Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

CENTRO DE GRAVIDADE, CENTRO DE MASSA E CENTRO GEOMÉTRICO

6.1. Centro de gravidade

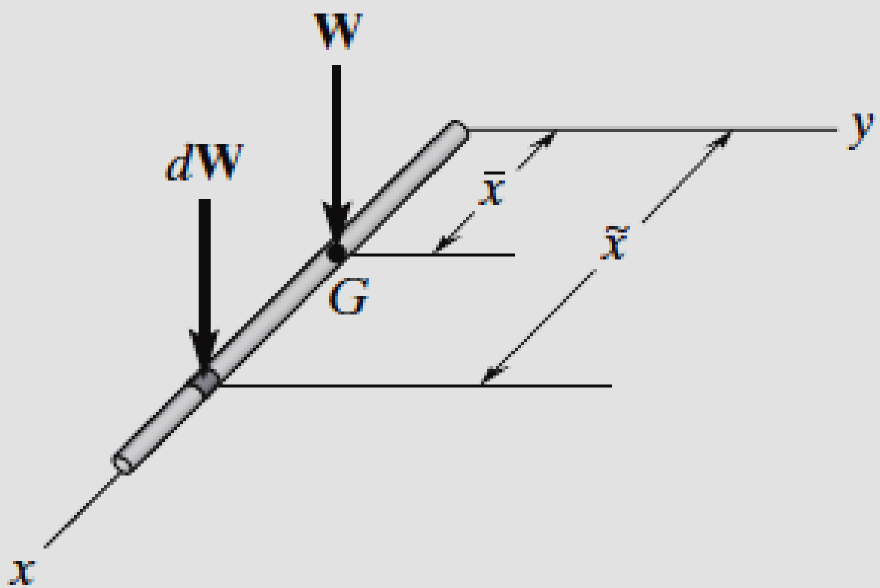
6.2. Centro de massa

6.3. Centro geométrico (centroide) de um corpo

5.1. CENTRO DE GRAVIDADE

- Um corpo é composto de uma série infinita de partículas de tamanho infinitesimal e, assim, se o corpo estiver localizado dentro de um campo gravitacional, cada uma das partículas terá um peso $\boldsymbol{dW}$;

- Esses pesos formarão um sistema de forças paralelas, e a resultante desse sistema é o peso total do corpo, que passa por um único ponto chamado **centro de gravidade**, $\boldsymbol{G}$;



(a)

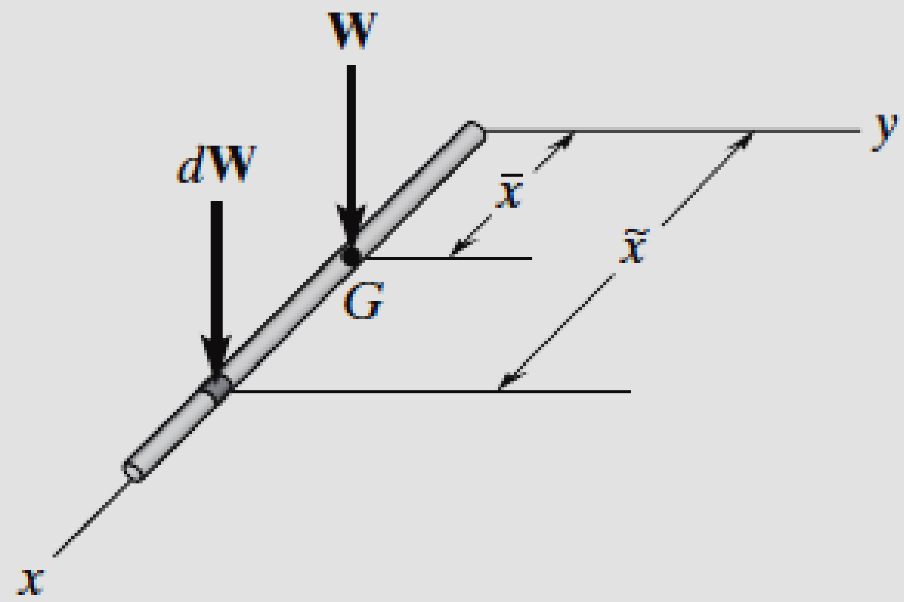
5.1. CENTRO DE GRAVIDADE

- Para determinar a localização do centro de gravidade, considere o elemento na *Figura a*, na qual o segmento com o peso $\boldsymbol{dW}$ está na posição arbitrária $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

- Usando os métodos esboçados na *Aula 10*, o peso total do elemento é a soma dos pesos de todas as suas partículas, ou seja:

$$+\downarrow F_R = \Sigma F_z;$$

$$W = \int dW$$



(a)

5.1. CENTRO DE GRAVIDADE

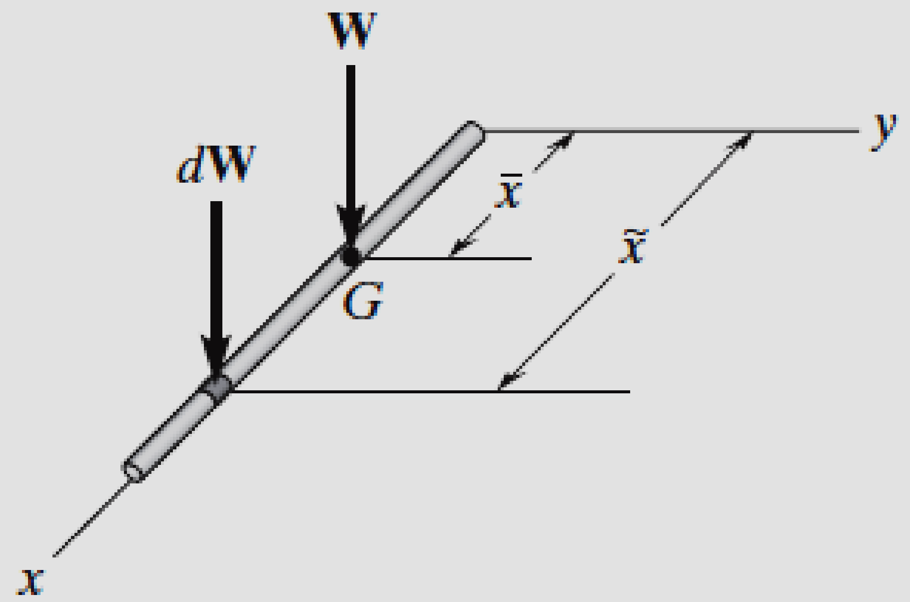
- A localização do centro de gravidade, medido a partir do eixo y, é determinada igualando-se o momento de W em relação ao eixo y (Figura 9.1*b*) à soma dos momentos dos pesos das partículas em relação a esse mesmo eixo;

- Portanto,

$$(M_R)_y = \Sigma M_y;$$

$$\bar{x}W = \int \tilde{x}\, dW$$

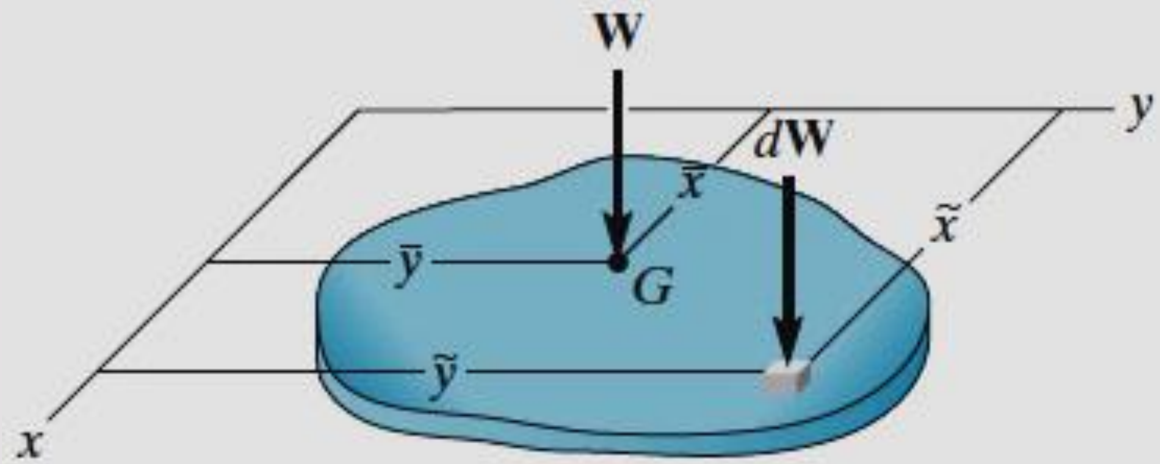
$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dW}{\int dW}$$



(a)

5.1. CENTRO DE GRAVIDADE

- De modo semelhante, se o corpo representa uma placa (*Figura b*), então seria necessário um equilíbrio de momentos em relação aos eixos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ para determinar a localização $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ do ponto $\boldsymbol{G}$.



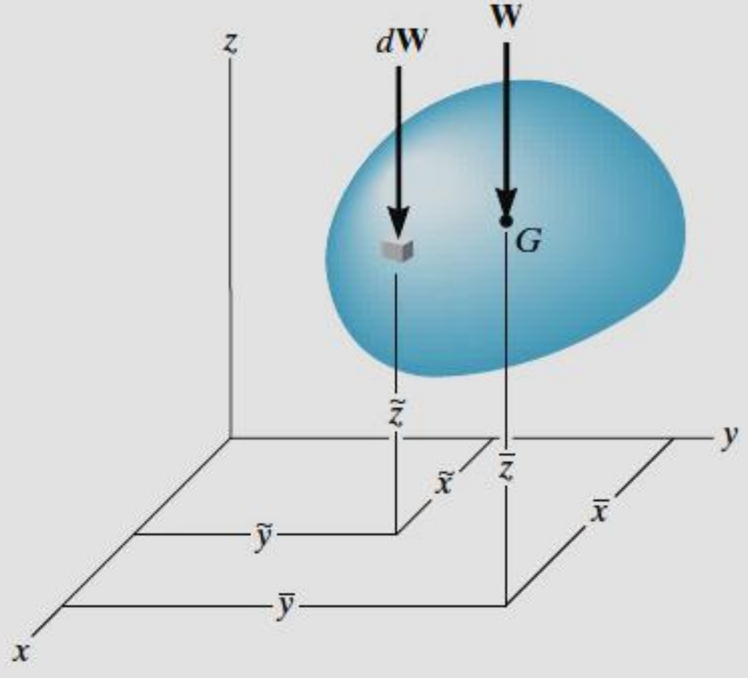
(b)

5.1. CENTRO DE GRAVIDADE

- Então, a gente pode generalizar essa ideia para um corpo tridimensional (Figura 9.1*c*) e realizar um equilíbrio de momentos em relação a todos os três eixos para localizar *G* para qualquer posição girada dos eixos;

- Isto resulta nas seguintes equações:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dW}{\int dW} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dW}{\int dW} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\, dW}{\int dW}$$



(c)

- $\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}$ *e* $\bar{\boldsymbol{z}}$ são as coordenadas do centro de gravidade ***G***;

- $\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}$ *e* $\tilde{\boldsymbol{z}}$ são as coordenadas de qualquer partícula arbitrária no corpo.

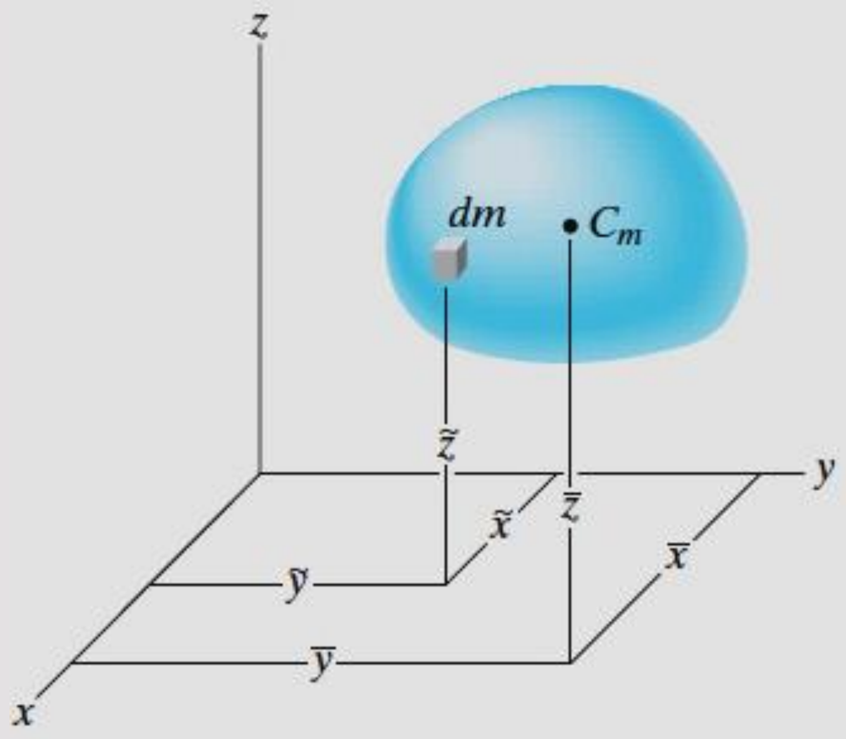
5.2. CENTRO DE MASSA

- Para o estudo da *resposta dinâmica* ou movimento acelerado de um corpo, é importante localizar o seu ***centro de massa*** $\boldsymbol{C_m}$;

- Essa localização pode ser determinada substituindo-se $\boldsymbol{dW = g\,dm}$ nas equações anteriores;

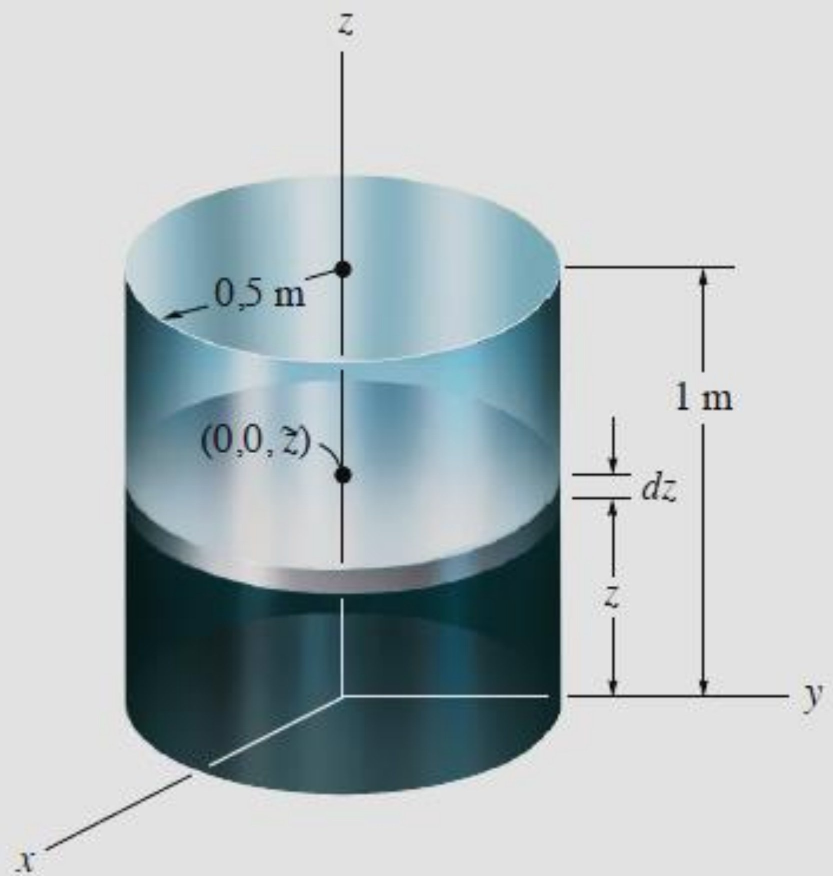
- Se $\boldsymbol{g}$ é constante, ele é cancelado e, portanto:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dm}{\int dm} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dm}{\int dm} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\, dm}{\int dm}$$



Exercício 32:

- Determine a localização do centro de massa do cilindro mostrado na figura abaixo se sua densidade varia diretamente com a distância a partir de sua base, ou seja, $\boldsymbol{\rho = 200z\, kg/m^3}$.



5.2. CENTRO DE MASSA

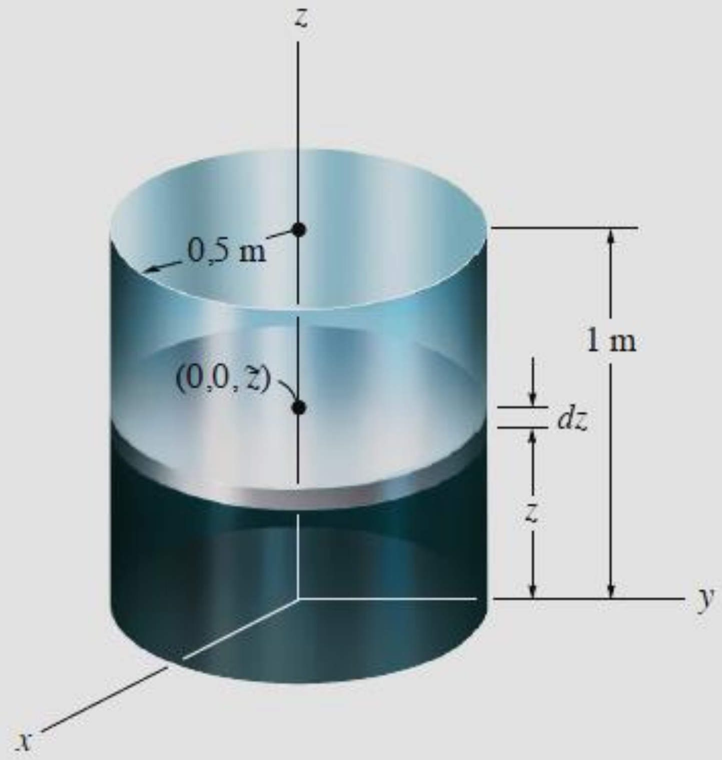
Solução:

- Devido à distribuição radial simétrica do material, $\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{y}} = \mathbf{0}$.

1) Elemento diferencial:

- Um elemento de disco com raio 0,5 m e espessura $\boldsymbol{dz}$ é escolhido para integração, pois a densidade de todo o elemento é constante para determinado valor de $\boldsymbol{z}$;

- O elemento está localizado ao longo do eixo $\boldsymbol{z}$ no ponto arbitrário $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \tilde{\boldsymbol{z}})$.



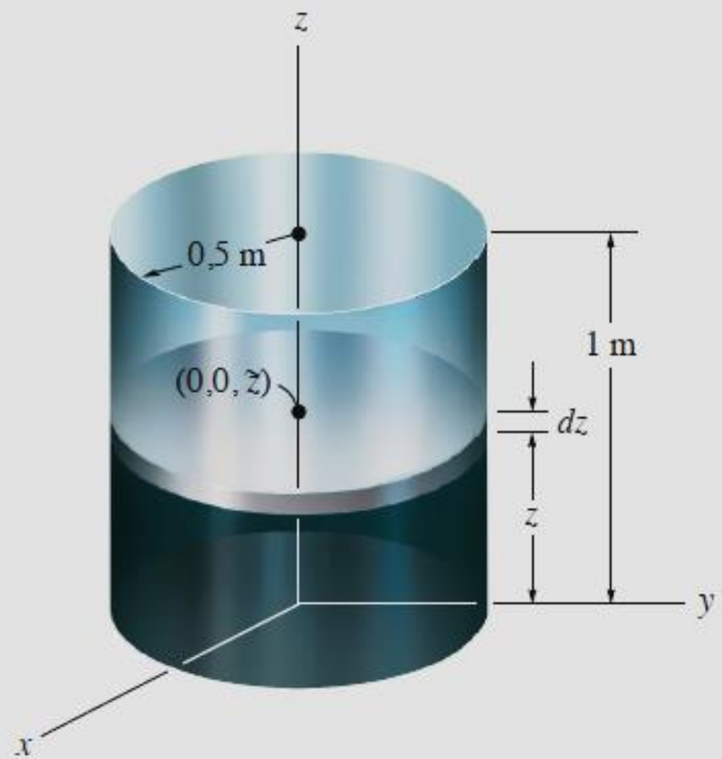
5.2. CENTRO DE MASSA

Solução:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \therefore dm = \rho dV$$

2) Volume e braço de momento:

- O volume do elemento é $\boldsymbol{dV = \pi(0,5)^2\, dz}$, e seu centroide está localizado em $\boldsymbol{\tilde{z} = z}$;



3) Integração:

$$\bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\rho\, dV}{\int_V \rho\, dV} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} z(200z)\left[\pi(0,5)^2\, dz\right]}{\int_0^{1\text{ m}} (200z)\pi(0,5)^2\, dz}$$

$$= \frac{\int_0^{1\text{ m}} z^2\, dz}{\int_0^{1\text{ m}} z\, dz} = 0,667\text{ m}$$

5.3. CENTRÓIDE

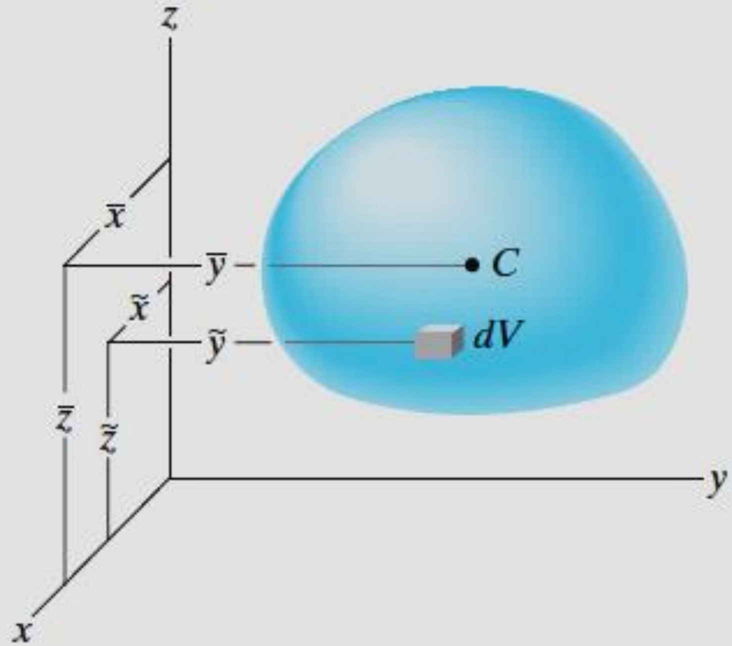
Centroide de um volume:

- Se o corpo é feito de um **material homogêneo**, então sua densidade $\boldsymbol{\rho}$ (rho) será **constante**;

- Portanto, um elemento diferencial de volume $\boldsymbol{dV}$ tem massa $\boldsymbol{dm = \rho dV}$;

- Substituindo essa massa nas equações anteriores e cancelando $\boldsymbol{\rho}$, obtemos as fórmulas que localizam o **centroide C** ou centro geométrico do corpo:

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\, dV}{\int_V dV}$$



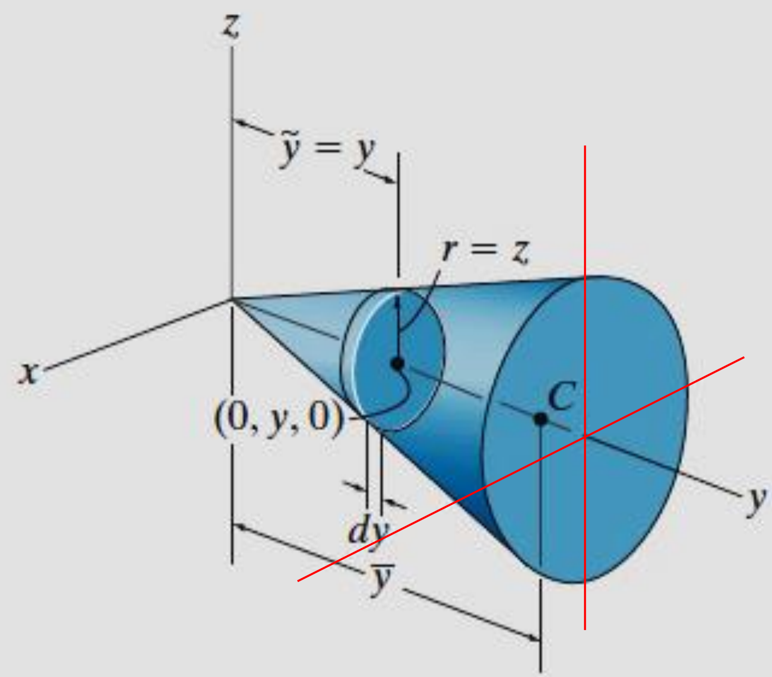
5.3. CENTRÓIDE

Centroide de um volume:

- Essas equações representam o equilíbrio dos momentos do volume do corpo. Portanto, se o volume possui dois planos de simetria, seu centroide precisa estar ao longo da linha de interseção desses dois planos;

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\, dV}{\int_V dV}$$

- Por exemplo, o cone na figura ao lado tem um centroide no eixo $\boldsymbol{y}$, de modo que $\boldsymbol{x = z = 0}$;



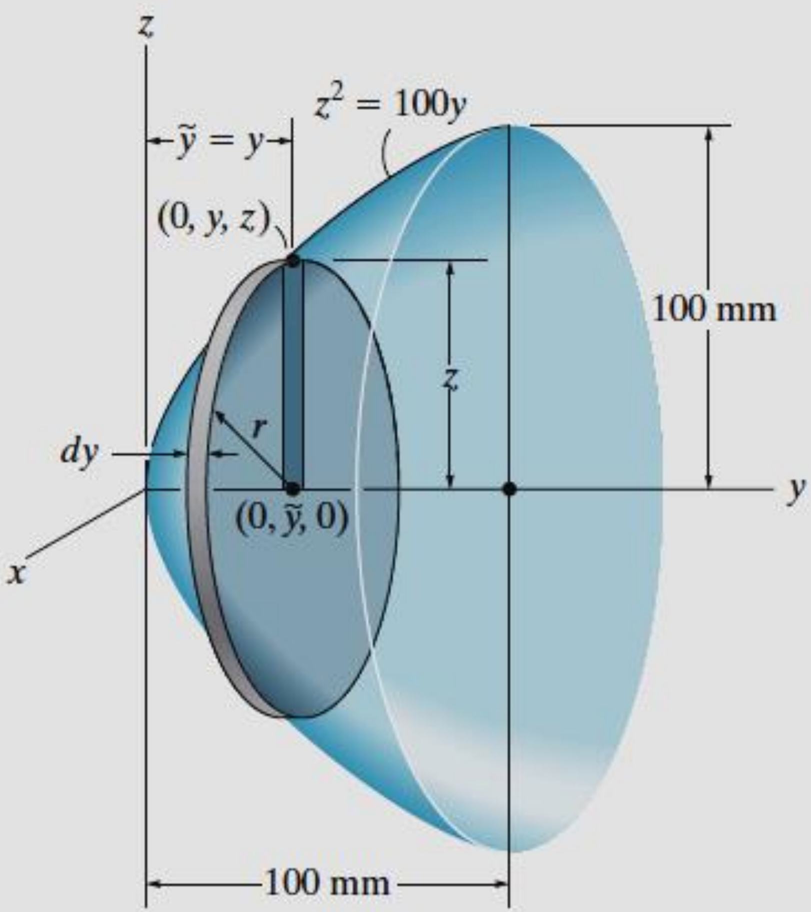
- A localização $\boldsymbol{y}$ pode ser encontrada usando uma integração simples, escolhendo-se um elemento diferencial representado por um *disco fino* com
- espessura $\boldsymbol{dy}$ e raio $\boldsymbol{r = z}$;

- Seu volume é $\boldsymbol{dV = \pi r^2 dy = \pi z^2 dy}$ e seu centroide está em $\boldsymbol{\tilde{x} = 0, \tilde{y} = y, \tilde{z} = 0}$.

5.3. CENTRÓIDE

Exercício 33:

- Localize o centroide $\bar{y}$ para o paraboloide de revolução, mostrado na figura abaixo.



5.3. CENTRÓIDE

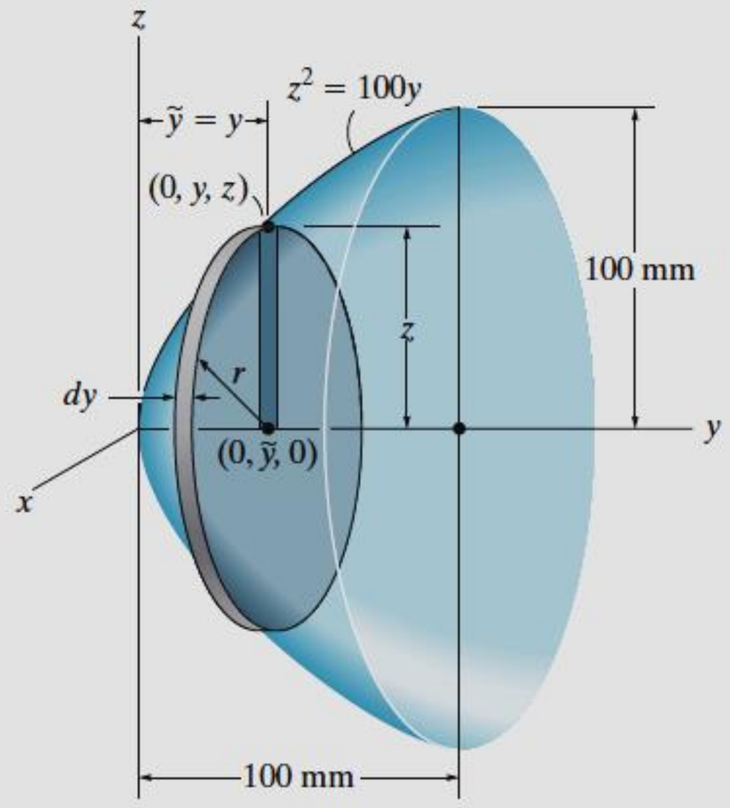
Solução:

1) Elementos diferencial:

- Um elemento com a forma de um **disco fino** é escolhido. Esse elemento tem espessura $\boldsymbol{dy}$, intercepta a curva de geração no **ponto arbitrário** $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ e, portanto, seu raio é $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{z}$.

2) Volume e braço de momento:

- O volume do elemento é $\boldsymbol{dV} = (\boldsymbol{\pi r^2})\,\boldsymbol{dy}$ e seu centroide está localizado em $\widetilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y}$.



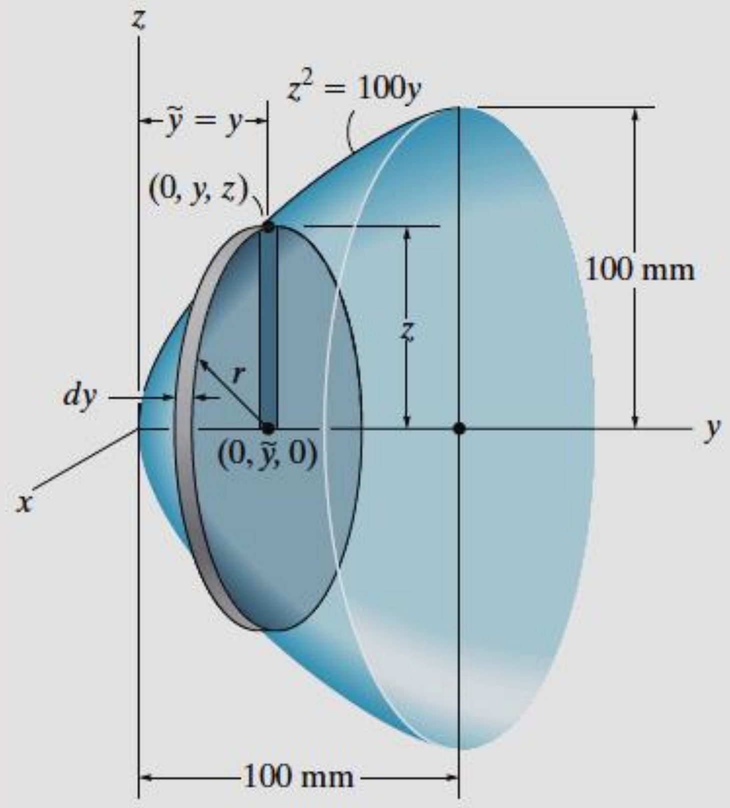
Solução:

3) Integração:

- Aplicando a equação anterior e integrando com relação a $\boldsymbol{y}$, temos:

$$\bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} = \frac{\int_0^{100\text{ mm}} y(\pi z^2)\, dy}{\int_0^{100\text{ mm}} (\pi z^2)\, dy}$$

$$= \frac{100\pi \int_0^{100\text{ mm}} y^2\, dy}{100\pi \int_0^{100\text{ mm}} y\, dy} = 66{,}7\text{ mm}$$



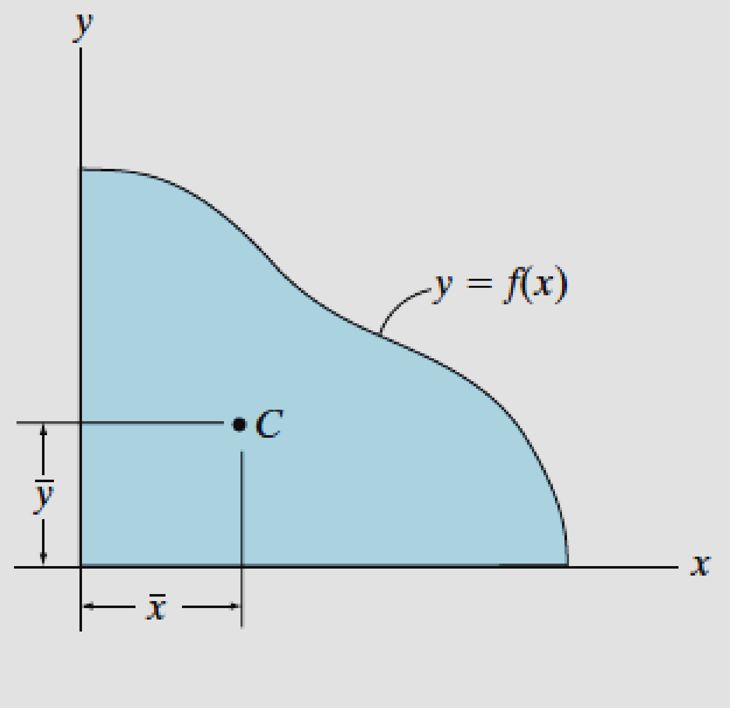
5.3. CENTRÓIDE

Centróide de uma área:

- Se uma área, mostrada na *Figura a*, encontra-se no plano $x - y$ e está contornada pela curva $y = f(x)$, então seu centroide estará nesse plano e pode ser determinado a partir de integrais semelhantes às equações anteriores.

- Logo:

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA}$$



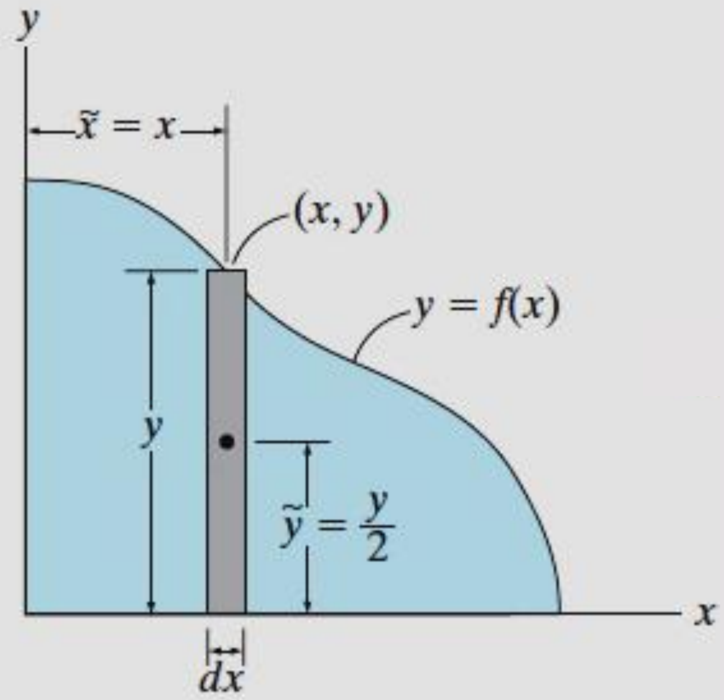
(a)

5.3. CENTRÓIDE

Centróide de uma área:

- Essas integrais podem ser calculadas realizando-se uma integração simples se usarmos uma faixa retangular para o elemento diferencial de área;

- Por exemplo, se for usada uma faixa vertical (*Figura b*), a área do elemento é $\boldsymbol{dA = y\,dx}$, e seu centroide está localizado em $\boldsymbol{\tilde{x} = x}$ e $\boldsymbol{\tilde{y} = y/2}$;



(b)

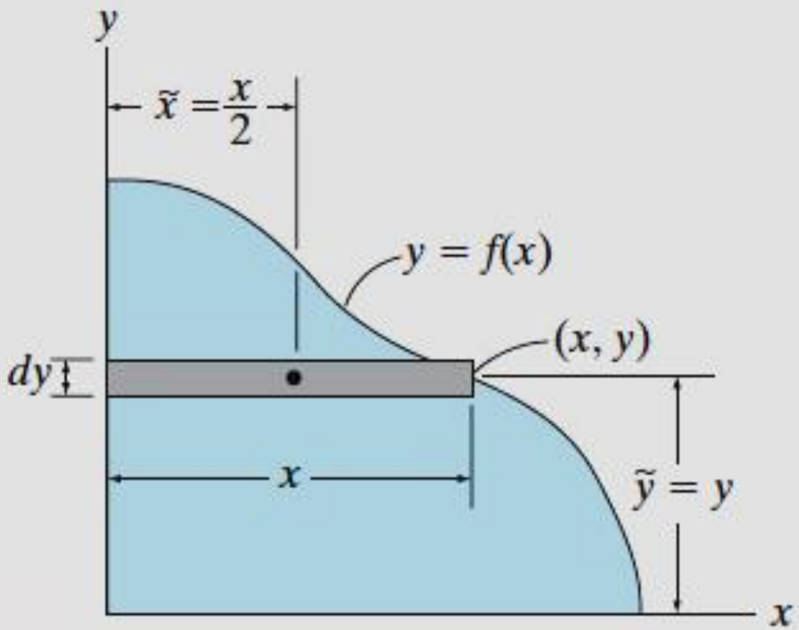
$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA}$$

5.3. CENTRÓIDE

Centróide de uma área:

- Se considerarmos uma faixa horizontal (*Figura c*), então $\boldsymbol{dA = x\,dy}$, e seu centroide está localizado em $\boldsymbol{\tilde{x} = x/2}$ e $\boldsymbol{\tilde{y} = y}$:

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA}$$

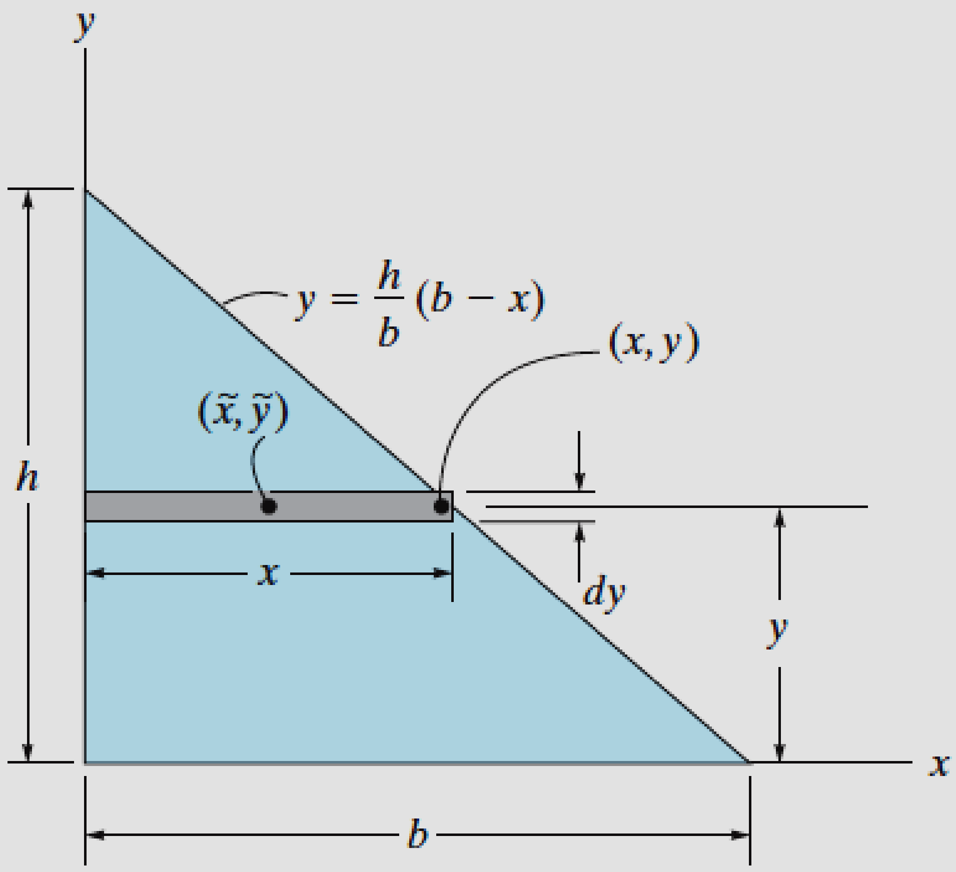


(c)

5.3. CENTRÓIDE

Exercício:

- Determine a distância $\bar{y}$ medida a partir do eixo x até o centroide da área do triângulo mostrado na figura abaixo.

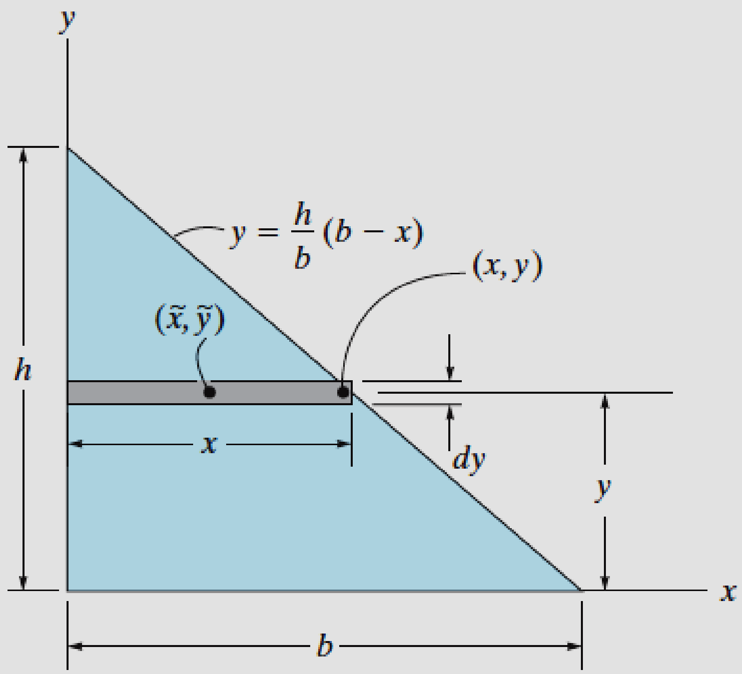


5.3. CENTRÓIDE

Solução:

1) Elemento diferencial:

- Considere um elemento retangular que tenha espessura $\boldsymbol{dy}$ e esteja localizado em uma posição arbitrária de modo que intercepte o contorno em $(\boldsymbol{x,y})$;



2) Área e braço de momento:

- A área do elemento é $\boldsymbol{dA = x\,dy = \frac{b}{h}(h - y)\,dy}$, e seu centroide está localizado a uma distância $\boldsymbol{\tilde{y} = y}$ do eixo $\boldsymbol{x}$.

5.3. CENTRÓIDE

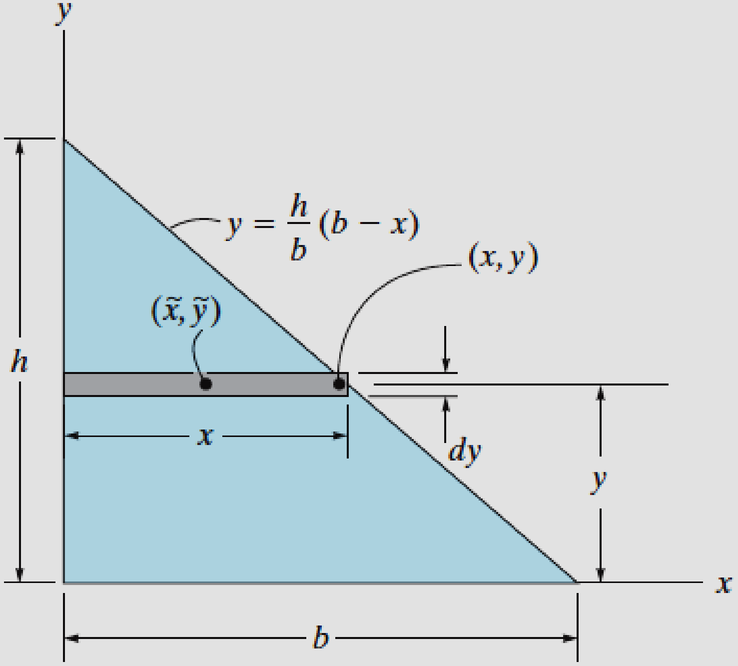
Solução:

3) Integração:

- Aplicando a equação anterior e integrando com relação a $\boldsymbol{y}$, temos:

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^h y\left[\frac{b}{h}(h-y)\, dy\right]}{\int_0^h \frac{b}{h}(h-y)\, dy}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}bh^2}{\frac{1}{2}bh} = \frac{h}{3}$$

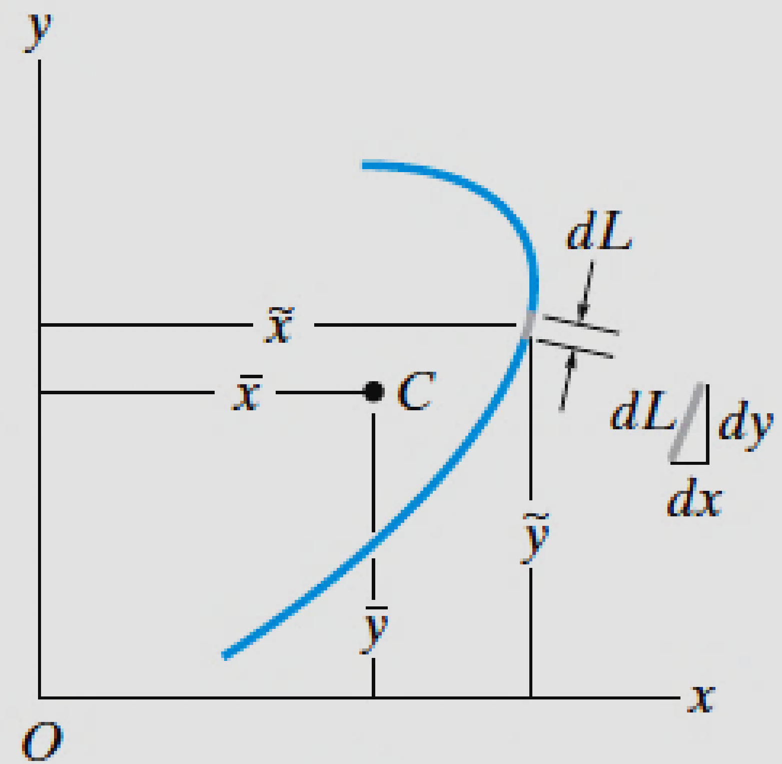


5.3. CENTRÓIDE

Centróide de uma linha:

- Se um segmento de linha (ou elemento unidimensional) estiver dentro do plano $x\text{–}y$ e puder ser descrito por uma curva fina $y = f(x)$, seu centroide é determinado a partir de:

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} \qquad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL}$$



5.3. CENTRÓIDE

Centróide de uma linha:

➢ Aqui, o comprimento do elemento diferencial é dado pelo teorema de Pitágoras, $dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, que também pode ser escrito na forma:

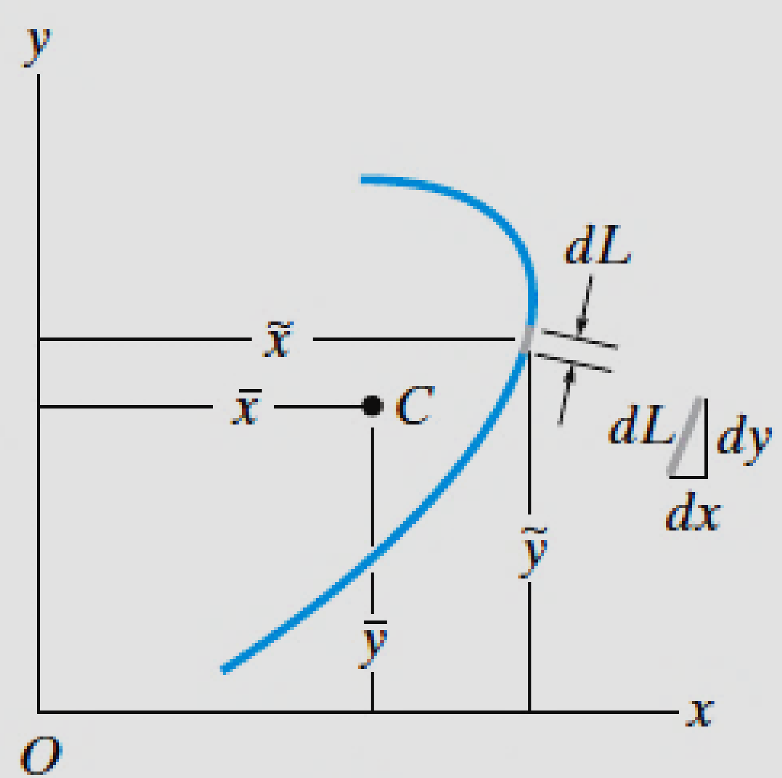
$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} \qquad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL}$$

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2}$$

$$= \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) dx$$

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 dy^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2 dy^2}$$

$$= \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\right) dy$$



5.3. CENTRÓIDE

Observações importantes:

- O centroide representa o centro geométrico de um corpo. Esse ponto coincide com o centro de massa ou o centro de gravidade somente se o material que compõe o corpo for uniforme ou homogêneo;

- As fórmulas usadas para localizar o centro de gravidade ou o centroide simplesmente representam um equilíbrio entre a soma dos momentos de todas as partes do sistema e o momento da “resultante” do sistema;

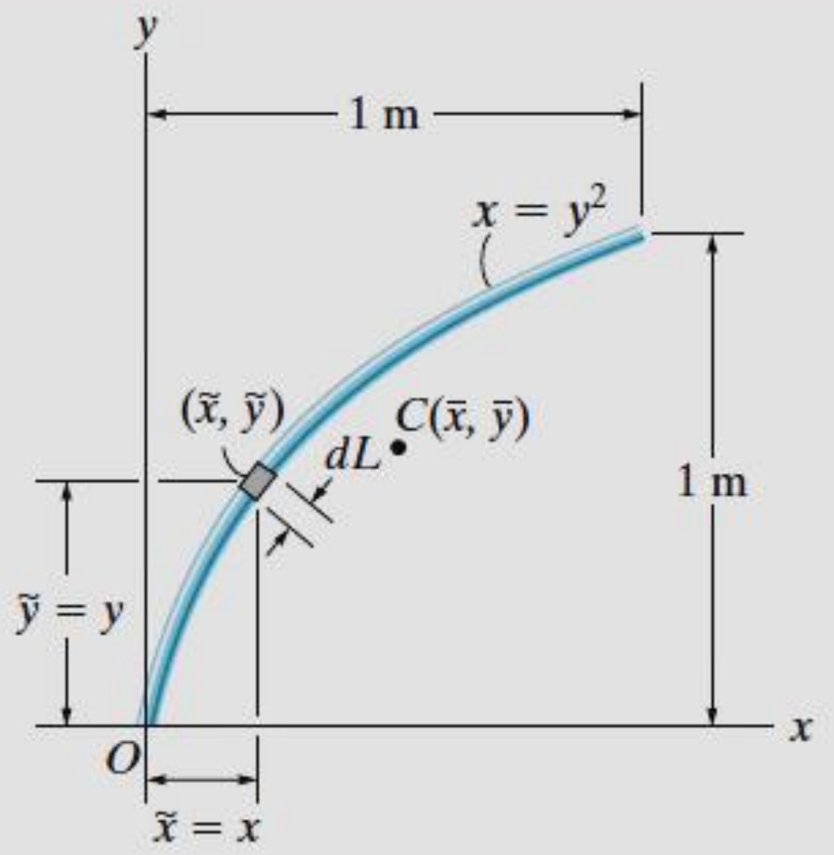
- Em alguns casos, o centroide está localizado em um ponto que não está sobre o objeto, como no caso de um anel, onde o centroide está em seu centro;

- Além disso, esse ponto estará sobre qualquer eixo de simetria do corpo.

5.3. CENTRÓIDE

Exercício:

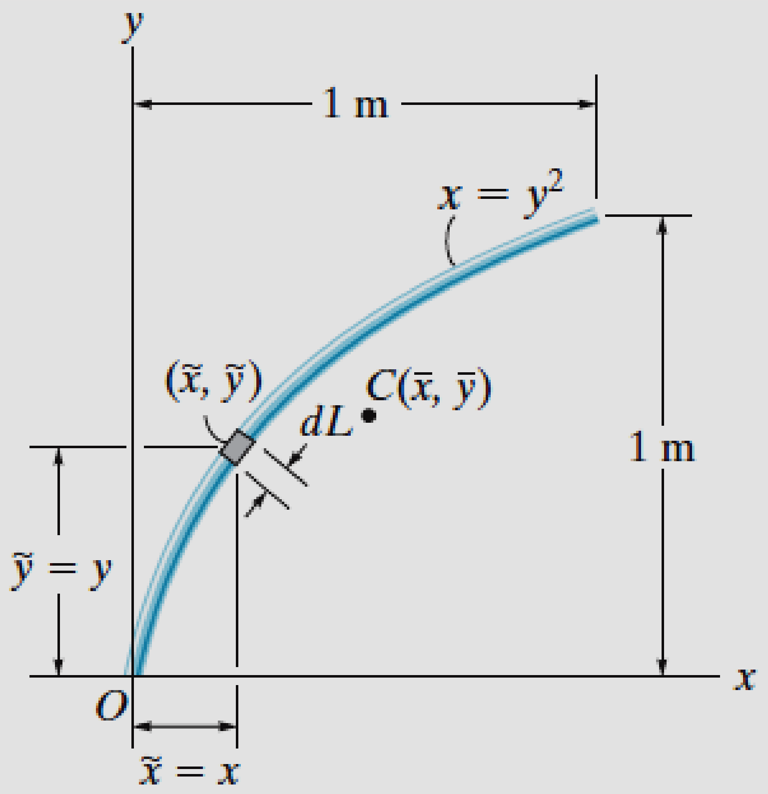
- Localize o centroide do elemento curvo na forma de um arco parabólico, como mostra a Figura abaixo:



Solução:

1) Elemento infinitesimal:

➢ Este elemento está localizado sobre a curva no **ponto arbitrário** (x, y).



5.3. CENTRÓIDE

Solução:

2) Área e braços de momento:

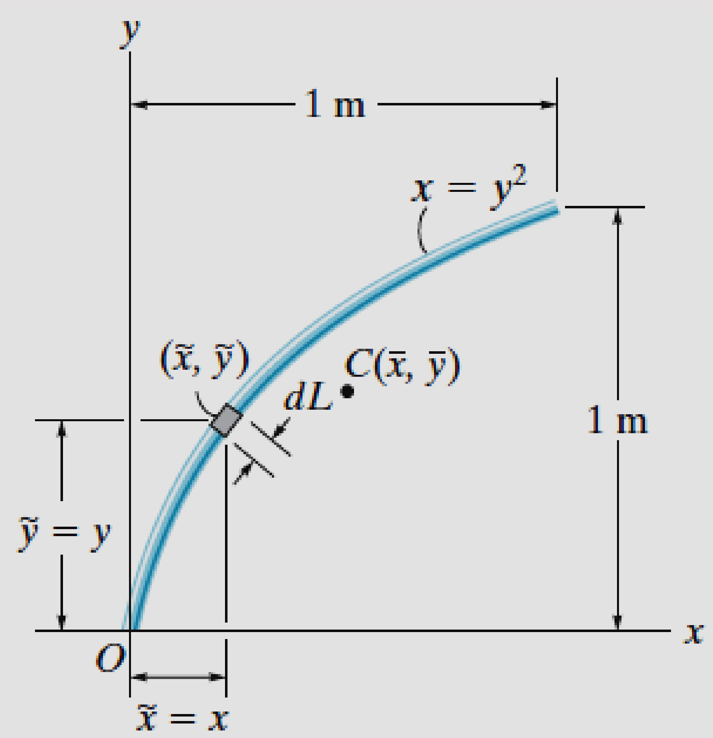
- O elemento diferencial do comprimento $\boldsymbol{dL}$ pode ser expresso em termos dos diferenciais $\boldsymbol{dx}$ e $\boldsymbol{dy}$ usando o teorema de Pitágoras:

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy$$

- Como $\boldsymbol{x = y^2}$, então $\boldsymbol{dx/dy = 2y}$. Portanto, expressando $\boldsymbol{dL}$ em termos de $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{dy}$, temos:

$$dL = \sqrt{(2y)^2 + 1}\, dy$$

- O centroide do elemento está localizado em $\boldsymbol{\tilde{x} = x}$ e $\boldsymbol{\tilde{y} = y}$.



5.3. CENTRÓIDE

Solução:

3) Integrações:

- Aplicando a equação anterior e usando a fórmula de integração para calcular as integrais, obtemos:

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} x\sqrt{4y^2 + 1}\, dy}{\int_0^{1\text{ m}} \sqrt{4y^2 + 1}\, dy} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} y^2\sqrt{4y^2 + 1}\, dy}{\int_0^{1\text{ m}} \sqrt{4y^2 + 1}\, dy} = \frac{0{,}6063}{1{,}479} = 0{,}410\text{ m}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} y\sqrt{4y^2 + 1}\, dy}{\int_0^{1\text{ m}} \sqrt{4y^2 + 1}\, dy} = \frac{0{,}8484}{1{,}479} = 0{,}574\text{ m}$$

OBRIGADO PELA ATENÇÃO!