Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

CÁLCULO VETORIAL E EQUILÍBRIO DE PARTÍCULAS

Cálculo vetorial

1.1. Escalares e vetores
1.2. Operações vetoriais
1.3. Adição de forças vetoriais
1.4. Adição de um sistema de forças coplanares
1.5. Vetores cartesianos
1.6. Adição e subtração de vetores cartesianos
1.7. Vetores posição
1.8. Vetor força orientado ao longo de uma reta
1.9. Produto escalar

Equilíbrio de partículas

1.10. Condição de equilíbrio de um ponto material
1.11. Diagrama de corpo livre
1.12. Sistemas de forças coplanares
1.13. Sistemas de forças tridimensional

CÁLCULO VETORIAL

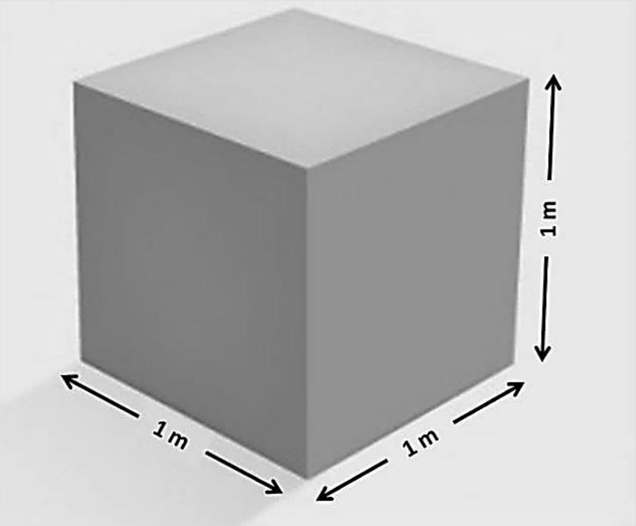
Cálculo vetorial

1.1. Escalares e vetores
1.2. Operações vetoriais
1.3. Adição de forças vetoriais
1.4. Adição de um sistema de forças coplanares

1.1. ESCALARES E VETORES

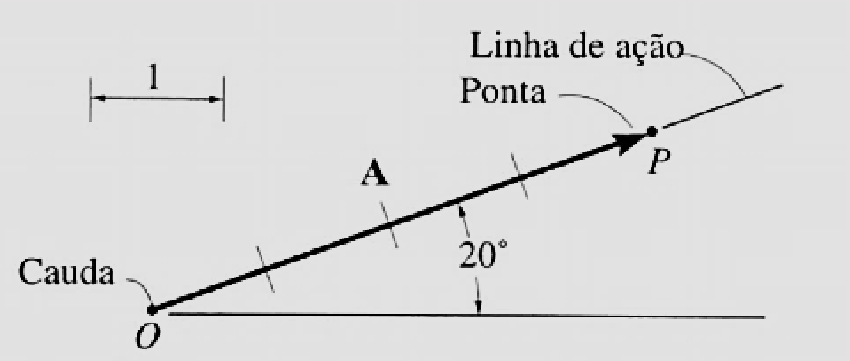
Escalar:

- Quantidade caracterizada por um número positivo ou negativo é chamada escalar. Por exemplo, massa, volume e comprimento.
- O escalar é definido pela letra *A.*



Vetor:

- Caracterizado pela dependência de três elementos fundamentais, ou seja, representa um ente matemático que possui intensidade, direção e sentido. Por exemplo, posição, força e momento.
- E vetor é definido como $\vec{A}$ ou **A.**



1.2. OPERAÇÕES VETORIAIS

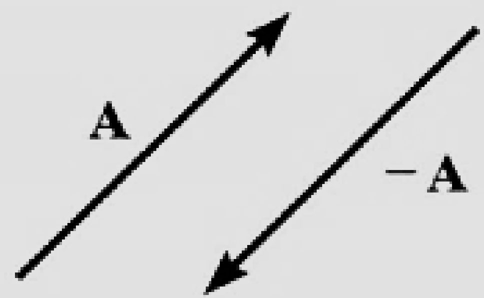
Multiplicação de um vetor por um escalar:

- O produto do vetor **A** por um escalar *a,* sendo *a***A,** é definido como o vetor intensidade |*a***A**|;

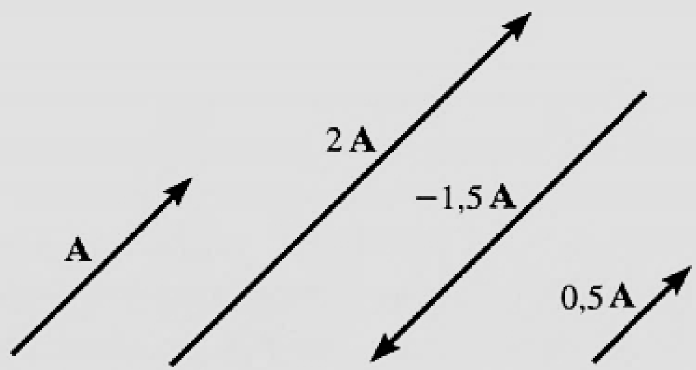
- O sentido de |*a***A**| é mesmo de **A;**

- O valor negativo de um vetor é calculado multiplicando-o por (-1);

- A divisão de um é definida como **A**/*a* = (1/*a*)**A**, com $a \neq 0$.



Vetor A e sua contrapartida negativa



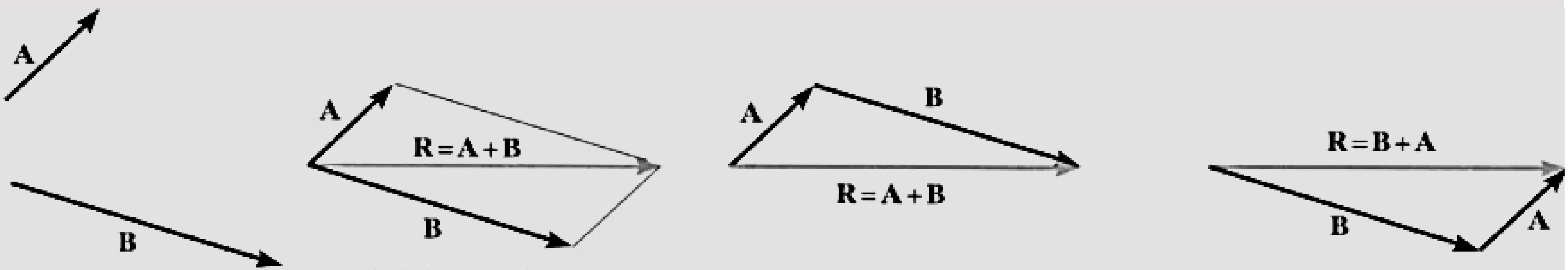
Multiplicação e divisão escalares

1.2. OPERAÇÕES VETORIAIS

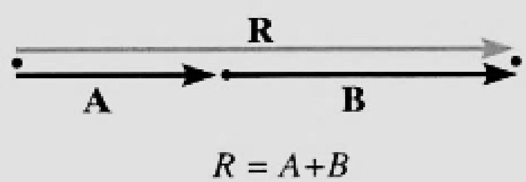
Adição vetorial:

- Dois vetores, **A** e **B**, que podem ser força ou posição, podem ser somados para formar um **vetor resultante**, **R** = **A** + **B**;

- **R** = **A** + **B** = **B** + **A**;



(a) Lei do paralelogramo (b) Construção do triângulo (c) Construção do triângulo (d)



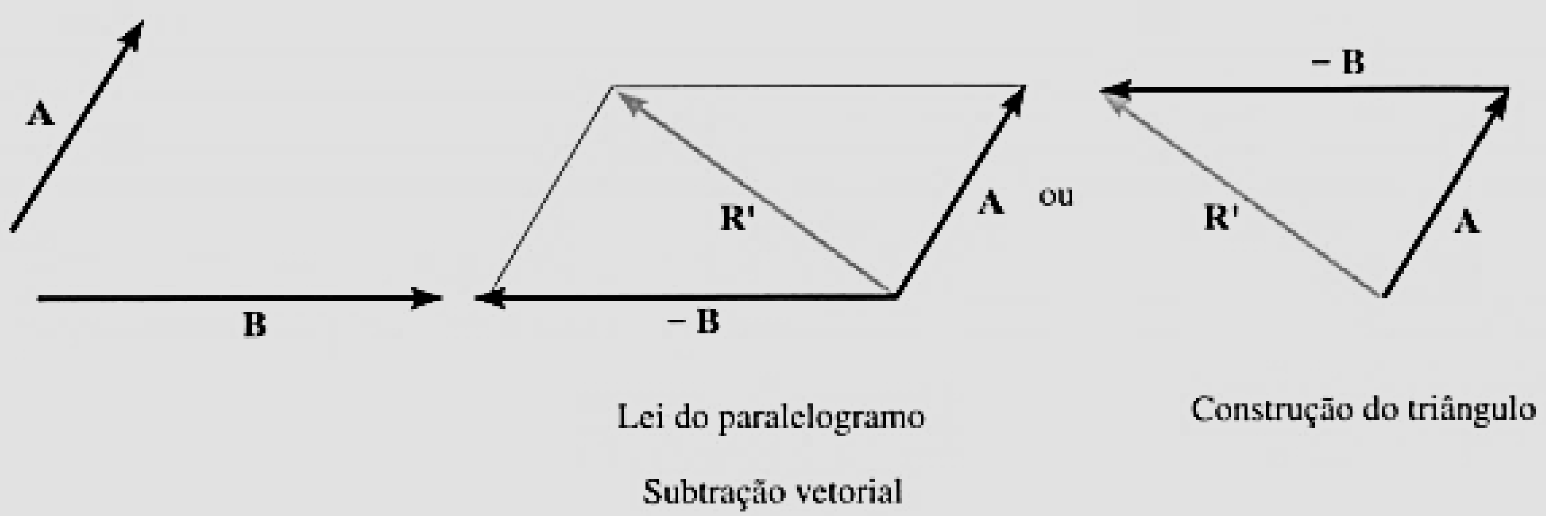
Adição de vetores colineares

1.2. OPERAÇÕES VETORIAIS

Subtração vetorial:

- A **resultante diferença** entre dois vetores, **A** e **B**, pode ser expressa como **R’** = **A** – **B** = **A** + (-**B**)**;**

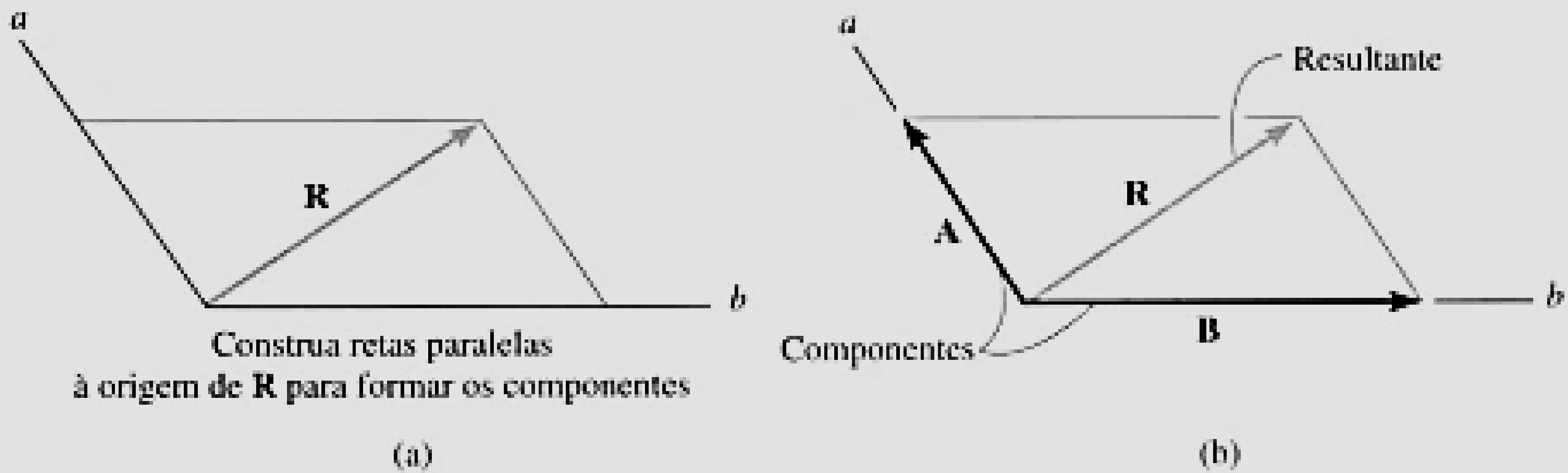
- A subtração entre vetores é definida como um caso especial de adição; sendo assim, as regras da adição vetorial também se aplicam à subtração.



1.2. OPERAÇÕES VETORIAIS

Decomposição de vetores:

- Um vetor pode ser decomposto em dois **componentes**, o qual possui linhas de ação conhecidas, usando-se a *lei do paralelogramo*;



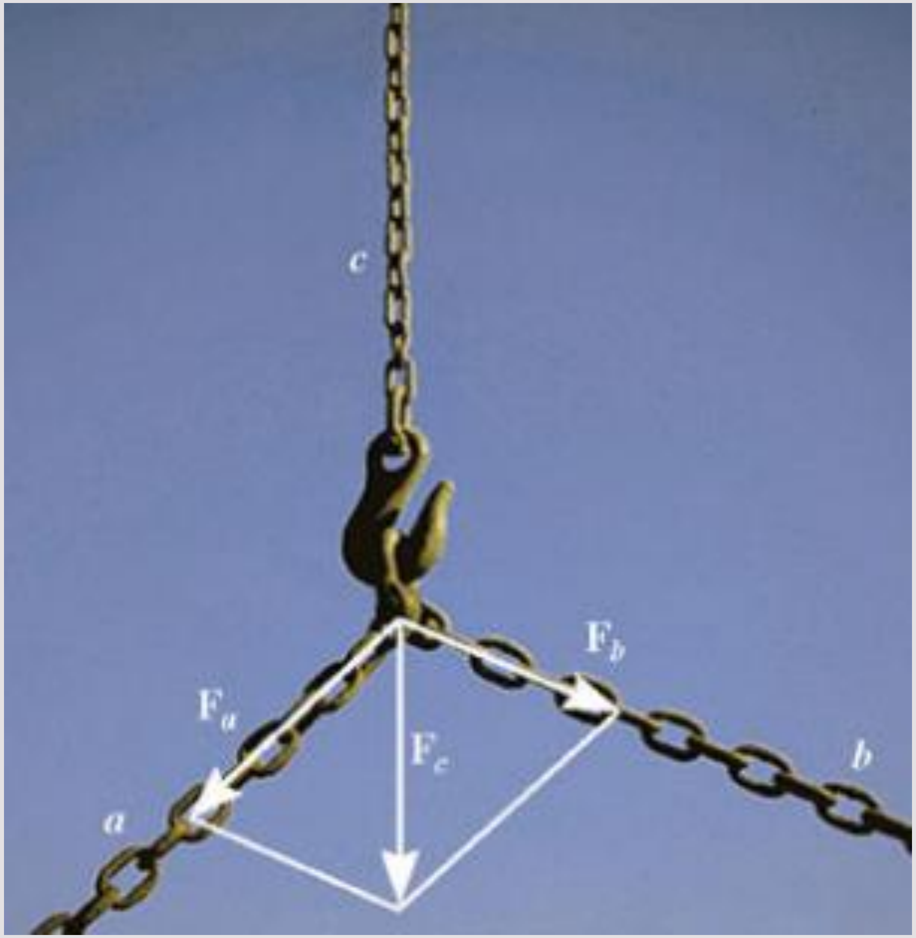
Decomposição de um vetor

1.3. ADIÇÃO DE FORÇAS VETORIAIS

- A **força** é uma quantidade vetorial, uma vez que possui intensidade, direção e sentido;

- Sua soma é especificada conforme a *lei do paralelogramo*;

- Dois problemas comuns em estática são: a **determinação da força resultante**, conhecendo-se seus componentes; e a **decomposição de uma força** conhecida em dois (ou mais) componentes;

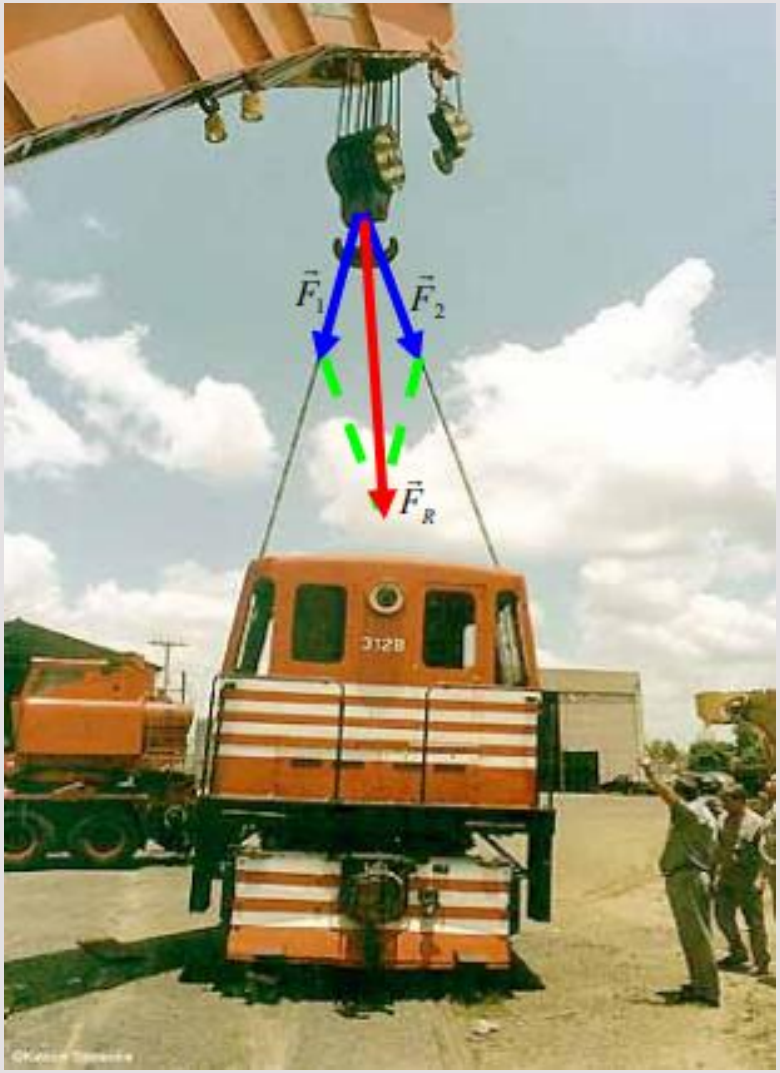


1.3. ADIÇÃO DE FORÇAS VETORIAIS

- A **força** é uma quantidade vetorial, uma vez que possui intensidade, direção e sentido;

- Sua soma é especificada conforme a *lei do paralelogramo*;

- Dois problemas comuns em estática são: a **determinação da força resultante**, conhecendo-se seus componentes; e a **decomposição de uma força** conhecida em dois (ou mais) componentes;

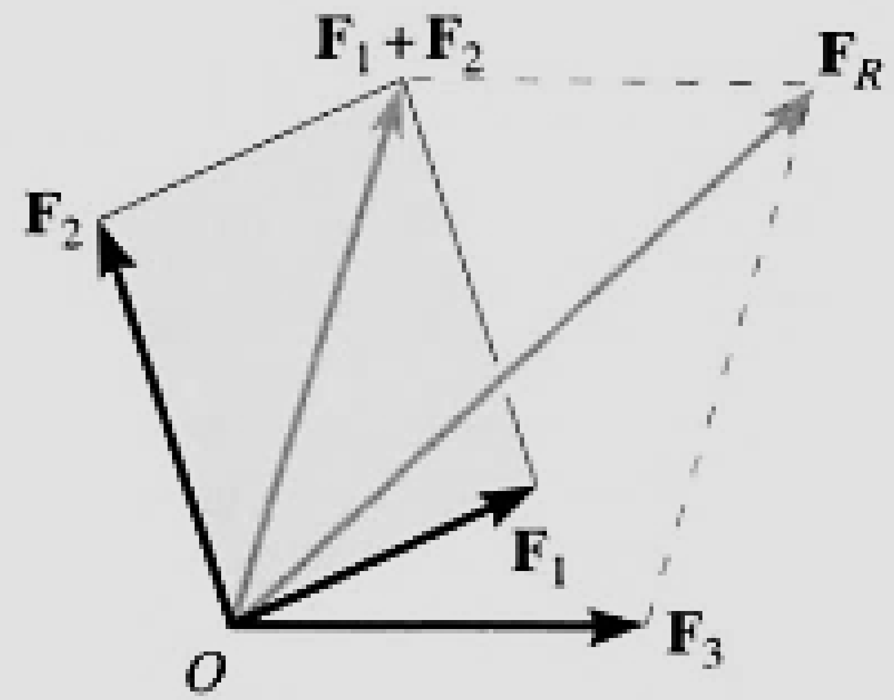


1.3. ADIÇÃO DE FORÇAS VETORIAIS

- Se a soma envolve **mais de duas forças**, é preciso realizar aplicações sucessivas da lei do paralelogramo;

- O uso da *lei do paralelogramo* para adicionar mais de duas forças, geralmente requer cálculos extensos de geometria e trigonometria para determinar os valores numéricos da intensidade e da direção da resultante;

- Problemas desse tipo podem ser resolvidos usando o **método dos componentes retangulares**.



1.3. ADIÇÃO DE FORÇAS VETORIAIS

<u>Em resumo:</u>

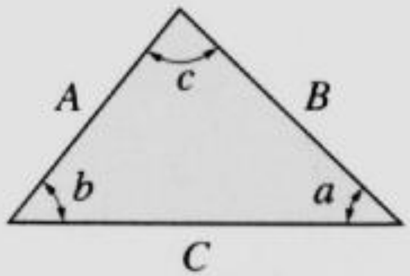
- Problemas que envolvem duas forças podem ser resolvidos traçando-se um desenho esquemático usando a *lei do paralelogramo*, de modo a determinar as componentes da força e consequentemente a sua resultante, a partir de eixos orientados;

- Identifica-se todas as intensidades das forças conhecidas e desconhecidas e os ângulos em um desenho esquemático;

- Define-se o triângulo de forças;

- A intensidade da força resultante é determinada pela lei dos cossenos e sua direção, pela lei dos senos;

- As intensidade das forças componentes são determinadas pela lei dos senos.



Lei dos senos:

$$\frac{A}{\text{sen } a} = \frac{B}{\text{sen } b} = \frac{C}{\text{sen } c}$$

Lei dos cossenos:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos c}$$

1.3. ADIÇÃO DE FORÇAS VETORIAIS

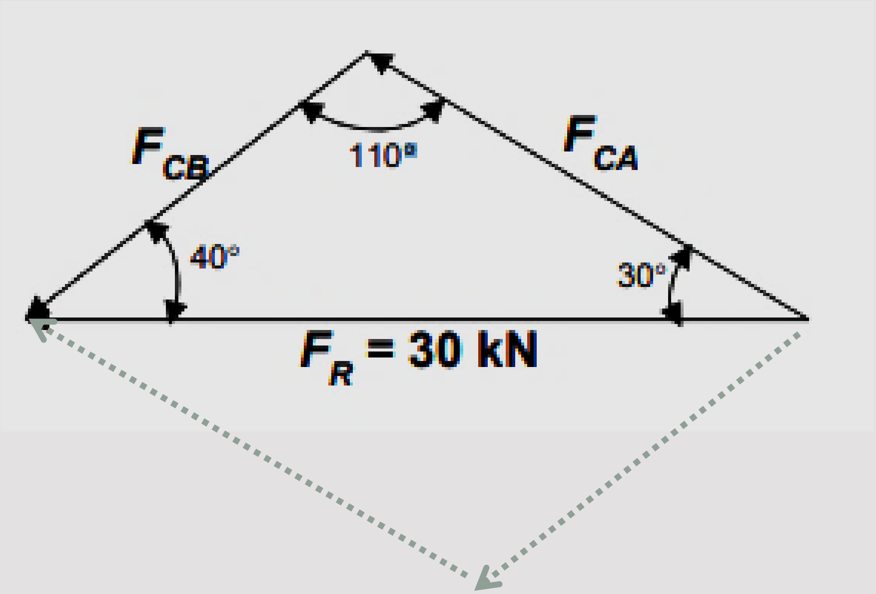
Exemplo 1:

- Dois rebocadores tentam desencalhar o navio cargueiro Evergreen, que se encontra estancado no canal de Suez. Sabendo-se que a força resultante é igual a 30kN, encontre suas componentes nas direções AC e BC.

1.3. ADIÇÃO DE FORÇAS VETORIAIS

Solução:

- A partir da regra do paralelogramo, deve-se construir um triângulo de vetores envolvendo as forças atuantes nos cabos **CA** e **CB** e a força resultante, de forma a identificar as incógnitas do problema;



- A partir da aplicação da lei dos senos, pode-se determinar os módulos das forças atuantes em cada um dos cabos **CA** ou **CB** da seguinte forma.

$$\frac{F_R}{sen110°} = \frac{F_{CA}}{sen40°} = \frac{F_{CB}}{sen30°}$$

1.3. ADIÇÃO DE FORÇAS VETORIAIS

Solução:

- Resolvendo para $\boldsymbol{F_{CA}}$ tem-se que:

$$F_{CA} = \frac{F_R \cdot sen40°}{sen110°} = \frac{30 \cdot sen40°}{sen110°}$$

$$F_{CA} = 20{,}52\,\text{kN}$$

- Resolvendo para $\boldsymbol{F_{CB}}$ tem-se que:

$$F_{CB} = \frac{F_R \cdot sen30°}{sen110°} = \frac{30 \cdot sen30°}{sen110°}$$

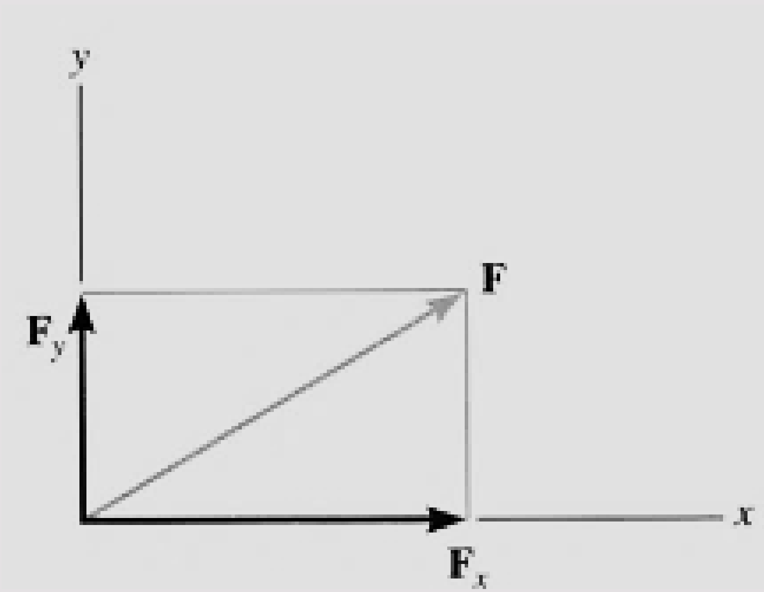
$$F_{CB} = 15{,}96\,\text{kN}$$

1.4. ADIÇÃO DE UM SISTEMA DE FORÇAS COPLANARES

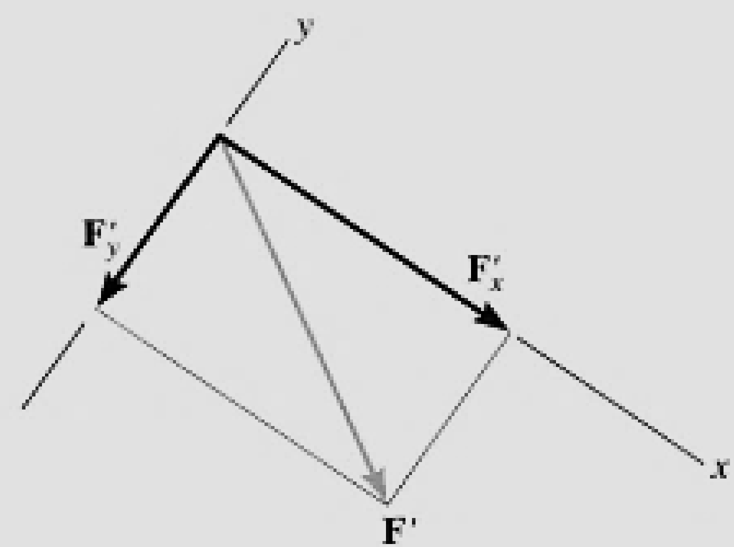
Notação escalar:

- Como os eixos *x* e *y* possuem direções positivas e negativas designadas, a intensidade e o sentido dos componentes retangulares da força **F** podem ser expressos em termos de **escalares algébricos**, F_x e F_y.

- No caso de **F’**, os componentes são F'_x e $-F'_y$.



$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$$

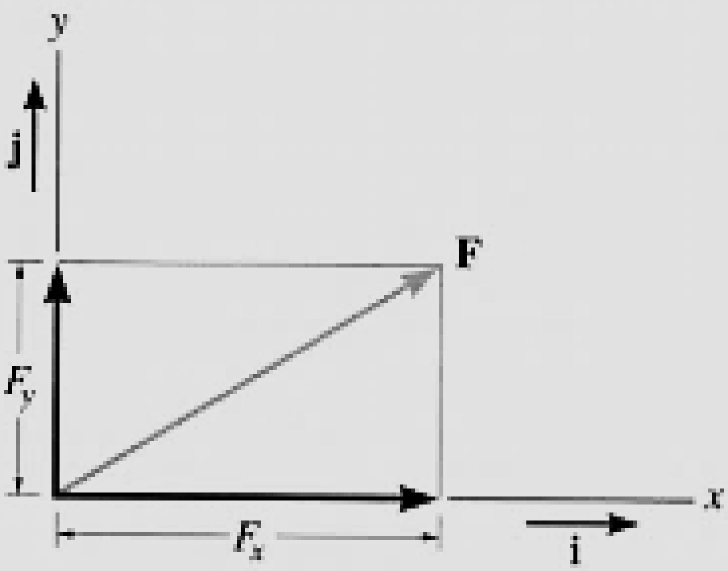


$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}'_x + \mathbf{F}'_y$$

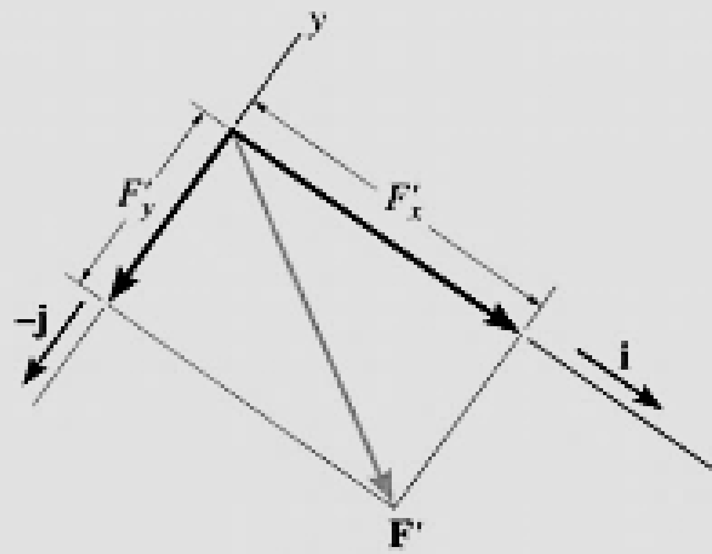
1.4. ADIÇÃO DE UM SISTEMA DE FORÇAS COPLANARES

Notação cartesiana: Também é possível representar os componentes de uma força em termos de vetores cartesianos unitários;

- Os *vetores unitários* **i** e **j** são usados para designar as **direções dos eixos** *x* e *y.*



(a)



(b)

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$$

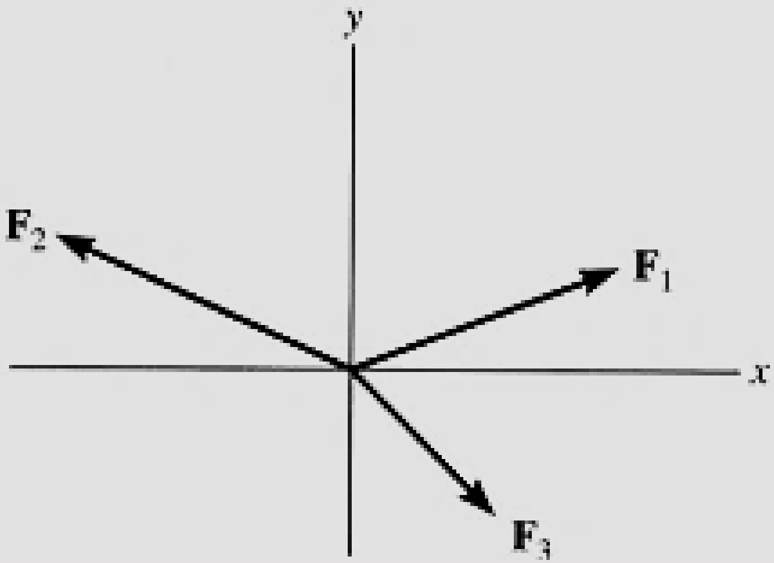
$$\mathbf{F}' = F'_x\mathbf{i} + F'_y(-\mathbf{j}) \Rightarrow \mathbf{F}' = F'_x\mathbf{i} - F'_y\mathbf{j}$$

1.4. ADIÇÃO DE UM SISTEMA DE FORÇAS COPLANARES

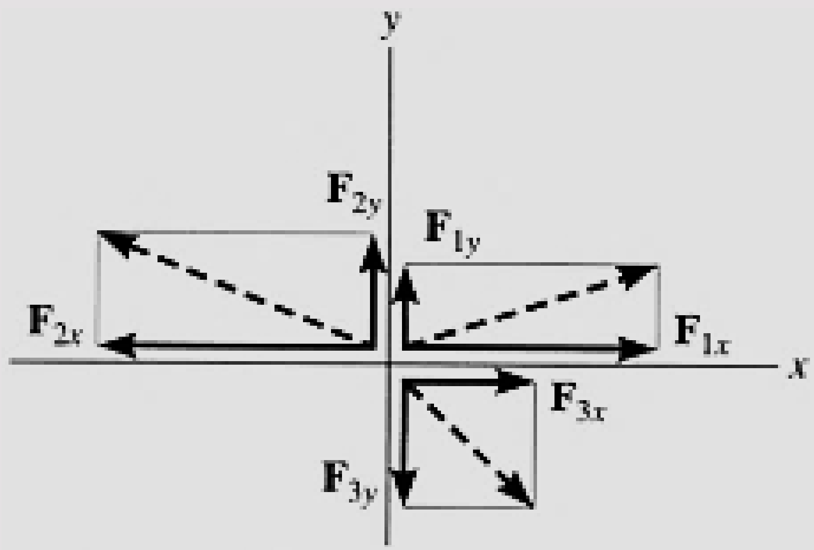
Resultante de forças coplanares:

- As forças são decompostas em seus componentes *x* e *y;*

- Os respectivos componentes são então somados usando-se **álgebra linea**r, uma vez que são colineares;



$$\mathbf{F}_1 = F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_2 = -F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_3 = F_{3x}\mathbf{i} - F_{3y}\mathbf{j}$$



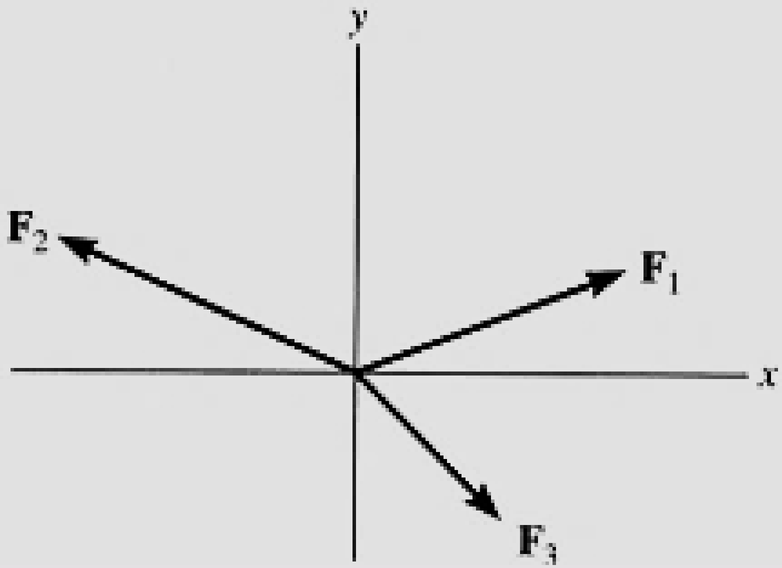
$$\begin{aligned}\mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3\\ &= F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j} - F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{3x}\mathbf{i} - F_{3y}\mathbf{j}\\ &= (F_{1x} - F_{2x} + F_{3x})\mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y})\mathbf{j}\\ &= (F_{Rx})\mathbf{i} + (F_{Ry})\mathbf{j}\end{aligned}$$

1.4. ADIÇÃO DE UM SISTEMA DE FORÇAS COPLANARES

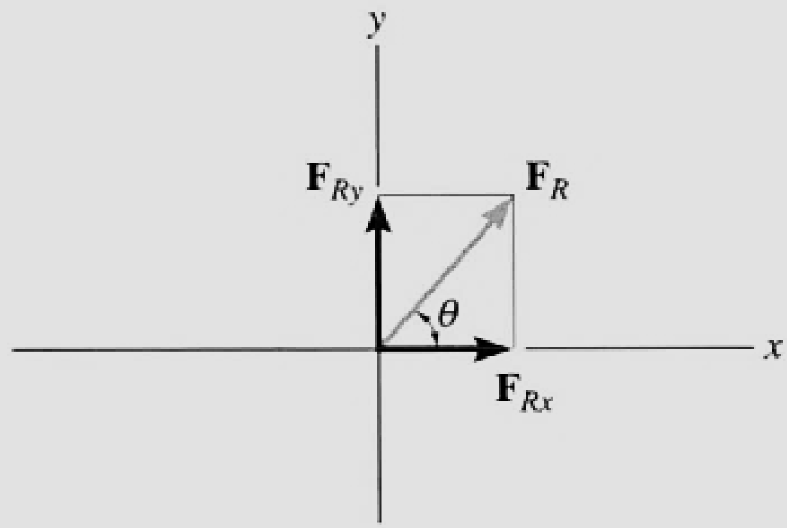
Resultante de forças coplanares:

- As forças são decompostas em seus componentes *x* e *y;*

- Os respectivos componentes são então somados usando-se **álgebra linea**r, uma vez que são colineares;



$$\mathbf{F}_1 = F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_2 = -F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_3 = F_{3x}\mathbf{i} - F_{3y}\mathbf{j}$$

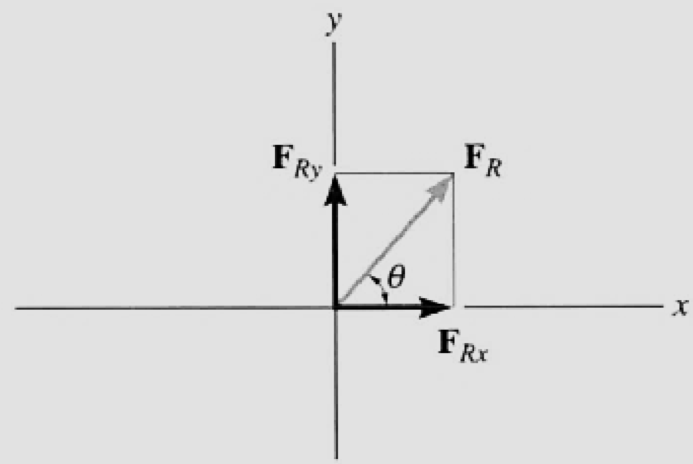


$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad F_{Rx} = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x}$$
$$(+\uparrow) \qquad F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}$$

1.4. ADIÇÃO DE UM SISTEMA DE FORÇAS COPLANARES

Resultante de forças coplanares:

- Em geral, os componentes *x* e *y* da resultante de qualquer número de forças coplanares podem ser representados simbolicamente pela soma algébrica dos componentes *x* e *y* de todas as forças:



$$F_{Rx} = \Sigma F_x$$
$$F_{Ry} = \Sigma F_y$$

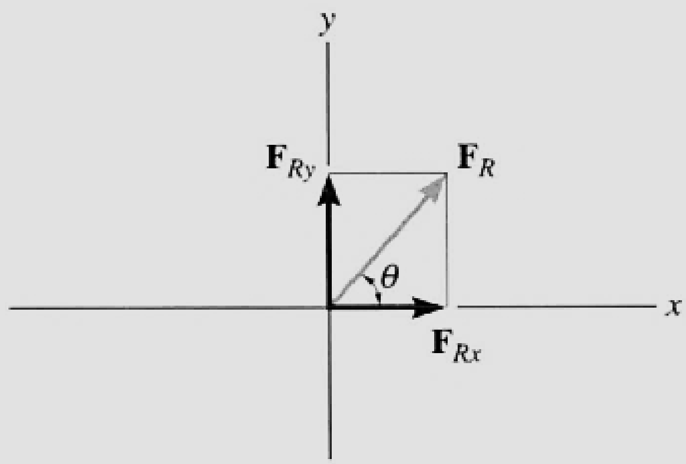
$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad F_{Rx} = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x}$$
$$(+\uparrow) \qquad F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}$$

1.4. ADIÇÃO DE UM SISTEMA DE FORÇAS COPLANARES

Resultante de forças coplanares:

- Pelo desenho esquemático, a intensidade da força resultante $\boldsymbol{F_R}$ é determinada pelo teorema de Pitágoras, ou seja:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$



- Além disso, o ângulo de direção $\boldsymbol{\theta}$, que especifica a orientação da força, é determinado trigonometricamente como sendo:

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad F_{Rx} = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x}$$

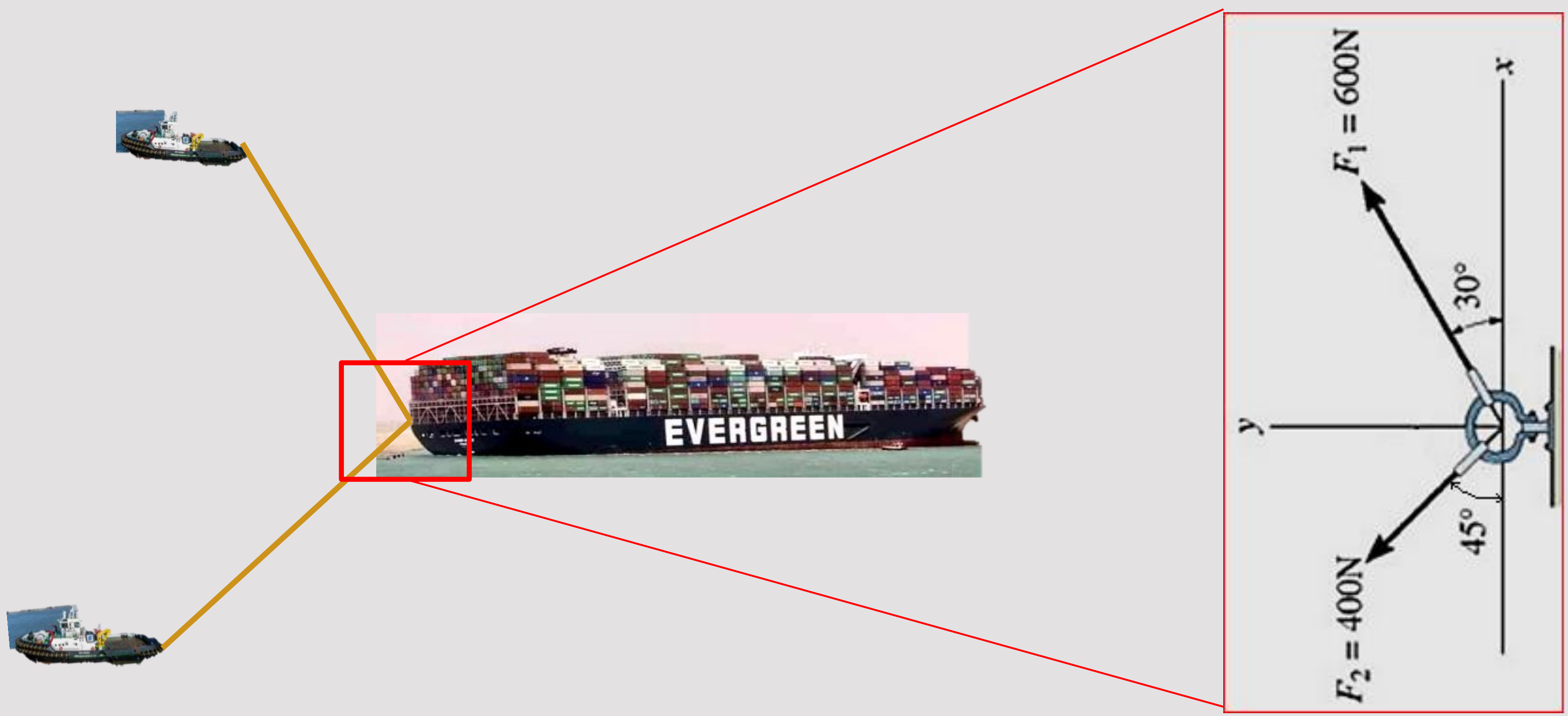
$$(+\uparrow) \qquad F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}$$

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\left|\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right|$$

1.4. ADIÇÃO DE UM SISTEMA DE FORÇAS COPLANARES

<u>Exemplo 2:</u>

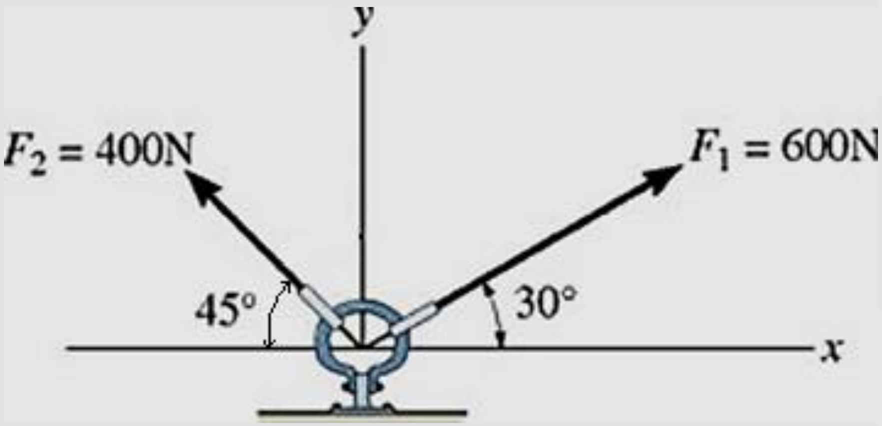
- O elo a que estão amarrados os cabos dos rebocadores está submetido as forças $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$. Sendo assim, determine a intensidade e a orientação da força resultante.



1.4. ADIÇÃO DE UM SISTEMA DE FORÇAS COPLANARES

Solução:

- Decomposição das forças:



Força 1:

$$\vec{F}_1 = (F_1 \cdot \cos 30° \vec{i} + F_1 \cdot sen 30° \vec{j})$$

$$\vec{F}_1 = (600 \cdot \cos 30° \vec{i} + 600 \cdot sen 30° \vec{j})\text{N}$$

Força 2:

$$\vec{F}_2 = (-F_2 \cdot \cos 45° \vec{i} + F_2 \cdot sen 45° \vec{j})$$

$$\vec{F}_2 = (-400 \cdot \cos 45° \vec{i} + 400 \cdot sen 45° \vec{j})\text{N}$$

Observação: cos45° = sen45°

1.4. ADIÇÃO DE UM SISTEMA DE FORÇAS COPLANARES

Solução:

- Determinação da força resultante, $\boldsymbol{F_R} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2}$:

$$\vec{F}_R = (600 \cdot \cos 30° \vec{i} + 600 \cdot sen30° \vec{j}) + (-400 \cdot \cos 45° \vec{i} + 400 \cdot sen45° \vec{j})$$

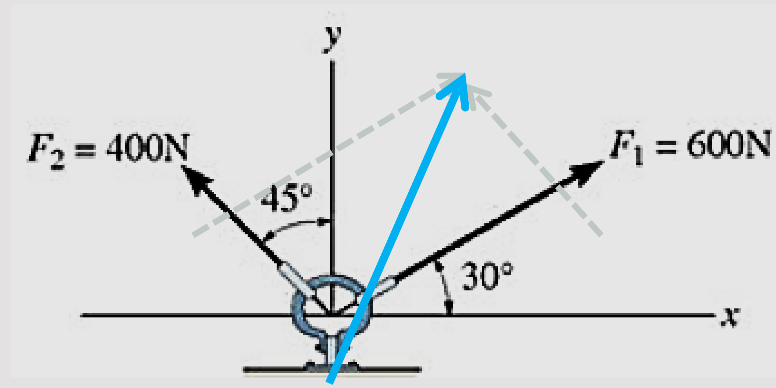
$$\vec{F}_R = (600 \cdot \cos 30° - 400 \cdot \cos 45°)\vec{i} + (600 \cdot sen30° + 400 \cdot sen45°)\vec{j}$$

$$\vec{F}_R = (236,8\vec{i} + 582,8\vec{j})\,\mathrm{N}$$

1.4. ADIÇÃO DE UM SISTEMA DE FORÇAS COPLANARES

Solução:

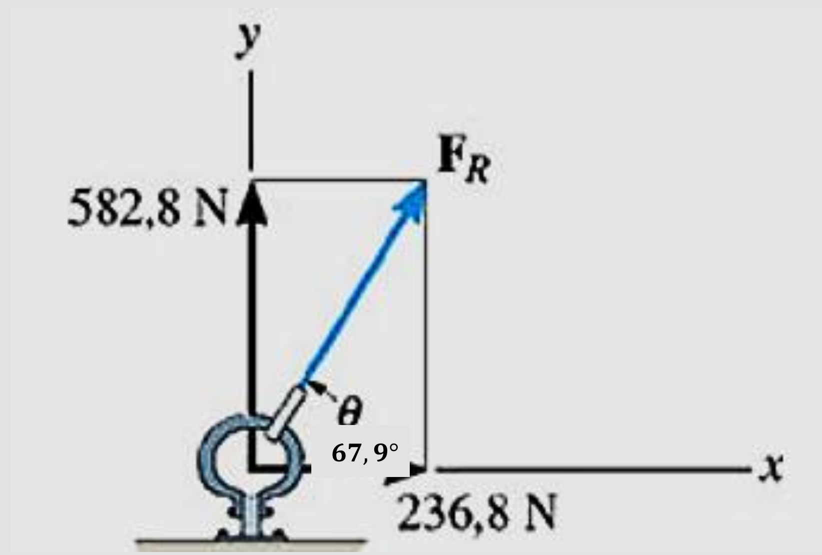
- Módulo (intensidade) da força resultante:



$$F_R = \sqrt{(236{,}8^2 + 582{,}8^2}$$

$$F_R = 629\text{N}$$

- Direção da força resultante:



$$\theta = arctg\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$$

$$\theta = arctg\left(\frac{582{,}8}{236{,}8}\right)$$

$$\theta = 67{,}9°$$

ATÉ A PRÓXIMA!