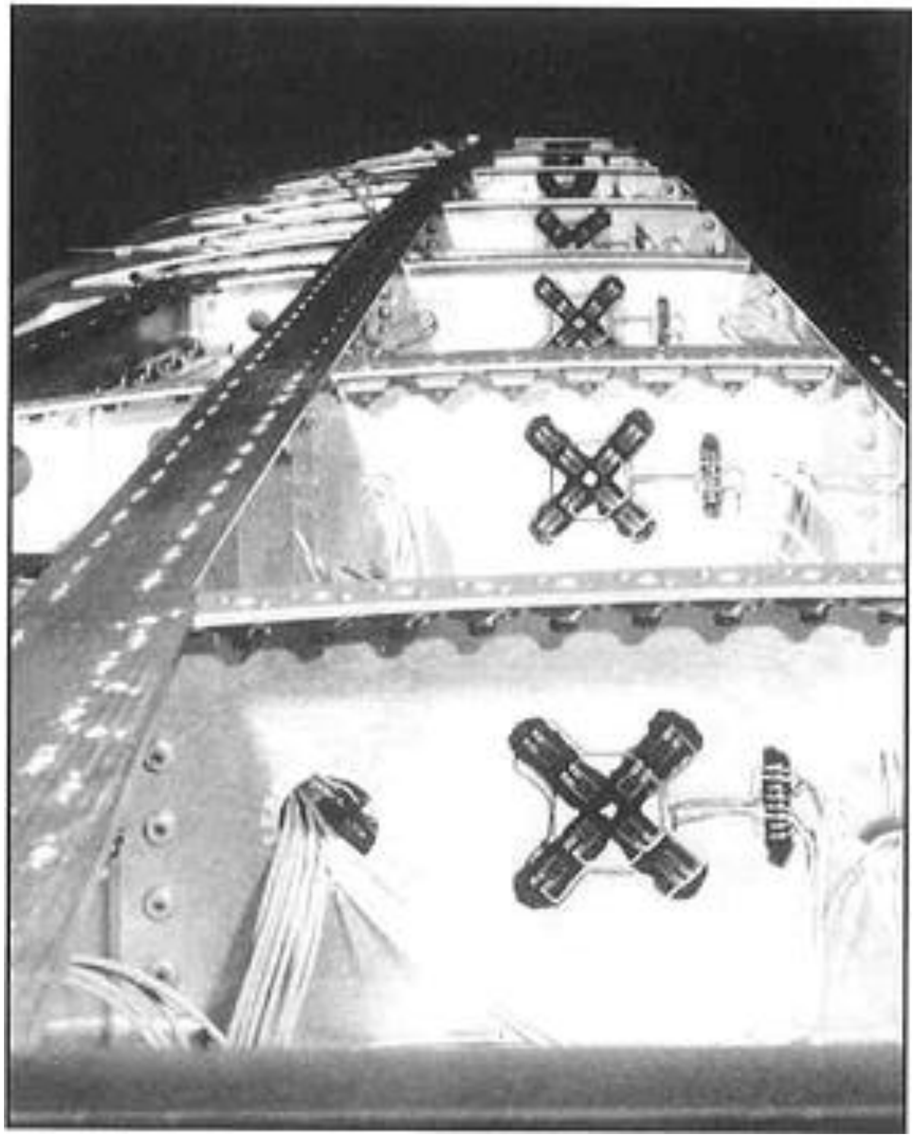
Instituto de Tecnologia - UFPA
Faculdade de Eng. Mecânica

Disciplina: Mecânica dos Sólidos II

Parte 2: Transformações de Deformações

Professor: Leonardo Dantas Rodrigues

Transformações de Deformações



Tensões complexas desenvolvidas em uma asa de avião analisadas com dados obtidos por meio de extensômetros

Transformações de Deformações – Estado Plano

• As transformações de deformações em um ponto são similares às transformações de tensões. Assim, boa parte dos procedimentos adotados na Parte 1 serão simplesmente adaptados aqui;

• Trataremos aqui sempre de **deformações específicas,** que são adimensionais.

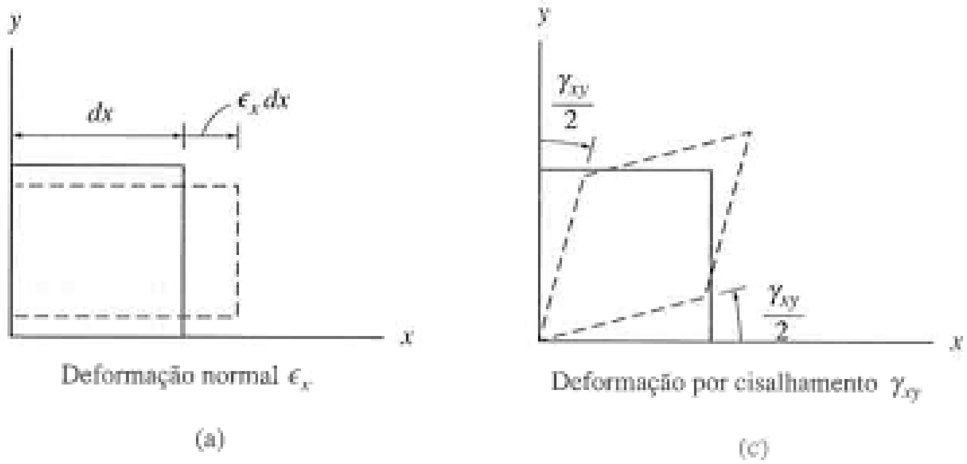
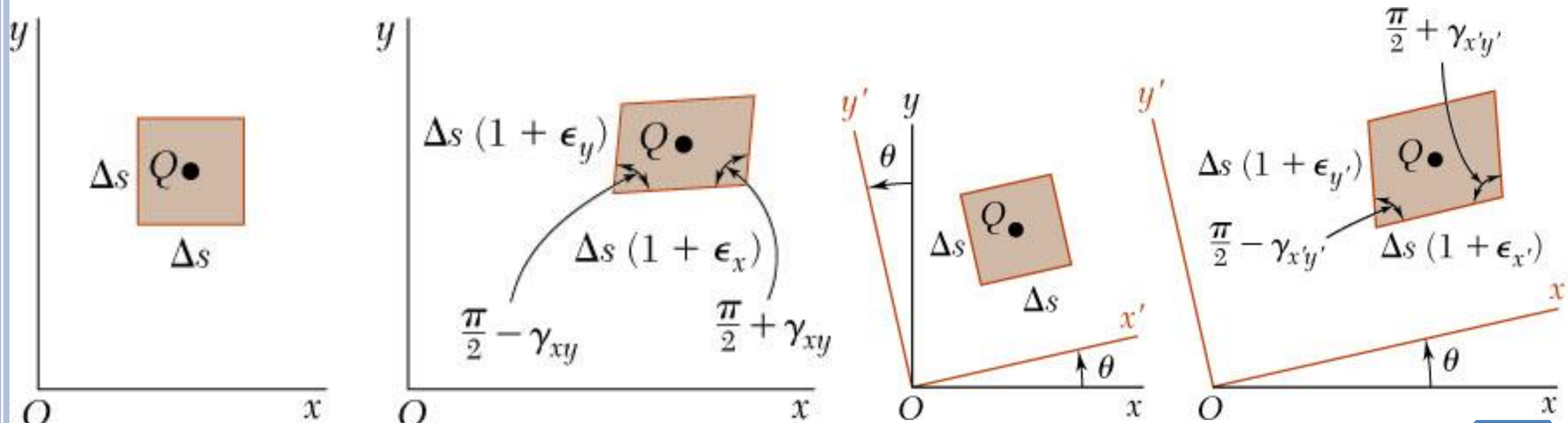


Figura 2.1

TRANSFORMAÇÕES – ESTADO PLANO

Vamos supor que existe um estado plano de deformações no ponto Q da figura 2.2a (com $\varepsilon_z = \Upsilon_{xz} = \Upsilon_{yz} = 0$), e que ele é definido pelas componentes de deformação ε_x, ε_y e Υ_{xy} associadas com os eixo x e y. Nosso objetivo é determinar em termos de ε_x, ε_y, Υ_{xy} e θ, as componentes de deformação $\varepsilon_{x'}$, $\varepsilon_{y'}$ e $\Upsilon_{x'y'}$ associadas com o sistema de referência x'-y', obtido pela rotação de x-y num ângulo θ (figura 2.2b).

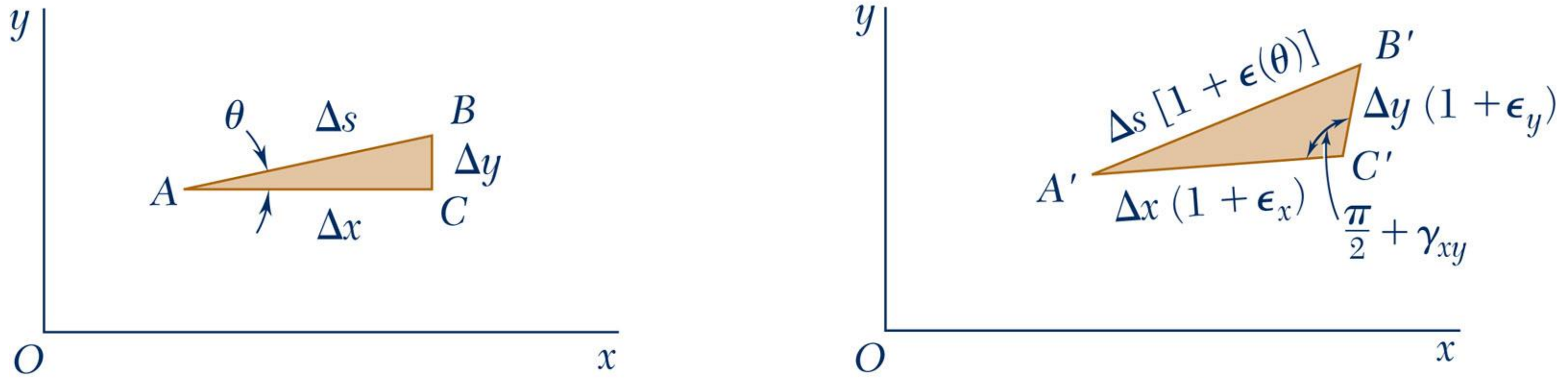


(a) **(b)**

Figura 2.2

Transformações – Estado Plano

Para essa dedução, usaremos os triângulos da figura 2.3 para representar os paralelogramos da figura 2.2.



(a) **(b)**

Figura 2.3

Aplicando a lei dos cossenos na figura 2.3b, tem-se que:

$$(A'B')^2 = (A'C')^2 + (B'C')^2 - 2(A'C')(B'C')\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right)$$

$$(\Delta s)^2[1+\varepsilon(\theta)]^2 = (\Delta x)^2[1+\varepsilon_x]^2 + (\Delta y)^2[1+\varepsilon_y]^2$$

$$-2(\Delta x)^2[1+\varepsilon_x]^2(\Delta y)^2[1+\varepsilon_y]^2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right) \qquad (2.1)$$

Transformações – Estado Plano

Da figura 2.3, sabemos que:

$$\Delta x = (\Delta s)\cos\theta \quad e \quad \Delta y = (\Delta s) sen\theta \qquad (2.2)$$

Considerando que γ_{xy} é muito pequeno, temos que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right) = -sen(\gamma_{xy}) \approx -\gamma_{xy} \qquad (2.3)$$

Substituindo (2.2) e (2.3) em (2.1), desprezando os termos de segunda ordem e sabendo que $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$, temos:

$$\varepsilon(\theta) = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \text{sen}^2\theta + \gamma_{xy} \text{sen}\,\theta\cos\theta \qquad (2.4)$$

Definindo $\varepsilon_{x'}$ na direção x' (θ) e $\varepsilon_{y'}$ na direção y' (θ+90º) e usando (1.4) e (1.5), temos:

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} sen 2\theta \qquad (2.5)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} sen 2\theta \qquad (2.6)$$

TRANSFORMAÇÕES – ESTADO PLANO

Aplicando um ângulo $\theta = 45^o$ na eq. (2.4), obtemos a deformação normal específica na direção da bissetriz do ângulo formado pelos eixos x e y (figura 2.4) . Chamando essa deformação de ε_{OB},temos:

$$\varepsilon_{OB} = \varepsilon(45^o) = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy}) \qquad (2.7)$$

Isolando o termo γ_{xy} em (2.7), temos:

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{OB} - (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \qquad (2.8)$$

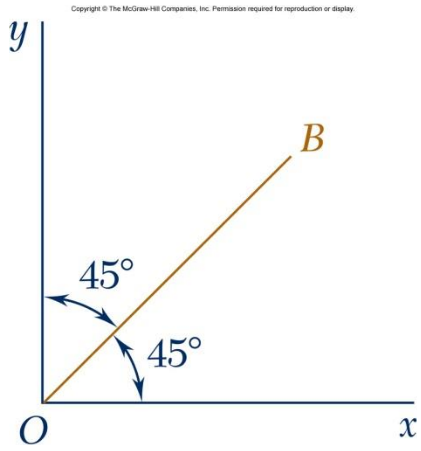


Figura 2.4

A equação (2.8) permite expressar a **deformação de cisalhamento associada a três deformações normais:** duas ortogonais (x e y) e uma na direção da bissetriz do ângulo formado pelas duas primeiras.

Esta relação é de extrema importância no uso de rosetas extensométricas.

Transformações – Estado Plano

Para definir $\gamma_{x'y'}$ a partir de ε_x, ε_y, γ_{xy} e θ, primeiro, encontraremos $\varepsilon_{OB'}$, que é a deformação normal específica ao longo da bissetriz do ângulo formado por x' e y'. Para isto, substituímos θ por $\theta+45^o$ na equação (2.4) e usamos $\cos(2\theta+90^o) = -sen(2\theta)$ e $sen(2\theta+90^o) = \cos(2\theta)$:

$$\varepsilon_{OB'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} sen(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos(2\theta) \qquad (2.9)$$

Escrevendo (2.8) em termos de x' e y', temos:

$$\gamma_{x'y'} = 2\varepsilon_{OB'} - (\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'}) \qquad (2.10)$$

Substituindo a equação (2.9) em (2.10) e sabendo que, no estado plano, tem-se $\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'}$, temos:

$$\boxed{\gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) sen(2\theta) + \gamma_{xy}\cos(2\theta)} \qquad (2.11)$$

Transformações – Estado Plano

Por uma questão de compatibilização, costuma-se dividir a equação (2.11) por 2:

$$\frac{\gamma_\theta}{2} = \frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2} sen(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos(2\theta) \qquad (2.12)$$

Assim, nota-se a grande semelhança entre as equações (2.5), (2.6) e (2.12) e as obtidas para transformações de tensões na **Parte 1.**

Deve-se, sempre atentar para o fato de que, os valores de τ_{xy} e $\tau_{x'y'}$ deverão ser substituídos por $\Upsilon_{xy}/2$ e $\Upsilon_{x'y'}/2$, respectivamente, para obter-se as expressões de deformações a partir das expressões de tensões.

Deformações Principais

Analogamente ao que ocorre para as tensões, no elemento onde ocorrem as deformações principais (máxima e mínima), também não há deformações de cisalhamento.

Chega-se às direções e valores das deformações principais pelos mesmos procedimentos utilizados para as tensões. Tem-se:

$$tg(2\theta_p) = \frac{\gamma_{xy}}{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)} \qquad (2.13)$$

$$\varepsilon_{1,2} = \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \qquad (2.14)$$

Deformação de Cisalhamento Máxima no Plano

$$tg(2\theta_c) = -\frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{\gamma_{xy}} \qquad (2.13)$$

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \qquad (2.14)$$

E a deformação média associada, calcula-se por:

$$\varepsilon_{med} = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} \qquad (2.15)$$

Transformações – Estado Plano

Exemplo 2.1: O elemento inifinitesimal que representa um ponto do material está sujeito ao estado plano deformações:

$$\varepsilon_x = 500.10^{-6},\ \ \varepsilon_y = -300.10^{-6}\ e\ \gamma_{xy} = 200.10^{-6}$$

O elemento tende a ser distorcido como mostra a figura 2.5. Determinar as deformações que atuam em um elemento orientado a 30º no sentido horário em relação à posição original

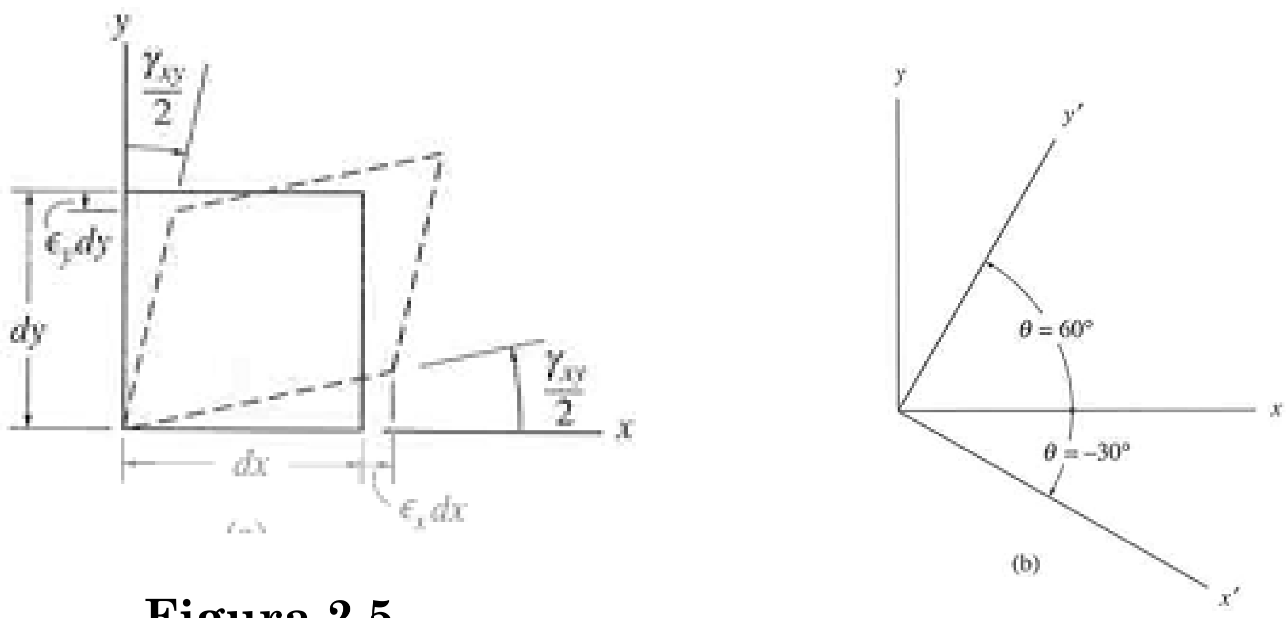


Figura 2.5

Transformações – Estado Plano

Exemplo 2.1: Solução

Basta aplicar as equações 2.5, 2.6 e 2.12 , tendo como base a figura 2.5 e a convenção estabelecida de que ângulos no sentido horário são negativos.

$$\varepsilon_{x'} = \left[\frac{500+(-300)}{2}\right].(10^{-6}) + \left[\frac{500-(-300)}{2}\right].(10^{-6})\cos(2.(-30^o))$$

$$+\frac{200.(10^{-6})}{2} sen(2.(-30^o)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{x'} = 213,4.(10^{-6})}$$

$$\varepsilon_{y'} = \left[\frac{500+(-300)}{2}\right].(10^{-6}) - \left[\frac{500-(-300)}{2}\right].(10^{-6})\cos(2.(-30^o))$$

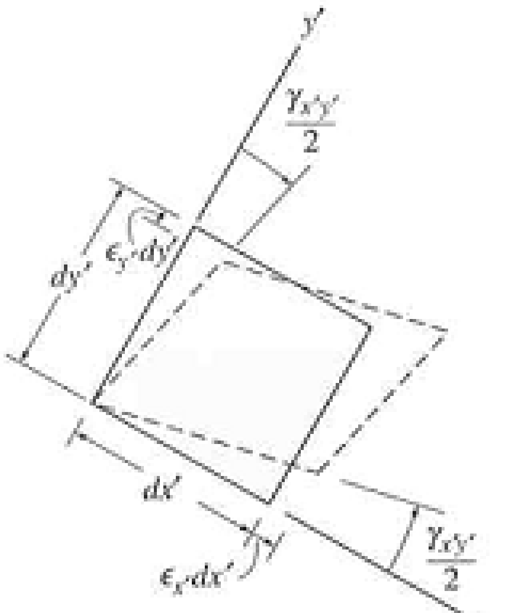
$$-\frac{200.(10^{-6})}{2} sen(2.(-30^o)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{y'} = -13,4.(10^{-6})}$$

TRANSFORMAÇÕES – ESTADO PLANO

Exemplo 2.1: Solução

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left[\frac{500-(-300)}{2}\right].(10^{-6}).sen(2(-30^o))$$

$$+\frac{200.(10^{-6})}{2}\cos(2(-30^o)) \Rightarrow \boxed{\gamma_{x'y'} = 793.(10^{-6})}$$



(c)

Transformações – Estado Plano

Exercício 2.1: O elemento inifinitesimal que representa um ponto do material está sujeito ao estado plano deformações:

$$\varepsilon_x = -350.(10^{-6}),\ \ \varepsilon_y = 200.(10^{-6})\ e\ \gamma_{xy} = 80.(10^{-6})$$

O elemento tende a ser distorcido como mostra a figura 2.6. Determinar as deformações principais e as direções das mesmas. Representar o elemento onde elas ocorrem.

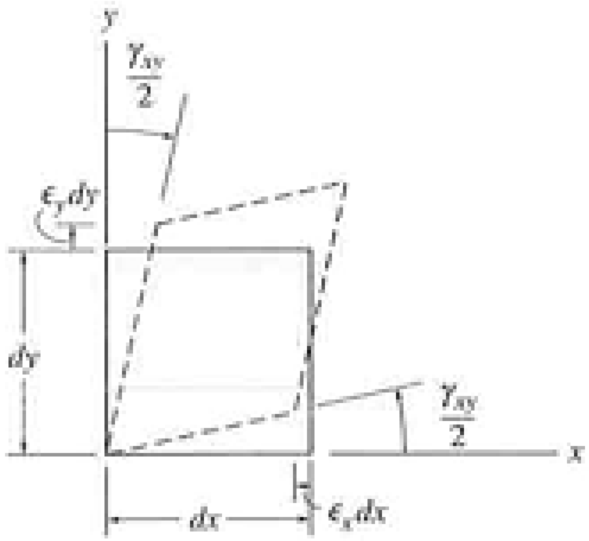


Figura 2.6

Transformações – Estado Plano

Exercício 2.2: O elemento inifinitesimal que representa um ponto do material está sujeito ao estado plano deformações:

$$\varepsilon_x = -350.(10^{-6}),\ \ \varepsilon_y = 200.(10^{-6})\ e\ \gamma_{xy} = 80.(10^{-6})$$

O elemento tende a ser distorcido como mostra a figura 2.7. Determinar a deformação máxima de cisalhamento no plano e a orientação do elemento onde ela ocorre.

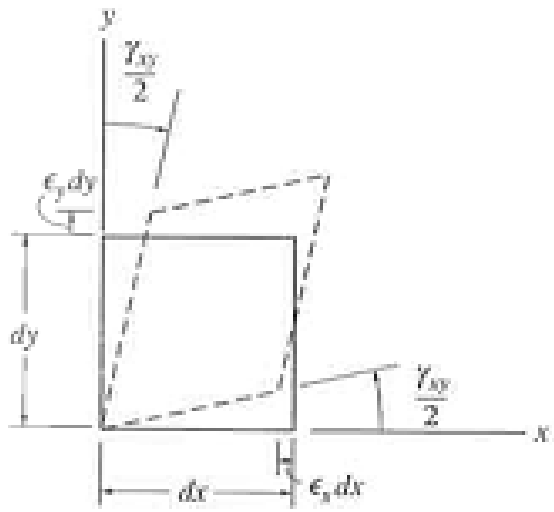


Figura 2.7

Círculo de Mohr – Estado Plano

As equações para a transformação do estado plano de deformação são da mesma forma que as equações para a transformação do estado plano de tensão. Portanto, o Círculo de Mohr também pode ser aplicado para análise de deformações e será construído de forma similar à demonstrada para tensões.

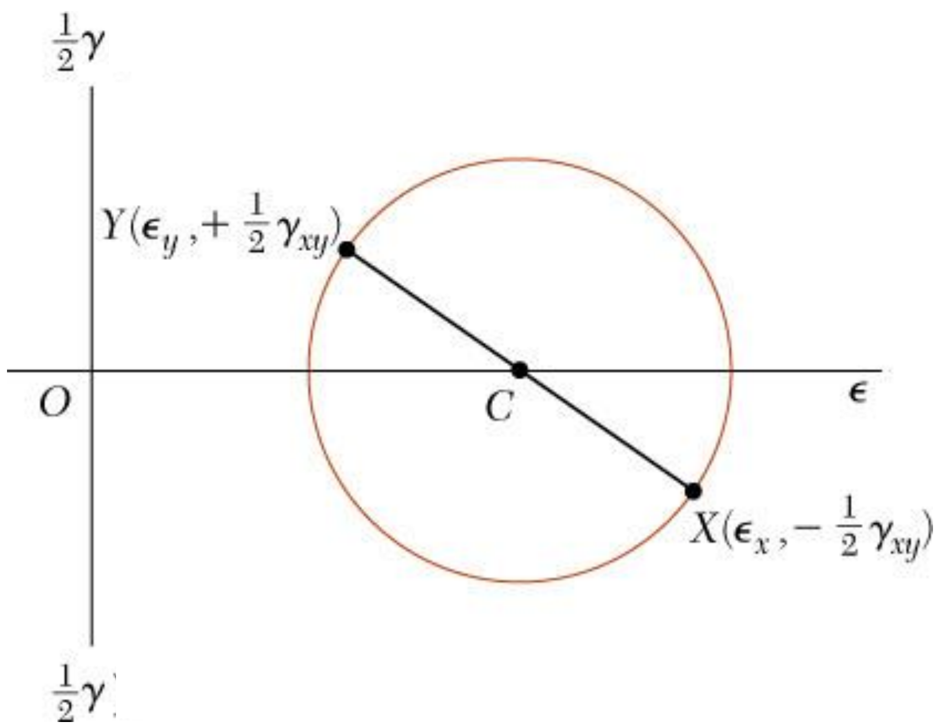
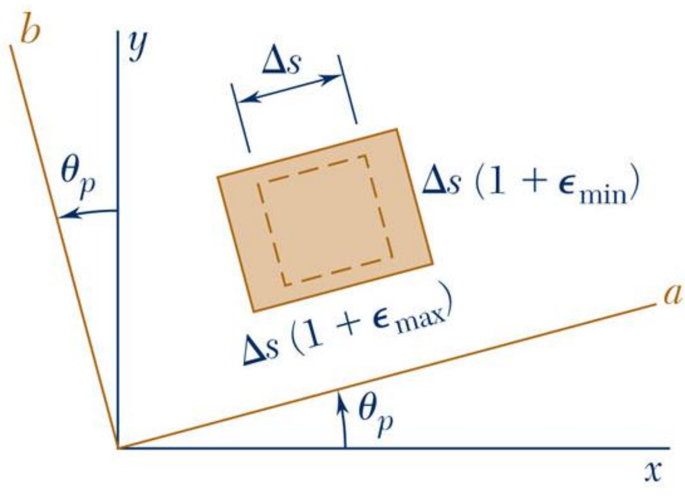


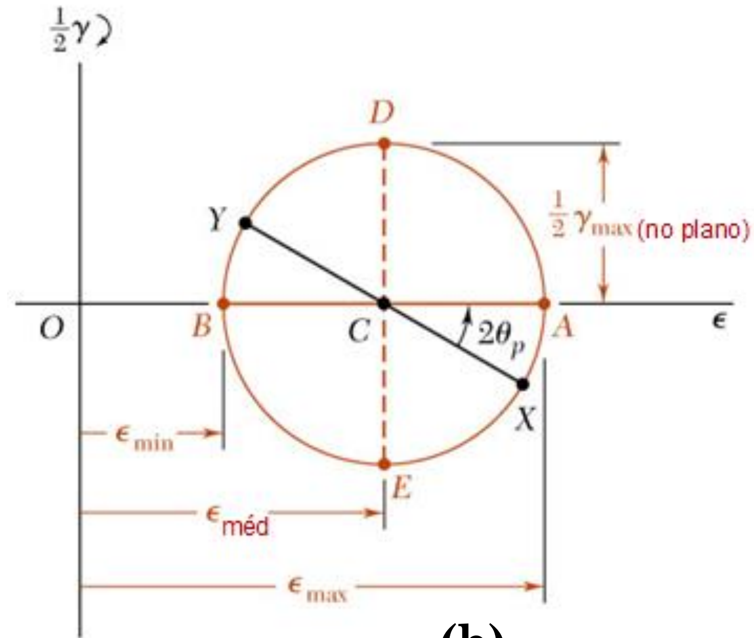
Figura 2.8

Notar que a grande diferença do círculo das deformações com relação ao de tensões é o **termo de cisalhamento aparecer sempre dividido por 2.**

Círculo de Mohr – Estado Plano



(a)



(b)

Figura 2

A abscissa do centro C e o raio R são, respectivamente iguais a:

$$\varepsilon_{méd} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Máxima deformação de cisalhamento no plano:

$$\gamma_{\max} = 2R = \sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

As deformações principais:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{méd} + R$$

$$\varepsilon_{\min} = \varepsilon_{méd} - R$$

CÍRCULO DE MOHR – ESTADO PLANO

Exercício 2.3: Para o estado plano de deformações indicado pela figura 2.10:
(a) Construir do círculo de Mohr; e determinar: (b) os planos principais e as deformações principais, (c) a deformação de cisalhamento máxima e a deformação normal média correspondente.

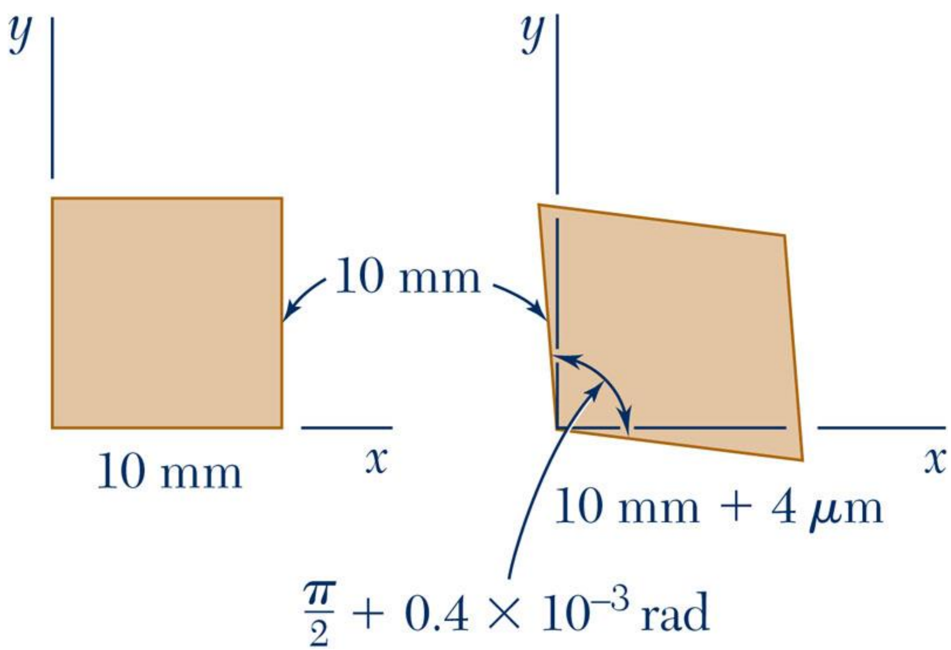
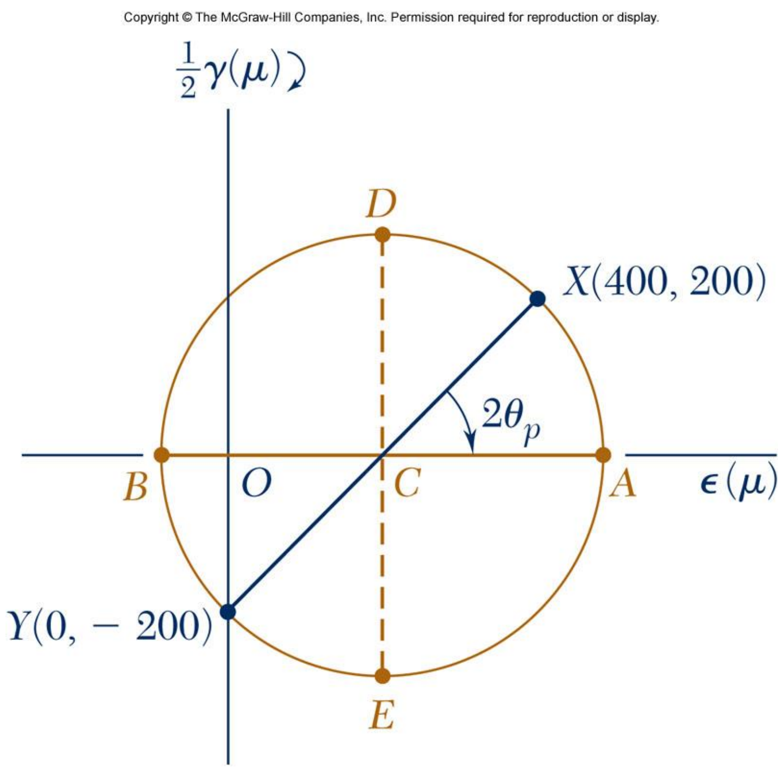
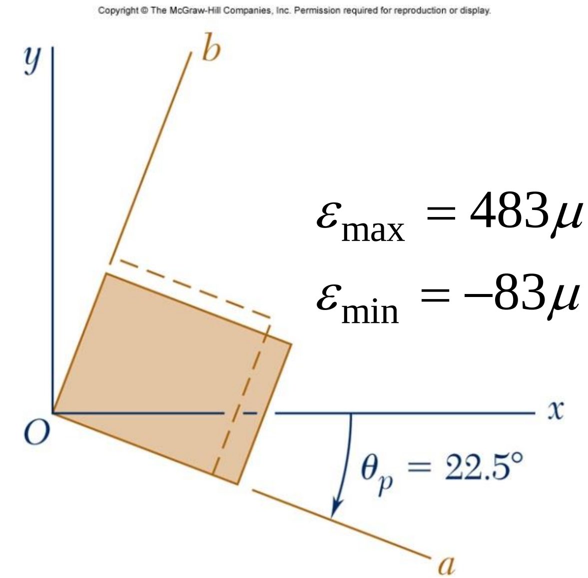


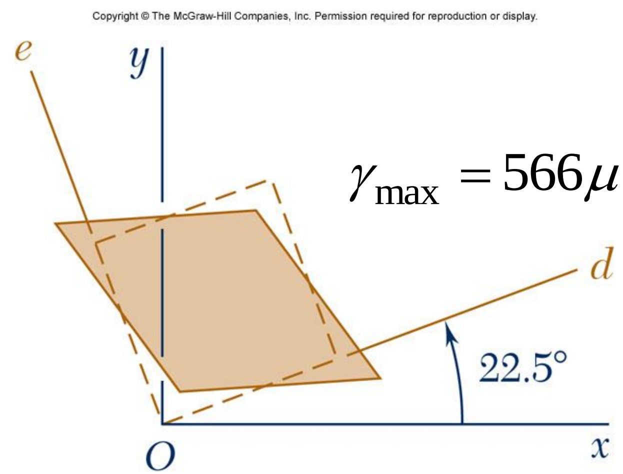
Figura 2.10

CÍRCULO DE MOHR – ESTADO PLANO

Exercício 2.3: Respostas







Análise Tridimensional de deformações

Na **Parte 1** foi demonstrado que existem três eixos principais de tal forma que as faces do elemento perpendicular a estes estão livres de tensões de cisalhamento.

Pela Lei de Hooke, sabe-se que as deformações de cisalhamento também são nulas e que os planos principais de tensão também são os planos principais de deformação. Se z≡c é um dos eixos principais, os outros dois eixos são coplanares a x e y. (figura 2.11)

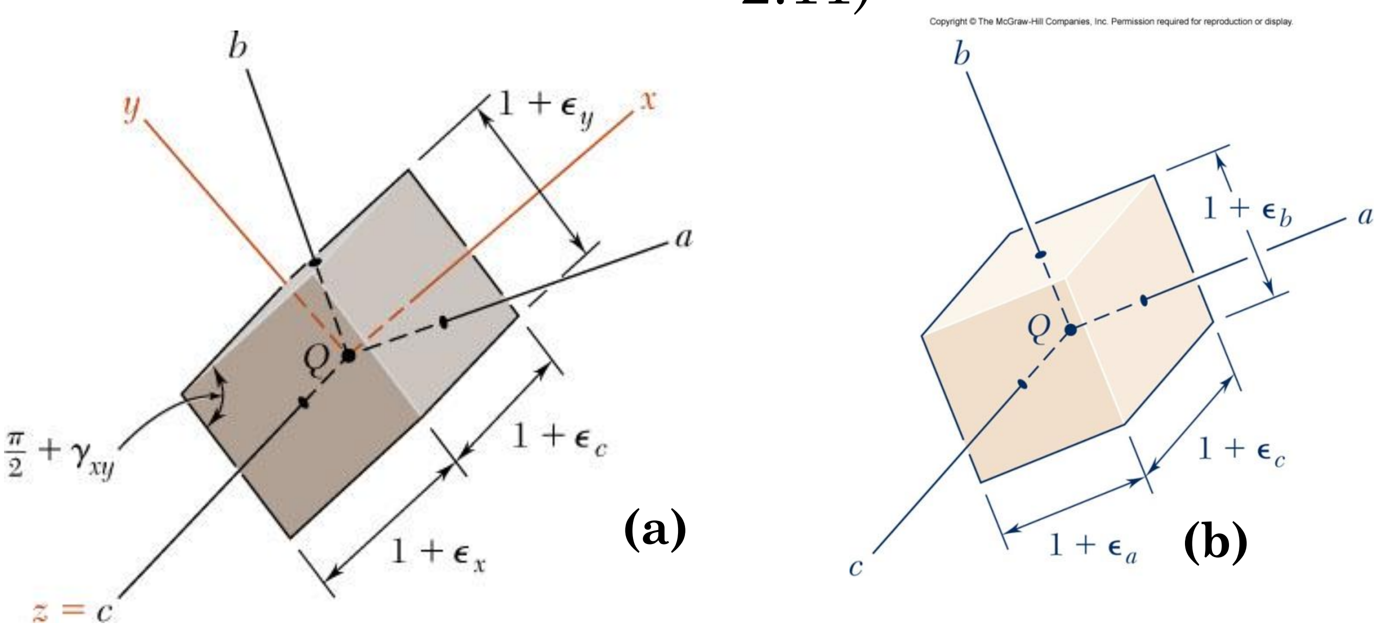
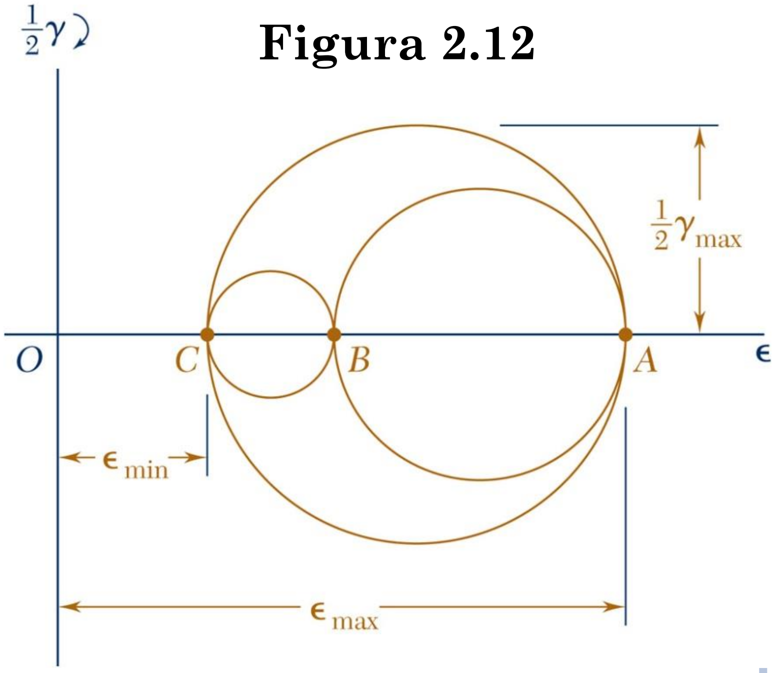


Figura 2.11

ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DE DEFORMAÇÕES

Usamos, então, o círculo diâmetro AB para determinar as deformações, normal e de cisalhamento, que atuam nas faces do elemento quando ele sofre uma rotação em torno do eixo c (figura 2.11b). Analogamente, os círculos de diâmetros BC e AC são usados para determinar as deformações, normal e de cisalhamento, que atuam nas faces do elemento quando ele sofre uma rotação em torno do eixo a e b, respectivamente.

Figura 2.12



Máxima deformação de cisalhamento absoluta:

$$\boxed{\gamma_{max_{abs}} = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}$$

ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DE DEFORMAÇÕES – PARTICULARIZAÇÃO PARA O ESTADO PLANO

Se os pontos *A* e *B* (**representando as deformações máxima e mínima**) estão em lados opostos da origem, então:

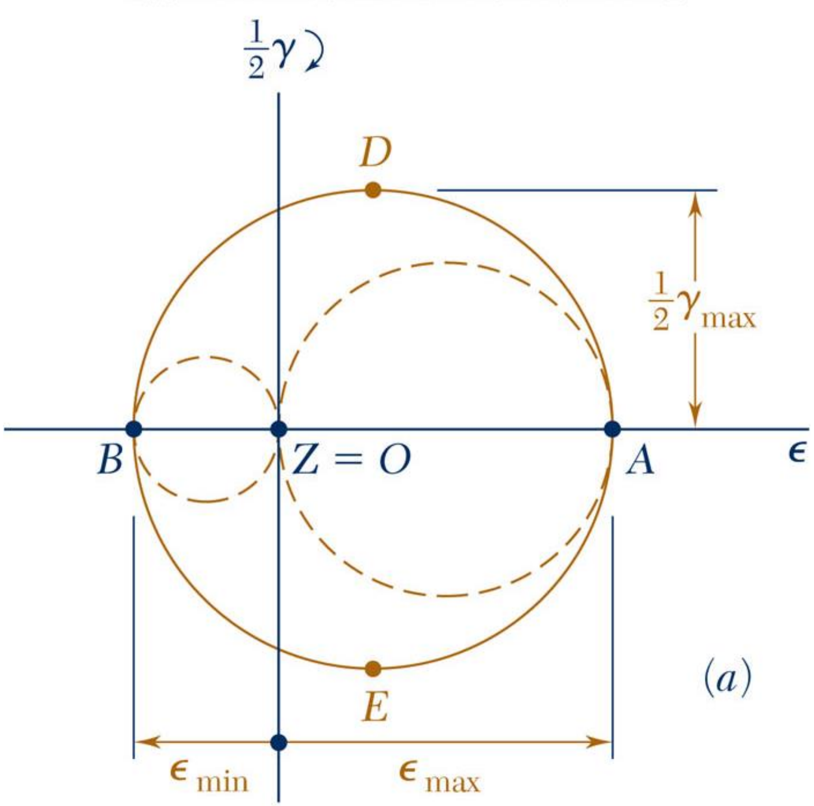


Figura 2.13

Análise Tridimensional de deformações – Particularização para o estado plano

Se os pontos A e B têm o mesmo sinal e **representam as deformações máxima e intermediária**, então:

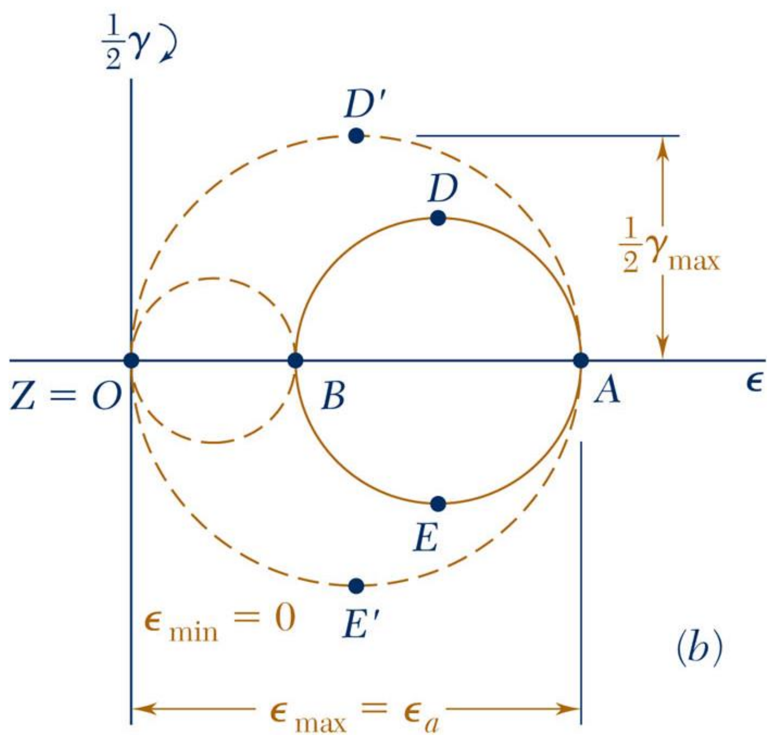
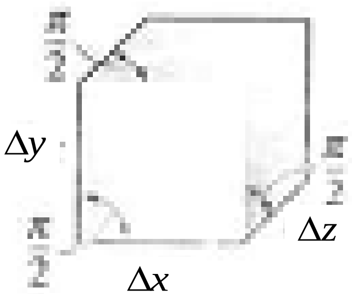


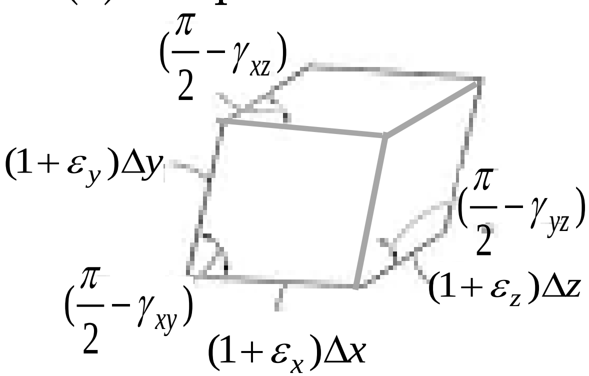
Figura 2.14

Relações Constitutivas (Caso Geral)

Considerando que o elemento da figura 2.15 está submetido a tensões normais nas direções x, y e z e a tensões cisalhantes nos três planos, temos:



(a) Corpo indeformado



(b) Corpo deformado

Figura 2.15

$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \qquad (2.16)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

Sendo: $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

Relações Constitutivas (Caso Geral)

Isolando as tensões em 2.16, temos:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-2\nu^2-\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-2\nu^2-\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x + \nu\varepsilon_z\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1-2\nu^2-\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right]$$

(2.17)

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

Relações Constitutivas (Estado Plano de Tensões)

Ter-se um estado plano de tensões num ponto (o que vai poder ser considerado em grande parte dos casos), não implica, necessariamente, em um estado de deformações plano. Na verdade, as deformações de cisalhamento relacionadas ao eixo z serão nulas, mas a deformação normal ε_z será uma função de ε_x e ε_y:

$$\varepsilon_z = -\frac{\upsilon}{1-\upsilon}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \qquad (2.18)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz} = 0$$

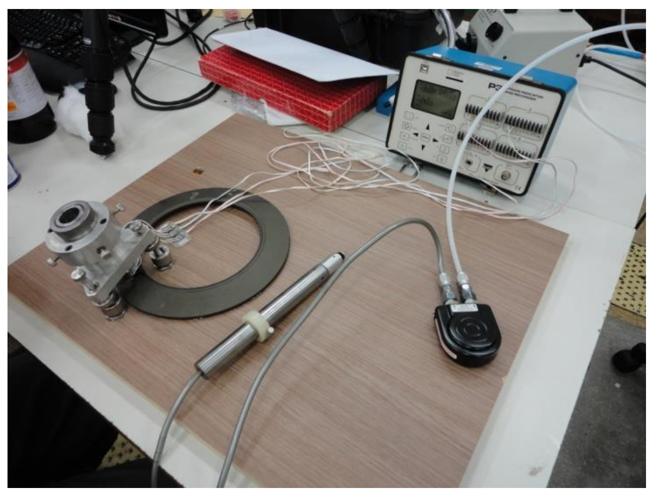
Como as deformações cisalhantes em relação ao eixo z são nulas, tem-se claro que a deformação ε_z será uma das deformações principais no caso de um estado plano de tensões com "$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$".

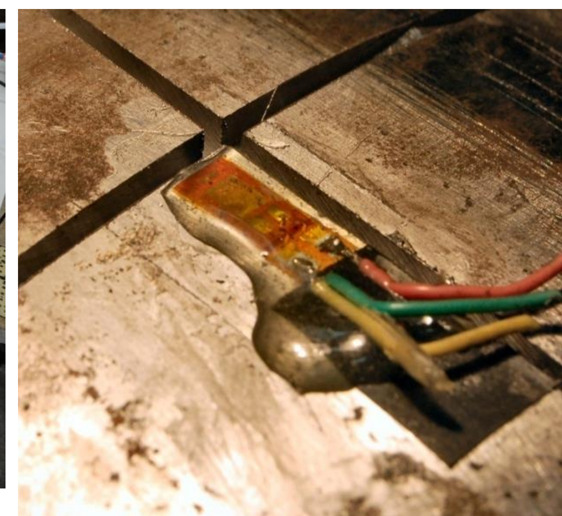
Relações Constitutivas (Estado Plano de Tensões)

Para o estado plano de tensões, substituindo 2.18 em 2.17, temos:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right] \\
\sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right] \\
\sigma_z &= 0 \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0
\end{aligned}
\qquad (2.19)
$$

Medições de Deformações específicas (Rosetas Extensométricas)

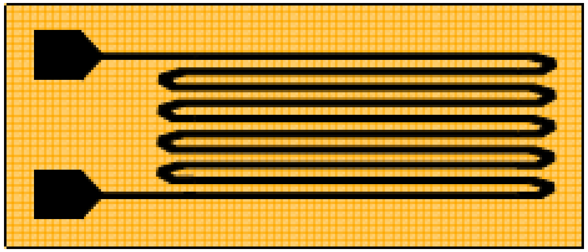




Medições de Deformações específicas (Rosetas Extensométricas)

Extensômetros de resistência elétrica (*strain gages*) medem deformação específica normal através de mudanças na resistência elétrica de sua grade de medição.

Figura 2.16



$$R = \rho \frac{L}{A}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = K\varepsilon$$

R – resistência do fio
ρ - resistividade do fio
L - comprimento do fio
A – área da seção transversal
K – fator do extensômetro (*gage factor*)

Medições de Deformações específicas (Rosetas Extensométricas)

Rosetas extensométricas são constituídas geralmente por três extensômetros juntos. Com esta pode-se determinar o estado plano de deformações atuantes em um determinado ponto.

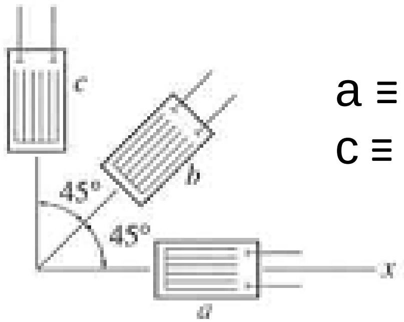
$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} sen 2\theta$$

$$Para \quad \theta = 45^o$$

$$\varepsilon_{\theta=45} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2.45 + \frac{\gamma_{xy}}{2} sen 2.45$$

$$\gamma_{xy} = 2.\varepsilon_{\theta=45} - \varepsilon_x - \varepsilon_y$$



a ≡ x
c ≡ y

Figura 2.17

Medições de Deformações específicas (Rosetas Extensométricas)

O mais comum é que se usem rosetas com extensômetros dispostos a 45º (figura 2.18). Porém, há no mercado outras configurações. O importante é que, para qualquer configuração, a medição de três valores de deformações num dado ponto, permite definir o estado de deformações ε_x, ε_y, γ_{xy} no mesmo.

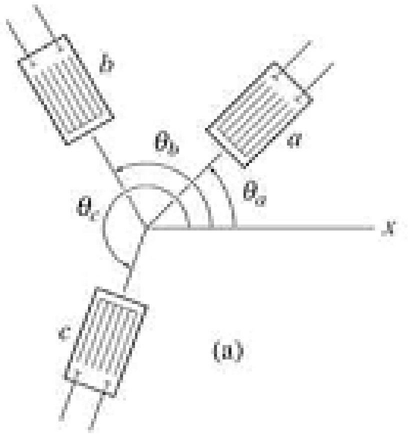


Figura 2.18

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x \cos^2\theta_a + \varepsilon_y \mathrm{sen}^2\theta_a + \gamma_{xy}\mathrm{sen}\,\theta_a \cos\theta_a$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_x \cos^2\theta_b + \varepsilon_y \mathrm{sen}^2\theta_b + \gamma_{xy}\mathrm{sen}\,\theta_b \cos\theta_b$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_x \cos^2\theta_c + \varepsilon_y \mathrm{sen}^2\theta_c + \gamma_{xy}\mathrm{sen}\,\theta_c \cos\theta_c$$

Resolvendo este sistema de três equações, obtém-se ε_x, ε_y, γ_{xy}.

Medições de Deformações específicas (Rosetas Extensométricas)

Exercício 2.4: A roseta de 45º está montada no elo da retroescavadeira (figura 2.19). As seguintes leituras foram obtidas em cada extensômetro:

$$\varepsilon_a = 650.(10^{-6}),\ \ \varepsilon_b = -300.(10^{-6})\ e\ \varepsilon_c = 480.(10^{-6})$$

Determinar as deformações principais no plano, e suas orientações. Calcule também a máxima deformação de cissalhamento absoluta. Use $\nu = 0.3$.

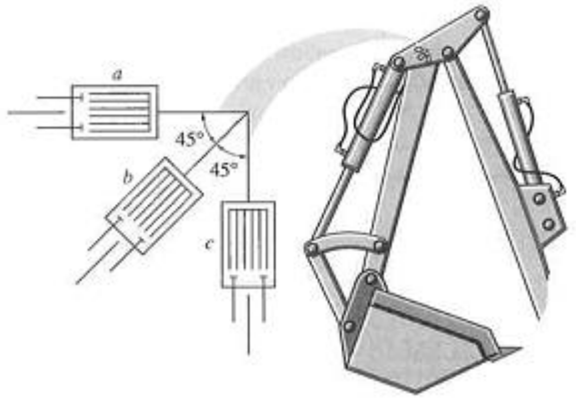


Figura 2.19

EXERCÍCIOS GERAIS

Exercício 2.5: O eixo tem raio de 15mm e é feito de um aço com módulo de elasticidade de 200 GPa e coeficiente de Poisson de 0,32. Determinar as deformações nas direções x' e y' se for aplicado um torque T = 2 kN.m.

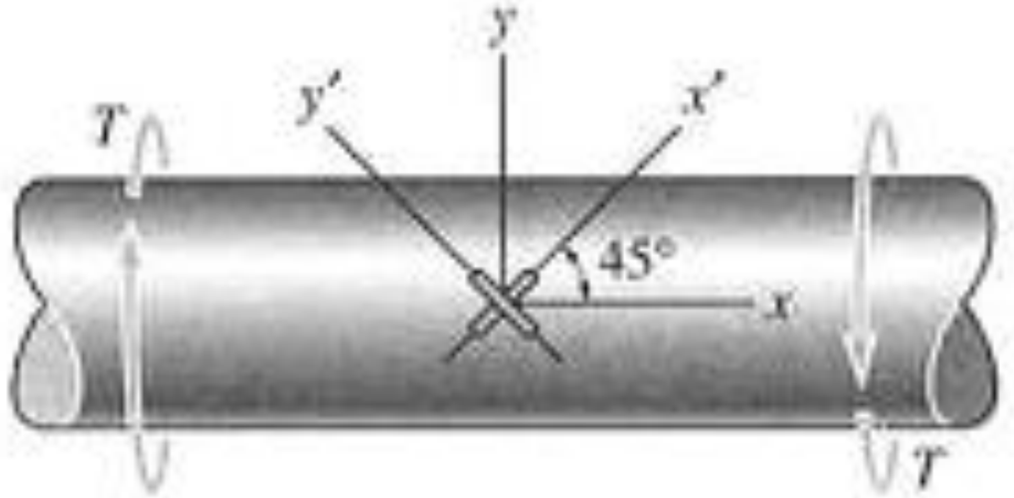


Figura 2.20

Exercício 2.6: Usando uma roseta de 60º, foram determinadas as seguintes deformações no ponto Q na superfície de uma base de máquina de aço: $\varepsilon_a = 40\ \mu$, $\varepsilon_b = 980\ \mu$ e $\varepsilon_c = 330\ \mu$. Sabendo que se trata de um estado plano de tensões, determinar: a) as componentes ε_x, ε_y e γ_{xy}; b) as **três** deformações principais; e (c) a deformação e a tensão de cisalhamento máxima absoluta; (usar $\nu = 0{,}29$ e E=200GPa)

Para o estado plano de tensões:

$$\varepsilon_z = -\frac{\upsilon}{1-\upsilon}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = -\frac{\upsilon}{1-\upsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

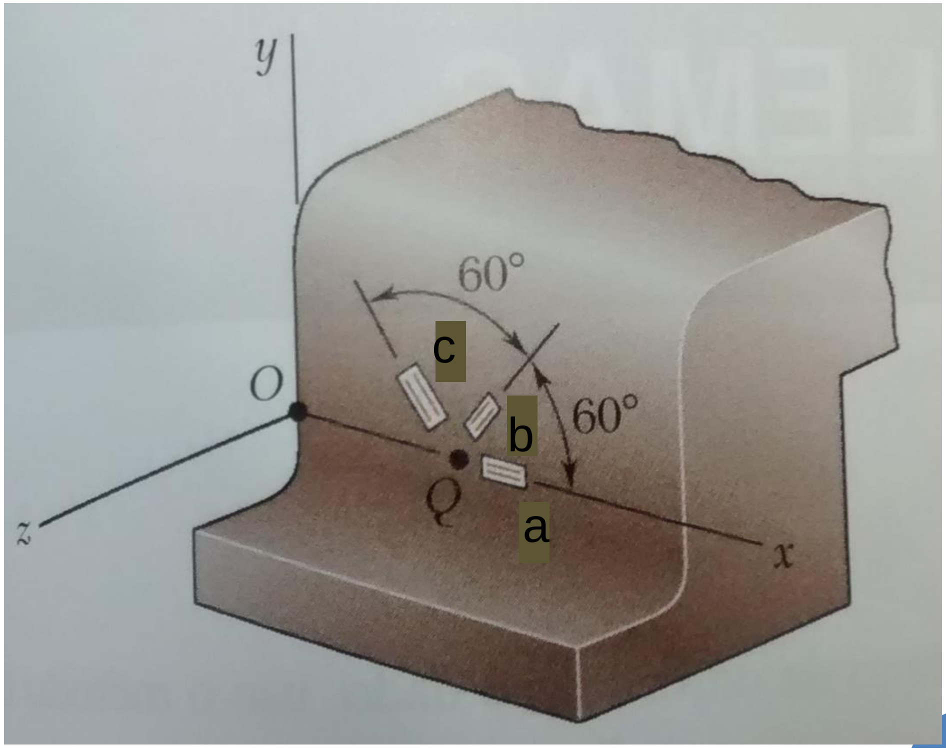


Figura 2.21

Exercício 2.7: Um extensômetro unidirecional é colado em um eixo de aço com seção transversal de 101,6 mm de diâmetro formando um ângulo β = 25º com uma linha paralela ao centro do eixo. Sabendo que G = 79,3 GPa, determine o torque indicado por uma leitura no extensômetro de 300 μ.

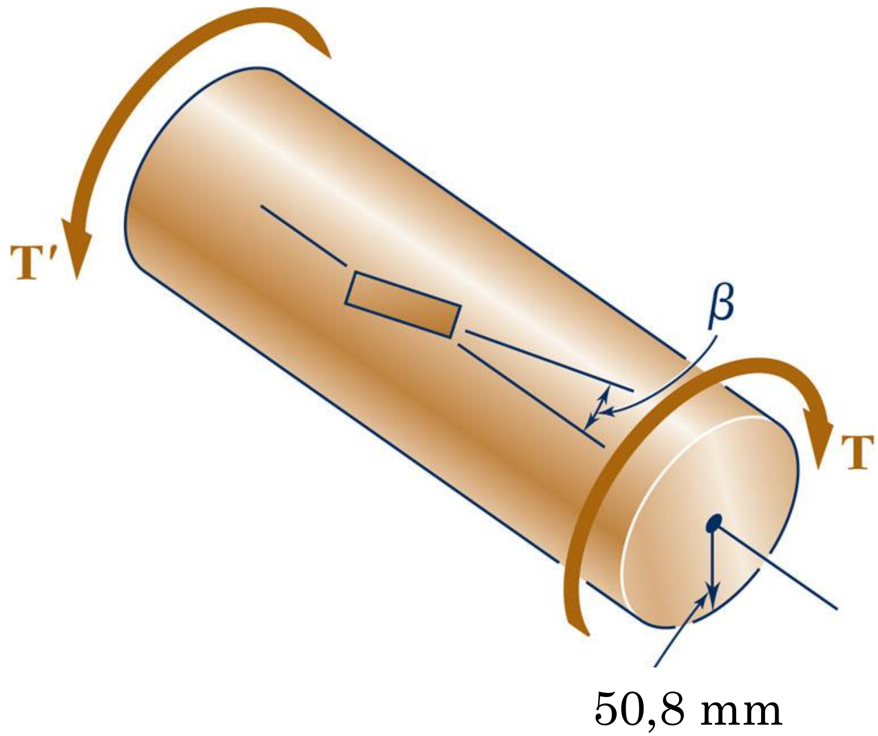


Figura 2.22

Exercício 2.8: Uma força axial centrada P e uma força horizontal Q_x são ambas aplicadas ao ponto C da barra de seção retangular mostrada na figura. Um roseta de 45º colada na superfície da barra no ponto A indica as seguintes deformações:

$$\varepsilon_a = -60.(10^{-6})$$

$$\varepsilon_b = +240.(10^{-6})$$

$$\varepsilon_c = +200.(10^{-6})$$

Sabendo que o módulo de elasticidade da barra é 200 GPa e que seu coeficiente de Poisson é 0,3, determine as intensidades de P e Q_x.

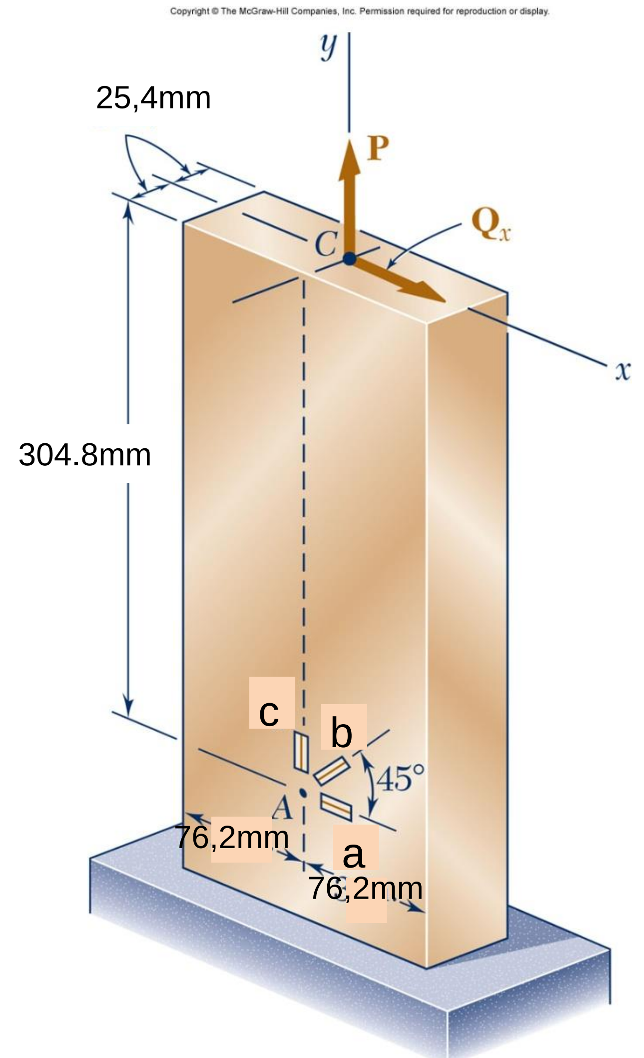


Figura 2.23