Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

CÁLCULO VETORIAL E EQUILÍBRIO DE PARTÍCULAS

Cálculo vetorial

1.1. Escalares e vetores
1.2. Operações vetoriais
1.3. Adição de forças vetoriais
1.4. Adição de um sistema de forças coplanares
1.5. Vetores cartesianos
1.6. Adição e subtração de vetores cartesianos
1.7. Vetores posição
1.8. Vetor força orientado ao longo de uma reta
1.9. Produto escalar

Equilíbrio de partículas

1.10. Condição de equilíbrio de um ponto material
1.11. Diagrama de corpo livre
1.12. Sistemas de forças coplanares
1.13. Sistemas de forças tridimensional

CÁLCULO VETORIAL

Cálculo vetorial

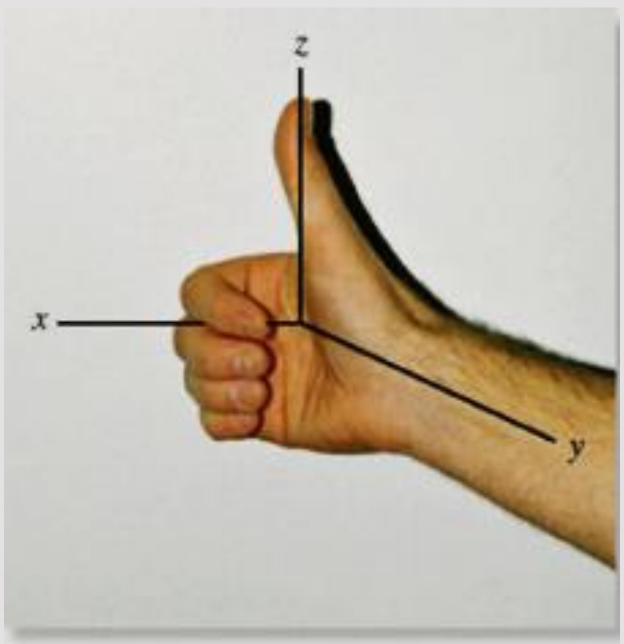
1.5. Vetores cartesianos
1.6. Adição e subtração de vetores cartesianos
1.7. Vetores posição
1.8. Vetor força orientado ao longo de uma reta
1.9. Produto escalar

1.5. VETORES CARTESIANOS

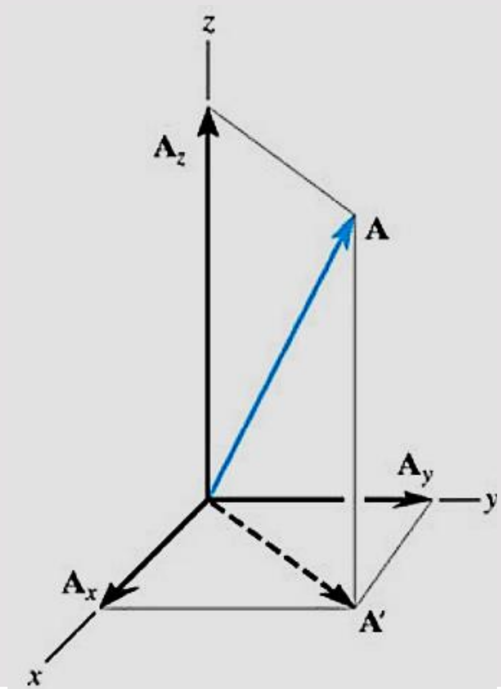
- A representação de vetores na forma vetorial cartesiana simplifica a solução de problemas tridimensionais a partir da aplicação de álgebra vetorial;

- O sistema de coordenadas cartesiano ou retangular utilizada a **regra da mão direita** para definir o sentido positivo dos eixos x, y e z;

- Um vetor **A** tem um, dois ou três **componentes** ao longo de eixos de coordenadas x, y, z, dependendo de como está orientado em relação aos eixos.



Sistema de coordenadas da mão direita



$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}_z$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$$

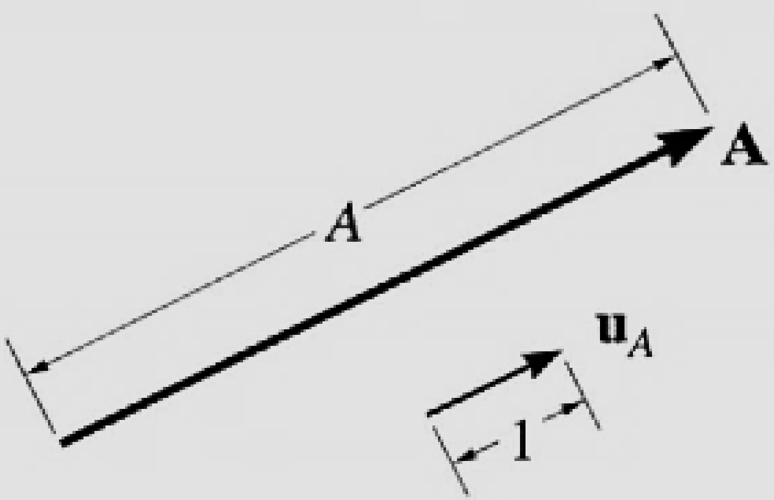
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z$$

1.5. VETORES CARTESIANOS

- A direção do vetor **A** é especificada usando um **vetor unitário** (ou vetor unidade);

- O vetor unitário tem esse nome porque apresenta sua intensidade igual a 1;

- Se o vetor **A** possui intensidade $A \neq 0$, então o vetor unidade tem a mesma direção de **A** e é representado por:



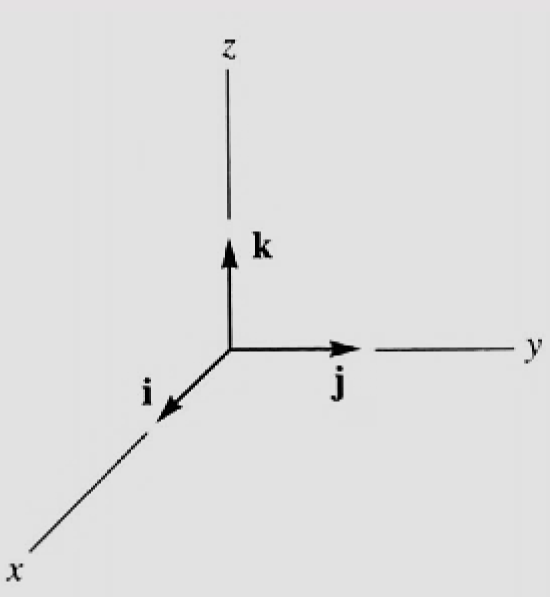
$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A}$$

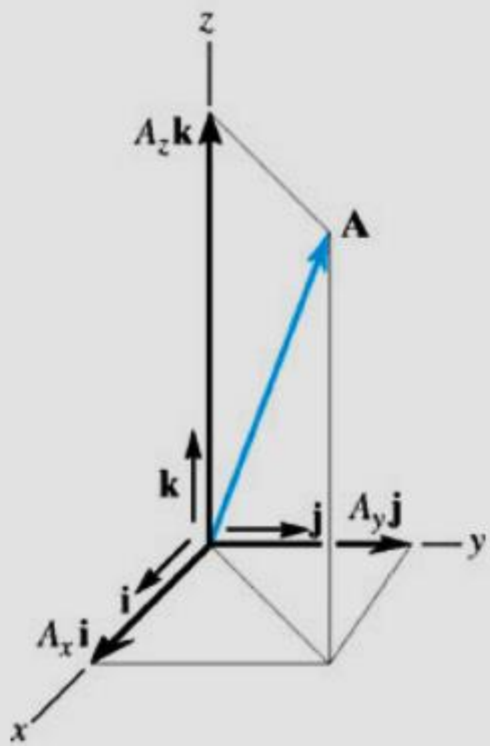
$$\mathbf{A} = A\mathbf{u}_A$$

1.5. VETORES CARTESIANOS

- No sistema de coordenadas cartesianas, em três dimensões, o conjunto de vetores unitários **i**, **j**, **k** (**vetores unitários cartesianos**) é usado para designar as direções dos eixos x, y, z, respectivamente;

- Dado o vetor **A**, que possui três componentes atuando nas direções positivas **i**, **j**, **k**, o vetor **A** pode ser escrito na forma cartesiana **A** = $A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$.

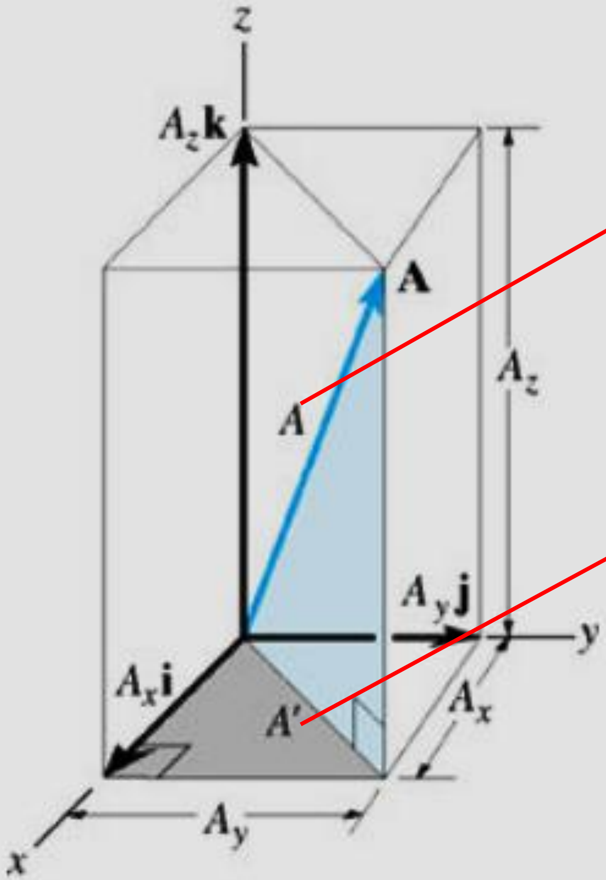




$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

1.5. VETORES CARTESIANOS

- A intensidade de um vetor cartesiano pode ser obtido do triângulo retângulo formado entre o vetor e suas componentes, aplicando o teorema de Pitágoras;



$$A = \sqrt{A'^2 + A_z^2}$$

$$A' = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

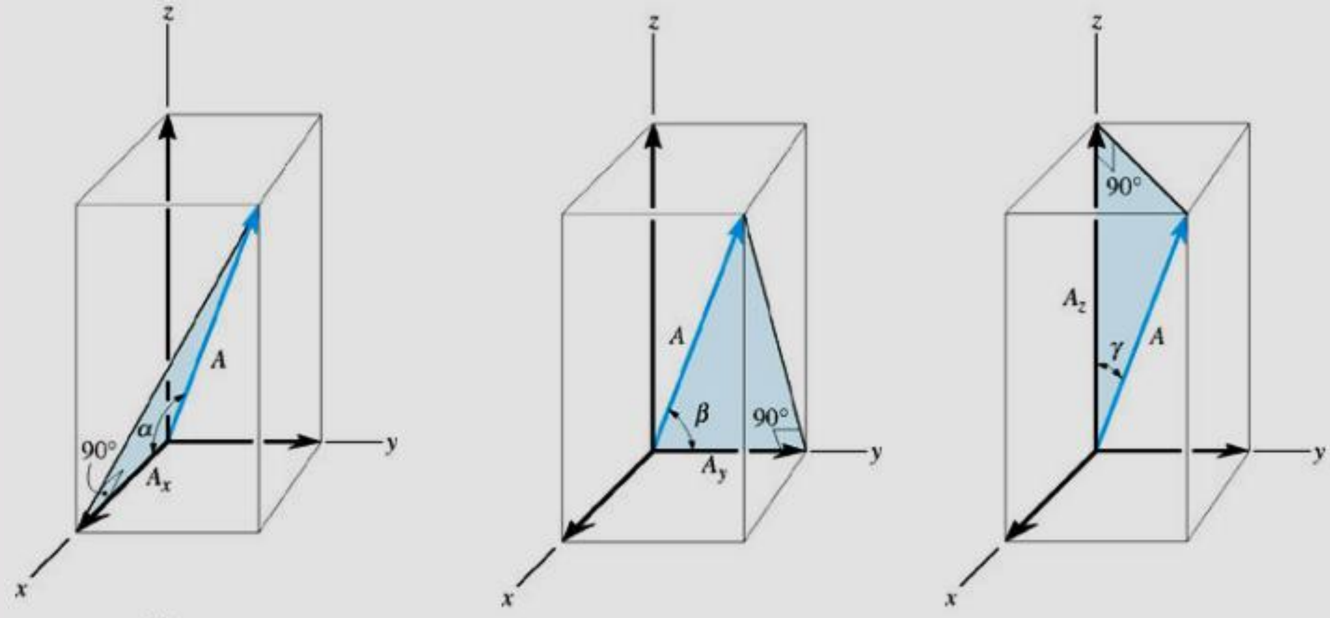
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

1.5. VETORES CARTESIANOS

- A orientação de um vetor cartesiano é definida pelos ângulos diretores coordenados α (alfa), β (beta) e γ (gama);

- Estes ângulos são medidos entre a origem de um dado vetor **A** e os eixos positivos x, y, z (localizados na origem de **A**);

- Cada um desse ângulos está entre 0º e 180º, independentemente da orientação de **A**;



$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \qquad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \qquad \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

1.5. VETORES CARTESIANOS

- Um maneira simples de obter os cossenos diretores de um dado vetor **A** é criar um vetor unitário na direção de **A**;

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x}{A}\mathbf{i} + \frac{A_y}{A}\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_A = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$$

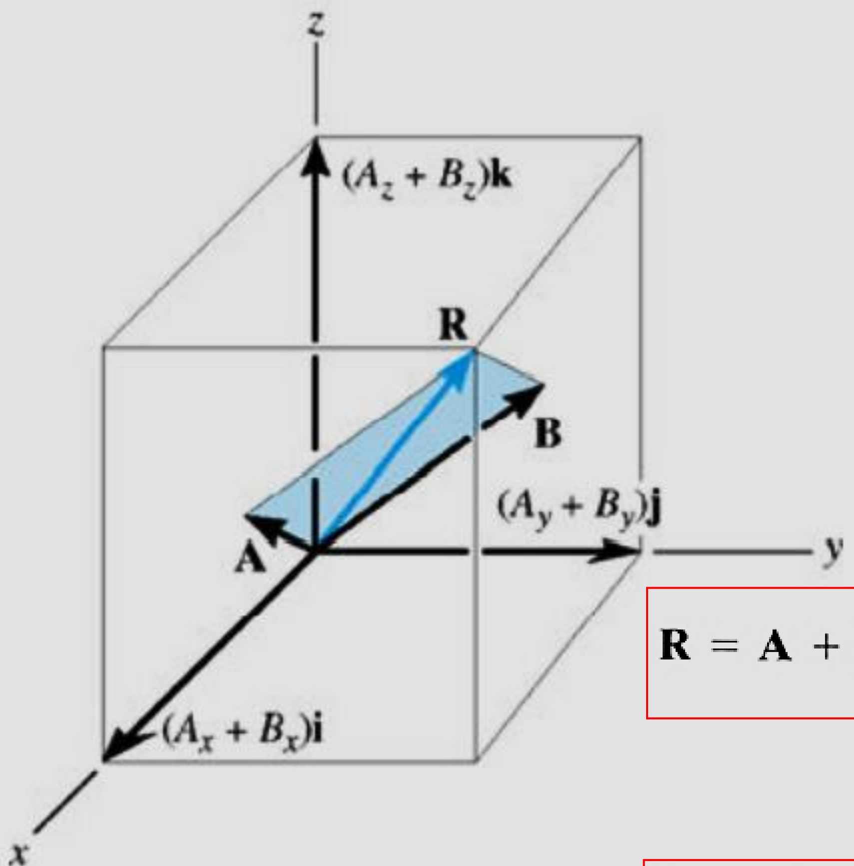
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

OU

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A\mathbf{u}_A \\ &= A\cos\alpha\mathbf{i} + A\cos\beta\mathbf{j} + A\cos\gamma\mathbf{k} \\ &= A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}\end{aligned}$$

1.6. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE VETORES CARTESIANOS

- As operações **vetoriais de adição e subtração** de dois ou mais vetores são simplificadas se os vetores são expressões em função de seus componentes cartesianos;



$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

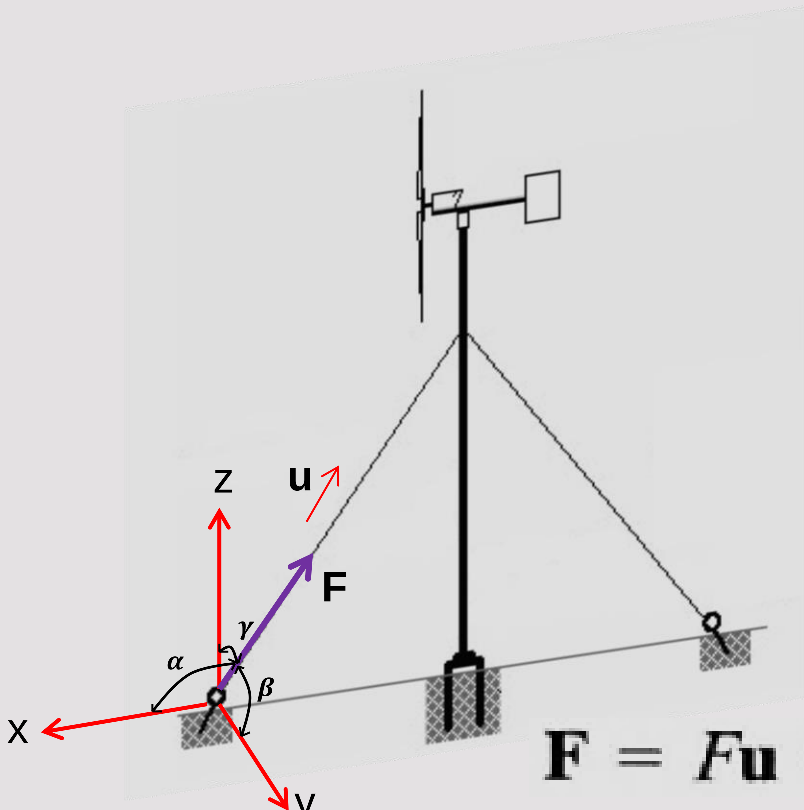
$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}}$$

$$\boxed{\mathbf{R}' = \mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x)\mathbf{i} + (A_y - B_y)\mathbf{j} + (A_z - B_z)\mathbf{k}}$$

1.6. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE VETORES CARTESIANOS

- Se o conceito de vetor adição for generalizado e aplicado em um **sistema de várias forças concorrentes**, então a força resultante será o vetor soma de todas as forças do sistema;

- $\sum F_x$, $\sum F_y$ e $\sum F_z$ representam as somas algébricas dos respectivos componentes x, y, z ou **i**, **j**, **k** de cada força do sistema;



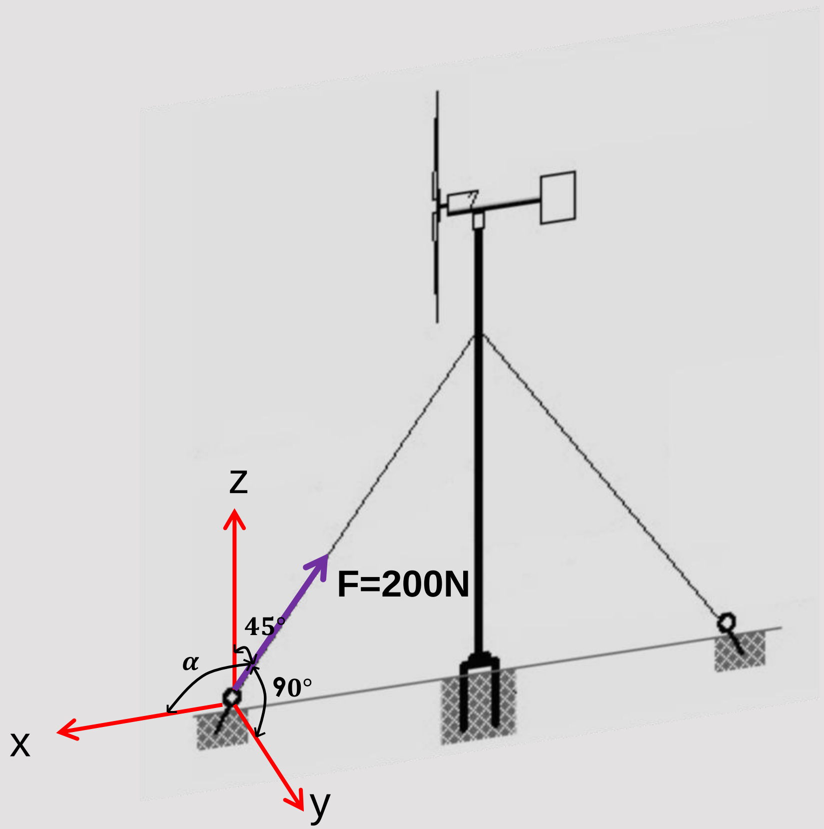
$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F} = \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u} = F\cos\alpha\mathbf{i} + F\cos\beta\mathbf{j} + F\cos\gamma\mathbf{k}$$

1.6. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE VETORES CARTESIANOS

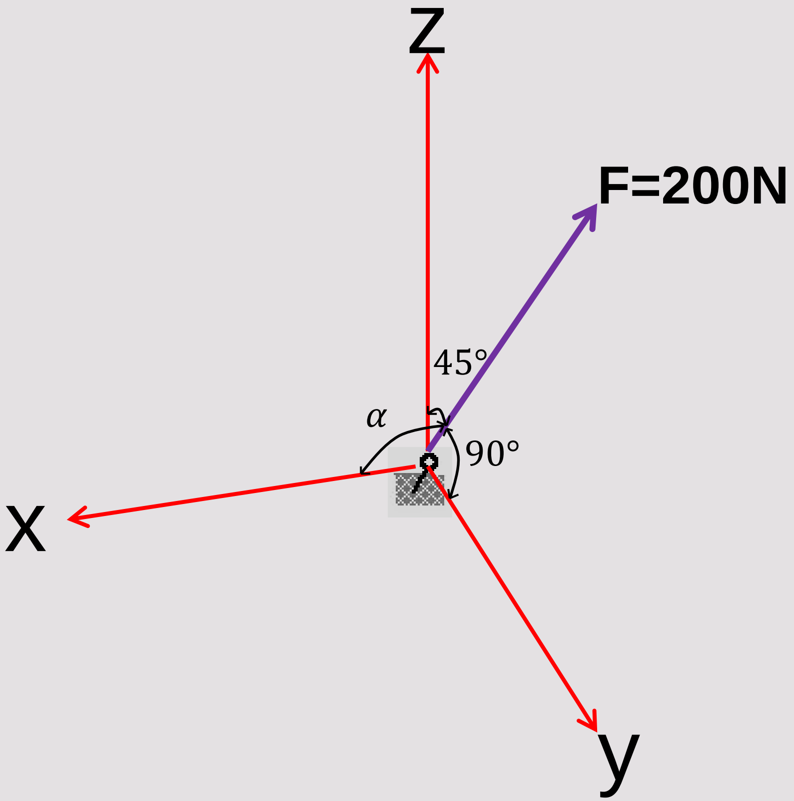
EXEMPLO 3:

- São usados cabos na sustentação de uma torre de turbina eólica de pequeno porte. Conforme o sistema de coordenadas mostrado na figura abaixo, é realizada uma força, a qual possui direção, sentido e uma intensidade de 200 N. Expresse a força **F** como um vetor cartesiano.



1.6. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE VETORES CARTESIANOS

SOLUÇÃO:



$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

$$cos^2\alpha + cos^2 90° + cos^2 45° = 1$$

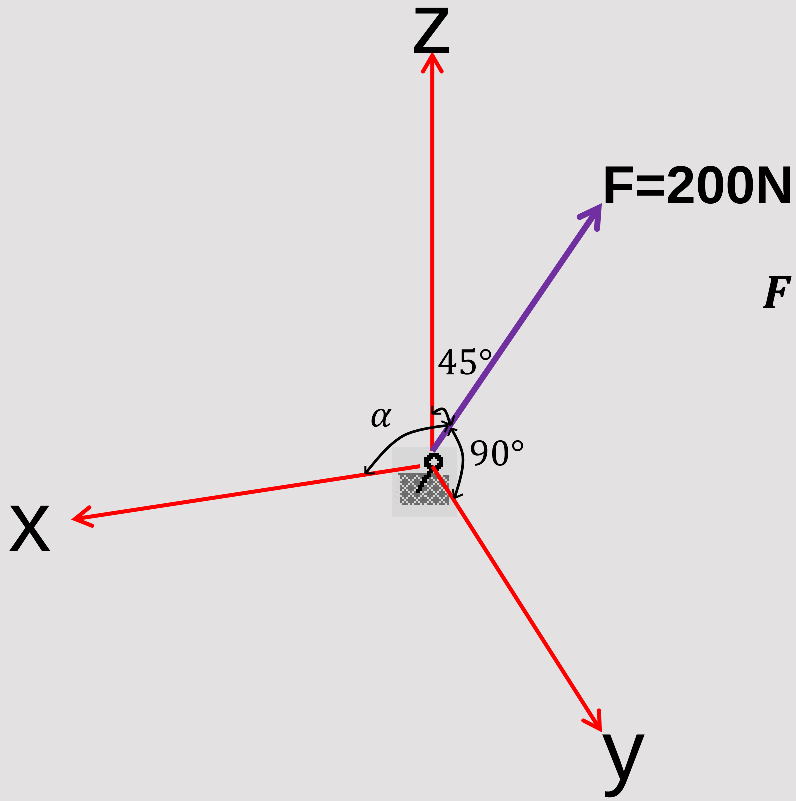
$$cos\alpha = \sqrt{1 - (0)^2 - (0{,}707)^2} = \pm 0{,}707$$

$$\alpha = cos^{-1}(0{,}707) = 45°$$

$$\alpha = cos^{-1}(-0{,}707) = 135°$$

1.6. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE VETORES CARTESIANOS

SOLUÇÃO:



$$\boldsymbol{F} = Fcos\alpha\boldsymbol{i} + Fcos\beta\boldsymbol{j} + Fcos\gamma\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F} = 200cos135°\boldsymbol{i} + 200cos90°\boldsymbol{j} + 200cos45°\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F} = (-141{,}43\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 141{,}43\boldsymbol{k})N$$

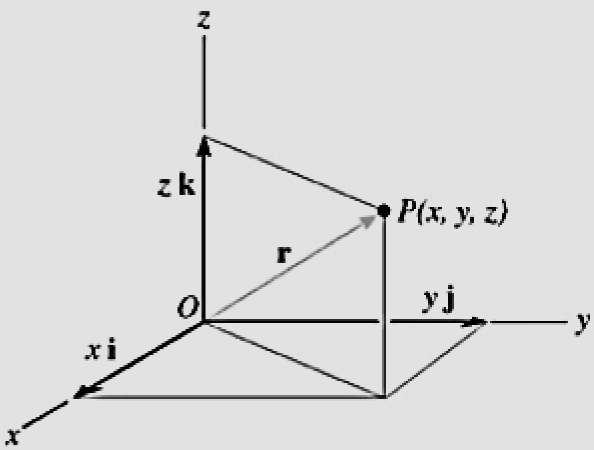
$$\boldsymbol{F} = (-141{,}43\boldsymbol{i} + 141{,}43\boldsymbol{k})N$$

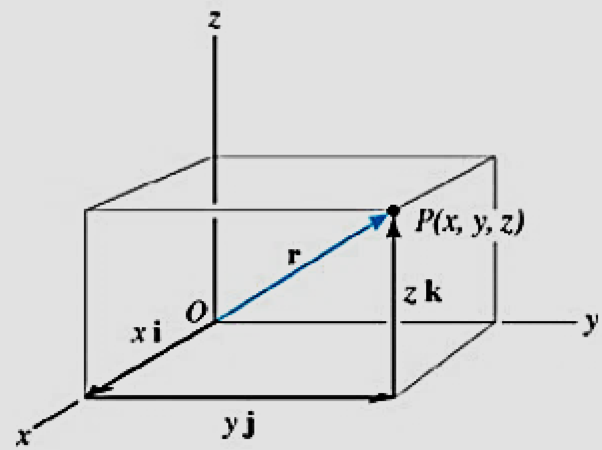
$$F = \sqrt{(-141{,}43)^2+(141{,}43)^2} = 200N$$

1.7. VETORES POSIÇÃO

- Um vetor posição pode ser definido como um vetor fixo que localiza um ponto no espaço em relação a outro;

- Por exemplo, se um dado vetor **r** estende-se da origem de coordenadas *O*, para o ponto P (x,y,z), então este vetor **r** pode ser expresso na forma de vetor cartesiano **r** = x**i** + y**j** + z**k**;



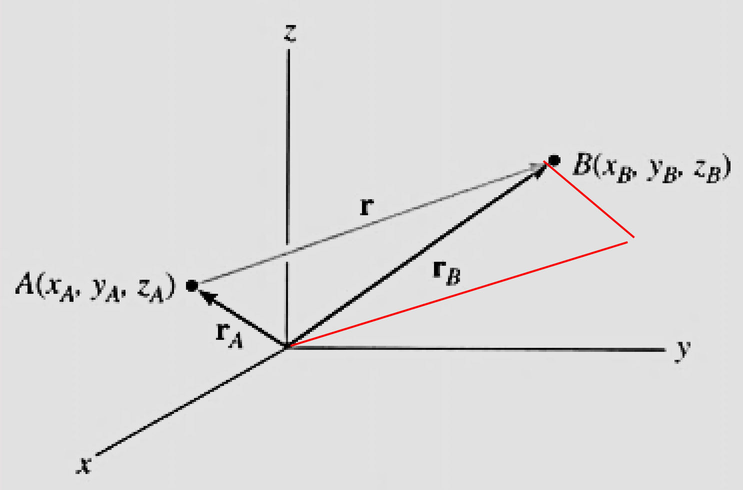


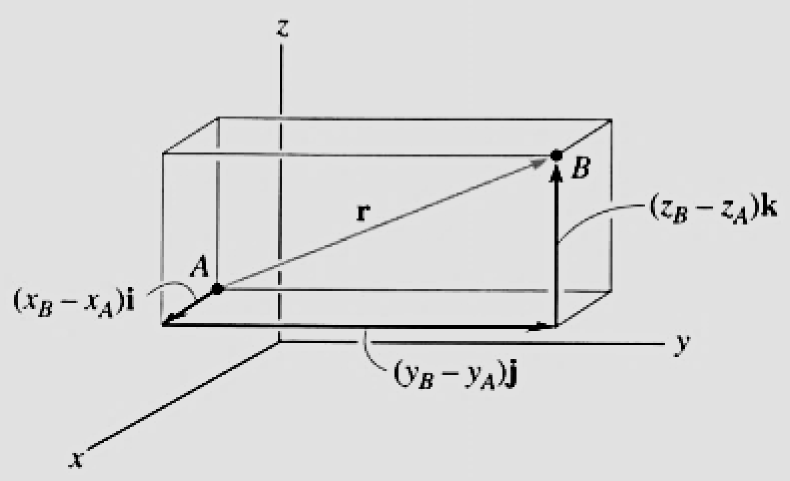
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

1.7. VETORES POSIÇÃO

- Geralmente o vetor posição **r** é orientado do ponto A para o ponto B no espaço;

- Por uma questão de convenção, algumas vezes este vetor posição é referido com dois índices subscritos, para indicar o ponto de origem e o ponto para o qual está orientado; ou seja, o vetor **r** também pode ser designado como $\mathbf{r}_{AB}$;





$$\mathbf{r}_A + \mathbf{r} = \mathbf{r}_B$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j} + z_B\mathbf{k}) - (x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} + z_A\mathbf{k})$$

$$\boxed{\mathbf{r} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}}$$

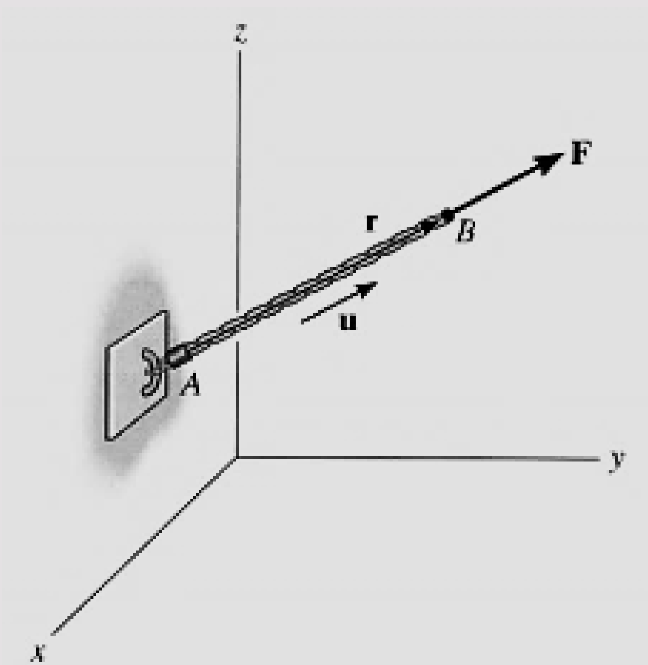
1.8. VETOR FORÇA ORIENTADO AO LONGO DE UMA RETA

- Frequentemente em problemas de estática tridimensional, a direção de uma força é definida por dois pontos pelos quais passa sua linha de ação;

- Conforme mostra a figura, a força **F** é orientada ao longo da corda *AB;*

- Pode-se definir **F** como um vetor cartesiano pressupondo que ele tenha a mesma *direção* e *sentido* que o vetor posição **r** orientado do ponto *A* para o ponto *B*;

- A direção comum entre eles é especificada pelo vetor unitário;

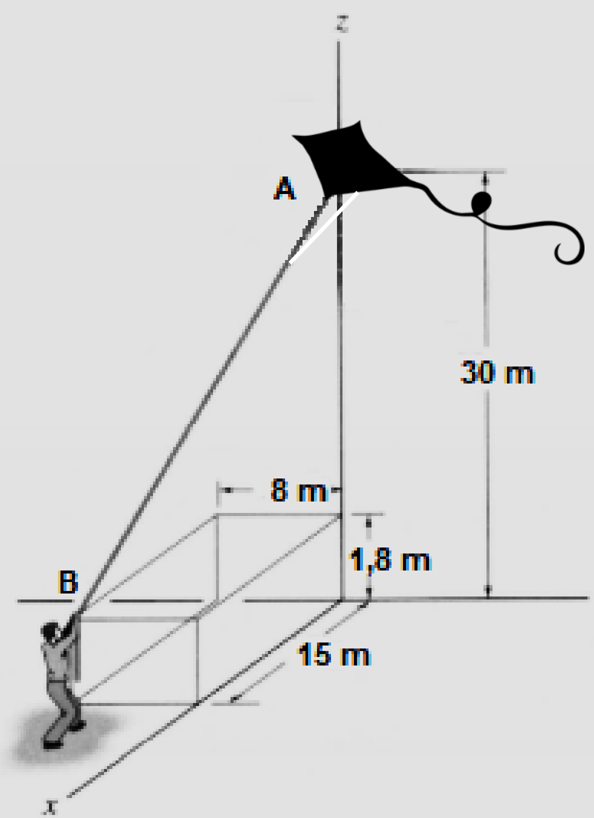


$$\mathbf{F} = F\mathbf{u} = F\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

1.8. VETOR FORÇA ORIENTADO AO LONGO DE UMA RETA

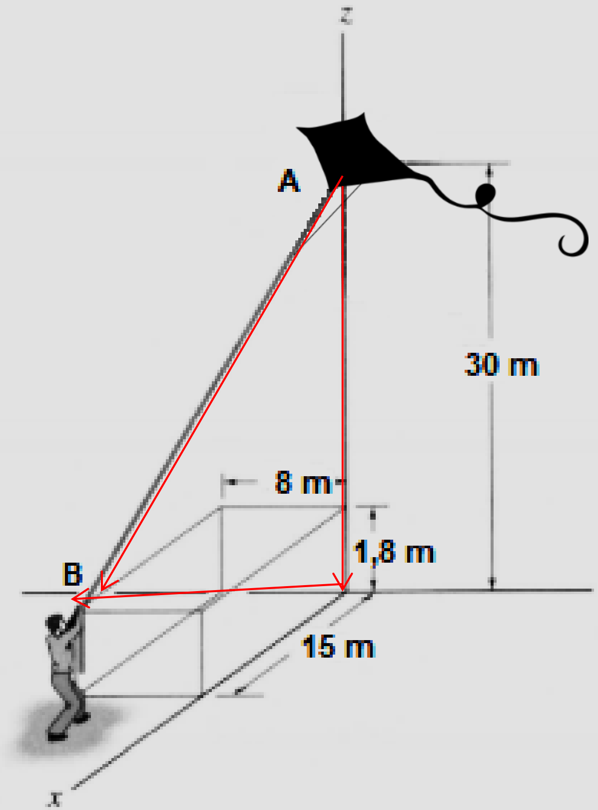
EXERCÍCIO 4:

- Um rapaz sustenta a linha de uma pipa com uma força de 50 N. Represente essa força, que atua sobre o ponto A (localizado na pipa), como vetor cartesiano e determine a sua direção.



1.8. VETOR FORÇA ORIENTADO AO LONGO DE UMA RETA

SOLUÇÃO:



O vetor **r:**

$$\boldsymbol{r} = (15m - 0)\boldsymbol{i} + (-8\,m - 0)\boldsymbol{j} + (1{,}8\,m - 30\,m)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r} = \{15\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} - 28{,}2\boldsymbol{k}\}\,m$$

A intensidade do vetor **r:**

$$r = \sqrt{(15\,m)^2 + (-8\,m)^2 + (-28{,}2)^2} = 32{,}93\,m$$

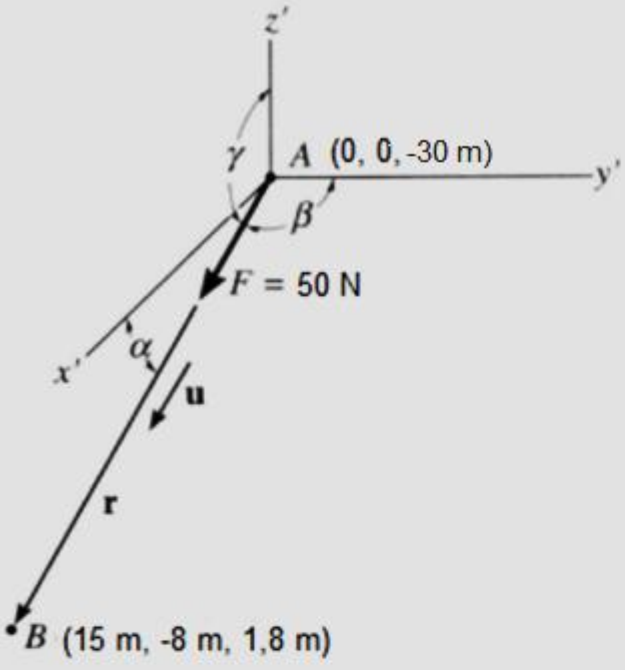
O vetor unitário **u:**

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{15}{32{,}93}\boldsymbol{i} - \frac{8}{32{,}93}\boldsymbol{j} - \frac{28{,}2}{32{,}93}\boldsymbol{k}$$

1.8. VETOR FORÇA ORIENTADO AO LONGO DE UMA RETA

SOLUÇÃO:

Os ângulos diretores coordenados são medidos entre **r** (ou **F**) e os eixos positivos de um sistema de coordenadas cartesianas com origem em *A.*



$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{15}{32{,}93}\right) = 62{,}9°$$

$$\beta = cos^{-1}\left(\frac{-8}{32{,}93}\right) = 104{,}06°$$

$$\gamma = cos^{-1}\left(\frac{-28{,}2}{32{,}93}\right) = 148{,}91°$$

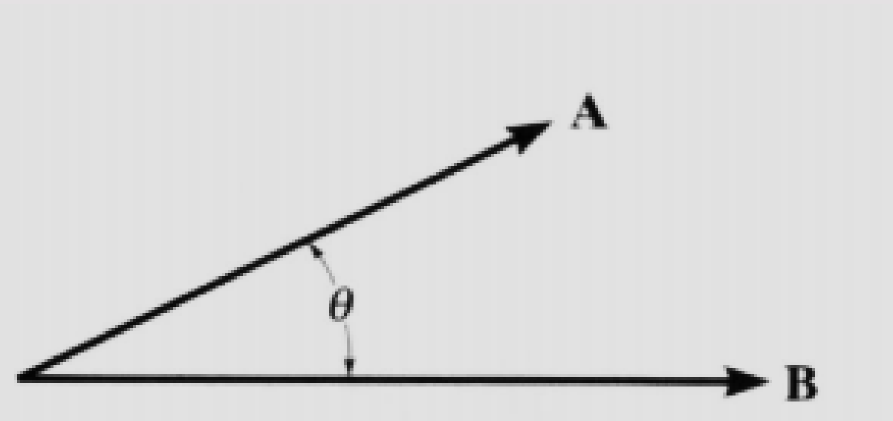
1.9. PRODUTO ESCALAR

- Às vezes, em estática, é necessário calcular o ângulo entre duas retas ou os componentes de uma força paralela ou perpendicular a uma reta;

- Em duas dimensões, tais problemas podem ser resolvidos por trigonometria, considerando que é fácil de visualizar a geometria;

- Em três dimensões, em geral, a visualização é difícil e então é preciso utilizar métodos vetoriais para a solução;

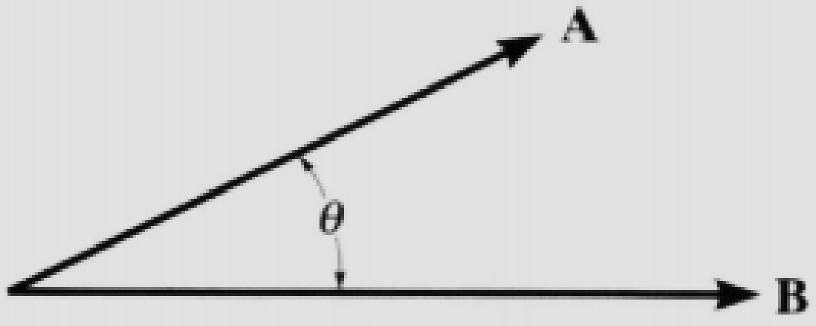
- O produto escalar é um método particular para multiplicar dois vetores;



1.9. PRODUTO ESCALAR

- O produto de dois vetores **A** e **B**, escrito **A.B** é lido como “A escalar B”;
- O **produto escalar** é definido como o produto das intensidades de **A** e **B** e do cosseno do ângulo θ formado entre as origens desses dois vetores.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$$



1.9. PRODUTO ESCALAR

Leis das operações:

1. Lei comutativa:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

2. Multiplicação por escalar:

$$a(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (a\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})a$$

3. Lei distributiva:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$$

1.9. PRODUTO ESCALAR

- O produto escalar de cada um dos vetores unitários cartesianos é dado por:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1 \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1 \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0 \qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0 \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0$$

- Considerando o produto escalar de dois vetores gerais **A** e **B** expressos na forma vetorial cartesiana, temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k})\cdot(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\ &= A_xB_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) + A_xB_y(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + A_xB_z(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}) \\ &+ A_yB_x(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}) + A_yB_y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}) \\ &+ A_zB_x(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\end{aligned}$$

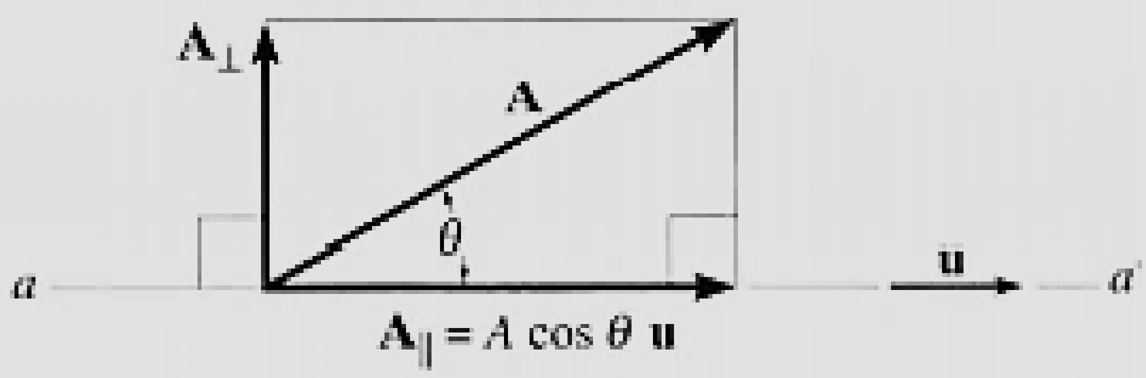
$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

1.9. PRODUTO ESCALAR

- O ângulo formado entre dois vetores (os vetores **A** e **B**, por exemplo) ou retas que se interceptam:

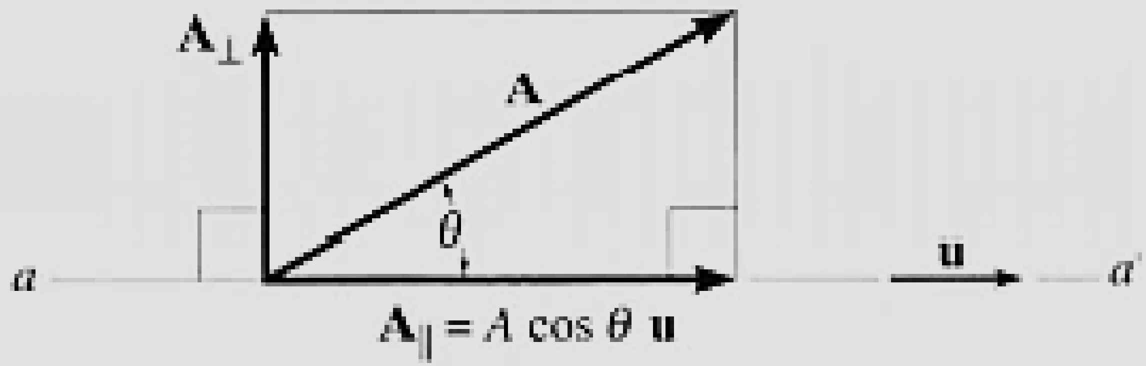
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}\right) \qquad 0^\circ \le \theta \le 180^\circ$$

- O componente paralelo de uma **reta a** de um vetor:



1.9. PRODUTO ESCALAR

➢ O componente paralelo de uma reta a de um vetor:



$$A_\parallel = A\cos\theta = \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}$$

$$\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}/A)$$

$$\mathbf{A}_\parallel = A\cos\theta\ \mathbf{u} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$$

$$A_\perp = A \operatorname{sen} \theta.$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\parallel + \mathbf{A}_\perp$$

$$A_\perp = \sqrt{A^2 - A_\parallel^2}.$$

$$\mathbf{A}_\perp = \mathbf{A} - \mathbf{A}_\parallel$$

ATÉ A PRÓXIMA!