UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
BACHARELADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

CINEMÁTICA DOS MECANISMOS

AVALIAÇÃO FINAL: LISTA DE EXERCÍCIOS 1

BELÉM/PA
2025

ALAN HENRIQUE PEREIRA MIRANDA - 202102140072

CINEMÁTICA DOS MECANISMOS

AVALIAÇÃO FINAL: LISTA DE EXERCÍCIOS 1

Atividade referente à primeira avaliação da disciplina Cinemática dos Mecanismos, lecionada na Universidade Federal do Pará.

Profa. Dr.: Fábio Seturbal

Belém-PA 15 de janeiro de 2025

EXAMINADOR

Profa. Dr.: Fábio Seturbal
Universidade Federal do Pará - UFPA

Lista de Figuras

1 Comando da questão 12-9 5
2 Gráfico da função velocidade $v(t)$. 7
3 Comando da questão 12-15. 8
4 Comando da questão 12-20. 13
5 Comando da questão 12-22. 15
6 Comando da questão 12-23. 18
7 Comando da questão 12-27. 20
8 Comando da questão 12-30 22
9 Comando da questão 12-31 25
10 Comando da questão 12-33 27
11 Comando da questão 12-34. 28
12 Comando da questão 12-39. 30
13 Comando da questão 12-40. 31
14 Comando da questão 12-47. 32

Sumário

1 Questão 12-9 5

2 Questão 12-15 8

3 Questão 12-17 10

4 Questão 12-20 13

5 Questão 12-22 15

6 Questão 12-23 18

7 Questão 12-27 20

8 Questão 12-30 22

9 Questão:12-31 25

10 Questão 12-33 27

11 Questão 12-34 28

12 Questão 12-39 30

13 Questão 12-40 31

14 Questão 12-47 32

Introdução

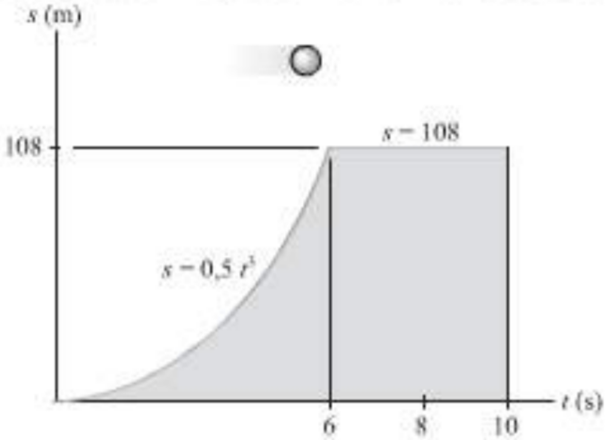
Este solucionário tem como objetivo apresentar a resolução detalhada das questões propostas na lista de exercícios do capítulo 12 do livro "Dinâmica", 12ªedição. As questões abrangem os tópicos fundamentais e avançados relacionados à cinemática de mecanismos, com enfoque em problemas práticos e teóricos.

A lista é composta por um total de 44 questões, divididas em dois grupos: problemas fundamentais e problemas gerais, exigindo o domínio dos conceitos apresentados no capítulo. As resoluções seguem os procedimentos sugeridos pelo autor do livro, promovendo clareza e rigor matemático para facilitar a compreensão dos conceitos e métodos aplicados.

Espera-se que este material contribua para o aprendizado e a consolidação dos conteúdos estudados, além de servir como um guia para a resolução de problemas similares.

1 Questão 12-9

12.9. Uma partícula move-se ao longo de uma pista reta de tal maneira que sua posição é descrita pelo gráfico s–t. Construa o gráfico v–t para o mesmo intervalo de tempo.



Problema 12.9

Figura 1: Comando da questão 12-9

Nesta questão, analisamos a função da posição $s(t)$ e determinamos a expressão para a velocidade $v(t)$ em diferentes intervalos de tempo. Além disso, apresentamos os resultados em forma gráfica.

Função da Posição $s(t)$

A função da posição $s(t)$ é definida por:

$$s(t) = \begin{cases} 0.5t^2 & \text{se } 0 < t \leq 6, \\ 108 & \text{se } 10 \geq t > 6. \end{cases}$$

Cálculo da Velocidade $v(t)$

A velocidade $v(t)$ é obtida pela derivada da posição $s(t)$ em relação ao tempo t. Para $t \leq 6$, temos:

$$s(t) = 0.5t^2 \implies v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = t.$$

Para $t > 6$, como $s(t)$ é constante ($s(t) = 108$), a velocidade é:

$$v(t) = 0.$$

Portanto, a velocidade $v(t)$ é definida por:

$$v(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \leq 6, \\ 0 & \text{se } t > 6. \end{cases}$$

Dados Gerados

Os dados de tempo (t), posição ($s(t)$), e velocidade ($v(t)$) foram gerados e organizados para análise. A tabela a seguir ilustra os valores calculados (valores exemplares):

Tempo (s)	**Posição (m)**	**Velocidade (m/s)**
0.0	0.0	0.0
1.0	0.5	1.0
2.0	2.0	2.0
⋮	⋮	⋮
6.0	18.0	6.0
7.0	108.0	0.0
8.0	108.0	0.0

Tabela 1: Dados de posição e velocidade em função do tempo.

Gráfico de Velocidade $v(t)$

A função $v(t)$ foi representada graficamente. O eixo x corresponde ao tempo (t), enquanto o eixo y corresponde à velocidade ($v(t)$). Uma linha vertical foi traçada em $t = 6$, indicando a mudança no comportamento da função.

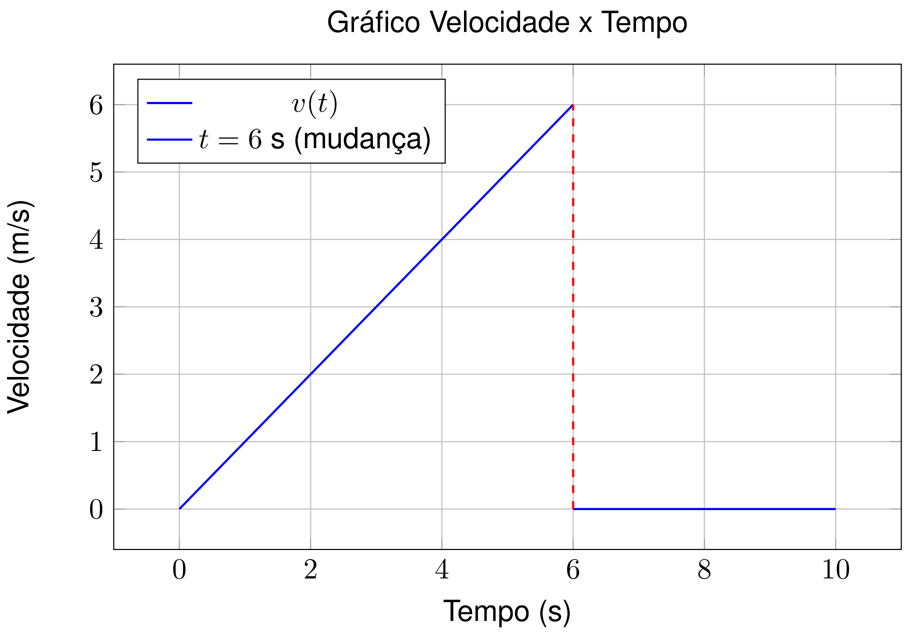


Figura 2: Gráfico da função velocidade $v(t)$.

Resultados Finais

- Função da posição:

$$s(t) = \begin{cases} 0.5t^2 & \text{se } t \leq 6, \\ 108 & \text{se } t > 6. \end{cases}$$

- Função da velocidade:

$$v(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \leq 6, \\ 0 & \text{se } t > 6. \end{cases}$$

2 Questão 12-15

12.15. Se as componentes x e y da velocidade de uma partícula são $v_x = (32t)$ m/s e $v_y = 8$ m/s, determine a equação da trajetória $y = f(x)$. $x = 0$ e $y = 0$ quando $t = 0$.

Figura 3: Comando da questão 12-15.

Nesta questão, determinamos as equações paramétricas das posições $x(t)$ e $y(t)$, bem como a relação cartesiana entre as coordenadas x e y, com base nos componentes da velocidade. A seguir, detalhamos o equacionamento.

Definição das Variáveis e Componentes de Velocidade

As variáveis e os componentes da velocidade são definidos como:

$$v_x = 32t, \quad v_y = 8,$$

onde:

- t representa o tempo;
- x e y representam as coordenadas no espaço.

Integração para Determinar as Posições em Função do Tempo

A posição na direção x é obtida pela integração de v_x:

$$x(t) = \int v_x \, dt = \int 32t \, dt = 16t^2 + C_1.$$

A posição na direção y é obtida pela integração de v_y:

$$y(t) = \int v_y \, dt = \int 8 \, dt = 8t + C_2.$$

Determinação das Constantes de Integração

Utilizando as condições iniciais:

$$x(0) = 0 \quad \text{e} \quad y(0) = 0,$$

determinamos as constantes C_1 e C_2:

$$x(0) = 16(0)^2 + C_1 \implies C_1 = 0,$$

$$y(0) = 8(0) + C_2 \implies C_2 = 0.$$

Substituindo as constantes nas equações, obtemos:

$$x(t) = 16t^2, \quad y(t) = 8t.$$

Eliminação de t para Determinar y em Função de x

Da equação de $x(t)$, resolvemos t em função de x:

$$x(t) = 16t^2 \implies t = \sqrt{\frac{x}{16}} = \frac{\sqrt{x}}{4}.$$

Substituindo t na equação de $y(t)$, obtemos:

$$y = 8t = 8 \cdot \frac{\sqrt{x}}{4} = 2\sqrt{x}.$$

Portanto, a equação cartesiana entre x e y é:

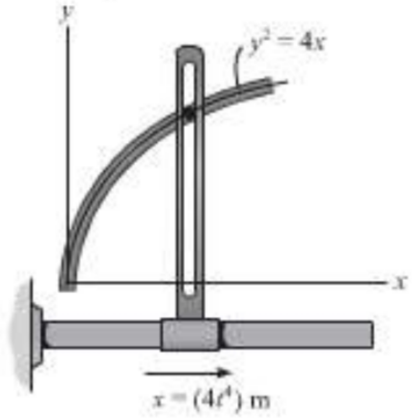
$$y(x) = 2\sqrt{x}.$$

Resultados Finais

- Equações paramétricas:
$$x(t) = 16t^2, \quad y(t) = 8t.$$
- Relação cartesiana entre x e y:
$$y(x) = 2\sqrt{x}.$$

3 Questão 12-17

12.17. Uma partícula é forçada a se mover ao longo da trajetória. Se $x = (4t^4)$ m, onde t é dado em segundos, determine a intensidade da velocidade e da aceleração da partícula quando $t = 0{,}5$ s.



Problema 12.17

Nesta questão, analisamos o movimento de uma partícula cuja trajetória é definida por uma parábola $y^2 = 4x$, com a posição em x dada como função do tempo t. Determinamos as velocidades, acelerações e suas intensidades, bem como os valores numéricos no instante $t = 0.5$ s.

Equação da Trajetória

A equação da trajetória da partícula é definida como:

$$y^2 = 4x,$$

onde a posição x é dada por:

$$x(t) = 4t^4.$$

Cálculo das Derivadas para x

A velocidade na direção x é obtida pela derivada de $x(t)$ em relação ao tempo t:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4t^4\right) = 16t^3.$$

A aceleração na direção x é a derivada de v_x:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(16t^3\right) = 48t^2.$$

Substituição de x na Equação da Trajetória

Substituímos $x(t)$ na equação da trajetória para encontrar $y(t)$:

$$y^2 = 4x \implies y^2 = 4(4t^4) \implies y = 4t^2.$$

Cálculo das Derivadas para y

A velocidade na direção y é:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4t^2\right) = 8t.$$

A aceleração na direção y é:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(8t) = 8.$$

Intensidade da Velocidade

A intensidade da velocidade é dada por:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Substituindo v_x e v_y:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(16t^3)^2 + (8t)^2} = \sqrt{256t^6 + 64t^2}.$$

Intensidade da Aceleração

A intensidade da aceleração é dada por:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Substituindo a_x e a_y:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(48t^2)^2 + (8)^2} = \sqrt{2304t^4 + 64}.$$

Cálculos no Instante $t = 0.5$ s

Substituímos $t = 0.5$ s nas equações para obter os valores numéricos:

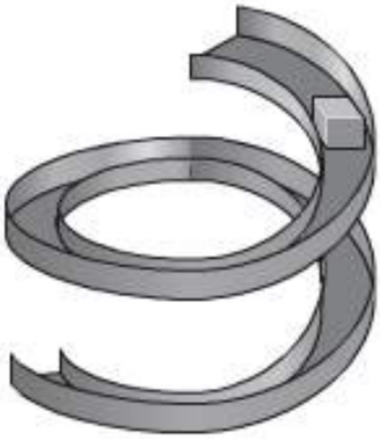
- Velocidade em x:
$$v_x = 16t^3 \implies v_x = 16(0.5)^3 = 2.0\,\text{m/s}.$$
- Velocidade em y:
$$v_y = 8t \implies v_y = 8(0.5) = 4.0\,\text{m/s}.$$
- Intensidade da velocidade:
$$|\vec{v}| = \sqrt{256(0.5)^6 + 64(0.5)^2} \implies |\vec{v}| \approx 4.47\,\text{m/s}.$$
- Intensidade da aceleração:
$$|\vec{a}| = \sqrt{2304(0.5)^4 + 64} \implies |\vec{a}| \approx 14.42\,\text{m/s}^2.$$

Resultados Finais

- Equações paramétricas:
$$x(t) = 4t^4, \quad y(t) = 4t^2.$$
- Velocidade:
$$v_x = 16t^3, \quad v_y = 8t.$$
- Aceleração:
$$a_x = 48t^2, \quad a_y = 8.$$
- Intensidades:
$$|\vec{v}| = \sqrt{256t^6 + 64t^2}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{2304t^4 + 64}.$$
- Valores no instante $t = 0.5$ s:
  - $v_x = 2.0$ m/s,
  - $v_y = 4.0$ m/s,
  - $|\vec{v}| \approx 4.47$ m/s,
  - $|\vec{a}| \approx 14.42$ m/s^2.

4 Questão 12-20

12.20. A posição de uma caixa deslizando para baixo por uma espiral pode ser descrita como **r** = [2 sen (2t)**i** + 2 cos t**j** − 2t^2**k**] m, onde t é dado em segundos e os argumentos para o seno e o cosseno estão em radianos. Determine a velocidade e aceleração da caixa quando t = 2 s.



Problema 12.20

Figura 4: Comando da questão 12-20.

Nesta questão, analisamos a posição, velocidade e aceleração de uma partícula cujo movimento é descrito por uma função vetorial em um espaço tridimensional. Determinamos as expressões para a velocidade e aceleração vetoriais e avaliamos seus valores numéricos no instante $t = 2$ s.

Função Vetorial da Posição

A posição da partícula é descrita pela função vetorial:

$$\vec{r}(t) = 2\sin(2t)\,\hat{\imath} + 2\cos(t)\,\hat{\jmath} - 2t^2\,\hat{k},$$

onde:

- $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ são os vetores unitários nas direções x, y e z, respectivamente;
- t é o tempo.

Velocidade Vetorial

A velocidade da partícula é obtida pela derivada de $\vec{r}(t)$ em relação ao tempo:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}.$$

Calculando cada componente:

$$\vec{v}(t) = 4\cos(2t)\,\hat{\imath} - 2\sin(t)\,\hat{\jmath} - 4t\,\hat{k}.$$

Aceleração Vetorial

A aceleração da partícula é obtida pela derivada de $\vec{v}(t)$ em relação ao tempo:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}.$$

Calculando cada componente:

$$\vec{a}(t) = -8\sin(2t)\,\hat{\imath} - 2\cos(t)\,\hat{\jmath} - 4\,\hat{k}.$$

Valores Numéricos no Instante $t = 2\,$s

Substituímos $t = 2\,$s nas expressões de $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$ para calcular seus valores numéricos:

$$\vec{v}(2) = 4\cos(4)\,\hat{\imath} - 2\sin(2)\,\hat{\jmath} - 8\,\hat{k}.$$

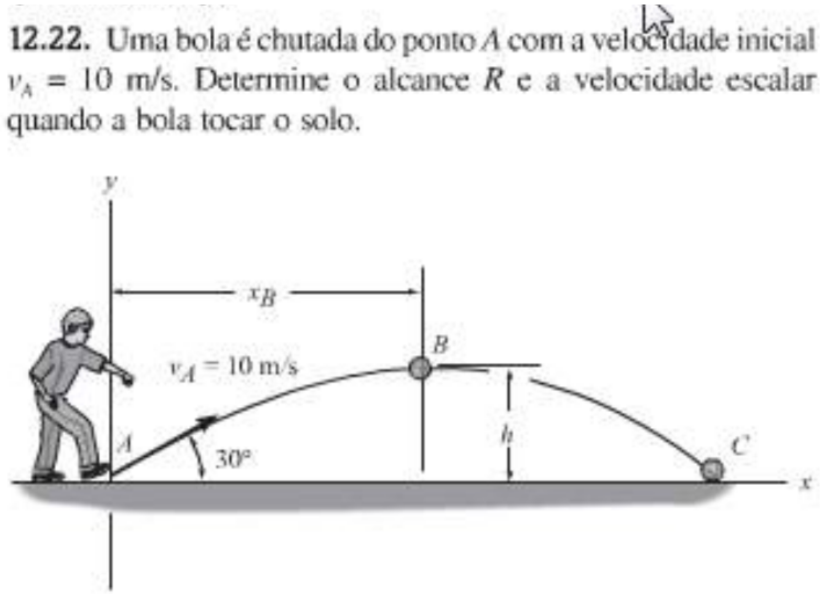
$$\vec{a}(2) = -8\sin(4)\,\hat{\imath} - 2\cos(2)\,\hat{\jmath} - 4\,\hat{k}.$$

Resultados Finais

- Velocidade vetorial:
$$\vec{v}(t) = 4\cos(2t)\,\hat{\imath} - 2\sin(t)\,\hat{\jmath} - 4t\,\hat{k}.$$
  Valor no instante $t = 2\,$s:
$$\vec{v}(2) = 4\cos(4)\,\hat{\imath} - 2\sin(2)\,\hat{\jmath} - 8\,\hat{k} = -2.614\,\hat{\imath} + 1.8185\,\hat{\jmath} - 8\,\hat{k}$$

- Aceleração vetorial:
$$\vec{a}(t) = -8\sin(2t)\,\hat{\imath} - 2\cos(t)\,\hat{\jmath} - 4\,\hat{k}.$$
  Valor no instante $t = 2\,$s:
$$\vec{a}(2) = -8\sin(4)\,\hat{\imath} - 2\cos(2)\,\hat{\jmath} - 4\,\hat{k} = 6.0544\,\hat{\imath} + 0.8323\,\hat{\jmath} - 4\,\hat{k}$$

5 Questão 12-22


12.22. Uma bola é chutada do ponto A com a velocidade inicial $v_A = 10$ m/s. Determine o alcance R e a velocidade escalar quando a bola tocar o solo.

Problemas 12.21/22

Figura 5: Comando da questão 12-22.

Nesta questão, analisamos o movimento de um projétil lançado obliquamente com velocidade inicial v_A e ângulo de lançamento $\alpha = 30°$. Determinamos o tempo total de voo, o alcance horizontal (R) e a velocidade escalar no impacto. Também substituímos valores numéricos para ilustrar os resultados.

Componentes da Velocidade Inicial

As componentes da velocidade inicial são:

$$v_{Ax} = v_A \cos(\alpha),$$
$$v_{Ay} = v_A \sin(\alpha),$$

onde:

- v_{Ax}: Componente horizontal da velocidade;
- v_{Ay}: Componente vertical da velocidade.

Equações do Movimento

A aceleração pode ser determinada por

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

E a velocidade é determinada por:

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

Manipulando as equações e combinando-as através de dt, temos:

$$a\,ds = v\,dv$$

Esta equação será a base das análises daqui em diante.

Tempo Total de Voo

Consideramos que a aceleração horizontal $a_x = 0$ e a vertical como $a_y = -g$, o que permite que o alcance R seja determinado pelo tempo de voo.

O tempo total de voo ocorre quando $y = 0$. Resolvemos a equação $y(t) = 0$:

$$v_{Ay} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = 0.$$

Fatorando t, temos:

$$t\left(v_{Ay} - \frac{1}{2}gt\right) = 0.$$

A solução positiva é:

$$t_{\text{total}} = \frac{2v_{Ay}}{g}.$$

Alcance Horizontal (R)

Substituímos t_{total} na equação do movimento horizontal para determinar o alcance:

$$R = x(t_{\text{total}}) = v_{Ax} \cdot t_{\text{total}}.$$

Substituindo $t_{\text{total}} = \frac{2v_{Ay}}{g}$:

$$R = v_{Ax} \cdot \frac{2v_{Ay}}{g}.$$

Usando as expressões para v_{Ax} e v_{Ay}:

$$R = \frac{2v_A^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}.$$

Simplificando com a identidade trigonométrica $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$:

$$R = \frac{v_A^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

Velocidade Escalar no Impacto

A componente horizontal da velocidade no impacto permanece constante:

$$v_{x,\text{final}} = v_{Ax}.$$

A componente vertical no impacto é:

$$v_{y,\text{final}} = v_{Ay} - g \cdot t_{\text{total}}.$$

Substituindo $t_{\text{total}} = \frac{2v_{Ay}}{g}$:

$$v_{y,\text{final}} = v_{Ay} - g \cdot \frac{2v_{Ay}}{g} = -v_{Ay}.$$

A velocidade escalar no impacto é dada por:

$$v_{\text{final}} = \sqrt{v_{x,\text{final}}^2 + v_{y,\text{final}}^2}.$$

Substituindo os valores de $v_{x,\text{final}}$ e $v_{y,\text{final}}$:

$$v_{\text{final}} = \sqrt{v_{Ax}^2 + (-v_{Ay})^2} = \sqrt{v_A^2}. = v_A$$

Cálculos Numéricos

Substituímos os seguintes valores:

$$v_A = 10\,\text{m/s}, \quad \alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}, \quad g = 9.81\,\text{m/s}^2.$$

O alcance horizontal é:

$$R = \frac{10^2 \sin(2 \cdot 30^\circ)}{9.81} = \frac{100 \cdot 0.866}{9.81} \approx 8.827\,\text{m}.$$

A velocidade escalar no impacto é:

$$v_{\text{final}} = \sqrt{10^2} = 10\,\text{m/s}.$$

Resultados Finais

- Tempo total de voo:
$$t_{\text{total}} = \frac{2v_A \sin(\alpha)}{g}.$$
- Alcance horizontal:
$$R = \frac{v_A^2 \sin(2\alpha)}{g} \approx 8.81\,\text{m}.$$
- Velocidade escalar no impacto:
$$v_{\text{final}} = v_A = 10\,\text{m/s}.$$

6 Questão 12-23

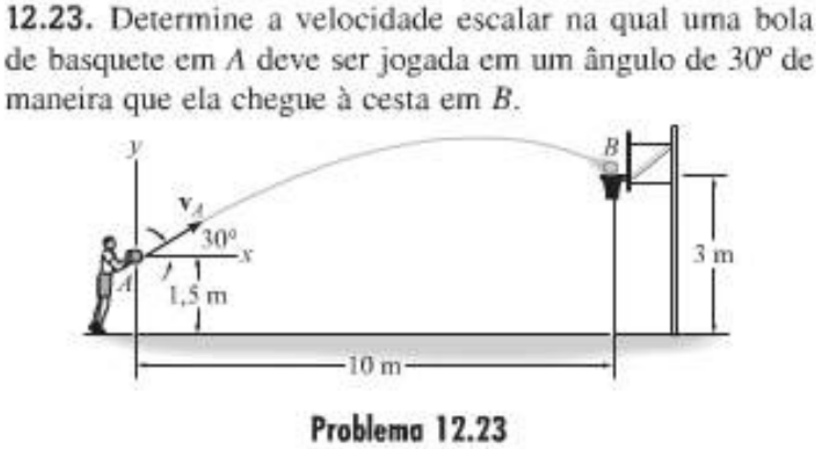

12.23. Determine a velocidade escalar na qual uma bola de basquete em A deve ser jogada em um ângulo de 30º de maneira que ela chegue à cesta em B.

Figura 6: Comando da questão 12-23.

Nesta questão, analisamos o movimento de um projétil lançado de uma altura inicial $y_0 = 1.5\,$m com um ângulo de lançamento de $30°$. O projétil percorre uma distância horizontal de $x = 10\,$m e atinge uma altura final de $y_f = 3\,$m. Nosso objetivo é determinar a velocidade inicial v_A necessária para satisfazer essas condições.

Equações do Movimento

As equações do movimento horizontal e vertical são:

$$x = v_A \cdot \cos(\theta) \cdot t,$$

$$y_f = y_0 + v_A \cdot \sin(\theta) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2,$$

onde:

- $x = 10\,$m: Distância horizontal;
- $y_0 = 1.5\,$m: Altura inicial;
- $y_f = 3\,$m: Altura final;
- $g = 9.81\,$m/s^2: Aceleração gravitacional;
- $\theta = 30° = \frac{\pi}{6}$: Ângulo de lançamento.

Movimento Horizontal

Do movimento horizontal, temos:

$$x = v_A \cdot \cos(\theta) \cdot t.$$

Resolvendo para o tempo t:

$$t = \frac{x}{v_A \cdot \cos(\theta)}.$$

Movimento Vertical

Substituímos $t = \frac{x}{v_A \cdot \cos(\theta)}$ na equação do movimento vertical:

$$y_f = y_0 + v_A \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{x}{v_A \cdot \cos(\theta)} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_A \cdot \cos(\theta)}\right)^2.$$

Simplificando:

$$y_f = y_0 + x \cdot \tan(\theta) - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_A^2 \cdot \cos^2(\theta)}.$$

Substituímos $y_0 = 1.5\,\text{m}$, $y_f = 3\,\text{m}$, $x = 10\,\text{m}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$, e $\cos(30°) = \sqrt{3}/2$, $\tan(30°) = 1/\sqrt{3}$:

$$3 = 1.5 + 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{9.81 \cdot 10^2}{2 \cdot v_A^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Simplificando:

$$3 = 1.5 + \frac{10}{\sqrt{3}} - \frac{9.81 \cdot 100}{v_A^2 \cdot \frac{3}{4}}.$$

$$3 = 1.5 + \frac{10}{\sqrt{3}} - \frac{1308}{v_A^2}.$$

Resolução para v_A

Reorganizamos a equação para resolver v_A:

$$v_A^2 = \frac{1308}{3 - 1.5 - \frac{10}{\sqrt{3}}}.$$

Calculando:

$$v_A \approx 12.37\,\text{m/s}.$$

Resultado Final

A velocidade inicial necessária para que o projétil atinja a altura final $y_f = 3\,\text{m}$ após percorrer $x = 10\,\text{m}$ é:

$$v_A \approx 12.37\,\text{m/s}.$$

7 Questão 12-27

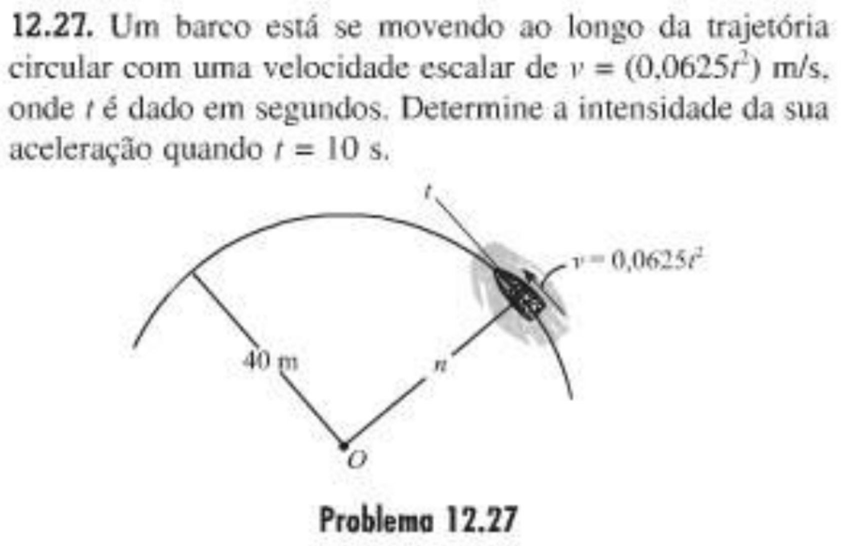

12.27. Um barco está se movendo ao longo da trajetória circular com uma velocidade escalar de $v = (0{,}0625t^2)$ m/s, onde t é dado em segundos. Determine a intensidade da sua aceleração quando $t = 10$ s.

Figura 7: Comando da questão 12-27.

Nesta questão, analisamos o movimento de uma partícula em uma trajetória circular de raio $r = 40\,\text{m}$, cuja velocidade escalar é dada por $v(t) = 0.0625 \cdot t^2$ (em m/s). Calculamos as acelerações tangencial, centrípeta e total (resultante) e avaliamos seus valores no instante $t = 10\,\text{s}$.

Aceleração Tangencial

A aceleração tangencial é obtida como a derivada da velocidade escalar em relação ao tempo:

$$a_t = \frac{dv}{dt}.$$

Derivando $v(t) = 0.0625 \cdot t^2$:

$$a_t = \frac{d}{dt}\left(0.0625 \cdot t^2\right) = 0.125 \cdot t.$$

Aceleração Centrípeta

A aceleração centrípeta é dada por:

$$a_c = \frac{v^2}{r}.$$

Substituímos $v(t) = 0.0625 \cdot t^2$ e $r = 40\,\text{m}$:

$$a_c = \frac{\left(0.0625 \cdot t^2\right)^2}{40} = \frac{0.00390625 \cdot t^4}{40} = 0.00009765625 \cdot t^4.$$

Aceleração Total (Resultante)

A aceleração total é a soma vetorial das componentes tangencial e centrípeta:

$$a_{\text{total}} = \sqrt{a_t^2 + a_c^2}.$$

Substituímos $a_t = 0.125 \cdot t$ e $a_c = 0.00009765625 \cdot t^4$:

$$a_{\text{total}} = \sqrt{(0.125 \cdot t)^2 + (0.00009765625 \cdot t^4)^2}.$$

Cálculos no Instante $t = 10$ s

Substituímos $t = 10$ s nas expressões para calcular os valores numéricos:

- Aceleração tangencial:
$$a_t = 0.125 \cdot 10 = 1.25 \, \text{m/s}^2.$$
- Aceleração centrípeta:
$$a_c = 0.00009765625 \cdot 10^4 = 0.9765625 \, \text{m/s}^2.$$
- Aceleração total:
$$a_{\text{total}} = \sqrt{1.25^2 + 0.9765625^2} \approx 1.5862 \, \text{m/s}^2.$$

8 Questão 12-30

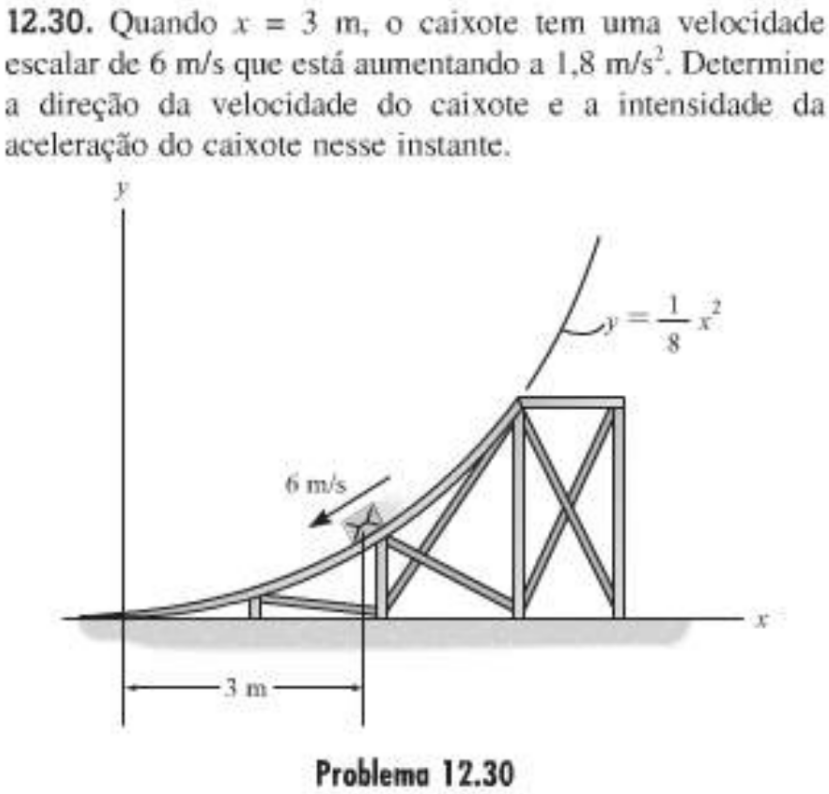


Figura 8: Comando da questão 12-30

Nesta questão, analisamos o movimento de uma partícula cuja trajetória é descrita por $y = \frac{1}{8}x^2$. Sabendo que a velocidade escalar é constante ($v = 6\,$m/s) e que a aceleração tangencial é $a_t = 1.8\,$m/s^2, determinamos o ângulo de inclinação da trajetória (θ), a aceleração normal (a_n) e a aceleração total (a_{total}) no ponto $x = 3\,$m.

Equação da Trajetória

A equação da trajetória é dada por:

$$y = \frac{1}{8}x^2.$$

Derivada da Trajetória e Ângulo de Inclinação

A inclinação da trajetória é obtida pela derivada de y em relação a x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x.$$

O ângulo de inclinação θ é dado por:

$$\theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Substituindo $x = 3\,$m:

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{4} \cdot 3\right) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right).$$

Convertendo para graus:

$$\theta \approx 36.87^\circ.$$

Segunda derivada

A derivada de segunda ordem, ou segunda derivada de y, é:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

Aceleração Normal (a_n)

A aceleração normal é calculada como:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

onde:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{(3/2)}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

Substituímos $v = 6\,$m/s, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x$ e $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{4}$:

$$a_n = \frac{6^2 \cdot \left|\frac{1}{4}\right|}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{1}{4}x\right)^2\right)^3}}.$$

Para $x = 3\,$m:

$$a_n = \frac{6^2 \cdot \left|\frac{1}{4}\right|}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{1}{4} \cdot 3\right)^2\right)^3}} = \frac{9}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}\right)^3}.$$

Simplificando:

$$a_n \approx 4.608\,\text{m/s}^2.$$

Aceleração Total (a_{total})

A aceleração total é a soma vetorial das componentes tangencial e normal:

$$a_{\text{total}} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

Substituímos $a_t = 1.8\,$m/s^2 e $a_n \approx 8.57\,$m/s^2:

$$a_{\text{total}} = \sqrt{1.8^2 + 4.61^2}.$$

Simplificando:

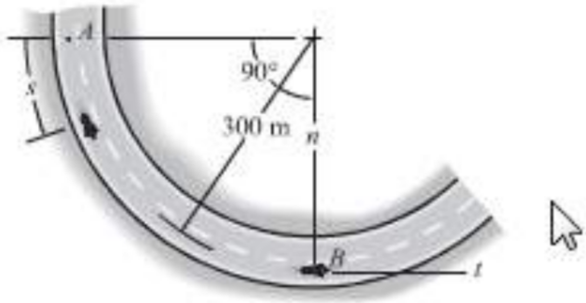
$$a_{\text{total}} \approx 4.948\,\text{m/s}^2.$$

Resultados Finais

- Ângulo de inclinação:
$$\theta \approx 36.87^\circ \quad \text{(em } x = 3\,\text{m).}$$
- Aceleração normal:
$$a_n \approx 4.608\,\text{m/s}^2 \quad \text{(em } x = 3\,\text{m).}$$
- Aceleração total:
$$a_{\text{total}} \approx 4.948\,\text{m/s}^2 \quad \text{(em } x = 3\,\text{m).}$$

9 Questão:12-31

12.31. Se a motocicleta tem uma desaceleração de $a_t = -(0{,}001s)$ m/s^2 e sua velocidade escalar na posição A é 25 m/s, determine a intensidade da sua aceleração quando ela passa o ponto B.



Problema 12.31

Figura 9: Comando da questão 12-31

Nesta questão, analisamos o movimento de uma partícula ao longo de uma curva circular com raio $r = 300\,$m. A aceleração tangencial da partícula é variável e descrita pela equação $a_t = -0.001 \cdot s$, onde s é a posição ao longo do arco em metros. Sabemos que a velocidade da partícula no ponto A ($s = 0$) é $v_A = 25\,$m/s. Nosso objetivo é determinar a velocidade da partícula no ponto B ($s = r = 300\,$m).

Equação do Movimento

A equação do movimento é dada por:

$$a_t = v \cdot \frac{dv}{ds},$$

onde:

- $a_t = -0.001 \cdot s$: Aceleração tangencial variável;
- v: Velocidade escalar da partícula;
- A distância percorrida s_B é: $s_B = \rho \cdot \theta = 300 \cdot \frac{pi}{2} = 471.24\,m$
- s: Posição ao longo do arco.

Substituímos a_t na equação:

$$-0.001 \cdot s = v \cdot \frac{dv}{ds}.$$

Reorganizando:

$$v \cdot dv = -0.001 \cdot s \cdot ds.$$

Integração

Integramos ambos os lados para determinar v em função de s. No ponto A, temos $v = v_A = 25$ m/s quando $s = 0$:

$$\int_{v_A}^{v} v\,dv = \int_0^s -0.001 \cdot s\,ds.$$

Resolvendo a integral do lado esquerdo:

$$\left.\frac{v^2}{2}\right|_{v_A}^{v} = -0.001 \cdot \left.\frac{s^2}{2}\right|_0^s.$$

Substituímos os limites:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} = -0.001 \cdot \frac{s^2}{2}.$$

Reorganizando para v^2:

$$v^2 = v_A^2 - 0.001 \cdot s^2.$$

Velocidade no Ponto B

No ponto B, substituímos $s = 471.24$ m e $v_A = 25$ m/s na equação:

$$v^2 = 25^2 - 0.001 \cdot (471.24)^2.$$

Calculando:

$$v^2 = 625 - 222,0671376.$$

$$v^2 = 402.933\, m^2/s^2$$

A velocidade no ponto B é:

$$v = \sqrt{402.933} \approx 20.073 \text{ m/s}.$$

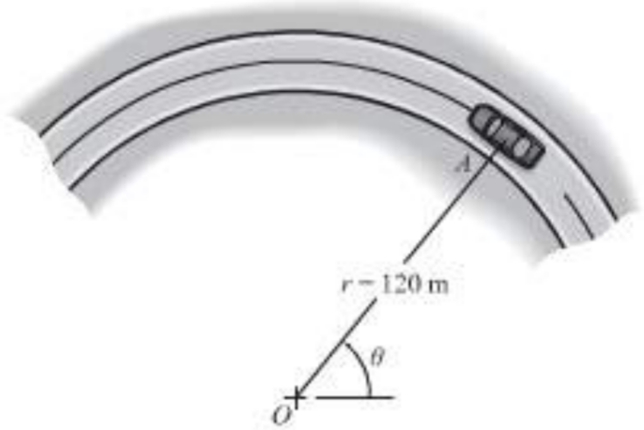
Resultado Final

A velocidade da partícula no ponto B ($s = r = 471.24$ m) é:

$$v \approx 20.073 \text{ m/s}.$$

10 Questão 12-33

12.33. O carro tem uma velocidade escalar de 16,5 m/s. Determine a velocidade angular $\dot{\theta}$ da linha radial OA nesse instante.



Problema 12.33

Figura 10: Comando da questão 12-33

Nesta questão, analisamos o movimento de uma partícula em uma trajetória circular com raio $r = 120\,\text{m}$ e velocidade escalar $v = 16.5\,\text{m/s}$. Determinamos a velocidade angular $\dot{\theta}$ da partícula.

Cálculo da Velocidade Angular

A relação entre a velocidade angular $\dot{\theta}$ e a velocidade escalar v em uma trajetória circular é dada por:

$$\dot{\theta} = \frac{v}{r},$$

onde:

- $\dot{\theta}$: Velocidade angular (em rad/s);
- v: Velocidade escalar (em m/s);
- r: Raio da trajetória circular (em m).

Substituição dos Valores Numéricos

Substituímos os valores $v = 16.5\,\text{m/s}$ e $r = 120\,\text{m}$ na equação:

$$\dot{\theta} = \frac{16.5}{120}.$$

Simplificando:

$$\dot{\theta} \approx 0.138\,\text{rad/s}.$$

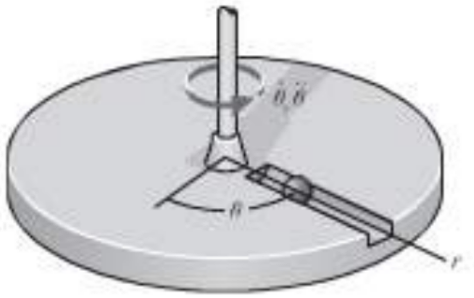
Resultado Final

A velocidade angular da partícula é:

$$\dot{\theta} \approx 0.138\,\text{rad/s}.$$

11 Questão 12-34

12.34. A plataforma está girando em torno do eixo vertical de modo que em qualquer instante a sua posição angular é $\theta = (4t^{3/2})$, onde t é dado em segundos. Uma bola rola para fora ao longo do sulco radial de maneira que sua posição é dada por $r = (0{,}1t^3)$, onde t é dado em segundos. Determine as intensidades da velocidade e aceleração da bola quando $t = 1{,}5$ s.



Problema 12.34

Figura 11: Comando da questão 12-34.

Nesta questão, analisamos o movimento de uma partícula em coordenadas polares, onde a posição radial e a posição angular variam com o tempo. A posição radial é dada por $r(t) = 0.1 \cdot t^3$, e a posição angular é $\theta(t) = 4 \cdot t^{3/2}$. Calculamos as velocidades, acelerações e suas intensidades no instante $t = 1.5\,$s.

Velocidade Radial e Angular

A velocidade radial é a derivada de $r(t)$ em relação ao tempo:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0.1 \cdot t^3\right) = 0.3 \cdot t^2.$$

E a segunda derivada é:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2\left(0.3t^2\right)}{dt^2} = 0.6t$$

A velocidade angular é a derivada de $\theta(t)$ em relação ao tempo:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4 \cdot t^{3/2}\right) = 6 \cdot t^{1/2}.$$

E sua respectiva segunda derivada é:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\left(6 \cdot t^{1/2}\right)}{dt^2} = 3 \cdot t^{-1/2}$$

Velocidade Tangencial e Intensidade da Velocidade Total

A velocidade tangencial é dada por:

$$v_{\text{tangencial}} = r \cdot \frac{d\theta}{dt}.$$

Substituímos $r(t) = 0.1 \cdot t^3$ e $\frac{d\theta}{dt} = 6 \cdot t^{1/2}$:

$$v_{\text{tangencial}} = \left(0.1 \cdot t^3\right) \cdot \left(6 \cdot t^{1/2}\right) = 0.6 \cdot t^{7/2}.$$

A intensidade da velocidade total é:

$$v_{\text{total}} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + v_{\text{tangencial}}^2}.$$

Substituímos $\frac{dr}{dt} = 0.3 \cdot t^2$ e $v_{\text{tangencial}} = 0.6 \cdot t^{7/2}$:

$$v_{\text{total}} = \sqrt{(0.3 \cdot t^2)^2 + \left(0.6 \cdot t^{7/2}\right)^2}.$$

Acelerações Radial e Tangencial

A aceleração radial (centrípeta) é dada por:

$$a_{\text{radial}} = \frac{d^2r}{dt^2} - r \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Substituímos $r(t) = 0.1 \cdot t^3$, $\frac{d^2r}{dt^2} = 0.6t$ e $\frac{d\theta}{dt} = 6 \cdot t^{1/2}$:

$$a_{\text{radial}} = (0.6t) - 0.1t^3 \cdot (6t^{1/2})^2 = 0.6t - 3.6t^4.$$

A aceleração tangencial em relação ao tempo vale:

$$a_{\text{tangencial}} = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$a_{\text{tangencial}} = 0.1t^3 \cdot 3t^{-1/2} + 2 \cdot 0.3t^2 \cdot 6t^{1/2} = 0.3t^{5/2} + 3.6t^{5/2} = 3.9t^{5/2}$$

A intensidade da aceleração total é:

$$a_{\text{total}} = \sqrt{a_{\text{radial}}^2 + a_{\text{tangencial}}^2}.$$

Substituímos $a_{\text{radial}} = 0.6t - 3.6 \cdot t^4$ e $a_{\text{tangencial}} = 3.9 \cdot t^{5/2}$:

$$a_{\text{total}} = \sqrt{(0.6t - 3.6 \cdot t^4)^2 + \left(3.9 \cdot t^{5/2}\right)^2}.$$

Cálculos no Instante $t = 1.5$ s

Substituímos $t = 1.5$ s nas expressões:

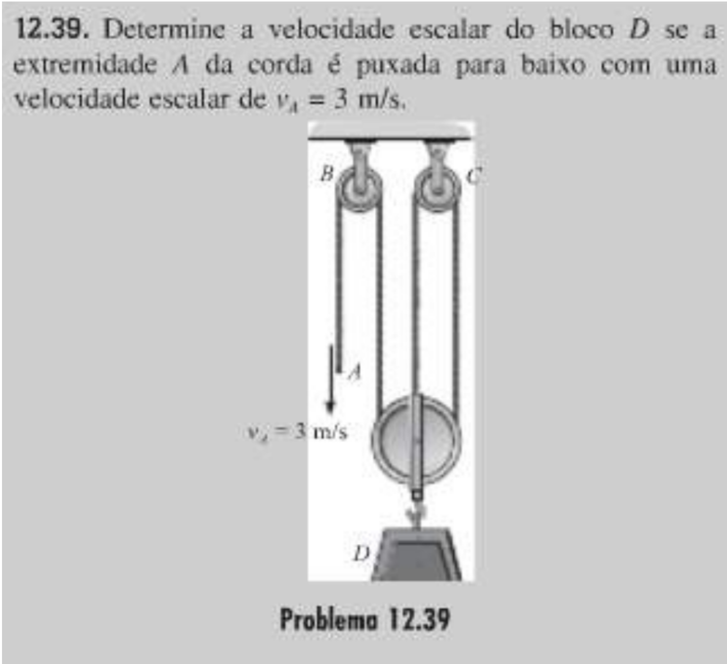
- Velocidade total:

$$v_{\text{total}} = \sqrt{(0.3 \cdot 1.5^2)^2 + \left(0.6 \cdot 1.5^{7/2}\right)^2} \approx 2.57032 \, \text{m/s}.$$

- Aceleração total:

$$a_{\text{total}} = \sqrt{\left(3.6 \cdot 1.5^4\right)^2 + \left(2.1 \cdot 1.5^{5/2}\right)^2} \approx 20.3877 \, \text{m/s}^2.$$

12 Questão 12-39



12.39. Determine a velocidade escalar do bloco D se a extremidade A da corda é puxada para baixo com uma velocidade escalar de $v_A = 3$ m/s.

Figura 12: Comando da questão 12-39.

Nesta questão, analisamos um sistema de polias em que a velocidade de um ponto A é relacionada à velocidade de um bloco D devido à configuração do sistema de cordas. Determinamos a velocidade de D (v_D) quando a velocidade de A (v_A) é 3 m/s.

Relação entre as Velocidades

No sistema de polias, podemos tratar os cabos como vetores de posição para identificar as velocidades relacionadas a cada elemento da seguinte forma:

$$l_{\text{total}} = 3s_D + s_A$$

onde:

- s_A: Cabo de comprimento BA, com referencial em A;
- s_D: Cabo de comprimento CD, com referencial em C.

Queremos identificar o quão rápido D se aproxima do ponto C quando A desce em uma velocidade de $3\,m/s$, logo:

Cálculo de v_D

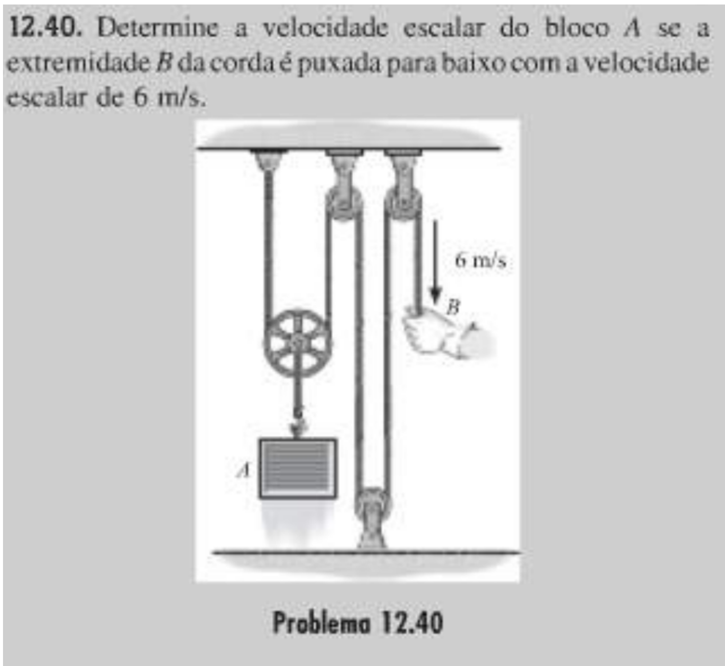
Substituímos $v_A = 3$ m/s na equação:

$$\frac{d\,(l_{\text{total}} = 3s_D + s_A)}{dt} \rightarrow 0 = 3v_D + v_A$$

Resolvendo para v_D:

$$3_{v_D} + 3\,\text{m/s} \rightarrow v_D = 1.0\,\text{m/s}.$$

13 Questão 12-40


12.40. Determine a velocidade escalar do bloco *A* se a extremidade *B* da corda é puxada para baixo com a velocidade escalar de 6 m/s.

Problema 12.40

Figura 13: Comando da questão 12-40.

Nesta questão, analisamos um sistema de polias em que a velocidade no ponto B é relacionada à velocidade do bloco A devido à configuração do sistema de cordas. Determinamos a velocidade de A (v_A) quando a velocidade de B (v_B) é 6 m/s.

Relação entre as Velocidades

No sistema de polias, podemos tratar os cabos como vetores de posição para identificar as velocidades relacionadas a cada elemento da seguinte forma:

$$l_{\text{total}} = s_B + 2s_A + 2h$$

onde:

- s_B: Posiçãono ponto B;
- s_A: Posição do bloco A;
- h: Altura.

Cálculo de v_A

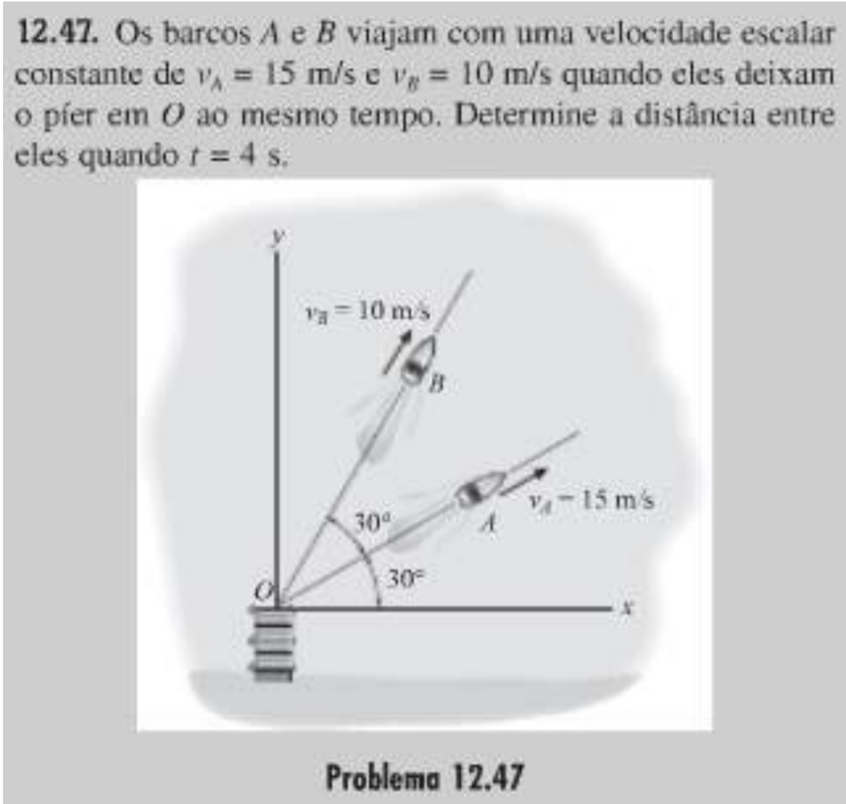
Substituímos $v_B = 6$ m/s na equação:

$$\frac{d\left(l_{\text{total}} = s_B + 2s_A + 2h\right)}{dt} \to 0 = v_B + 2v_A$$

Resolvendo para v_A:

$$v_A = \frac{-6}{2} = -3 \text{ m/s}.$$

14 Questão 12-47



12.47. Os barcos A e B viajam com uma velocidade escalar constante de $v_A = 15$ m/s e $v_B = 10$ m/s quando eles deixam o píer em O ao mesmo tempo. Determine a distância entre eles quando $t = 4$ s.

Problema 12.47

Figura 14: Comando da questão 12-47.

Nesta questão, analisamos o movimento de dois barcos, A e B, que se movem em direções diferentes. O barco A se move com uma velocidade escalar $v_A = 15$ m/s a um ângulo de $30°$ em relação ao eixo x, enquanto o barco B se move com uma velocidade escalar $v_B = 10$ m/s na direção do eixo y. Determinamos a distância entre os barcos no instante $t = 4$ s.

Movmento relativo:

A velocidade do barco A é dada por suas componentes v_A e $v_{B/A}$:

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

$$x_A = v_A \cdot t \cdot \cos(\theta),$$

$$y_A = v_A \cdot t \cdot \sin(\theta),$$

onde:

- $v_A = 15$ m/s é a velocidade escalar do barco A;
- $\theta = 30° = \frac{\pi}{6}$ é o ângulo do movimento do barco A.

A posição do barco B é:

$$x_B = 0, \quad y_B = v_B \cdot t,$$

onde $v_B = 10$ m/s é a velocidade escalar do barco B.

Distância entre os Barcos

A distância entre os barcos é dada por:

$$d(t) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Substituímos as expressões para x_A, x_B, y_A e y_B:

$$d(t) = \sqrt{(v_A \cdot t \cdot \cos(\theta) - 0)^2 + (v_A \cdot t \cdot \sin(\theta) - v_B \cdot t)^2}.$$

Simplificando:

$$d(t) = \sqrt{\left(15 \cdot t \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2 + \left(15 \cdot t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 10 \cdot t\right)^2}.$$

Cálculo para $t = 4\,$s

Substituímos $t = 4\,$s na expressão:

$$d(4) = \sqrt{\left(15 \cdot 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2 + \left(15 \cdot 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 10 \cdot 4\right)^2}.$$

Calculando:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Substituímos:

$$d(4) = \sqrt{\left(15 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(15 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot 4\right)^2}.$$

Simplificando:

$$d(4) = \sqrt{\left(60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (30 - 40)^2},$$

$$d(4) = \sqrt{\left(30\sqrt{3}\right)^2 + (-10)^2}.$$

Calculando:

$$d(4) = \sqrt{2700 + 100} = \sqrt{2800} \approx 52.92\,\text{m}.$$

Resultado Final

A distância entre os barcos no instante $t = 4\,$s é:

$$d(4) \approx 52.92\,\text{m}.$$