Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

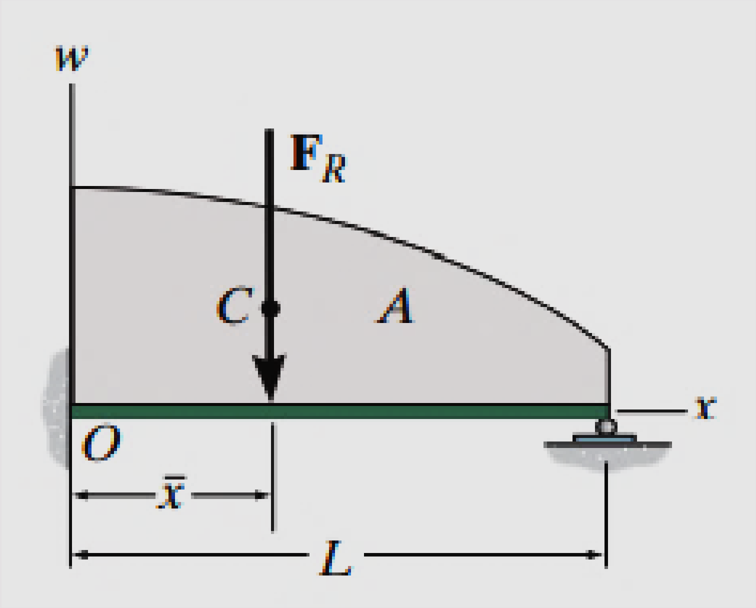
PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

CENTRO DE GRAVIDADE, CENTRO DE MASSA E CENTRO GEOMÉTRICO

6.6. Carregamento distribuído geral

6.6. CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO GERAL

- Na Aula 10, discutimos o método usado para simplificar um carregamento distribuído bidimensional reduzindo-o a uma única força resultante atuando em um ponto específico;



$$F_R = \int_L w(x)\,dx = \int_A dA = A$$

$$\bar{x} = \frac{\int_L x w(x)\,dx}{\int_L w(x)\,dx} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}$$

6.6. CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO GERAL

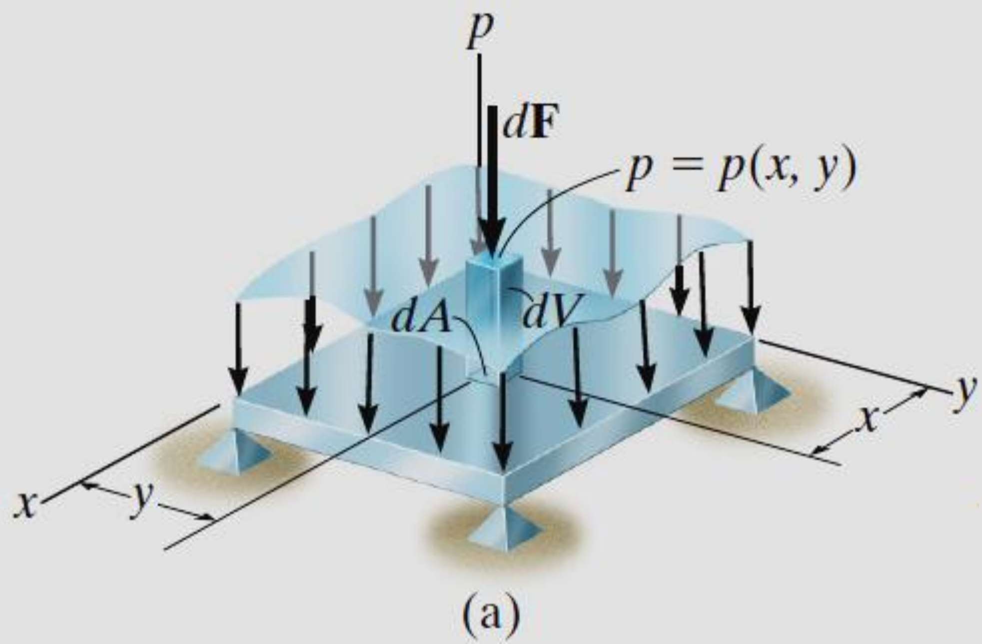
- Agora, generalizaremos esse método para incluir superfícies planas que possuem um formato arbitrário e estão sujeitas a uma carga distribuída variável;

- Vamos considerar, por exemplo, a placa plana mostrada na **Figura a** ao lado, que está sujeita à carga definida por:

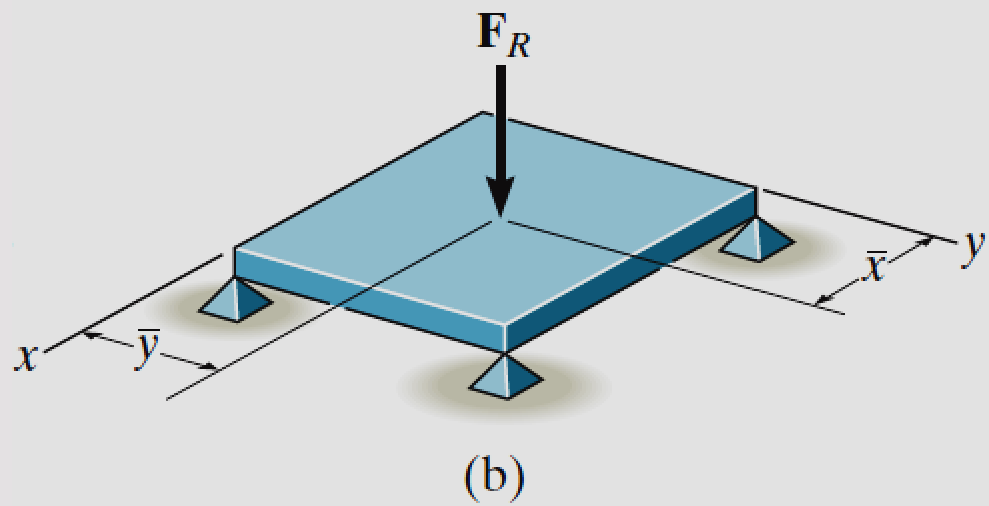
$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\ \boldsymbol{Pa}$$

- Onde **1** $\boldsymbol{Pa}\ (\boldsymbol{pascal}) = \mathbf{1}\ \boldsymbol{N}/\boldsymbol{m}^2$;

- Conhecendo essa função, podemos determinar a força resultante $\boldsymbol{F_R}$ atuando sobre a placa e sua localização $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (**Figura b**)



(a)



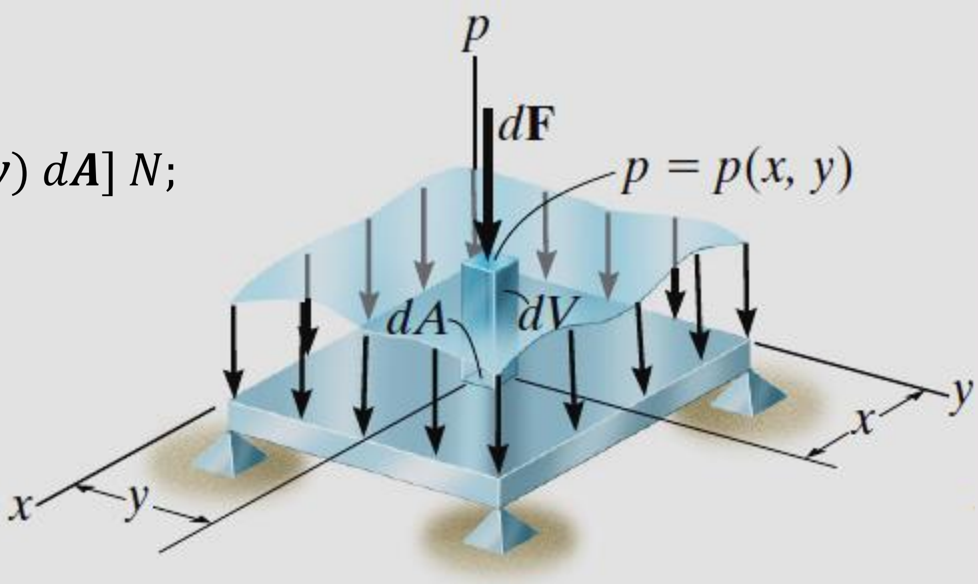
(b)

6.6. CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO GERAL

Intensidade da força resultante:

- A força $d\boldsymbol{F}$ atuando sobre a área diferencial $d\boldsymbol{A}\, m^2$ da placa, localizada em um ponto arbitrário $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, tem intensidade:

$$d\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, N/m^2](d\boldsymbol{A}\, m^2) = [\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{A}]\, N;$$



(a)

- Observe que o **elemento de volume** diferencial mostrado na Figura a é:

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{A} = d\boldsymbol{V}$$

- A *intensidade* de $\boldsymbol{F_R}$ é a soma das forças diferenciais atuando sobre a **área total da superfície** da placa. Logo:

$$F_R = \Sigma F \quad \Longrightarrow \quad F_R = \int_A p(x, y)\, dA = \int_V dV = V$$

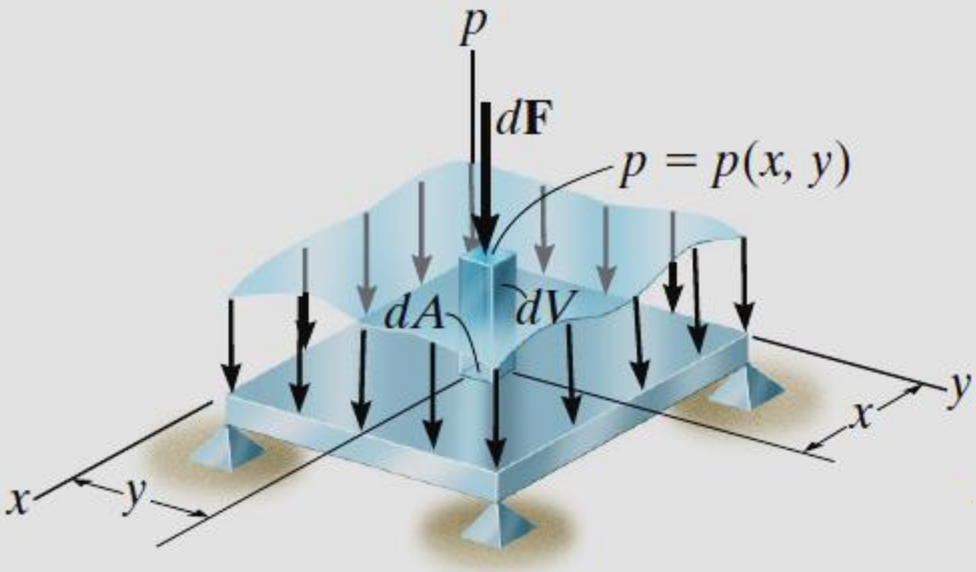
6.6. CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO GERAL

Intensidade da força resultante:

$$M_R = \sum M$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{V}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dV}{V}$$



(a)

$$F_R = \int_A p(x, y)\, dA = \int_V dV = V$$

- A intensidade da força resultante é igual ao volume total sob o diagrama do carregamento distribuído.

6.6. CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO GERAL

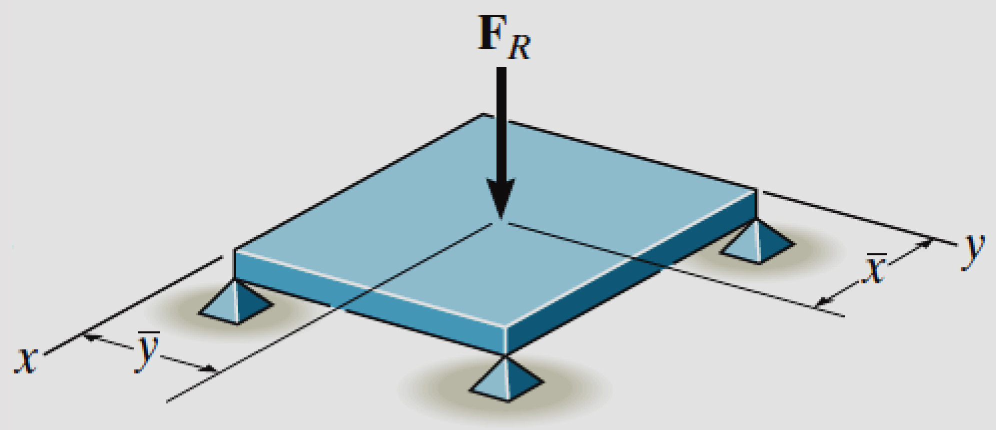
Localização da força resultante:

- A posição $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ de $\boldsymbol{F_R}$ é determinada fazendo-se os momentos de $\boldsymbol{F_R}$ iguais aos momentos de todas as forças diferenciais $d\boldsymbol{F}$ em relação aos respectivos eixos $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{x}$.

- Assim:

$$\bar{x} = \frac{\int_A x p(x, y)\, dA}{\int_A p(x, y)\, dA} = \frac{\int_V x\, dV}{\int_V dV}$$

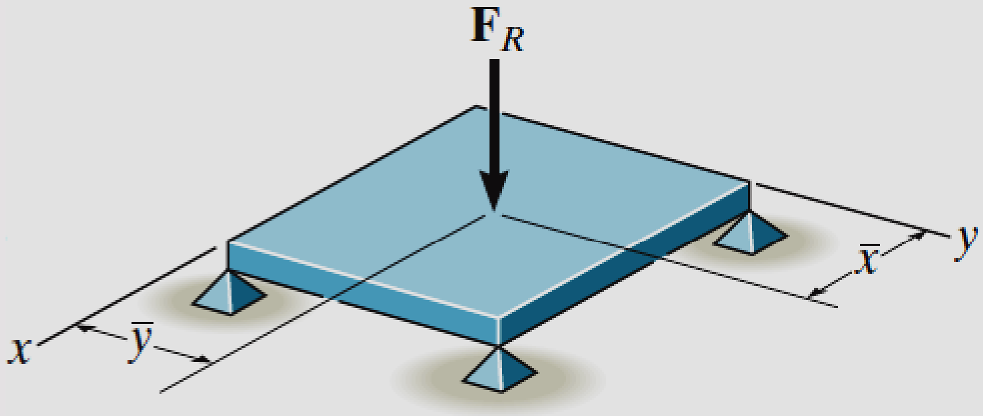
$$\bar{y} = \frac{\int_A y p(x, y)\, dA}{\int_A p(x, y)\, dA} = \frac{\int_V y\, dV}{\int_V dV}$$



(b)

6.6. CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO GERAL

Localização da força resultante:



(b)

$$\bar{x} = \frac{\int_A x p(x, y)\, dA}{\int_A p(x, y)\, dA} = \frac{\int_V x\, dV}{\int_V dV}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A y p(x, y)\, dA}{\int_A p(x, y)\, dA} = \frac{\int_V y\, dV}{\int_V dV}$$

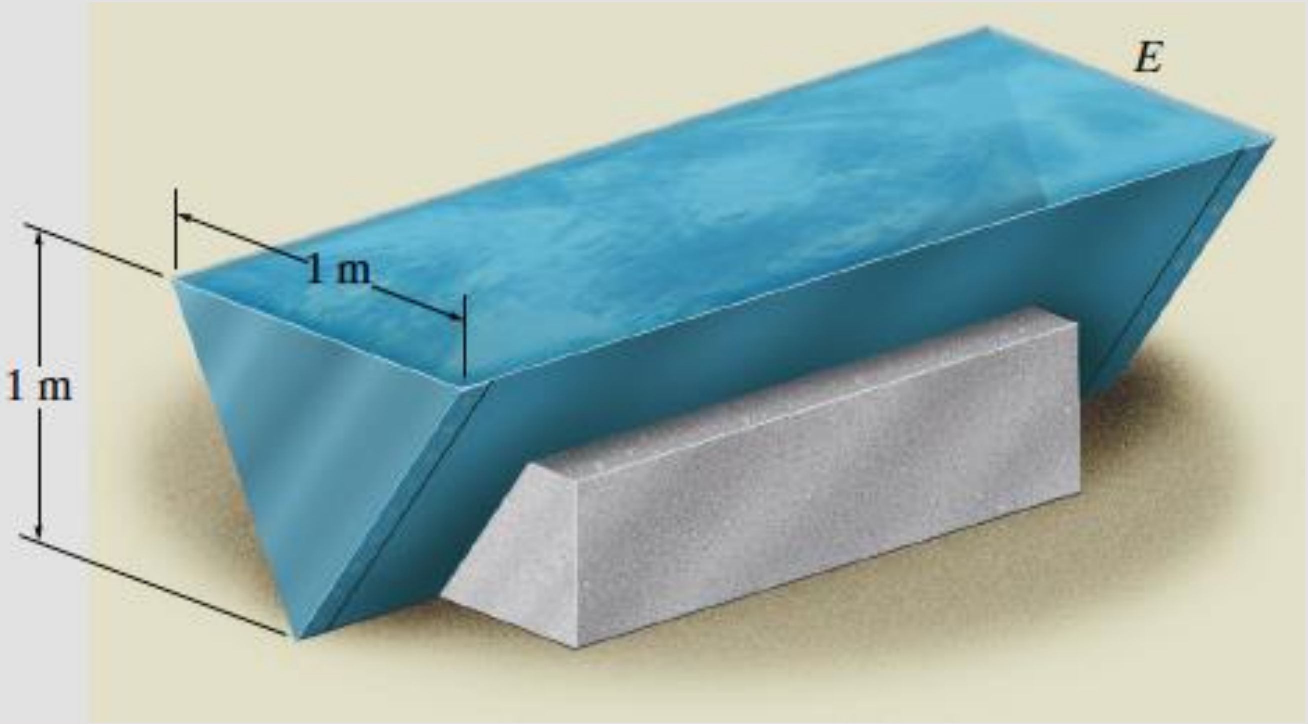
- A linha de ação da força resultante passa pelo centro geométrico ou centroide do volume sob o diagrama do carregamento distribuído.

6.6. CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO GERAL

Exercício 45:

- Determine a intensidade e a localização da força resultante atuando sobre as placas triangulares nas extremidades da calha d'água mostrada na figura abaixo;

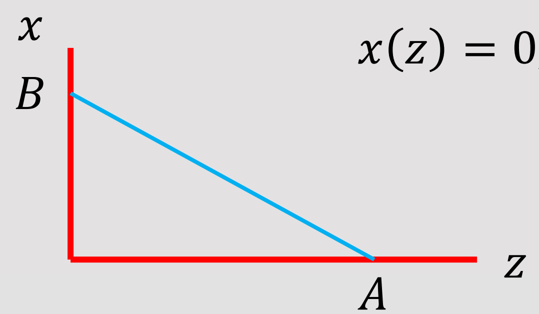
- Considere $\boldsymbol{\rho = 1000\, kg/m^3}$.



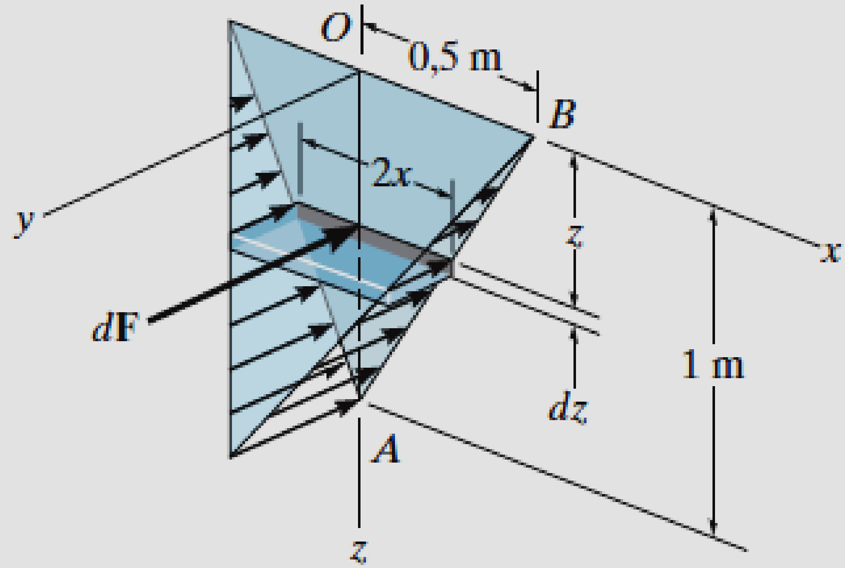
6.6. CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO GERAL

Solução:

- A distribuição de pressão atuando sobre a placa $\boldsymbol{E}$ é mostrada na figura ao lado;
- A intensidade da força resultante é igual ao volume dessa distribuição de carga;
- Vamos resolver o problema por integração;
- Escolhendo o elemento diferencial de volume mostrado na figura, temos:



$$x(z) = 0{,}5(1 - z)$$



$$dF = dV = p\,dA = \rho_w g z(2x\,dz) = 19620 zx\,dz$$

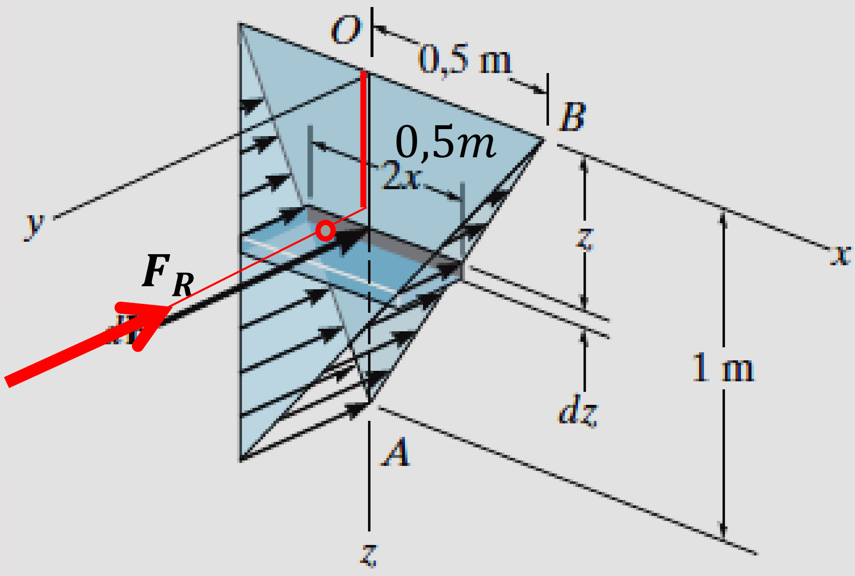
6.6. CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO GERAL

Solução:

➢ A equação da linha $\boldsymbol{AB}$ é:

$$x = 0{,}5(1 - z)$$

➢ Logo, substituindo e integrando com relação a $\boldsymbol{z}$ a partir de $\boldsymbol{z = 0}$ até $\boldsymbol{z = 1\ m}$, temos



$$F = V = \int_V dV = \int_0^{1\text{ m}} (19620)z[0{,}5(1 - z)]\, dz$$

$$= 9810 \int_0^{1\text{ m}} (z - z^2)\, dz = 1635\text{ N} = 1{,}64\text{ kN}$$

6.6. CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO GERAL

Solução:

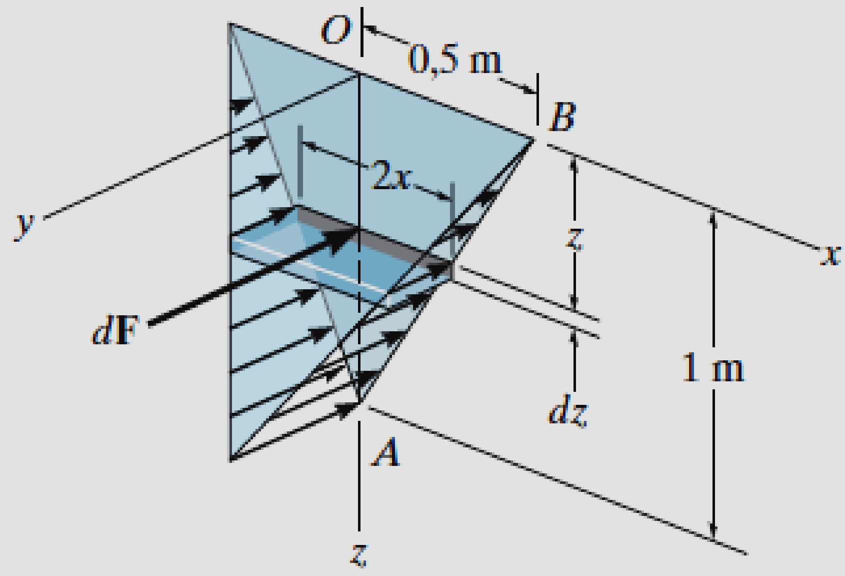
- A força resultante $\boldsymbol{F_R}$ passa pelo **centroide do volume**;

- Em virtude da simetria,

$$\bar{x} = 0$$

- Como $\tilde{z} = z$ para o elemento de volume, temos:

$$\bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\, dV}{\int_V dV}$$



$$= \frac{\int_0^{1\text{ m}} z(19620)z[0{,}5(1 - z)]\, dz}{1635} = \frac{9810 \int_0^{1\text{ m}} (z^2 - z^3)\, dz}{1635} = 0{,}5 \text{ m}$$

ATÉ A PRÓXIMA!