

INSTITUTO DE TECNOLOGIA - UFPA  
FACULDADE DE ENG. MECÂNICA

DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS I

## **Parte 4: Torção**

**Professor: Leonardo Dantas Rodrigues**

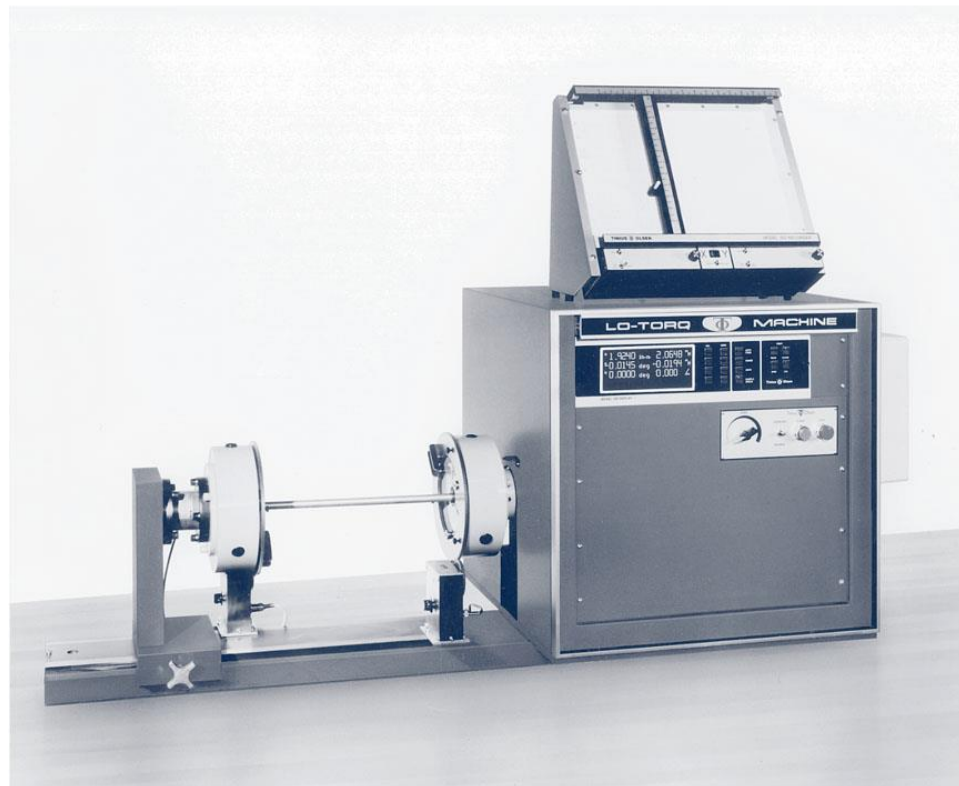


Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.



© John DeWolf

Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.

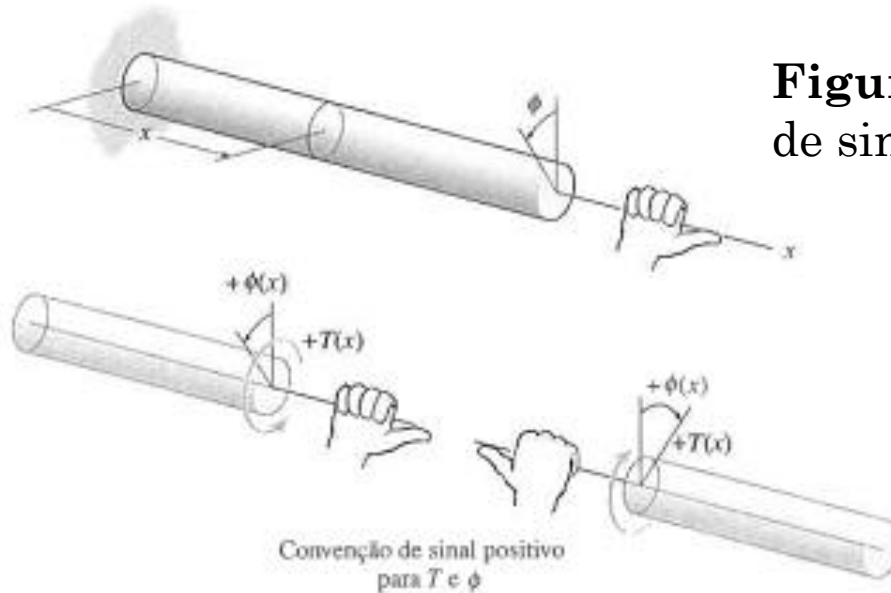


Courtesy of Tinius Olsen Testing Machine Co., Inc.

# INTRODUÇÃO

**Torque** é o momento que tende a torcer um componente em torno do seu eixo longitudinal.

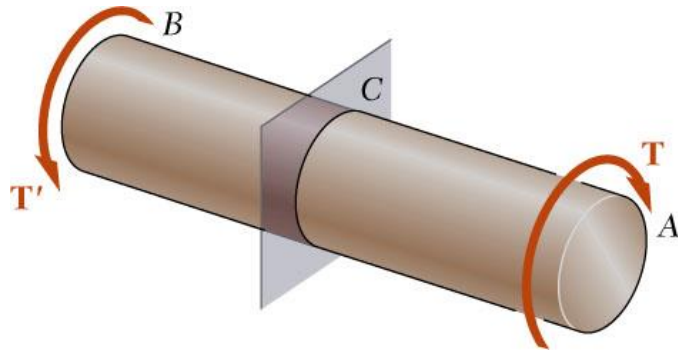
**Representação e convenção de sinais:**



**Figura 4.1:** convenção de sinais

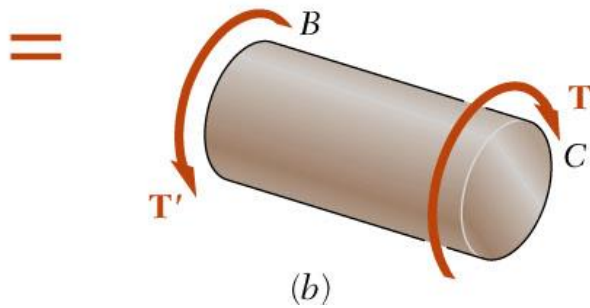
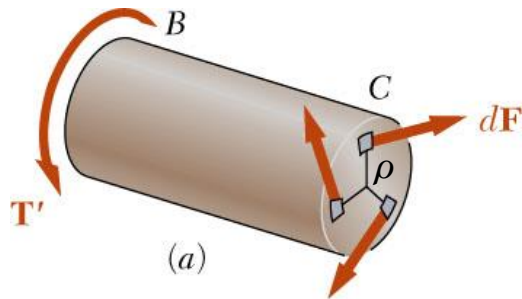
Para a determinação dos torques internos ao longo dos eixos analisados, considerar a regra da mão direita. Nesta, o torque e o ângulo de rotação serão positivos se a direção indicada pelo polegar for no sentido de se afastar do eixo quando os demais dedos indicarem o sentido da rotação.

# DISCUSSÕES PRELIMINARES



O somatório das forças de cisalhamento elementares são equivalentes a um torque interno, igual ao torque aplicado,

$$T = \int \rho \, dF = \int \rho (\tau \, dA) \quad (4.1)$$



Ao contrário da tensão normal devido à carga axial, a distribuição das tensões de cisalhamento devido a cargas de torção não pode ser considerada uniforme na seção. Elas variam com a posição radial.

Figura 4.3

# DEFORMAÇÕES EM BARRAS DE SEÇÃO CIRCULAR

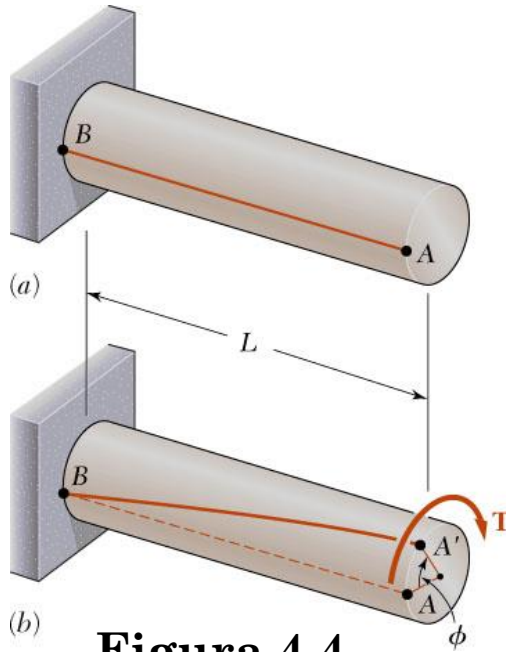


Figura 4.4

O ângulo de torção (fig. 4.4b) da barra é proporcional ao torque aplicado e ao comprimento da barra.

$$\phi \propto T \quad \phi \propto L$$

## Considerações:

- Quando uma barra circular é submetida à torção, toda seção transversal plana permanece **plana e indeformada**. Ou seja, cada seção gira como um disco rígido.

- Seções transversais circulares cheias ou vazadas permanecem plana e sem distorções, porque um eixo circular é **axissimétrico**.

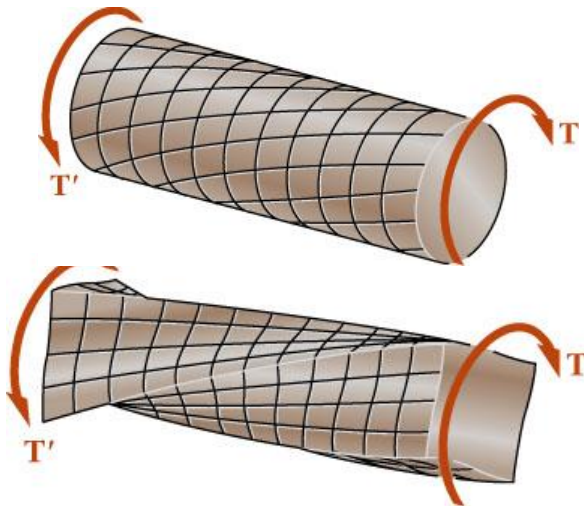


Figura 4.5

Seções transversais não circulares (**não axissimétricas**) são distorcidas quando submetidas à torção. Sua geometria de deformação é bem mais complexa.

# DEFORMAÇÕES EM BARRAS DE SEÇÃO CIRCULAR

Considerando uma seção interna da barra:

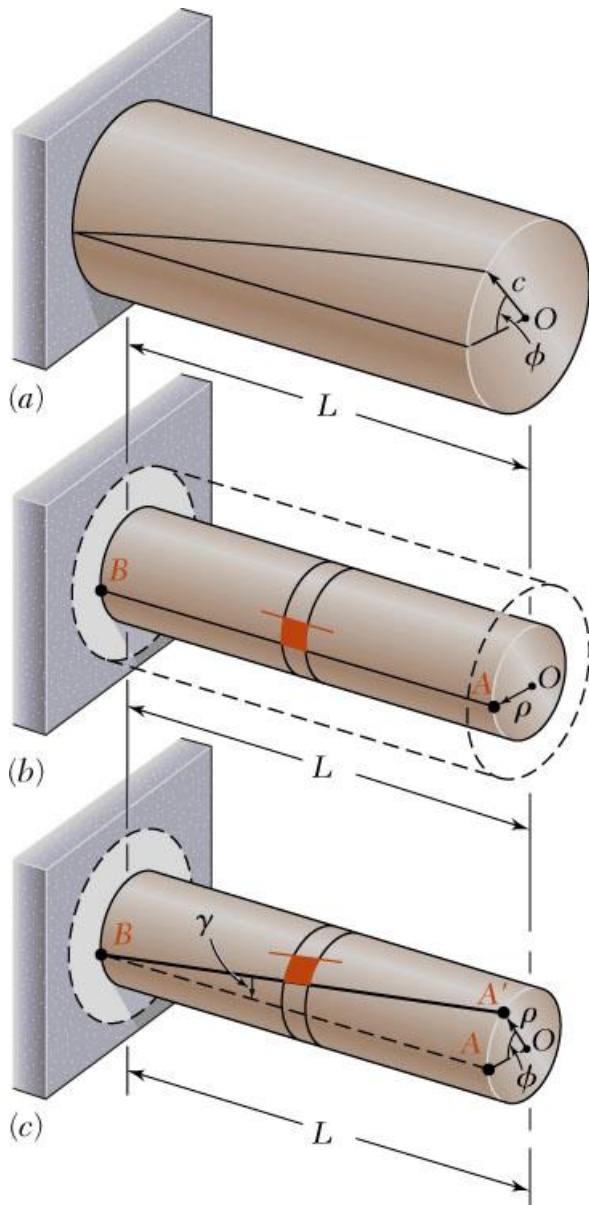
- Quando a barra é submetida a um carregamento torcional o elemento infinitesimal (vermelho) se deforma em um losango.

- Uma vez que as extremidades do elemento permanecem planas, a deformação de cisalhamento é igual ao ângulo formado entre BA e BA'. Para pequenos valores de  $\gamma$ , temos que:

$$A\hat{A}' = L\gamma = \rho\phi \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{\rho\phi}{L} \quad (4.2)$$

A deformação de cisalhamento varia linearmente com a distância do eixo (centro) da barra até sua superfície:

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \quad (4.3) \quad \gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max} \quad (4.4)$$



**Figura 4.5**



# TENSÕES EM BARRAS DE SEÇÃO CIRCULAR

Multiplicando a equação 4.4 pelo módulo de cisalhamento,

$$G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{\max} \quad (4.5)$$

Da Lei de Hooke,  $\tau = G\gamma$ , assim

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max} \quad (4.6)$$

Tensão de cisalhamento varia linearmente com a distância radial do eixo da barra.

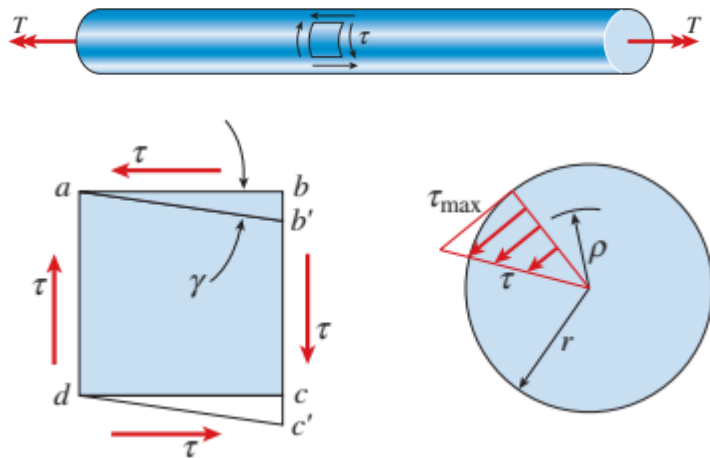
Da eq (4.1) sabe-se que a soma dos momentos das forças elementares internas é igual ao torque no eixo da seção,

$$T = \int_A \rho \tau dA = \frac{\tau_{\max}}{c} \int_A \rho^2 dA = \frac{\tau_{\max}}{c} J \quad (4.7)$$

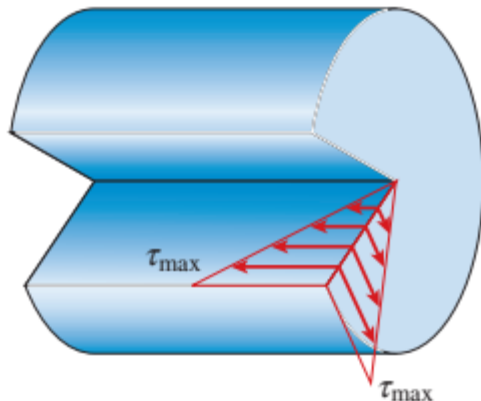
onde  $J$  é o momento polar de inércia da seção. As fórmulas de tensão no regime elástico são:

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad (4.8)$$

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad (4.9)$$



(a)



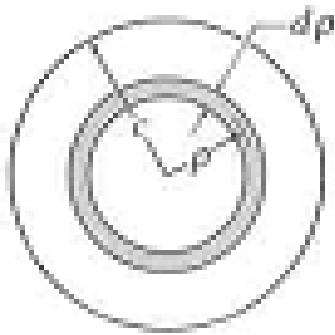
(b)

Figura 4.6

# TENSÕES EM BARRAS DE SEÇÃO CIRCULAR

A integral destacada na equação 4.7 representa o ***momento polar de inércia ( $J$ )*** da seção transversal da barra com relação ao seu centro.

Para um eixo circular maciço (figura 4.7), a partir de um anel infinitesimal, pode-se chegar à equação do seu momento polar de inércia:



**Figura 4.7**

$$\begin{aligned} J &= \int_A \rho^2 dA = \int_0^c \rho^2 \underbrace{(2\pi\rho d\rho)}_{dA} \\ J &= 2\pi \int_0^c \rho^3 d\rho = 2\pi \left( \frac{1}{4} \right) \left[ \rho^4 \right]_0^c \\ \underline{J &= \frac{\pi}{2} c^4} \end{aligned} \quad (4.10)$$



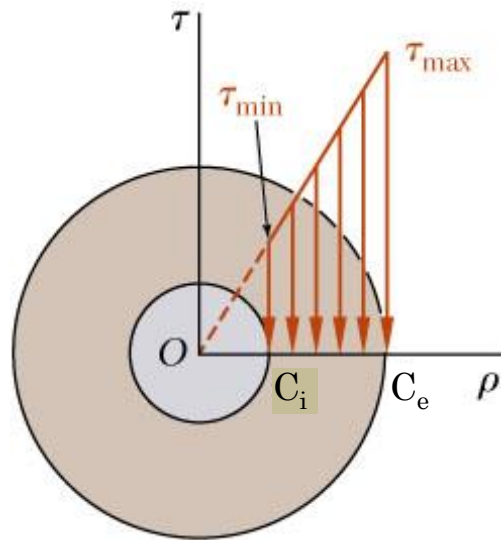


# TENSÕES EM BARRAS DE SEÇÃO CIRCULAR

A figura 4.8 mostra o comportamento das tensões cisalhantes para um eixo vazado sujeito à torção.

O momento polar de inércia para esse eixo é:

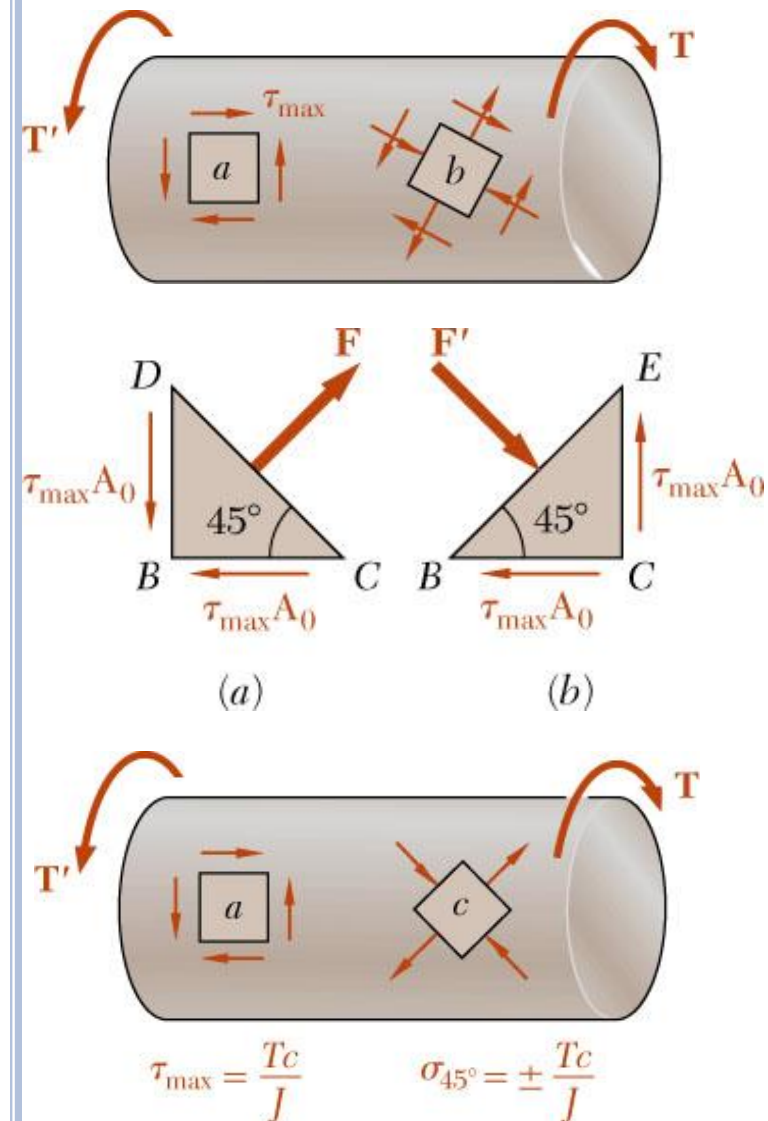
$$J = \frac{\pi}{2} (c_e^4 - c_i^4) \quad (4.11)$$



$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{Tc_e}{J} \\ \tau_{\min} &= \frac{Tc_i}{J} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Figura 4.8

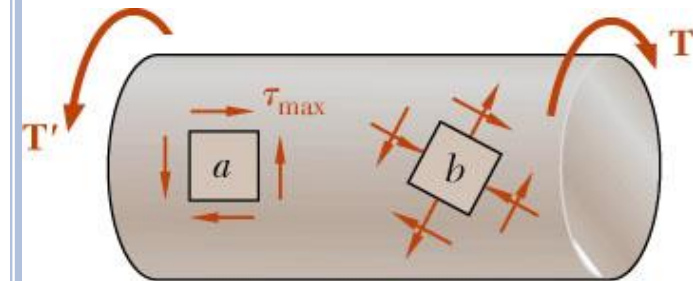
# TENSÕES NORMAIS EM TORÇÃO



**Figura 4.9**

Em um carregamento de torção pura, elementos com faces paralelas e perpendiculares ao eixo da barra são submetidos a tensões de cisalhamento apenas. Tensões normais, outras tensões de cisalhamento ou uma combinação de ambas podem ser encontradas para outras orientações do elemento.

# TENSÕES NORMAIS EM TORÇÃO

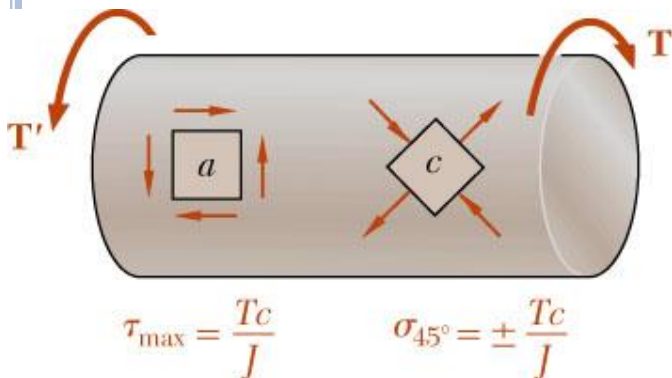
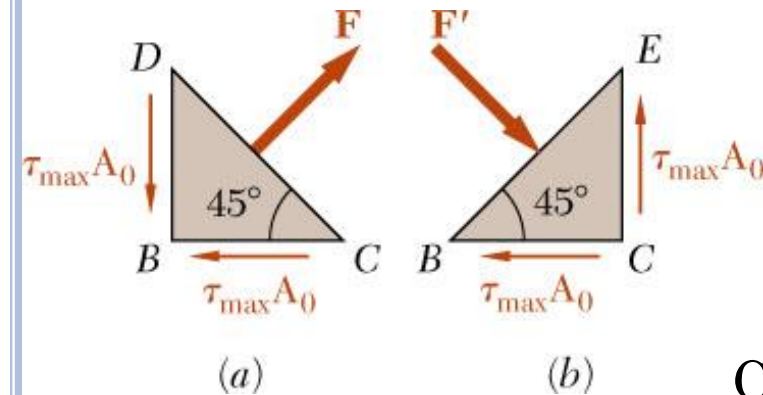


Considere um elemento a  $45^\circ$  com o eixo da barra (figura 4.9a),

$$\Sigma F_{\text{direção de } F} = 0$$

$$F = 2(\tau_{\max} A_0) \cos 45^\circ = \tau_{\max} A_0 \sqrt{2} \quad (4.13)$$

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{\max} A_0 \sqrt{2}}{A_0 \sqrt{2}} = \tau_{\max}$$



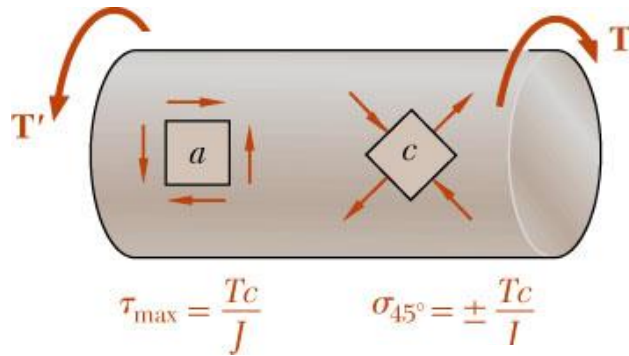
**Figura 4.9**

Com o mesmo procedimento aplicado a  $F'$ , encontra-se que uma tensão de mesma magnitude e compressiva.

O elemento  $a$  está em cisalhamento puro.

O elemento  $c$  é submetido a uma tensão de tração em duas de suas faces e tensão de compressão nas outras duas.

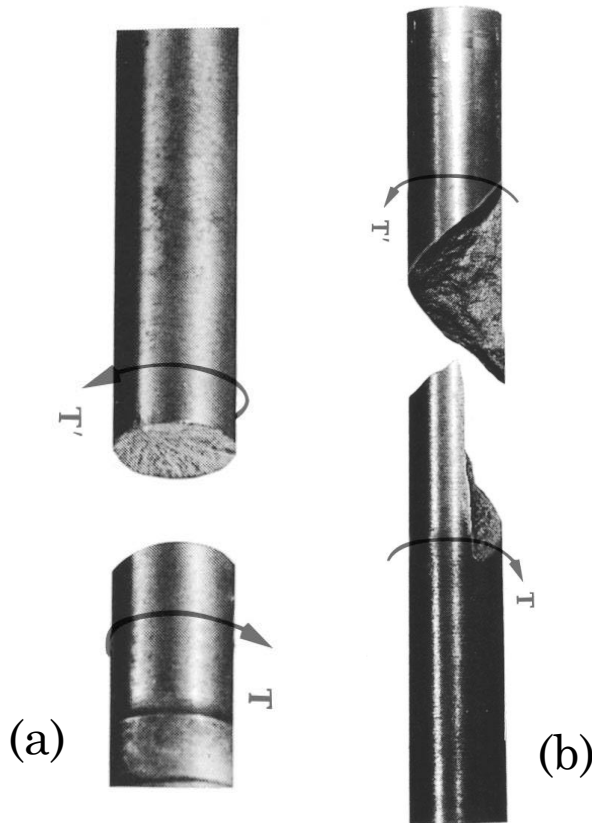
# TIPOS DE FALHA POR TORÇÃO



**Materiais dúcteis geralmente falham em cisalhamento. Materiais frágeis falham normalmente em tração**

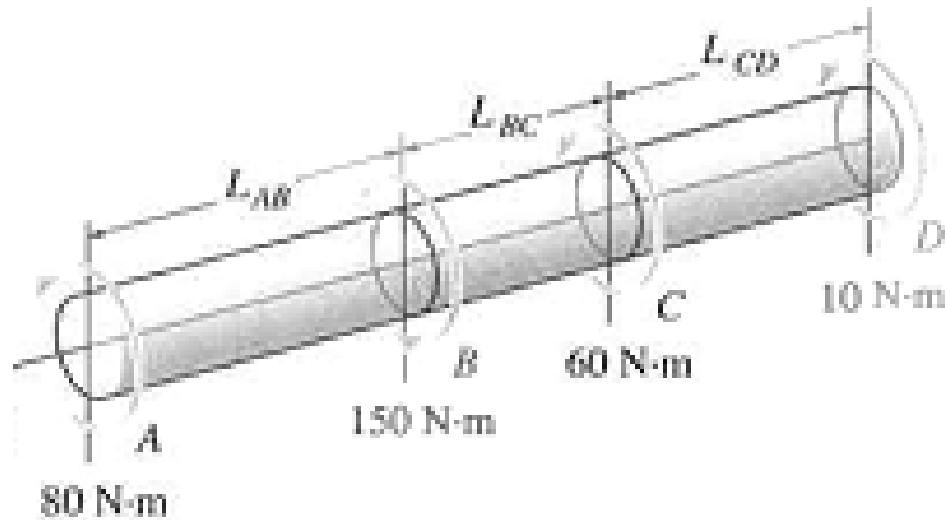
Quando submetido à torção, um corpo de prova feito de material dúctil rompe-se ao longo de um plano perpendicular ao seu eixo longitudinal (**figura 4.10a**).

Quando submetido à torção, um material frágil tende a se romper ao longo de planos perpendiculares à direção em que a tensão de tração é máxima, ou seja, ao longo de superfícies em  $45^\circ$  com o eixo longitudinal do corpo de prova (**figura 4.10b**).



**Figura 4.10**

**Exemplo 4.1:** Considerando o eixo submetido aos carregamentos mostrados na figura 4.10, traçar o diagrama de momento torsor ao longo do eixo. Sabendo que o eixo tem raio de 20 mm, calcule a máxima tensão de cisalhamento no mesmo.

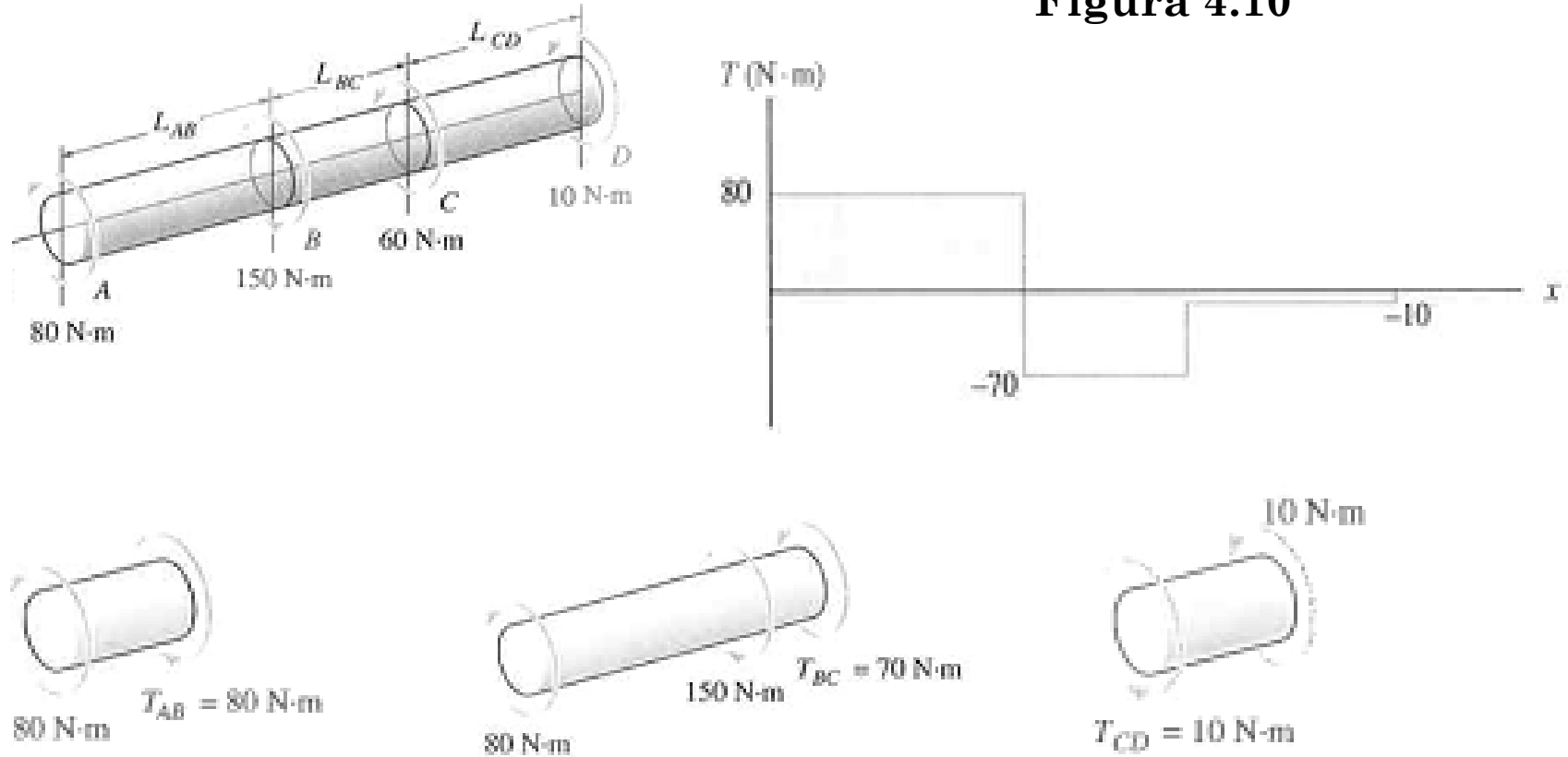


**Figura 4.10**



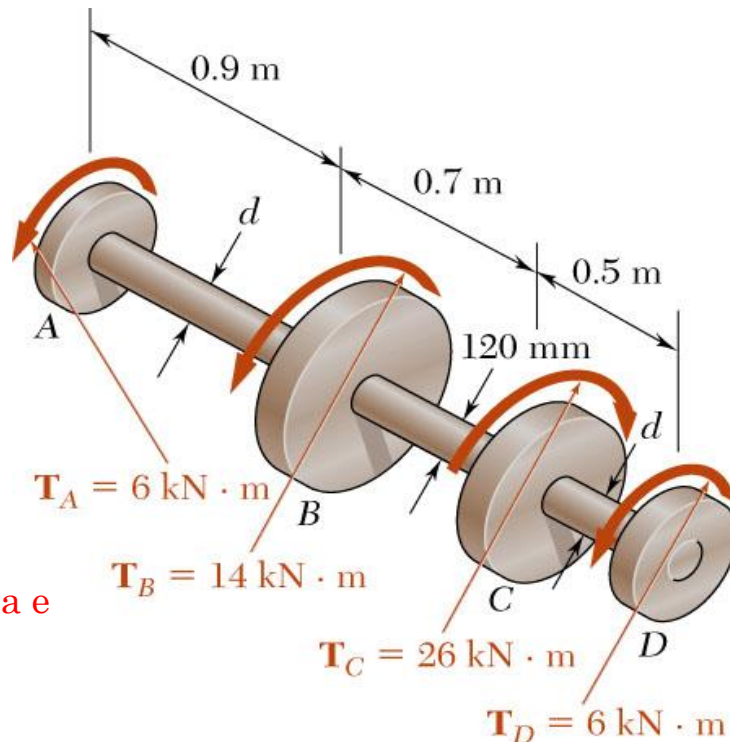
## Exemplo 4.1: Solução

Figura 4.10



$$\tau_{\max} = \frac{T_{AB} \cdot c}{J} = \frac{80 \cdot 10^3 (\text{N}\cdot\text{mm}) \cdot 20 \text{ mm}}{\frac{\pi}{2} \cdot (20 \text{ mm})^4} = \underline{6,37 \text{ MPa}}$$

**Exercício 4.1:** A figura 4.11 mostra um eixo BC vazado, com diâmetros interno e externo de 90 mm e 120 mm, respectivamente. Os eixos AB e CD são sólidos e têm diâmetro  $d$ . Para o carregamento mostrado, determine (a) As tensões de cisalhamento máxima e mínima no eixo BC, (b) o diâmetro  $d$  necessário para os eixos AB e CD, se a tensão de cisalhamento admissível nesses eixos for de 65 MPa.



a) Em módulo: 86MPa e 64,67MPa

b) 77,8 mm

**Figura 4.11**



# PROJETO DE EIXOS DE TRANSMISSÃO (APENAS CONSIDERANDO CARGAS ESTÁTICAS)

Principais especificações de desempenho de eixo de transmissão são:

- Potência de entrada;
- Velocidade de rotação.

O papel do projetista, numa análise estática, é selecionar o material e as dimensões da seção transversal do eixo para atender às especificações de desempenho sem exceder a tensão de cisalhamento máxima admissível.

Determinação do torque aplicado ao eixo através da potência e velocidade especificadas:

$$P = T\omega = 2\pi fT$$

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi f} \quad (4.14)$$

Para torque (T) em N.m, tem-se frequência (f) em Hz (Hertz) e  
Potência (P) em Watts ([W] = [N.m/s])



**Exercício 4.1:** Qual a dimensão do diâmetro do eixo que deverá ser utilizado para o rotor de um motor de 5hp (3,73 kW) que opera a 3600rpm, se a tensão de cisalhamento não deve exceder 60MPa no eixo?

$$d = 9,43mm$$



# ÂNGULO DE TORÇÃO NO REGIME ELÁSTICO

No regime elástico, as tensão e deformação de cisalhamento estão relacionados pela Lei de Hooke,

$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{Tc}{JG} \quad (4.16)$$

Igualando as expressões 4.14 e 4.3 e isolando o ângulo de torção, temos

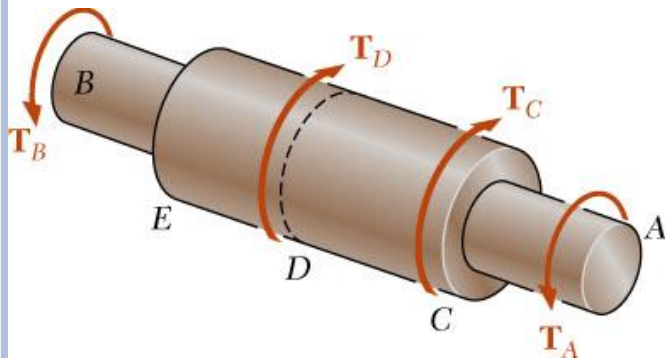
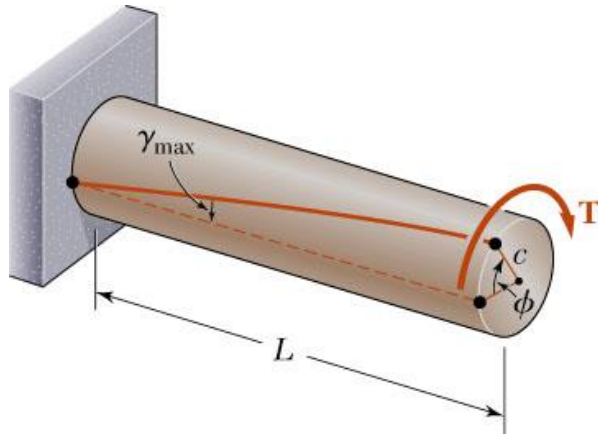
$$\phi = \frac{TL}{JG} \quad (4.17)$$

Se o eixo tiver várias partes com diferentes seções transversais, materiais, torques aplicados e comprimentos, o ângulo de torção é encontrado com a soma dos ângulos de torção de cada componente.

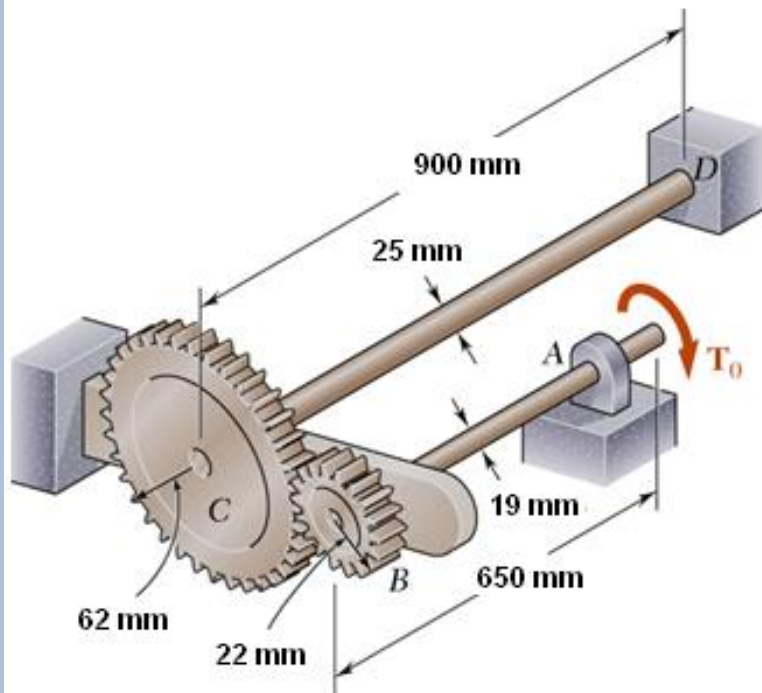
$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \quad (4.18)$$



Figura 4.12



**Exemplo 4.2:** Dois eixos maciços de aço estão ligados por engrenagens (figura 4.13). Sabendo que para cada eixo  $G = 77,2$  GPa, e que a tensão de cisalhamento admissível é de 55 MPa, determine (a) o maior torque  $T_0$  que pode ser aplicado à extremidade A do eixo AB e (b) o ângulo correspondente pelo qual a extremidade A do eixo AB gira.



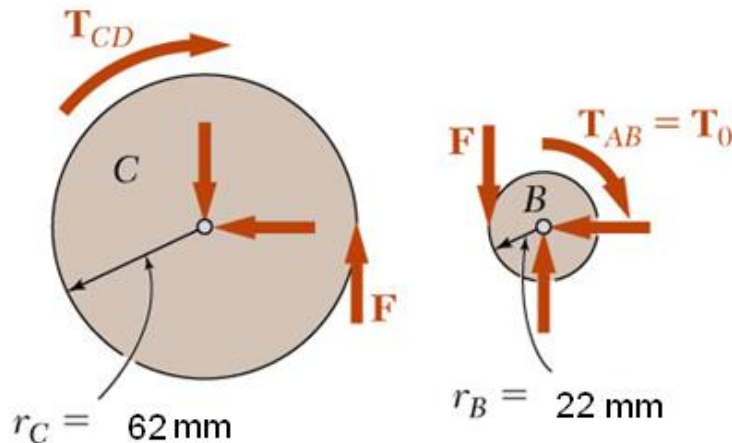
**Figura 4.13**

### **Etapas para solução:**

- Aplicar uma análise de equilíbrio estático sobre os dois eixos para encontrar uma relação entre  $T_{CD}$  e  $T_0$ .
- Aplicar uma análise cinemática que relacione as rotações angulares das engrenagens.
- Encontrar o torque máximo permitido em cada eixo, escolha o menor.
- Encontrar o ângulo de torção correspondente para cada eixo e da rotação angular da extremidade A.

## Exemplo 4.2: SOLUÇÃO.

Aplicação de análise de equilíbrio estático sobre os dois eixos para encontrar uma relação entre  $T_{CD}$  e  $T_0$ .

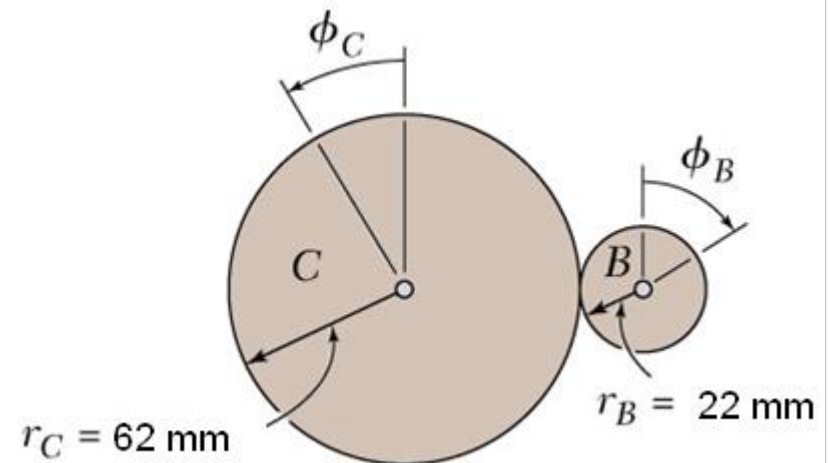


$$\sum M_B = 0 = F \cdot r_B - T_0 \Rightarrow F = \frac{T_0}{r_B}$$

$$\sum M_C = 0 = F \cdot r_C - T_{CD}$$

$$T_{CD} = \left( \frac{r_C}{r_B} \right) T_0 = 2,82 T_0$$

Aplicação de uma análise cinemática que relacione as rotações angulares das engrenagens.



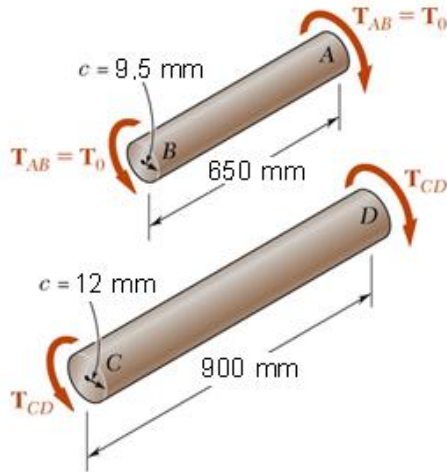
$$\boxed{r_B \phi_B = r_C \phi_C}$$

$$\phi_B = \frac{r_C}{r_B} \phi_C = \frac{62 \text{ mm}}{22 \text{ mm}} \phi_C$$

$$\phi_B = 2,82 \phi_C$$

## Exemplo 4.2: SOLUÇÃO.

O torque máximo permitido em cada eixo:



$$\tau_{\max} = \frac{T_{AB} \cdot c_{AB}}{J_{AB}} \quad 55 \text{ MPa} = \frac{T_0 (9,5 \text{ mm})}{\frac{\pi}{2} (9,5 \text{ mm})^4}$$

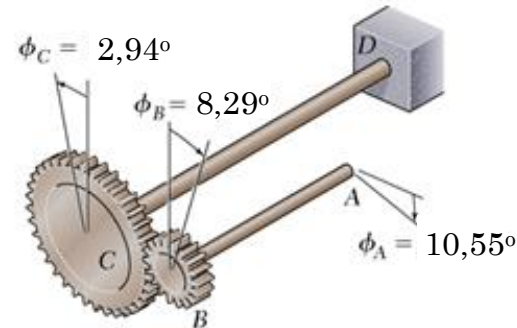
$$T_0 = 74,1 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

$$\tau_{\max} = \frac{T_{CD} \cdot c_{CD}}{J_{CD}} \quad 55 \text{ MPa} = \frac{2,8 T_0 (12,5 \text{ mm})}{\frac{\pi}{2} (12,5 \text{ mm})^4}$$

$$T_0 = 59,84 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

(opta-se pelo menor)  $T_0 = 59,84 \text{ N} \cdot \text{m}$

O ângulo de torção correspondente para cada eixo e da rotação angular da extremidade final A.



$$\varphi_{A/B} = \frac{T_{AB} L}{J_{AB} G} = \frac{(59,84 \text{ N} \cdot \text{m})(0,650 \text{ m})}{\frac{\pi}{2} (0,0095 \text{ m})^4 (77,2 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} = 0,0394 \text{ rad} = 2,26^\circ$$

$$\varphi_{C/D} = \frac{T_{CD} L}{J_{CD} G} = \frac{2,82 (59,84 \text{ N} \cdot \text{m})(0,900 \text{ m})}{\frac{\pi}{2} (0,0125 \text{ m})^4 (77,2 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} = 0,051 \text{ rad} = 2,94^\circ$$

$$\varphi_B = 2,82 \varphi_C = 2,82 (2,94^\circ) = 8,29^\circ$$

$$\varphi_A = \varphi_{A/B} + \varphi_B = 2,26^\circ + 8,29^\circ$$

$$\varphi_A = 10,55^\circ$$

# EIXOS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS

Como visto na seção anterior para carregamentos axiais, há certos problemas que não podem ser resolvidos unicamente pelas equações de equilíbrio ou da estática. São os chamados problemas **estaticamente indeterminados**.

Foi visto que para encontrar os esforços atuantes neste tipo de problema é preciso lançar mão de informações das deformações (ou deslocamentos) envolvidas, por meio das imposições relacionadas à compatibilidade geométrica.

Para resolver problemas de eixos estaticamente indeterminados submetidos à torção, pode-se fazer um paralelo entre as deformações (ou variações de comprimento, estudadas anteriormente) e os ângulos de torção estudados neste capítulo. Basta entender-se as condições geométricas impostas ao eixo, principalmente por seus apoios.

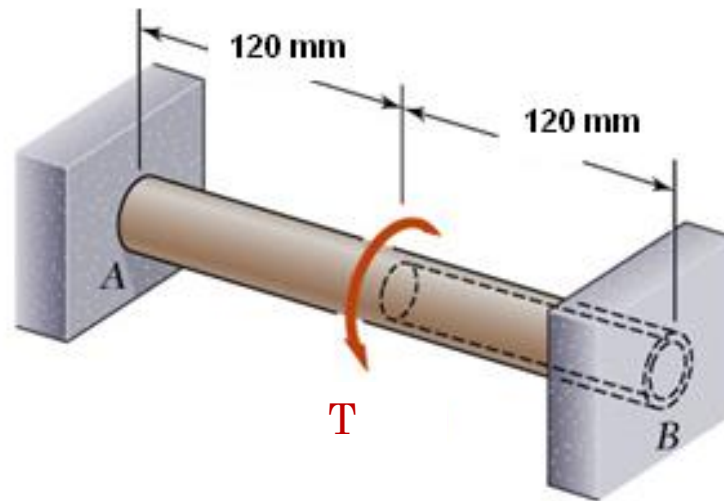
O exemplo mostrado a seguir ajuda a aclarar essa ideia.





# EIXOS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS

Exemplo 4.3: Dadas as dimensões do eixo e o torque aplicado, encontrar as reações aplicadas no eixo devido aos apoios  $A$  e  $B$  em função das propriedades mecânicas e geométricas dos eixos..



# EIXOS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS

## Exemplo 4.3:

A partir de uma análise do DCL do eixo, temos

$$T_A + T_B = T$$

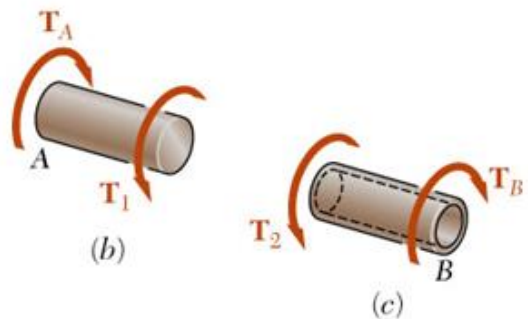
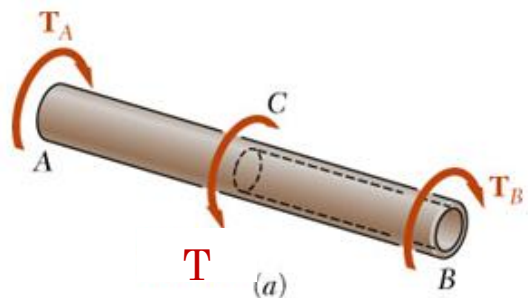
Isso não é suficiente para encontrar os torques desconhecidos. Então, o problema é estaticamente indeterminado.

Divide-se o eixo em dois componentes que devem ter deformações compatíveis. Como não pode haver rotação nos dois apoios, o ângulo de torque de A em relação a B deve ser nulo.

$$\phi_{A/B} = \phi_{A/C} + \phi_{C/B} = \frac{T_A L_{AC}}{J_{AC} G_{AC}} - \frac{T_B L_{CB}}{J_{CB} G_{CB}} = 0 \quad T_B = \frac{J_{CB} G_{CB}}{J_{AC} G_{AC}} T_A$$

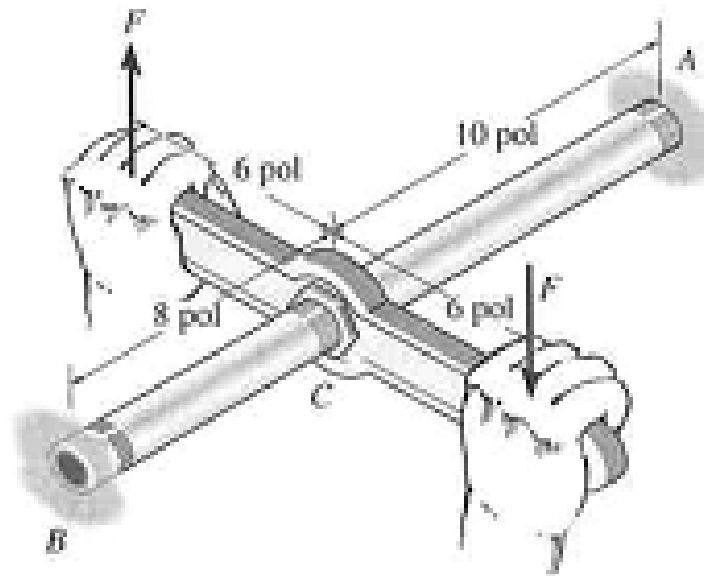
Finalmente, substitue-se na equação de equilíbrio original,

$$T_A + \frac{J_{CB} G_{CB}}{J_{AC} G_{AC}} T_A = T$$



**Exercício 4.3:** O tubo de bronze ( $G = 15 \times 10^3$  ksi) tem diâmetro externo de 1,5 in e sua parede, espessura de 0,125 in. A conexão em C é apertada com uma chave (figura 4.14). Se a força aplicada for de  $F = 20$  lbf, qual será a tensão de cisalhamento máxima no tubo?

388,64 psi



**Figura 4.14**



# EXERCÍCIOS GERAIS



# EXERCÍCIOS GERAIS

**Exercício 4.4:** A turbina desenvolve 150 kW de potência, que é transmitida às engrenagens de tal modo que C recebe 70% e D recebe 30%. Se a rotação do eixo de aço A-36 de 100 mm de diâmetro for 800 rev/minuto, determine a tensão de cisalhamento máxima absoluta no eixo e o ângulo de torção da extremidade E do eixo em relação a B. O mancal em E permite que o eixo gire livremente em torno do seu eixo. ( $G=78\text{GPa}$ )

9,11 MPa

$9,8168 \times 10^{-3}$  rad

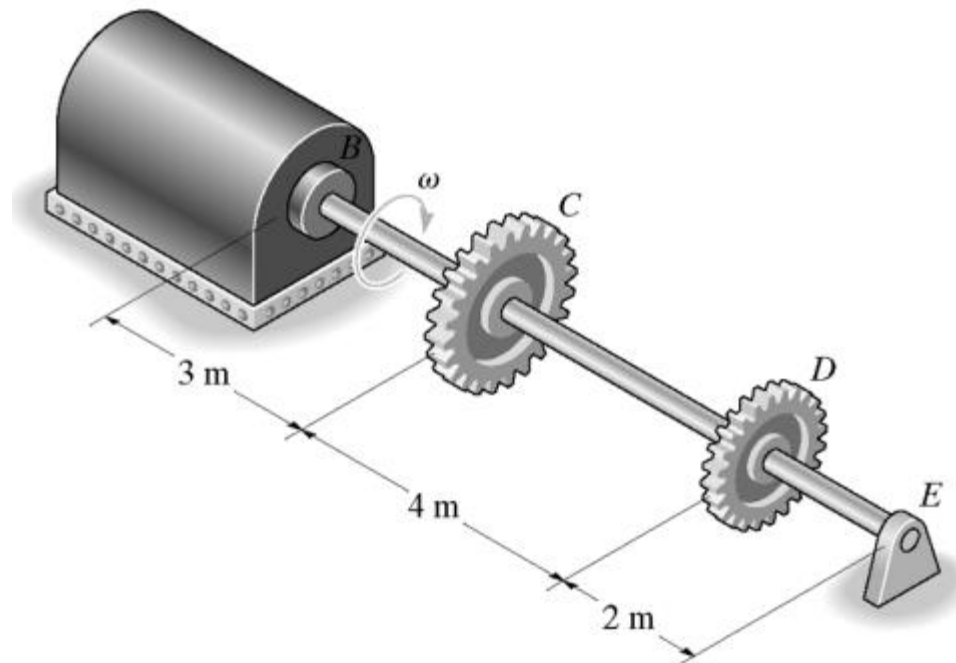
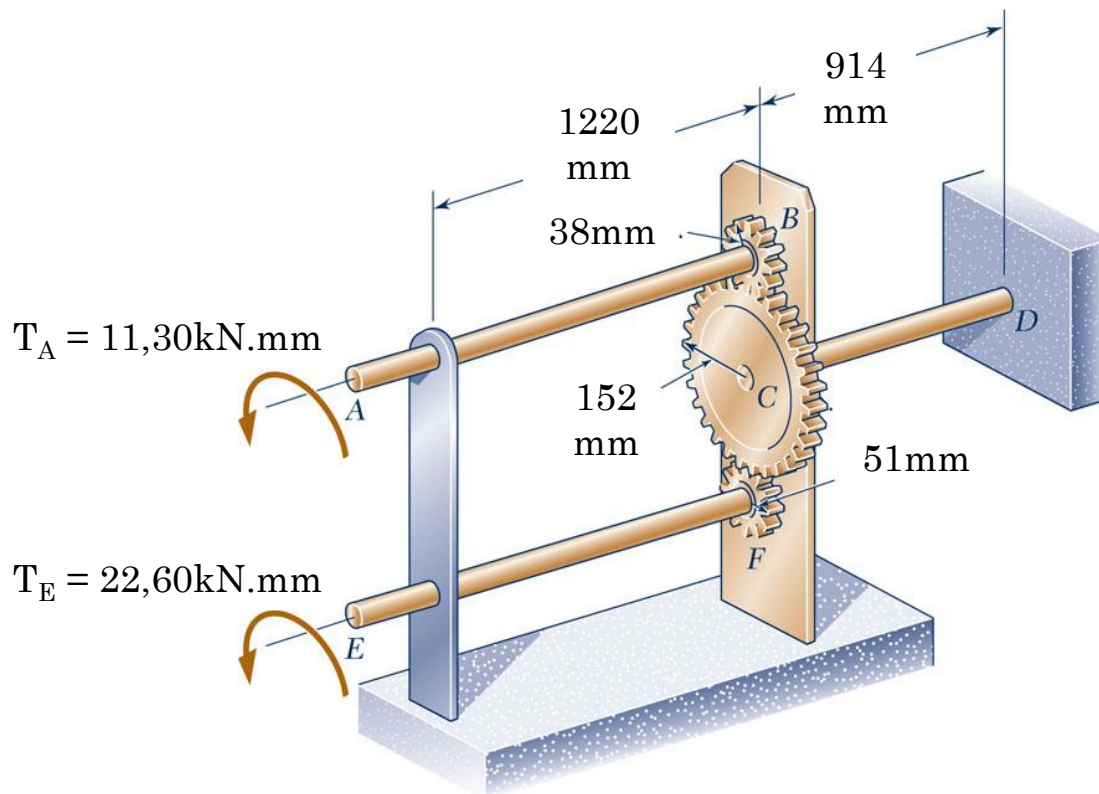


Figura 4.15

# EXERCÍCIOS GERAIS

**Exercício 4.5:** Três eixos sólidos, cada um deles com 19,00 mm de diâmetro, são conectados pelas engrenagens mostradas na figura. Sabendo que  $G=77\text{GPa}$ , determine:

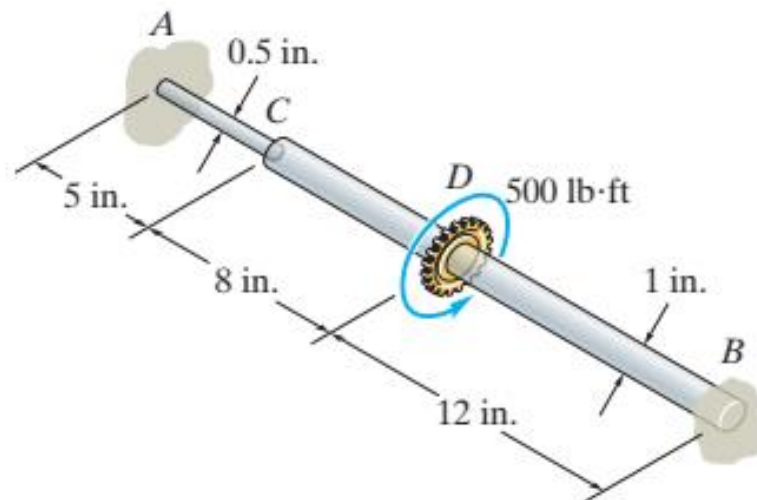
- a) O ângulo de torção na seção A do eixo AB;  $0,4316 \text{ rad}$
- b) O ângulo de torção na seção E do eixo EF;  $0,3391 \text{ rad}$



**Figura 4.16**

# EXERCÍCIOS GERAIS

**Exercício 4.6:** O eixo de aço mostrado na figura 4.18 é feito de dois segmentos: AC tem diâmetro de 0,5 in e CB tem diâmetro de 1 in. Se ele estiver fixo em suas extremidades A e B e for submetido a um torque de 500 lb.ft, qual será a tensão de cisalhamento máxima nele desenvolvida? ( $G_{\text{aço}} = 15 \times 10^3$  ksi)



$$\tau_{AC} = 29,3 \text{ ksi}$$

$$\tau_{DB} = 26,9 \text{ ksi}$$

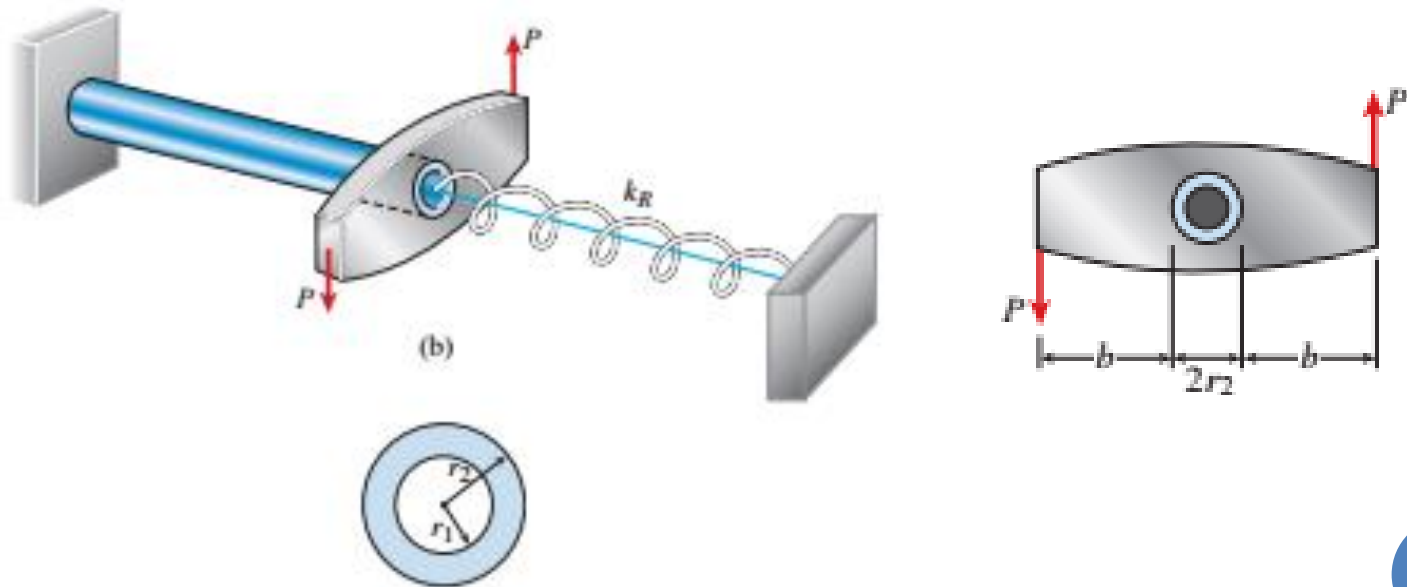
**Figura 4.17**





# EXERCÍCIOS GERAIS

**Exercício 4.7:** O conjunto da figura mostra um tubo e uma mola, ambos engastados e conectados por uma placa com duas forças  $P$  atuando em suas extremidades. O tubo tem comprimento  $L = 450\text{mm}$ , raios interno e externo,  $30\text{ mm}$  e  $37\text{ mm}$ ,  $G = 74\text{ GPa}$  e limite de cisalhamento admissível  $43\text{ MPa}$ . A mola tem rigidez torcional  $k_r = 50\text{ kN.m/rad}$ . Determine o máximo valor de  $P$  para que a tensão de cisalhamento admissível do tubo não seja excedida. Considere  $b=140\text{mm}$ .



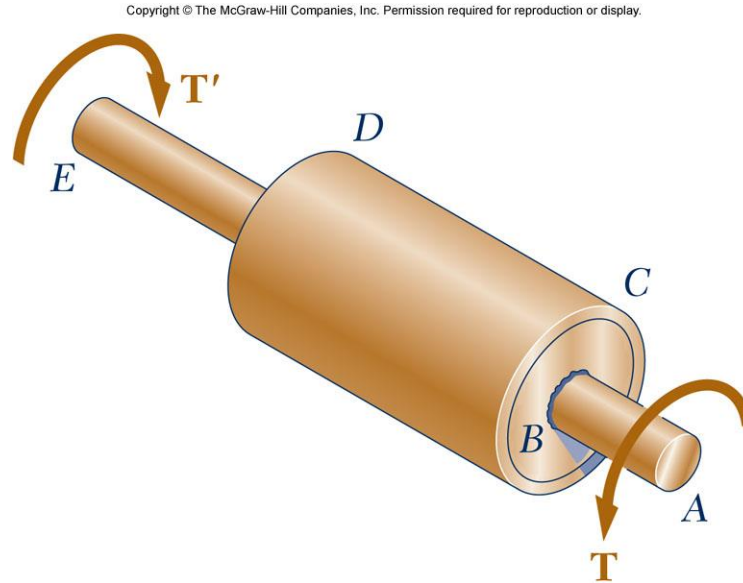
$$P = 6486\text{ N}$$

Figura 4.18

# EXERCÍCIOS GERAIS

**Exercício 4.8:** O tubo de aço CD foi fixado ao eixo de aço AE de 40mm de diâmetro por meio de flanges rígidos soldados ao tubo e ao eixo. O diâmetro externo do tubo é de 80 mm e a espessura da parede é 4mm. Se forem aplicados torques de 500 N.m, como mostra a figura, determine a tensão de cisalhamento máxima no tubo.

12,24 MPa



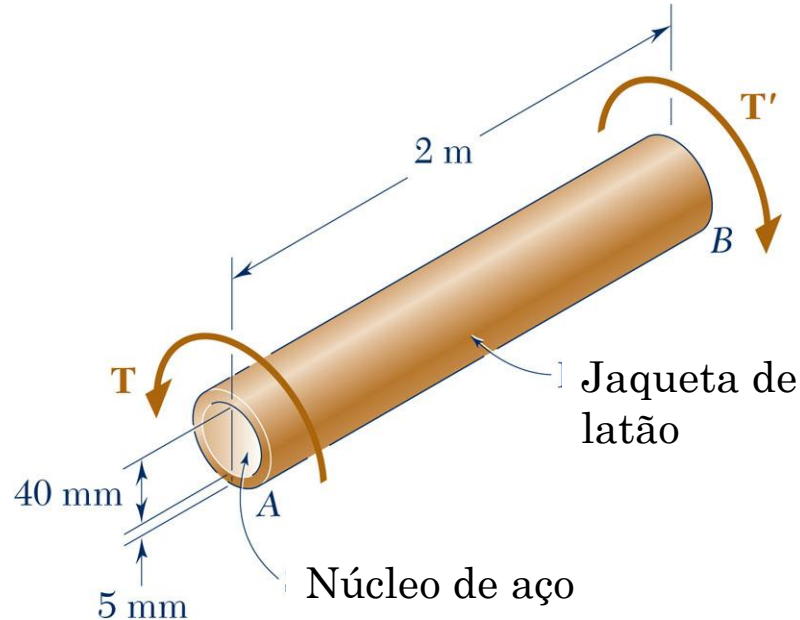
**Figura 4.19**

# EXERCÍCIOS GERAIS

**Exercício 4.9:** O eixo composto mostrado na figura tem uma jaqueta de latão de 5 mm de espessura ( $G_{\text{latão}} = 39 \text{ GPa}$ ), unido a um núcleo de aço de 40 mm de diâmetro ( $G_{\text{aço}} = 77,2 \text{ GPa}$ ). Sabendo que o eixo está submetido a um torque de 600 N.m, determine:

- a) A tensão de cisalhamento máxima na jaqueta de latão; **17,46 MPa**
- b) A tensão de cisalhamento máxima no núcleo de aço; **27,65 MPa**
- c) O ângulo de torção da extremidade B em relação à A.  **$35,8 \times 10^{-3} \text{ rad}$**

Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.



**Figura 4.20**