Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

MOMENTO DE INÉRCIA DE ÁREA E MOMENTO DE INÉRCIA DE MASSA

7.9. Momentos de Inércia de uma área em relação a eixos inclinados

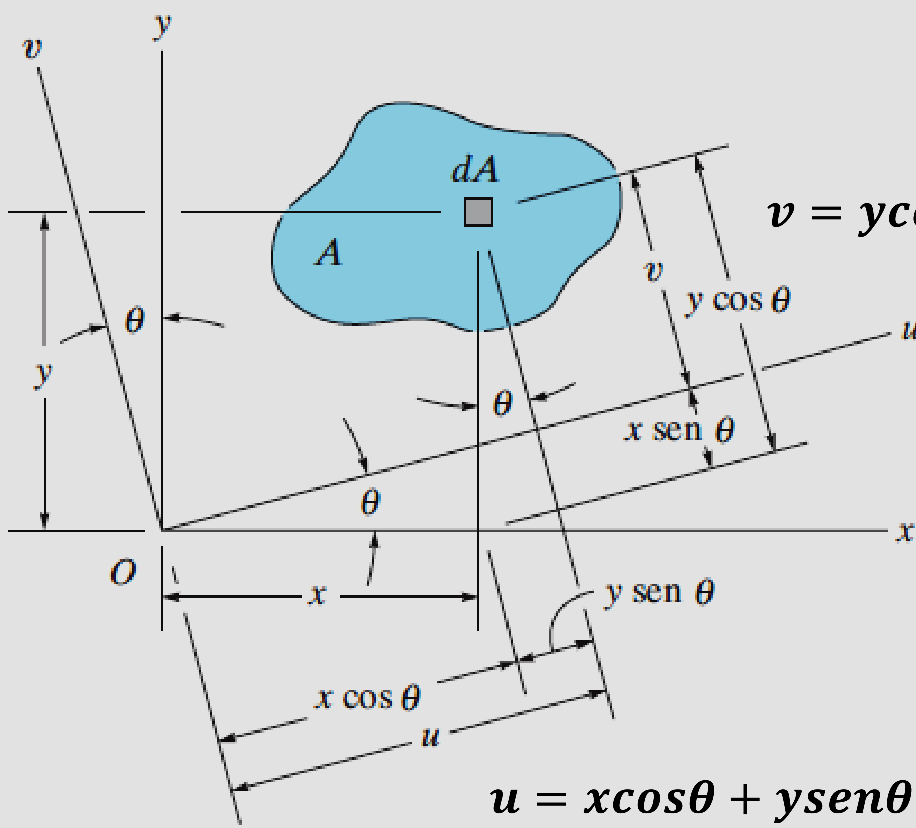
7.9. MOMENTOS DE INÉRCIA DE UMA ÁREA EM RELAÇÃO A EIXOS INCLINADOS

- Em projeto estrutural e mecânico, às vezes é necessário calcular os momentos e o produto de inércia $\boldsymbol{I_u}, \boldsymbol{I_v}$ e $\boldsymbol{I_{uv}}$ de uma área em relação a um conjunto de eixos inclinados $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ quando os valores para $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{I_x}, \boldsymbol{I_y}$ e $\boldsymbol{I_{xy}}$ são conhecidos.

- Para fazer isso, usaremos equações de transformação relacionadas com os pares de coordenadas $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.

$$I_u = \int v^2 \, dA$$

$$I_v = \int u^2 \, dA$$



$$\boldsymbol{v = y\cos\theta - x\,sen\theta}$$

$$\boldsymbol{u = x\cos\theta + y\,sen\theta}$$

7.9. MOMENTOS DE INÉRCIA DE UMA ÁREA EM RELAÇÃO A EIXOS INCLINADOS

- Da figura anterior temos as equações:

$$u = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$v = y\cos\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta$$

- Com essas equações, os momentos e o produto de inércia de $\boldsymbol{dA}$ em relação aos eixos $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ tornam-se:

$$dI_u = v^2\,dA = (y\cos\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\,dA$$

$$dI_v = u^2\,dA = (x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\,dA$$

$$dI_{uv} = uv\,dA = (x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta)(y\cos\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta)\,dA$$

7.9. MOMENTOS DE INÉRCIA DE UMA ÁREA EM RELAÇÃO A EIXOS INCLINADOS

- Da

$$I_u = \int v^2 \, dA$$

$$I_u = \int (y cos\theta - x sen\theta)^2 \, dA$$

$$I_u = \int (y^2 cos^2\theta - 2y cos\theta x sen\theta + x^2 sen^2\theta) \, dA$$

$$I_u = \int \boldsymbol{y^2} \, \boldsymbol{dA} cos^2\theta - \int \boldsymbol{yx} \, \boldsymbol{dA} 2 cos\theta sen\theta + \int \boldsymbol{x^2} \, \boldsymbol{dA} sen^2\theta$$

$$I_u = I_x cos^2\theta - I_{xy} 2 cos\theta sen\theta + I_y sen^2\theta$$

7.9. MOMENTOS DE INÉRCIA DE UMA ÁREA EM RELAÇÃO A EIXOS INCLINADOS

- Expandindo cada expressão e integrando, observando que:

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

$$I_{xy} = \int xy\, dA$$

$$I_u = I_x \cos^2\theta + I_y \operatorname{sen}^2\theta - 2I_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$I_v = I_x \operatorname{sen}^2\theta + I_y \cos^2\theta + 2I_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$I_{uv} = I_x \operatorname{sen}\theta \cos\theta - I_y \operatorname{sen}\theta \cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

7.9. MOMENTOS DE INÉRCIA DE UMA ÁREA EM RELAÇÃO A EIXOS INCLINADOS

- Usando as identidades trigonométricas:

$$\text{sen } 2\theta = 2 \text{ sen } \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta,$$

- Podemos simplificar as expressões anteriores para:

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \text{ sen } 2\theta$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \text{ sen } 2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \text{ sen } 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

7.9. MOMENTOS DE INÉRCIA DE UMA ÁREA EM RELAÇÃO A EIXOS INCLINADOS

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\text{sen}\,2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

- Se a primeira e a segunda equações forem somadas, podemos mostrar que o momento de inércia polar em relação ao eixo $\boldsymbol{z}$ passando pelo ponto $\boldsymbol{O}$ é, conforme esperado, independente da orientação dos eixos $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$; ou seja:

$$J_O = I_u + I_v = I_x + I_y$$

7.9. MOMENTOS DE INÉRCIA DE UMA ÁREA EM RELAÇÃO A EIXOS INCLINADOS

Momento de inércia principais

- As equações anteriores mostram que $\boldsymbol{I_u}, \boldsymbol{I_v}$ e $\boldsymbol{I_{uv}}$ dependem do ângulo de inclinação, $\boldsymbol{\theta}$, dos eixos $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$;

- Agora determinaremos a orientação desses eixos em relação aos quais os momentos de inércia da área são máximo e mínimo;

- Esse conjunto de eixos em particular é chamado eixos principais da área, e os momentos de inércia correspondentes em relação a esses eixos são chamados **momentos de inércia principais**;

- Em geral, existe um conjunto de eixos principais para cada origem escolhida $\boldsymbol{O}$;

- Porém, para o projeto estrutural e mecânico, a origem $\boldsymbol{O}$ está localizada no centroide da área.

7.9. MOMENTOS DE INÉRCIA DE UMA ÁREA EM RELAÇÃO A EIXOS INCLINADOS

Momento de inércia principais

- O ângulo que define a orientação dos eixos principais pode ser encontrado diferenciando a primeira das equações anteriores em relação a $\boldsymbol{\theta}$ e igualando o resultado a zero.

- Assim, teremos:

$$\frac{dI_u}{d\theta} = -2\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)\operatorname{sen} 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

- Portanto, em $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta_P}$:

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}}$$

$$tg2\theta = \frac{2tg(\theta)}{1 - tg^2\theta}$$

7.9. MOMENTOS DE INÉRCIA DE UMA ÁREA EM RELAÇÃO A EIXOS INCLINADOS

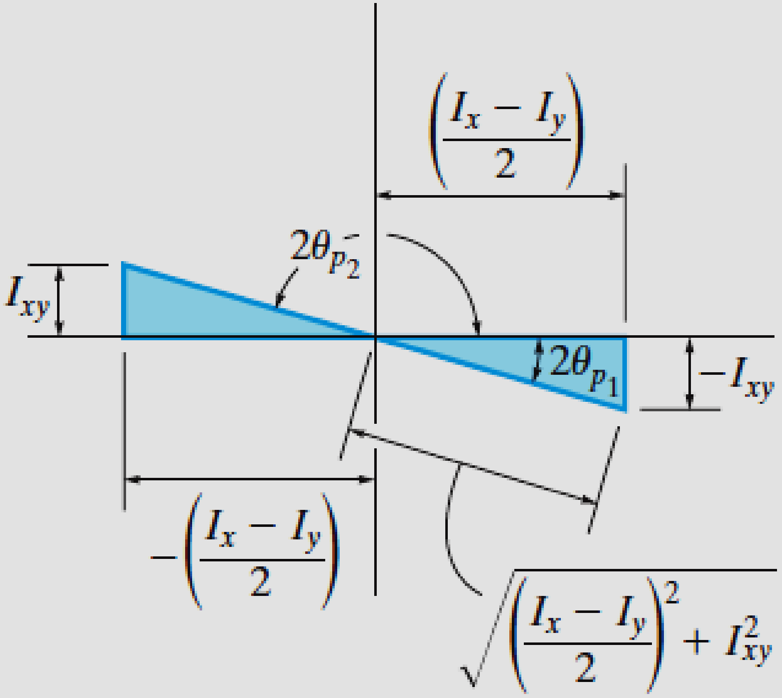
Momento de inércia principais

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}$$

- As duas raízes $\boldsymbol{\theta_{P1}}$ e $\boldsymbol{\theta_{P2}}$ dessa equação estão defasadas de 90° e, portanto, cada uma especifica a inclinação de um dos eixos principais;

- Para substituir estes ângulos nas equações de $\boldsymbol{I_u}, \boldsymbol{I_v}$ e $\boldsymbol{I_{uv}}$, primeiro temos de achar o seno e o cosseno de $\boldsymbol{2\theta_{P1}}$ e de $\boldsymbol{2\theta_{P2}}$;

- Isso pode ser feito usando as razões dos triângulos mostrados na figura ao lado.

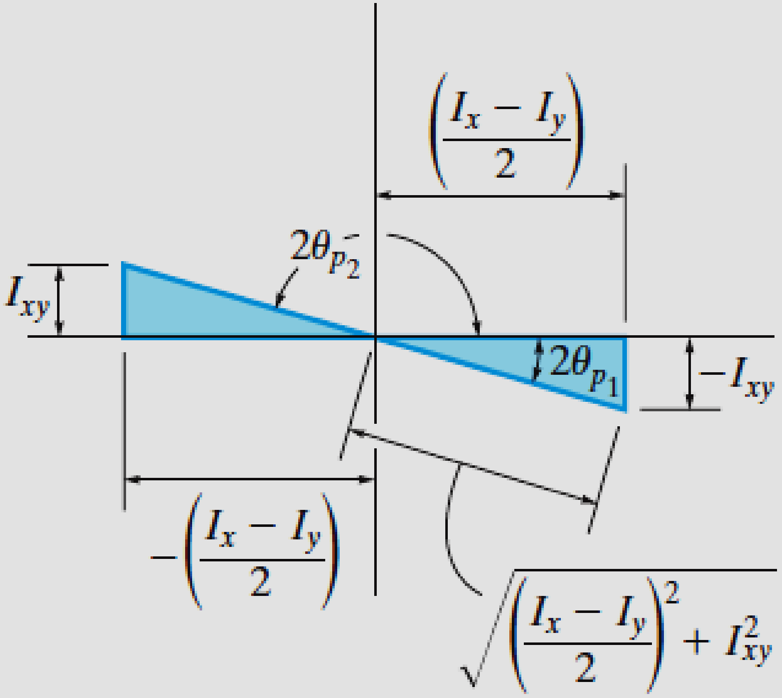


7.9. MOMENTOS DE INÉRCIA DE UMA ÁREA EM RELAÇÃO A EIXOS INCLINADOS

Momento de inércia principais

- Substituindo cada uma das razões de seno e cosseno na primeira ou na segunda de equação das três de $\boldsymbol{I_u}, \boldsymbol{I_v}$ e $\boldsymbol{I_{uv}}$, e simplificando, obtemos:

$$I_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$



7.9. MOMENTOS DE INÉRCIA DE UMA ÁREA EM RELAÇÃO A EIXOS INCLINADOS

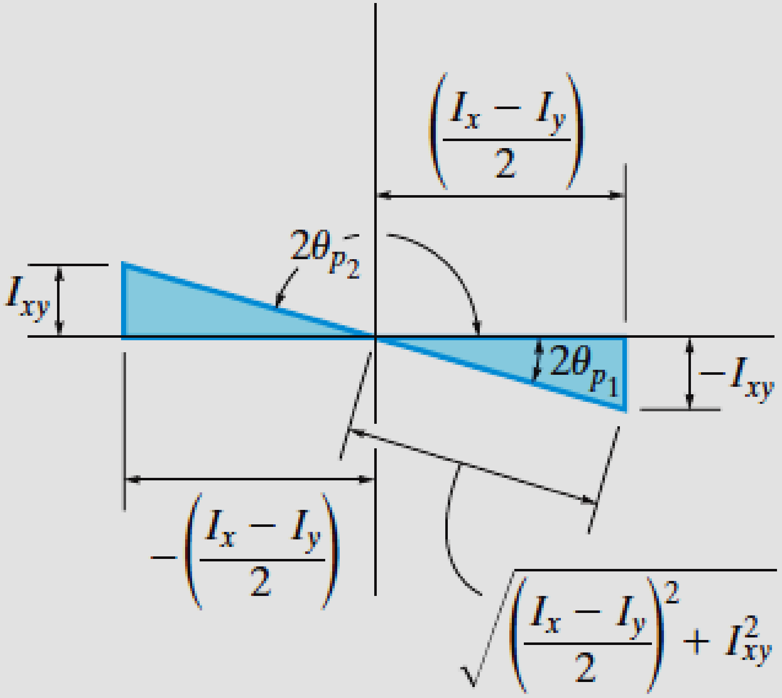
Momento de inércia principais

$$I_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

- Dependendo do sinal escolhido, esse resultado gera o momento de inércia máximo ou mínimo da área;

- Além disso, se as relações trigonométricas anteriores para $\boldsymbol{\theta_{P1}}$ e $\boldsymbol{\theta_{P2}}$ forem substituídas na terceira das equações de $\boldsymbol{I_u}, \boldsymbol{I_v}$ e $\boldsymbol{I_{uv}}$, pode-se mostrar que $\boldsymbol{I_{uv} = 0}$; ou seja, **o produto de inércia em relação aos eixos principais é zero;**

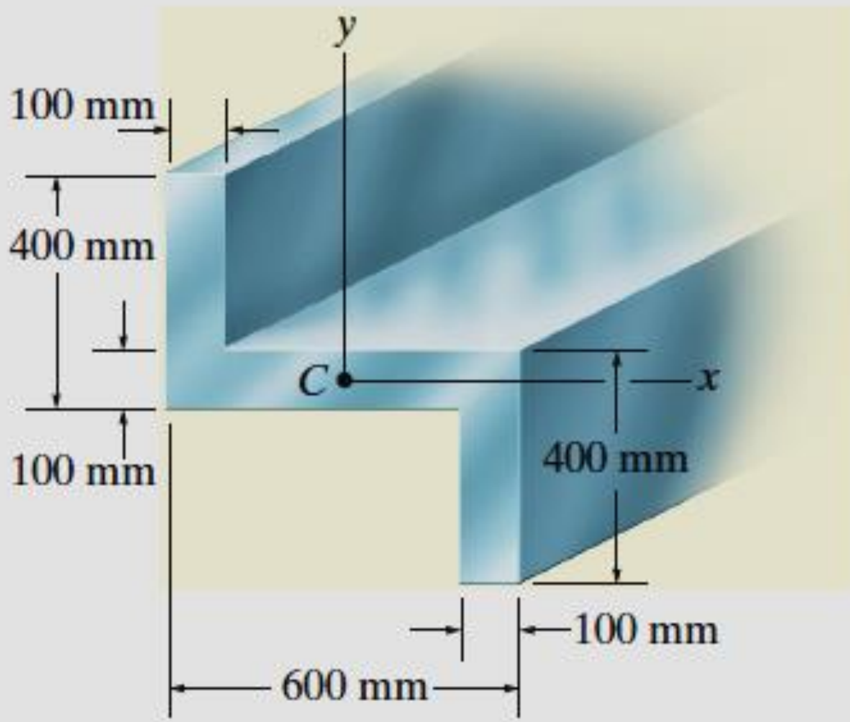
- O produto de inércia é zero em relação a qualquer eixo de simetria, segue-se, portanto, que qualquer eixo de simetria representa um eixo de inércia principal da área.



7.9. MOMENTOS DE INÉRCIA DE UMA ÁREA EM RELAÇÃO A EIXOS INCLINADOS

Exercício 50:

- Determine os momentos de inércia principais e a orientação dos eixos principais da área da seção transversal do elemento mostrado na figura abaixo, relativamente a um eixo que passa pelo centroide.



7.9. MOMENTOS DE INÉRCIA DE UMA ÁREA EM RELAÇÃO A EIXOS INCLINADOS

Solução:

- Os momentos e o produto de inércia da seção transversal em relação aos eixos *x*, *y* foram determinados nas aulas anteriores. Os resultados são:

$$I_x = 2{,}90(10^9)\ \text{mm}^4 \quad I_y = 5{,}60(10^9)\ \text{mm}^4 \quad I_{xy} = -3{,}00(10^9)\ \text{mm}^4$$

- Os ângulos de inclinação dos eixos principais $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são:

$$\text{tg}\ 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} = \frac{-[-3{,}00(10^9)]}{[2{,}90(10^9) - 5{,}60(10^9)]/2} = -2{,}22$$

$$2\theta_p = -65{,}8° \text{ e } 114{,}2°$$

$$2{,}22x^2 - 2x - 2{,}22 = 0$$
$$\theta p1 = arctg(x1)$$
$$\theta p2 = carctg(x2)$$

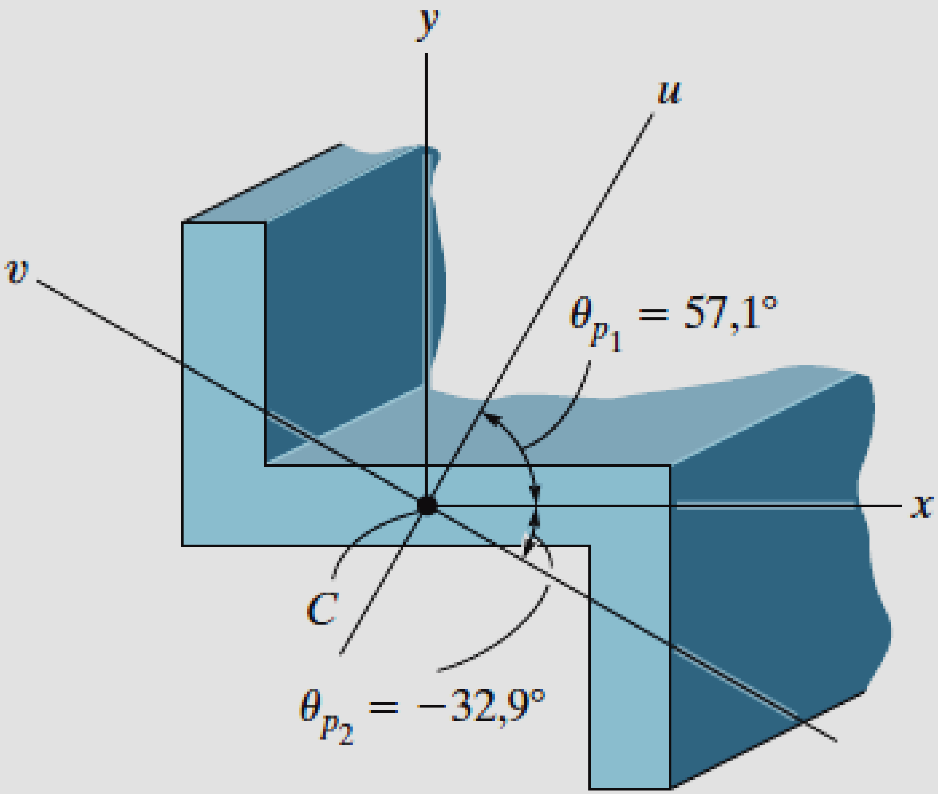
- Logo:

$$\theta_{p_2} = -32{,}9° \quad \text{e} \quad \theta_{p_1} = 57{,}1°$$

7.9. MOMENTOS DE INÉRCIA DE UMA ÁREA EM RELAÇÃO A EIXOS INCLINADOS

Solução:

$$\theta_{p_2} = -32{,}9^\circ \quad \text{e} \quad \theta_{p_1} = 57{,}1^\circ$$



7.9. MOMENTOS DE INÉRCIA DE UMA ÁREA EM RELAÇÃO A EIXOS INCLINADOS

Solução:

- Os momentos de inércia principais em relação a esses eixos são:

$$I_{\substack{\text{máx} \\ \text{mín}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$= \frac{2{,}90(10^9) + 5{,}60(10^9)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{2{,}90(10^9) - 5{,}60(10^9)}{2}\right]^2 + [-3{,}00(10^9)]^2}$$

$$I_{\substack{\text{máx} \\ \text{mín}}} = 4{,}25(10^9) \pm 3{,}29(10^9)$$

$$I_{\text{máx}} = 7{,}54(10^9)\ \text{mm}^4 \qquad I_{\text{mín}} = 0{,}960(10^9)\ \text{mm}^4$$

7.9. MOMENTOS DE INÉRCIA DE UMA ÁREA EM RELAÇÃO A EIXOS INCLINADOS

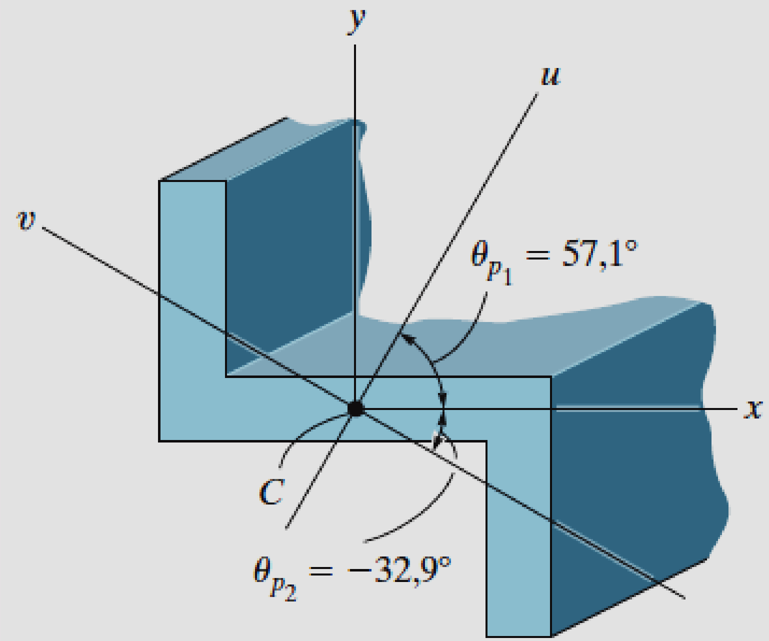
Solução:

$$I_{\text{máx}} = 7{,}54(10^9)\ \text{mm}^4 \qquad I_{\text{mín}} = 0{,}960(10^9)\ \text{mm}^4$$

- O momento de inércia máximo ocorre em relação ao eixo $\boldsymbol{u}$, pois, por observação, a maior parte da área da seção transversal é a mais distante desse eixo;

- Ou, então, em outras palavras, o momento de inércia máximo ocorre em relação ao eixo $\boldsymbol{u}$, porque esse eixo está localizado dentro de $\pm\,\mathbf{45}$° a partir do eixo $\boldsymbol{y}$, que tem o maior valor de $\boldsymbol{I}$ $(\boldsymbol{I_y} > \boldsymbol{I_x})$;

- Além do mais, isso pode ser concluído substituindo-se o valor $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{57{,}1}$° na primeira das equações de $\boldsymbol{I_u}, \boldsymbol{I_v}$ e $\boldsymbol{I_{uv}}$ e determinando $\boldsymbol{I_u}$.



ATÉ A PRÓXIMA!