INSTITUTO DE TECNOLOGIA - UFPA
FACULDADE DE ENG. MECÂNICA

DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS II

Parte 5:
Deflexão em Vigas

Professor: Leonardo Dantas Rodrigues

INTRODUÇÃO

Em projetos envolvendo **vigas e eixos**, normalmente, além de critérios de tensão máxima admissível, já estudados anteriormente, há também **limites estabelecidos para a deflexão** que estas estruturas poderão sofrer.

Além disso, a análise das deflexões é necessária para estudar casos de **flexão em vigas estaticamente indeterminadas**

LINHA ELÁSTICA

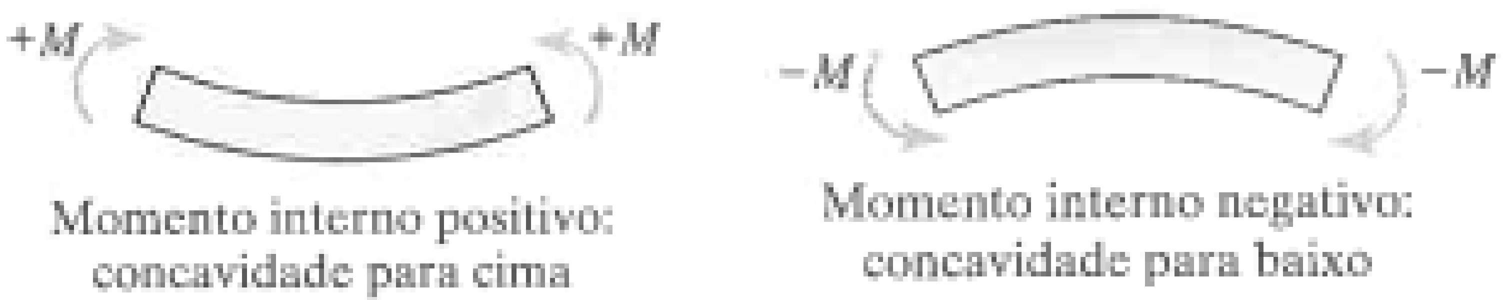
O diagrama de deflexão do eixo longitudinal que passa pelo centróide da área de seção transversal da viga é chamado de **linha elástica.**

Para determinar a equação da linha elástica é importante saber como cada tipo de apoio resiste a determinados movimentos, como **deslocamento e inclinação**.

Por exemplo, apoios simples, que resistem a forças, restringem apenas deslocamentos (translações). Já apoios que também resistem a momentos, como engastes, restringem deslocamentos e inclinações (ou rotações).

LINHA ELÁSTICA

O conhecimento do **diagrama de momento fletor** da viga também é importante para a determinação da linha elástica (**LE**). Em trechos em que o momento é positivo a concavidade de curvatura da viga será para cima e para momentos negativos a concavidade será para baixo (figura 5.1).



(a) (b)

Figura 5.1

LINHA ELÁSTICA

Tomemos como exemplo a viga da figura 5.2a.

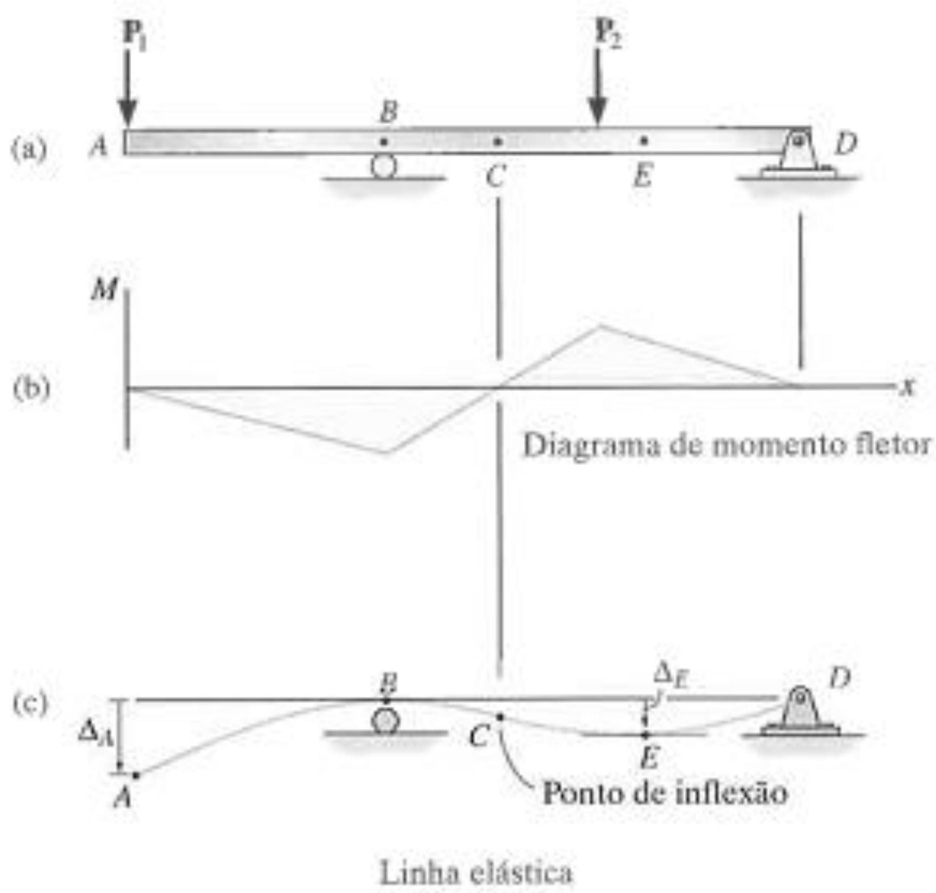


Figura 5.2

- O rolete e o pino restringem deslocamento vertical.
- **Momento negativo** entre A e C: **LE côncava para baixo.**
- **Momento positivo** entre C e E: **LE côncava para cima.**
- **M = 0** em C**: ponto de inflexão.**
- Os deslocamentos Δ_A **e** Δ_E são especialmente críticos.
- A **inclinação no ponto E é nula**, logo ali a **deflexão pode ser máxima.** Porém, o que determina se Δ_E é mesmo maior que Δ_A são as intensidades relativas de P_1 e P_2 e a localização do rolete em B.

LINHA ELÁSTICA

Ainda numa avaliação qualitativa, analisemos agora a viga da figura 5.3.

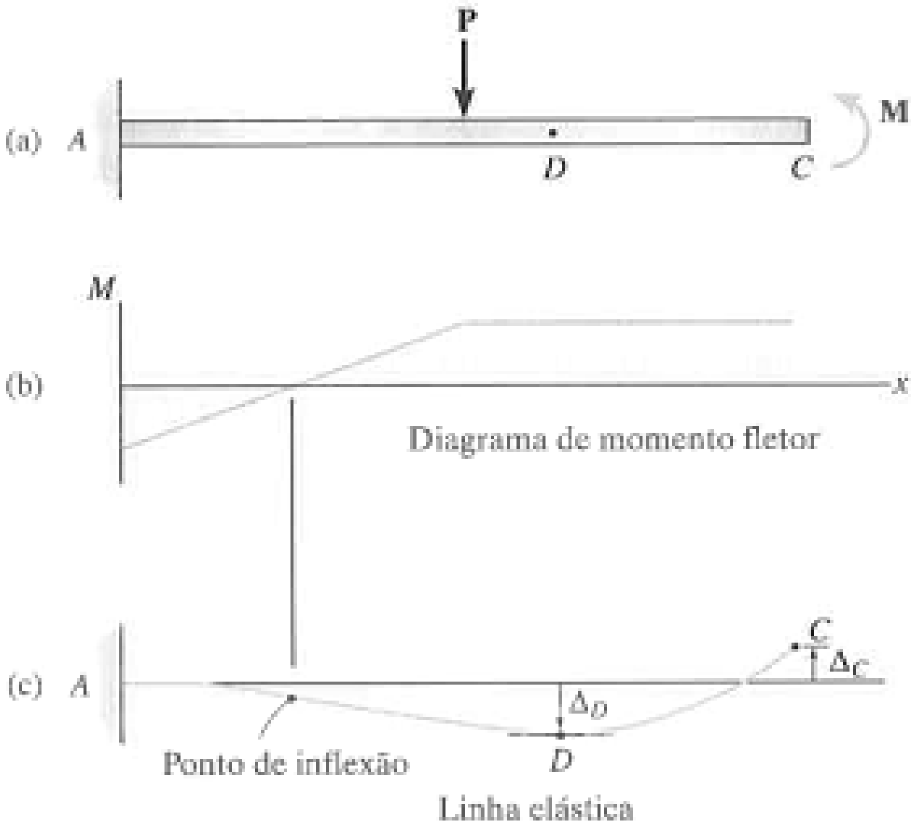


Figura 5.3

- No ponto A (**engaste**), o **deslocamento e a inclinação são nulos**.
- onde o momento **M = 0** tem-se um **ponto de inflexão.**
- Os deslocamentos Δ_D **e** Δ_C são especialmente críticos.
- A **inclinação no ponto D é nula.** A deflexão será máxima em D ou em C.

LINHA ELÁSTICA: RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA

Há uma relação entre os **momentos fletores internos** e os raios de curvatura $\boldsymbol{\rho}$ da linha elástica da viga.

Esta relação será usada como base para todos os métodos a serem estudados ao longo de toda esta parte do curso.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \qquad (5.1)$$

onde:
$\boldsymbol{\rho}$: raio de curvatura em um ponto específico da **LE**
M: momento fletor interno no ponto em que $\boldsymbol{\rho}$ deve ser determinado
E: módulo de elasticidade do material
I: momento de inércia da seção transversal da viga.

LINHA ELÁSTICA: RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA

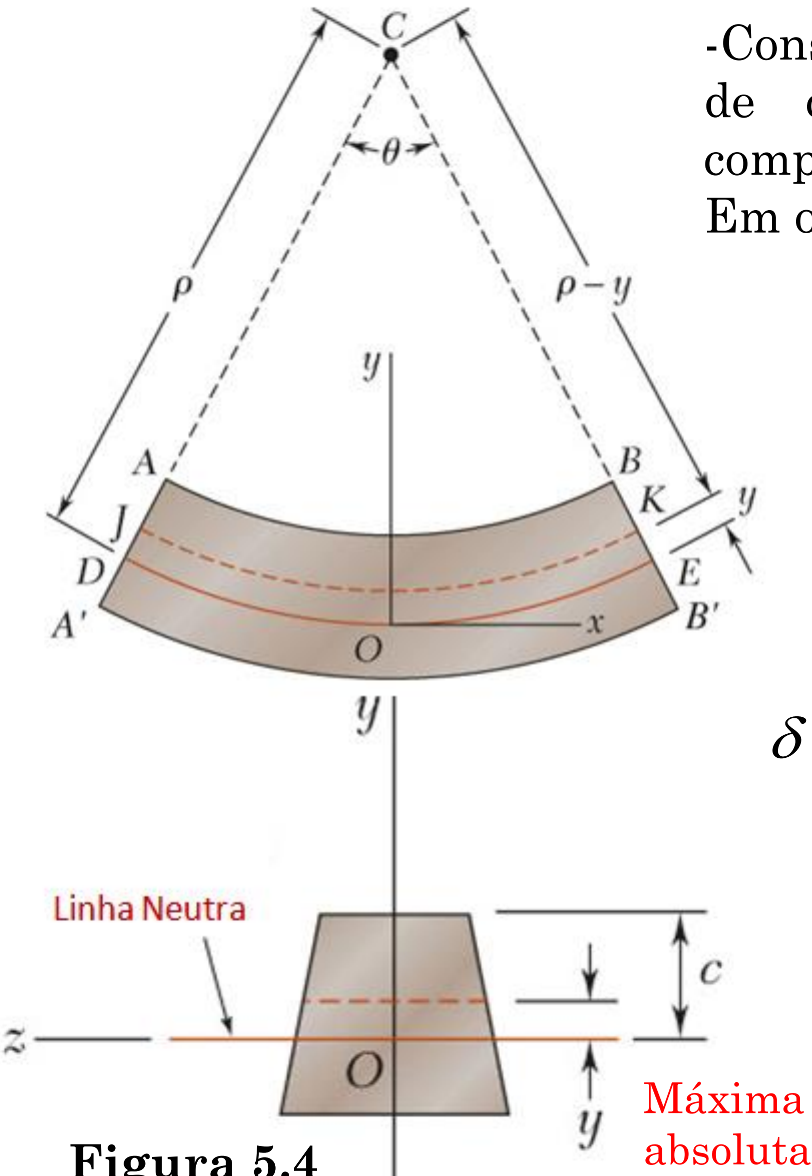


Figura 5.4

-Considerando um segmento de barra prismática de comprimento L. Após a deformação, o comprimento da superfície neutra permanece L. Em outras seções o comprimento varia:

Comprimento do segmento DE (linha neutra):

$$L = \rho\theta$$

Comprimento do segmento JK:

$$L' = (\rho - y)\theta$$

O comprimento inicial de JK era o mesmo de DE, ou seja, sua deformação foi:

$$\delta = L' - L = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$$

Deformação específica:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\cancel{\theta}}{\rho\cancel{\theta}} \Rightarrow \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{y}{\rho}$$

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}}$$

Linha Elástica: Relação Momento-Curvatura

O produto **EI** da equação (5.1) é também chamado de **rigidez à flexão** e é sempre positivo. Assim, o sinal de $\boldsymbol{\rho}$ depende exclusivamente do sinal do momento interno **M** no ponto considerado (figura 5.5).

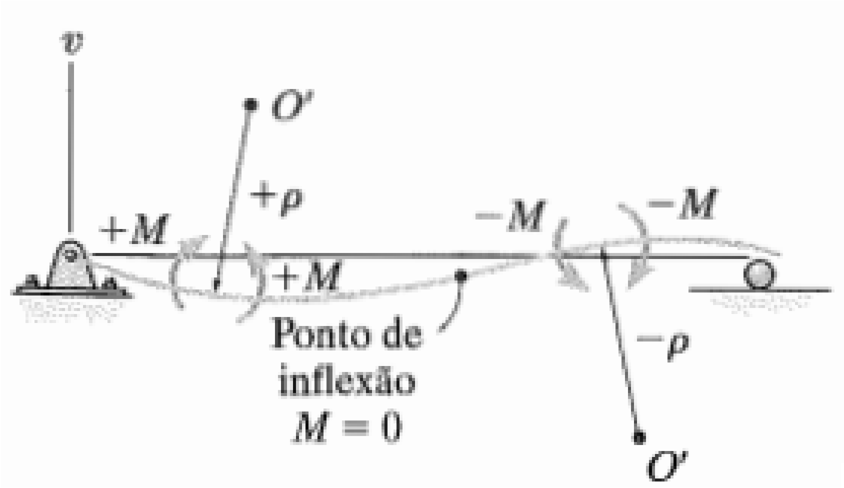


Figura 5.5

LINHA ELÁSTICA: RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA

A linha elástica (LE) de uma viga carregada verticalmente é expressa matematicamente como v = f (x). Então, devemos escrever a equação (5.1) em termos de x e v, sendo ***v*** o **deslocamento vertical**. Pela literatura, a curvatura ($1/\rho$) de uma linha curva em um dado ponto Q(x,v), pode ser expressa como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2v}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M}{EI} \qquad (5.2)$$

Na maioria dos projetos de vigas, são toleradas deflexões muito pequenas, assim, a inclinação dada por dv/dx tem valores reduzidos e o quadrado de dv/dx pode ser desprezado. Reescrevendo (5.2):

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \qquad (5.3)$$

Inclinação e deslocamento: Método da Integração Direta

A equação diferencial de segunda ordem (5.3) é a que governa a Linha Elástica.

Lembrando-se que $V = dM/dx$ e que $dV/dx = -w$, podemos diferenciar (5.3) e escrevê-la, alternativamente, como:

$$\frac{d}{dx}\left(EI\,\frac{d^2v}{dx^2}\right) = V(x) \qquad (5.4)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2v}{dx^2}\right) = -w(x) \qquad (5.5)$$

Inclinação e deslocamento: Método da Integração Direta

Vamos trabalhar aqui com vigas nas quais o produto **EI** é constante, ou seja, material e seção transversal não variam ao longo da viga. Nesse caso, as equações anteriores podem ser reordenadas da seguinte forma:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -w(x) \qquad (5.6)$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = V(x) \qquad (5.7)$$

$$\boxed{EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x)} \qquad (5.8)$$

Inclinação e deslocamento: Método da Integração Direta

A integração contínua das E.D.Os (5.6), (5.7) e (5.8) nos levam à equação da linha elástica *v(x)* da viga. Nestas integrações surgirão constantes de integração, que serão determinadas de acordo com os tipos de apoio (figura 5.6).

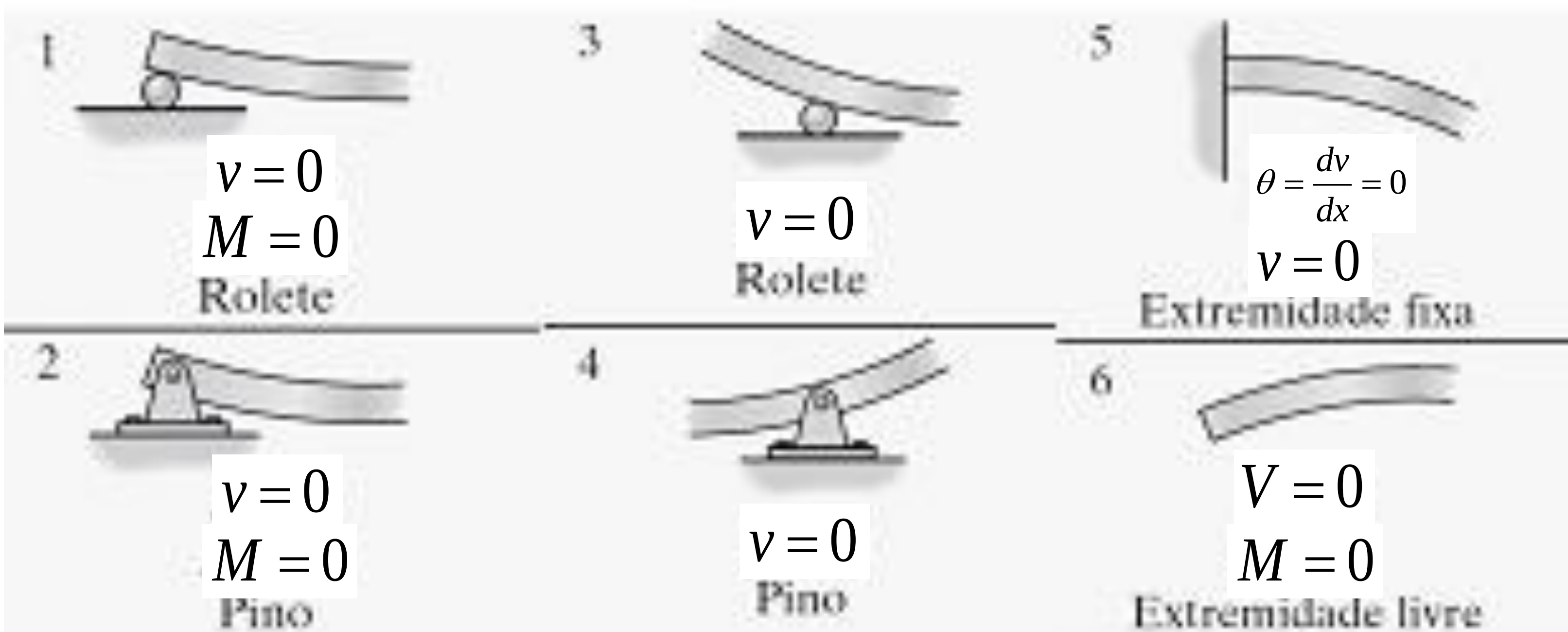


Figura 5.6

Exemplo 5.1: A viga em balanço mostrada na figura 5.7 tem seção transversal uniforme e está submetida a uma carga transversal P em sua extremidade. Determinar a equação da linha elástica e da inclinação: $v(x)$ e $\theta(x)$.

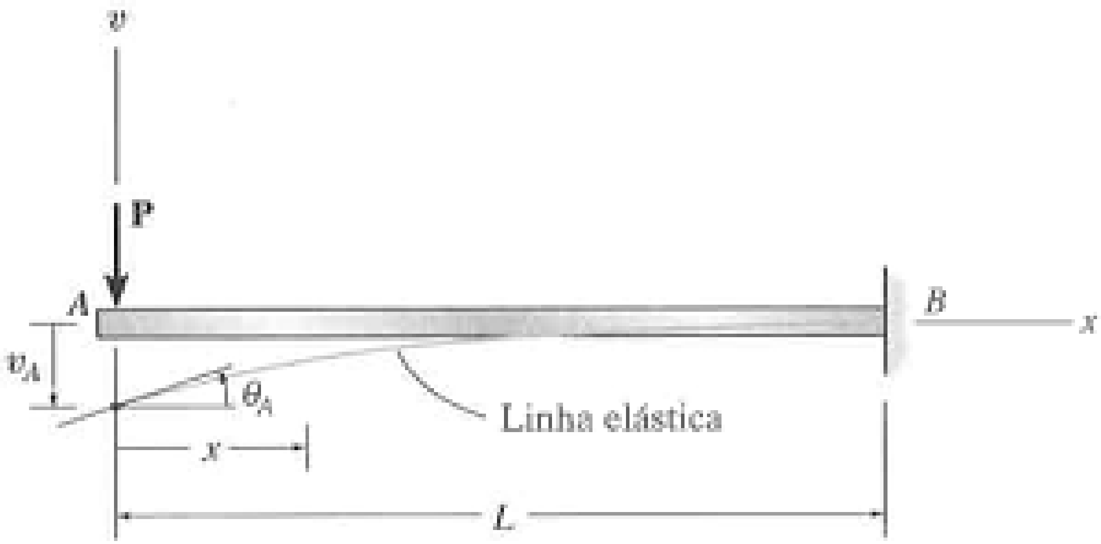
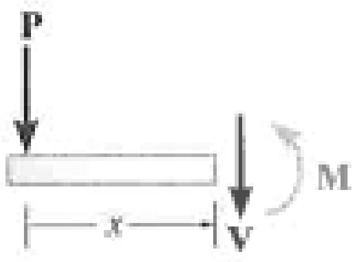


Figura 5.7

Exemplo 5.1: Solução.



Tem-se que o momento fletor interno obedece à seguinte equação ao longo de toda a viga:

$$M(x) = -Px$$

Aplicando M(x) na equação 5.8 e integrando-a duas vezes tem-se:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Px \qquad \text{(a)}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + C_1 \qquad \text{(b)}$$

$$EI.v(x) = -\frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2 \qquad \text{(c)}$$

Exemplo 5.1: Solução.

Condições de Contorno:

Em **x = L (engaste)**, $\theta = dv/dx = 0$ e $v = 0$.

Aplicando as C.C. nas equações (b) e (c), temos:

$$0 = -\frac{PL^2}{2} + C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{PL^2}{2}}$$

$$0 = -\frac{PL^3}{6} + C_1 L + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = -\frac{PL^3}{3}}$$

Exemplo 5.1: Solução.

Substituindo as condições de contorno nas equações (b) e (c) obtemos as soluções desejadas:

$$\boxed{\theta(x) = \frac{P}{2EI}(L^2 - x^2)}$$

$$\boxed{v(x) = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3L^2x - 2L^3)}$$

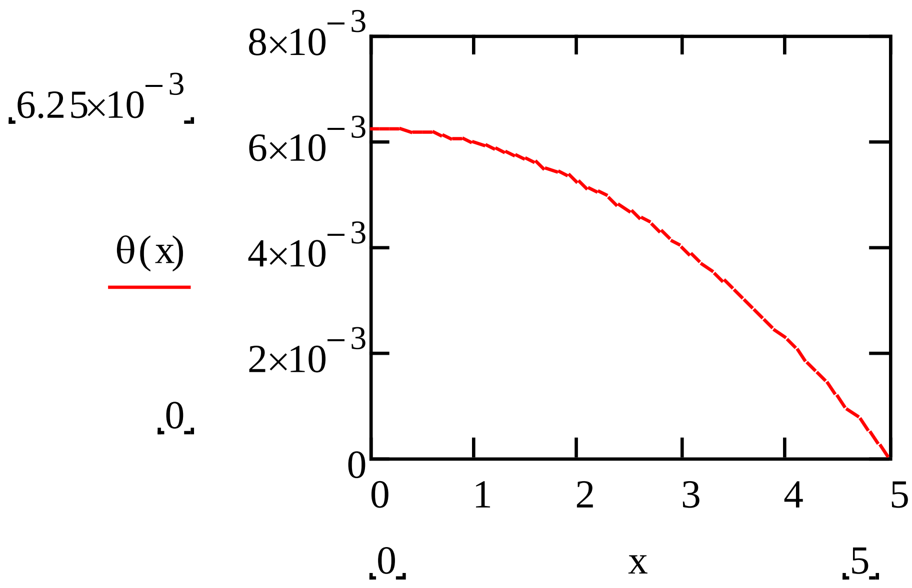
Os valores máximos de inclinação e deflexão ocorrem no ponto A, onde x = 0:

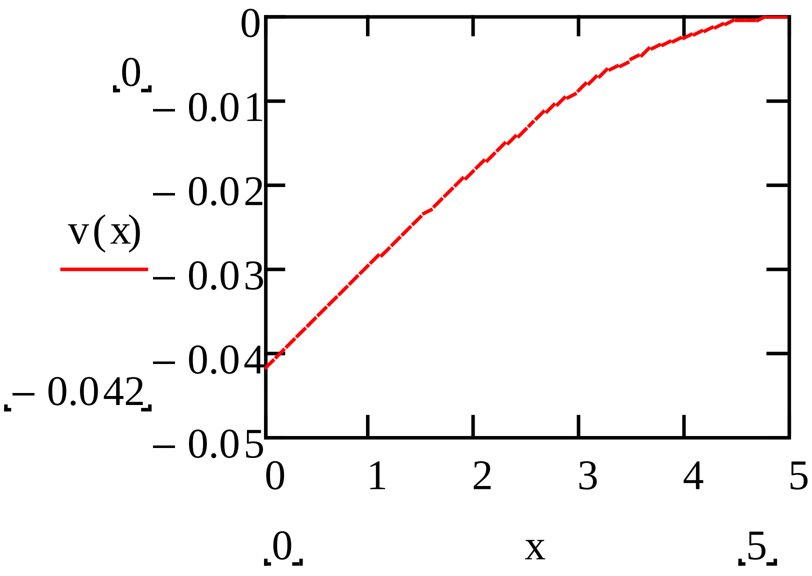
$$\theta_A = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$v_A = -\frac{PL^3}{3EI}$$

Exemplo 5.1: Solução.

Com:
L = 5 m
P = 10 kN
E = 200 GPa
I = 10^{-4} m^4





Exemplo 5.2: A viga simplesmente apoiada da figura 5.8 suporta um carregamento triangular distribuído. Determinar sua deflexão máxima. Considerar *EI* constante.

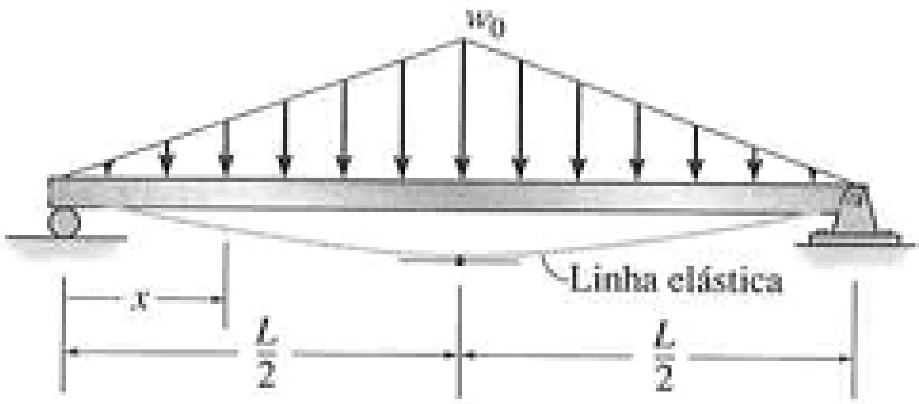
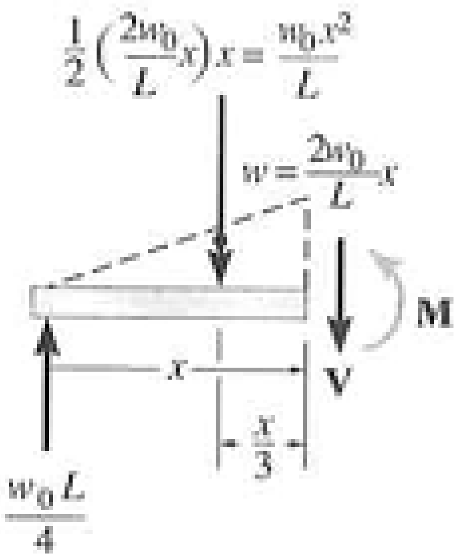


Figura 5.8

Exemplo 5.2: Solução.



O problema é simétrico, portanto, basta realizar a análise para metade da viga. Usando o trecho **0 ≤ e ≤ L/2**, tem-se a seguinte função para o momento fletor interno:

$$Com\ w(x) = \frac{2w_0}{L}x$$

$$\boxed{M(x) = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{w_0 L}{4}x}$$

Aplicando M(x) na equação 5.8 e integrando-a duas vezes tem-se:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{w_0 L}{4}x \qquad \text{(a)}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0 L}{8}x^2 + C_1 \qquad \text{(b)}$$

$$EI.v(x) = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0 L}{24}x^3 + C_1 x + C_2 \qquad \text{(c)}$$

Exemplo 5.2: Solução.

Condição de Contorno

Em **x = 0**, $v = 0$.

Condição de simetria:

Em **x = L/2 (centro)**, $\theta = dv/dx = 0$.

Aplicando essas condições nas equações (b) e (c), temos:

$$0 = -\frac{w_0}{12L}\left(\frac{L}{2}\right)^4 + \frac{w_0 L}{8}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = -\frac{5w_0 L^3}{192}}$$

$$0 = -\frac{w_0}{12L}0^5 + \frac{w_0 L}{8}0^3 + \left(-\frac{5w_0 L^3}{192}\right)0 + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

Exemplo 5.2: Solução. (Chegue à mesma solução partindo da equação 5.6)

Substituindo as condições de contorno nas equações (c) obtemos:

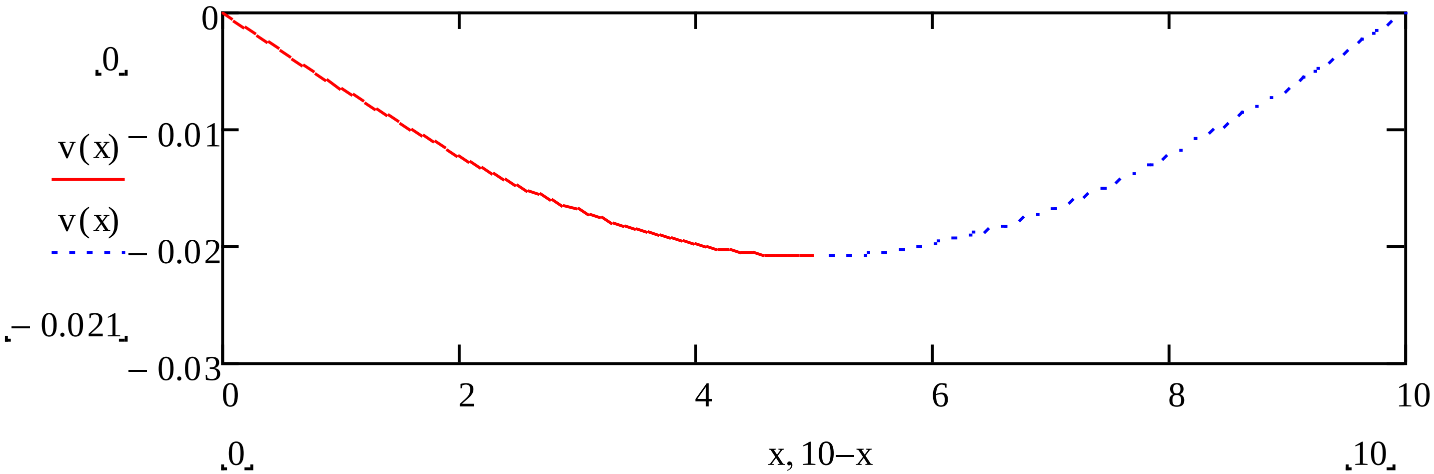
$$\boxed{v(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0 L}{24}x^3 - \frac{5w_0 L^3}{192}x\right)}$$

Observando a figura 5.8, nota-se que a deflexão máxima ocorre no centro (**L/2**), onde a inclinação é nula, ou seja, onde *dv/dx = 0:*

$$\boxed{v\left(L/2\right) = v_{\max} = -\frac{w_0 L^4}{120EI}}$$

Exemplo 5.2: Solução.

Com:
L = 10 m
w_0 = 5000 N/m
E = 200 GPa
I = 10^{-4} m^4



Exemplo 5.3: A viga simplesmente apoiada da figura 5.9 está submetida à força concentrada **P**. Determinar sua deflexão máxima. Considerar *EI* constante.

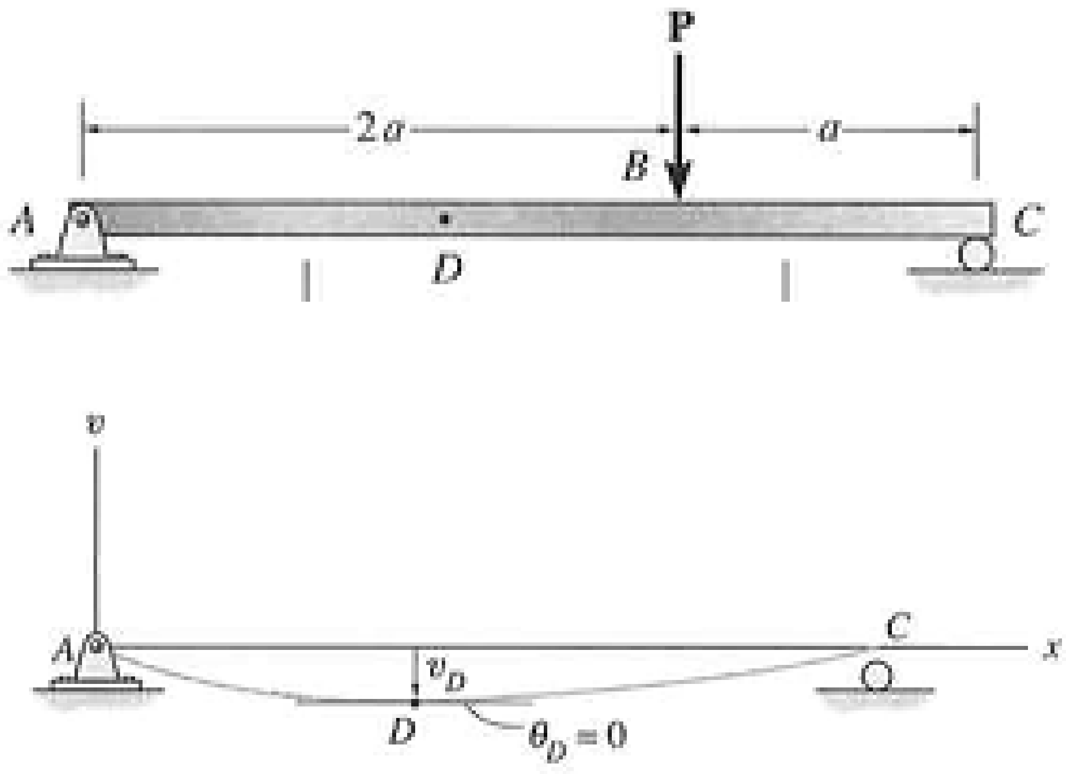


Figura 5.8

Exemplo 5.3: Solução.

Neste caso, dividimos a viga em dois trechos:

Trecho 1 **($0 \leq x_1 \leq 2a$)**:

$$\boxed{M(x_1) = \frac{P}{3} x_1}$$

Trecho 2 **($2a \leq x_2 \leq 3a$)**:

$$\boxed{M(x_2) = \frac{2P}{3}(3a - x_2)}$$

Aplicando $M(x_1)$ na equação 5.8 e integrando-a duas vezes tem-se:

$$EI \frac{dv}{dx_1} = \frac{P}{6} x_1^{\,2} + C_1 \qquad \text{(a)}$$

$$EI.v(x_1) = \frac{P}{18} x_1^{\,3} + C_1 x_1 + C_2 \qquad \text{(b)}$$

Aplicando agora $M(x_2)$ na equação 5.8 e integrando-a duas vezes tem-se:

$$EI \frac{dv}{dx_2} = \frac{2P}{3}\left(3ax_2 - \frac{x_2^{\,2}}{2}\right) + C_3 \qquad \text{(c)}$$

$$EI.v(x_2) = \frac{2P}{3}\left(\frac{3}{2}ax_2^{\,2} - \frac{x_2^{\,3}}{6}\right) + C_3 x_2 + C_4 \qquad \text{(d)}$$

Exemplo 5.3: Solução.

Condições de Contorno

Em $\mathbf{x_1 = 0}$: $v_1 = 0$; e em $\mathbf{x_2 = 3a}$: $v_2 = 0$.

Condição de continuidade no ponto B:

Em $\mathbf{x = 2a}$: $v_1 = v_2$; e $v_1' = v_2'$

Aplicando essas condições nas equações (a), (b), (c) e (d) temos:

$$v_1(0) = 0: \; 0 = 0 + 0 + C_2$$

$$v_2(3a) = 0: \; 0 = \frac{2P}{3}\left(\frac{3}{2}a(3a)^2 - \frac{(3a)^3}{6}\right) + C_3(3a) + C_4$$

$$v_1'(2a) = v_2'(2a): \; \frac{P}{6}(2a)^2 + C_1 = \frac{2P}{3}\left(3a(2a) - \frac{(2a)^2}{2}\right) + C_3$$

$$v_1(2a) = v_2(2a): \; \frac{P}{18}(2a)^3 + C_1(2a) + C_2 = \frac{2P}{3}\left(\frac{3a}{2}(2a)^2 - \frac{(2a)^3}{6}\right) + C_3(2a) + C_4$$

Exemplo 5.3: Solução.

Resolvendo essas quatro equações temos:

$$C_1 = -\frac{4}{9}Pa^2 \qquad C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{22}{9}Pa^2 \qquad C_4 = \frac{4}{3}Pa^3$$

Substituindo as constantes de integração nas eq. de (a) a (d):

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{P}{6EI}x_1^{\,2} - \frac{4}{9}\frac{Pa^2}{EI} \qquad \text{(e)}$$

$$v_1(x) = \frac{P}{18EI}x_1^{\,3} - \frac{4}{9}\frac{Pa^2}{EI}x_1 \qquad \text{(f)}$$

$$\frac{dv_2}{dx} = \frac{2Pa}{EI}x_2 - \frac{P}{3EI}x_2^{\,2} - \frac{22}{9}\frac{Pa^2}{EI} \qquad \text{(g)}$$

$$v_2(x_2) = \frac{Pa}{EI}x_2^{\,2} - \frac{P}{9EI}x_2^{\,3} - \frac{22}{9}\frac{Pa^2}{EI}x_2 + \frac{4}{3}\frac{Pa^3}{EI} \qquad \text{(h)}$$

Exemplo 5.3: Solução.

Analisando a linha elástica nota-se que a máxima deflexão ocorre no ponto D. Neste caso, em que não há extremidade livre deve-se buscar os pontos onde a inclinação é nula, pois ali ocorrerá a máxima deflexão.

- Analisando o trecho BC (equação g), não há pontos onde a inclinação é nula.
- A inclinação nula ocorre no trecho AB:

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{P}{6EI}x^2 - \frac{9}{4}\frac{Pa^2}{EI} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1,633a}$$

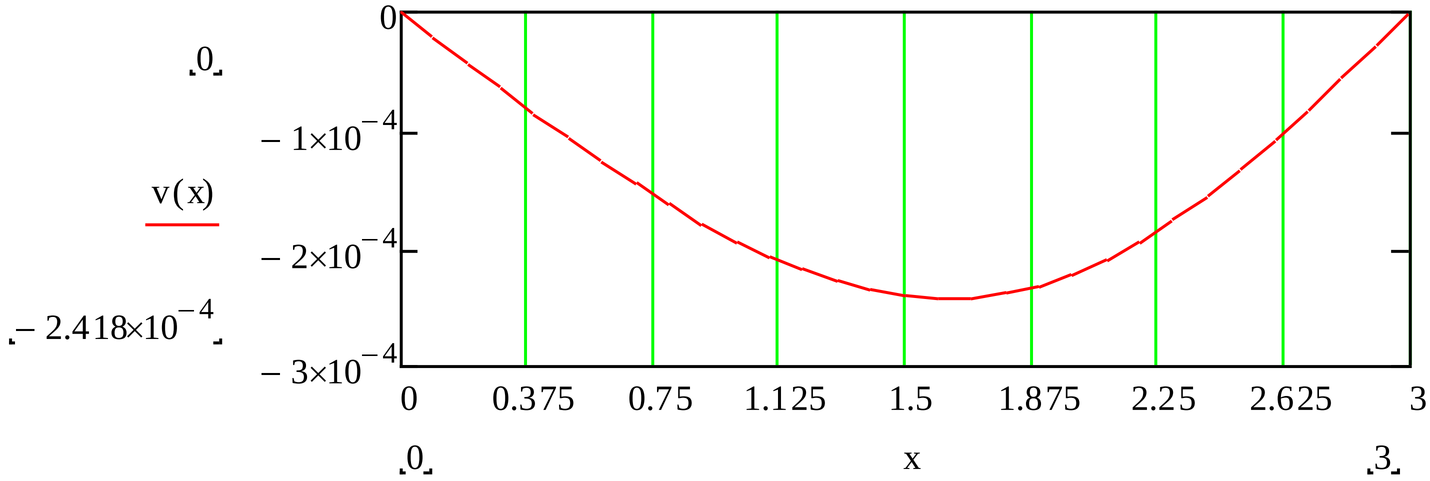
Aplicando **x = 1,633a** na equação (f), encontramos a máxima deflexão na viga:

$$v_{AB}(1,633a) = v_{\max} = \frac{P}{18EI}(1,633a)^3 - \frac{4}{9}\frac{Pa^2}{EI}(1,633a)$$

$$\boxed{v_{\max} = -0,484\frac{Pa^3}{EI}}$$

Exemplo 5.3: Solução.

Com:
L = 3 m
P= 1000 N
E = 200 GPa
I = 10^{-4} m^4



Funções de Descontinuidade

Já pôde-se notar que o método da integração direta é eficiente, porém pode ficar muito trabalhoso a depender do número de carregamentos ao longo da viga.

A fim de representar o momento fletor interno na viga com apenas uma expressão, pode-se fazer uso de operadores matemáticos conhecidos como ***funções de descontinuidade***.

Funções de Descontinuidade

Funções de Macaulay:

Estas serão utilizadas para descrever **cargas distribuídas** ao longo da viga. As funções de Macaulay podem ser escritas como:

$$\langle x-a \rangle^n = \begin{cases} 0 & para\ x < a \\ (x-a)^n & para\ x \geq a \end{cases} \qquad (5.9)$$

$$n \geq 0$$

Onde **a** é a posição da descontinuidade, ou seja, onde se inicia o carregamento distribuído.
A integração das funções de Macaulay segue as mesmas regras das funções comuns:

$$\int \langle x-a \rangle^n dx = \frac{\langle x-a \rangle^{n+1}}{n+1} + C \qquad (5.10)$$

Funções de Descontinuidade

Funções de Macaulay:

Na figura 5.9 são mostradas funções de Macaulay para carregamento uniforme (m= 0) e para carregamento triangular.

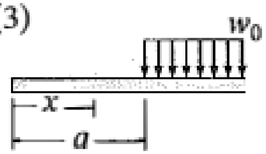
Carga	Função da carga $w = w(x)$	Cisalhamento $V = -\int w(x)dx$	Momento $M = \int V dx$
(3) 	$w = w_0 \langle x-a \rangle^0$	$V = -w_0 \langle x-a \rangle^1$	$M = -\frac{w_0}{2} \langle x-a \rangle^2$
(4) Inclinação = m 	$w = m \langle x-a \rangle^1$	$V = \frac{-m}{2} \langle x-a \rangle^2$	$M = \frac{-m}{6} \langle x-a \rangle^3$

Figura 5.9

Por convenção, as cargas distribuídas para baixo são consideradas positivas

Funções de Descontinuidade

Funções de Singularidade:

Estas serão utilizadas para descrever **cargas concentradas** ao longo da viga.

Para uma carga P atuando em um ponto x = a (figura 5.10a), escreve-se:

$$w = P\langle x-a\rangle^{-1} = \begin{cases} 0 & para\ x \neq a \\ P & para\ x = a \end{cases} \qquad (5.11)$$

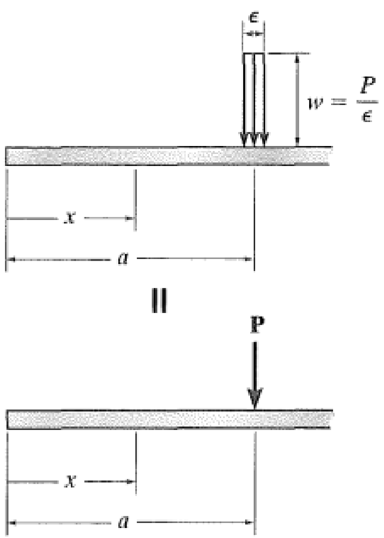


Figura 5.10a

Para um conjugado M_o atuando em um ponto x = a (figura 5.10b), escreve-se:

$$w = M_0\langle x-a\rangle^{-2} = \begin{cases} 0 & para\ x \neq a \\ M_0 & para\ x = a \end{cases} \qquad (5.12)$$

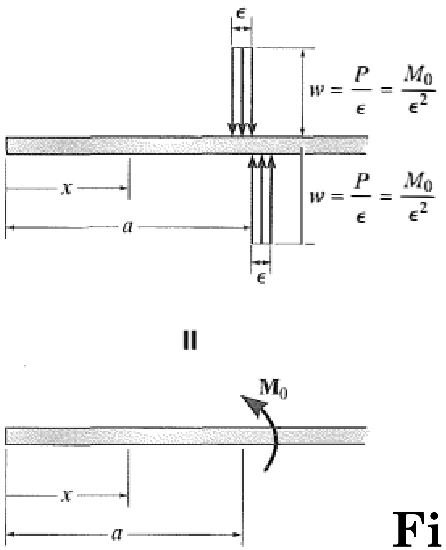


Figura 5.10b

Funções de Descontinuidade

Funções de Singularidade:

A integração das funções de singularidade se dá de forma diferente das funções comuns, apenas o expoente n aumenta em uma unidade e não há constante de integração associada à operação:

$$\int \langle x-a \rangle^{n} = \langle x-a \rangle^{n+1}, \; para \; n = -1, -2 \qquad (5.13)$$

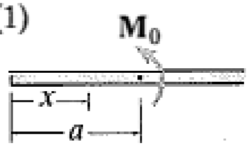
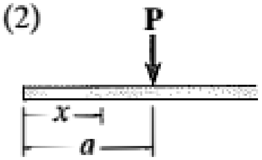
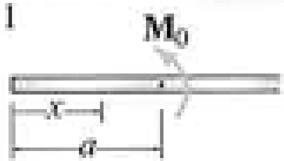
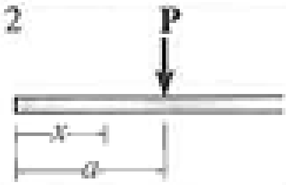
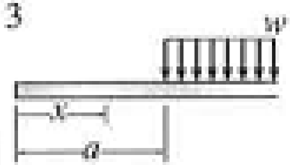
Carga	Função da carga $w = w(x)$	Cisalhamento $V = -\int w(x)dx$	Momento $M = \int V dx$
(1) 	$w = M_0 \langle x-a \rangle^{-2}$	$V = -M_0 \langle x-a \rangle^{-1}$	$M = -M_0 \langle x-a \rangle^{0}$
(2) 	$w = P \langle x-a \rangle^{-1}$	$V = -P \langle x-a \rangle^{0}$	$M = -P \langle x-a \rangle^{1}$

Figura 5.11

Por convenção, as cargas para baixo e os momentos no sentido anti-horário são considerados positivos

FUNÇÕES DE DESCONTINUIDADE

Carga	Função da carga $w = w(x)$	Cisalhamento $V = -\int w(x)dx$	Momento $M = \int V dx$
1 	$w = M_0\langle x-a\rangle^{-2}$	$V = -M_0\langle x-a\rangle^{-1}$	$M = -M_0\langle x-a\rangle^{0}$
2 	$w = P\langle x-a\rangle^{-1}$	$V = -P\langle x-a\rangle^{0}$	$M = -P\langle x-a\rangle^{1}$
3 	$w = w_0\langle x-a\rangle^{0}$	$V = -w_0\langle x-a\rangle^{1}$	$M = -\frac{w_0}{2}\langle x-a\rangle^{2}$
4 inclinação = m 	$w = m\langle x-a\rangle^{1}$	$V = \frac{-m}{2}\langle x-a\rangle^{2}$	$M = \frac{-m}{6}\langle x-a\rangle^{3}$

Por convenção, trabalhando da esquerda para a direita:

- as cargas para baixo e os momentos no sentido anti-horário são considerados positivos.
- as cargas distribuídas para baixo são consideradas positivas.

Funções de Descontinuidade

Exemplo 5.4: Determinar a equação da linha elástica da viga em balanço mostrada na figura 5.12a. Considerar EI constante.

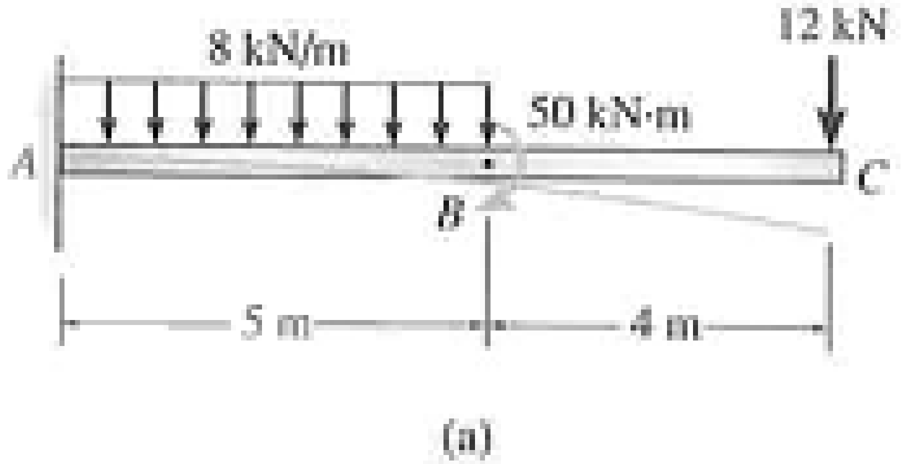


Figura 5.12

Exemplo 5.4: Solução

-Usando equilíbrios de forças e momentos, chega-se às reações no ponto A (engaste), já demonstradas na figura 5.12b.

- Há um outro detalhe importante na figura 5.12b: como o carregamento distribuído real não se estende até o fim da viga, usa-se uma superposição onde o mesmo não atua para representar seu efeito, já que na função de Macaulay só se aponta onde o carregamento começa.

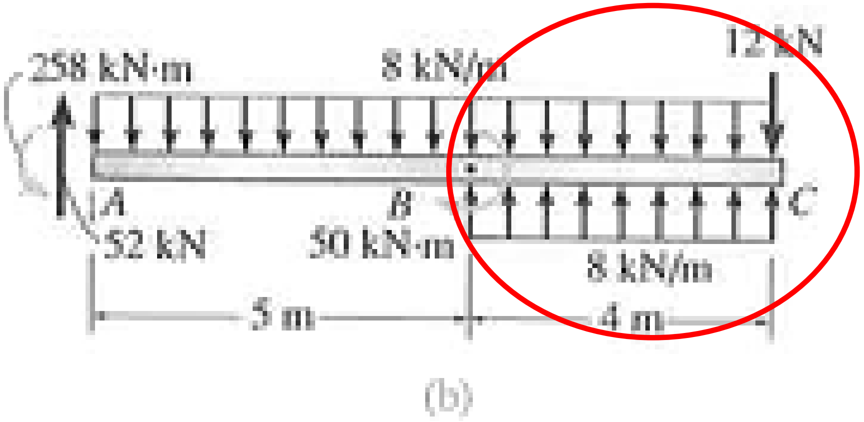


Figura 5.12

Exemplo 5.4: Solução

$$M(x) = (52\langle x-0\rangle^1 - 258\langle x-0\rangle^0 + 50\langle x-5\rangle^0 - \frac{1}{2}8\langle x-0\rangle^2 + \frac{1}{2}8\langle x-5\rangle^2)kN.m$$

$$M(x) = (-258 + 52x - 4x^2 + 4\langle x-5\rangle^2 + 50\langle x-5\rangle^0)kN.m \qquad \text{(a)}$$

Agora aplica-se a relação (5.8), integrando-se a equação (a), segundo a regra de Macaulay:

Exemplo 5.4: Solução

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -258 + 52x - 4x^2 + 4\langle x-5\rangle^2 + 50\langle x-5\rangle^0$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -258x + 26x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}\langle x-5\rangle^3 + 50\langle x-5\rangle^1 + C_1$$

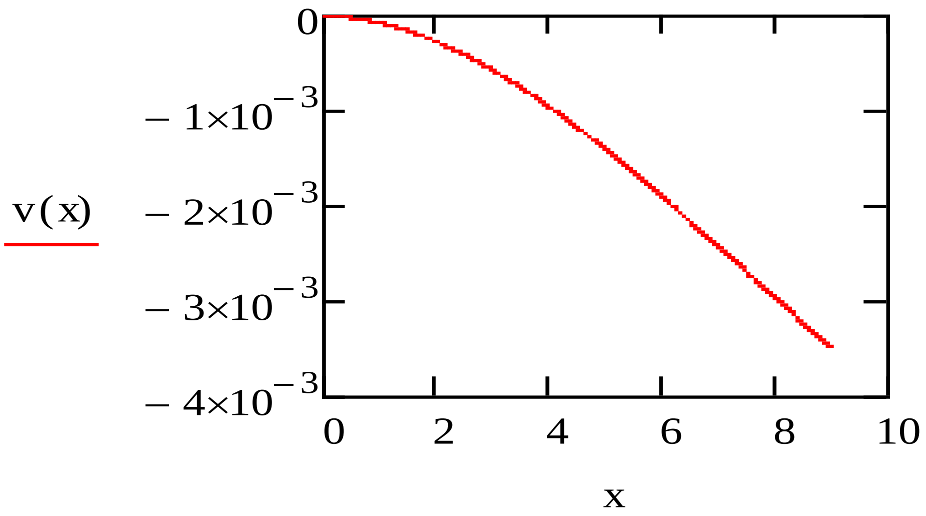
$$EIv(x) = -129x^2 + \frac{26}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}\langle x-5\rangle^4 + 25\langle x-5\rangle^2 + C_1x + C_2$$

Como $dv/dx = 0$ em x = 0, $C_1 = 0$; e $v = 0$ em x = 0, então $C_2 = C_1 = 0$. Assim:

$$\boxed{v(x) = \frac{1}{EI}\left(-129x^2 + \frac{26}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}\langle x-5\rangle^4 + 25\langle x-5\rangle^2\right)m}$$

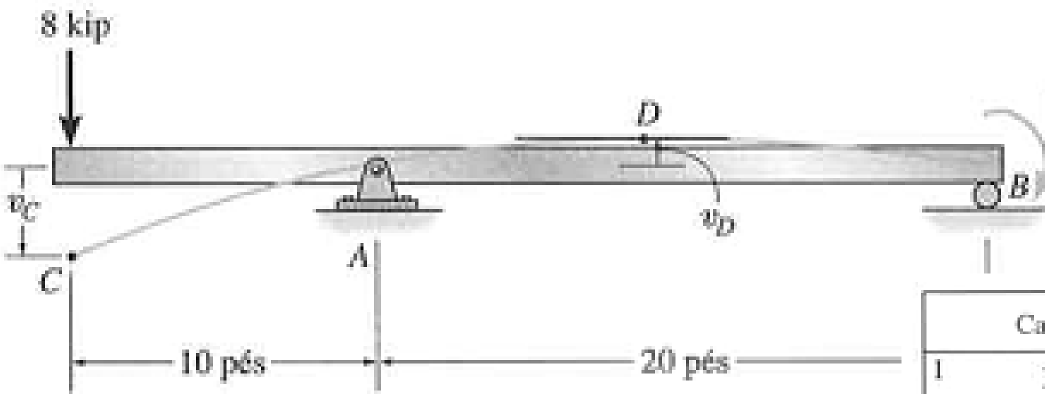
Exemplo 5.4: Solução

$$v(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{E\cdot I}\cdot\left(-129x^2 + \dfrac{26}{3}\cdot x^3 - \dfrac{1}{3}x^4\right) & \text{if } x < 5 \\ \dfrac{1}{E\cdot I}\cdot\left[-129x^2 + \dfrac{26}{3}\cdot x^3 - \dfrac{1}{3}x^4 + \dfrac{1}{3}(x-5)^4 + 25(x-5)^2\right] & \text{otherwise} \end{cases}$$



Funções de Descontinuidade

Exercício 5.1: Determinar a equação da linha elástica da viga em balanço mostrada na figura 5.13 e achar a deflexão máxima. Considerar EI constante.

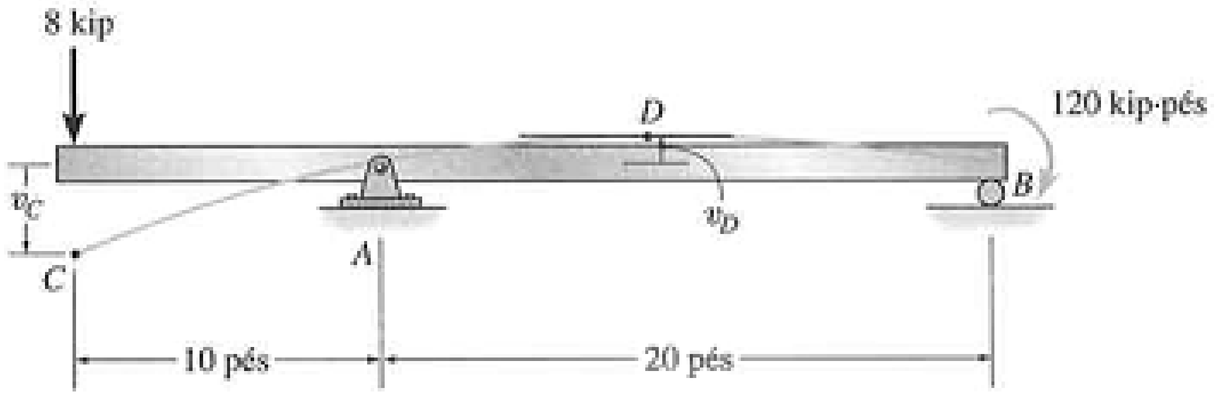


Carga	Função da carga $w = w(x)$	Cisalhamento $V = -\int w(x)dx$	Momento $M = \int V dx$
1 $\mathbf{M}_0$ (x, a)	$w = M_0\langle x-a\rangle^{-2}$	$V = -M_0\langle x-a\rangle^{-1}$	$M = -M_0\langle x-a\rangle^{0}$
2 $\mathbf{P}$ (x, a)	$w = P\langle x-a\rangle^{-1}$	$V = -P\langle x-a\rangle^{0}$	$M = -P\langle x-a\rangle^{1}$
3 w (x, a)	$w = w_0\langle x-a\rangle^{0}$	$V = -w_0\langle x-a\rangle^{1}$	$M = -\frac{w_0}{2}\langle x-a\rangle^{2}$
4 inclinação = m (x, a)	$w = m\langle x-a\rangle^{1}$	$V = \frac{-m}{2}\langle x-a\rangle^{2}$	$M = \frac{-m}{6}\langle x-a\rangle^{3}$

Figura 5.13

FUNÇÕES DE DESCONTINUIDADE

Exercício 5.1: Determinar a equação da linha elástica da viga em balanço mostrada na figura 5.13 e achar a deflexão máxima. Considerar EI constante.



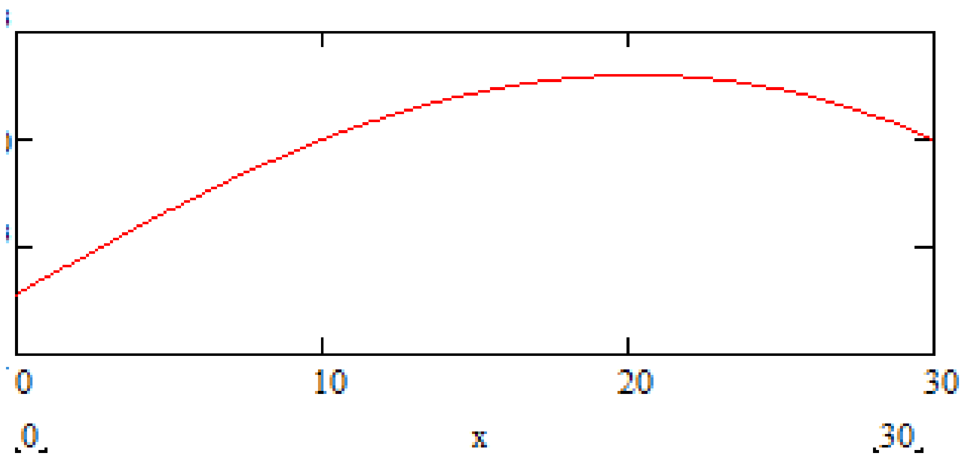


Figura 5.13

Vigas Estaticamente indeterminadas

Figura 5.14

Vigas estaticamente indeterminadas são aquelas que possuem reações redundantes, ou seja, que seriam desnecessárias para o seu equilíbrio.

Para estas vigas, as equações de equilíbrio não são suficientes para determinar as reações existentes.

Vigas Estaticamente indeterminadas

O **grau de indeterminação** da viga é dado pelo número de reações redundantes.

Por exemplo, para a viga da **figura 5.15**, há quatro reações a serem determinadas e três equações de equilíbrio, portanto, tem-se uma viga **indeterminada de primeiro grau**.

Já a viga da figura 5.16 é **indeterminada de segundo grau.**

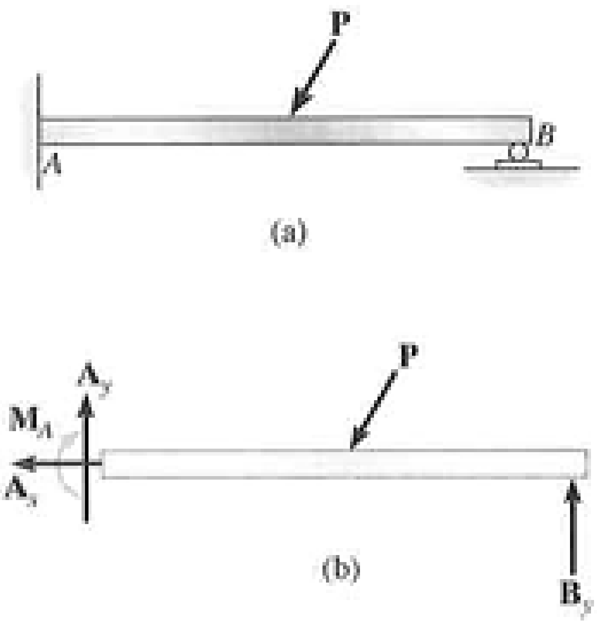


Figura 5.15

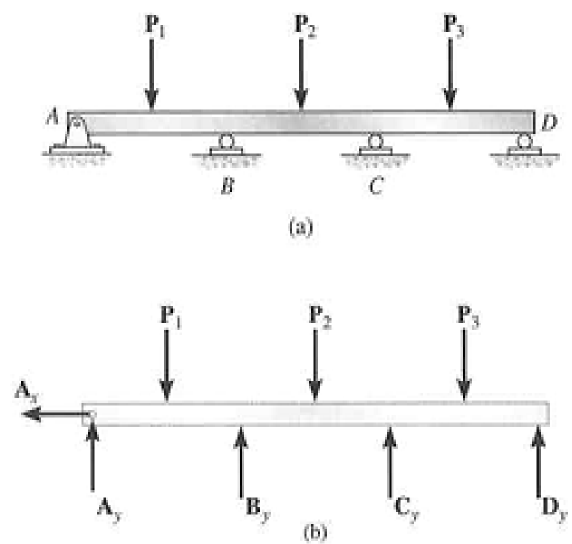


Figura 5.16

Vigas Estaticamente indeterminadas

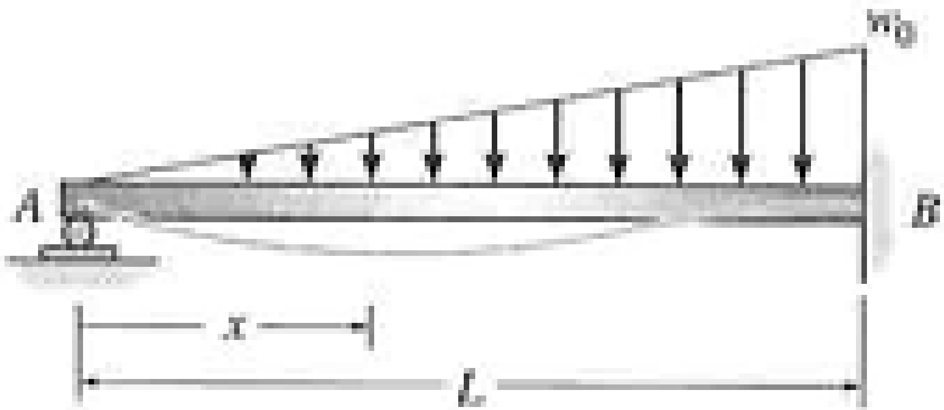
Para determinar reações em vigas estaticamente indeterminadas é necessário **primeiro especificar as reações redundantes** (nas figuras 5.15 e 5.16, $\mathbf{A_x}$ não pode ser classificada como redundante, porque, se for removida, a condição $\mathbf{\Sigma F_x}$ não será satisfeita).

Para determinar as reações redundantes, devem ser usadas as **condições de compatibilidade geométrica**.

Uma vez definidas, as reações redundantes são aplicadas à viga e as reações restantes são definidas pelas equações de equilíbrio.

Vigas Estaticamente indeterminadas

Exemplo 5.5: A viga está submetida ao carregamento distribuído mostrado na figura 5.17a. Determinar as reações em A e em B considerando EI constante.



(a)

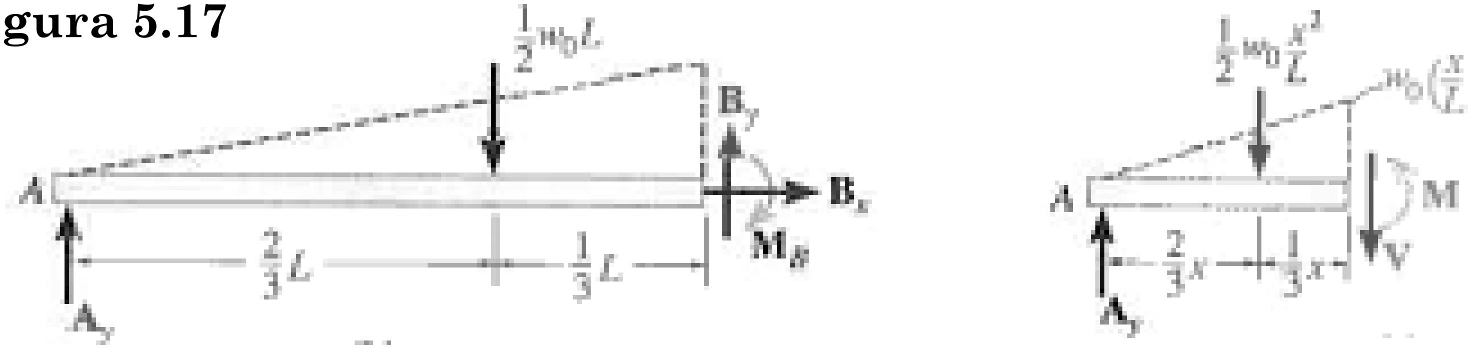
Figura 5.17

Vigas Estaticamente indeterminadas

Exemplo 5.5: Solução

- A viga é indeterminada de primeiro grau como indica seu diagrama de corpo livre (figura 5.17b).

Figura 5.17



(b) (c)

- Podemos expressar o momento interno em termos de A_y:

$$M(x) = A_y x - \frac{1}{6} w_o \frac{x^3}{L}$$

Vigas Estaticamente indeterminadas

Exemplo 5.5: Solução

- Inclinação e linha elástica:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=M(x)=A_y x-\frac{1}{6}w_o\frac{x^3}{L}$$

$$EI.\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2}A_y x^2-\frac{1}{24}w_o\frac{x^4}{L}+C_1$$

$$EI.v(x)=\frac{1}{6}A_y x^3-\frac{1}{120}w_o\frac{x^5}{L}+C_1x+C_2$$

- As três incógnitas A_y, C_1 e C_2 são determinadas pelas condições de contorno: *v(0)=0; dv(L)/dx = 0; e v(L)=0.*

Vigas Estaticamente indeterminadas

Exemplo 5.5: Solução

- Aplicando as condições:

$$v(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 - 0 + 0 + C_2$$

$$\frac{dv(L)}{dx} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} A_y L^2 - \frac{1}{24} w_o \frac{L^4}{L} + C_1$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} A_y L^3 - \frac{1}{120} w_o L^4 + C_1 L + C_2$$

- Resolvendo o sistema, temos:

$$\boxed{A_y = \frac{1}{10} w_0 L}; \;\; C_1 = -\frac{1}{120} w_0 L^3; \;\; C_2 = 0$$

Vigas Estaticamente indeterminadas

Exemplo 5.5: Solução

- Com o valor de A as reações em B são determinadas pelas equações de equilíbrio:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = 0};$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = \frac{1}{2} w_o L \Rightarrow \boxed{B_y = \frac{2}{5} w_o L}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -A_y.L + \frac{1}{6} w_o L^2 - M_B = 0 \Rightarrow \boxed{M_B = \frac{1}{15} w_o L^2}$$

EXERCÍCIOS GERAIS

Exercício 5.2: O eixo é suportado em A por um mancal de apoio, que exerce somente reações verticais sobre ele, e em B por um mancal de encosto que exerce reações horizontais e verticais sobre o eixo. Trace o diagrama de momento fletor para o eixo e determine as equações da linha elástica usando as coordenadas x_1 e x_2. Resolva também usando funções de descontinuidade. EI é constante.

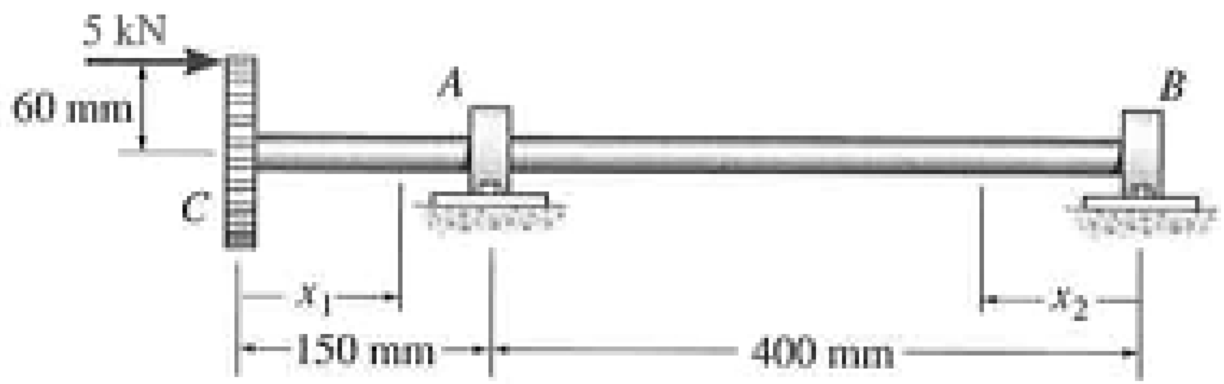


Figura 5.18

$$\boxed{EIv_1(x_1) = 150x_1^{\,2} - 85x_1 + 9,375}$$

$$\boxed{EIv_2(x_2) = 125x_2^{\,3} - 20x_2}$$

Exercício 5.3: Determinar a inclinação em B e a deflexão em C. Considerar EI constante.

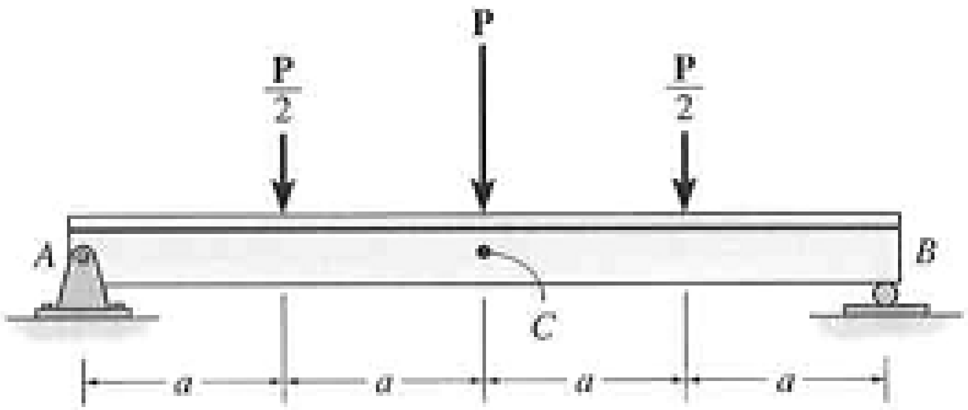


Figura 5.19

$$\boxed{\theta_B = v_B'(4a) = \frac{7Pa^2}{4EI}}$$

$$\boxed{v_c(2a) = -\frac{9Pa^3}{4EI}}$$

Exercício 5.4: Determinar as reações nos apoios e a equação da linha elástica.

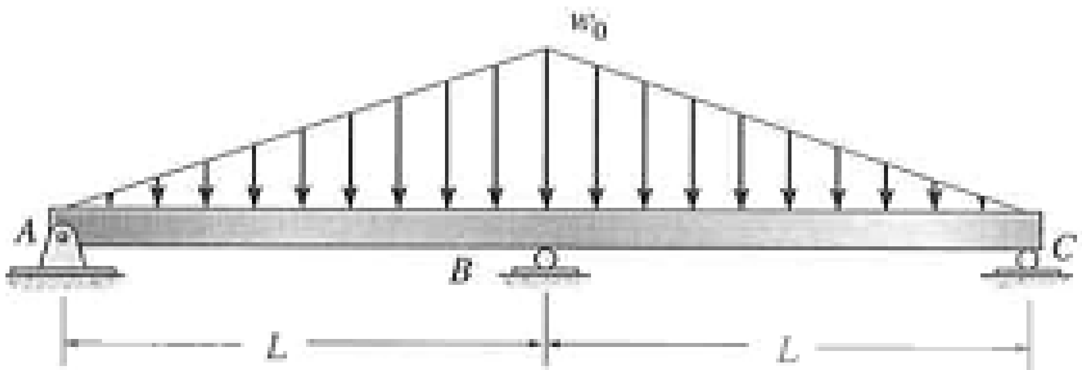


Figura 5.20

$$\boxed{R_A = R_c = \frac{w_0 L}{10}} \qquad \boxed{R_B = \frac{4 w_0 L}{5}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} C_1 = -\dfrac{w_0 L^3}{120} \\ C_2 = 0 \end{array}}$$

Exercício 5.5: Determinar o deslocamento em C e a inclinação em A.

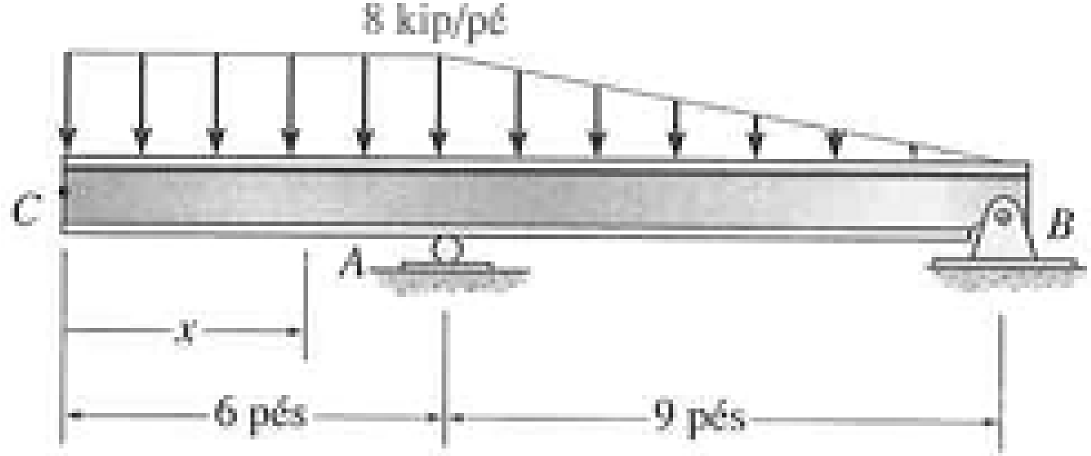


Figura 5.21

$$\boxed{v_c(0) = -\frac{3110,4(kip.ft^3)}{EI}}$$

$$\boxed{\theta_A = v_A{}'(6\,ft) = \frac{302(Kip.ft^2)}{EI}}$$

Exercício 5.6: O interruptor do relé consiste em uma tira fina de metal ou armadura AB feita de bronze (E = 103 GPa) e atraída para o solenóide S por um campo magnético. Determinar a menor força F necessária para atrair a armadura em C a fim de que se dê o contato na extremidade livre B. Além disso, qual deve ser a distância *a* para que essa condição ocorra? A armadura é fixa em A e tem momento de inércia I = 0,18 x 10^{-12} m^4.

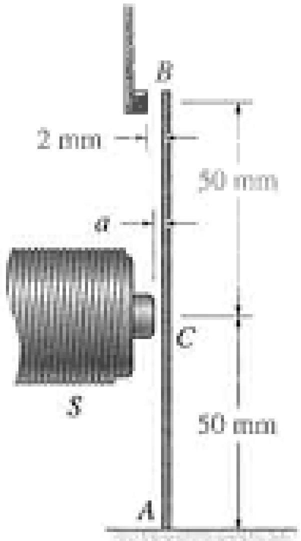


Figura 5.22

$$\boxed{F = 0,356N}$$

$$\boxed{a = 0,8mm}$$

Exercício 5.7: Para a viga e os carregamentos mostrados na figura, determinar as reações e a deflexão no ponto B.

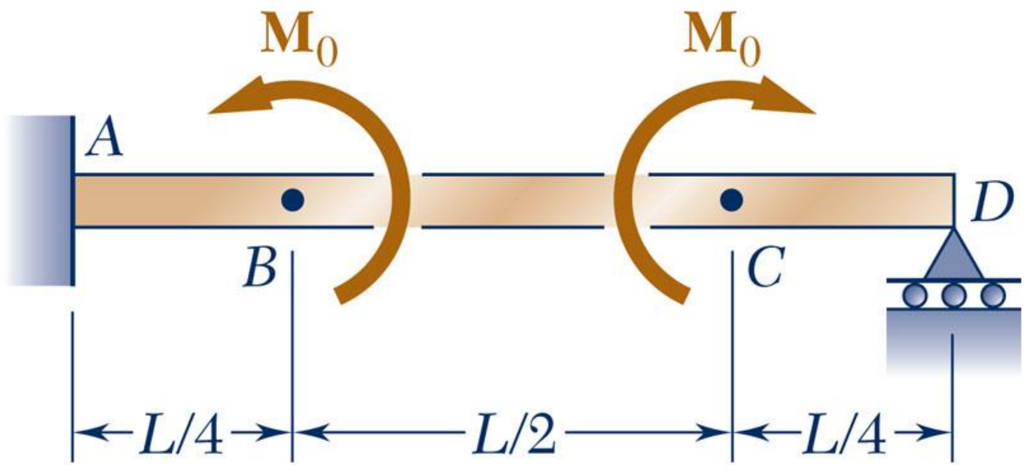


Figura 5.23

$$\boxed{D_y = \frac{3}{4}\frac{M_o}{L}}$$

$$\boxed{v_B = \frac{11}{512}\frac{M_o L^2}{EI}}$$

Exercício 5.8: O conjunto consiste em dois tubos de comprimento igual, com rigidez à flexão EI e rigidez à torção GJ. Determinar o deslocamento vertical do ponto A.

$$\boxed{v_A = -\frac{PL^3}{24}\left(\frac{2}{EI} + \frac{3}{GJ}\right)}$$

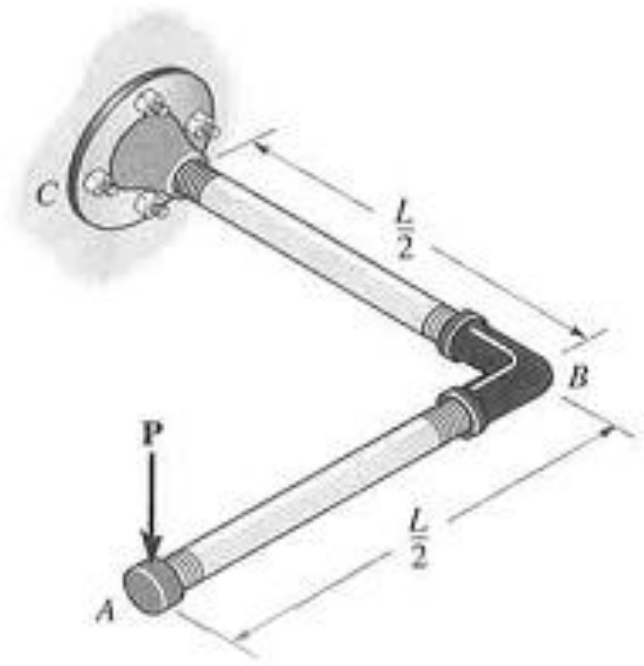


Figura 5.24