Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

EQUILÍBRIO DE CORPOS RÍGIDOS, TRELIÇAS PLANAS E ESFORÇOS INTERNOS

Parte 1: Equilíbrio de um corpo rígido

4.1. Condições de equilíbrio do corpo rígido
4.2. Diagrama de corpo livre
4.3. Equações de equilíbrio
4.4. Membros de duas e de três forças
4.5. Equilíbrio em três dimensões
4.6. Restrições e determinância estática

Parte 2: Treliças planas

4.5. Método dos nós
4.6. Membros de força zero
4.7. Método das seções

Parte 3: Esforços internos

4.8. Cargas internas desenvolvidas em membros estruturais
4.9. Equações e diagramas de força cortante e de momento fletor
4.10. Relações entre carga distribuída, força cortante e momento fletor

PARTE 1: EQUILÍBRIO DE UM CORPO RÍGIDO

4.1. Condições de equilíbrio do corpo rígido
4.2. Diagrama de corpo livre
4.3. Equações de equilíbrio
4.4. Membros de duas e de três forças
4.5. Equilíbrio em três dimensões
4.6. Restrições e determinância estática

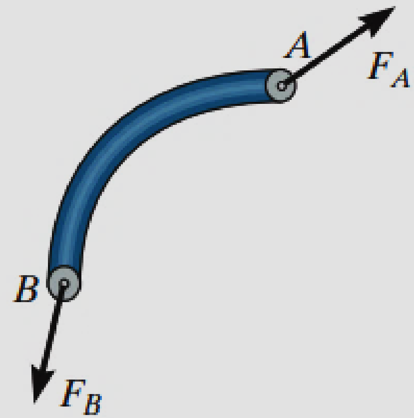
4.4. MEMBROS DE DUAS E DE TRÊS FORÇAS

- As soluções para alguns problemas de equilíbrio podem ser simplificadas pelo reconhecimento dos membros que estão **sujeitos a apenas duas ou três forças;**

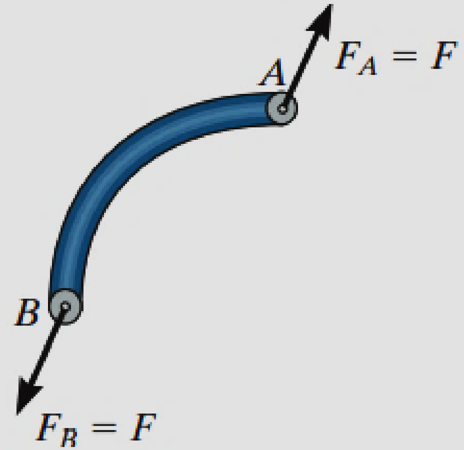
Membros de duas forças:

- Como o nome sugere, um membro de duas forças possui forças aplicadas em apenas dois pontos no membro;

- Para satisfazer o equilíbrio de forças, $\boldsymbol{F_A}$ e $\boldsymbol{F_B}$ precisam ser iguais em intensidade ($\boldsymbol{F_A} = \boldsymbol{F_B} = \boldsymbol{F}$), mas de sentidos opostos ($\sum \boldsymbol{F} = 0$);



(a)



(b)

4.4. MEMBROS DE DUAS E DE TRÊS FORÇAS

Membros de duas forças:

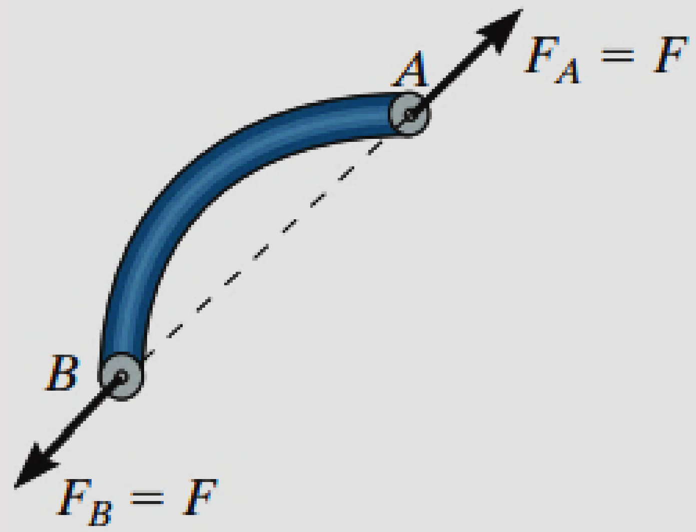
- Além disso, o equilíbrio de momentos exige que $\boldsymbol{F_A}$ e $\boldsymbol{F_B}$ compartilhem a mesma linha de ação, o que só pode ocorrer se eles estiverem direcionados ao longo da linha unindo os pontos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ ($\sum \boldsymbol{M_A} = 0$ ou $\sum \boldsymbol{M_B} = 0$);

- Logo, para que qualquer membro de duas forças esteja em equilíbrio, **as duas forças agindo sobre o membro precisam:**

❖ *Ter a mesma intensidade;*

❖ *Agir em sentidos opostos;*

❖ *Ter a mesma linha de ação, direcionada ao longo da linha que une os dois pontos onde essas forças atuam.*



(c)

4.4. MEMBROS DE DUAS E DE TRÊS FORÇAS

Membros de duas forças:

- O cilindro hidráulico $\boldsymbol{AB}$ é um exemplo típico de um membro de duas forças, já que está conectado por pinos em suas extremidades e, se seu peso for desprezado, apenas as forças dos pinos atuam sobre este membro.

4.4. MEMBROS DE DUAS E DE TRÊS FORÇAS

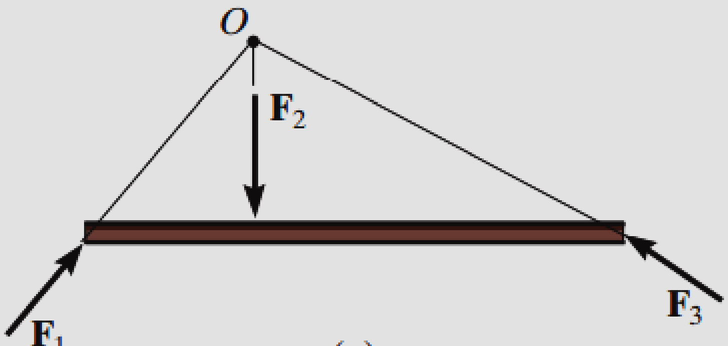
Membros de três forças:

- Se um membro está sujeito a apenas três forças, ele é chamado de membro de três forças;

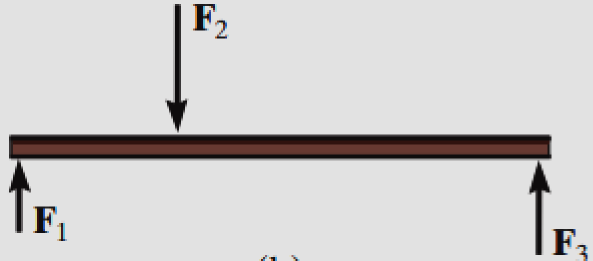
- O equilíbrio de momentos pode ser satisfeito apenas se as três forças formarem um sistema de forças concorrentes ou paralelas;

- Se as linhas de ação de $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$ se interceptam no ponto ***O***, então a linha de ação de $\boldsymbol{F_3}$ também precisa passar pelo ponto ***O*** para que as forças satisfaçam $\sum \boldsymbol{M_o} = 0$;

- Como um caso especial, se todas as três forças forem paralelas, o local do ponto de interseção ***O*** se aproximará do infinito



(a)



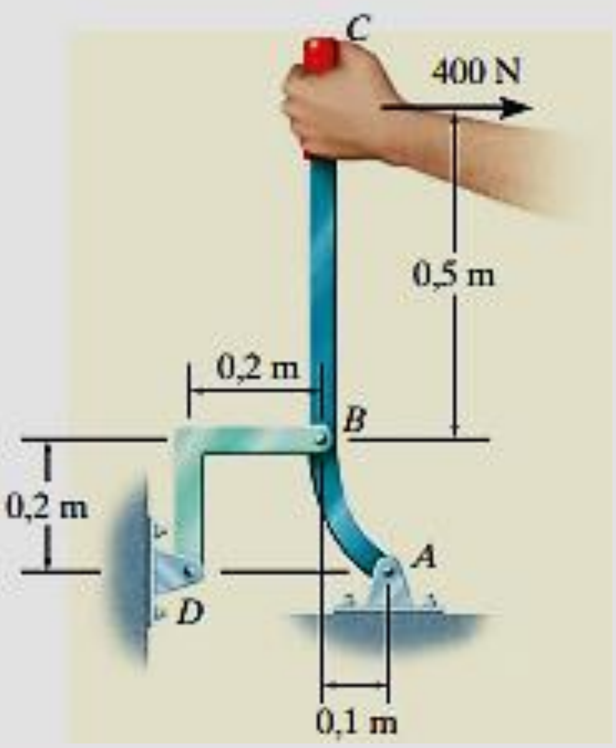
(b)

4.4. MEMBROS DE DUAS E DE TRÊS FORÇAS

Exercício 23:

- A alavanca ABC é sustentada por um pino em A e conectada a um elemento curto BD, como mostra a figura;

- Se o peso dos membros é desprezado, determine a força do pino sobre a alavanca em A.



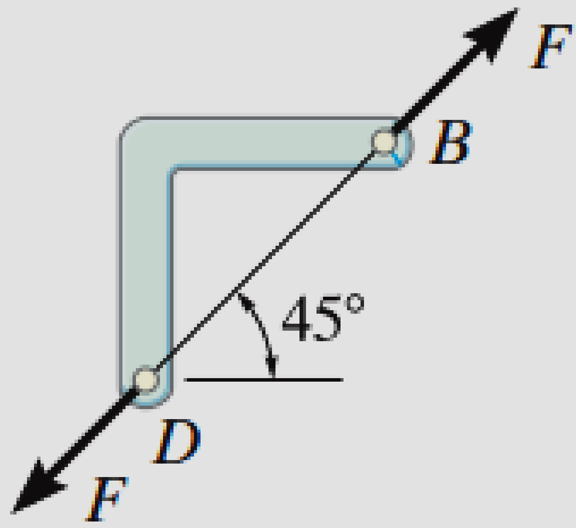
4.4. MEMBROS DE DUAS E DE TRÊS FORÇAS

Solução:

1) Diagrama de corpo livre:

- O elemento curto $\boldsymbol{BD}$ é um membro de duas forças e, portanto, as forças resultantes nos pinos $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{B}$ precisam ser iguais, opostas e colineares;

- Embora a intensidade das forças seja desconhecida, a linha de ação é conhecida, já que ela passa por $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$;

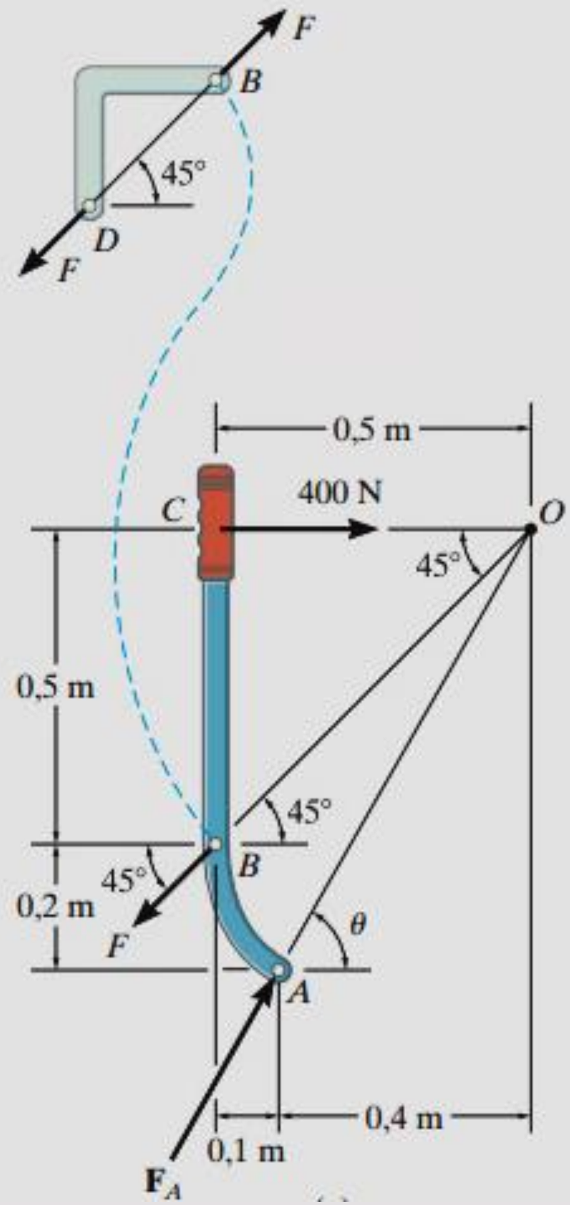


4.4. MEMBROS DE DUAS E DE TRÊS FORÇAS

Solução:

1) Diagrama de corpo livre:

- A alavanca ABC é um membro de três forças e, assim, para satisfazer o equilíbrio dos momentos, as três forças não paralelas que agem sobre ela precisam ser concorrentes em O;
- Em especial, observe que a força F sobre a alavanca em B é igual, mas oposta à força F que age em B no elemento curto;
- Por que motivo?
- E quanto à distância CO?
- Esta distância precisa ser de 0,5 m, já que as linhas de ação de F e da força de 400 N são conhecidas.



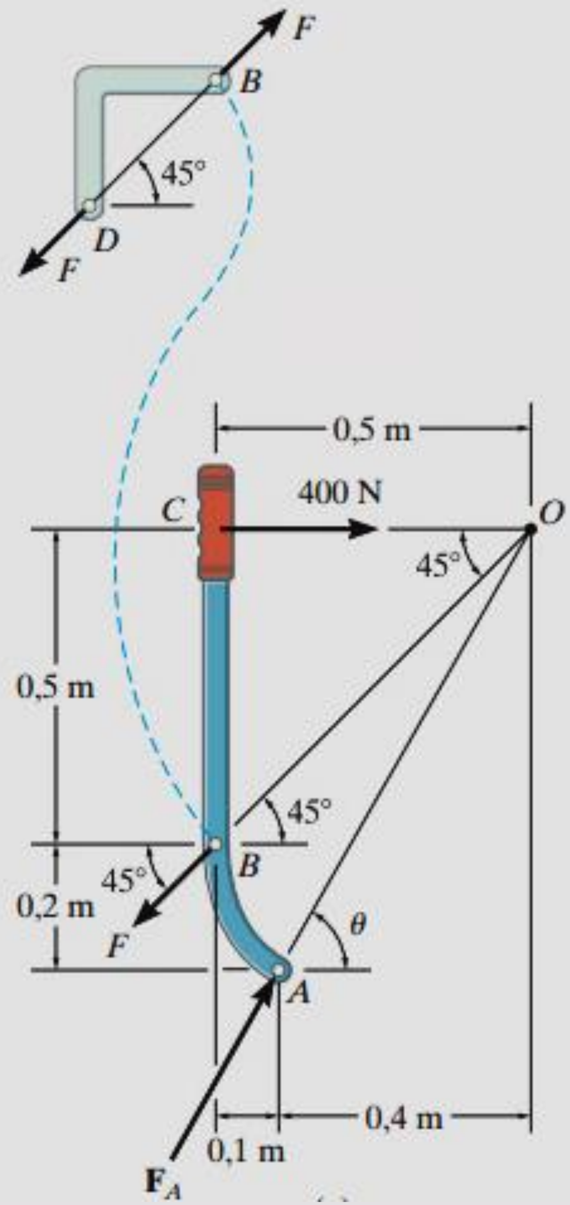
4.4. MEMBROS DE DUAS E DE TRÊS FORÇAS

Solução:

2) Equações de equilíbrio:

- Requerendo-se que o sistema de forças seja concorrente em ***O***, uma vez que $\sum M_o = 0$, o ângulo u que define a linha de ação de F_A pode ser determinado por trigonometria

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{0,7}{0,4}\right) = 60,3°$$



4.4. MEMBROS DE DUAS E DE TRÊS FORÇAS

Solução:

2) Equações de equilíbrio:

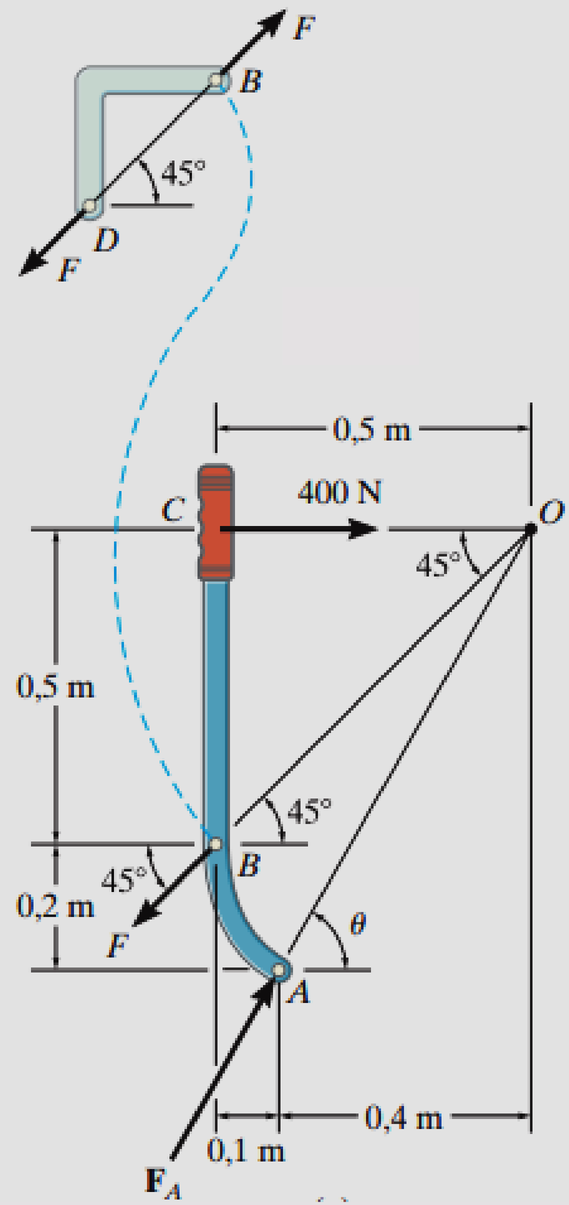
- Usando os eixos *x*, *y* e aplicando as equações de equilíbrio de forças,

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0$$

$$F_A \cos 60{,}3^\circ - F \cos 45^\circ + 400 \text{ N} = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$F_A \text{ sen } 60{,}3^\circ - F \text{ sen } 45^\circ = 0$$



4.4. MEMBROS DE DUAS E DE TRÊS FORÇAS

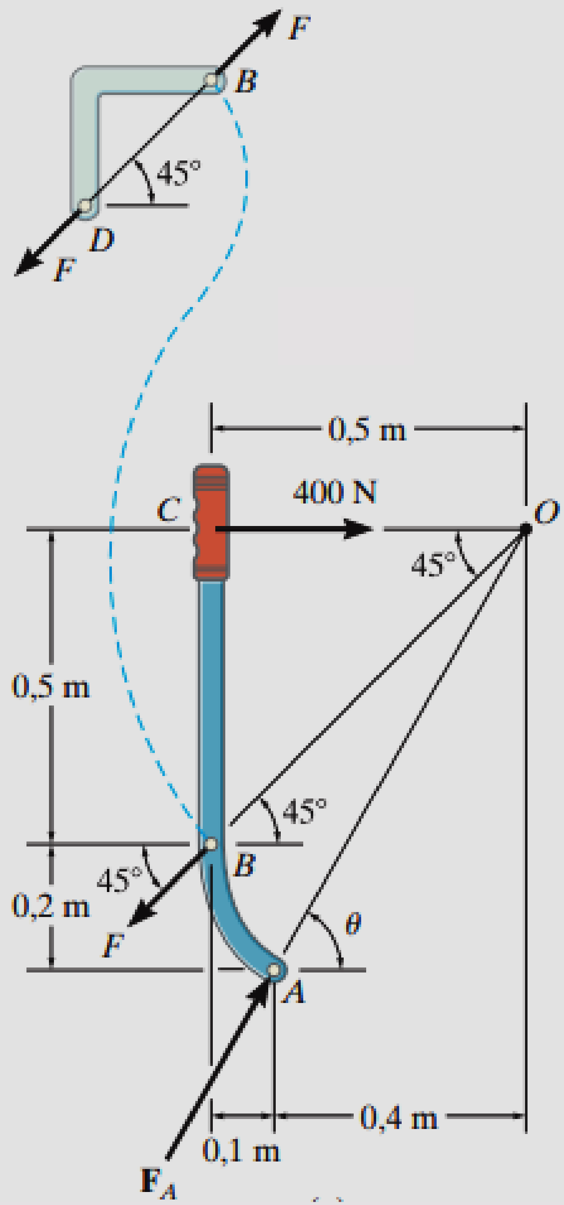
Solução:

2) Equações de equilíbrio:

➢ Resolvendo, obtemos:

$$F_A = 1{,}07 \text{ kN}$$

$$F = 1{,}32 \text{ kN}$$



4.5. EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

- O primeiro passo para resolver problemas de equilíbrio tridimensionais, assim como em duas dimensões, é desenhar um diagrama de corpo livre;

- Antes de fazermos isso, no entanto, é necessário discutir os tipos de reações que podem ocorrer nos apoios.

Reações nos apoios:

- Uma força é desenvolvida por um apoio que limite a translação de seu membro conectado;

- Um momento de binário é desenvolvido quando a rotação do membro conectado é impedida.

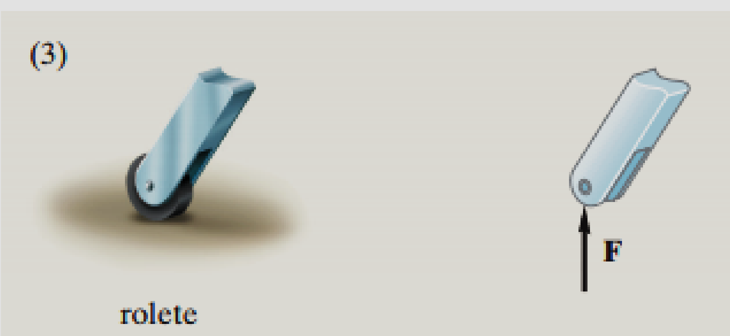
4.5. EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

Reações nos apoios:

Tipos de conexões | **Reações** | **Número de incógnitas**

Uma incógnita. A reação é uma força que age para fora do membro na direção conhecida do cabo.

Uma incógnita. A reação é uma força que age perpendicularmente à superfície no ponto de contato.

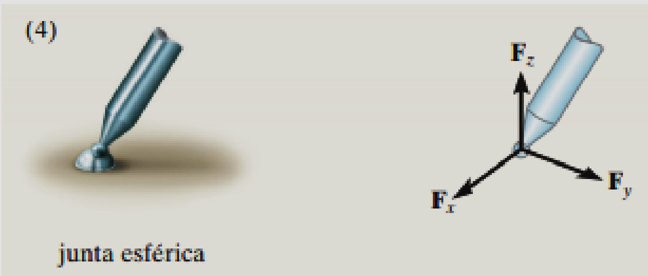


Uma incógnita. A reação é uma força que age perpendicularmente à superfície no ponto de contato.

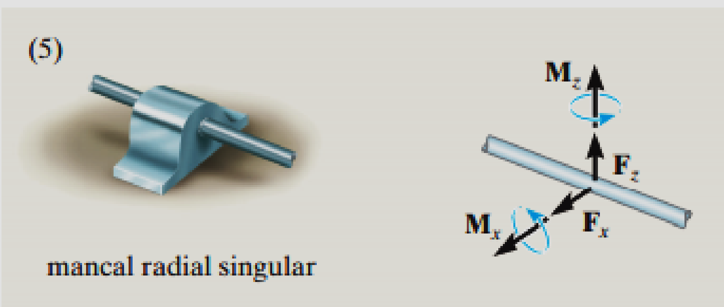
4.5. EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

Reações nos apoios:

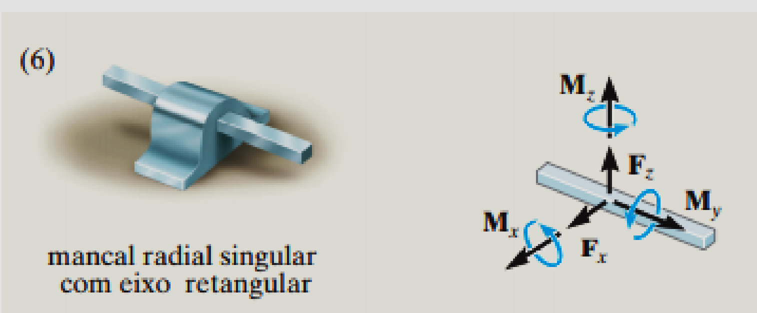
Tipos de conexões **Reações** **Número de incógnitas**



Três incógnitas. As reações são três componentes de força retangulares.



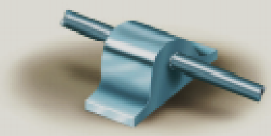
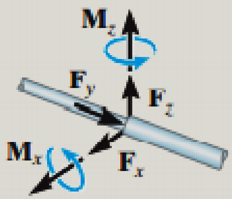
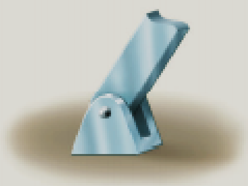
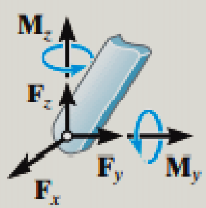
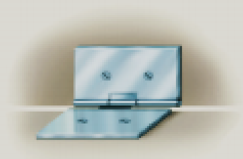
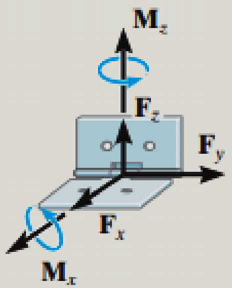
Quatro incógnitas. As reações são duas componentes de força e duas componentes de momento de binário que agem perpendicularmente ao eixo. *Nota:* os momentos de binário *normalmente não são aplicados* se o corpo for sustentado em algum outro local. Veja os exemplos.



Cinco incógnitas. As reações são duas componentes de força e três componentes de momento de binário. *Nota:* os momentos de binário *normalmente não são aplicados* se o corpo for sustentado em algum outro local. Veja os exemplos.

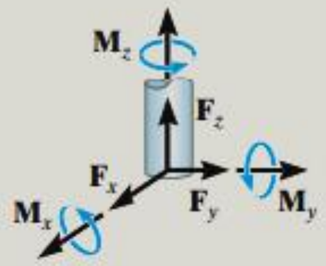
4.5. EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

Reações nos apoios:

Tipos de conexões	Reações	Número de incógnitas
(7)  mancal axial singular		Cinco incógnitas. As reações são três componentes de força e duas componentes de momento de binário. *Nota:* os momentos de binário *normalmente não são aplicados* se o corpo for sustentado em algum outro local. Veja os exemplos.
(8)  pino liso singular		Cinco incógnitas. As reações são três componentes de força e duas componentes de momento de binário. *Nota:* os momentos de binário *normalmente não são aplicados* se o corpo for sustentado em algum outro local. Veja os exemplos.
(9)  dobradiça singular		Cinco incógnitas. As reações são três componentes de força e duas componentes de momento de binário. *Nota:* os momentos de binário *normalmente não são aplicados* se o corpo for sustentado em algum outro local. Veja os exemplos.

4.5. EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

Reações nos apoios:

Tipos de conexões	Reações	Número de incógnitas
(10)  engastamento		Seis incógnitas. As reações são três componentes de força e três componentes de momento de binário.

4.5. EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

Esta junta esférica fornece uma conexão para acomodar uma niveladora de solo em sua estrutura. (4)

Os mancais radiais apoiam as extremidades do eixo. (5)

Este mancal axial é usado para apoiar o eixo motriz em uma máquina. (7)

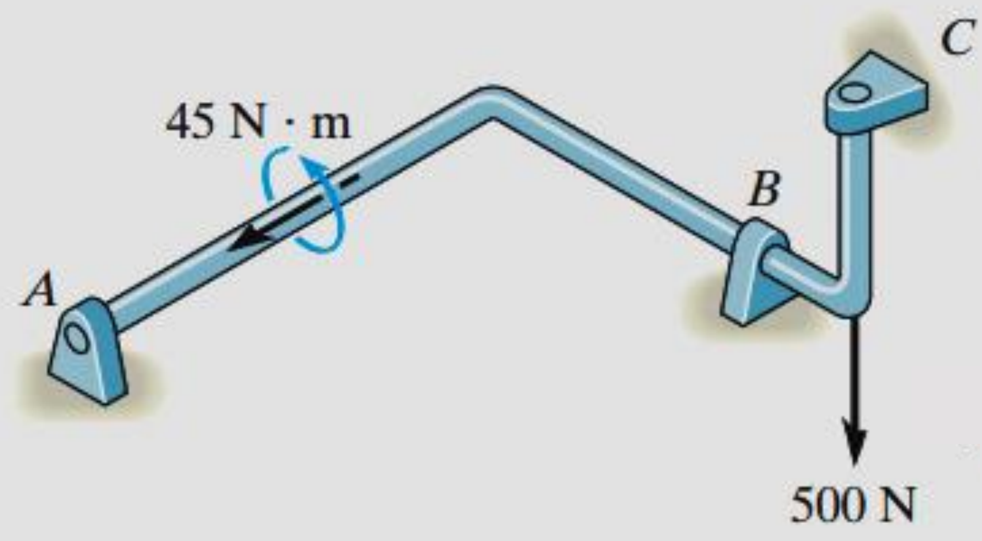
Este pino liso é usado para apoiar a extremidade do elemento sob compressão usado em um trator. (8)

4.5. EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

Exercício 24:

- Determine o digrama de corpo livre das situações a seguir:

1) Mancais radiais corretamente alinhados em $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$.

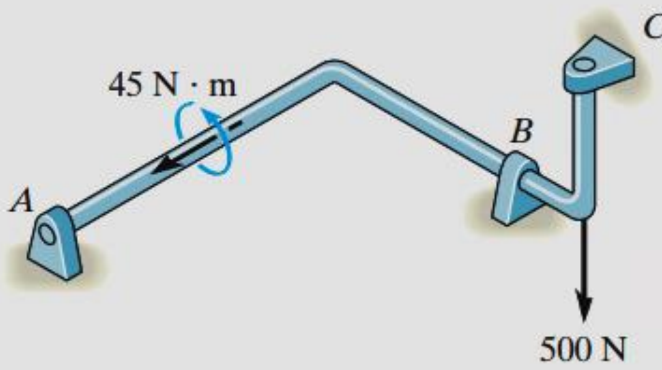


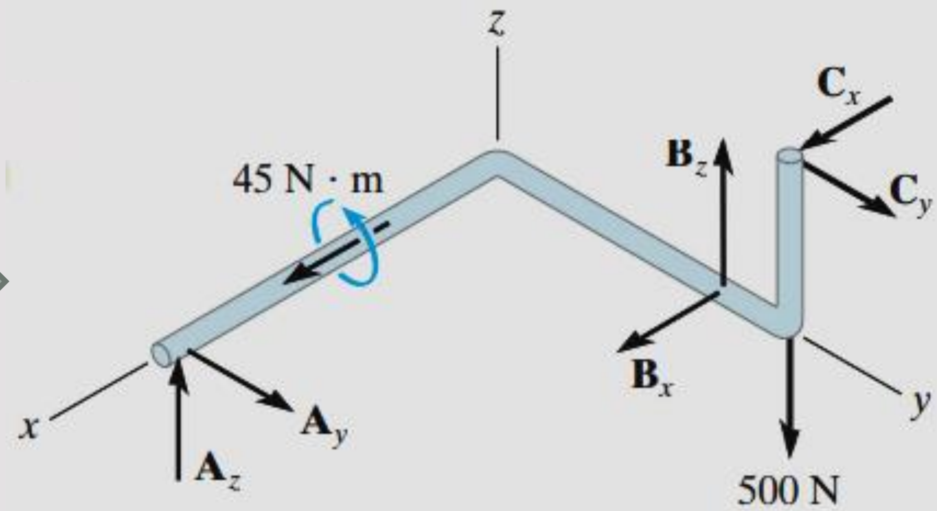
4.5. EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

Solução:

- As reações de força desenvolvidas pelos mancais são suficientes para o equilíbrio porque impedem que o elemento gire em relação a cada um dos eixos coordenados;

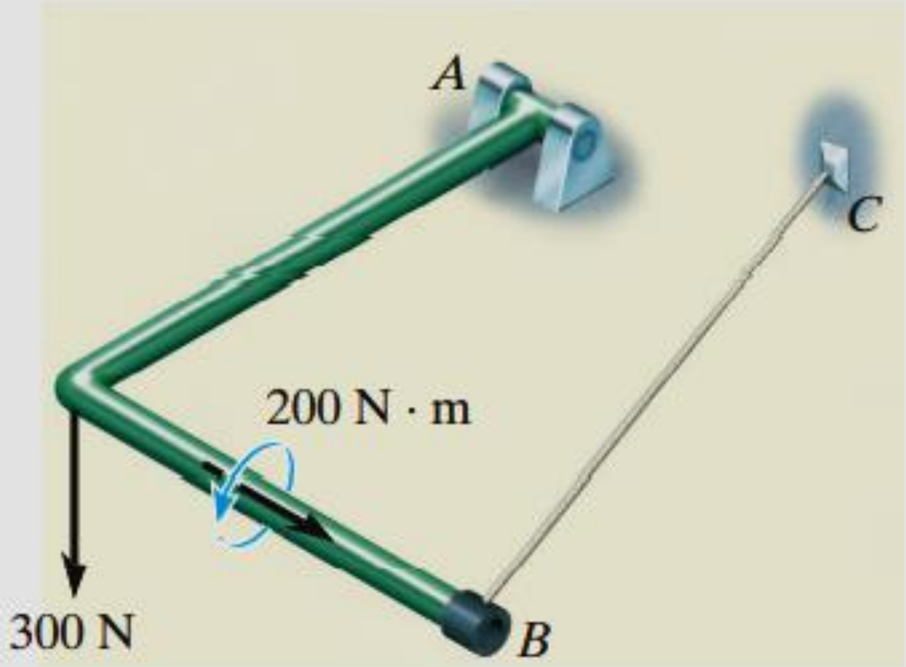
- Nenhum momento de binário é exercido pelos mancais.





4.5. EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

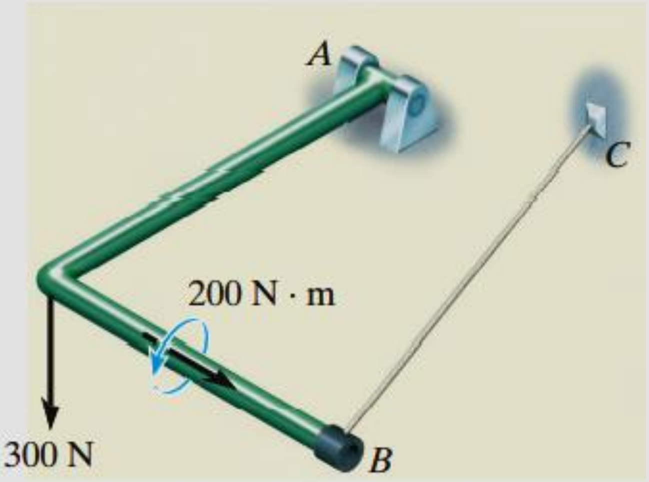
2) Pino em $\boldsymbol{A}$ e cabo em $\boldsymbol{BC}$.

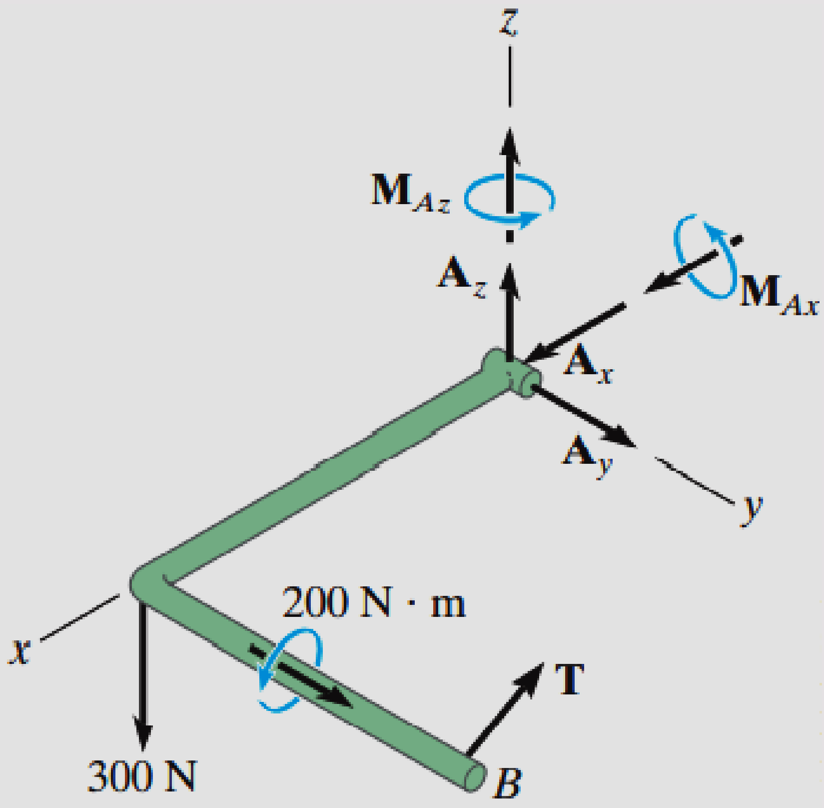


4.5. EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

Solução:

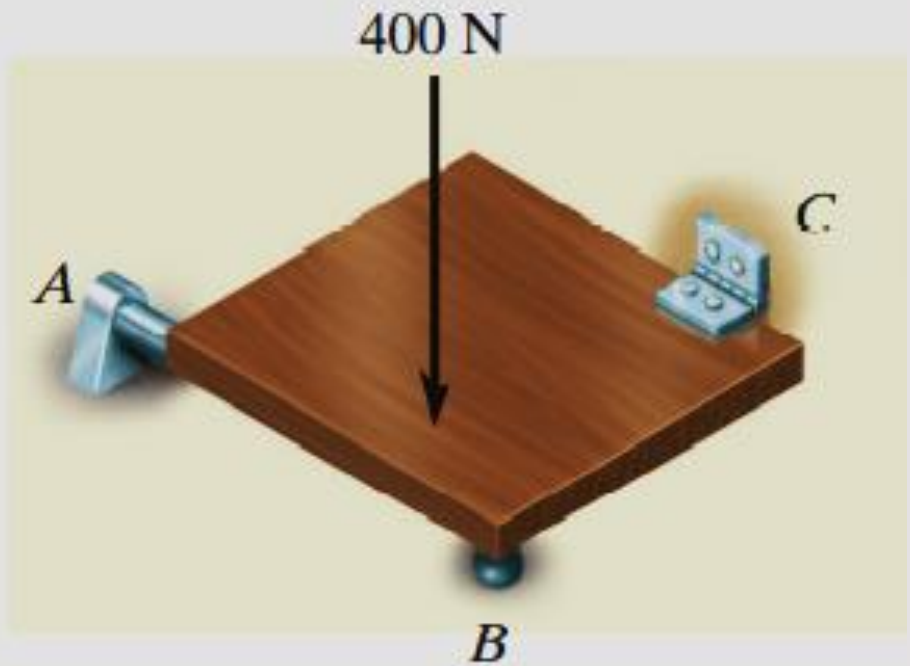
- As componentes de momento são desenvolvidas pelo pino sobre o elemento para impedir a rotação em torno dos eixos *x* e *z*.





4.5. EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

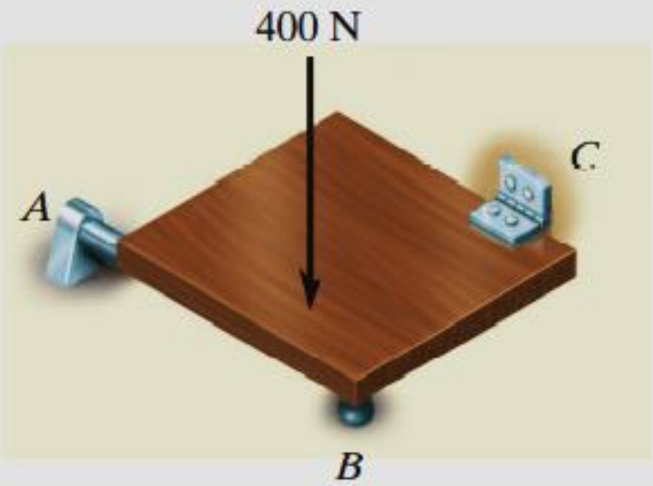
3) Mancal radial em A e dobradiça em $\boldsymbol{C}$ corretamente alinhados. Esfera (atuando como rolete) em $\boldsymbol{B}$.

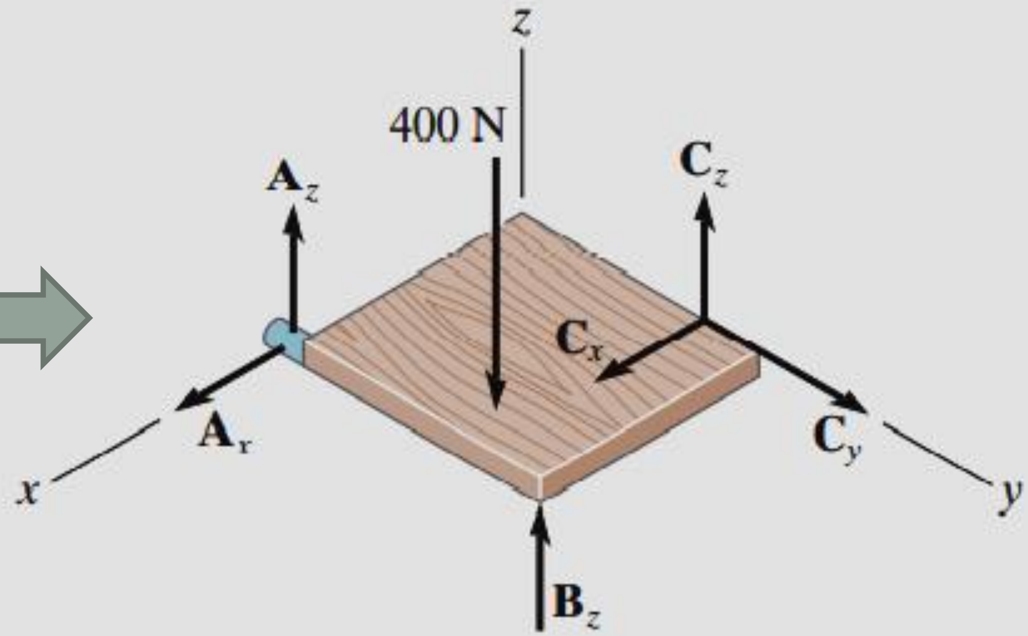


Solução:

- Apenas reações de força são desenvolvidas sobre a placa pelo mancal e pela dobradiça a fim de impedir a rotação em relação a cada eixo de coordenada;

- Nenhum momento é desenvolvido na dobradiça ou no mancal.





4.5. EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

Equações de equilíbrio:

- As condições de equilíbrio de um corpo rígido sujeito a um sistema de forças tridimensional exigem que as resultantes de força e de momento de binário que atuam sobre o corpo sejam iguais a zero;

a) Equações de equilíbrio vetoriais

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$
$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

- $\sum \boldsymbol{F}$ é a soma vetorial de todas as forças externas que agem sobre o corpo;

- $\sum \boldsymbol{M_O}$ é a soma dos momentos de binário e dos momentos de todas as forças em relação a qualquer ponto ***O*** localizado dentro ou fora do corpo.

4.5. EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

Equações de equilíbrio:

b) Equações de equilíbrio escalares

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma M_x \mathbf{i} + \Sigma M_y \mathbf{j} + \Sigma M_z \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

- Como as componentes $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ são independentes, estas equações são satisfeitas desde que

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0$$

4.6. RESTRIÇÕES E DETERMINÂNCIA ESTÁTICA

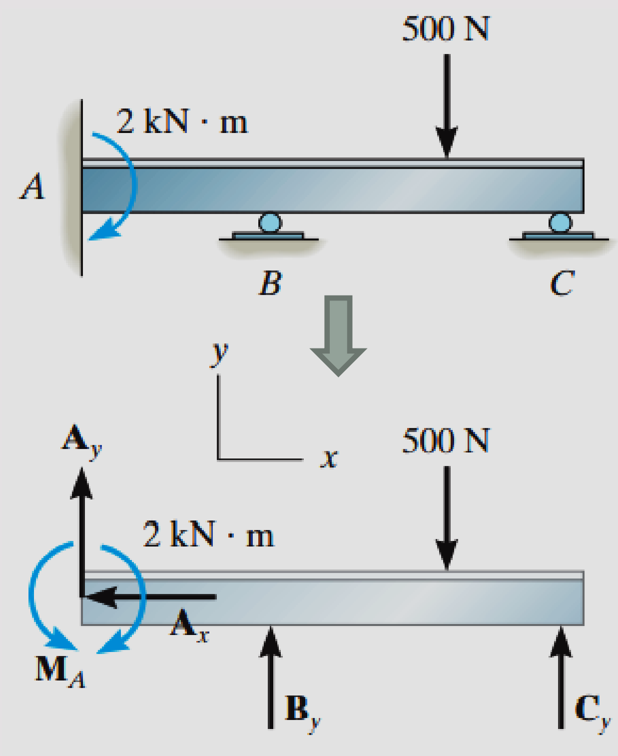
- Para garantir o equilíbrio de um corpo rígido, não só é necessário satisfazer as equações de equilíbrio, mas também o corpo precisa estar adequadamente fixo ou restrito por seus apoios;

- Alguns corpos podem ter mais apoios do que o necessário para o equilíbrio, enquanto outros podem tê-los em número insuficiente ou arranjados de maneira a permitir que o corpo se mova.

Restrições redundantes:

- Quando um corpo possui apoios redundantes, ou seja, mais apoios do que o necessário para mantê-lo em equilíbrio, ele se torna estaticamente indeterminado;

- Isto significa que haverá mais cargas desconhecidas sobre o corpo do que equações de equilíbrio disponíveis para sua solução.



(a)

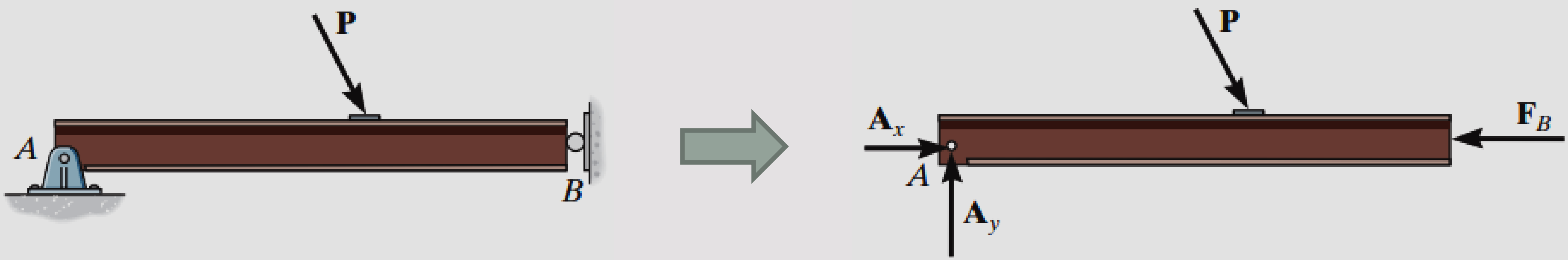
4.6. RESTRIÇÕES E DETERMINÂNCIA ESTÁTICA

Restrições impróprias:

- Ter o mesmo número de forças reativas desconhecidas que equações de equilíbrio disponíveis nem sempre garante que um corpo será estável quando sujeito a determinada carga;

- Por exemplo, o apoio com pino em $\boldsymbol{A}$ e o apoio de rolete em $\boldsymbol{B}$ para a viga na figura abaixo são colocados de tal forma que as linhas de ação das forças reativas sejam concorrentes no ponto $\boldsymbol{A}$;

- Como consequência, a carga aplicada $\boldsymbol{P}$ fará com que a viga gire ligeiramente em relação a $\boldsymbol{A}$ e, portanto, a viga está incorretamente restrita, $\sum \boldsymbol{M_A} \neq 0$;



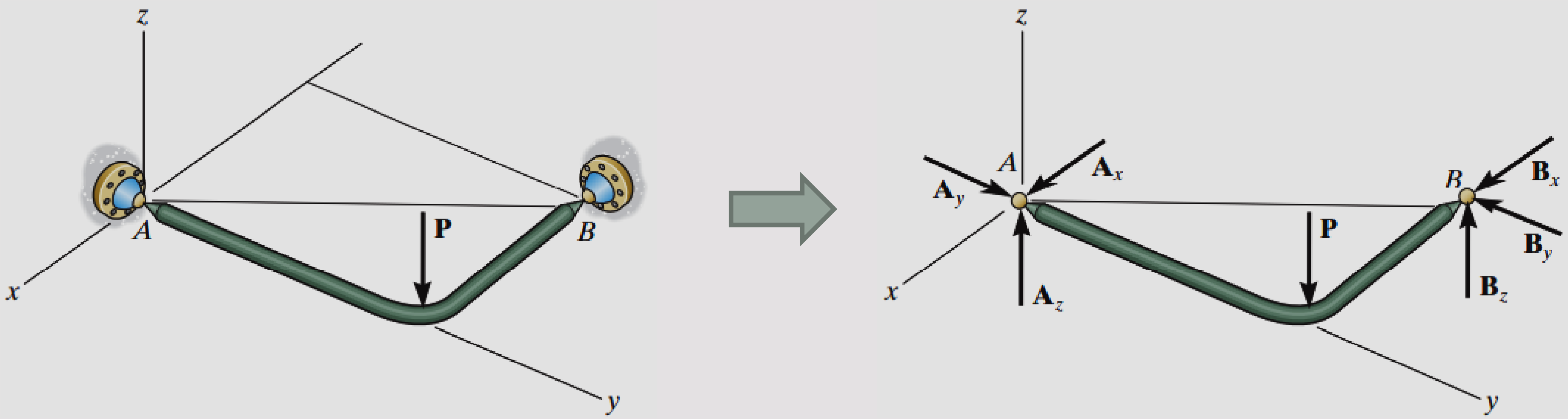
4.6. RESTRIÇÕES E DETERMINÂNCIA ESTÁTICA

Restrições impróprias:

- Em três dimensões, um corpo estará incorretamente restrito se as linhas de ação de todas as forças reativas interceptarem um eixo comum;

- Por exemplo, todas as forças reativas nos apoios de junta esférica em $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ na figura abaixo interceptam o eixo que passa por $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$;

- Como todos os momentos dessas forças em relação a A e a B são zero, então a carga P girará o membro em relação ao eixo $\boldsymbol{AB}$, $\sum \boldsymbol{M_{AB}} \neq 0$.



ATÉ A PRÓXIMA!