INSTITUTO DE TECNOLOGIA - UFPA
FACULDADE DE ENG. MECÂNICA

DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS I

Parte 2:
Tensão: conceitos básicos

Professor: Leonardo Dantas Rodrigues

TENSÕES NOS ELEMENTOS DE UMA ESTRUTURA (DEFINIÇÃO DE TENSÃO)

A análise estática para obtenção de esforços nas estruturas e componentes, revisada na **Parte 1**, é o primeiro e indispensável passo para uma análise de projeto ou de uma estrutura em serviço. Porém, essa avaliação não nos diz se a estrutura suportará, ou não, as cargas atuantes com segurança.

A barra da figura 2.1, por exemplo, vai ou não falhar sob a carga **P**? Isso depende não somente do valor da carga, mas da área da seção da barra **A** e do material do qual ela é constituída.

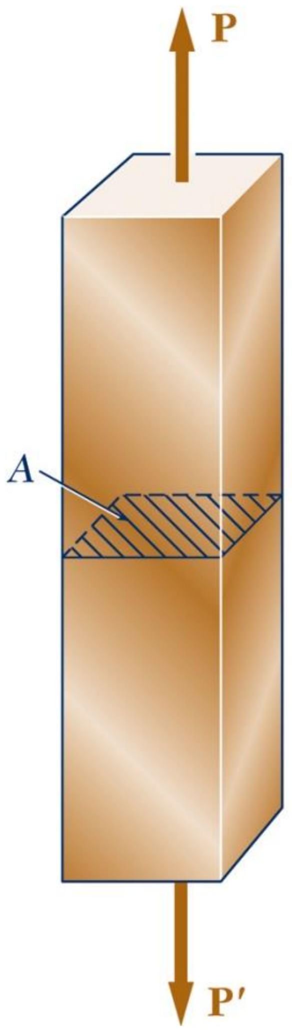


Figura 2.1

Tensões nos elementos de uma Estrutura (Definição de tensão)

Definição: A força por unidade de área, ou intensidade das forças distribuídas sobre uma determinada seção (figura 2.2), é chamada de ***tensão*** e é representada pela letra grega sigma (**σ**), quando for normal à seção.

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad (2.1)$$

Unidades:

$$[\sigma] = \frac{[N]}{[m^2]} = \text{Pa} \quad \text{(S.I)}$$

$$[\sigma] = \frac{[lbf]}{[in^2]} = \text{psi} \quad \text{(Inglês)}$$

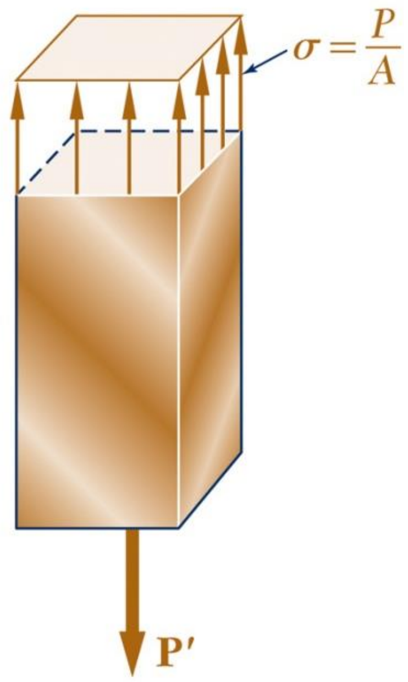


Figura 2.2

Tensões nos elementos de uma Estrutura (Estado geral)

Para entendermos as condições de tensões internas geradas em um corpo por uma distribuição de carga qualquer (figura 2.3a), secciona-se o corpo no plano desejado (no caso, **y-z**) e elege-se um ponto qualquer Q no plano gerado (figura 2.3b).

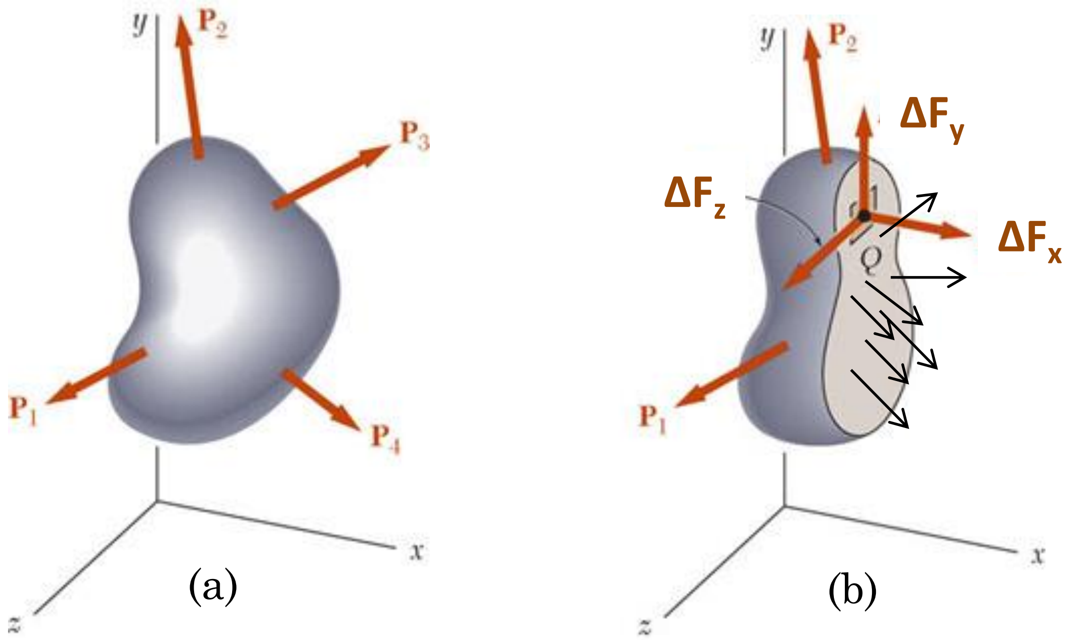


Figura 2.3

Assume-se então que o ponto escolhido tem área ΔA e que todas as forças atuantes nesta podem ser representadas pelo vetor $\Delta \mathbf{F}$. Este vetor pode ser dividido em componentes no sistema x-y-z (figura 2.3b).

Tensões nos elementos de uma Estrutura (Estado geral)

Tensão Normal: é a intensidade da força ou força por unidade de área, que atua na direção perpendicular a ΔA. Assim, para o plano de corte da figura 2.3a, tem-se:

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \qquad (2.2)$$

Tensão Cisalhante: é a intensidade da força ou força por unidade de área, que atua na direção tangente a ΔA. Ela é representada pela letra **τ** (tau):

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A}$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \qquad (2.3)$$

$$\tau_{xy}$$

Eixo normal à área considerada

Direção da força

Tensões nos elementos de uma Estrutura (Estado geral)

Analogamente, na figura 2.3a, se passarmos um corte através do ponto Q paralelo ao plano **x-z**, chegamos às componentes de tensão: $\boldsymbol{\sigma_y}$,$\boldsymbol{\tau_{yx}}$, e $\boldsymbol{\tau_{yz}}$.

$$\sigma_y = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \qquad (2.4)$$

$$\tau_{yx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \qquad \tau_{yz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \qquad (2.5)$$

Finalmente, passando um corte através do ponto Q paralelo ao plano **x-y**, chegamos às componentes de tensão: $\boldsymbol{\sigma_z}$,$\boldsymbol{\tau_{zx}}$, e $\boldsymbol{\tau_{zy}}$.

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \qquad (2.6)$$

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \qquad \tau_{zy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \qquad (2.7)$$

Tensões nos elementos de uma Estrutura (Estado geral: paralelepípedo elementar)

Para facilitar a visualização do estado de tensão geral, normalmente faz-se uso do **paralelepípedo elementar (figura 2.4).**

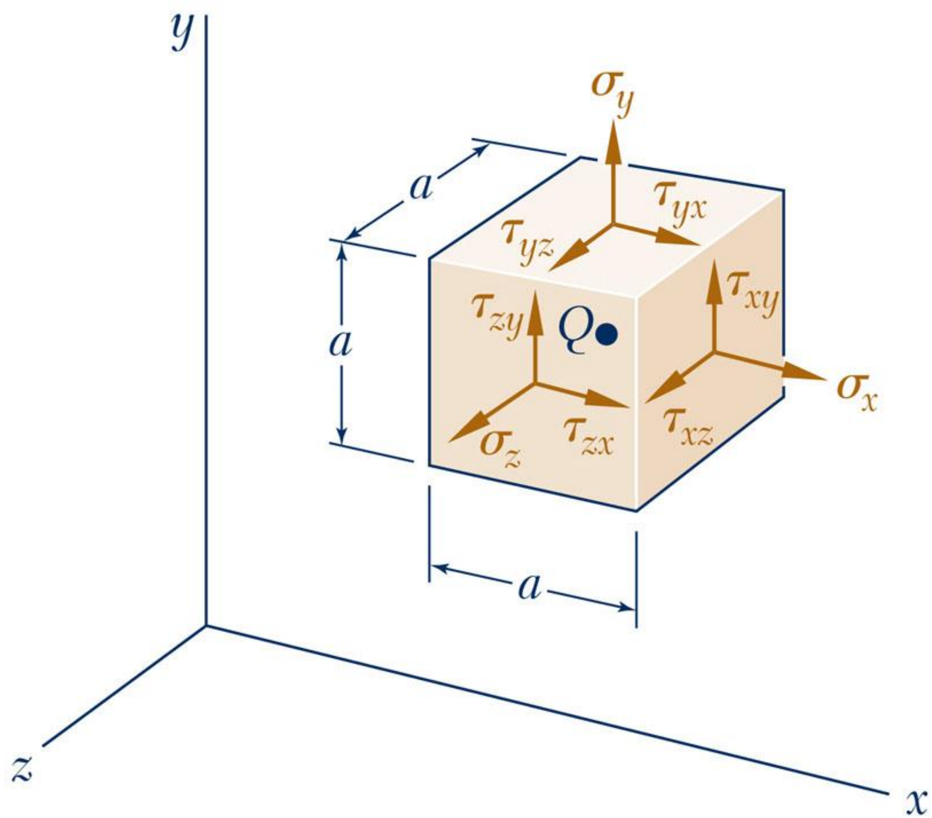


Figura 2.4: Paralelepípedo elementar

Tensões nos elementos de uma Estrutura (Estado geral: paralelepípedo elementar)

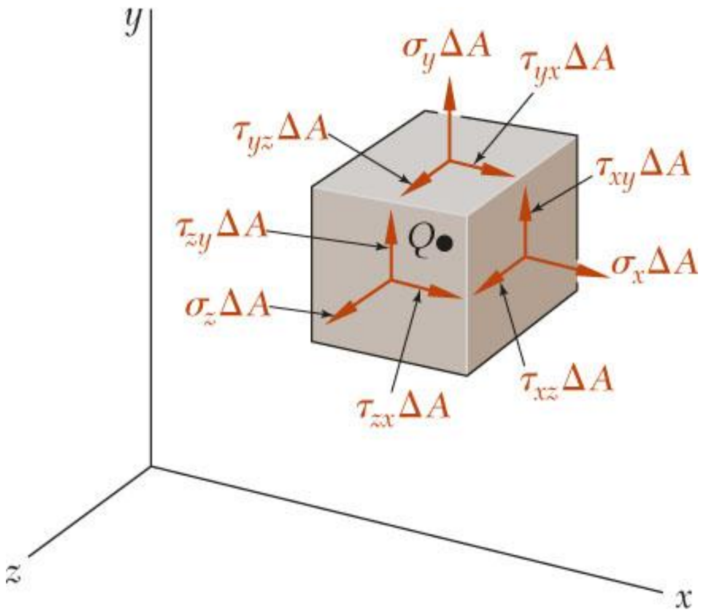


Figura 2.5

A combinação de forças geradas pelas tensões no paralelepípedo elementar devem satisfazer às condições de equilíbrio:

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0 \qquad (2.8)$$
$$\sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0$$

Há pares de forças atuantes no cubo que atuam em sentidos opostos (figura 2.5), atendendo à condição de equilíbrio de forças.

Tensões nos elementos de uma Estrutura (Estado geral: paralelepípedo elementar)

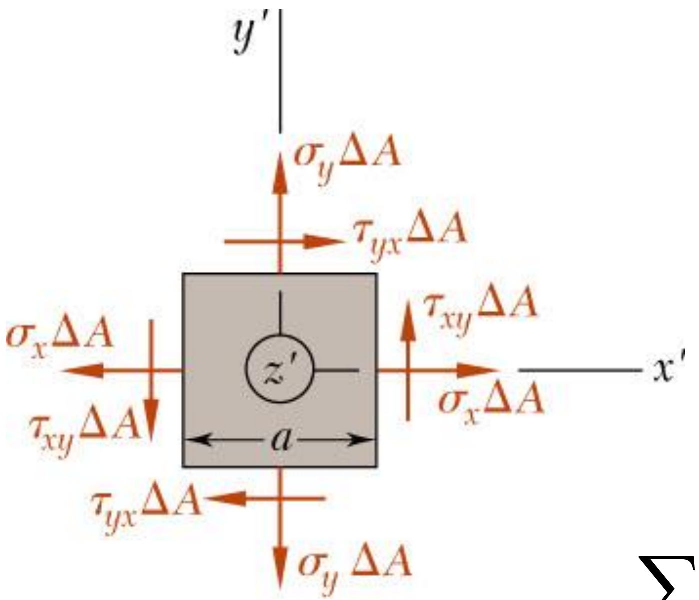


Figura 2.6

Para demonstrar o equilíbrio de momentos, é traçado um sistema de eixos x', y' e z', traçado tendo Q como origem e com eixos paralelos a x, y e z respectivamente. Utilizando o plano x'-y' (figura 2.6) e fazendo o somatório de momentos com relação a z', tem-se:

$$\sum M_{z'} = 0 \;\rightarrow\; 2\left(\tau_{xy}\Delta A\right)\frac{a}{2} - 2\left(\tau_{yx}\Delta A\right)\frac{a}{2} = 0$$

Chegando-se a: $$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad (2.9)$$

Analogamente, chega-se a:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \qquad\qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad (2.10)$$

Tensões nos elementos de uma Estrutura (Estado geral: Tensor de Tensões)

Como visto até o momento, pelas condições de equilíbrio, um estado de tensão completo pode ser representado por seis componentes. Normalmente, este estado é apresentado através de uma matriz chamada ***tensor de tensões.***

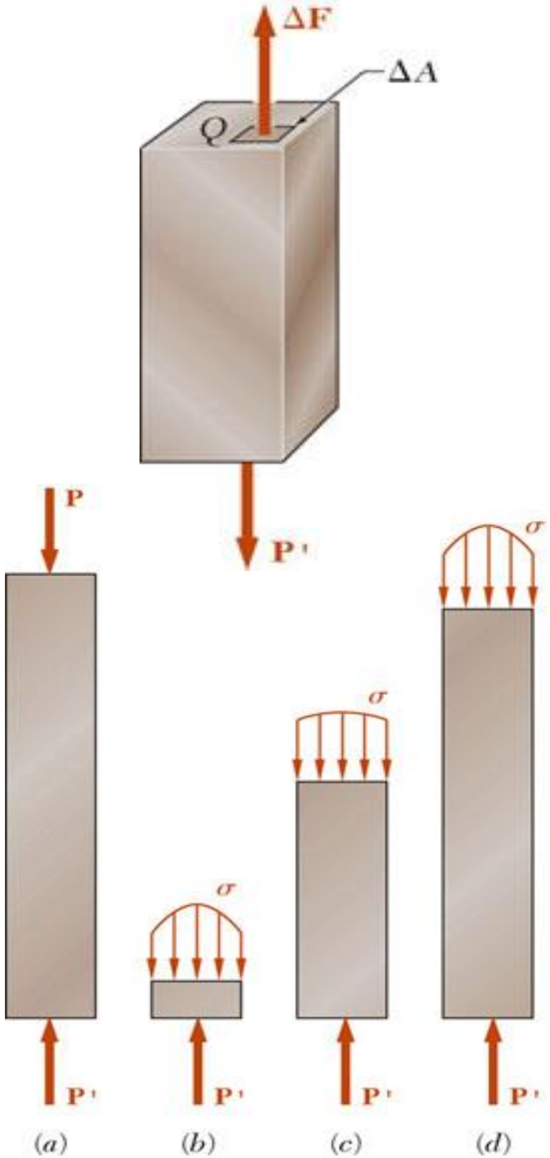
O tensor de tensões é uma matriz simétrica com as tensões normais na diagonal principal

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}_{(3x3)} \qquad (2.11)$$

Para o estado plano de tensões (x-y), que corresponderá à maioria dos problemas práticos, tem-se

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}_{(2x2)} \qquad (2.12)$$

CARGA AXIAL E TENSÃO NORMAL



A resultante das forças internas para uma barra axialmente carregada é normal a uma seção de corte perpendicular ao eixo axial da barra.

A tensão normal em um determinado ponto pode não ser igual à tensão média, mas a resultante da distribuição de tensões deve satisfazer:

$$P = \int dF = \int_A \sigma \, dA \rightarrow P = \sigma A$$

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A}} \qquad (2.13)$$

σ é a tensão normal média em qualquer ponto da área da seção transversal;
P é a resultante das forças normais internas, aplicada no centróide da seção transversal;
A é a área da seção transversal.

Figura 2.7

Na prática consideraremos que a distribuição das tensões normais em uma barra carregada axialmente é uniforme, exceto nas seções muito próximas da aplicação das cargas (figuras 2.7 b e c)

Tensão de Cisalhamento

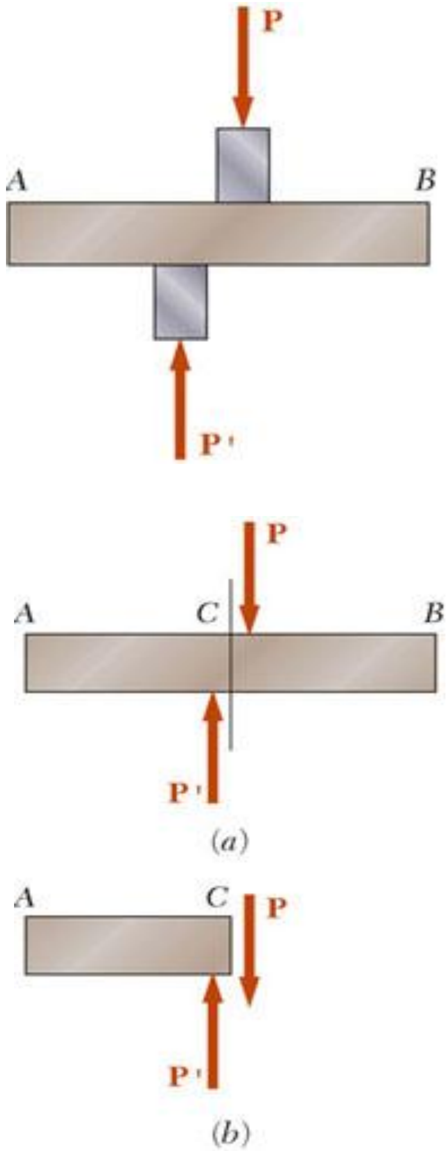


Figura 2.8

Forças P e P' são aplicadas transversalmente à barra AB (figura 2.8).

Forças internas correspondentes atuam no plano de seção transversal C e são chamadas forças de cisalhamento.

A resultante da distribuição da força de cisalhamento interna é definida no corte da seção e é igual à carga P (força cortante).

A tensão média de cisalhamento correspondente é,

$$\boxed{\tau_{med} = \frac{P}{A}} \qquad (2.14)$$

A distribuição da tensão de cisalhamento varia de zero na superfície da barra até um valor máximo que pode ser muito superior ao valor médio.

Veremos isso mais à frente (parte 6), por enquanto trabalharemos com o valor médio.

Tensão de Cisalhamento

Cisalhamento Simples

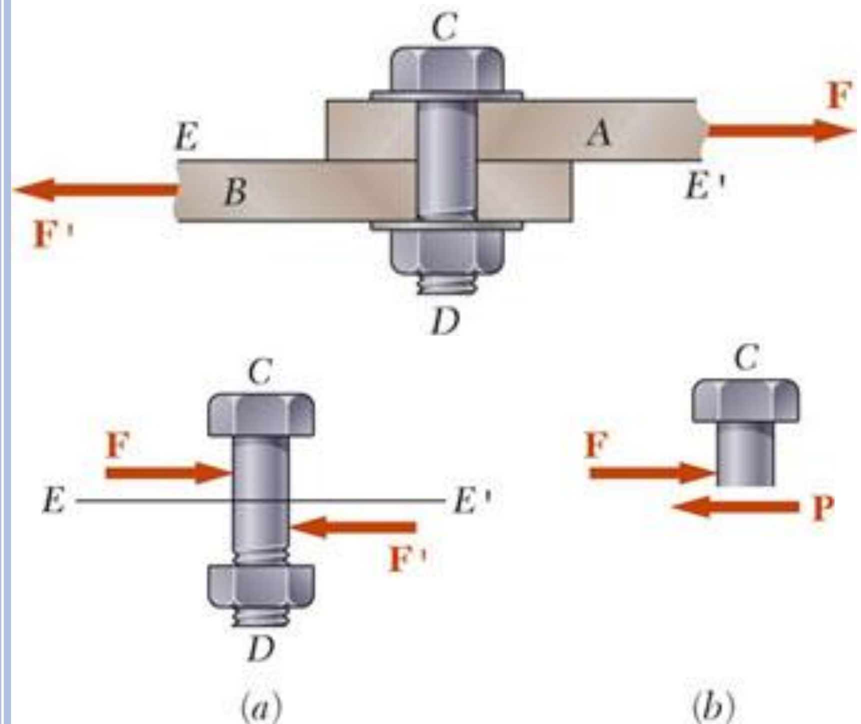


Figura 2.9

$$\tau_{\text{med}} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \qquad (2.14)$$

Cisalhamento Duplo

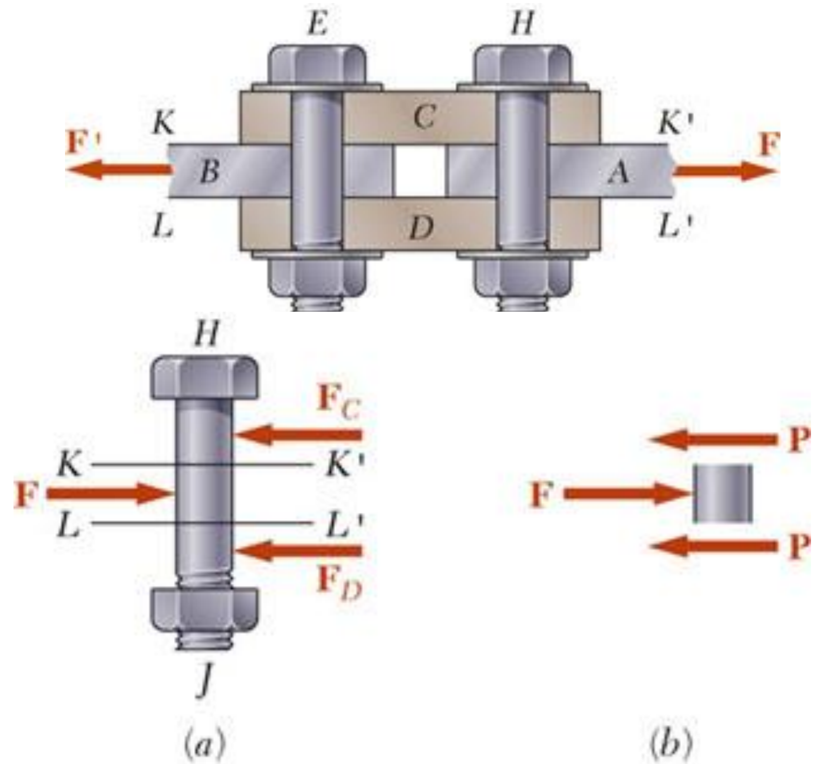
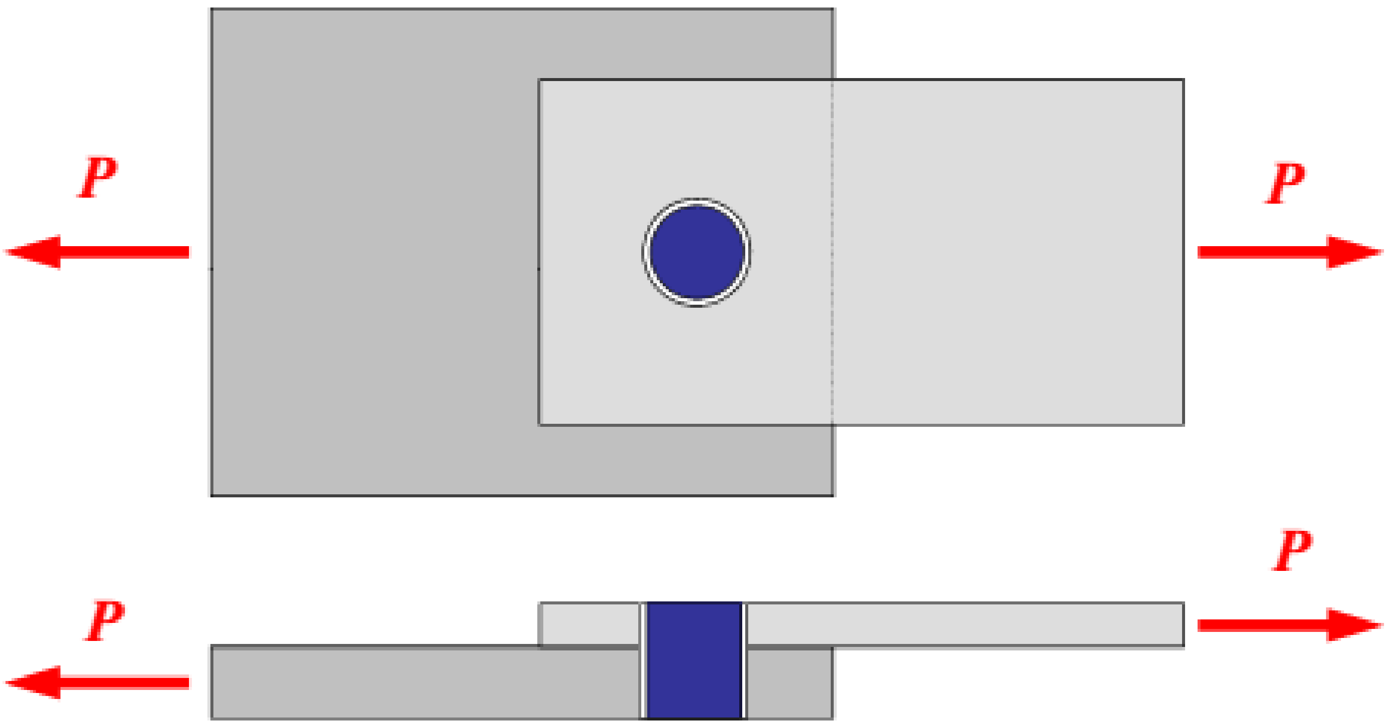


Figura 2.10

$$\tau_{\text{med}} = \frac{P}{A} = \frac{F/2}{A} \qquad (2.15)$$

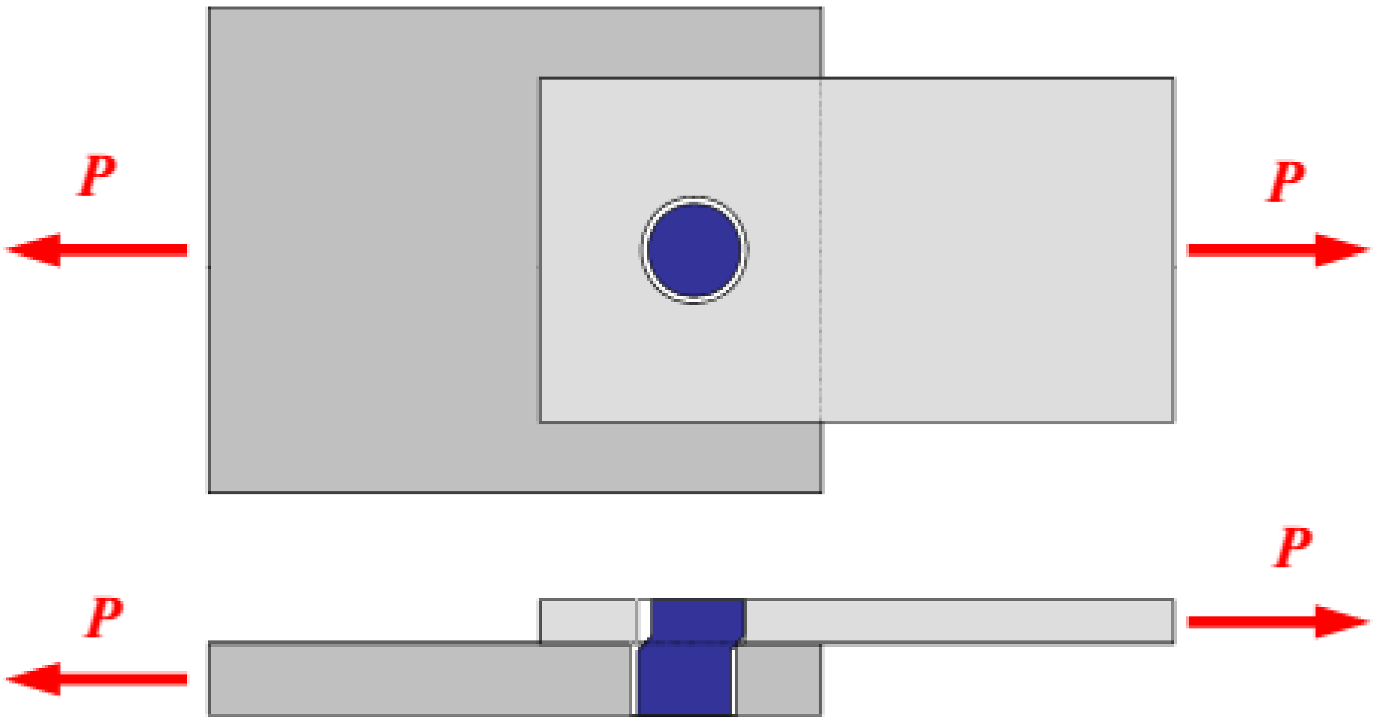
Tensão de Cisalhamento

Exemplo:
Junta sobreposta simples



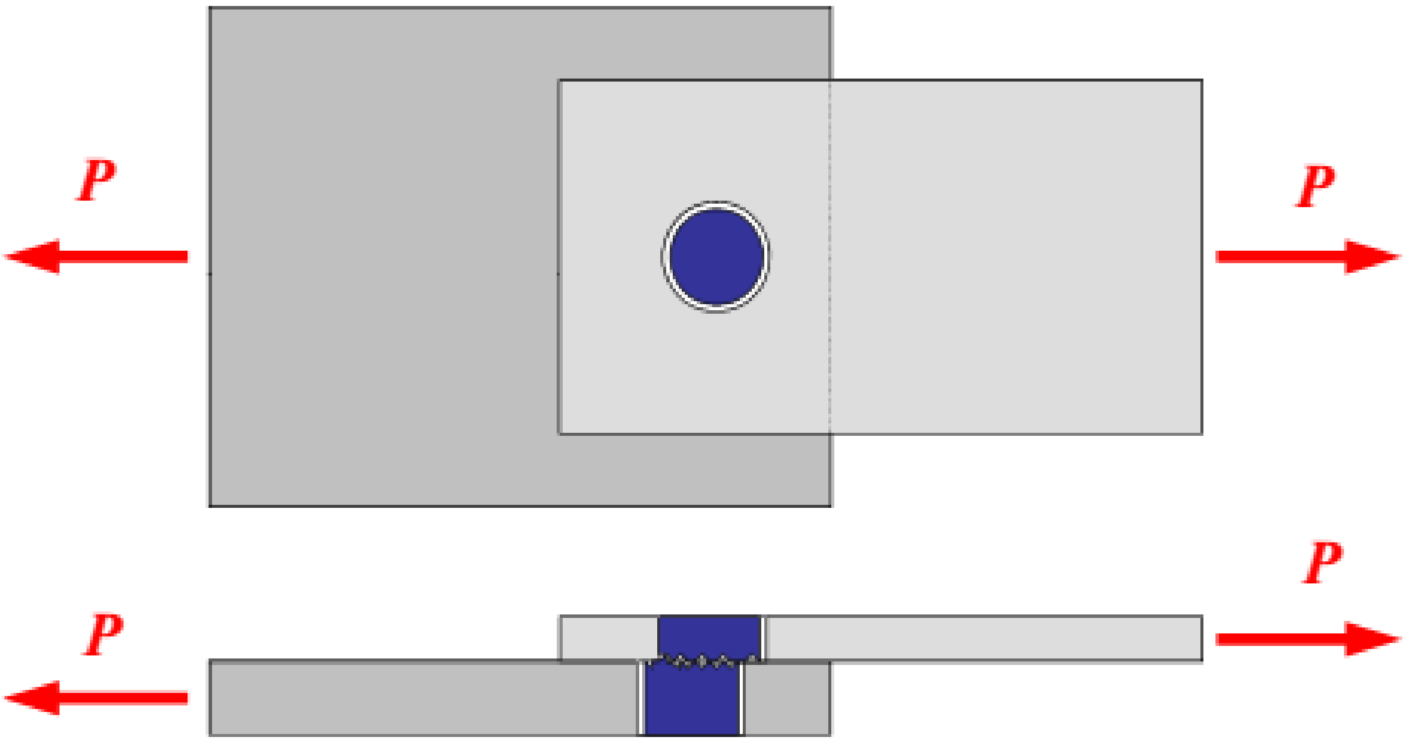
TENSÃO DE CISALHAMENTO

Exemplo:
Junta sobreposta simples



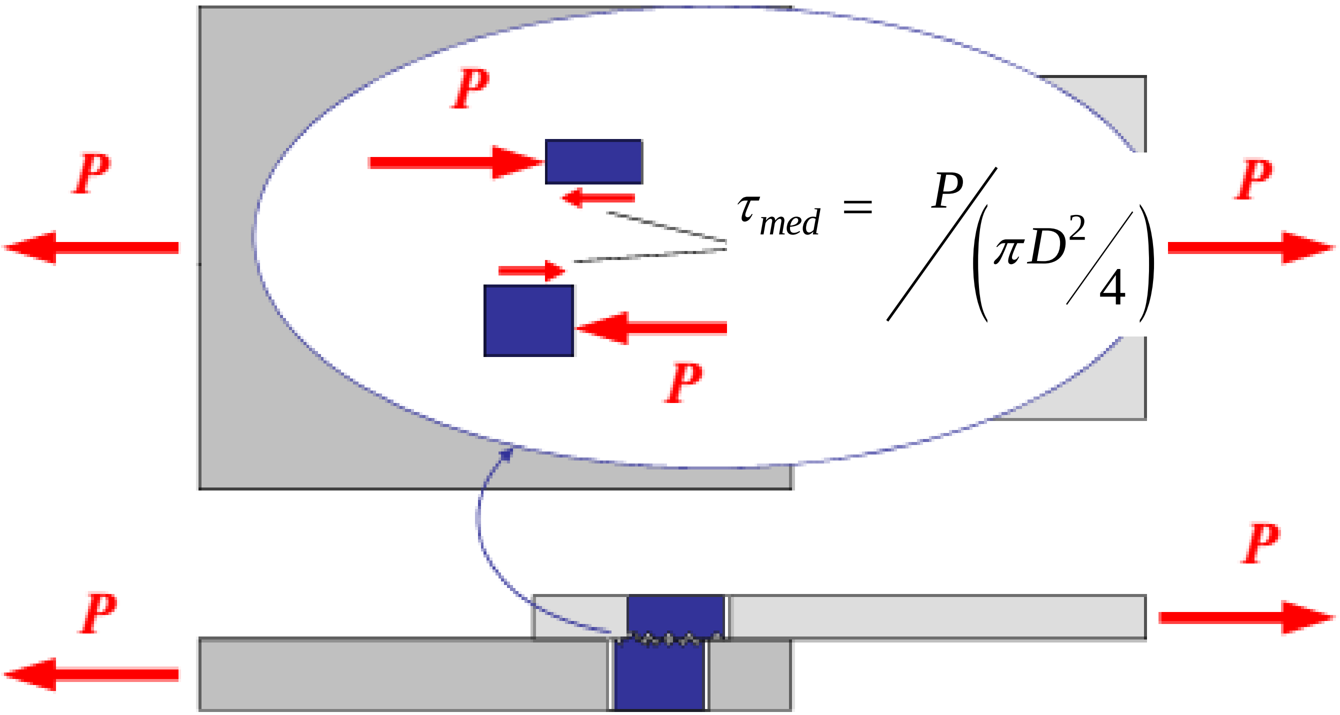
Tensão de Cisalhamento

Exemplo:
Junta sobreposta simples (*ruptura por cisalhamento*)



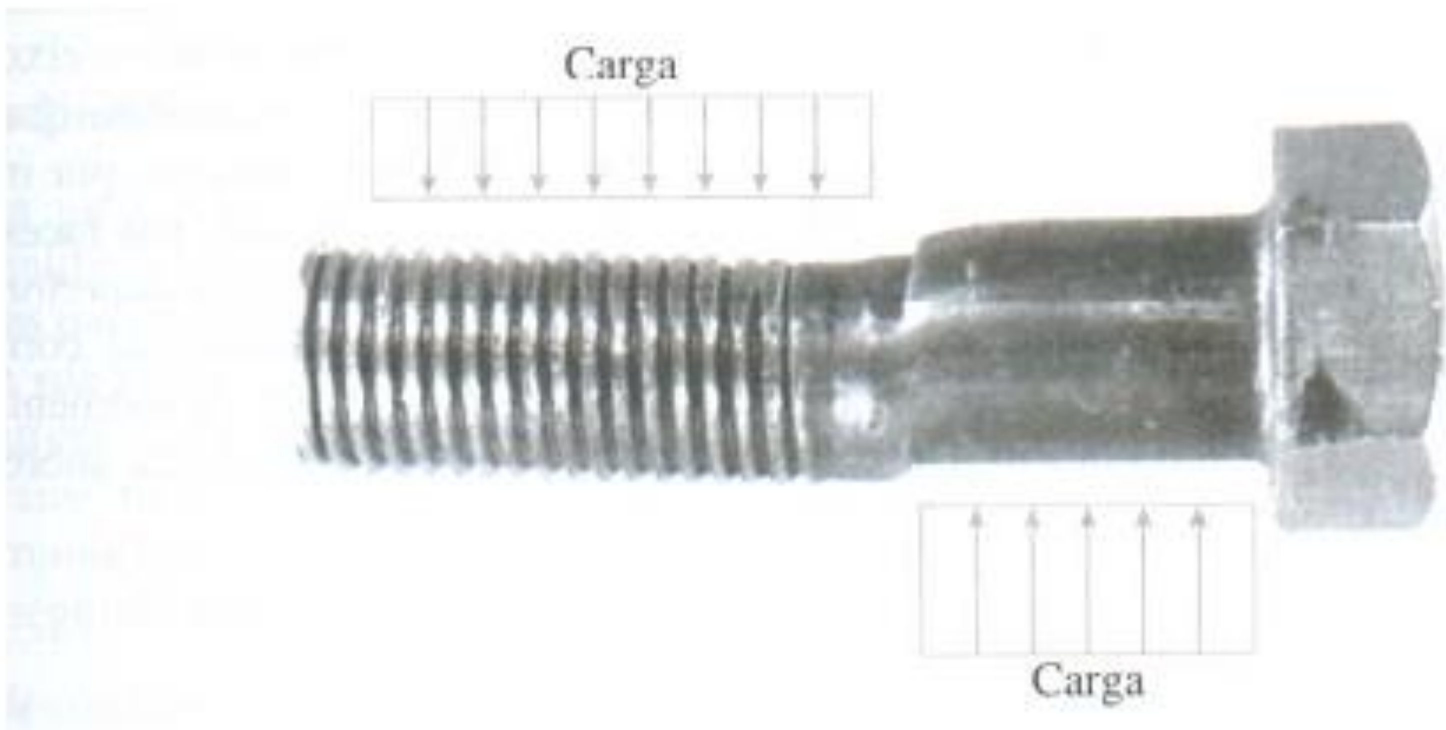
Tensão de Cisalhamento

Exemplo:
Junta sobreposta simples (*ruptura por cisalhamento*)



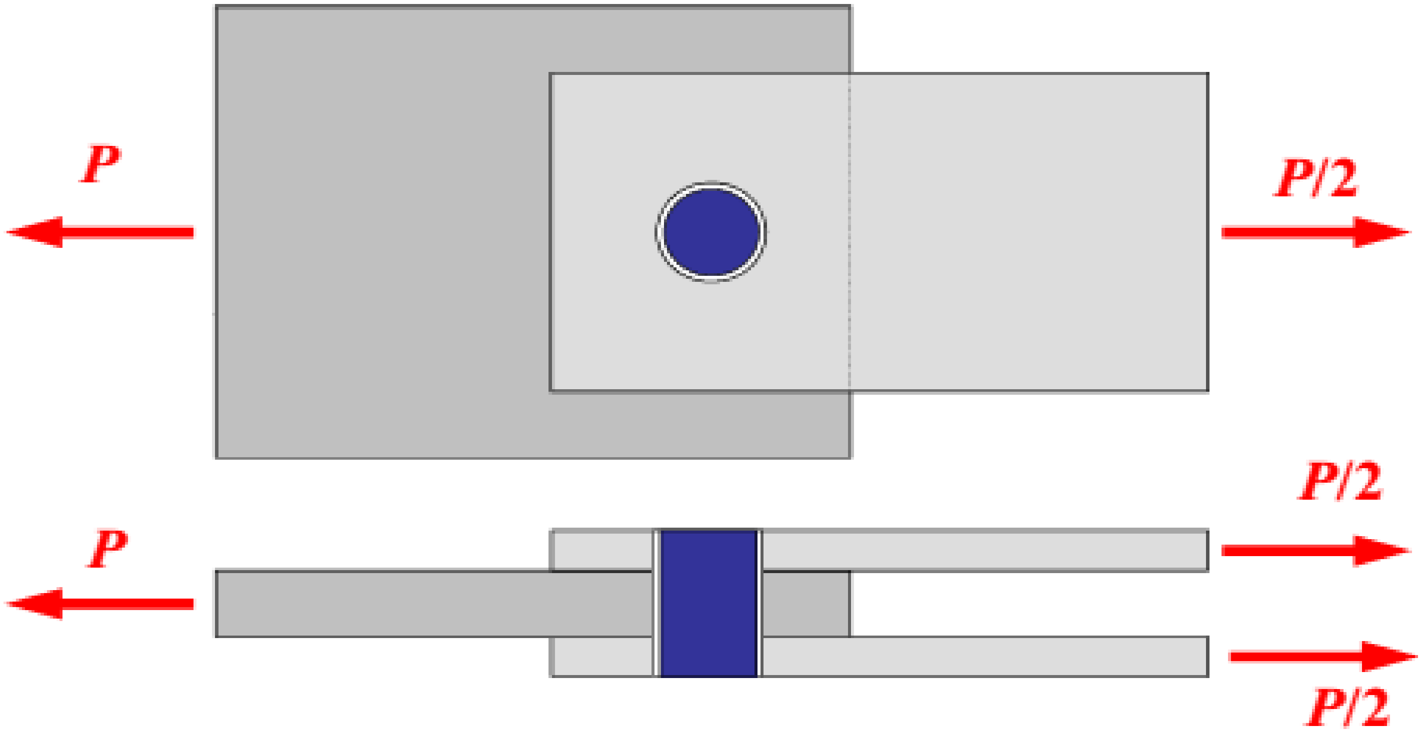
Tensão de Cisalhamento

Exemplo:
Junta sobreposta simples (*ruptura por cisalhamento*)



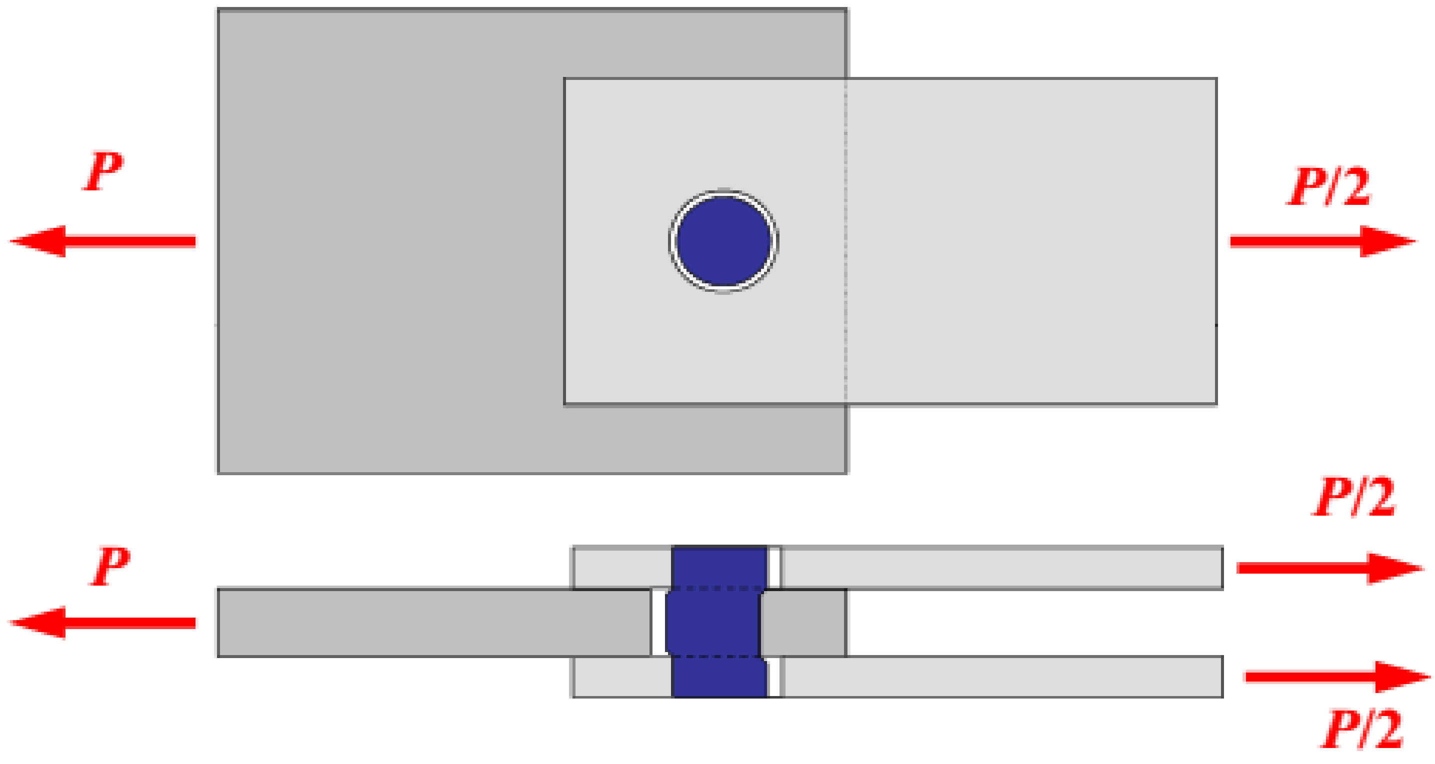
Tensão de Cisalhamento

Exemplo:
Junta sobreposta dupla



Tensão de Cisalhamento

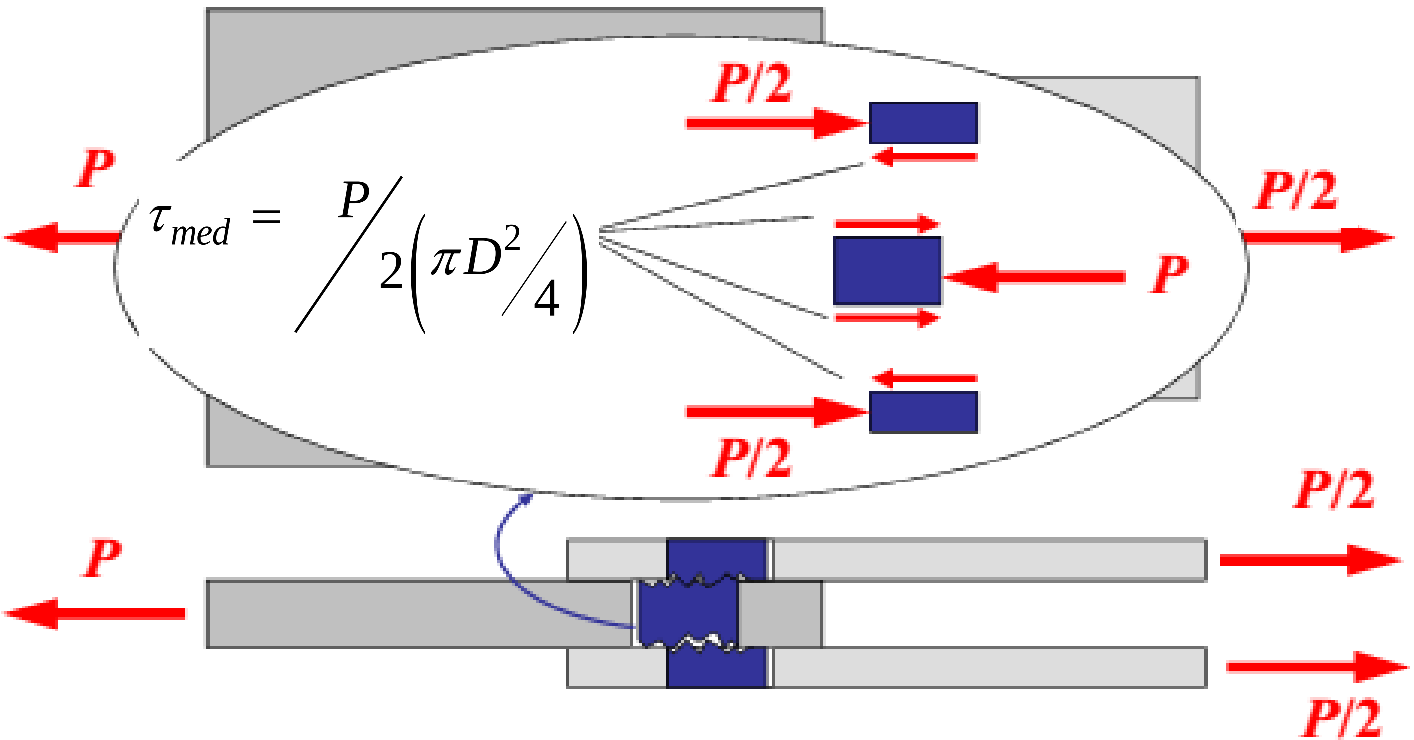
Exemplo:
Junta sobreposta dupla



Tensão de Cisalhamento

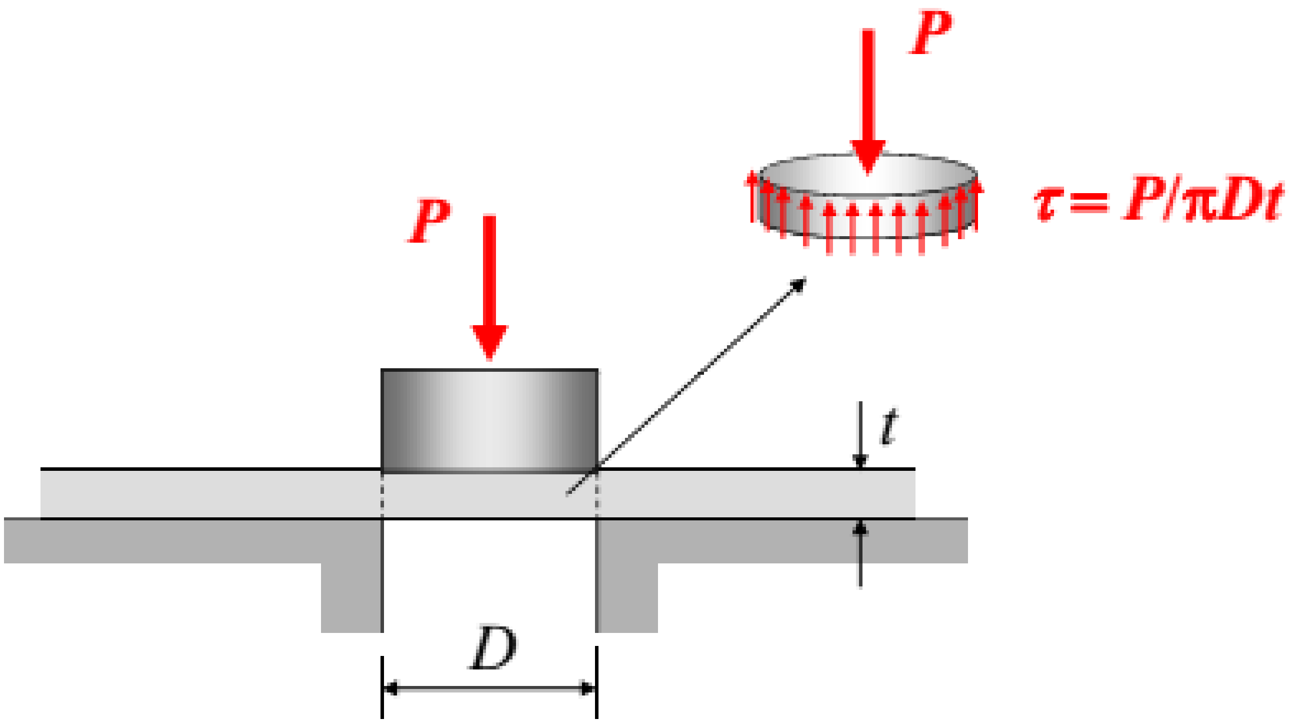
Exemplo:

Junta sobreposta dupla (*ruptura por cisalhamento*)



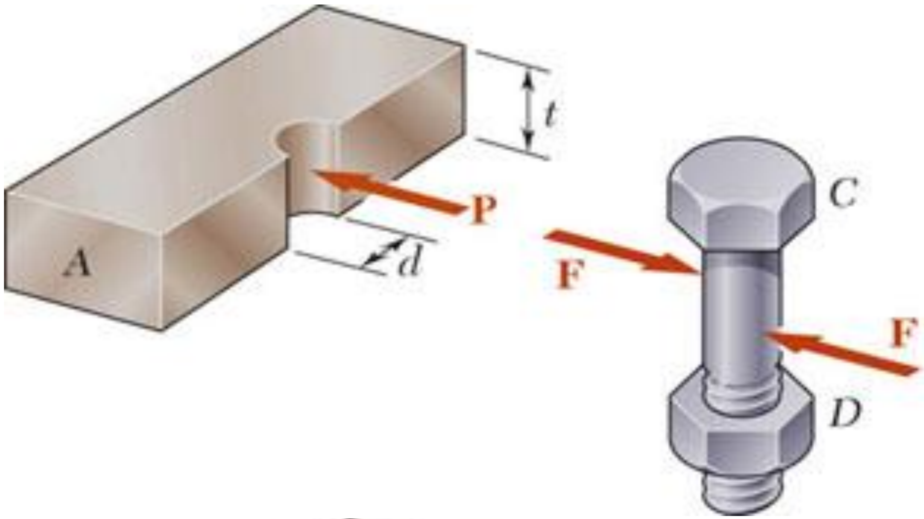
Tensão de Cisalhamento

Exemplo: Punção



Temos sempre que atentar para qual área está sofrendo cisalhamento

Tensão de Esmagamento



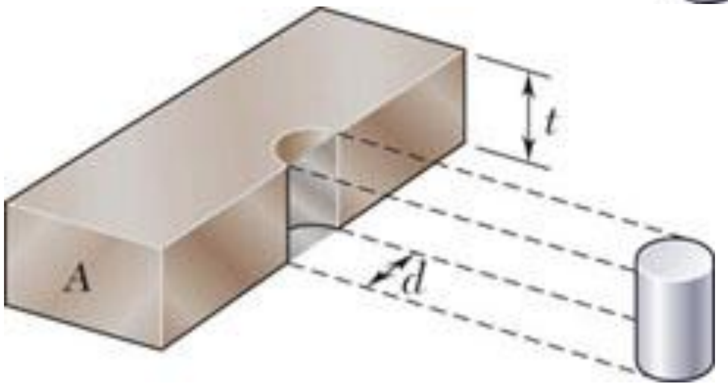


Figura 2.11

Parafusos, rebites e pinos criam tensões ao longo da superfície de esmagamento, ou de contato, nos elementos aos quais eles se conectam.

A resultante da distribuição de força na superfície é igual e oposta à força exercida sobre o pino.

A intensidade da força média correspondente é chamada de tensão de esmagamento, dada por:

$$\boxed{\sigma_e = \frac{P}{A} = \frac{P}{t\,d}} \qquad (2.16)$$

Exemplo de análise de projeto

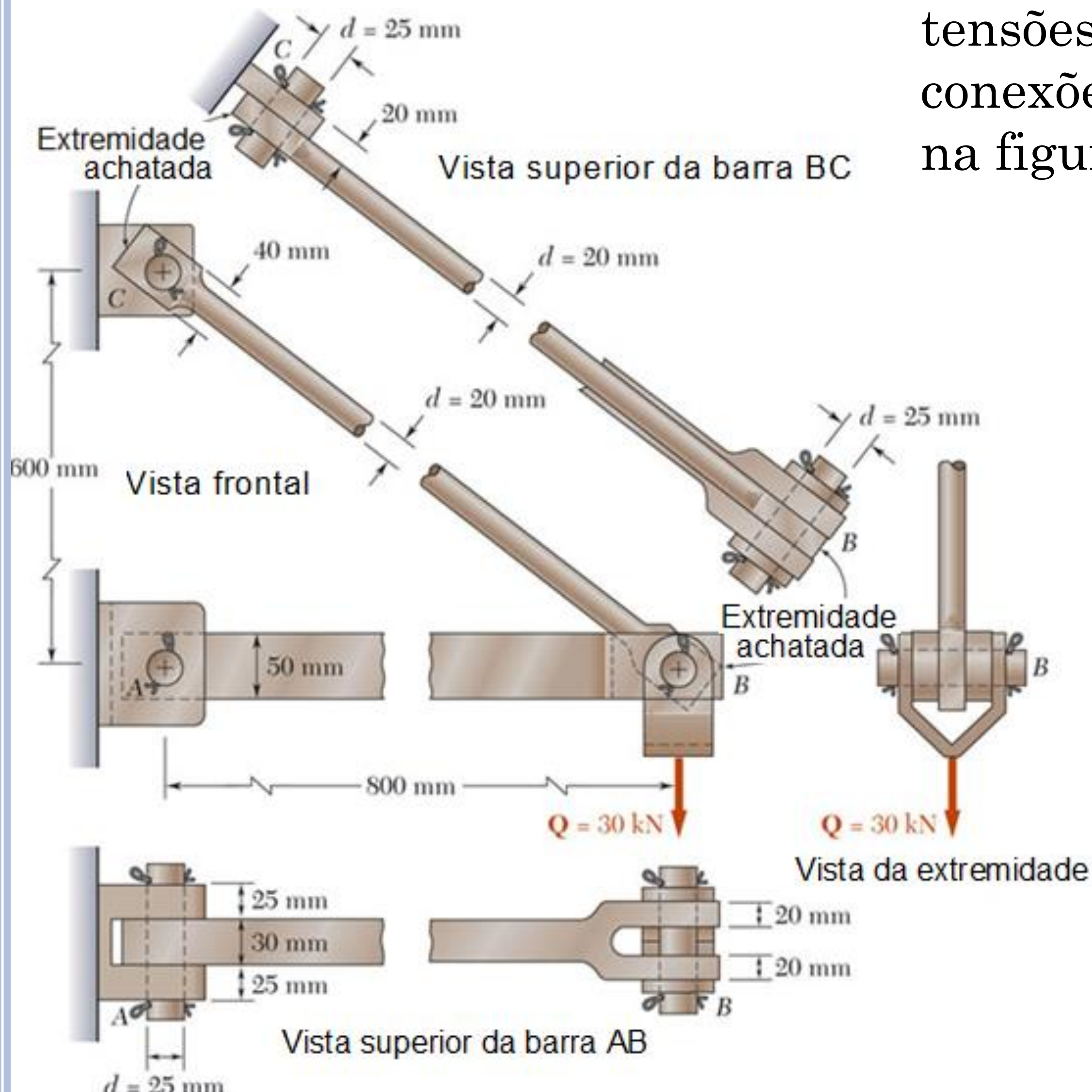


Figura 2.12

Exemplo 2.1: Determinar as tensões nas barras e conexões da estrutura mostrada na figura 2.12

A partir de uma análise estática :

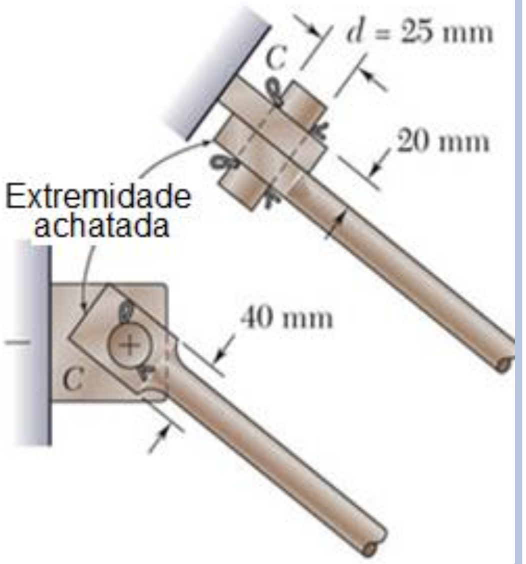
F_{AB} = 40 kN (compressão)
F_{BC} = 50 kN (tração)

Deve-se considerar a máxima tensão normal em AB e BC, e as tensões de cisalhamento e de esmagamento em cada conexão.

Exemplo de análise de projeto (Tensão normal)

A barra está com uma tensão normal devido uma força axial de 50 kN (tração).

No centro da barra, a tensão normal média na seção transversal circular (A =314x10^{-6} m^2) é $\boldsymbol{\sigma_{BC}}$ **= +159 MPa.**



Nas extremidades achatadas da barra, a menor área transversal é,

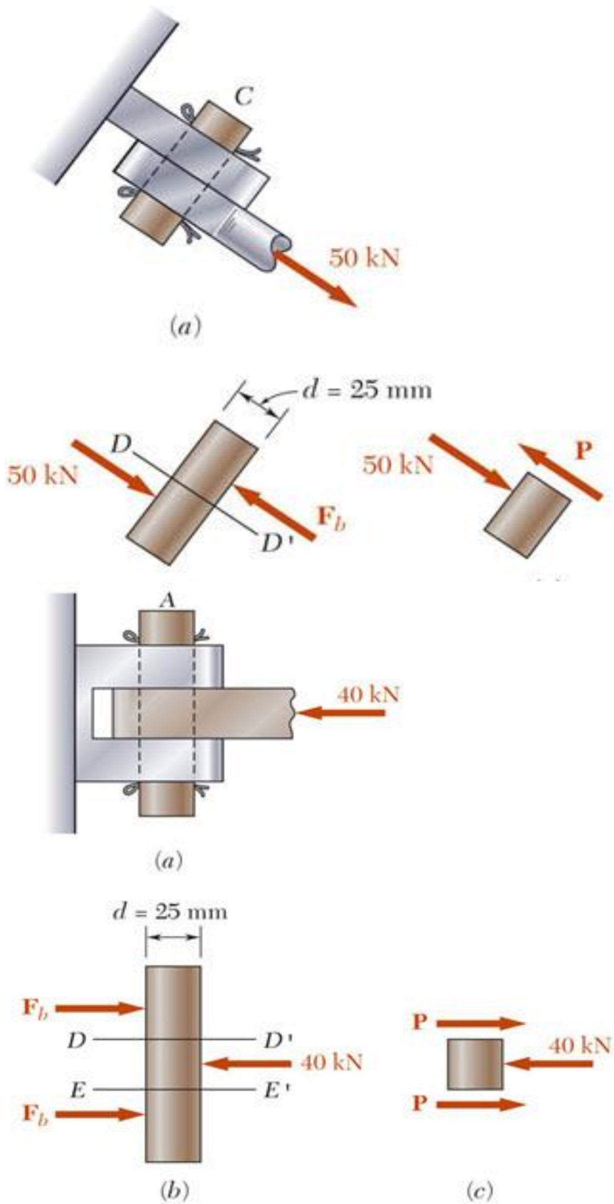
$$A = (20\,\mathrm{mm})(40\,\mathrm{mm} - 25\,\mathrm{mm}) = 300\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2$$

$$\sigma_{BC,ext} = \frac{P}{A} = \frac{50\times10^3\,N}{300\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2} = 167\,\mathrm{MPa}$$

A barra AB é comprimida com uma força axial de 40 kN. Sendo a área da seção transversal 1500 mm^2, tensão normal média de **-26,7 MPa**.

As seções de área mínima nas extremidades da barra AB não sofrem tensões devido a compressão da barra. A força compressiva só vai até o pino, sendo nula após o mesmo.

Exemplo de análise de projeto
(Tensão Cisalhante nas conexões)



A área da seção transversal de pinos em A, B e C,

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{25\,\text{mm}}{2}\right)^2 = 491\times10^{-6}\,\text{m}^2$$

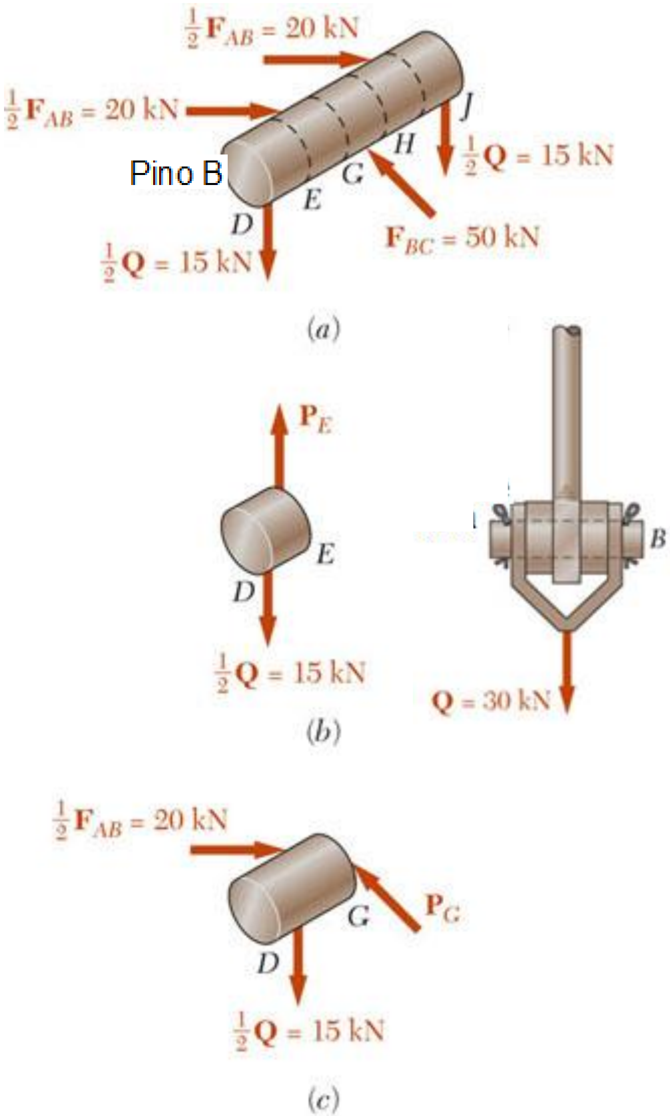
A força no pino em C é igual à força exercida pela barra BC, o valor médio da tensão de cisalhamento no pino em C é

$$\tau_{C,med} = \frac{P}{A} = \frac{50\times10^3\,\text{N}}{491\times10^{-6}\,\text{m}^2} = 102\,\text{MPa}$$

O pino em A está em cisalhamento duplo, portanto a força atuante na barra AB é distribuída em duas áreas:

$$\tau_{A,med} = \frac{P}{A} = \frac{40/2\ \text{kN}}{491\times10^{-6}\,\text{m}^2} = 40.7\,\text{MPa}$$

Exemplo de análise de projeto
(Tensão Cisalhante nas conexões)



Dividindo o pino B em 5 partes para determinar a seção com a maior força cortante,

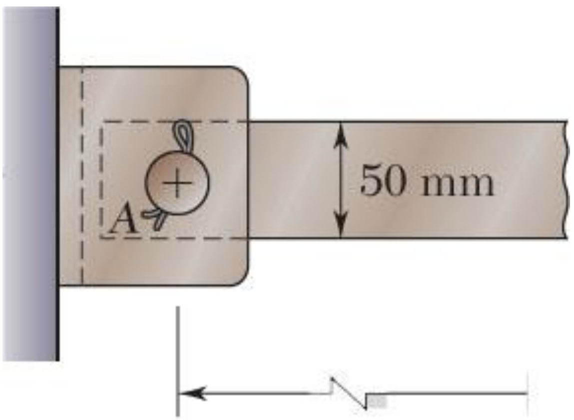
$$P_E = 15\,\text{kN}$$

$$P_G = 25\,\text{kN} \text{ (Maior)}$$

A tensão de cisalhamento média correspondente é:

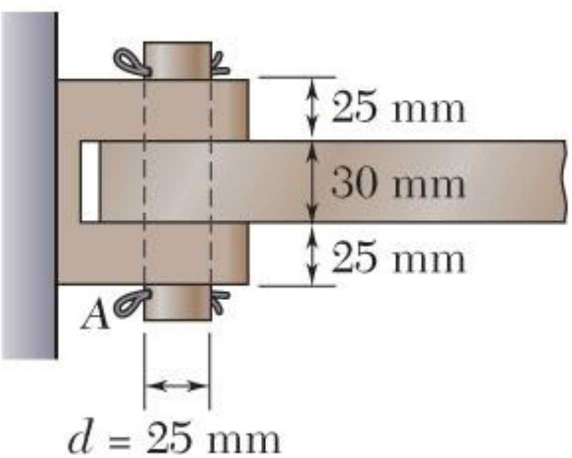
$$\tau_{B,med} = \frac{P_G}{A} = \frac{25\,\text{kN}}{491 \times 10^{-6}\,\text{m}^2} = 50.9\,\text{MPa}$$

Exemplo de análise de projeto
(Esmagamento na conexões)



Para determinar a tensão de esmagamento nominal em A na barra AB, temos t = 30 mm e d = 25 mm,

$$\sigma_e = \frac{P}{td} = \frac{40\,\mathrm{kN}}{(30\,\mathrm{mm})(25\,\mathrm{mm})} = 53.3\,\mathrm{MPa}$$



Para determinar a tensão de esmagamento no apoio em A, temos t = 2 (25 mm) = 50 mm e d = 25 mm,

$$\sigma_e = \frac{P}{td} = \frac{40\,\mathrm{kN}}{(50\,\mathrm{mm})(25\,\mathrm{mm})} = 32.0\,\mathrm{MPa}$$

Proceder da mesma forma para calcular os esmagamentos em B e C.

Tensão em um plano Oblíquo

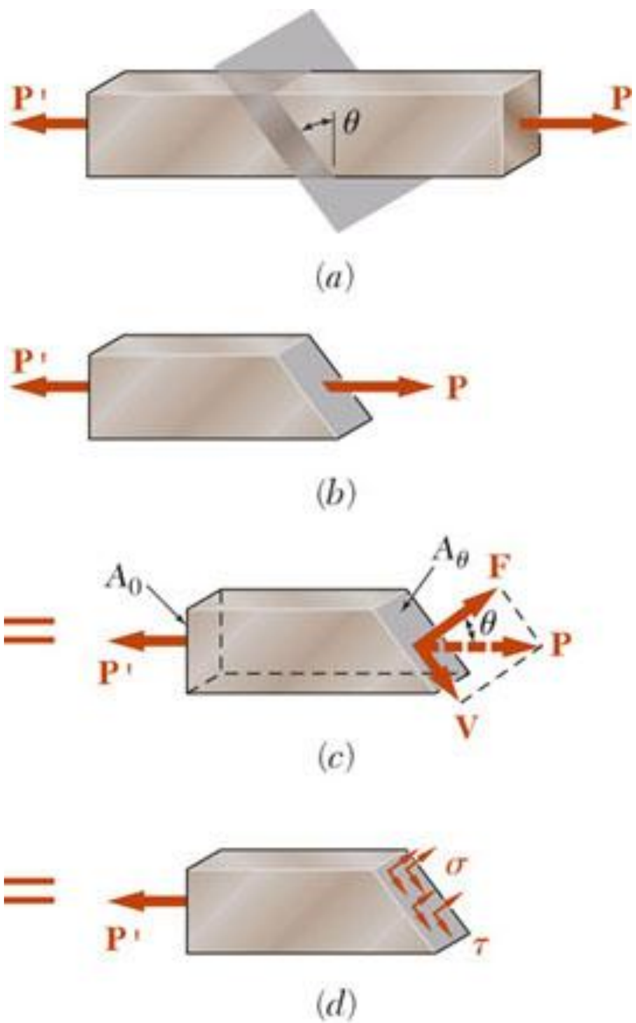


Figura 2.13

Passe uma seção através da barra formando um ângulo θ com o plano normal.

Das condições de equilíbrio, as
forças distribuídas sobre o plano devem ser equivalentes à força P.

Decompondo P em componentes normais e tangenciais à seção oblíqua,

$$F = P\cos\theta \qquad V = Psen\theta$$

As tensões normais e de cisalhamento média sobre o plano inclinado são

$$\sigma_\theta = \frac{F}{A_\theta} = \frac{P\cos\theta}{A_0/\cos\theta} = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{V}{A_\theta} = \frac{Psen\theta}{A_0/\cos\theta} = \frac{P}{A_0}sen\theta\cos\theta$$

Tensão em um plano Oblíquo

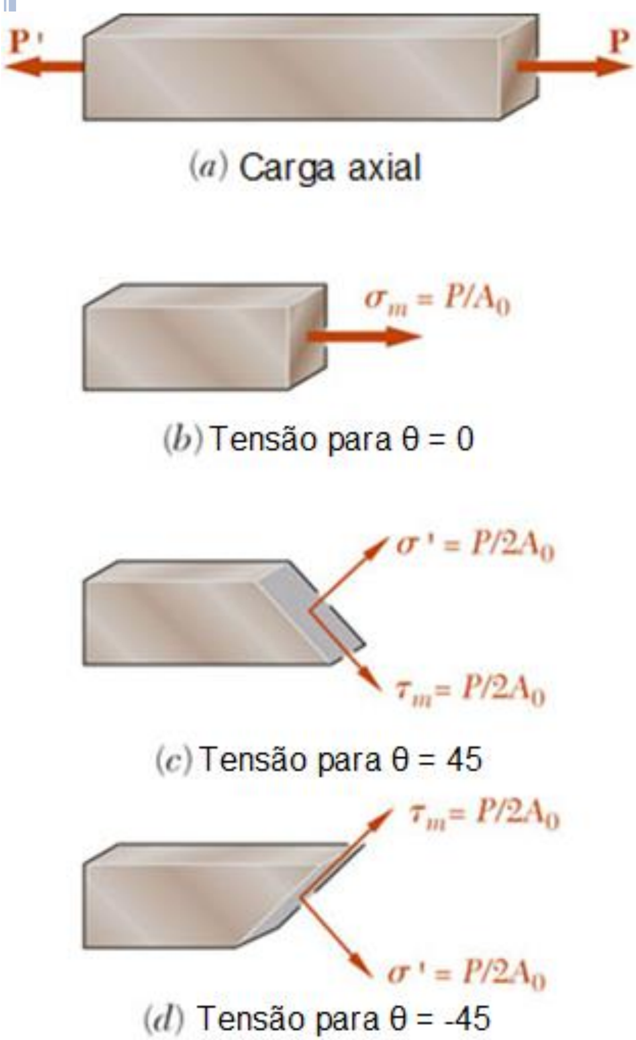


Figura 2.14

A tensão máxima normal ocorre quando o plano de referência é perpendicular ao eixo da barra (θ=0),

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A_0} \quad \text{e} \quad \tau' = 0$$

A tensão máxima de cisalhamento ocorre para uma inclinação de $\pm$ 45 º com relação ao eixo da barra,

$$\tau_{máx} = \frac{P}{A_0} sen 45 \cos 45 = \frac{\sigma_{máx}}{2} = \sigma'$$

Ângulo θ será positivo quando tivermos que girar no sentido anti-horário, com relação ao eixo de referência, pra chegar ao plano escolhido. E será negativo quando girarmos no sentido horário.

Fator de Segurança

Elementos estruturais e de máquinas devem ser concebidos de tal forma que as tensões de trabalho (solicitações) sejam menores do que a resistência final do material (resistência).

Propriedade do material

FS = Fator de segurança

$$FS = \frac{\sigma_L}{\sigma_{\text{atuante}}} = \frac{\text{Tensão limite}}{\text{Tensão máxima atuante}}$$

Considerações para um fator de segurança:

- Incerteza nas propriedades do material
- Incerteza de cargas
- Incerteza das análises
- Número de ciclos de carga
- Tipos de falha
- Requisitos de manutenção e os efeitos de deterioração
- Importância do componente para a integridade de toda estrutura
- Risco à vida e à propriedade
- Influência sobre a função da máquina

EXERCÍCIOS

EXERCÍCIOS

Exercício 2.1: Duas barras cilíndricas AB e BC são soldadas uma à outra em B e submetidas ao carregamento mostrado na figura 2.15. Determine a intensidade da força P para a qual a tensão normal de tração na barra AB é duas vezes a intensidade da tensão de compressão na barra BC

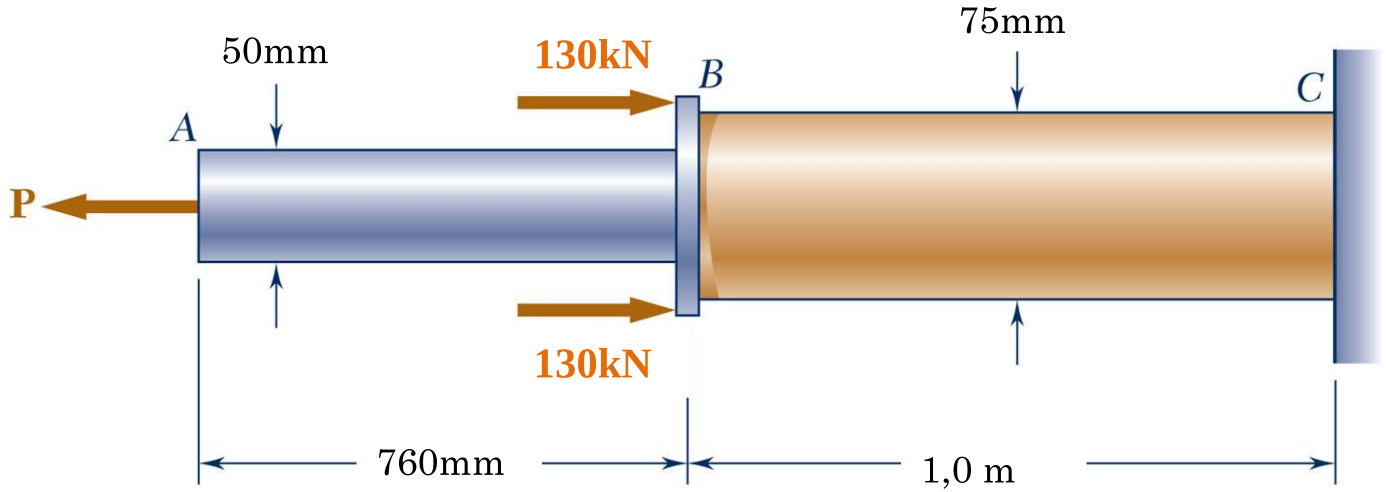


Figura 2.15

EXERCÍCIOS

Exercício 2.2: São aplicadas duas forças ao suporte BCD mostrado na figura 2.16.

a) Sabendo que a barra de controle AB deve ser feita de aço e ter um limite de tensão normal de 600MPa, determine o diâmetro da barra para o qual o coeficiente de segurança com relação à barra seja 3,3.

b) Sabendo que o pino em C deve ser feito de um aço com limite de tensão de cisalhamento de 350MPa, determine o diâmetro do pino C para o qual o coeficiente de segurança com relação ao cisalhamento também seja 3,3.

c) Determine a espessura necessária para as barras de apoio em C sabendo que a tensão de esmagamento admissível do aço é 300MPa

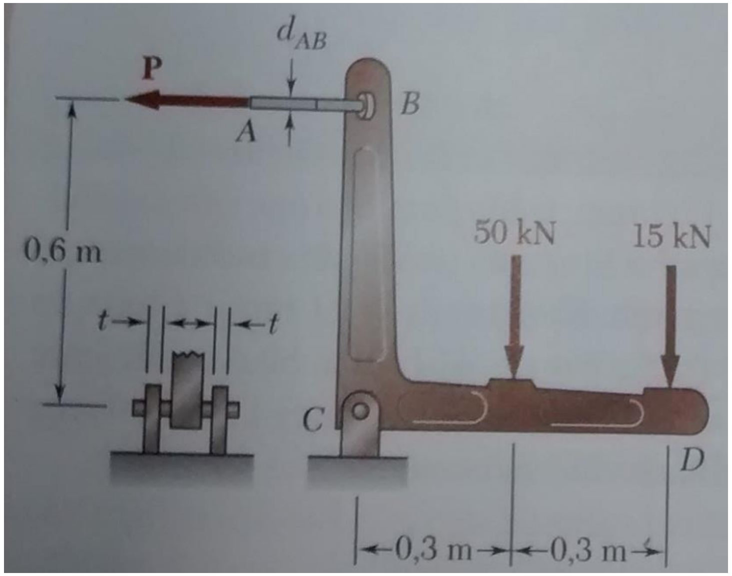


Figura 2.16

EXERCÍCIOS

Exercício 2.3: Dois elementos de madeira de seção transversal retangular são unidos por uma emenda colada, como mostra a figura 2.17. Sabendo que a máxima tensão de tração admissível normal à emenda é 560kPa, determine a maior carga P que poderá ser aplicada.

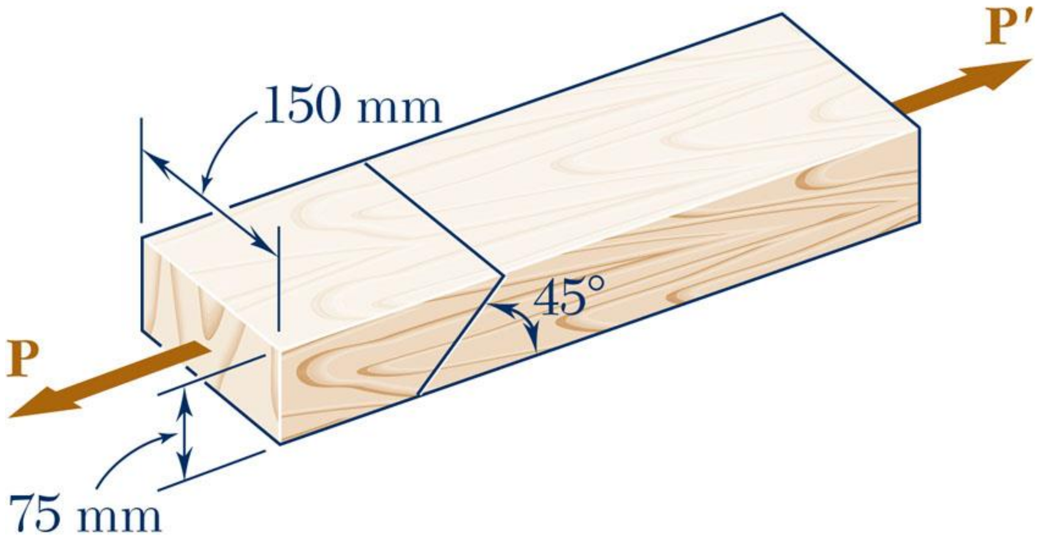


Figura 2.17

EXERCÍCIOS

Exercício 2.4: Um aro de aço em forma de losango ABCD com comprimento total de 1,2m e com 10mm de diâmetro é colocado para envolver uma barra de alumínio AC com 24mm de diâmetro, conforme mostrado na figura 2.18. São utilizados os cabos BE e DF, cada um com 12mm de diâmetro para aplicar a carga Q. O limite de resistência do aço é 480 MPa e que o limite de resistência do alumínio utilizado é 260MPa. Determine a máxima carga Q que poderá ser aplicada, adotando-se um coeficiente de segurança igual a 3 para o aro de aço e a barra de alumínio.

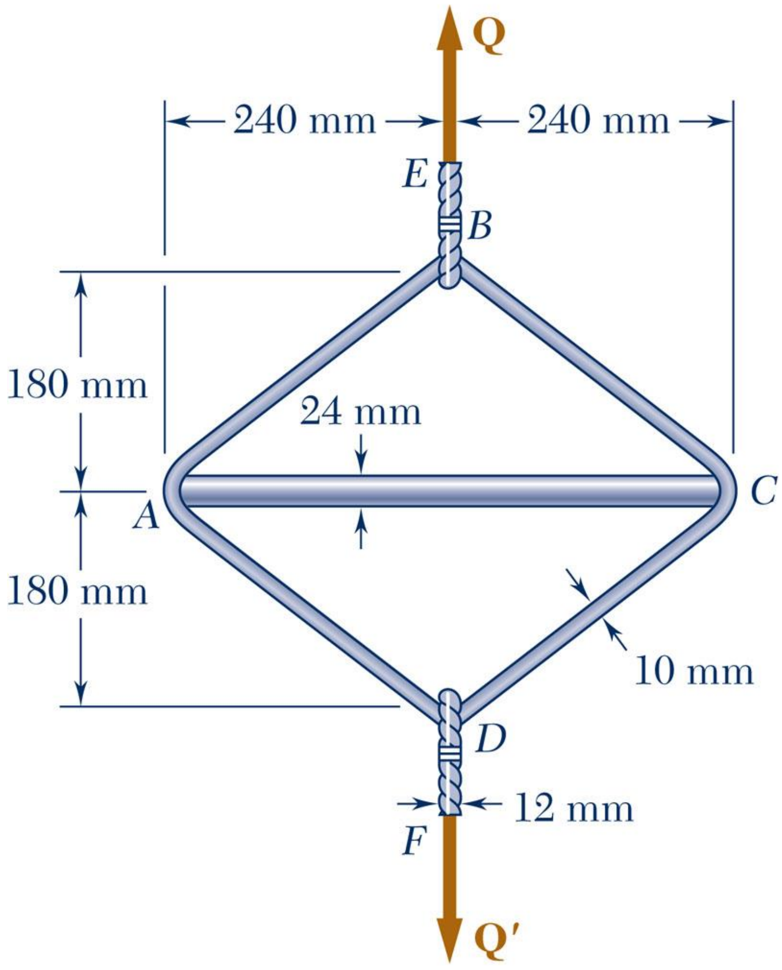


Figura 2.18

EXERCÍCIOS

Exercício 2.5: Os dois elementos de madeira mostrados na figura 2.19 suportam uma carga de 16kN e são unidos por juntas de madeira perfeitamente coladas pela superfície de contato. A tensão de cisalhamento limite da cola é de 2,5 MPa e o espaçamento entre os elementos é de 6mm. Determine o comprimento L necessário para que as juntas trabalhem com um coeficiente de segurança igual a 2,75.

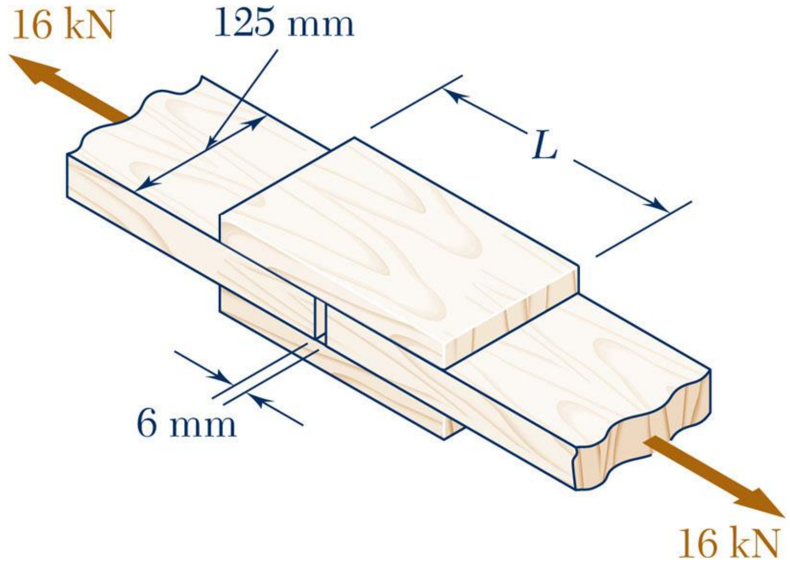


Figura 2.19