

INSTITUTO DE TECNOLOGIA - UFPA
FACULDADE DE ENG. MECÂNICA

DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS II

Parte 3:
Critérios de Falha

Professor: Leonardo Dantas Rodrigues



INTRODUÇÃO

Quando se vai projetar ou avaliar uma estrutura deve-se conhecer o limite de carregamentos que a mesma suportará.

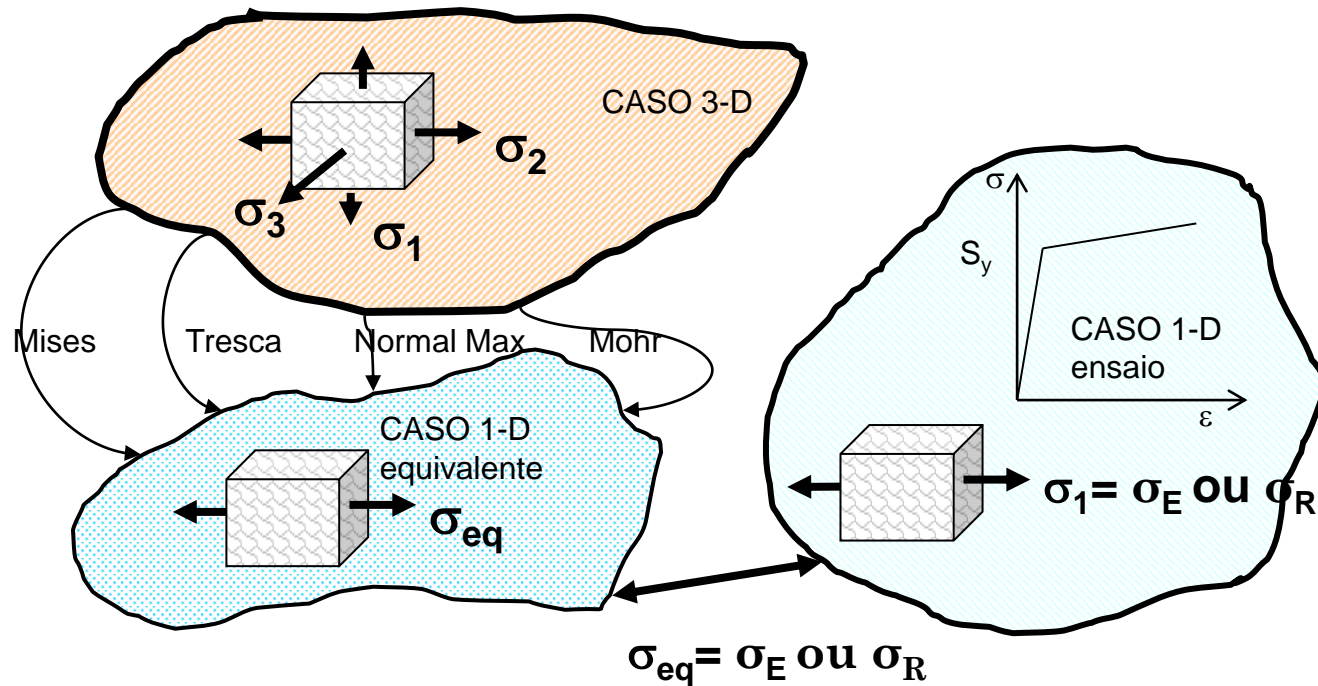
Tal limite, para estruturas que trabalham estaticamente, é definido basicamente pela comparação entre as **tensões atuantes nos pontos críticos** e os **limites do material** que constitui estes pontos.

Os limites estabelecidos geralmente são: **resistência ao escoamento, quando se trabalha com materiais dúcteis; e resistência à ruptura, para materiais frágeis.**

Já as tensões a serem comparadas com tais limites, as chamadas **tensões equivalentes**, devem ser calculadas a partir dos complexos carregamentos a que a estrutura está submetida.

Há **diferentes métodos** para o cálculo dessas **tensões equivalentes**. Nesta parte do curso serão apresentados os principais.

INTRODUÇÃO



Representação triaxial:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Representação biaxial:

$$\sigma_I > \sigma_{II}$$

$$\sigma_{III} = 0$$

MATERIAIS DÚCTEIS:

CRITÉRIO DE TRESCA

Este também é conhecido como critério da **Máxima tensão de cisalhamento.**

Ele é baseado no fato, comprovado experimentalmente, de que o **escoamento nos materiais dúcteis** ocorre pelo **deslizamento** dos planos de contato dos cristais, provocado por **tensões de cisalhamento.**

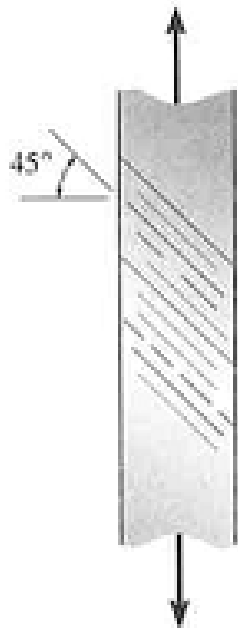


Figura 3.1:

A figura 3.1 mostra um esquemático de um experimento que pode ser feito realizando um ensaio de tração em uma tira de aço altamente polida. Nela são vistas as bordas dos planos de deslizamento, também denominadas linhas de **Lüder**. Note-se que as linhas estão numa direção a **45° em relação à tensão normal máxima**, coincidindo com a **máxima tensão de cisalhamento.**

MATERIAIS DÚCTEIS:

CRITÉRIO DE TRESCA

A aplicação do Critério de Tresca se dá pela comparação da **máxima tensão de cisalhamento absoluta** atuante com a obtida em um **ensaio de tração**.

A **máxima tensão de cisalhamento absoluta** atuante é dada por:

$$\tau_{\max_{abs}} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (3.1)$$

No ensaio de tração (unidimensional), no momento do escoamento, a tensão normal máxima é o próprio limite de escoamento:

$$\tau_{\max_{ensaio}} = \frac{\sigma_E - 0}{2} = \frac{\sigma_E}{2} \quad (3.2)$$



MATERIAIS DÚCTEIS:

CRITÉRIO DE TRESCA

Igualando-se as equações 3.1 e 3.2, conclui-se que, pelo critério de Tresca, a **tensão atuante equivalente**, que deve ser limitada pela resistência ao escoamento, será:

$$\sigma_{eq_{Tresca}} = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sigma_E / FS \quad (3.3)$$

No estado plano de tensões, utilizando para as tensões principais a nomenclatura σ_I e σ_{II} (sendo $\sigma_{III}=0$) deve-se adotar o seguinte critério:

$$\begin{aligned} \text{Caso } \sigma_I \text{ e } \sigma_{II} \text{ sejam positivos: } \sigma_{eq_{Tresca}} &= |\sigma_I| = \sigma_E \\ \text{Caso } \sigma_I \text{ e } \sigma_{II} \text{ sejam negativos: } \sigma_{eq_{Tresca}} &= |\sigma_{II}| = \sigma_E \\ \text{Se } \sigma_I \text{ e } \sigma_{II} \text{ têm sinais opostos: } \sigma_{eq_{Tresca}} &= |\sigma_I - \sigma_{II}| = \sigma_E \end{aligned} \quad (3.4)$$

No limite, trabalha-se com o Fator de Segurança (FS) igual a 1.

MATERIAIS DÚCTEIS: CRITÉRIO DE TRESCA

As relações (3.4) podem ser representadas graficamente:

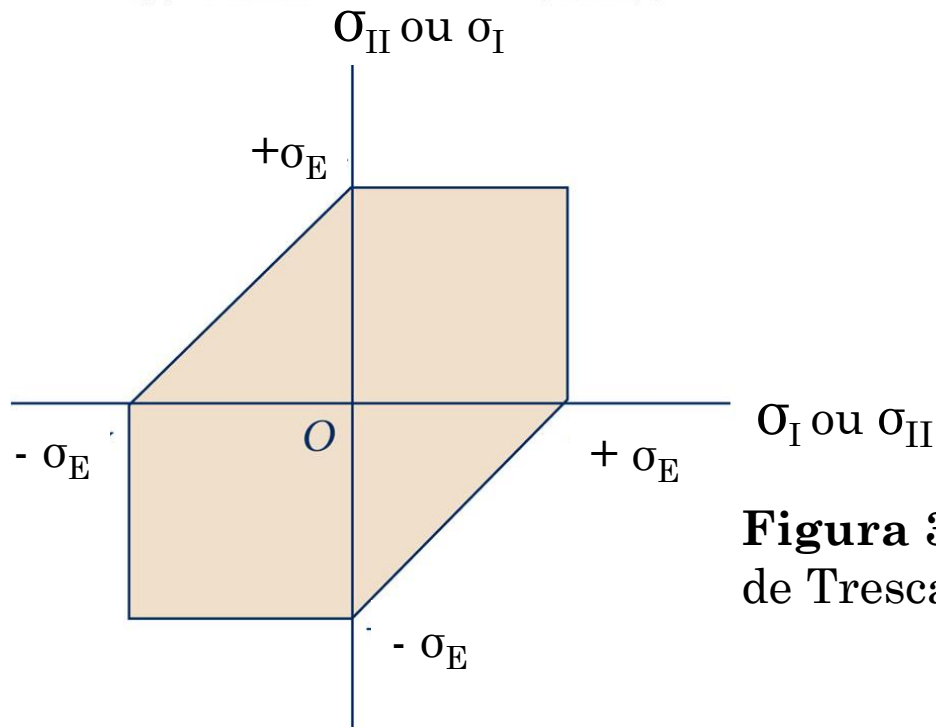


Figura 3.2: Hexágono de Tresca.

Assume-se que os pontos na estrutura de coordenadas (σ_I, σ_{II}) , que estiverem no limite ou fora da área do hexágono, escoarão, caracterizando uma falha.

MATERIAIS DÚCTEIS:

CRITÉRIO DE VON MISES

Este também é conhecido como critério da
Máxima energia de distorção.

A energia armazenada em uma unidade de volume associada a uma tensão é denominada **densidade de energia de deformação (u)** e é dada pela área abaixo da curva tensão deformação (gráfico 3.3). Considerando que na zona anterior ao escoamento a relação tensão deformação é essencialmente linear, pode-se escrever:

$$u = \frac{1}{2} \sigma \epsilon \quad (3.5)$$

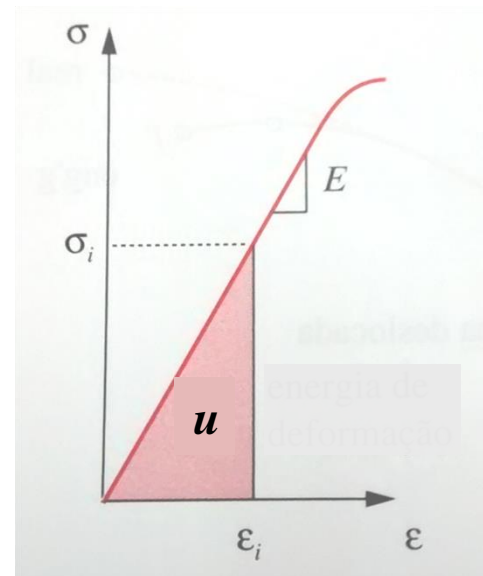


Figura 3.3

MATERIAIS DÚCTEIS:

CRITÉRIO DE VON MISES

Estendendo a equação 3.5 ao estado triaxial e usando os termos de tensões e deformações principais, temos:

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \quad (3.6)$$

Substituindo os termos de deformação pelos de tensão aplicando as relações constitutivas, podemos escrever a eq. (3.6) como:

$$u = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \right] \quad (3.7)$$



MATERIAIS DÚCTEIS:

CRITÉRIO DE VON MISES

A equação 3.7 fornece a densidade energia de deformação total, que é constituída de duas parcelas:

- uma responsável pela alteração de volume, a **hidrostática**.
- outra responsável pela variação na forma, a de **distorção**.

$$u = u_h + u_d \quad (3.8)$$

As componentes de tensões principais também podem ser escritas em termos de uma parcela hidrostática (ou volumétrica) σ_h , que é comum a todas as faces e de uma componente de distorção σ_{id} :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_h + \sigma_{1d} \\ \sigma_2 &= \sigma_h + \sigma_{2d} \\ \sigma_3 &= \sigma_h + \sigma_{3d}\end{aligned} \quad (3.9)$$



MATERIAIS DÚCTEIS:

CRITÉRIO DE VON MISES

Somando todos os termos da equação (3.9), temos:

$$\begin{aligned}\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= 3\sigma_h + (\sigma_{1d} + \sigma_{2d} + \sigma_{3d}) \\ 3\sigma_h &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - (\sigma_{1d} + \sigma_{2d} + \sigma_{3d})\end{aligned}\quad (3.10)$$

Para uma mudança volumétrica, sem distorções, o termo entre parênteses em (3.10) deve ser nulo, assim:

$$\sigma_h = \sigma_{med} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\quad (3.11)$$

Conclui-se que a parcela de tensão hidrostática corresponde à tensão média atuante.



MATERIAIS DÚCTEIS:

CRITÉRIO DE VON MISES

Finalmente para a obtenção da parcela de **energia de distorção**, que é a que interessa para o critério de von Mises, deve-se substituir os termos σ_I , σ_2 e σ_3 , por $(\sigma_I - \sigma_{med})$, $(\sigma_2 - \sigma_{med})$ e $(\sigma_3 - \sigma_{med})$, respectivamente, na equação (3.7), chegando-se a:

$$u_d = \frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right] \quad (3.12)$$

No **estado plano de tensões** (com $\sigma_{III} = 0$) e adequando-se novamente a nomenclatura, temos:

$$u_d = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_I^2 - \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II}^2) \quad (3.13)$$

Ressalta-se que os subíndices em algarismos romanos referem-se ao estado plano de tensões.

MATERIAIS DÚCTEIS:

CRITÉRIO DE VON MISES

Em um ensaio de tração uniaxial $\sigma_I = \sigma_E$ e $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$ e temos:

$$u_{d_{ens}} = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_E^2) \quad (3.14)$$

Igualando-se as eq. (3.13) e (3.14), conclui-se que, pelo **critério de von Mises**, a **tensão atuante equivalente**, que deve ser limitada pela resistência ao escoamento, será:

$$\sigma_I^2 - \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II}^2 = \sigma_E^2 \quad (3.15)$$

$$\sigma_{eq_{Mises}} = \sqrt{\sigma_I^2 - \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II}^2} = \sigma_E / FS \quad (3.16)$$

No limite, trabalha-se com o Fator de Segurança (FS) igual a 1.

MATERIAIS DÚCTEIS:

CRITÉRIO DE VON MISES

A equação 3.15 representa uma elipse (figura 3.4), que baliza graficamente o critério de von Mises:

Os pontos na estrutura de coordenadas (σ_I, σ_{II}) , que estiverem no limite ou fora da área da elipse, escoarão, caracterizando uma falha.

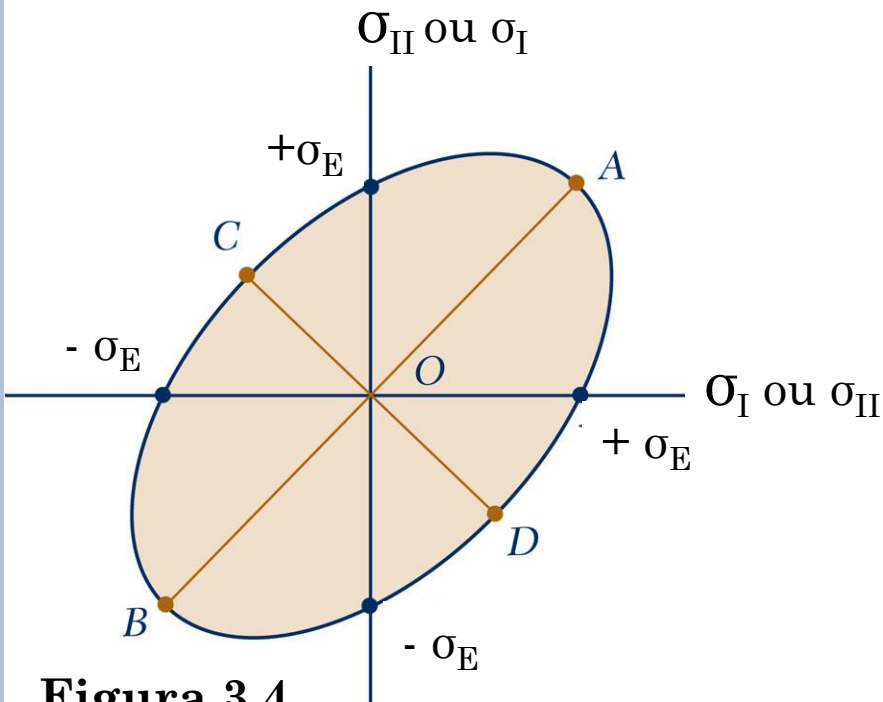


Figura 3.4

O eixo maior da elipse divide o 1º e 3º quadrantes e se estende de

A ($\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_E$) até **B** ($\sigma_I = \sigma_{II} = -\sigma_E$).

O eixo menor divide o 2º e 4º

quadrantes e se estende de **C** ($\sigma_I = -\sigma_{II} = -0,577 \cdot \sigma_E$) a

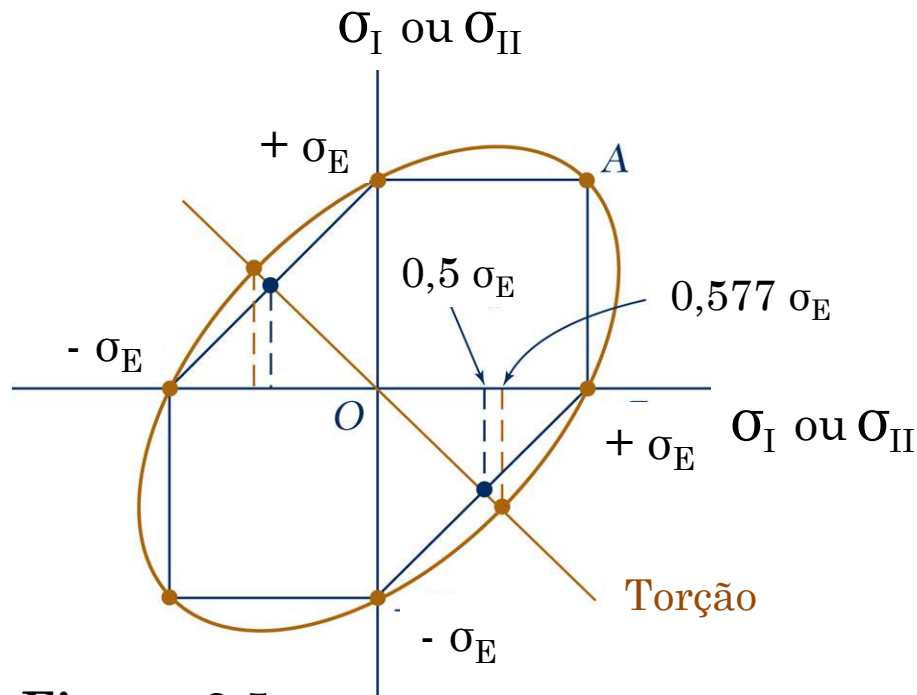
D ($\sigma_I = -\sigma_{II} = 0,577 \cdot \sigma_E$), pontos que representam estados de cisalhamento puro.

MATERIAIS DÚCTEIS:

CRITÉRIO DE VON MISES

A figura 3.5 mostra uma comparação entre os critérios de Tresca e de Mises.

Nota-se que a *Elipse de Mises intercepta os seis vértices do Hexágono de Tresca*. Para os estados de tensão representados por esses 6 pontos, os dois critérios fornecerão o mesmo resultado de tensão equivalente.



Em todos as demais estados de tensão o critério de Tresca é mais conservador que o de Von Mises, pois o hexágono está contido na elipse. O estado de maior discrepância entre os dois critérios é o de cisalhamento puro.

Figura 3.5

MATERIAIS FRÁGEIS:

CRITÉRIO DA MÁXIMA TENSÃO NORMAL

Este critério é bem simples e baseia-se no fato de que materiais frágeis falham quando o **módulo da máxima tensão normal atuante** (principal máxima ou mínima) atinge o limite de ruptura do material.

Segue-se então o seguinte critério (também representado graficamente na figura 3.6):

$$\begin{aligned} |\sigma_I| &= \sigma_R \\ |\sigma_{II}| &= \sigma_R \end{aligned} \quad (3.17)$$

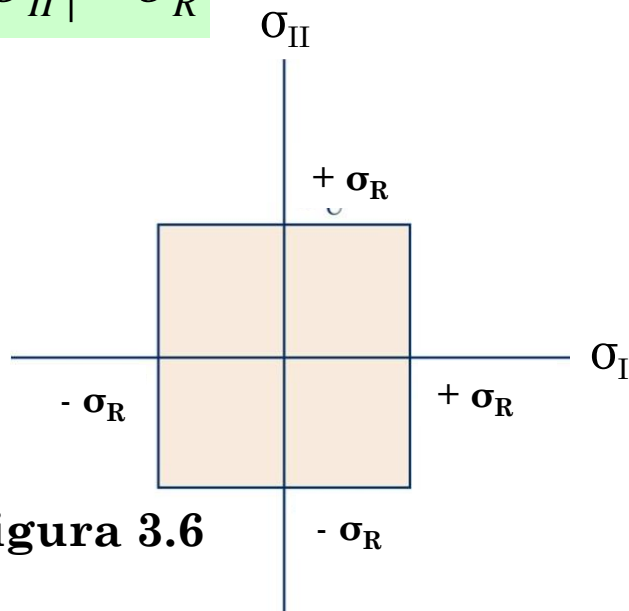
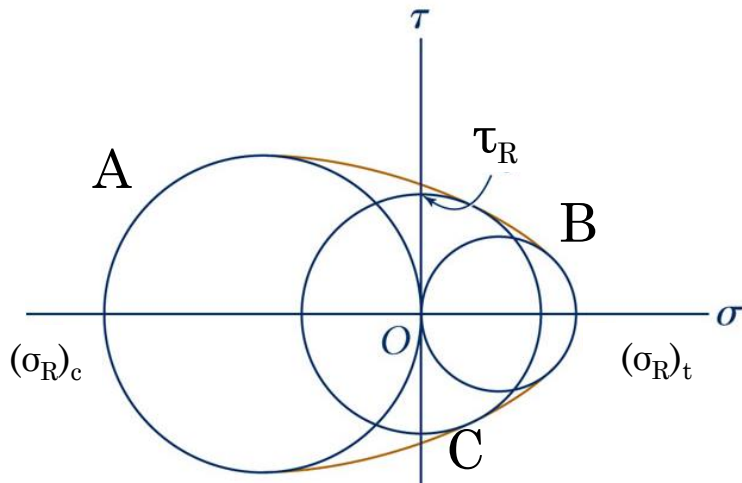


Figura 3.6

Este critério tem uma importante limitação: baseia-se na hipótese de que as resistências à tração e à compressão são iguais. Isso raramente ocorre na prática em razão da presença muito comum em materiais de defeitos, como microtrincas ou cavidades, que tendem a afetar a sua resistência à tração, mas pouco alteram sua resistência à compressão.

MATERIAIS FRÁGEIS: CRITÉRIO DE MOHR

O **critério de Mohr** considera a particularidade dos materiais frágeis geralmente possuírem diferenças entre as resistências à tração e à compressão. No entanto, sua aplicação depende de dados experimentais provenientes basicamente de três testes: de **tração** e **compressão** uniaxiais para obter $(\sigma_R)_t$ e $(\sigma_R)_c$; além de um ensaio de **torção** para determinar o limite de resistência ao cisalhamento, τ_R . Um círculo de Mohr para cada teste é mostrado na figura 3.7.



O círculo A representa a condição de tensão do ensaio de compressão

$(\sigma_I = \sigma_{III} = 0 \text{ e } \sigma_{II} = -\sigma_R)$; B representa o ensaio de tração $(\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0 \text{ e } \sigma_I = \sigma_R)$; e C o de torção, com cisalhamento puro.

Qualquer estado de tensões cujo círculo de Mohr extrapole ou tangencie o envelope formado pelos 3 ensaios provocará falha

Figura 3.7

MATERIAIS FRÁGEIS: CRITÉRIO DE MOHR

Seguindo os critérios anteriores, podemos também representar o critério de Mohr em um gráfico de tensões principais (figura 3.8).

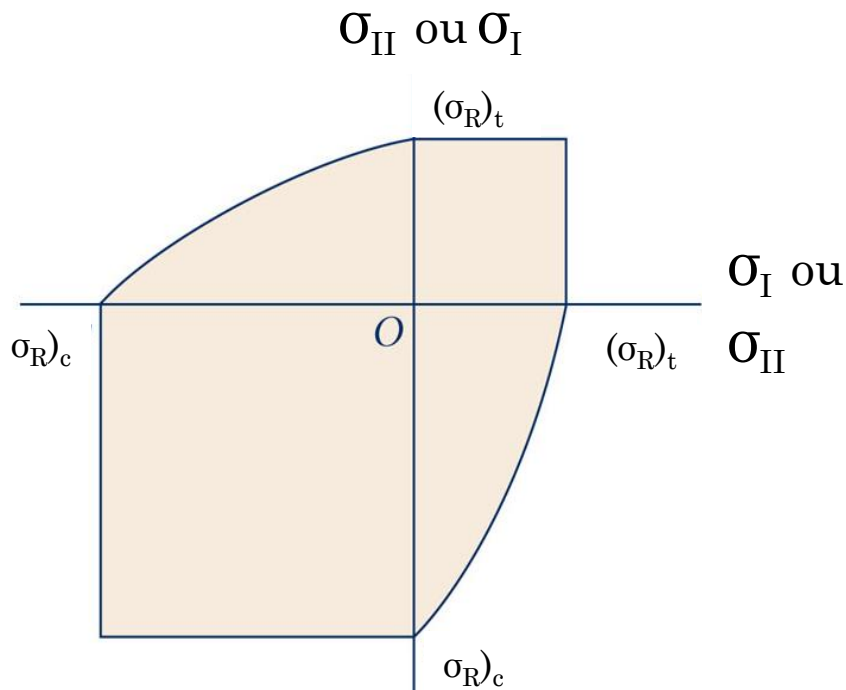


Figura 3.8

Nesse caso, a falha ocorre quando:

- **o valor absoluto de qualquer uma das tensões principais atinge um valor igual ou maior que $(\sigma_R)_t$ e $(\sigma_R)_c$; ou**
- **se o estado de tensão em um dado ponto é definido pelas coordenadas (σ_p, σ_{II}) , localizada no limite ou fora da área sombreada.**



CRITÉRIOS DE FALHA

Exemplo 3.1: O estado de tensão mostrado na figura ocorre em um ponto crítico de um componente de máquina feito de aço. Após vários ensaios de tração, conclui-se que a tensão de escoamento em tração é 250 MPa. Determine o fator de segurança da estrutura contra o escoamento:

- a) Pelo critério da tensão máxima de cisalhamento;
- b) Pelo critério de máxima energia de distorção;

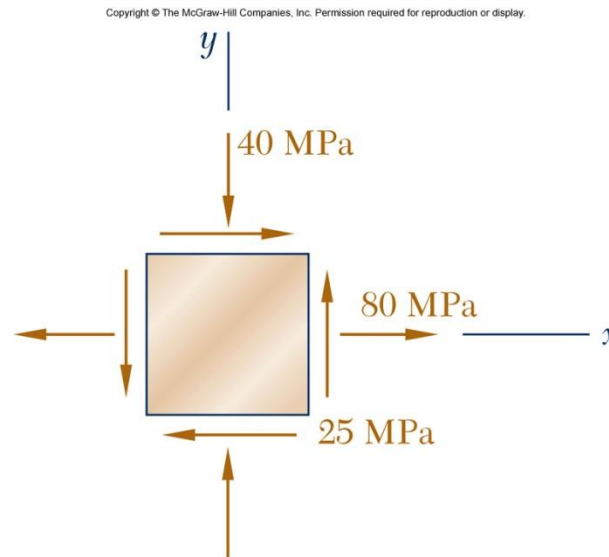
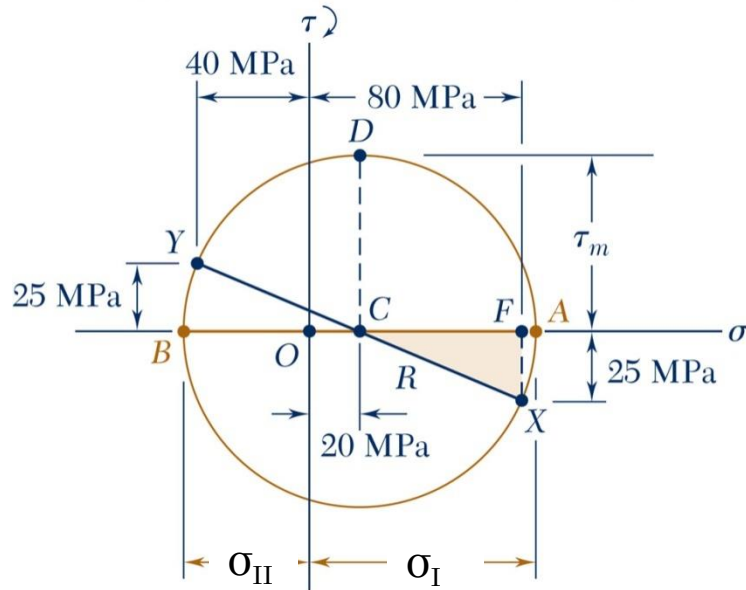


Figura 3.9

CRITÉRIOS DE FALHA

Exemplo 3.1: Solução

Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.



$$\sigma_{med} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = 20MPa$$

$$\tau_{max_plano} = R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = 65MPa$$

Tensões principais :

$$\sigma_I = OC + CA = 85MPa$$

$$\sigma_{II} = OC - CB = -45MPa$$

$$a) F.S. = \frac{\sigma_E}{(\sigma_I - \sigma_{II})}$$

$$F.S. = \frac{250MPa}{130MPa} = 1,92$$

$$b) \sigma_{eqMises} = \sqrt{\sigma_I^2 - \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2} = 114,13MPa$$

$$F.S. = \frac{\sigma_E}{\sigma_{eqMises}} = \frac{250MPa}{114,3MPa} = 2,19$$



CRITÉRIOS DE FALHA

Exemplo 3.2: O tubo de aço mostrado na figura 3.10a tem diâmetro interno de 60 mm e diâmetro externo de 80 mm. Suponha que o tubo esteja sujeito a um momento de torção de 8 kN.m e a um momento fletor de 3,5 kN.m. Sabendo que o limite de escoamento do material é 230 MPa, determine o fator de segurança da estrutura contra o escoamento:

- a) Pelo critério de máxima energia de distorção;
- b) Pelo critério da tensão máxima de cisalhamento;

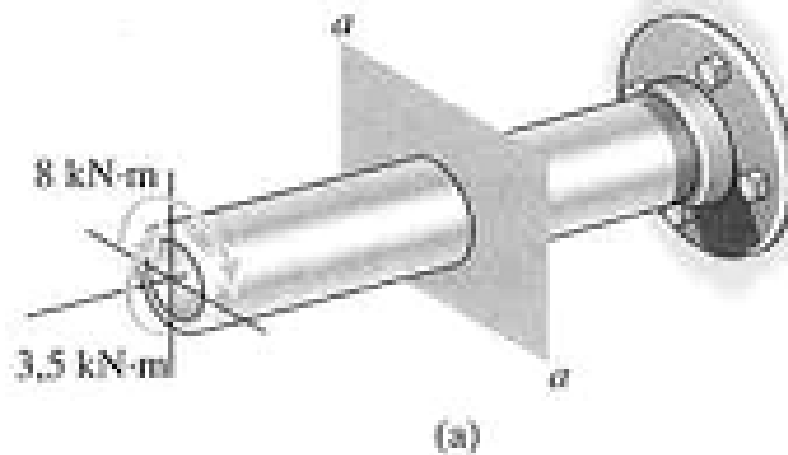


Figura 3.10

CRITÉRIOS DE FALHA

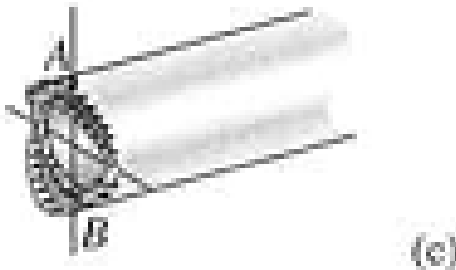
Exemplo 3.2: Solução

Tensões devidas à flexão e à torção em uma seção qualquer:

Escolhendo um elemento na geratriz superior:

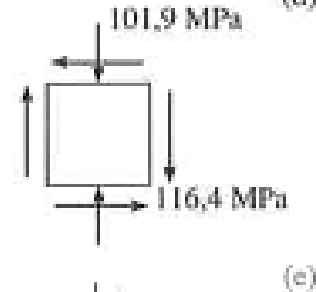
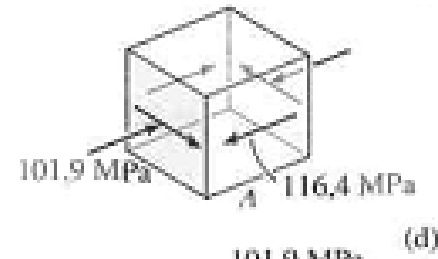


+



$$\sigma_I = 76,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = -178 \text{ MPa}$$



$$a) \sigma_{eqMises} = \sqrt{\sigma_I^2 - \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II}^2} = 226 \text{ MPa}$$

$$F.S. = \frac{\sigma_E}{\sigma_{eqMises}} = \frac{230 \text{ MPa}}{226 \text{ MPa}} = 1,02$$

$$b) F.S. = \frac{\sigma_E}{(\sigma_I - \sigma_{II})}$$

$$F.S. = \frac{230 \text{ MPa}}{254 \text{ MPa}} = 0,905$$

Pelo critério de Tresca, o tubo escoará!

EXERCÍCIO DE PROJETO DE EIXO

Exercício 3.1: O eixo da figura 3.11 é apoiado por dois mancais de deslizamento em A e B. Devido à transmissão de potência para e a partir dele, as correias nas polias estão sujeitas às forças mostradas. Determinar, pelo critério de Tresca, o menor diâmetro que o eixo poderá ter para uma máxima admissível de 100 MPa.

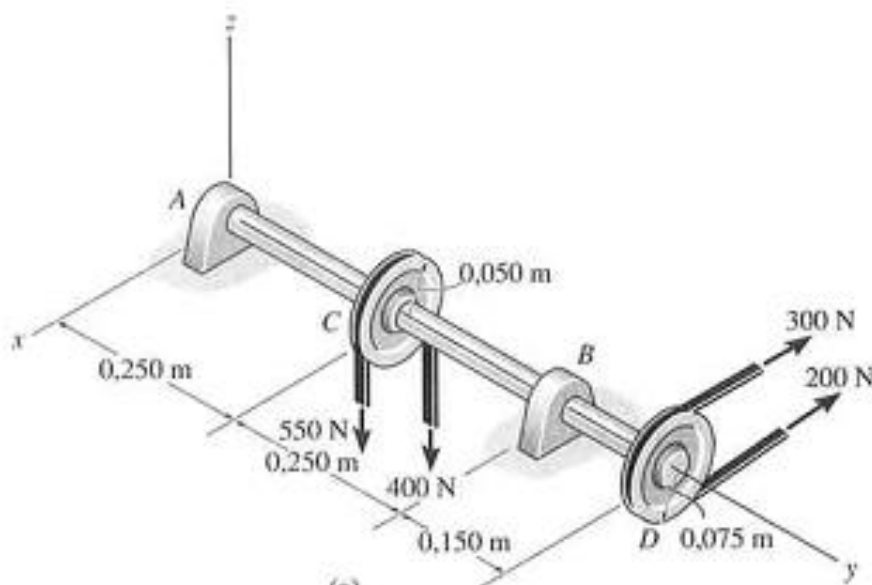
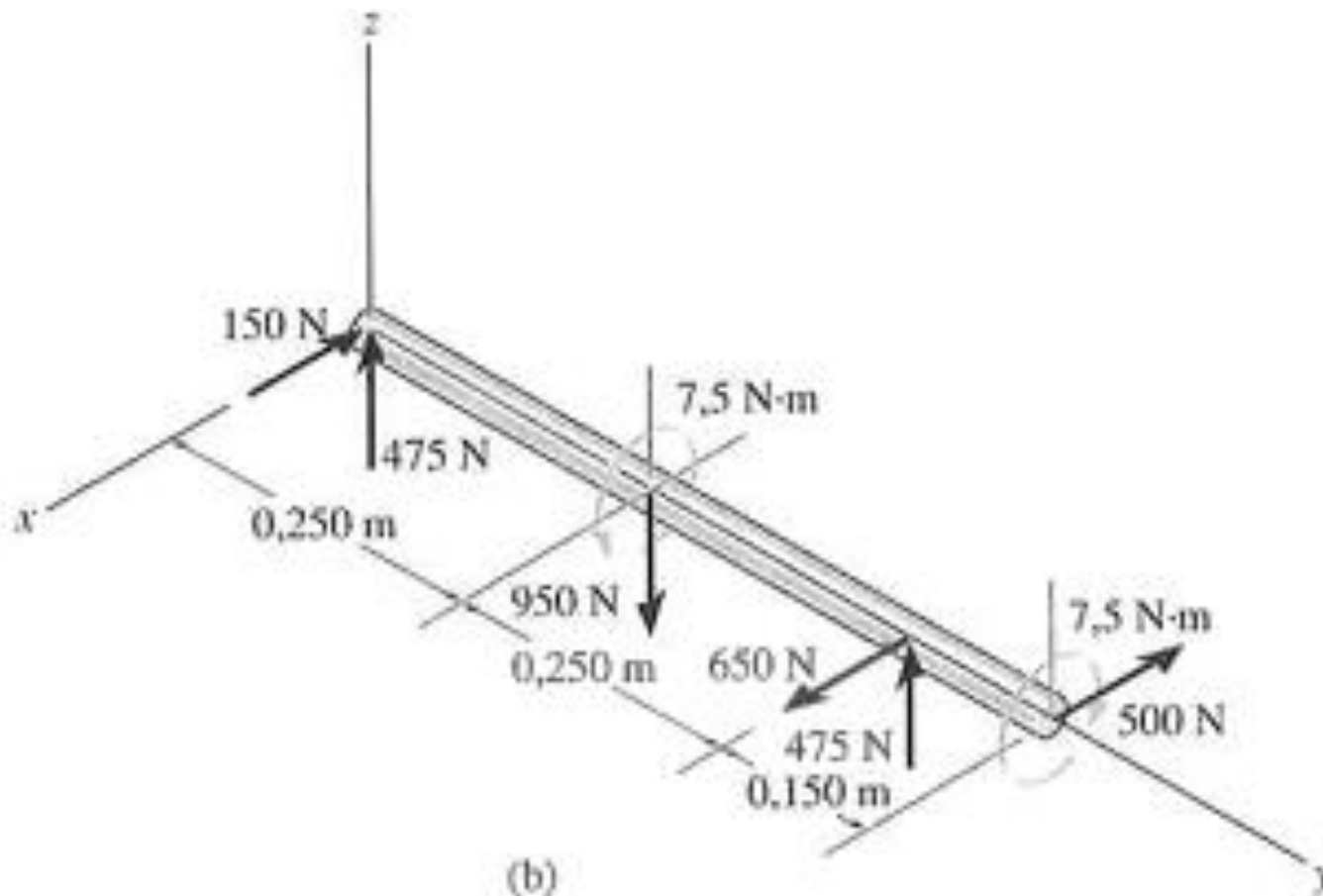


Figura 3.11

EXERCÍCIO DE PROJETO DE EIXO

Exercício 3.1: DCL DO EIXO



$d = 23,3\text{ mm}$

Figura 3.11

EXERCÍCIOS



Exercício 3.2: As tensões principais no plano que agem sobre um elemento diferencial são mostradas na figura. Se o material for um aço com tensão de escoamento $\sigma_e = 700$ MPa.

- Determine o fator de segurança para escoamento usando as teorias da tensão de cisalhamento máxima (Tresca) e de máxima energia de distorção (Mises).
- Represente o estado de tensões mostrado em um elemento no plano x-y

$$FS_M = 1,466$$
$$FS_T = 1,458$$

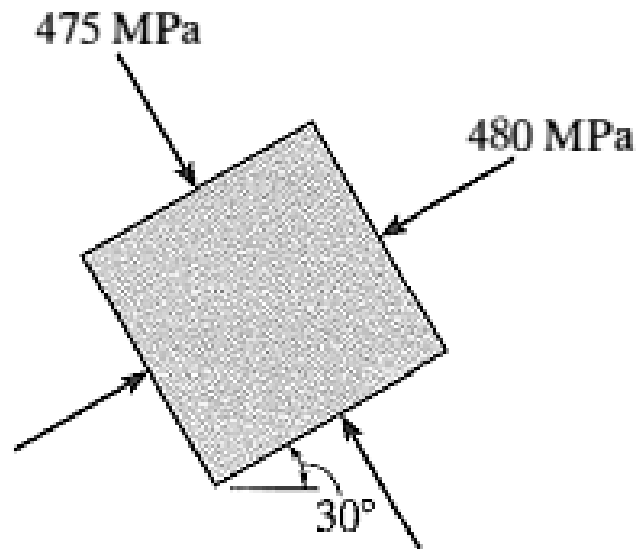


Figura 3.13

Exercício 3.3: O estado de tensão que age sobre um ponto crítico na estrutura de um banco de automóvel durante uma colisão é mostrado na figura. Determine a menor tensão de escoamento para um aço que possa ser selecionado para fabricar o elemento estrutural com base nas teorias da tensão de cisalhamento máxima (Tresca) e de máxima energia de distorção (Mises).



Tresca: 660,4 MPa
Mises: 636,8 MPa

Figura 3.12



Exercício 3.4: O resultado do cálculo das cargas internas em uma seção crítica ao longo do eixo de acionamento de aço de um navio são um torque de 3,45 kN.m, um momento fletor de 2,25 kN.m e uma propulsão axial de 12,5 kN. Se os limites de escoamento para tração e cisalhamento forem $\sigma_y = 700$ MPa e $\tau_y = 350$ MPa, respectivamente, determine o diâmetro exigido para o eixo pela teoria da tensão de cisalhamento máxima.

(Problema a ser resolvido com auxílio do computador).

Por Tresca, chega-se a :

$$(c \cdot N + 4M)^2 + (4T)^2 = \left(\sigma_y \cdot \pi \cdot c^3 \right)^2$$

Sendo: N (carga axial), M (momento fletor) e T (torque)

Resolvendo no mathcad:

$$c = 19,62\text{mm}$$

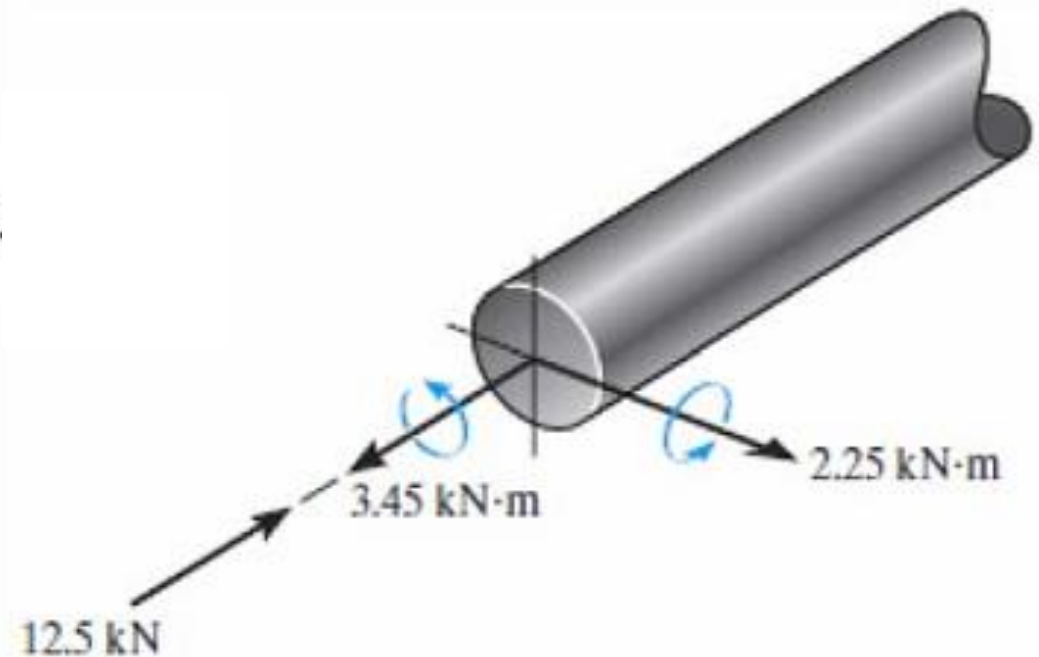


Figura 3.14

Exercício 3.5: A viga tem seção transversal retangular e está sujeita às cargas mostradas. (Usar limite de escoamento de 250 MPa)

- Determine as tensões principais desenvolvidas no ponto A e no ponto B, localizado imediatamente à esquerda da carga de 20 kN.
- Mostre os resultados em elementos orientados localizados nesses pontos.
- Calcule o fator de segurança da viga pelos critérios de Mises e de Tresca.

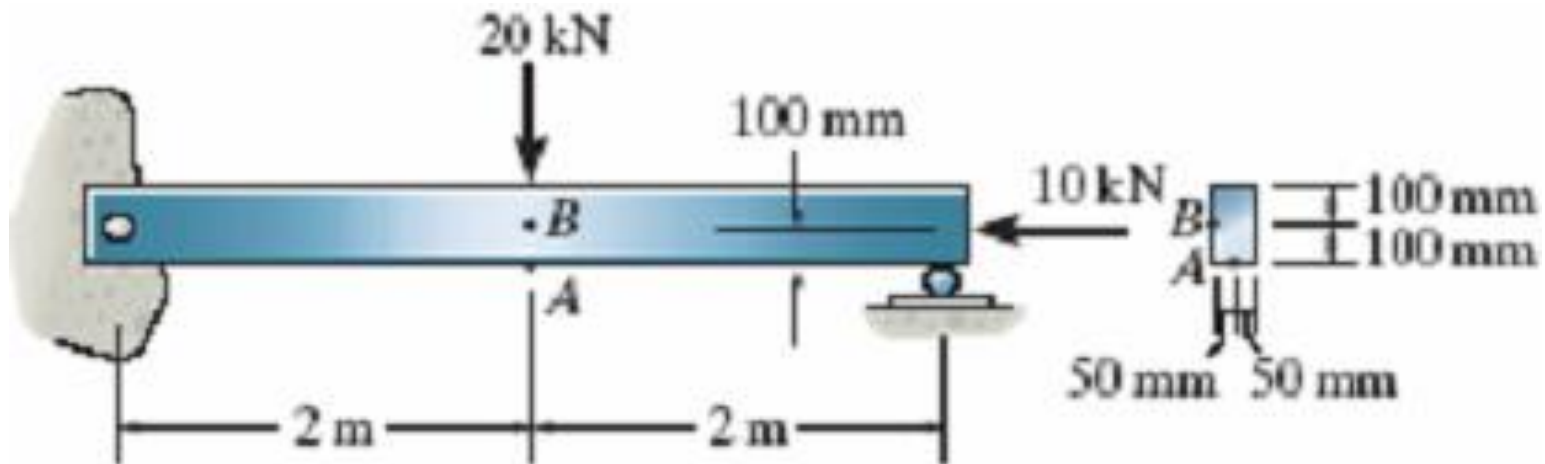


Figura 3.15