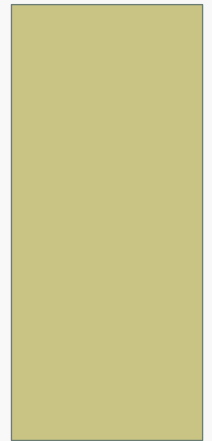




**Universidade Federal do Pará  
Instituto de Tecnologia  
Faculdade de Engenharia Mecânica**

**MECÂNICA GERAL**

**PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES  
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR**



# EQUILÍBRIO DE CORPOS RÍGIDOS, TRELIÇAS PLANAS E ESFORÇOS INTERNOS

## Parte 1: Equilíbrio de um corpo rígido

- 4.1. Condições de equilíbrio do corpo rígido
- 4.2. Diagrama de corpo livre
- 4.3. Equações de equilíbrio
- 4.4. Membros de duas e de três forças
- 4.5. Equilíbrio em três dimensões
- 4.6. Restrições e determinância estática

## Parte 2: Trelças planas

- 4.5. Método dos nós
- 4.6. Membros de força zero
- 4.7. Método das seções

## Parte 3: Esforços internos

- 4.8. Cargas internas desenvolvidas em membros estruturais
- 4.9. Equações e diagramas de força cortante e de momento fletor
- 4.10. Relações entre carga distribuída, força cortante e momento fletor

# **PARTE 2: TRELIÇAS PLANAS**

## **Parte 2: Trelças planas**

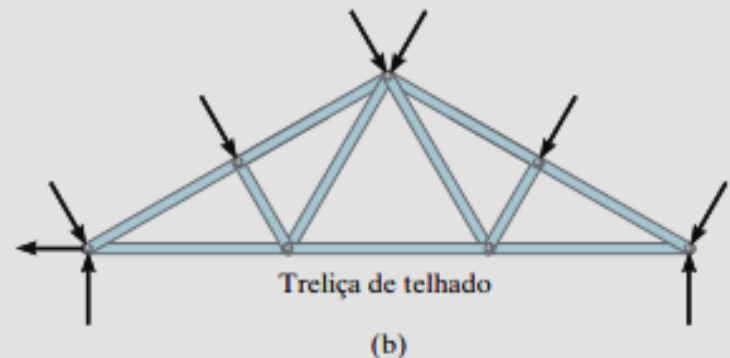
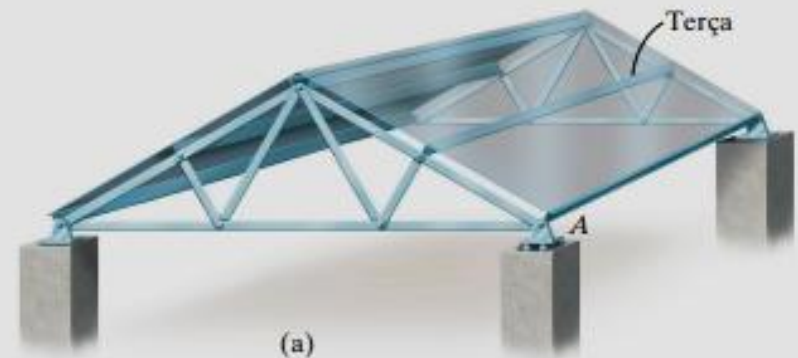
**4.5. Método dos nós**

**4.6. Membros de força zero**

**4.7. Método das seções**

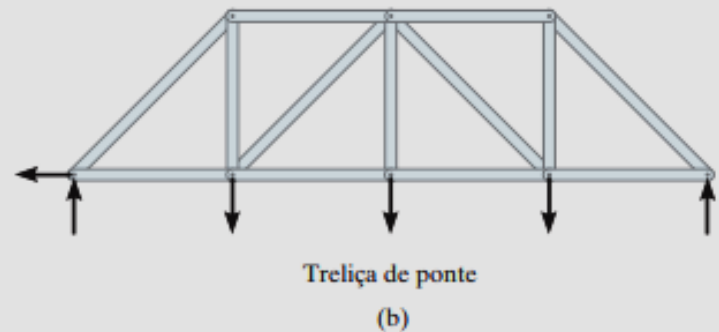
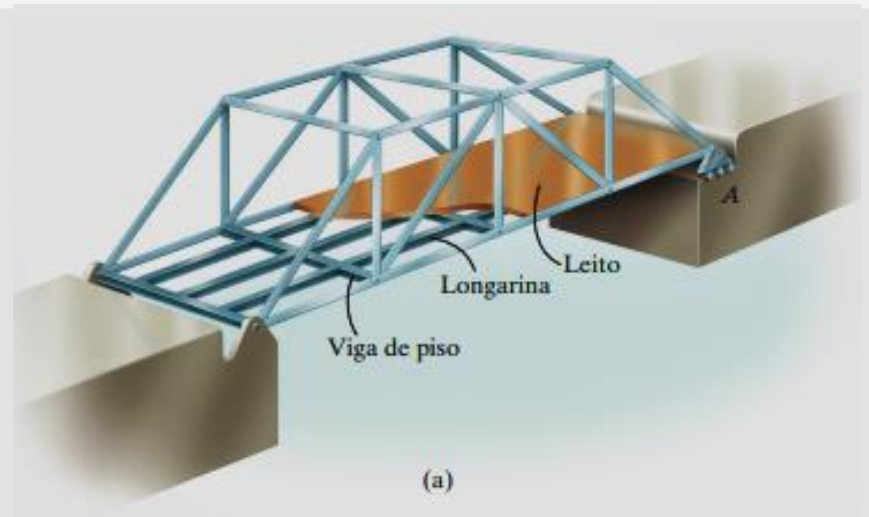
# TRELIÇAS PLANAS

- Treliza é uma estrutura de membros esbeltos e conectados entre si em suas extremidades;
- Os membros normalmente usados em construções consistem em barras de madeira ou de metal;
- Em especial, as treliças planas situam-se em um único plano e geralmente são usadas para sustentar telhados e pontes.
- Na treliza de um telhado, a carga do telhado é transmitida para a treliza nos nós através de uma série de terças;
- Como essa carga atua no mesmo plano da treliza, as análises das forças desenvolvidas nos membros da treliza serão bidimensionais.



# TRELIÇAS PLANAS

- No caso de uma ponte, o peso no leito é transmitido primeiro para as longarinas, depois para as vigas de piso e, finalmente, para os nós das duas treliças de suporte laterais;
- Assim como no telhado, o carregamento da treliça de ponte também é coplanar;
- Quando as treliças de ponte ou de telhado estendem-se por grandes distâncias, um apoio oscilante ou de rolete normalmente é usado para apoiar uma extremidade;
- Esse tipo de suporte permite liberdade para expansão ou contração dos membros decorrentes de variações de temperatura ou aplicação de cargas



# TRELIÇAS PLANAS

## Hipóteses de projeto

- Para projetar os membros e as conexões de uma treliça, é necessário primeiro determinar a força desenvolvida em cada membro quando a treliça está sujeita a um determinado carregamento;
- Para isso, são necessárias duas hipóteses importantes:

### **a) Todas as cargas são aplicadas nos nós:**

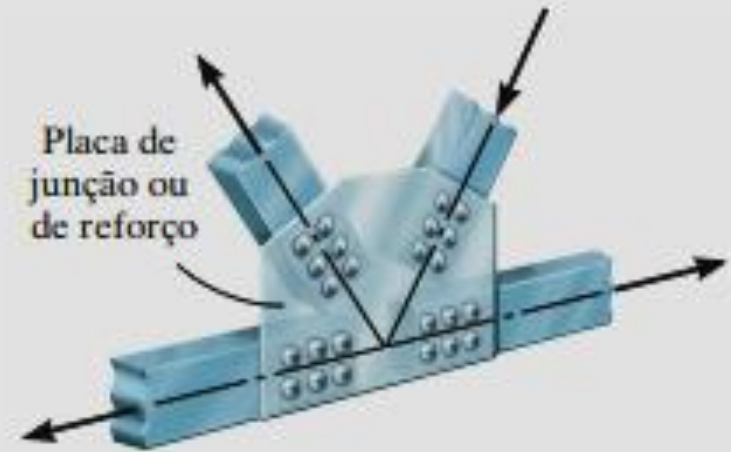
- Em muitas situações, como para treliças de ponte e de telhado, essa hipótese é verdadeira. Frequentemente, o peso dos membros é desprezado, porque a força suportada por esses membros normalmente é muito maior do que seu peso;
- Entretanto, se for preciso incluir o peso na análise, geralmente é satisfatório aplicá-lo como uma força vertical, com metade de sua intensidade sobre cada extremidade do membro.

# TRELIÇAS PLANAS

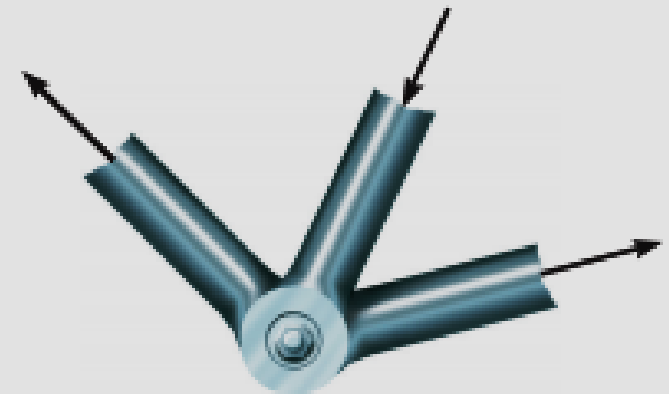
## Hipóteses de projeto

### b) Os membros são conectados entre si por pinos lisos:

- As conexões normalmente são formadas parafusando ou soldando as extremidades dos membros a uma placa comum, chamada placa de junção (ou de reforço), ou simplesmente passando um grande parafuso ou pino através de cada um dos membros;
- Podemos assumir que essas conexões atuam como pinos, já que as linhas de centro dos membros articulados são concorrentes;



(a)

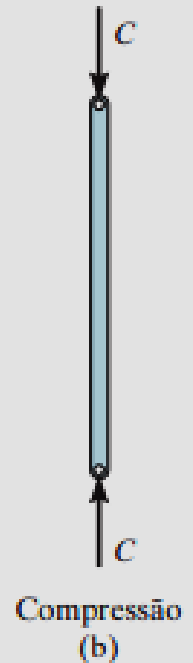
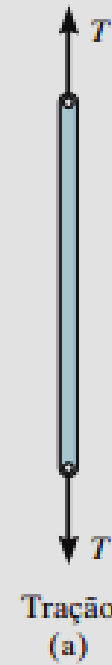


(b)

# TRELIÇAS PLANAS

## Hipóteses de projeto

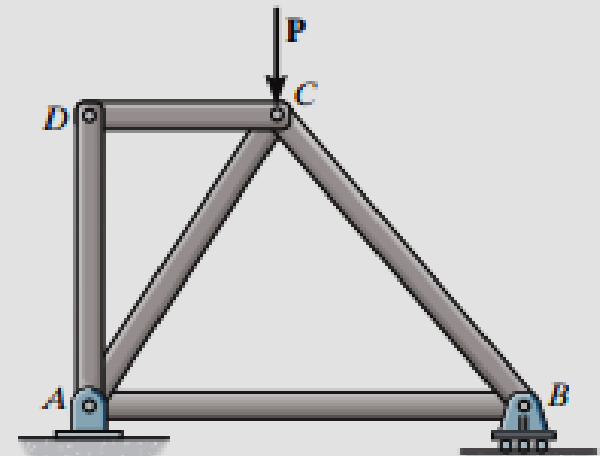
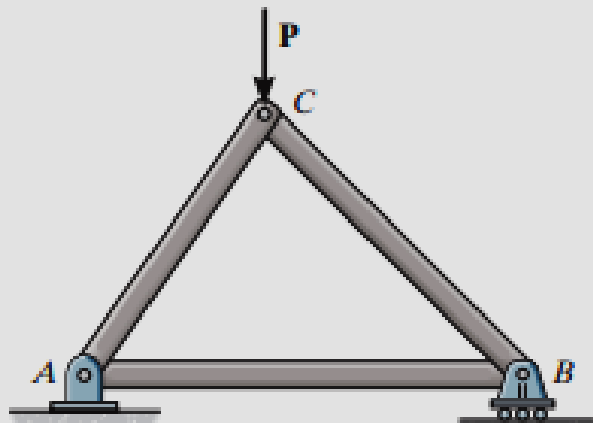
- Em razão dessas duas hipóteses, cada membro da treliça agirá como um membro de duas forças e, portanto, a força atuando em cada extremidade do membro será direcionada ao longo do seu eixo;
- Se a força tende a alongar o membro, ela é uma força de tração (T);
- Se ela tende a encurtar o membro, é uma força de compressão (C);
- No projeto real de uma treliça, é importante especificar se a natureza da força é de tração ou de compressão;
- Frequentemente, os membros em compressão precisam ser mais espessos do que os membros em tração, em virtude da flambagem que pode ocorrer quando um membro está em compressão.





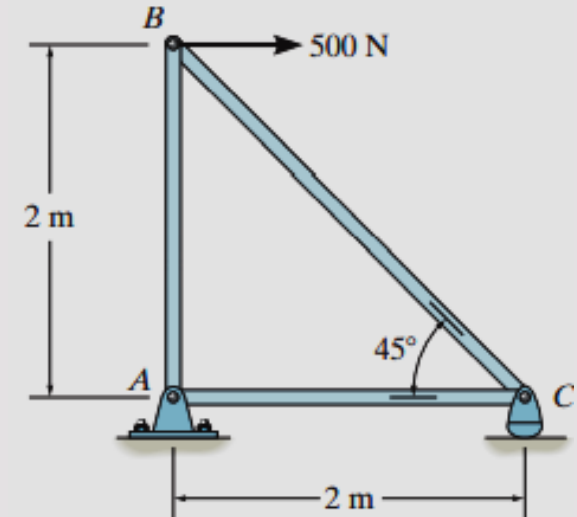
# TRELIÇAS PLANAS

- Se os três membros são conectados por pinos em suas extremidades, eles formam uma treliça triangular que será rígida;
- Unir dois ou mais membros e conectá-los a um novo nó D forma uma treliça maior;
- Esse procedimento pode ser repetido tantas vezes quanto desejado para formar uma treliça ainda maior;
- Se uma treliça pode ser construída expandindo a treliça básica triangular dessa forma, ela é chamada de treliça simples.

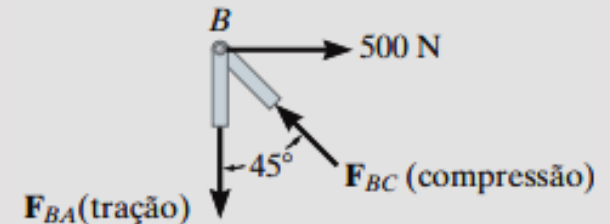


## 4.5. MÉTODO DOS NÓS

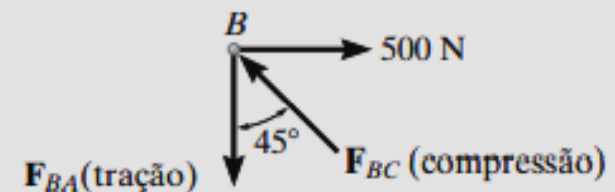
- Para a análise ou projeto de uma treliça, é necessário determinar a força em cada um de seus membros;
- Uma maneira de fazer isso é pelo **método dos nós**, o qual baseia-se no fato de que, se a treliça inteira está em equilíbrio, cada um de seus nós também está em equilíbrio;
- Portanto, se o diagrama de corpo livre de cada nó é desenhado, as equações de equilíbrio de forças podem ser usadas para obter as forças dos membros agindo sobre cada nó;
- Como os membros de uma treliça plana são membros retos de duas forças situados em um único plano, cada nó está sujeito a um sistema de forças que é coplanar e concorrente;
- Como resultado, apenas  $\sum F_x = 0$  e  $\sum F_y = 0$  precisam ser satisfeitas para o equilíbrio.



(a)



(c)

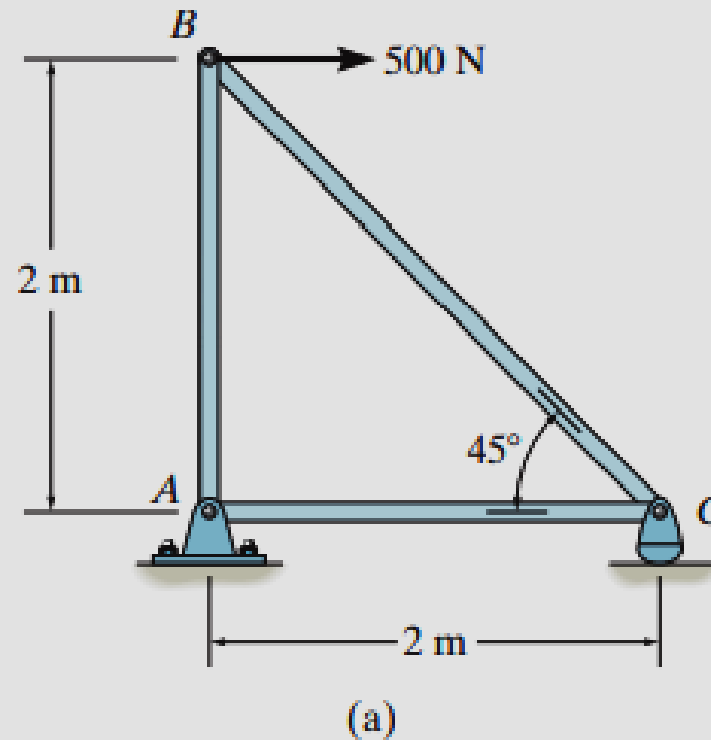


(b)

## 4.5. MÉTODO DOS NÓS

### Exercício 25:

- Determine a força em cada membro da treliça mostrada na figura e indique se os membros estão sob tração ou compressão.



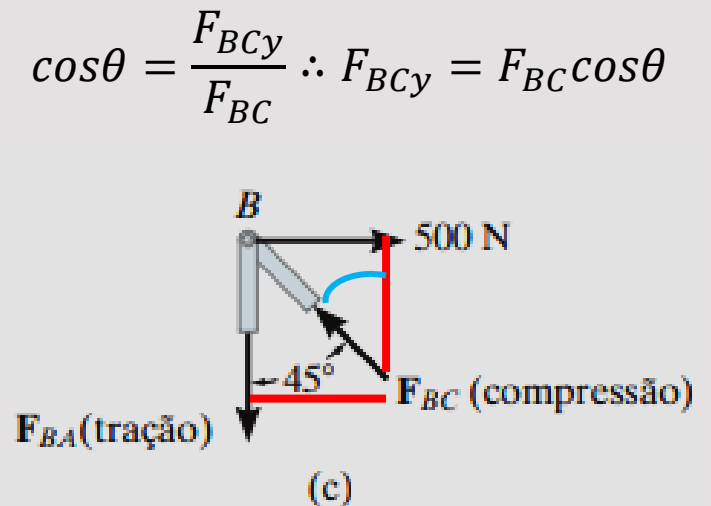
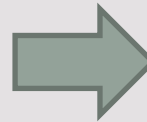
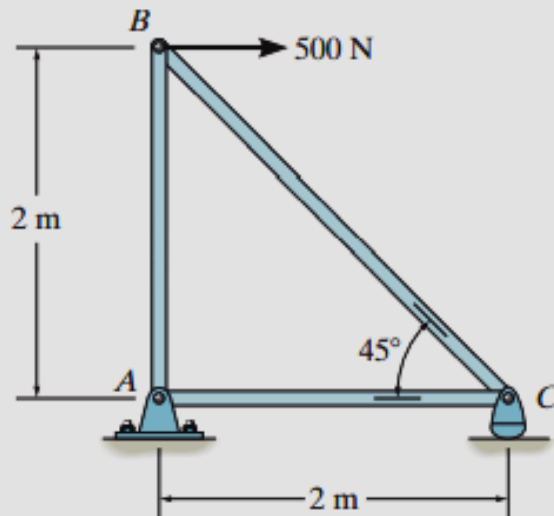
## 4.5. MÉTODO DOS NÓS

### Solução:

- Como não devemos ter mais do que duas forças incógnitas no nó e não menos do que uma força conhecida atuando ali, começaremos nossa análise com o nó **B**;

### Nó B:

- O diagrama de corpo livre do nó em B:



$$\cos\theta = \frac{F_{BCy}}{F_{BC}} \therefore F_{BCy} = F_{BC}\cos\theta$$

## 4.5. MÉTODO DOS NÓS

**Solução:**

**Nó B:**

➤ Aplicando as equações de equilíbrio, temos:

$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

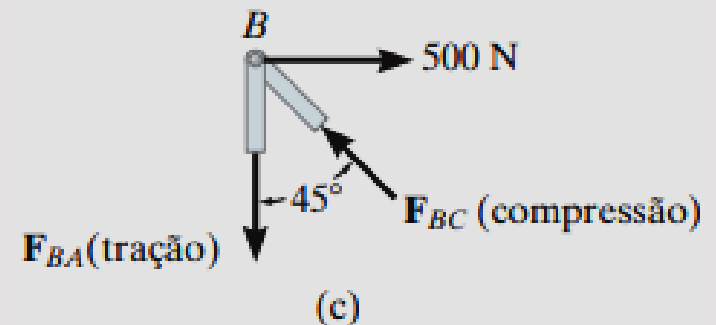
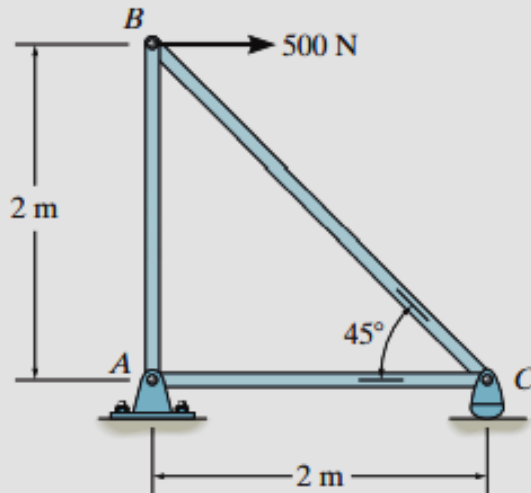
$$500 \text{ N} - F_{BC} \sin 45^\circ = 0$$

$$F_{BC} = 707,1 \text{ N (C)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$F_{BC} \cos 45^\circ - F_{BA} = 0$$

$$F_{BA} = 500 \text{ N (T)}$$



## 4.5. MÉTODO DOS NÓS

**Solução:**

**Nó C:**

- Como a força no membro **BC** foi calculada, podemos proceder à análise do nó **C** para determinar a força no membro **CA** e a reação no apoio oscilante. Pelo diagrama de corpo livre do nó **C**, temos:

$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

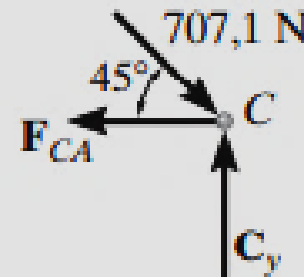
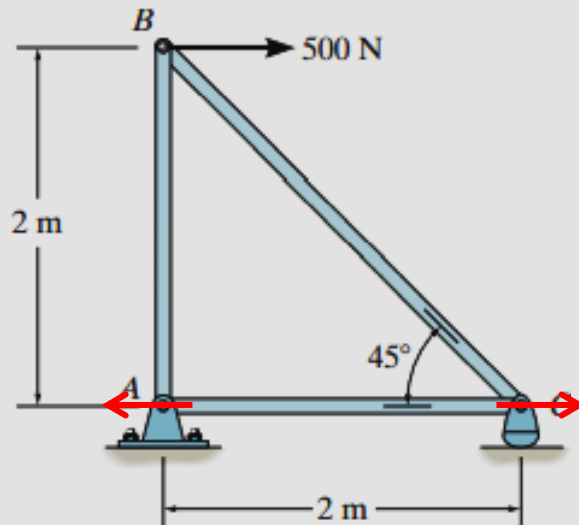
$$-F_{CA} + 707,1 \cos 45^\circ \text{ N} = 0$$

$$F_{CA} = 500 \text{ N (T)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$C_y - 707,1 \sin 45^\circ \text{ N} = 0$$

$$C_y = 500 \text{ N}$$



## 4.5. MÉTODO DOS NÓS

### Solução:

#### Nó A:

- Ainda que não seja necessário, podemos determinar as componentes das reações de apoio no nó  $A$  usando os resultados de  $F_{CA}$  e  $F_{BA}$ . Por meio do diagrama de corpo livre, temos:

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

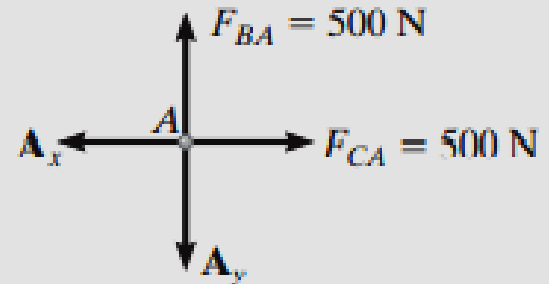
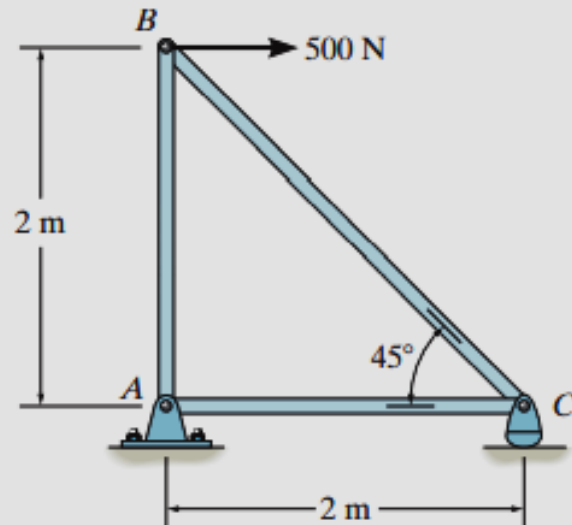
$$500 \text{ N} - A_x = 0$$

$$A_x = 500 \text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$500 \text{ N} - A_y = 0$$

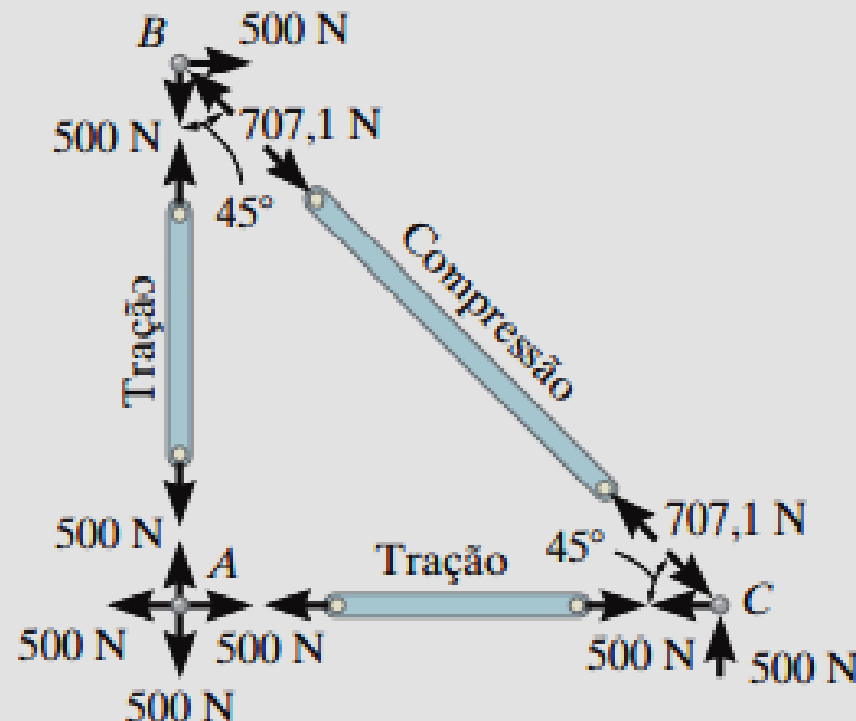
$$A_y = 500 \text{ N}$$



## 4.5. MÉTODO DOS NÓS

### Solução:

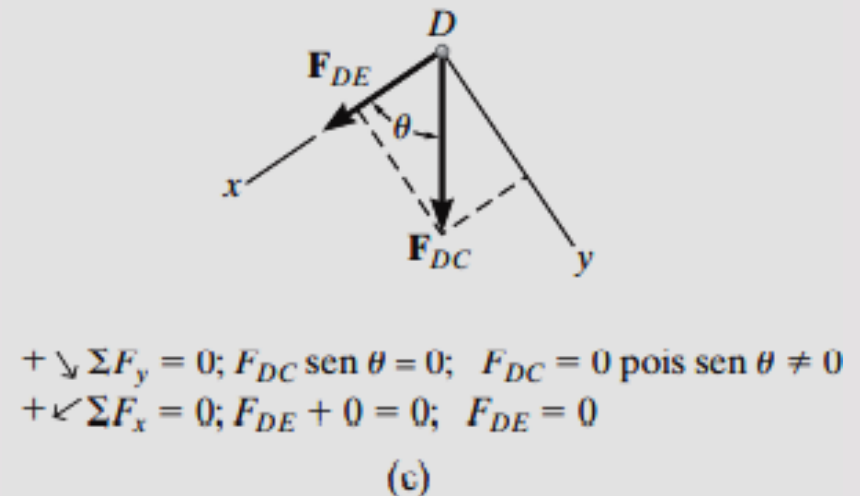
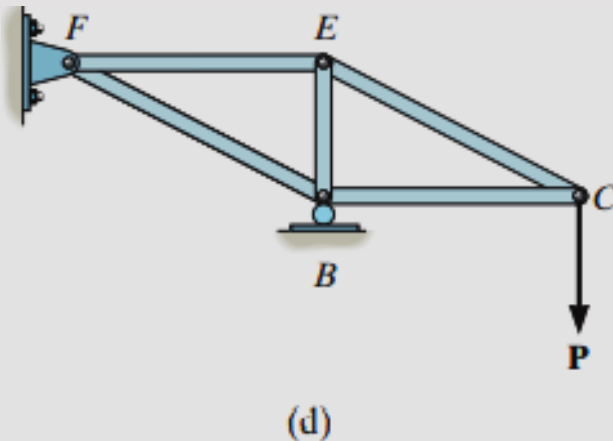
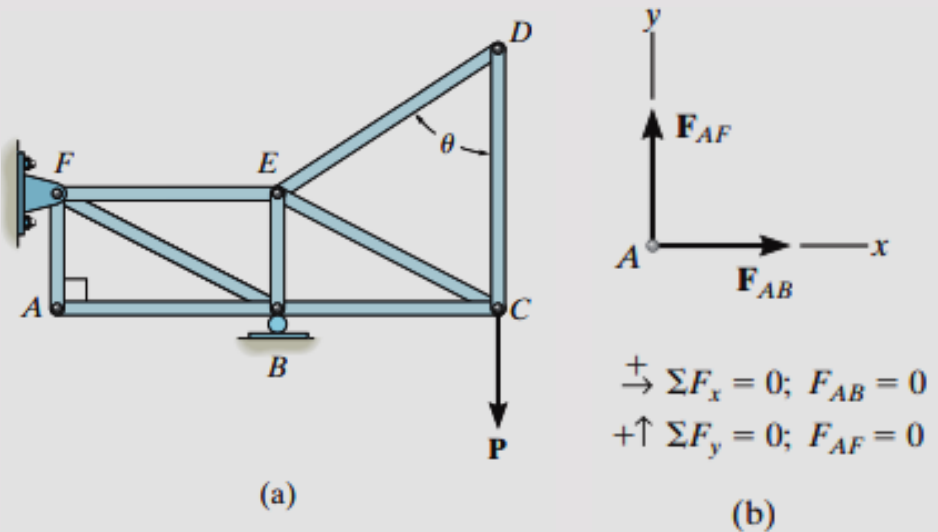
- Observe que o diagrama de corpo livre de cada nó (ou pino) mostra os efeitos de todos os membros conectados e forças externas aplicadas ao nó, enquanto o diagrama de corpo livre de cada membro mostra apenas os efeitos dos nós sobre o membro.





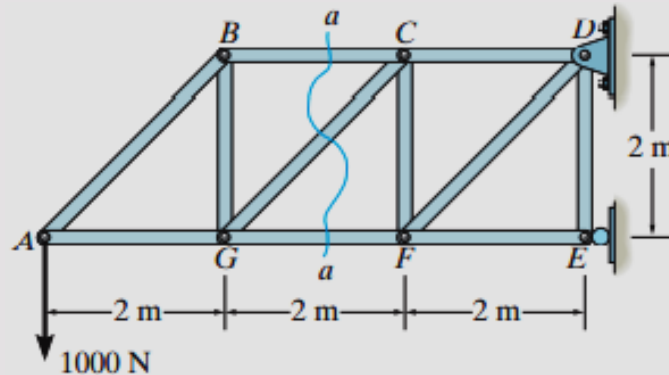
## 4.6. MEMBROS DE FORÇA ZERO

- A análise de treliças usando o método dos nós normalmente é simplificada se pudermos primeiramente identificar os membros que não suportam carregamento algum;
- Esses membros de força zero são usados para aumentar a estabilidade da treliça durante a construção e para fornecer um apoio adicional se o carregamento for alterado;
- Em geral, os membros de força zero de uma treliça podem ser determinados por observação de cada.

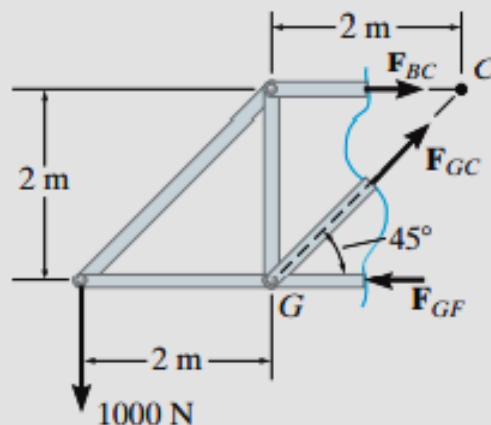


## 4.7. MÉTODO DAS SEÇÕES

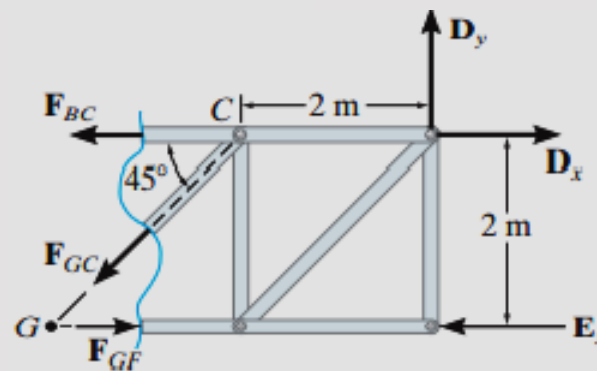
- Quando precisamos encontrar a força em apenas alguns membros de uma treliça, podemos analisá-la usando o método das seções;
- Esse método baseia-se no princípio de que, se uma treliça está em equilíbrio, então qualquer segmento dela também está em equilíbrio.



(a)



(b)

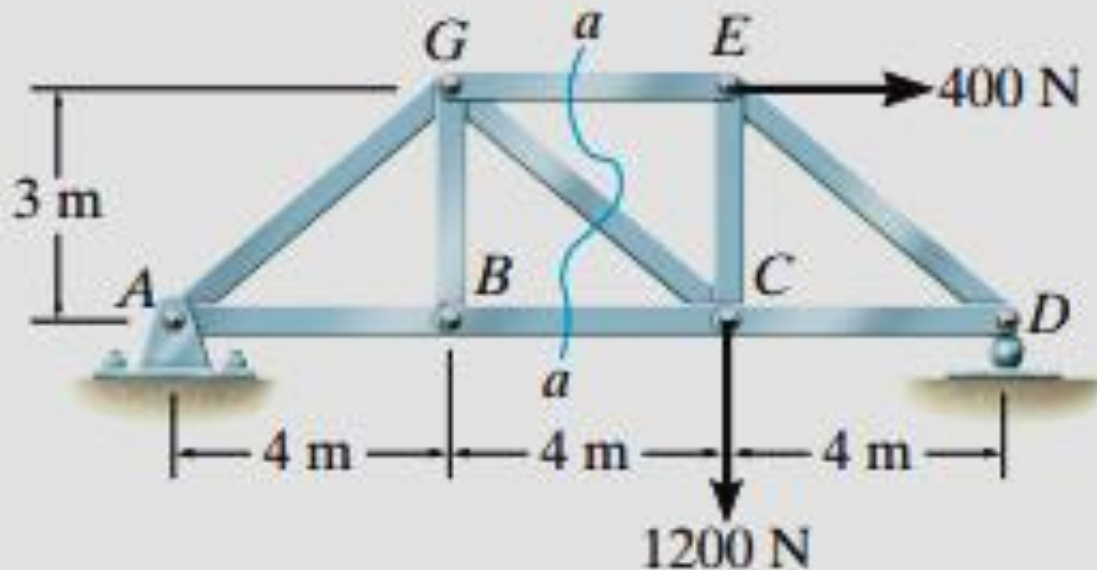


(c)

## 4.7. MÉTODO DAS SEÇÕES

### Exercício 26:

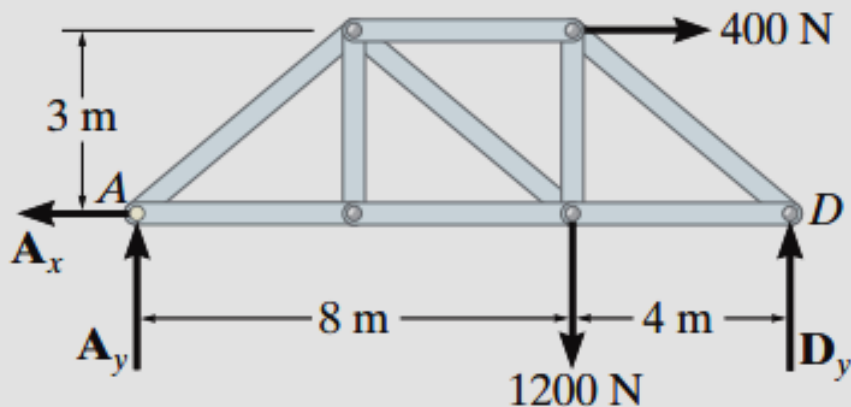
- Determine a força nos membros  $GE$ ,  $GC$  e  $BC$  da treliça mostrada na figura. Indique se os membros estão sob tração ou compressão.



## 4.7. MÉTODO DAS SEÇÕES

### Solução:

- A seção aa foi escolhida porque ela atravessa os três membros cujas forças devem ser determinadas;
- Para usar o método das seções, no entanto, primeiramente é necessário determinar as reações externas em *A* ou *D*. Aplicando as equações de equilíbrio, temos:



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$400 \text{ N} - A_x = 0$$

$$A_x = 400 \text{ N}$$

$$\curvearrowright \Sigma M_A = 0$$

$$-1200 \text{ N}(8 \text{ m}) - 400 \text{ N}(3 \text{ m}) + D_y(12 \text{ m}) = 0$$

$$D_y = 900 \text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$A_y - 1200 \text{ N} + 900 \text{ N} = 0$$

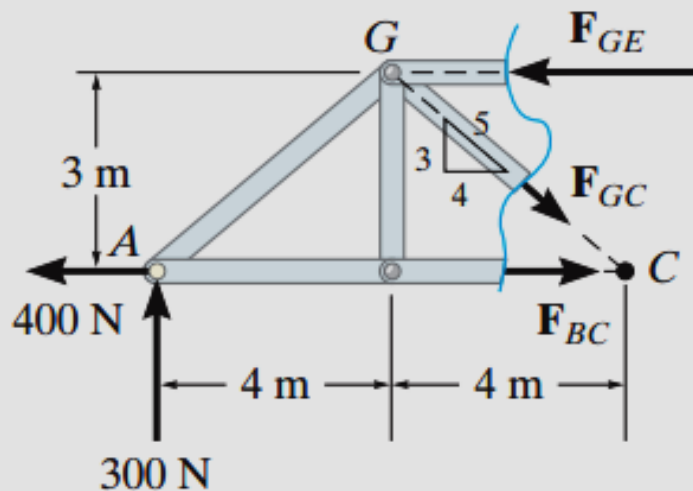
$$A_y = 300 \text{ N}$$

## 4.7. MÉTODO DAS SEÇÕES

### Solução:

#### Diagrama de corpo livre e equações de equilíbrio de uma seção da treliça

- Para a análise, usaremos o diagrama de corpo livre da parte esquerda da treliça selecionada, já que ele envolve o menor número de forças;
- A soma dos momentos em relação ao ponto  $G$  elimina  $F_{GE}$  e  $F_{GC}$  e fornece uma solução direta para  $F_{BC}$ :



$$\zeta + \Sigma M_G = 0$$

$$-300 \text{ N}(4 \text{ m}) - 400 \text{ N}(3 \text{ m}) + F_{BC}(3 \text{ m}) = 0$$

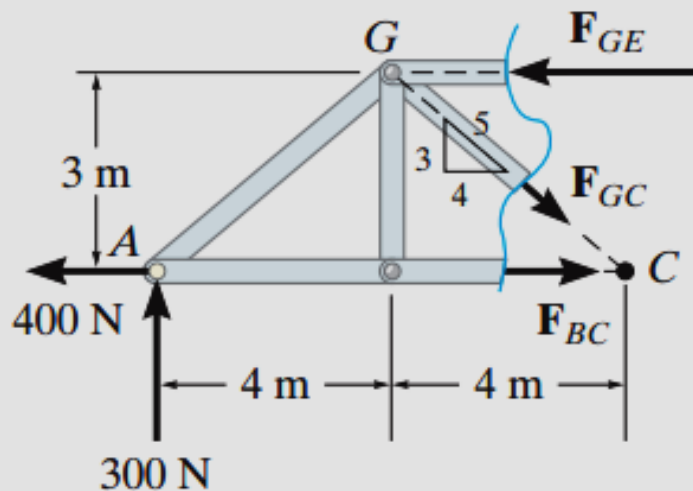
$$F_{BC} = 800 \text{ N (T)}$$

## 4.7. MÉTODO DAS SEÇÕES

**Solução:**

**Diagrama de corpo livre e equações de equilíbrio de uma seção da treliça**

- Somando os momentos em relação ao ponto  $C$ , obtemos uma solução direta para  $F_{GE}$ :



$$\zeta + \Sigma M_C = 0$$

$$-300 \text{ N}(8 \text{ m}) + F_{GE}(3 \text{ m}) = 0$$

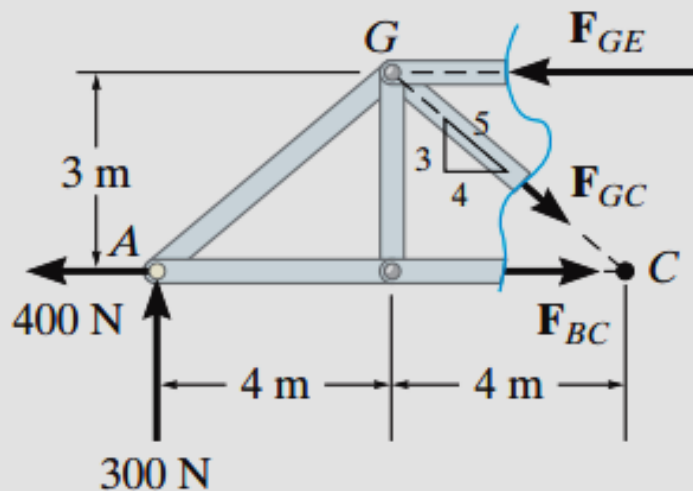
$$F_{GE} = 800 \text{ N} \quad (\text{C})$$

## 4.7. MÉTODO DAS SEÇÕES

**Solução:**

**Diagrama de corpo livre e equações de equilíbrio de uma seção da treliça**

- Como  $F_{BC}$  e  $F_{GE}$  não possuem componentes verticais, somar as forças na direção  $y$  diretamente produz  $F_{GC}$ , ou seja,



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$300 \text{ N} - \frac{3}{5} F_{GC} = 0$$

$$F_{GC} = 500 \text{ N (T)}$$

**ATÉ A PRÓXIMA!**