Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

SISTEMAS SIMPLES DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

3.1. Reduções adicionais de um sistema de forças e momentos

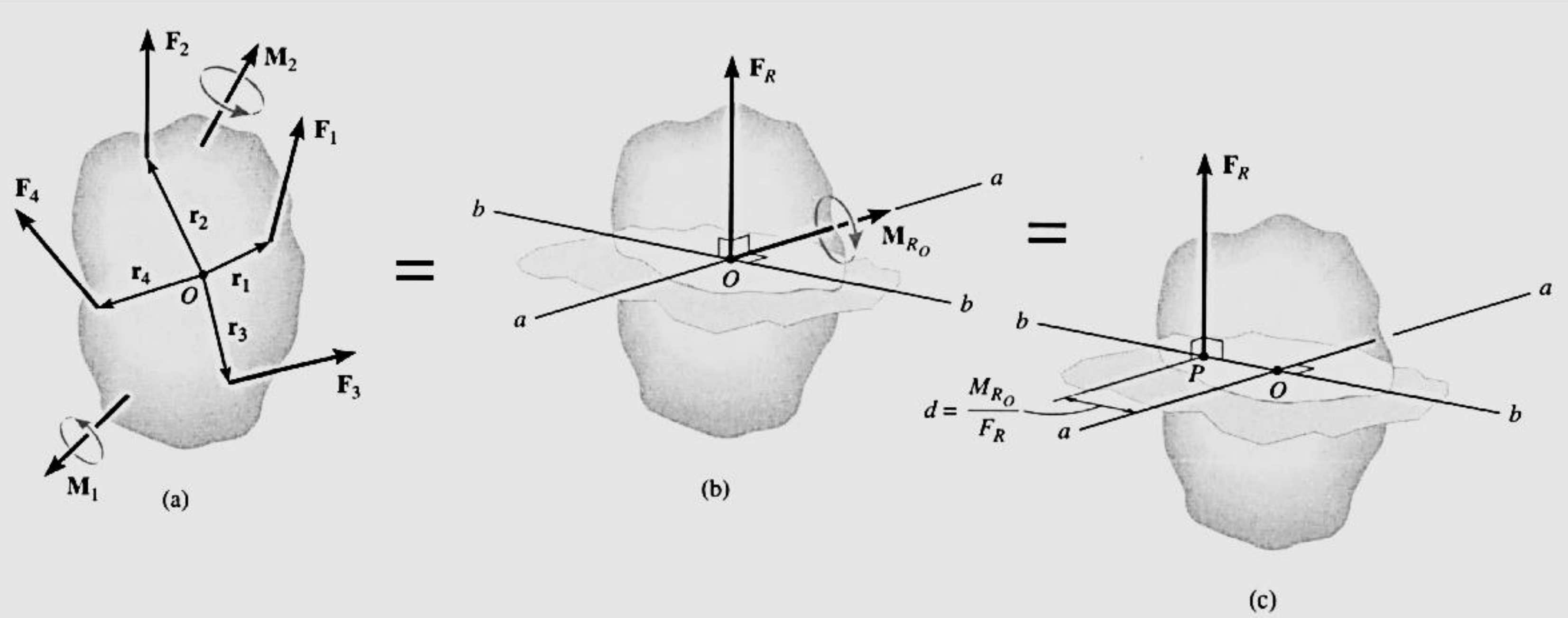
3.2. Reduções de um sistema simples de cargas distribuídas

3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Simplificação para uma única força resultante

- Um sistema de forças e de momentos que atuam sobre um corpo rígido se reduz no ponto *O* a uma força resultante, $\boldsymbol{F_R} = \sum \boldsymbol{F}$ e a um momento resultante, $\boldsymbol{M_{R_O}} = \sum \boldsymbol{M_O}$, perpendiculares entre si;

- Sempre que isso ocorre, podemos fazer uma simplificação adicional do sistema de forças e momentos, deslocando F_R para um outro ponto *P* localizado no corpo ou fora dele, de modo que nenhum momento resultante tenha que ser aplicado sobre ele;



3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Simplificação para uma única força resultante

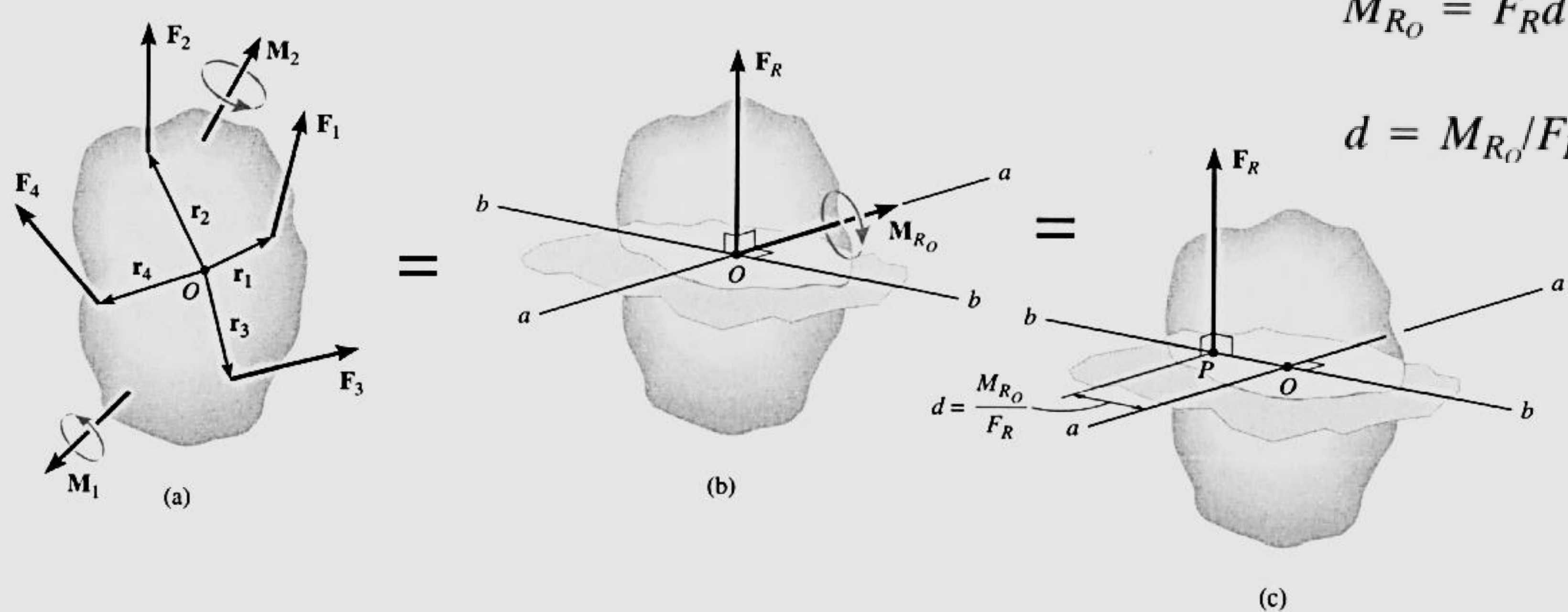
- Ou seja, se o sistema de forças e momentos for reduzido a um sistema resultante no ponto *P*, apenas a força resultante terá que ser aplicada ao corpo;

- A distância do ponto *P* a *O* pode sempre ser determinada, desde que $\boldsymbol{F_R}$ e $\boldsymbol{M_{R_O}}$ sejam conhecidos;

- *P* deve ser localizar sobre o eixo *bb*, que é perpendicular tanto às linhas de ação de $\boldsymbol{F_R}$ quanto ao eixo *aa,* de tal modo que a distância *d* satisfaça a equação escalar:

$$M_{R_O} = F_R d$$

$$d = M_{R_O}/F_R$$



3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Simplificação para uma única força resultante

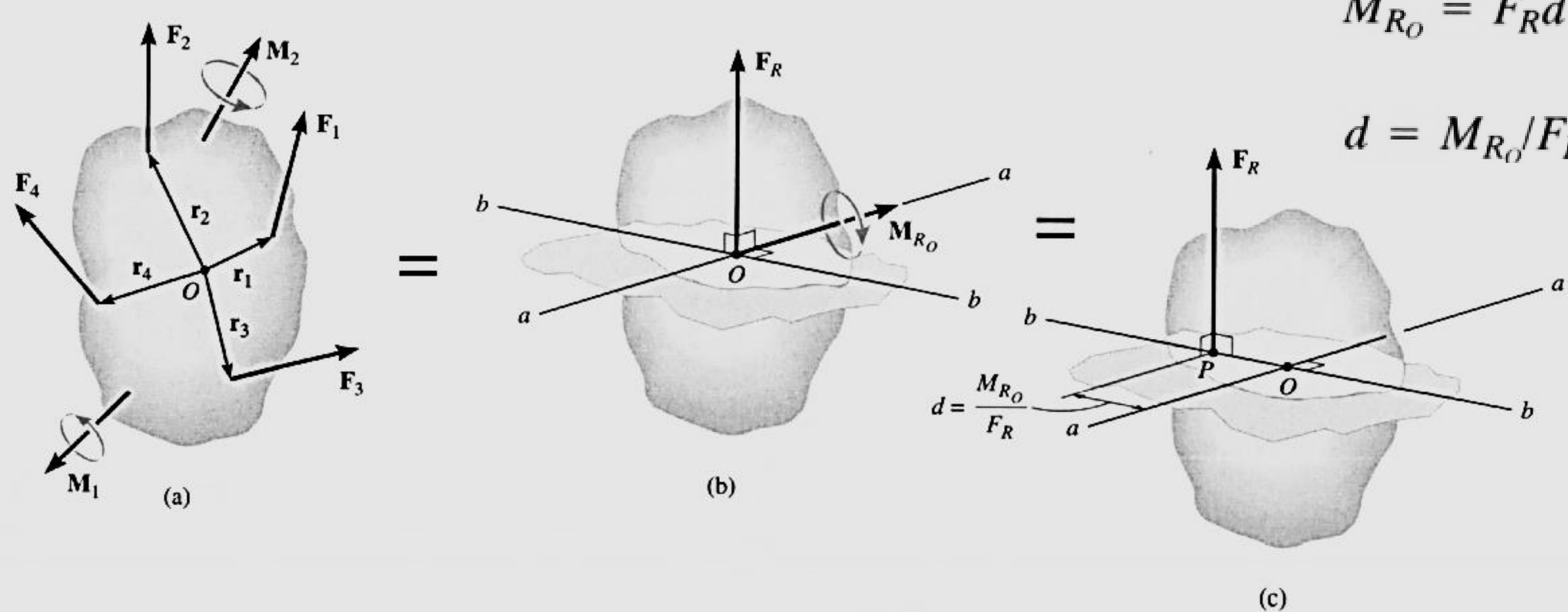
- Com $\boldsymbol{F_R}$ assim localizada, os efeitos externos produzidos sobre o corpo serão os mesmos produzidos tanto pelo sistema de forças e de momentos, quanto pelas resultantes da força e do momento;

- Mesmo que um sistema tenha forças concorrentes, coplanares ou paralelas entre si, poderá sempre reduzido a uma única força resultante $\boldsymbol{F_R}$**;**

- Isso é possível porque $\boldsymbol{F_R}$ e $\boldsymbol{M_{R_O}}$ sempre são perpendiculares entre si quando o sistemas de forças é simplificado para um ponto *O* qualquer.

$$M_{R_O} = F_R d$$

$$d = M_{R_O}/F_R$$

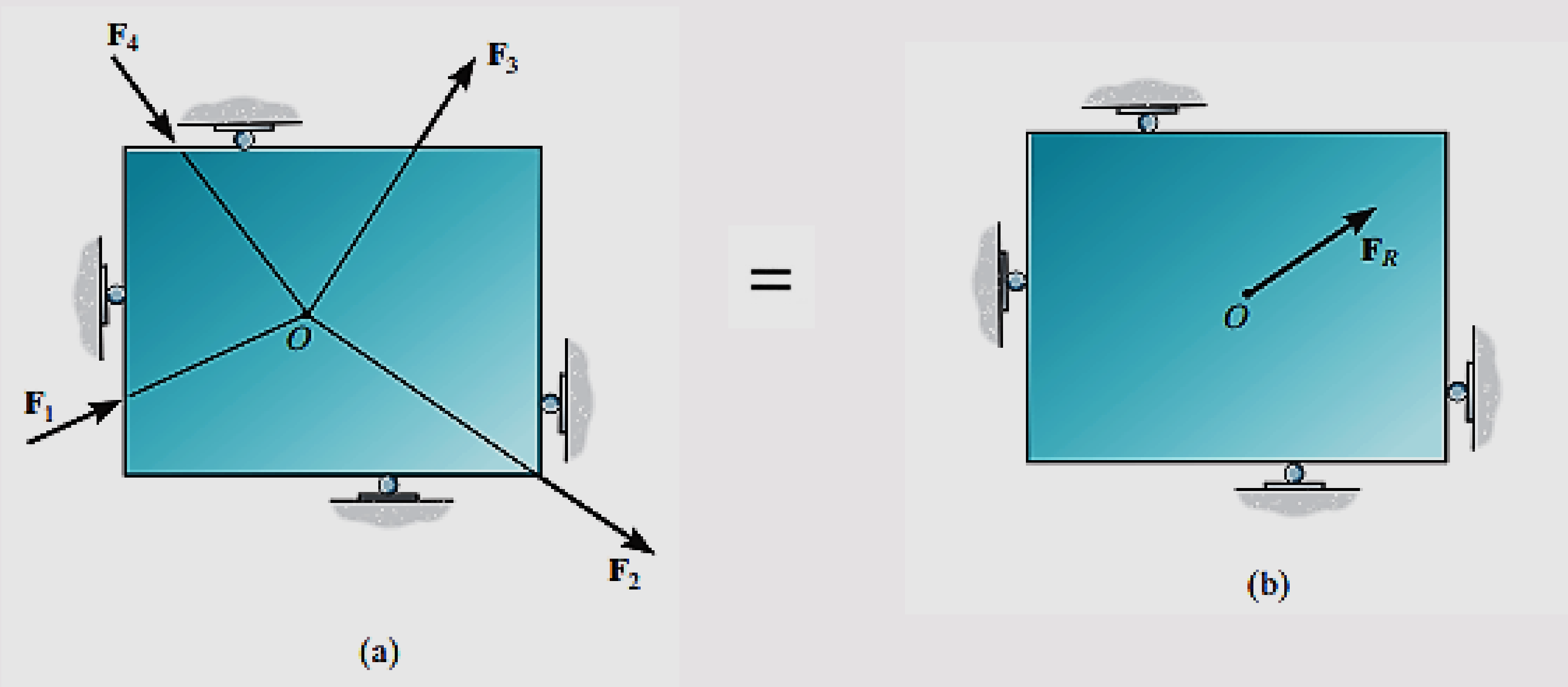


3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Simplificação para uma única força resultante

a) Sistemas de forças concorrentes

- Como um sistema de forças concorrentes é aquele em que as linhas de ação de todas as forças se interceptam em um ponto comum *O*, então o sistema de forças não produz momento algum em relação a esse ponto.



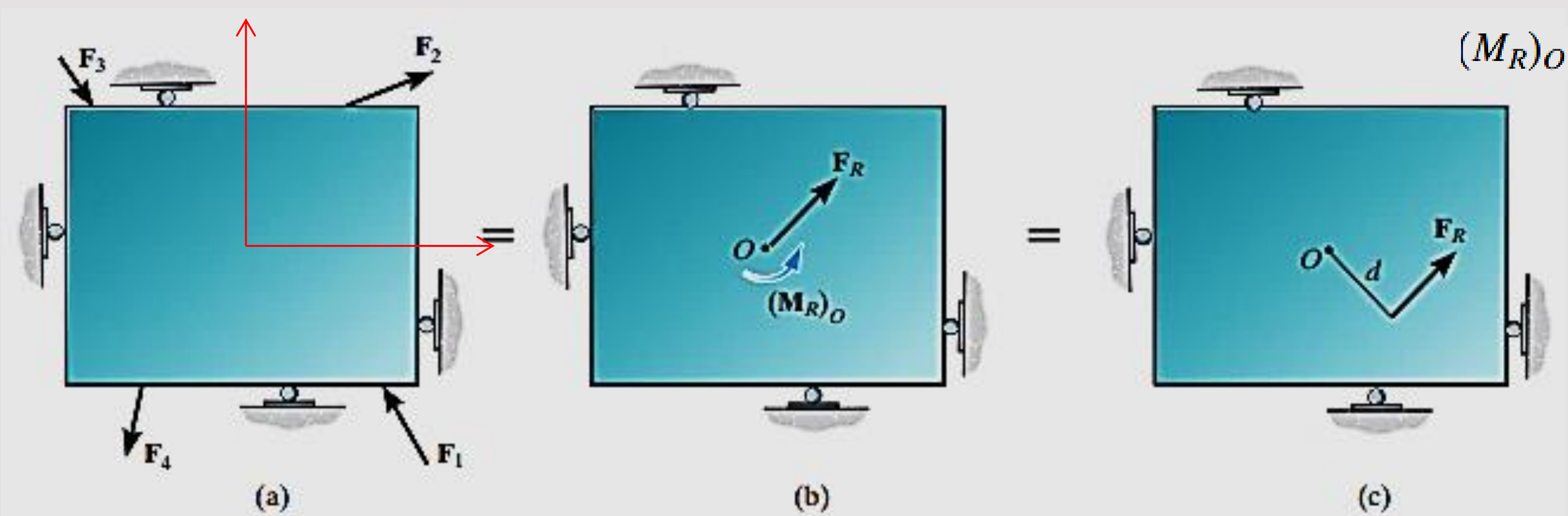
3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Simplificação para uma única força resultante

b) Sistemas de forças coplanares

- Neste caso, as linhas de ação de todas as forças localizam-se no mesmo plano. Deste modo, a força resultante $\boldsymbol{F_R} = \sum \boldsymbol{F}$ desse sistema também situa-se nesse plano;

- Além disso, o momento de cada uma das forças em relação a qualquer ponto *O* está direcionado perpendicularmente a esse plano. Logo, o momento resultante $\boldsymbol{M_{R_O}}$ e a força resultante $\boldsymbol{F_R}$ serão mutuamente perpendiculares.



$$(M_R)_O = F_R d = \Sigma M_O$$

$$d = (M_R)_O / F_R$$

3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

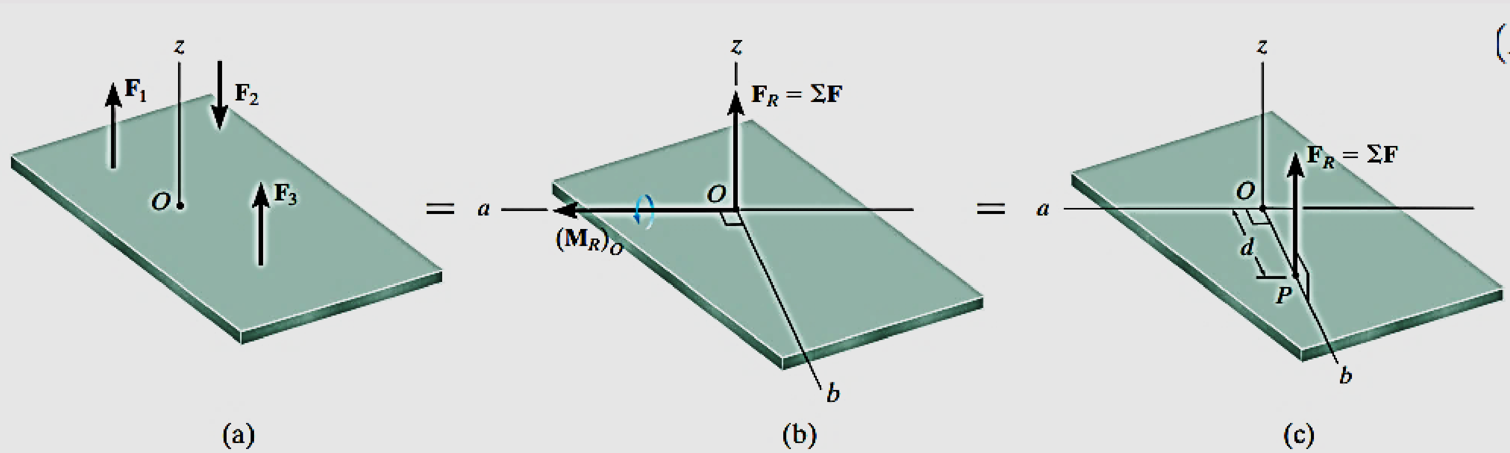
Simplificação para uma única força resultante

c) Sistemas de forças paralelas

- Este sistema consiste em forças que são todas paralelas ao eixo *z.* Logo, a força resultante $\boldsymbol{F_R} = \sum \boldsymbol{F}$ no ponto *O* também precisa ser paralela a esse eixo;

- O momento produzido por cada força encontra-se no plano da chapa e, portanto, o momento de binário resultante, $\boldsymbol{M_{R_O}}$, também estará nesse plano, ao longo do eixo do momento *a*, já que $\boldsymbol{F_R}$ e $\boldsymbol{M_{R_O}}$são mutuamente perpendiculares;

- Assim, o sistema de forças pode ser adicionalmente simplificado para uma única força resultante equivalente $\boldsymbol{F_R}$ que age no ponto *P* localizado sobre o eixo perpendicular *b;*



$$(M_R)_O = F_R d = \Sigma M_O$$

$$d = (M_R)_O / F_R$$

3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Resumindo: Procedimento para análise

- Estabeleça os eixos x, y, z e posicione a força resultante $\boldsymbol{F_R}$ a uma distância arbitrária da origem das coordenadas.

1) Somatório das forças

- A força resultante é igual à soma de todas as forças no sistema. Para um sistema de forças coplanares, decomponha cada força em suas componentes x e y;

- Componentes positivas são direcionadas ao longo dos eixos x e y positivos, e componentes negativas são direcionadas ao longo dos eixos x e y negativos;

2) Somatório de momentos

- O momento da força resultante em relação ao ponto *O* é igual à soma de todos os momentos de binário no sistema mais os momentos de todas as forças no sistema em relação a *O*;

- Essa condição de momento é usada para encontrar a posição da força resultante em relação ao ponto *O*.

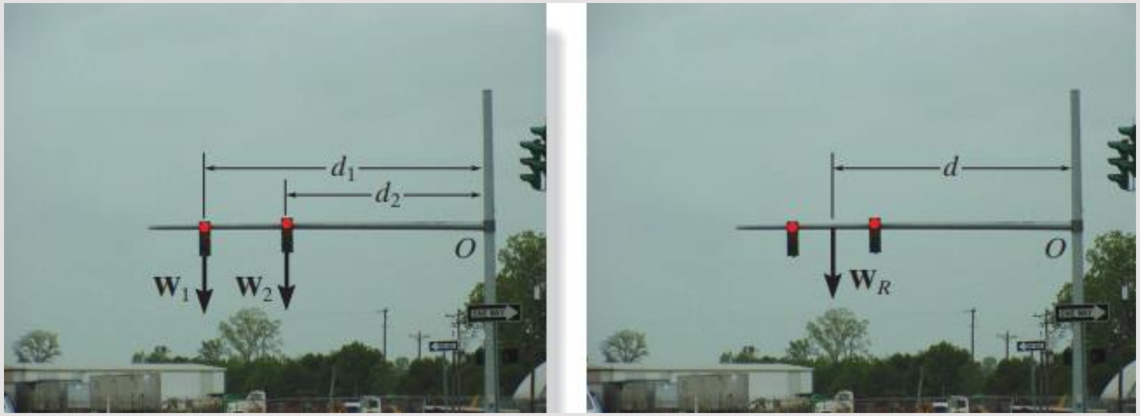
3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

- As quatro forças dos cabos são todas concorrentes no ponto O do pilar da ponte;

- Consequentemente, elas não produzem qualquer momento resultante nesse ponto, apenas uma força resultante $\boldsymbol{F_R}$;

- Observe que os projetistas posicionaram os cabos de modo que $\boldsymbol{F_R}$ esteja direcionado ao longo do pilar da ponte diretamente para o apoio, de modo a evitar qualquer flexão no pilar.

3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS



- Nesta situação, os pesos dos semáforos são substituídos pela sua força resultante;

$$W_R = W_1 + W_2$$

- Além disso, cada uma dessas forças gera um momento em relação a *O;*

$$M_{R_O} = W_1 d_1 + W_2 d_2$$

- A força resultante age a uma distância *d* em relação a *O;*

$$d = \frac{M_{R_O}}{W_R}$$

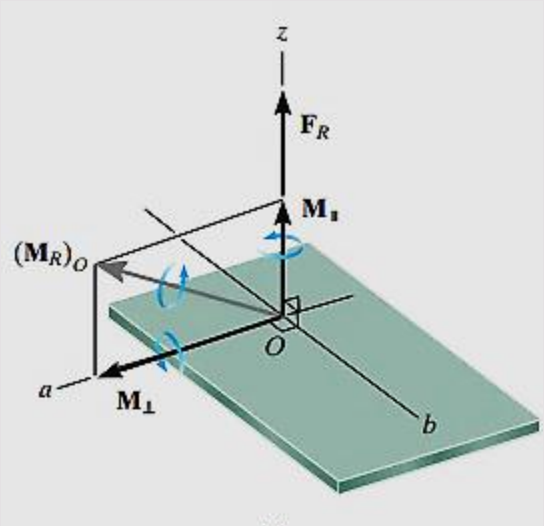
- Os dois sistemas são equivalentes.

3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Redução a um torsor

- Normalmente, um sistema de forças e momentos de binário tridimensional terá uma força resultante $\boldsymbol{F_R}$ equivalente no ponto *O* e um momento de binário resultante $\boldsymbol{M_{R_O}}$ que não são perpendiculares entre si;

- Embora um sistema de forças como esse não possa ser adicionalmente reduzido para uma única força resultante equivalente, o momento de binário resultante $\boldsymbol{M_{R_O}}$ pode ser decomposto em uma **componente paralela** e em outra **perpendicular** à linha de ação de $\boldsymbol{F_R}$;



(a)

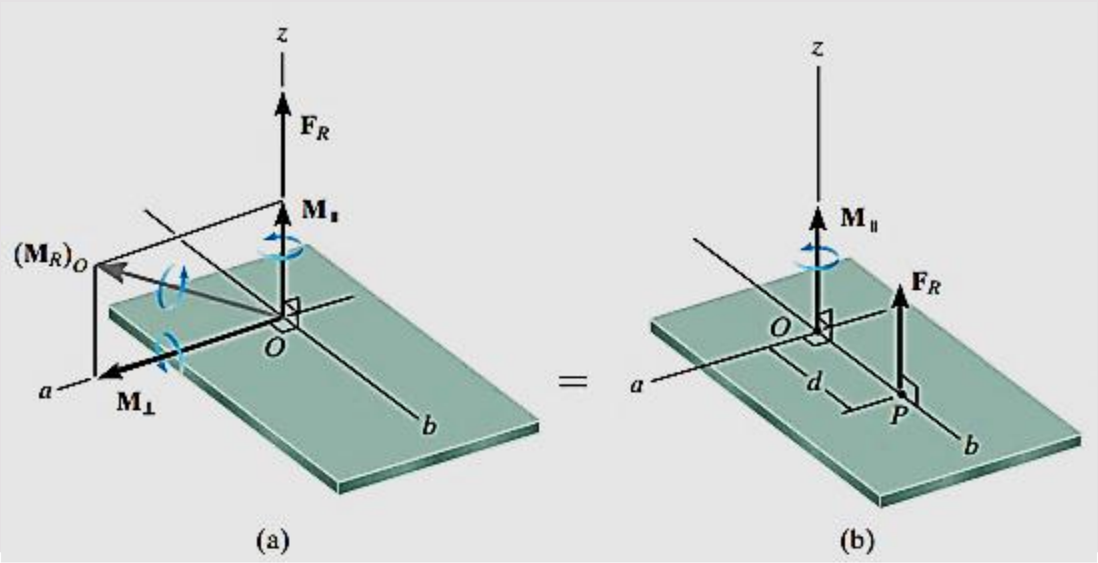
3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Redução a um torsor

- Se isso parece difícil de ser feito em três dimensões, usamos o produto escalar para obter:

$$\mathbf{M}_{\parallel} = (\mathbf{M}_R) \cdot \mathbf{u}_{FR} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{M}_{\perp} = \mathbf{M}_R - \mathbf{M}_{\parallel}$$

- A componente perpendicular pode ser substituída se movermos $\boldsymbol{F_R}$ para o ponto *P*, a uma distância d do ponto *O* ao longo do eixo *b,* o qual é perpendicular ao eixo *a* e à linha de ação de $\boldsymbol{F_R}$;



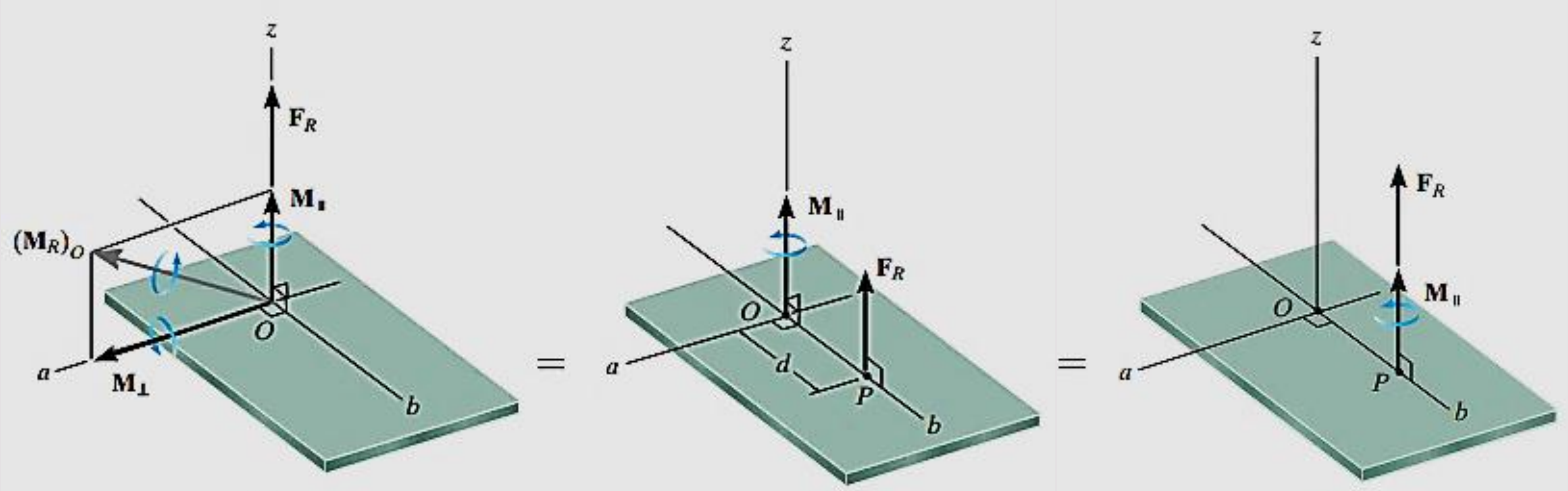
3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Redução a um torsor

- A posição de P pode ser determinada por:

$$d = M_{\perp}/F_R$$

- Como a **componente paralela** é um vetor livre, ele pode ser movido para o ponto *P;*



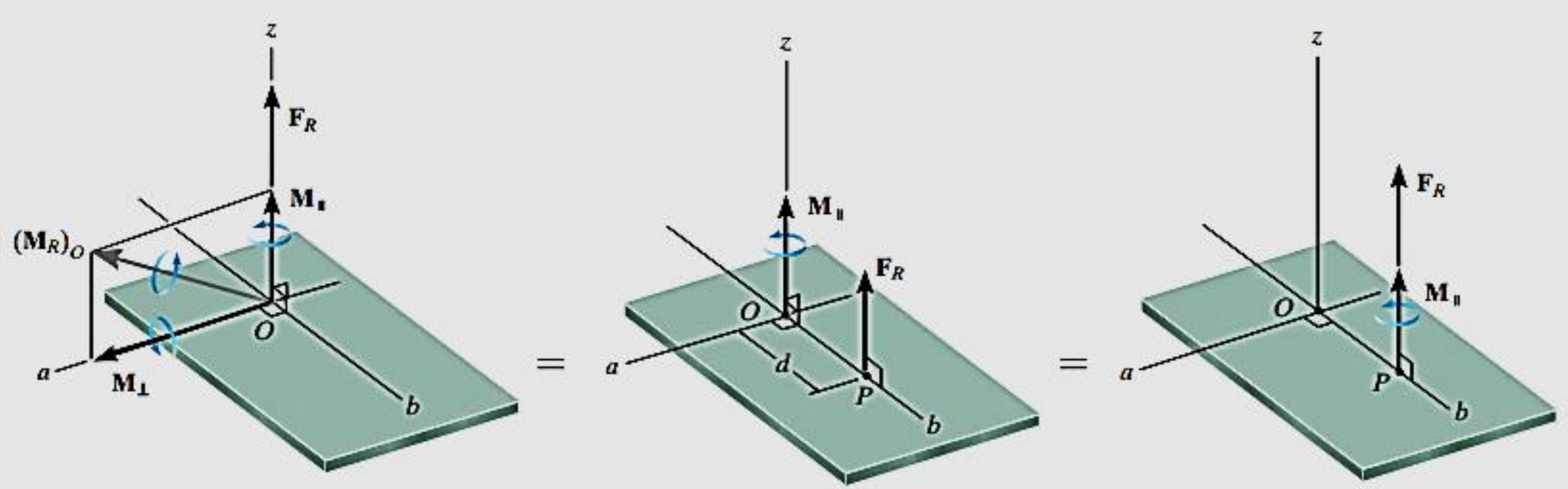
(a) (b) (c)

3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Redução a um torsor

- Essa combinação de uma força resultante $\boldsymbol{F_R}$ e um momento de binário colinear $\boldsymbol{M}_{||}$ tenderá a transladar e girar o corpo em relação ao seu eixo e é chamada de **torsor** ou **parafuso**;

- Um **torsor** é o sistema mais simples que pode representar qualquer sistema de forças e momentos de binário em geral agindo em um corpo;



(a) (b) (c)

3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Observações importantes:

- Um sistema de forças concorrentes, coplanares ou paralelas sempre pode ser reduzido a uma única força resultante que age em um ponto específico *P*;

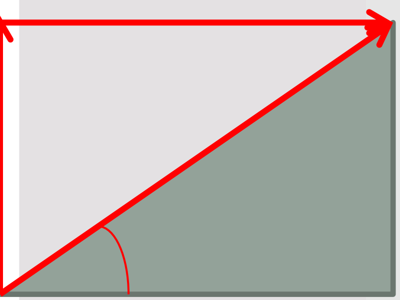
- Para qualquer outro tipo de sistema de forças, a redução mais simples é um torsor, que consiste na força resultante e momento de binário colinear agindo em um ponto específico *P;*

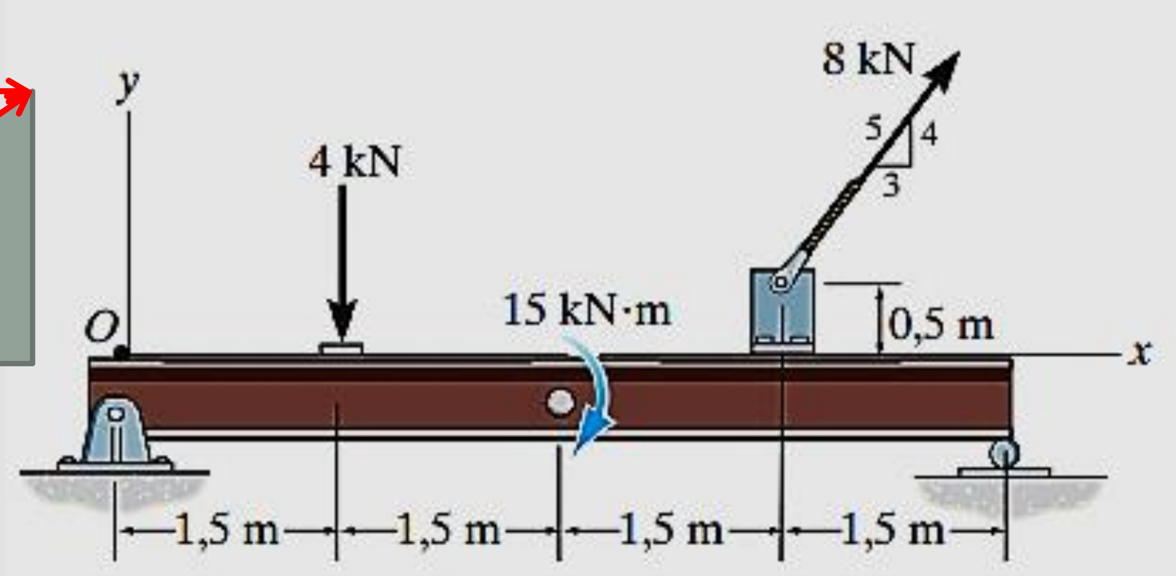
- Um torsor tende a provocar tanto uma translação ao longo do eixo quanto uma rotação em torno dele.

3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Exercício 17:

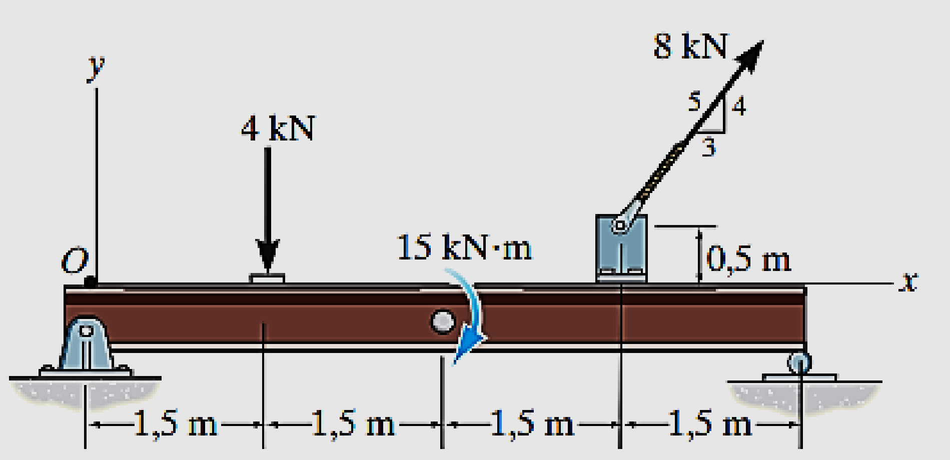
- Substitua o sistema de forças e momentos de binário que agem sobre a viga na figura abaixo por uma força resultante equivalente, e encontre onde sua linha de ação intercepta a viga, medido a partir do ponto *O.*





3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Solução:



1) Somatório de forças:

$$\xrightarrow{+} (F_R)_x = \Sigma F_x \qquad (F_R)_x = 8\text{ kN}\left(\tfrac{3}{5}\right) = 4{,}80\text{ kN}\rightarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y \qquad (F_R)_y = -4\text{ kN} + 8\text{ kN}\left(\tfrac{4}{5}\right) = 2{,}40\text{ kN}\uparrow$$

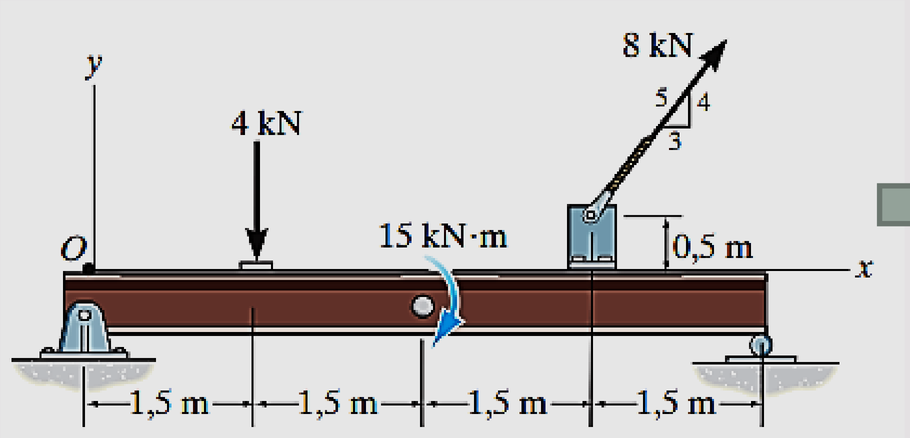
➢ A intensidade e a orientação da força resultante:

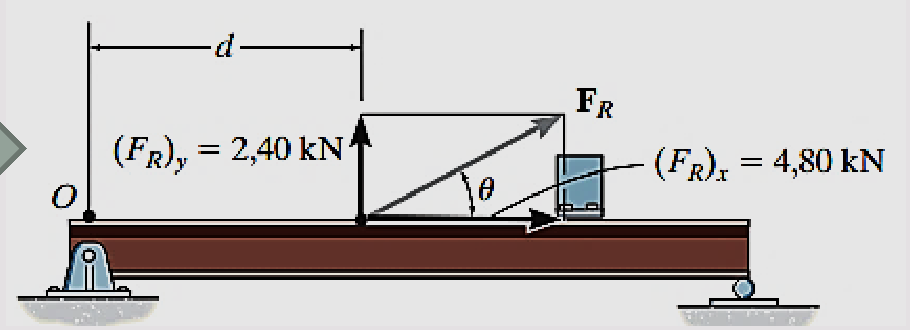
$$F_R = \sqrt{(4{,}80\text{ kN})^2 + (2{,}40\text{ kN})^2} = 5{,}37\text{ kN}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{2{,}40\text{ kN}}{4{,}80\text{ kN}}\right) = 26{,}6°$$

3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Solução:





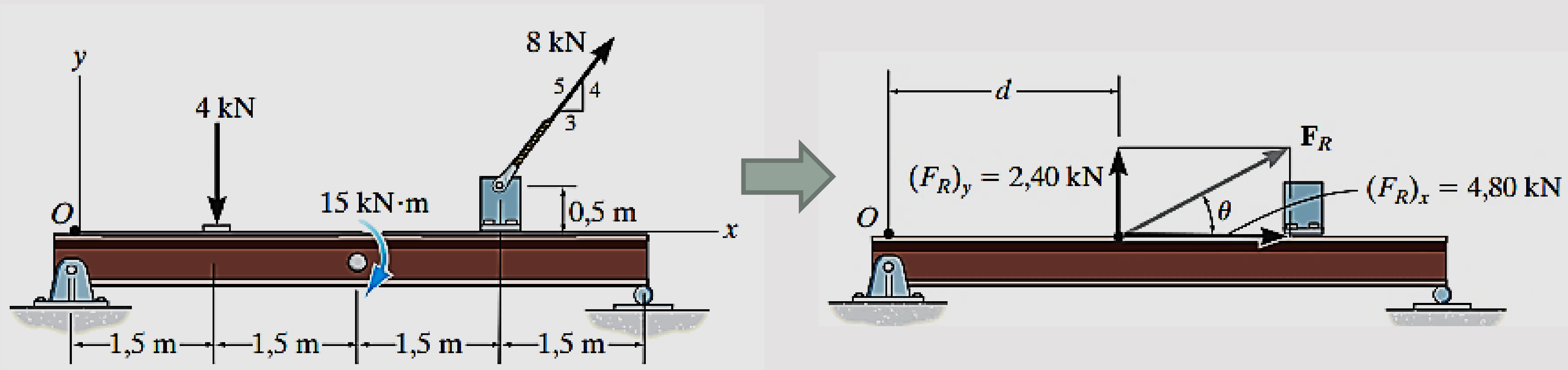
2) Somatório de momentos:

- É necessário igualar o momento de $\boldsymbol{F_R}$ em relação ao ponto *O* à soma dos momentos do sistema de forças e momentos de binário em relação ao ponto *O*;

- Como a linha de ação de $\boldsymbol{F_{R_x}}$ age no ponto *O*, apenas $\boldsymbol{F_{R_y}}$ produz um momento em relação a esse ponto.

3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Solução:



2) Somatório de momentos:

➢ Logo:

$$\circlearrowleft + \ (M_R)_O = \Sigma M_O$$

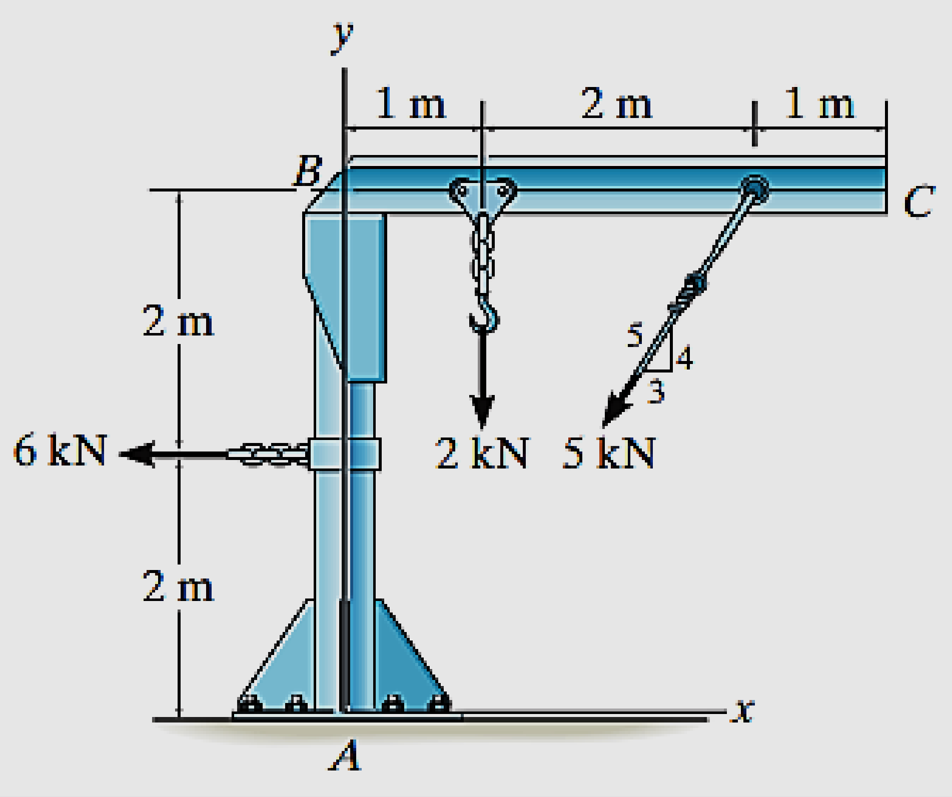
$$2{,}40\ \text{kN}(d) = -(4\ \text{kN})(1{,}5\ \text{m}) - 15\ \text{kN}\cdot\text{m} - \left[8\ \text{kN}\left(\tfrac{3}{5}\right)\right](0{,}5\ \text{m}) + \left[8\ \text{kN}\left(\tfrac{4}{5}\right)\right](4{,}5\ \text{m})$$

$$d = 2{,}25\ \text{m}$$

3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

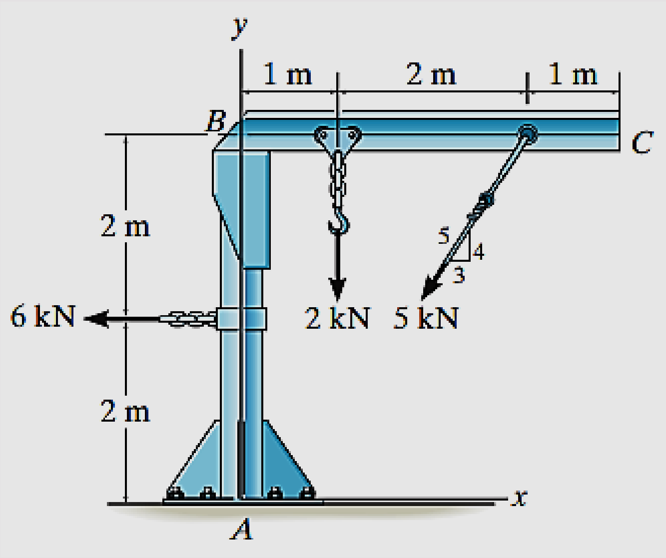
Exercício 18:

- O guincho mostrado na figura abaixo está sujeito a três forças coplanares. Substitua esse carregamento por uma força resultante equivalente e especifique onde a sua linha de ação intercepta a coluna AB e a lança BC.



3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Solução:



1) Somatório das forças:

$$\xrightarrow{+} (F_R)_x = \Sigma F_x \qquad (F_R)_x = -(5\text{ kN})\left(\tfrac{3}{5}\right) - 6\text{ kN} = -9\text{ kN} = 9\text{ kN} \leftarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y \qquad (F_R)_y = -(5\text{ kN})\left(\tfrac{4}{5}\right) - 2\text{ kN} = -6\text{ kN} = 6\text{ kN}\downarrow$$

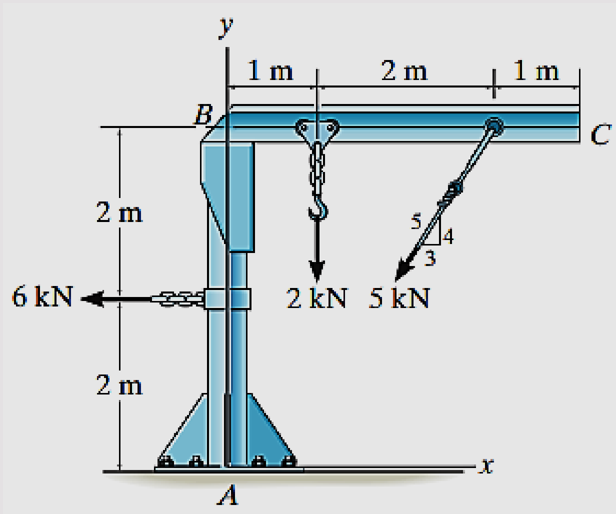
A intensidade e a orientação da força resultante:

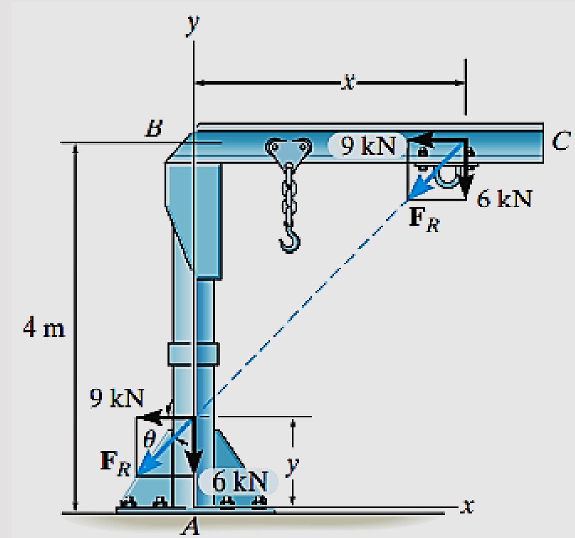
$$F_R = \sqrt{(9\text{ kN})^2 + (6\text{ kN})^2} = 10{,}8\text{ kN}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{6\text{ kN}}{9\text{ kN}}\right) = 33{,}7^\circ$$

3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Solução:





2) Somatório de momentos:

➢ Os momentos serão somados em relação ao ponto *A*. Assumindo que a linha de ação de $\boldsymbol{F_R}$ intercepta *AB* a uma distância *y* de A, temos:

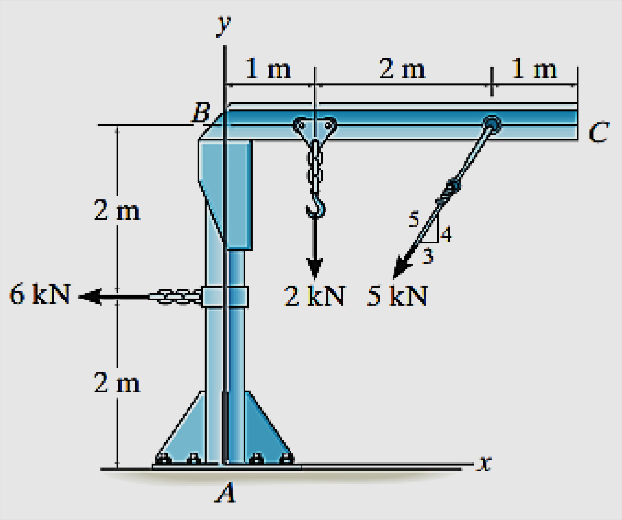
$$\circlearrowleft + \ (M_R)_A = \Sigma M_A;$$

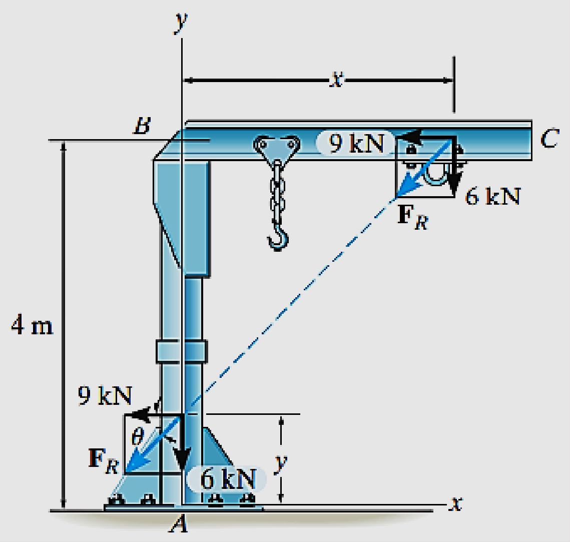
$$(9\text{ kN})\,(y) + (6\text{ kN})\,(0) = (6\text{ kN})(2\text{ m}) - (2\text{ kN})(1\text{ m}) - (5\text{ kN})\left(\tfrac{4}{5}\right)(3\text{ m}) + (5\text{ kN})\left(\tfrac{3}{5}\right)(4\text{ m})$$

$$y = 1{,}11\text{ m}$$

3.1. REDUÇÕES ADICIONAIS DE UM SISTEMA DE FORÇAS E MOMENTOS

Solução:





2) Somatório de momentos:

➢ Pelo princípio da transmissibilidade, $\boldsymbol{F_R}$ pode ser posicionada a uma distância *x* onde intercepta *BC*. Nesse caso, temos:

$$\circlearrowleft + \ (M_R)_A = \Sigma M_A$$

$$(9\ \text{kN})(4\ \text{m}) - (6\ \text{kN})\ (x) = (6\ \text{kN})(2\ \text{m}) - (2\ \text{kN})(1\ \text{m}) - (5\ \text{kN})\left(\tfrac{4}{5}\right)(3\ \text{m}) + (5\ \text{kN})\left(\tfrac{3}{5}\right)(4\ \text{m})$$

$$x = 4{,}33\ \text{m}$$

ATÉ A PRÓXIMA!