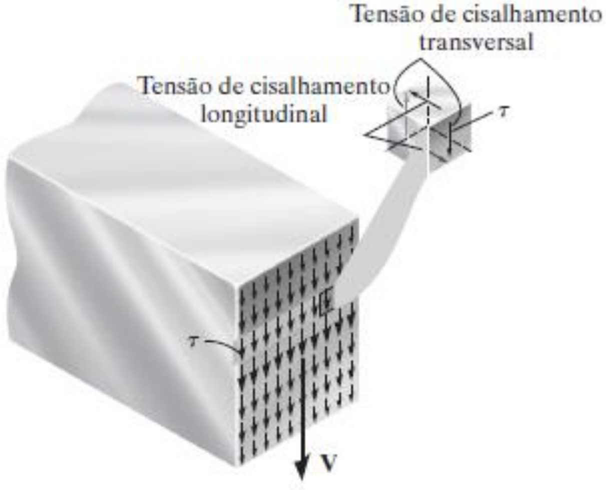
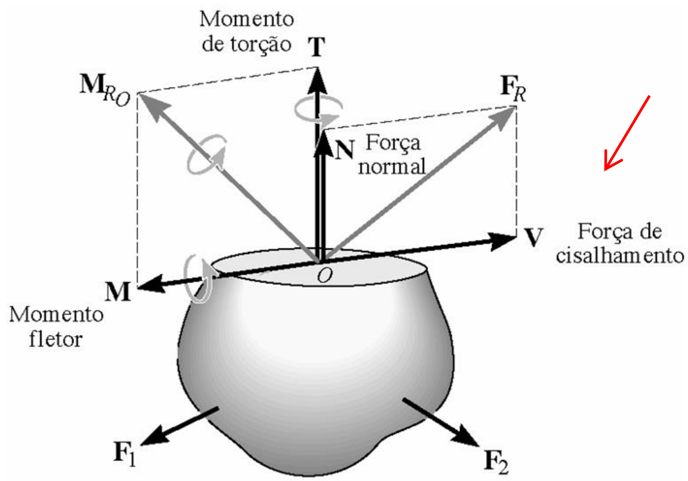
Capítulo 7
Cisalhamento

7.1 – Cisalhamento em elementos retos

O **cisalhamento** V é o resultado de uma distribuição de tensões de cisalhamento transversal que age na seção da viga. Devido à propriedade complementar de cisalhamento, as tensões de cisalhamento longitudinais associadas também agirão ao longo dos planos longitudinais da viga. Por exemplo, um elemento retirado de um ponto interno está sujeito a tensões de cisalhamento transversal e longitudinal.

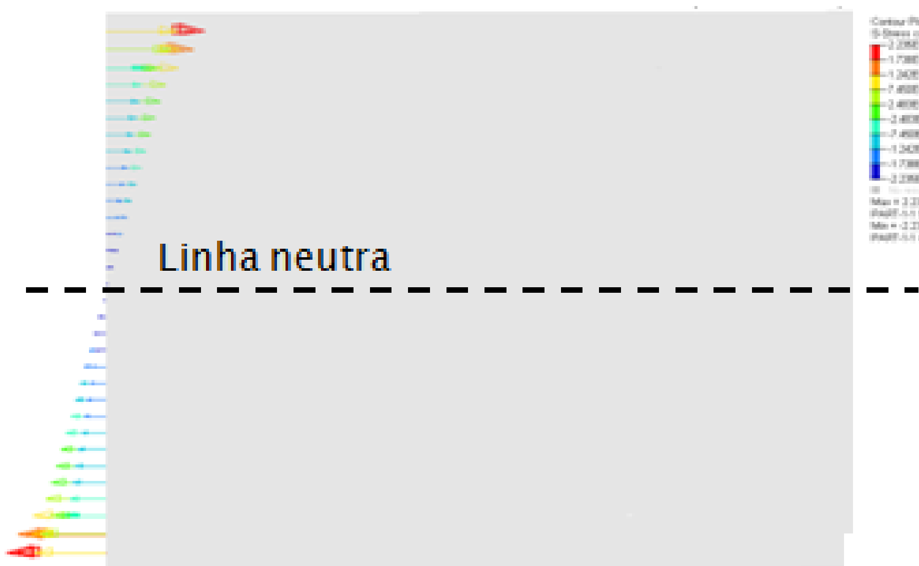


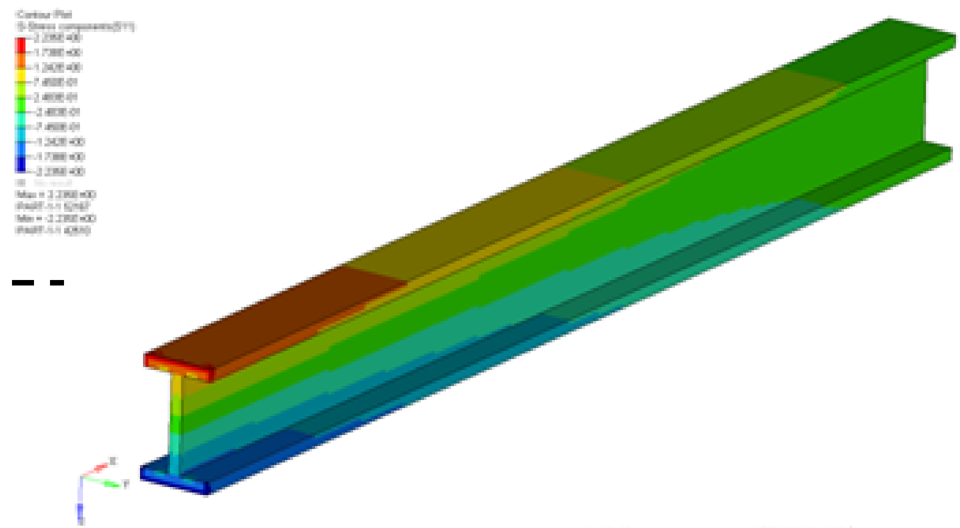


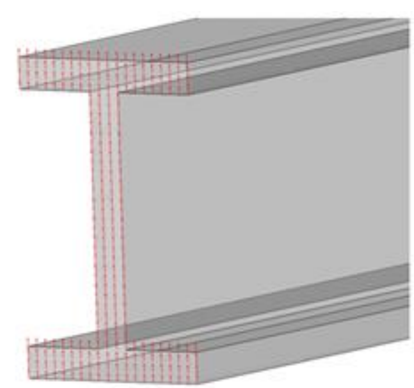
Os esforços suportados por uma viga são de dois tipos:

Tensões normais causadas pelo **momento fletor**

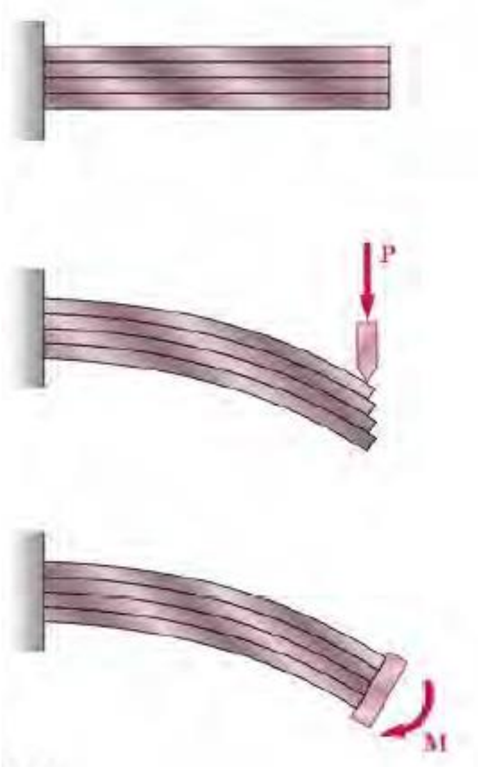
Tensões cisalhantes causadas pelo **esforço cortante**

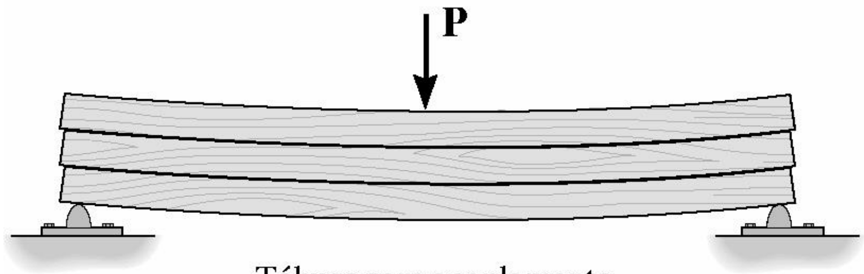




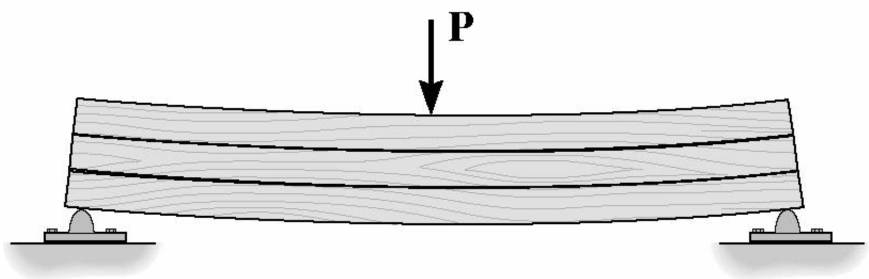


É possível explicar fisicamente por que a tensão de cisalhamento se desenvolve nos planos longitudinais de uma viga considerando ela composta por três tábuas. Se as superfícies forem lisas e as tábuas estiverem soltas, deslizaram. Do contrário, surgirão tensões que impedirão que deslizem e a viga agirá como uma unidade única.



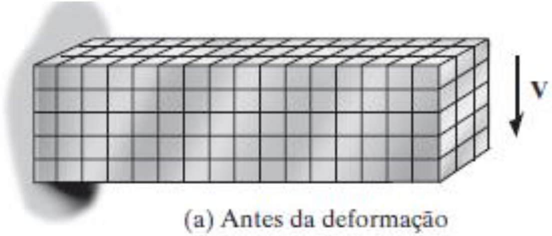


Tábuas sem acoplamento

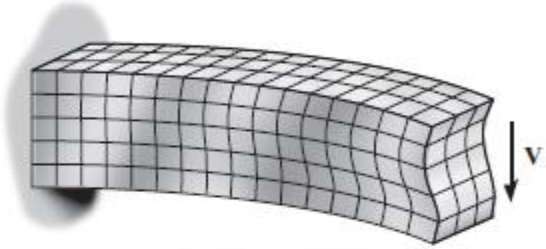


Tábuas com acoplamento

As tensões tenderão a distorcer a seção transversal de uma maneira bastante complexa. Quando o **cisalhamento** V é aplicado, essa distribuição não uniforme na seção transversal fará com que ela se deforme, isto é, não permaneça plana. Lembre-se que no desenvolvimento da fórmula de flexão, consideramos que as seções permaneciam planas. Embora essa regra seja infringida, podemos considerar que a **distorção da seção é pequena o suficiente** para se desprezada. Essa consideração é particularmente verdadeira para ao caso mais comum como de uma viga esbelta, cuja largura é pequena em relação ao seu comprimento.



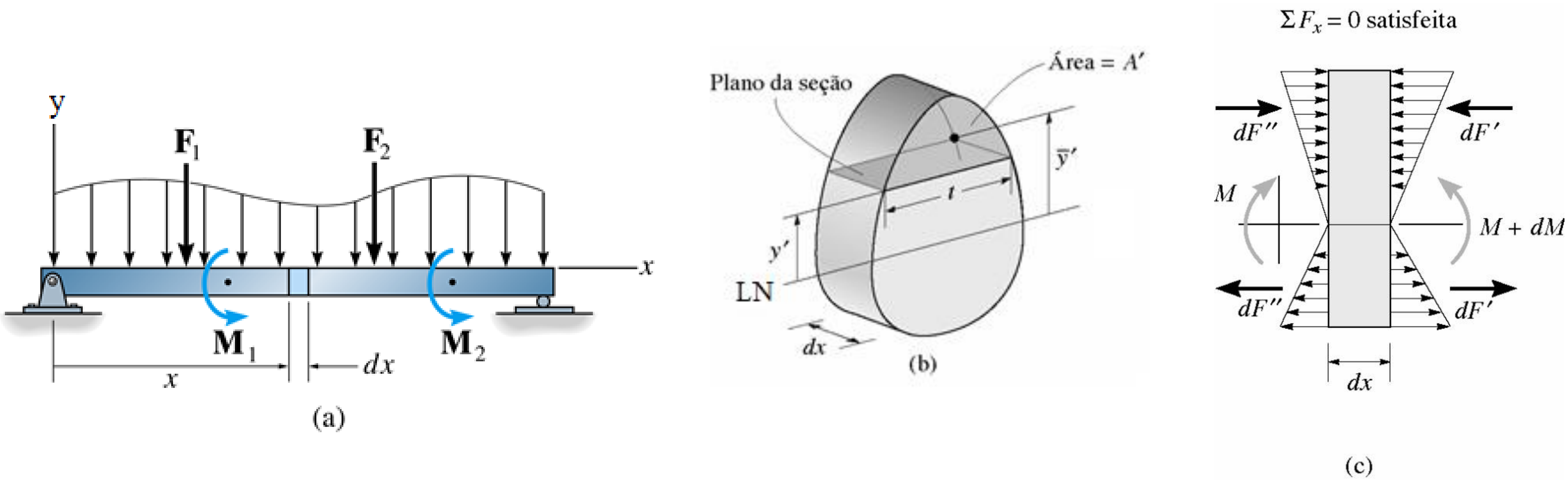
(a) Antes da deformação



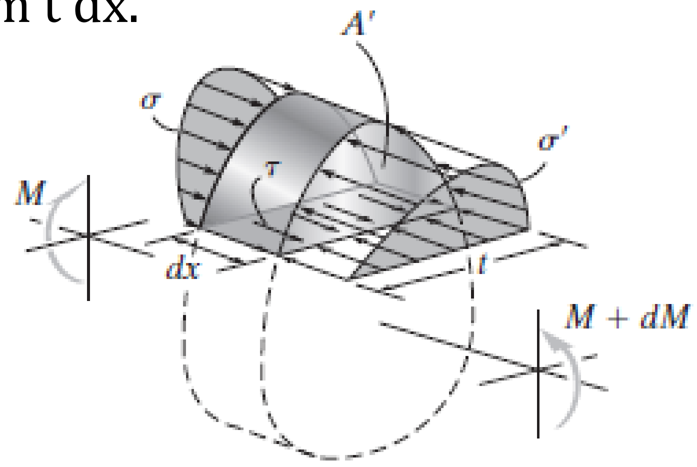
(b) Após a deformação

7.2 – A fórmula do cisalhamento

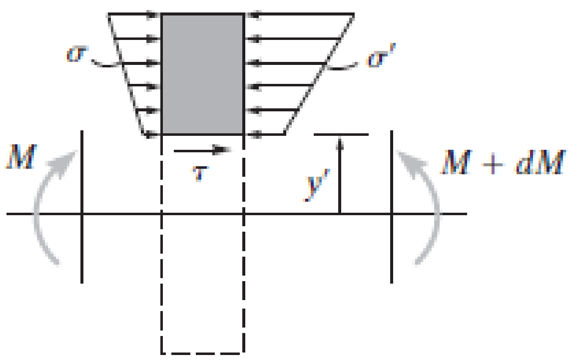
Neste caso, onde a distribuição não é uniforme nem linear, a distribuição de tensões não é facilmente em termos matemáticos, então desenvolviremos uma fórmula para tensão indiretamente, através da relação entre o momento e o cisalhamento $V = dM/dx$



Considere o segmento na parte superior do elemento foi secionado em y' em relação ao eixo neutro (b). Como a diferença entre os momentos resultantes em cada lado do elemento é dM, podemos ver que na figura (d) o somatório de força em x só será zero se uma tensão de cisalhamento longitudinal aja sobre a face inferior do segmento. Considerando que a tensão de cisalhamento seja constante em toda a largura t da face inferior e age em t dx.



Vista tridimensional



Vista lateral

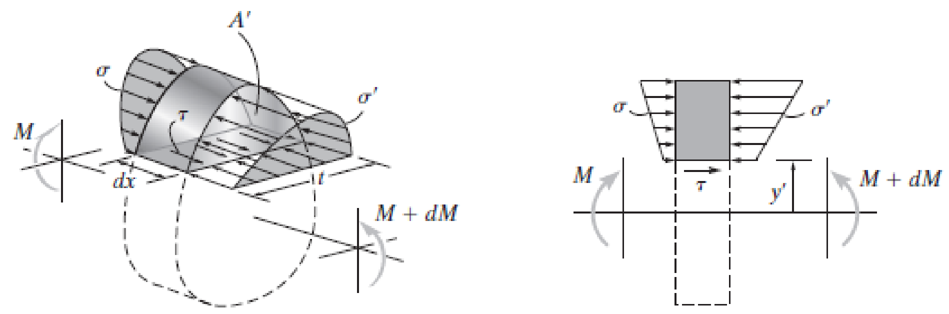
(d)

$$\overset{+}{\longleftarrow} \sum F_x = 0 \qquad \int_{A'} \sigma' dA' - \int_{A'} \sigma dA' - \tau(tdx) = 0$$

$$\int_{A'} \left(\frac{M + dM}{I}\right) y dA' - \int_{A'} \frac{M}{I} y dA' - \tau(tdx) = 0$$

$$\left(\frac{dM}{I}\right) \int_{A'} y dA' = \tau(tdx)$$

$$\tau = \frac{1}{It}\left(\frac{dM}{dx}\right) \int_{A'} y dA'$$



Vista tridimensional (d) Vista lateral

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

$$Q = \int_{A'} y dA'$$

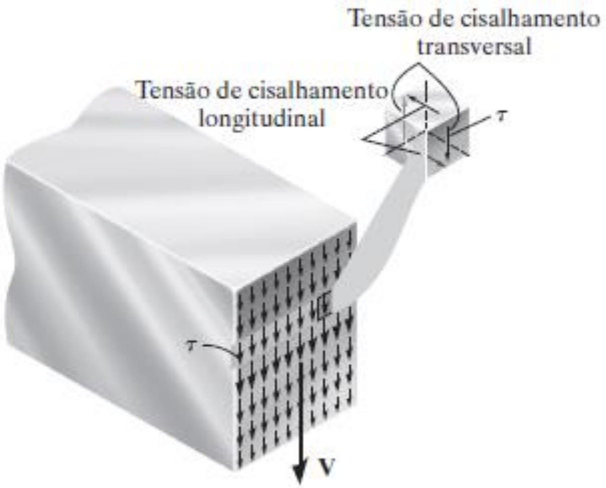
Momento de primeira ordem da área A’ em torno do eixo neutro.

Pela definição de centroide da área A’ :

$$Q = \overline{y}' A'$$

A fórmula do cisalhamento é usada para encontrar a tensão de cisalhamento na seção transversal.

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$



onde $Q = \bar{y}' A'$

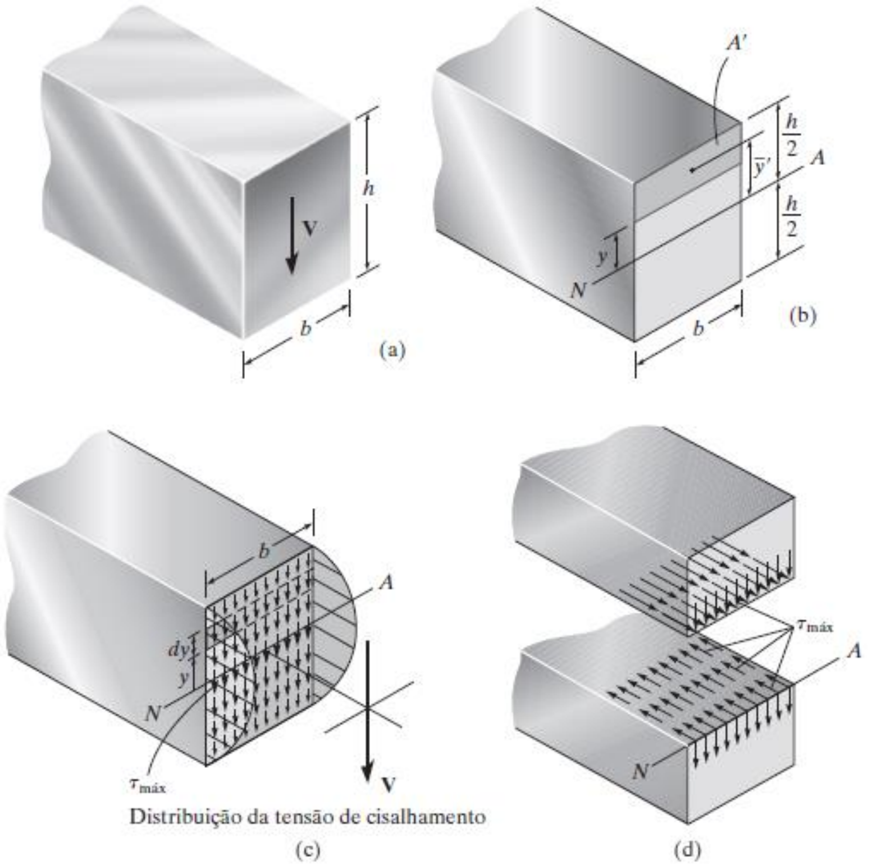
Q= momento estático da área A' em relação à LN (linha neutra)
τ = tensão de cisalhamento no elemento
V = força de cisalhamento interna resultante
I = momento de inércia da área da seção transversal *inteira*
t = largura da área da seção transversal do elemento

7.3 – Tensões de cisalhamento em vigas

SEÇÃO TRANSVERSAL RETANGULAR:

Para uma viga com seção transversal retangular, a *tensão de cisalhamento varia parabolicamente* com a altura. A tensão de cisalhamento máxima ocorre ao longo do eixo neutro.

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$



Distribuição da tensão de cisalhamento
(c)

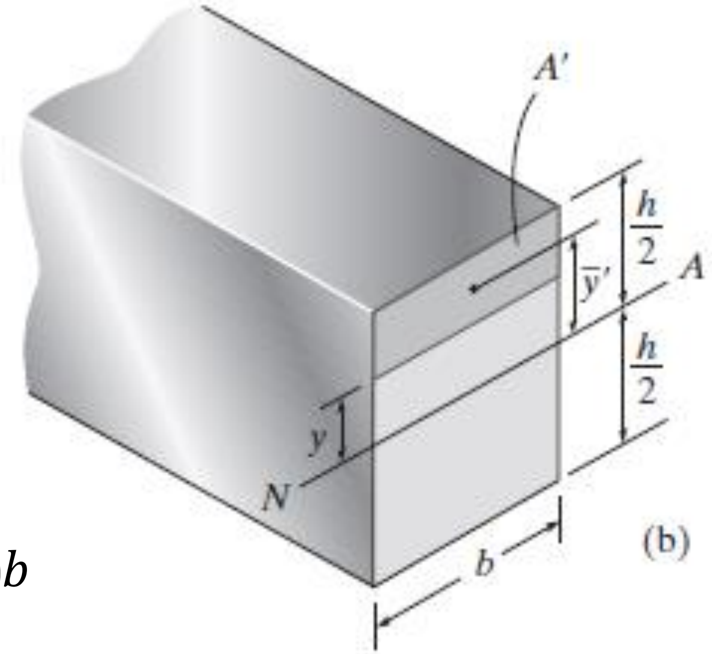
Para uma viga com seção transversal retangular:

$$Q = \overline{y}' A'$$

$$A' = (\frac{h}{2} - y)b$$

$$\overline{y}' = y + \frac{1}{2}(\frac{h}{2} - y)$$

$$Q = \overline{y}' A' = \left[y + \frac{1}{2}(\frac{h}{2} - y) \right](\frac{h}{2} - y)b = \frac{1}{2}(\frac{h^2}{4} - y^2)b$$

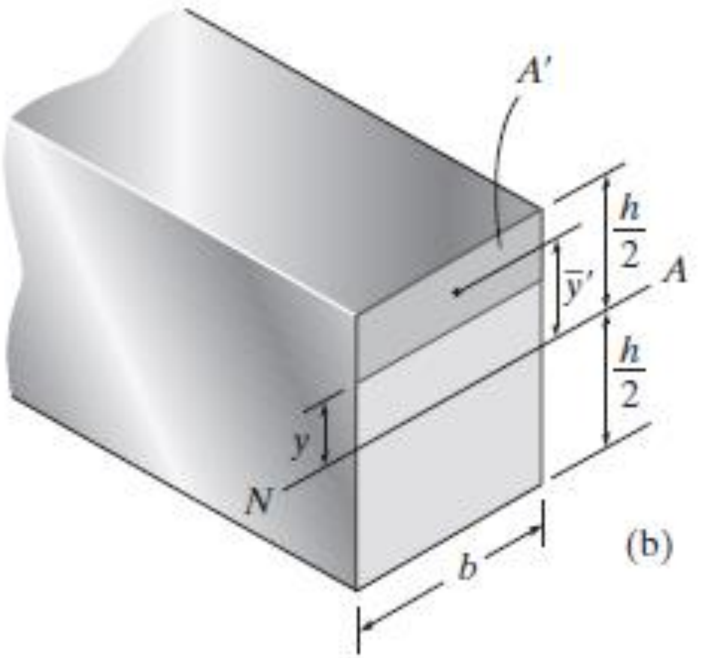


Aplicando a fórmula:

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V\frac{1}{2}(\frac{h^2}{4} - y^2)b}{\frac{1}{12}(bh^3)b} = \frac{6V}{bh^3}(\frac{h^2}{4} - y^2)$$

Este resultado indica que a distribuição da tensão de cisalhamento na seção transversal é **parabólica:**

$$\tau = \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$



Como y varia de +h/2 até –h/2 , até o máximo valor y=0 que valerá:

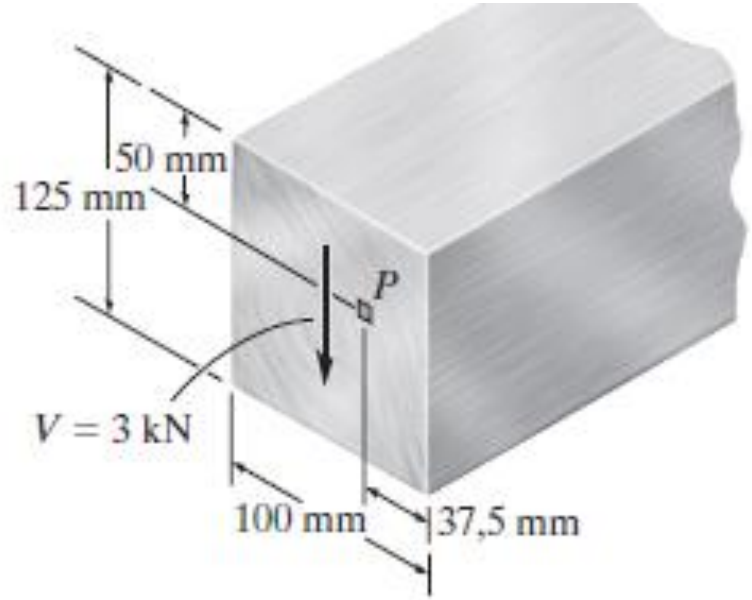
$$\tau_{máx} = \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4}\right)$$

$$\tau_{máx} = 1{,}5\frac{V}{A}$$

válida somente para **SEÇÃO TRANSVERSAL RETANGULAR**

Exemplo 1 -

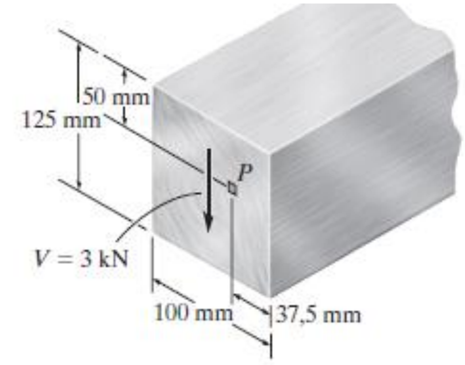
A viga é feita de madeira e está sujeita a uma força de cisalhamento vertical interna resultante $V = 3$ kN. (a) Determine a tensão de cisalhamento na viga no ponto P e (b) calcule a tensão de cisalhamento máxima na viga.



(a) O momento de inércia da área da seção transversal calculado em torno do eixo neutro é

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(100)(125)^3 = 16{,}28\times10^6\ \text{mm}^4$$

$$Q = \bar{y}A' = \left[12{,}5 + \frac{1}{2}(50)\right](50)(100) = 18{,}75\times10^4\ \text{mm}^3$$

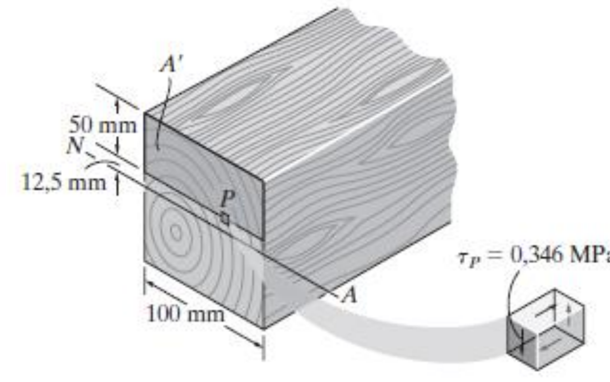


(a)

Aplicando a fórmula do cisalhamento, temos

$$\tau_P = \frac{VQ}{It} = \frac{(3\times10^3 N)(18{,}75\times10^4 mm^3)}{(16{,}28\times10^6 mm^4)(100mm)}$$

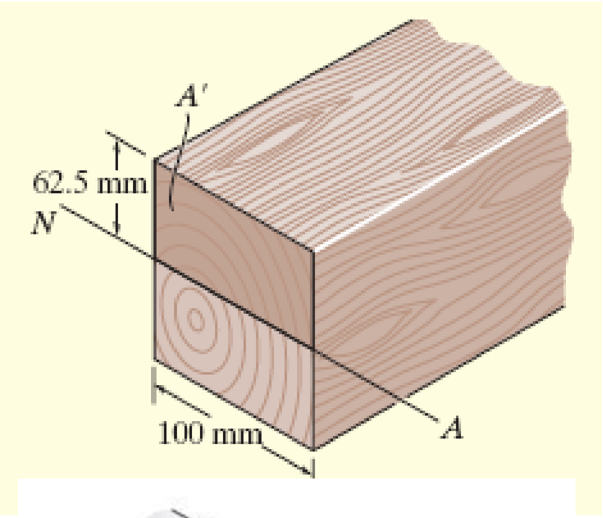
$$\boxed{\tau_P = 0{,}346\ \text{MPa}}$$



(b) (c)

(b)a tensão de cisalhamento máxima ocorre no eixo neutro, visto que t é constante em toda a seção:

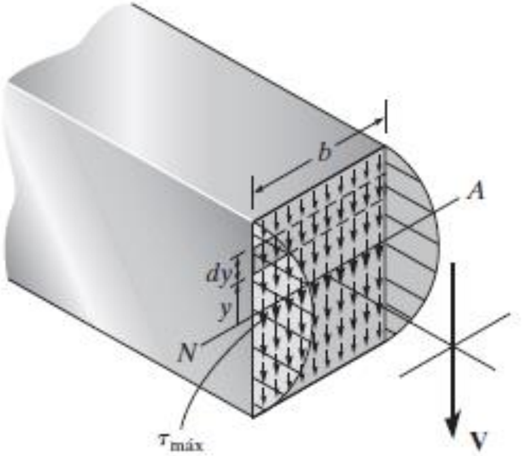
$$Q = \bar{y}'A' = \left(\frac{62{,}5}{2}\right)(100)(62{,}5) = 19{,}53\times10^4\ \text{mm}^3$$



Aplicando a fórmula do cisalhamento, temos

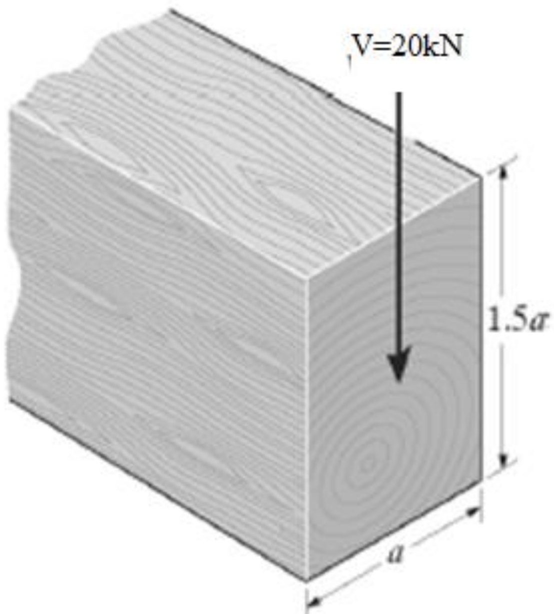
$$\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = \frac{3\times10^3\times19{,}53\times10^4}{16{,}28\times10^6\times100}$$

$$\boxed{\tau_{\text{máx}} = 0{,}360\ \text{MPa}}$$



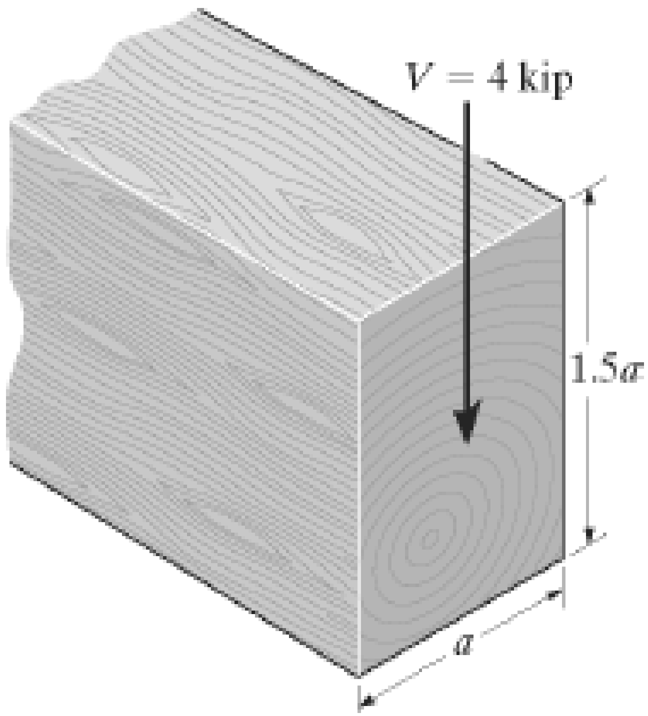
Exercício de fixação –

1) A viga tem seção transversal retangular e é feita de madeira. Se for submetida a um cisalhamento V=20kN, e a=250mm, determine a tensão de cisalhamento máxima e trace uma curva da variação de tensão de cisalhamento. Resposta: $\tau_{máx}$=0,32MPa



Exercício de fixação –

2) A viga tem seção transversal retangular e é feita de madeira com tensão de cisalhamento admissível τ_{adm}=1,6ksi. Se for submetida a um cisalhamento V=4kip, determine a menor dimensão *a* de sua parte inferior e 1,5*a* de seus lados. Resposta: a=1,58in



SEÇÃO TRANSVERSAL CIRCULAR MACIÇA:

Para uma viga com seção transversal circular:

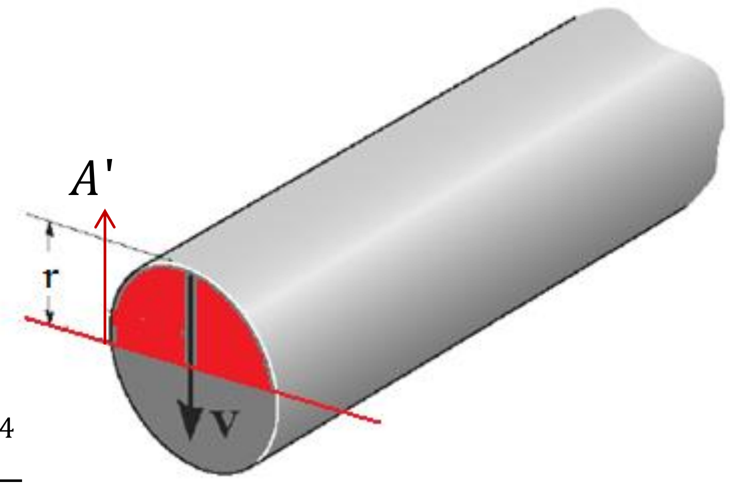
$$Q = \bar{y}' A'$$

$$A' = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$\bar{y}' = \frac{4r}{3\pi}$$

$$Q = \bar{y}' A' = \frac{4r}{3\pi} \frac{\pi r^2}{2} = \frac{2r^3}{3} \qquad t = 2r \qquad I = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = \frac{V \frac{2r^3}{3}}{\frac{\pi r^4}{4} 2r} = \frac{4V}{3\pi r^2} = \frac{4V}{3A}$$

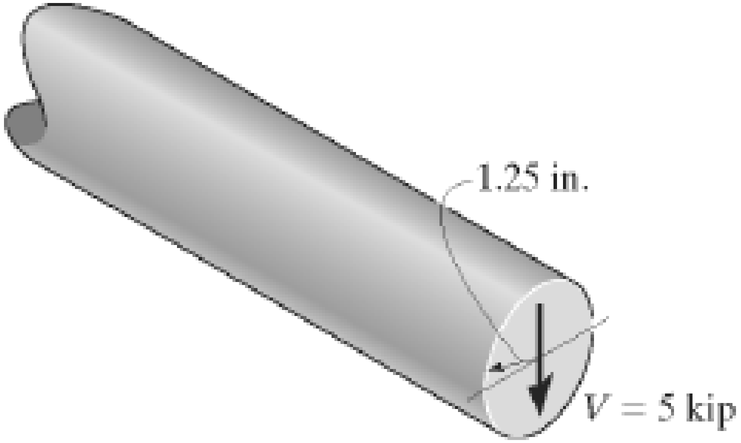


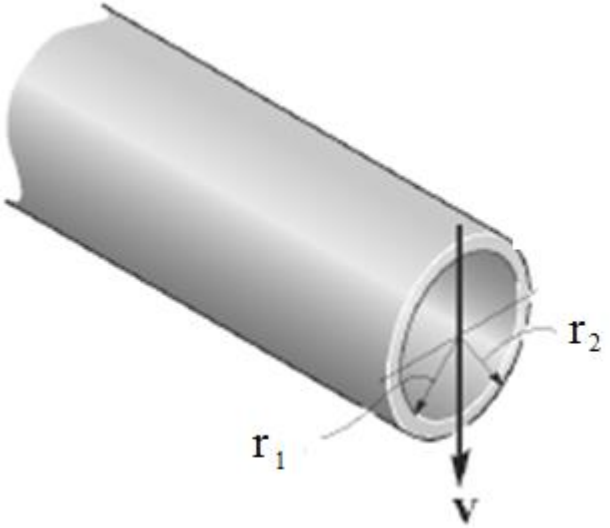
$$\tau_{máx} = 1{,}33 \frac{V}{A}$$

válida somente para **SEÇÃO TRANSVERSAL CIRCULAR MACIÇA**

Exercício de fixação –

3) O raio da haste de aço é 1,25in. Se ela for submetida a um cisalhamento V=5kip, determine a tensão de cisalhamento máxima.
Resposta: $\tau_{máx}$=1,36ksi.





SEÇÃO TRANSVERSAL CIRCULAR VAZADA:

Para uma viga com seção transversal circular:

$$Q = \bar{y}' A'$$

$$A' = \frac{\pi}{2}(r_2^2 - r_1^2)$$

$$Q = \bar{y}' A' = \frac{4r_2}{3\pi}\frac{\pi r_2^2}{2} - \frac{4r_1}{3\pi}\frac{\pi r_1^2}{2} \qquad t = 2(r_2 - r_1) \qquad I = \frac{\pi}{4}(r_2^4 - r_1^4)$$

$$\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = \frac{4V}{3A}\left(\frac{r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{r_2^2 + r_1^2}\right)$$

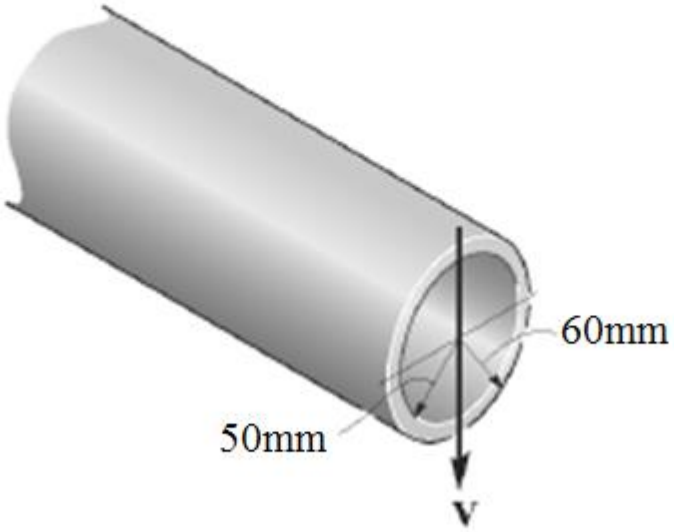
$$A = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$

$$\boxed{\tau_{máx} = 1{,}33\frac{V}{A}\left(\frac{r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{r_2^2 + r_1^2}\right)}$$

válida somente para **SEÇÃO TRANSVERSAL CIRCULAR VAZADA E MACIÇA**

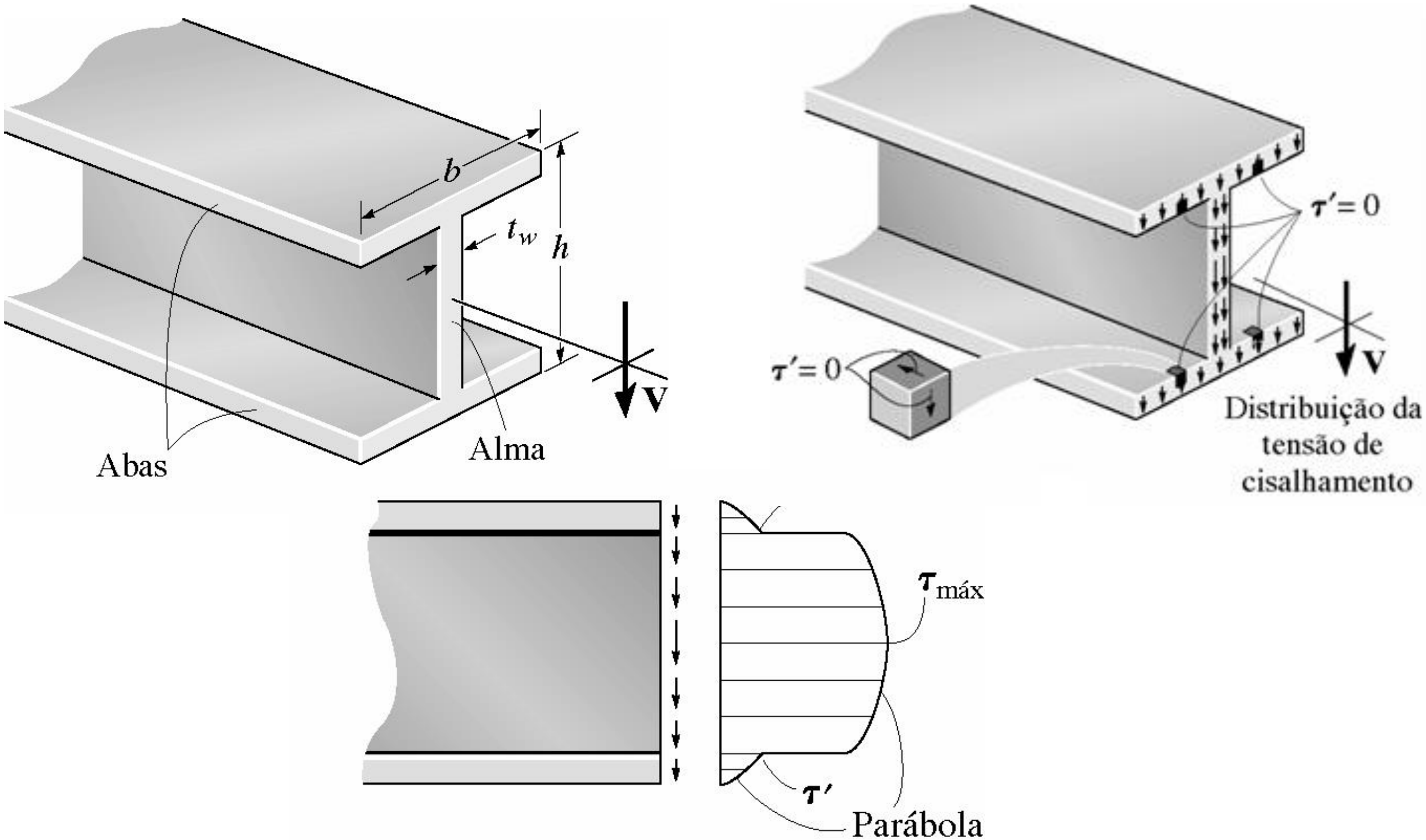
Exercício de fixação –

4) Se o tubo estiver sujeito a um cisalhamento V=75kN, determine a tensão de cisalhamento máxima nele. Resposta: $\tau_{máx}$ =43,2MPa



VIGAS DE ABAS LARGAS:

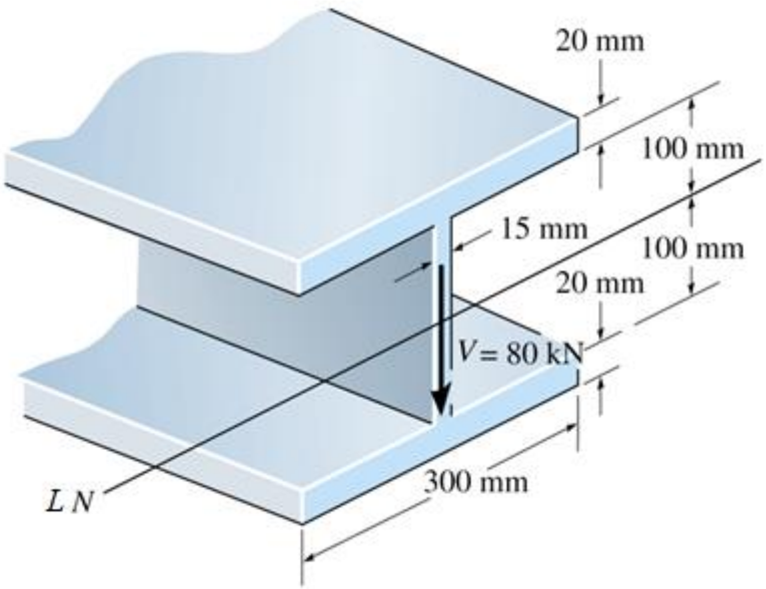
Consistem em duas "abas" largas e uma "alma."



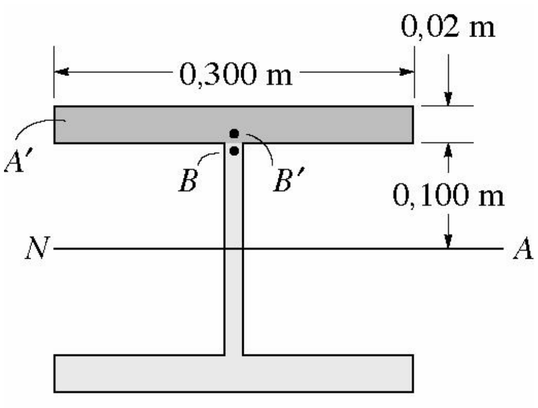
Intensidade da distribuição da tensão de cisalhamento (vista lateral)

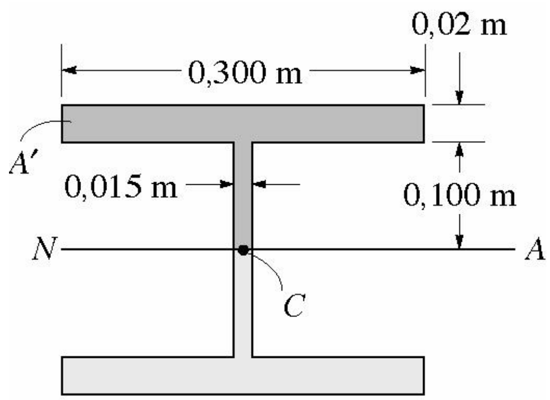
Exercício de fixação –

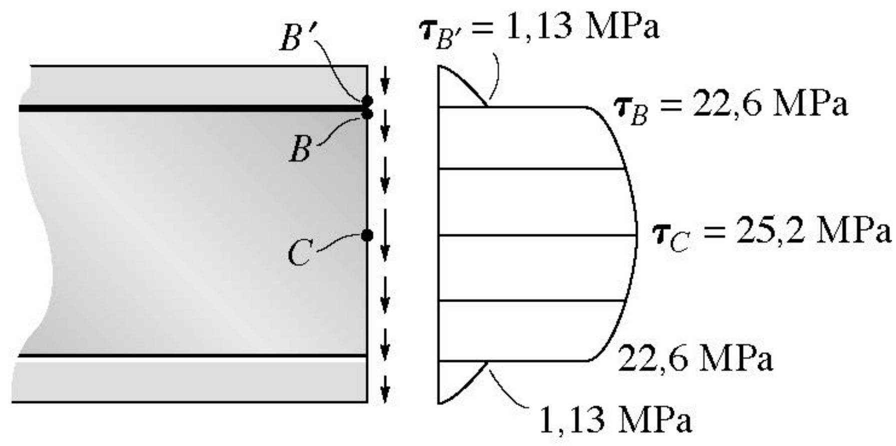
5) Uma viga de aço tem as dimensões mostradas na figura abaixo. Se for submetida a uma força cortante V=80kN (a) trace uma curva da distribuição da tensão de cisalhamento que age na área da seção transversal da viga e (b) determine a força de cisalhamento à qual a alma resiste.



Respostas: (a) $\tau_C = \tau_{máx} = 25.2MPa$

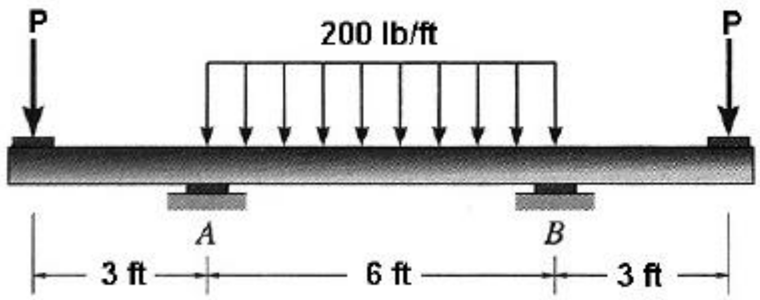


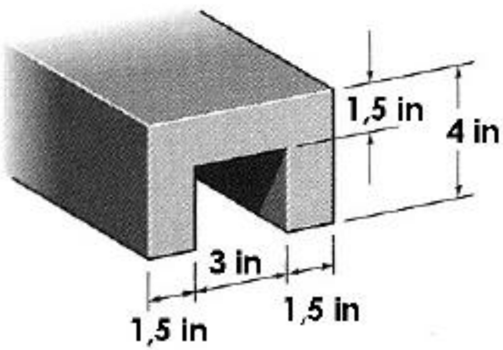




Exercício de fixação –

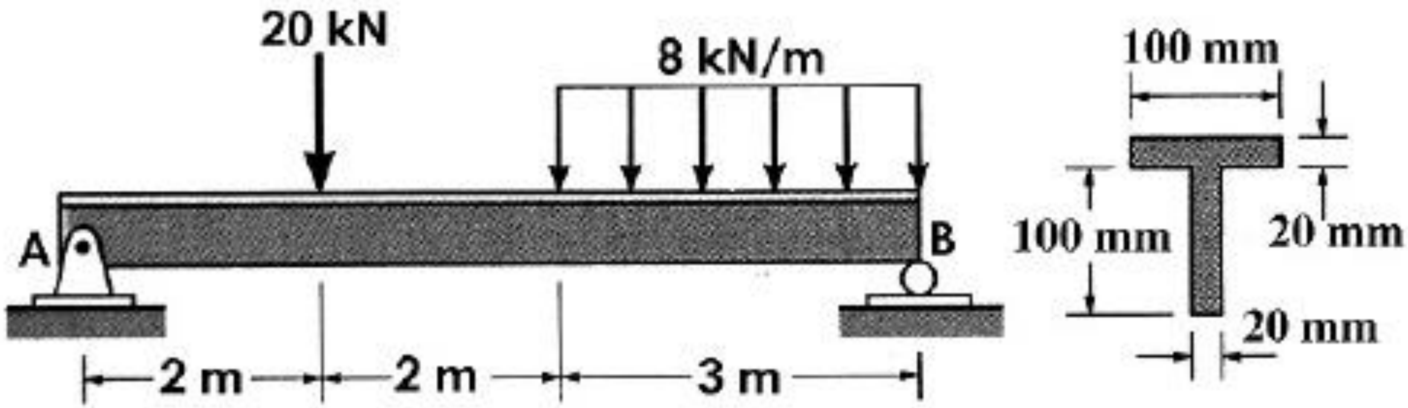
6) Se a força P=800lb, determine a tensão máxima de cisalhamento desta viga. Resposta: 99,8psi





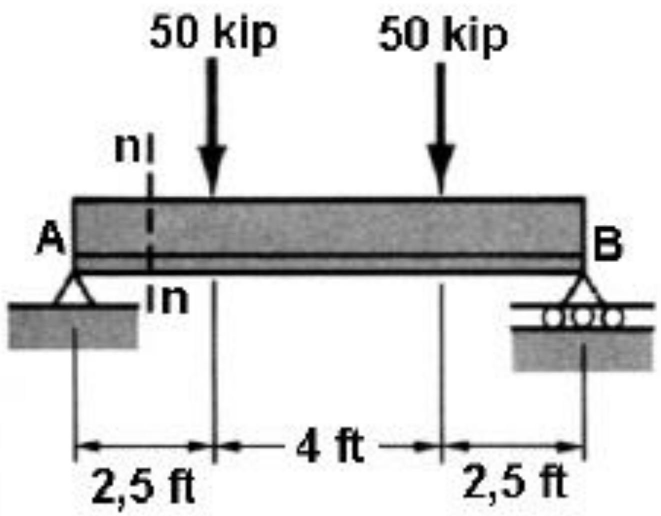
Exercício de fixação –

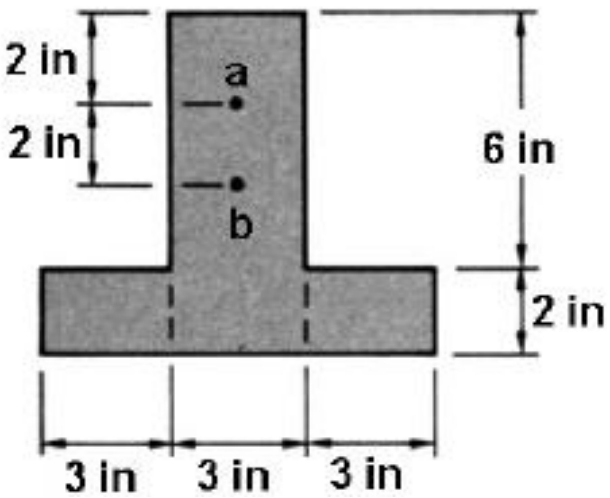
7) A viga T mostrada na figura abaixo está sujeita ao carregamento indicado. Determine a tensão de cisalhamento máxima desta viga. Resposta: 14,7MPa



Exercício de fixação –

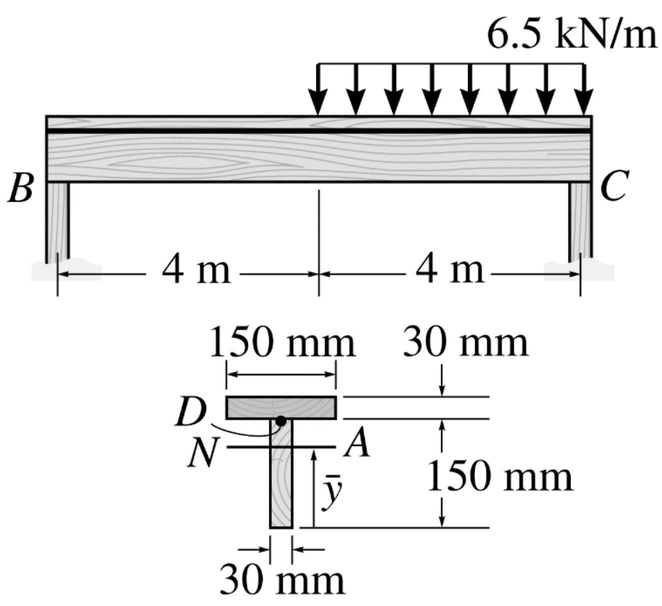
8) Para a viga com o carregamento mostrado, determine o valor da tensão de cisalhamento nos pontos a e b, localizados na seção transversal n-n. Respostas: 1,961ksi e 2,94ksi

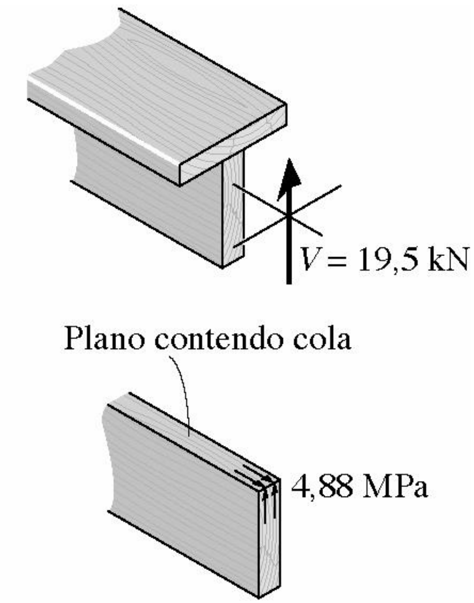




Exercício de fixação –

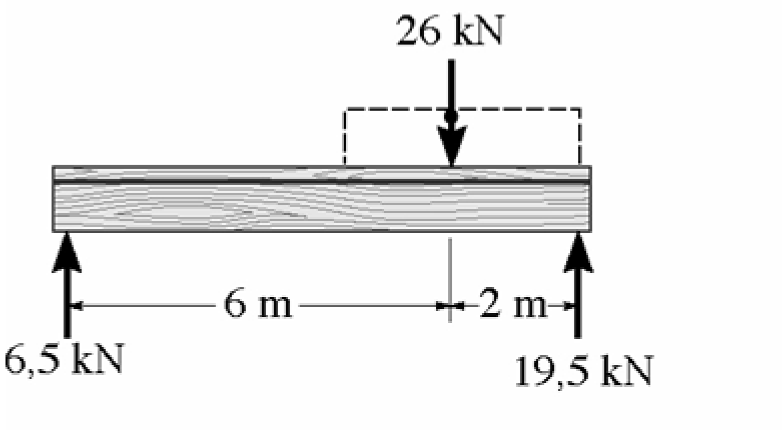
9) A viga mostrada na figura abaixo é feita com duas tábuas. Determine a tensão de cisalhamento máxima necessária na cola para que ela mantenha as tábuas unidas ao longo da linha de junção. Os apoios B e C exercem apenas reações verticais na viga.

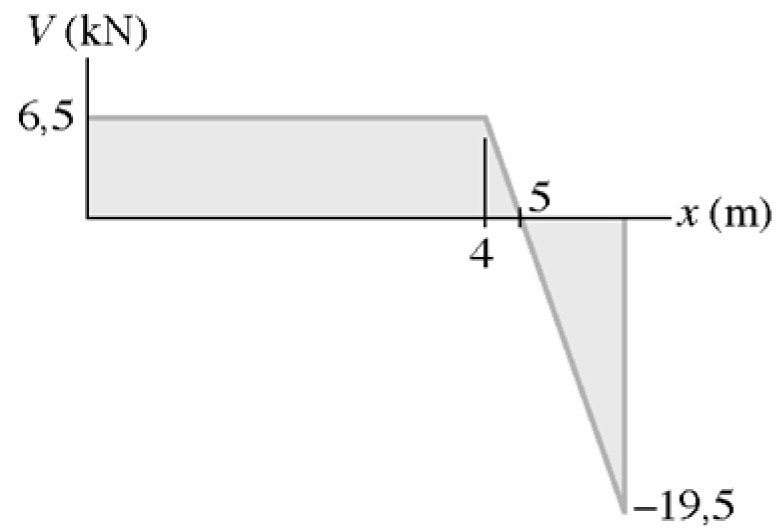


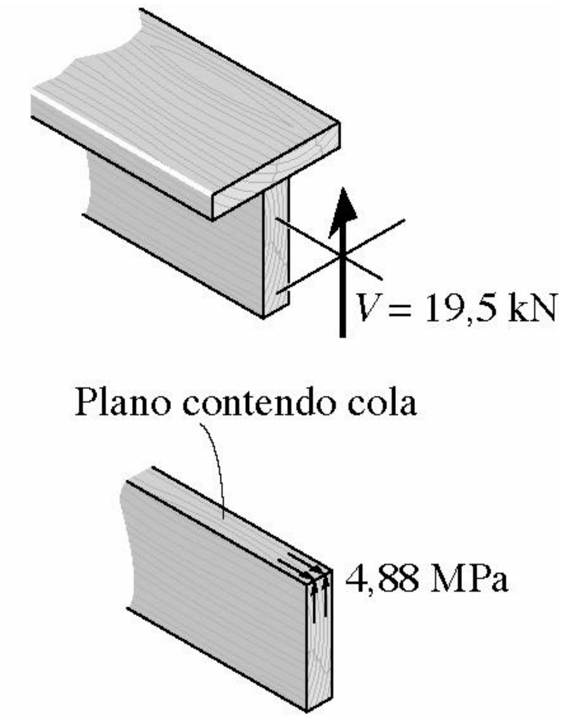


(c)

Respostas:


26 kN
6 m
2 m
6,5 kN
19,5 kN


V (kN)
6,5
5
x (m)
4
−19,5


V = 19,5 kN
Plano contendo cola
4,88 MPa