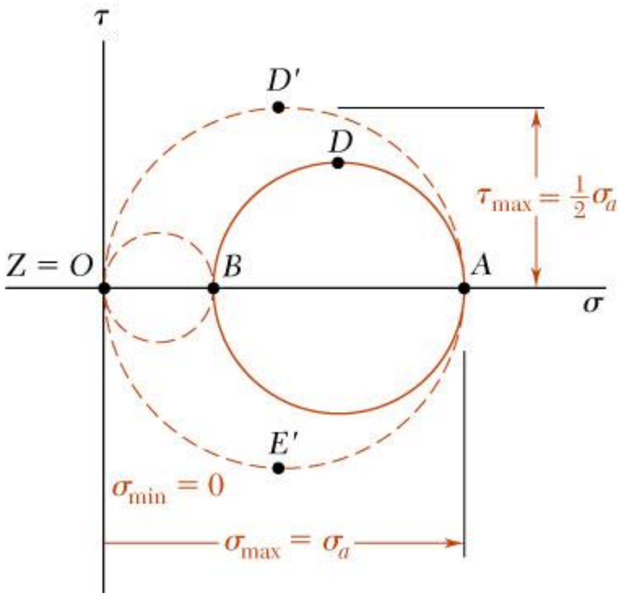
Se os pontos *A* e *B* (**representando as tensões máxima e mínima**) estão em lados opostos da origem, então:

a) as tensões principais correspondentes são as tensões normais máximas e mínimas para o elemento analisado.

b) a tensão de cisalhamento máxima (absoluta) para o elemento é igual à tensão de cisalhamento máxima "no plano" (perpendicular ao eixo z)

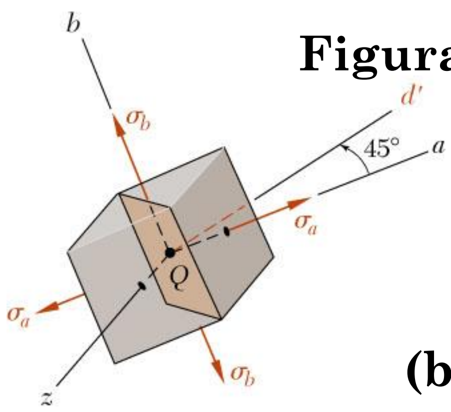
c) planos de tensão de cisalhamento máxima (absoluta) estão a 45º dos planos principais.

Círculo de Mohr – Estado Geral de Tensões (Particularização para o estado plano)



(a)

Figura 1.29



(b)

Se A e B estão do mesmo lado da origem (ou seja, têm o mesmo sinal e **representam as tensões máxima e intermediária**), então

a) o círculo que define σ_{max}, σ_{min}, e τ_{max} para o elemento não é o círculo correspondente às transformações de tensão dentro do plano (a-b).

b) a tensão de cisalhamento máxima para o elemento é igual a metade da tensão normal máxima.

c) os planos de tensão de cisalhamento máxima estão a 45º girando o plano **"z-a"** em torno de **b**.

EXERCÍCIOS GERAIS

Exercício 1.6: Um ponto em uma chapa fina está sujeito a dois estados de tensão, como mostrado na figura 1.30. Determinar o estado de tensão resultante em relação a um elemento orientado como o da direita.

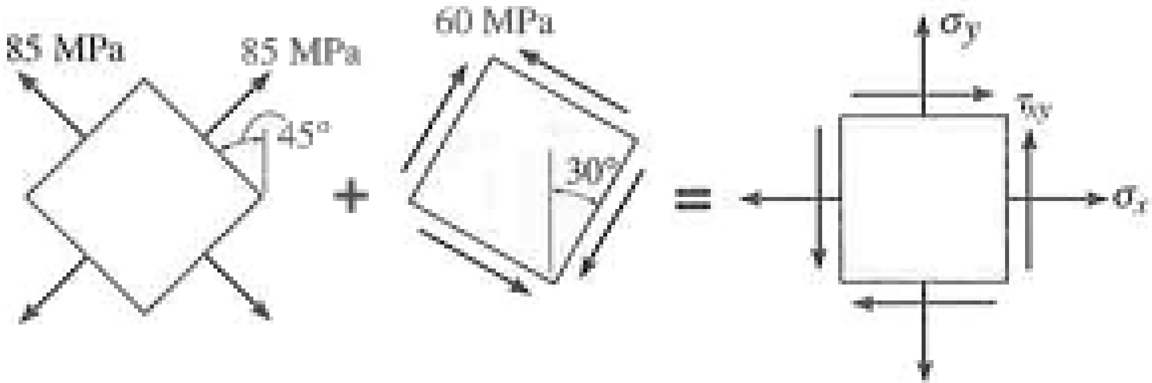


Figura 1.30

$$\sigma_x = 33MPa$$
$$\sigma_y = 137MPa$$
$$\tau_{xy} = -30MPa$$

Exercício 1.7: As fibras de um elemento de madeira formam um ângulo de 15º com a vertical. Para o estado de tensão mostrado, determine: a) a tensão de cisalhamento no plano, paralela às fibras; e (b) a tensão normal perpendicular às fibras.

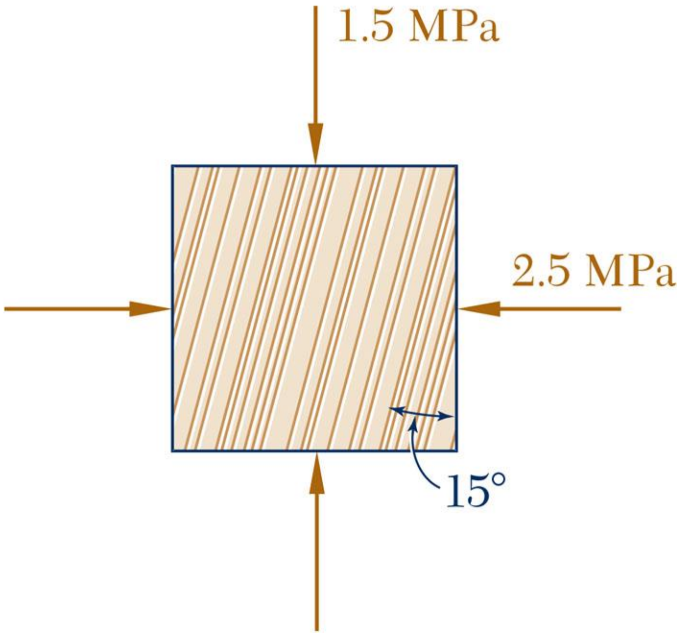


Figura 1.31

$$\sigma_{-15^o} = -2,43 MPa$$

$$\tau_{-15^o} = -0,25 MPa$$

Exercício 1.8: O fixador força a superfície lisa em E quando se aperta o parafuso. Supondo que a força de tração no parafuso seja de 40 kN, determinar as tensões principais nos pontos A e B e mostrar os resultados em elementos localizados em cada um desses pontos.

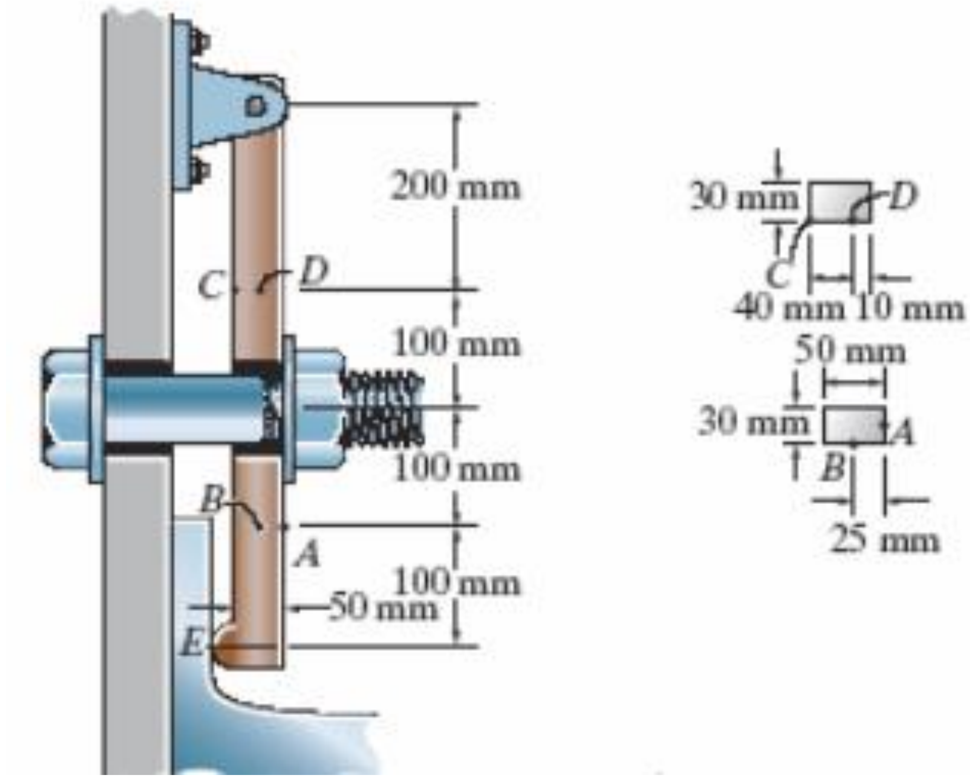


Figura 1.32

$\sigma_{1A} = 0$ $\qquad \sigma_{1B} = 24MPa$

$\sigma_{2A} = -192MPa$ $\qquad \sigma_{2B} = -24MPa$

Exercício 1.9: A estrutura suporta a carga distribuída de 200 N/m. Determine as tensões normal e de cisalhamento que atuam nos pontos D e E, que atuam perpendicular e paralelamente às fibras respectivamente.

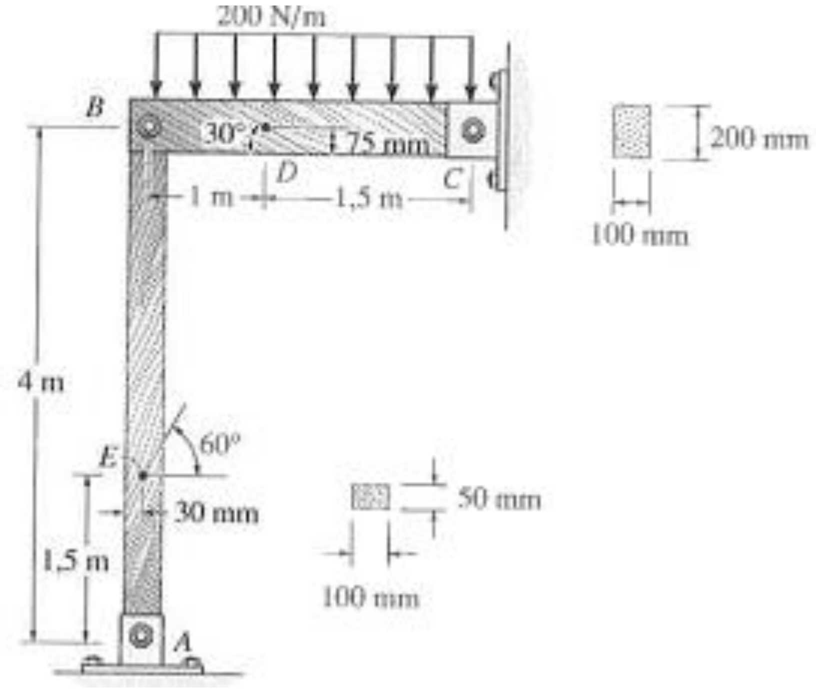


Figura 1.32

$\sigma_{60^o D} = 11 kPa$ $\quad$ $\sigma_{-30^o E} = -12,5\ kPa$

$\tau_{60^o D} = -22,6 kPa$ $\quad$ $\tau_{-30^o E} = 21,7\ kPa$

Exercício 1.10: A viga T está submetida à carga distribuída que é aplicada ao longo de sua linha de centro. Determinar as tensões principais nos pontos A e B e mostrar os resultados em elementos que representem estes pontos.

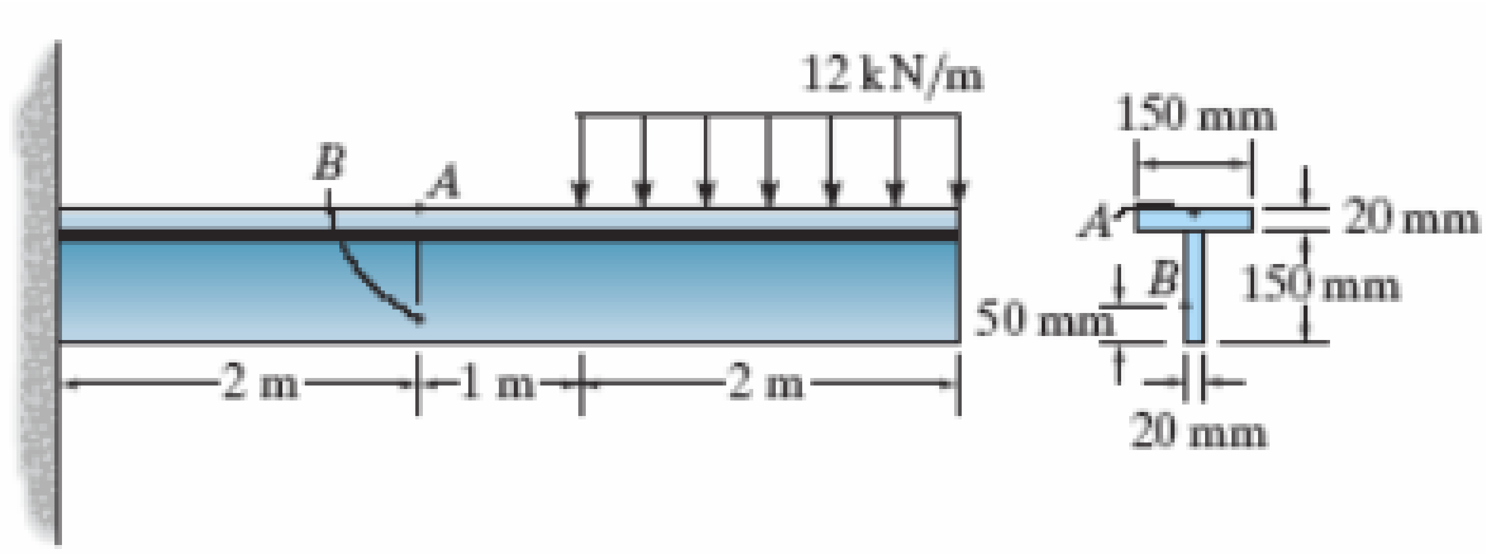


Figura 1.33

$\sigma_{1A} = 152\ MPa$ $\quad\quad$ $\sigma_{1B} = 0,23 MPa$

$\sigma_{2A} = 0$ $\quad\quad$ $\sigma_{2B} = -196 MPa$

Exercício 1.11: A viga de abas largas está submetida às cargas mostradas na figura 1.34. Determinar as tensões principais nos pontos A e B e mostrar os resultados em elementos que representem estes pontos.

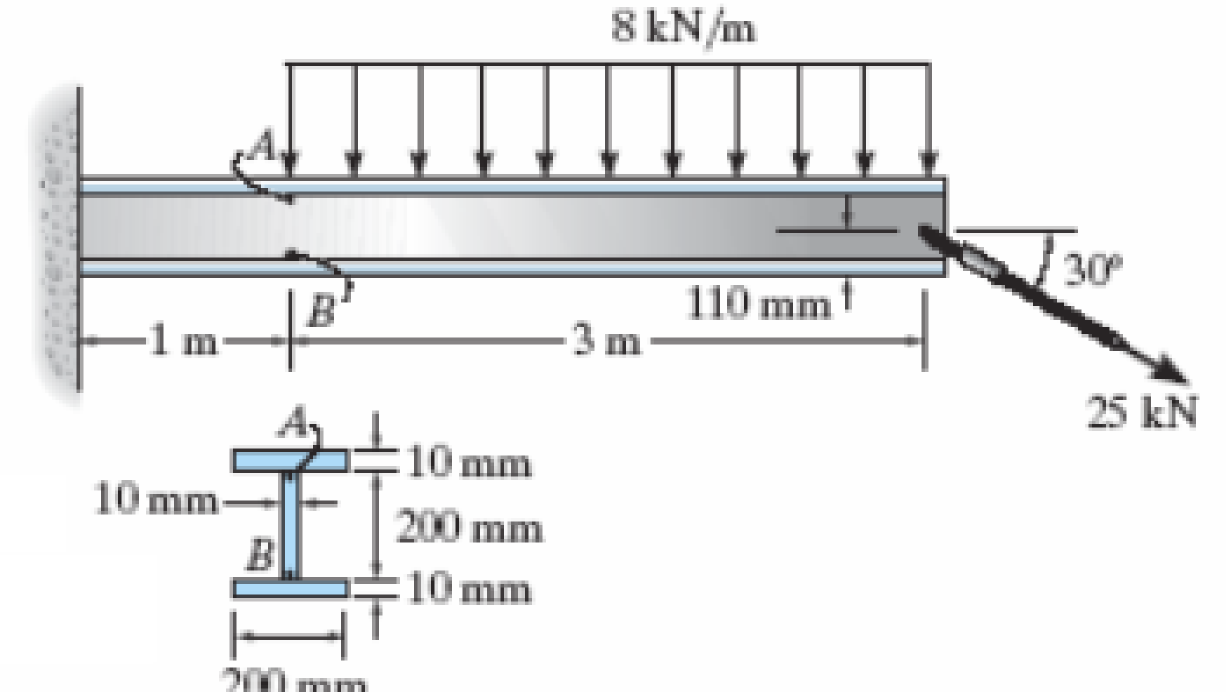


Figura 1.34

$\sigma_{1A} = 150\ MPa$ $\sigma_{1B} = 1{,}6 MPa$

$\sigma_{2A} = -1{,}52\ MPa$ $\sigma_{2B} = -143 MPa$