ELETROTÉCNICA

FASORES E OPERAÇÃO SOBRE FASORES

Prof. Roger Cruz

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

REPRESENTAÇÃO FASORIAL E SINAIS SENOIDAIS

Sabemos que podemos representar sinais de tensão e corrente alternadas senoidais através das seguintes expressões matemáticas:

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = I_m \text{sen}(\omega t + \theta)$$

Essas expressões matemáticas para tensões e correntes, na **forma trigonométrica** do domínio do tempo, não permitem métodos práticos para análise de circuitos elétricos, pois não fáceis de serem operadas algebricamente.

REPRESENTAÇÃO FASORIAL E SINAIS SENOIDAIS

Exemplo: Sabemos que potência elétrica é o produto da tensão pela corrente. Dessa forma a equação da potência torna-se:

$$v(t) = 10\text{sen}(100t)$$

$$i(t) = 2\text{sen}(100t - 60^0)$$

Resolvendo temos:

$$p(t) = 10\text{sen}(100t).2\text{sen}(100t - 60^0)$$
$$p(t) = 20\text{sen}(100t).\text{sen}(100t - 60^0)$$

A questão é: como multiplicar os dois senos de ângulos diferentes?

Você pode utilizar uma identidade trigonométrica, no entanto é bastante trabalhoso e nada óbvio

REPRESENTAÇÃO FASORIAL E SINAIS SENOIDAIS

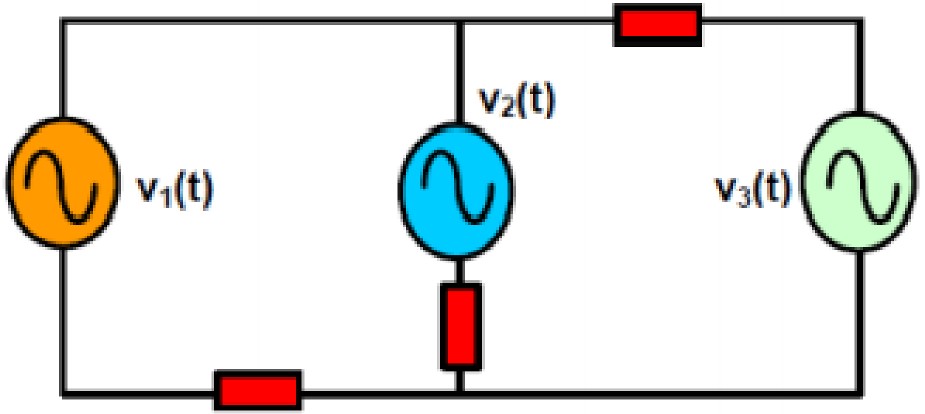
Sabemos que todo o sistema elétrico brasileiro opera a uma mesma frequência (60 Hz).

O que diferencia em algumas regiões são as tensões (110; 127; 220; 227 V, por exemplo)

Da mesma forma, no método que será apresentado, todas as fontes de tensão e de corrente de um circuito possuem a **mesma frequência angular** ω na representação de tensão "v" e da corrente "i".

REPRESENTAÇÃO FASORIAL E SINAIS SENOIDAIS

- Seja por exemplo o circuito da Figura abaixo:



$$v_1(t) = 10\text{sen}(200t)$$
$$v_2(t) = 5\text{sen}(200t + 45^0)$$
$$v_3(t) = 20\text{sen}(200t + 90^0)$$

REPRESENTAÇÃO FASORIAL E SINAIS SENOIDAIS

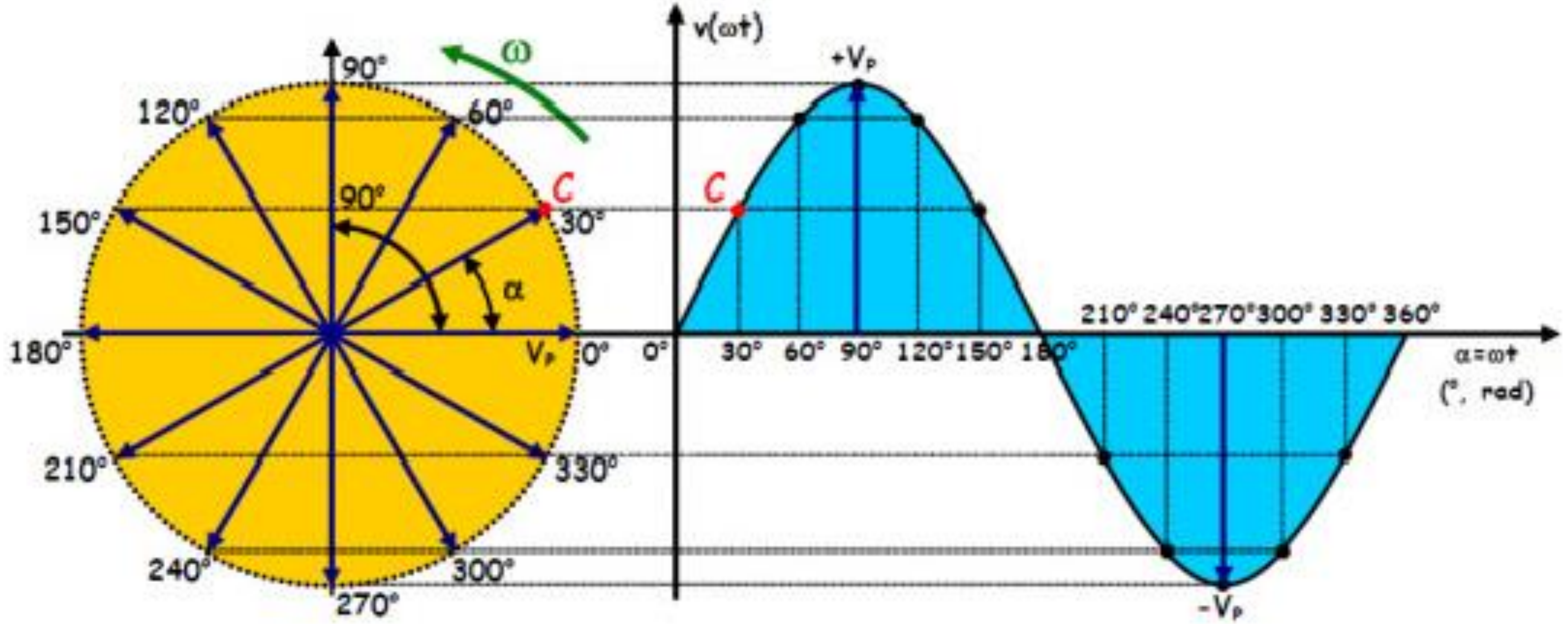
Todas as fontes apresentam a mesma frequência angular.

Desta forma ela pode ser omitida na representação das tensões e correntes.

A diferenciação das tensões será feita, então, em função da tensão de pico Vp (ou da tensão eficaz Vef) e do ângulo de fase inicial θ de cada fonte.

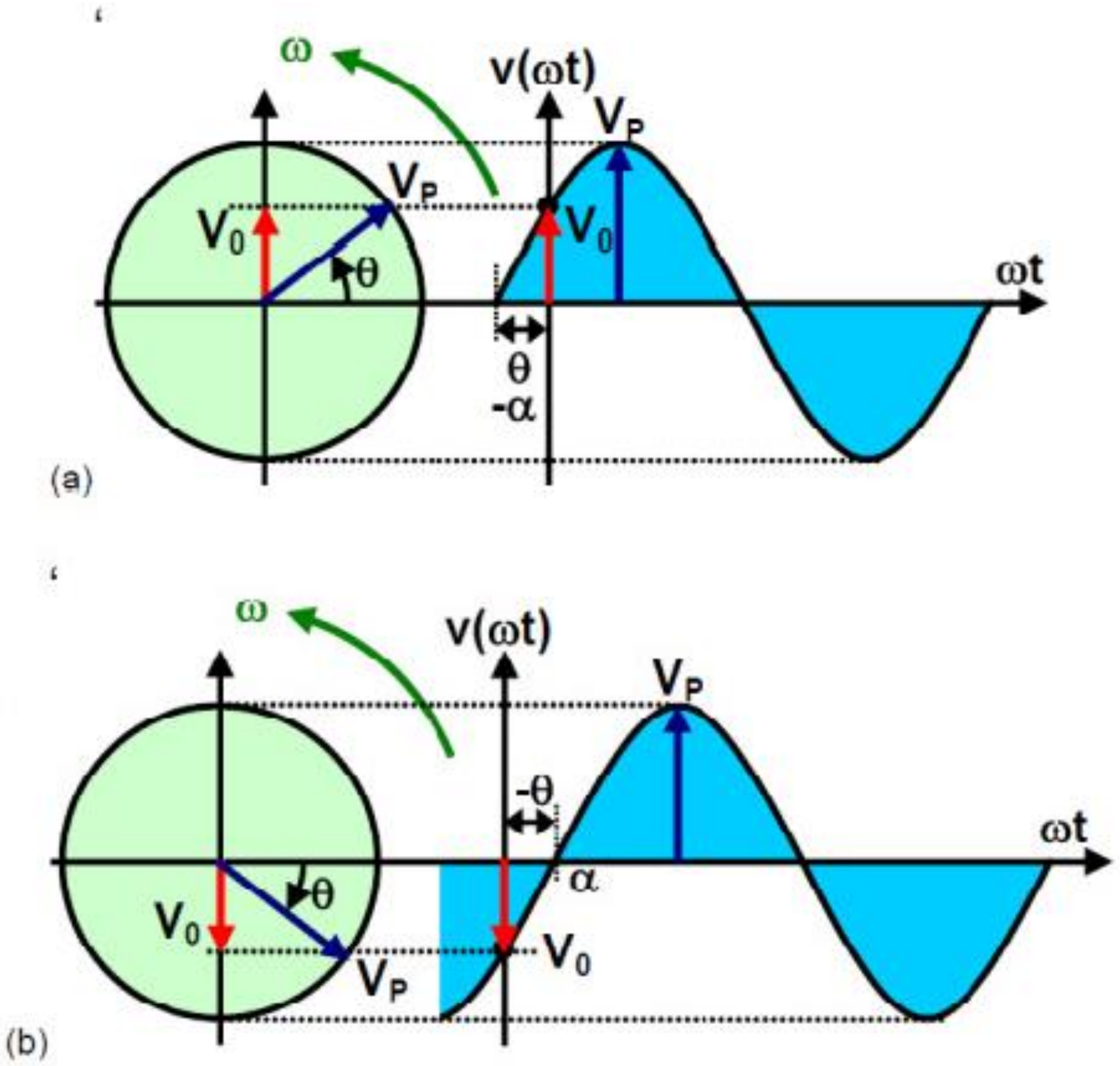
FASOR

Do estudo da Física, sabemos que um ponto se deslocando em um movimento circular uniforme (movimento harmônico) pode ser representado através de suas projeções num plano cartesiano formando uma senóide, como mostra a figura:



FASOR

- Se o ciclo da senóide iniciar adiantado, o ângulo de fase inicial θ é positivo.
- Se o ciclo da senóide iniciar atrasado, o ângulo de fase inicial θ é negativo, conforme Figura :

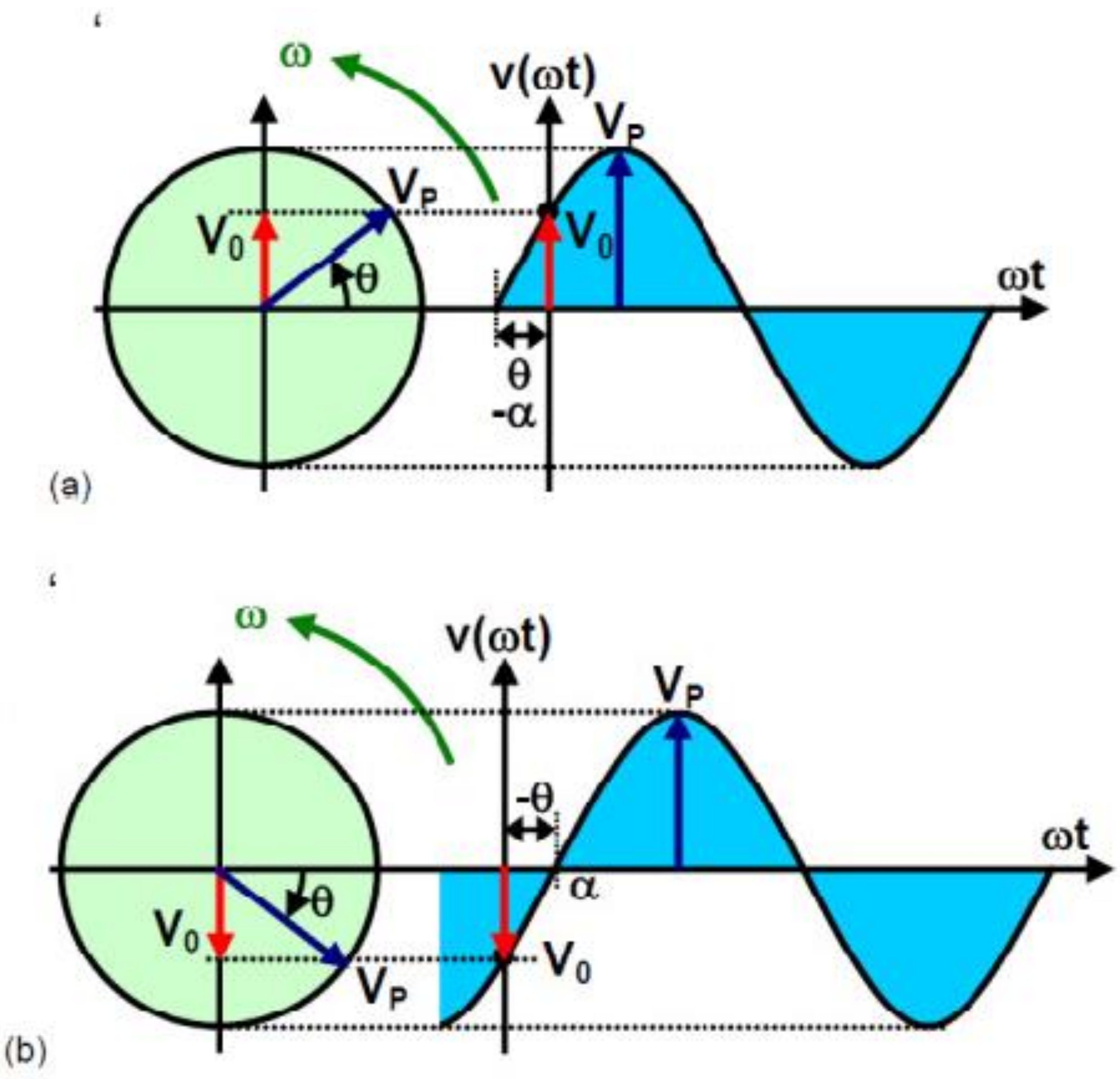


FASOR

Considerando que este vetor radial:

- Gira à mesma frequência angular ω constante da senóide de origem
- Possui a mesma frequência f e o período que a senóide de origem
- A cada volta se encontra na mesma posição inicial correspondente ao ângulo de fase inicial θ da senóide de origem
- Possui um módulo constante igual ao valor de pico Vp da senóide de origem

Então esse vetor girante possui os mesmos parâmetros da senóide de origem. Para definí-lo basta o **módulo** e o seu **ângulo** de fase inicial.



FASOR

Dessa forma os sinais senoidais de tensão e corrente podem ser representados através de vetores girantes, chamados de **Fasores**

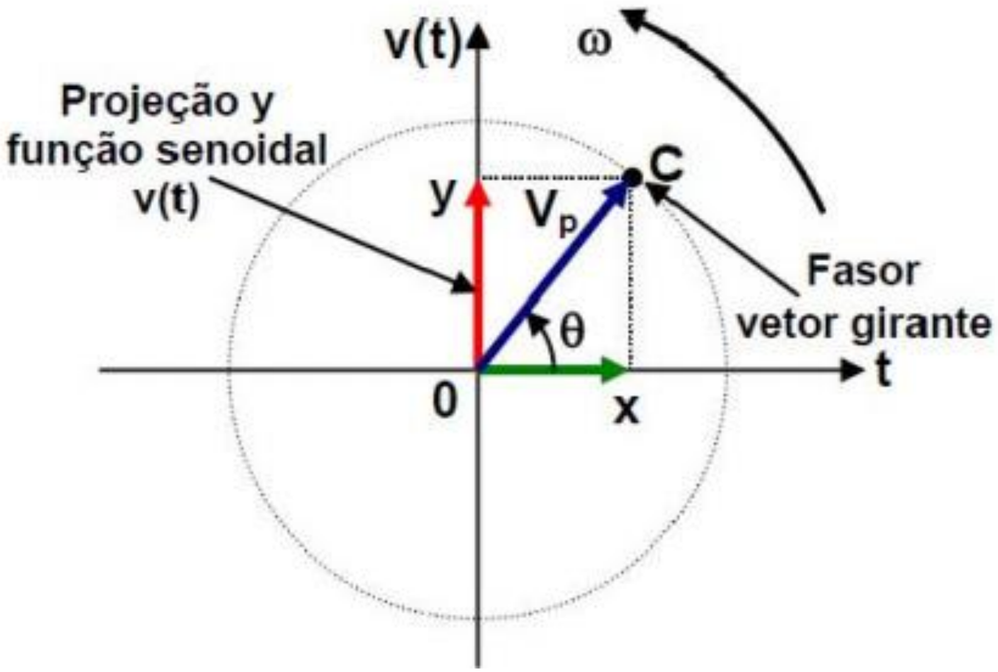
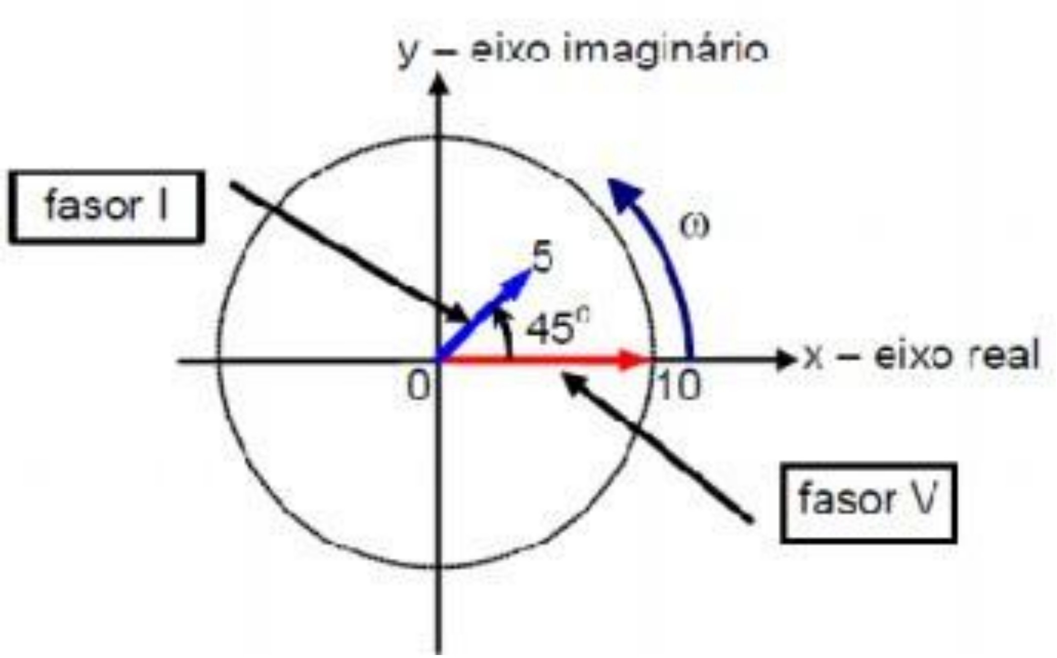


Diagrama Fasorial

FASOR

Um diagrama fasorial pode conter um ou vários fasores (vários sinais senoidais) desde que todos tenham a mesma frequência.

Exemplo: Obter a defasagem entre os sinais senoidais representados no seguinte diagrama Fasorial



O fasor em azul possui módulo 5 e fase inicial de 45°, o fasor representado em vermelho possui módulo 10 e ângulo de fase de 0°. Desta forma a diferença de fase será: 45° - 0° =45°

OPERAÇÕES MATEMÁTICAS COM FASORES E DIAGRAMAS FASORIAIS

A representação fasorial é importante na análise de circuitos elétricos pois permite realizar facilmente diversas operações matemáticas entre tensões, correntes e potências, sem usar a função do domínio do tempo (expressões trigonométricas) ou a representação gráfica da onda.

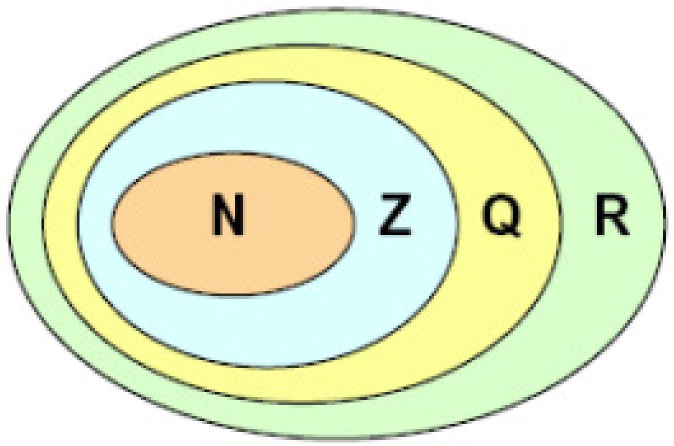
OPERAÇÕES MATEMÁTICAS COM FASORES E DIAGRAMAS FASORIAIS

- **A álgebra fasorial para sinais senoidais é aplicável somente para sinais de mesma freqüência.**

- A representação fasorial através de números complexos na forma retangular e na forma polar, permite todas as operações matemáticas mais direta e facilmente e segue as mesmas regras para operações com números complexos estudadas em matemática.

OPERAÇÕES MATEMÁTICAS COM FASORES E DIAGRAMAS FASORIAIS

- Conjunto dos Números Naturais: **N** = {0, 1, 2, 3, ... }
- Conjunto dos Números Inteiros: **Z** = { ...., -2, -1, 0, +1, +2, ... }
- Conjunto dos Números Racionais: **Q** = $\{x \,/\, x = \frac{p}{q};\ p \text{ e } q \in \mathbf{Z} \text{ e } q \neq 0\}$
- Conjunto dos Números Reais: **R** = { racionais e irracionais }



$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

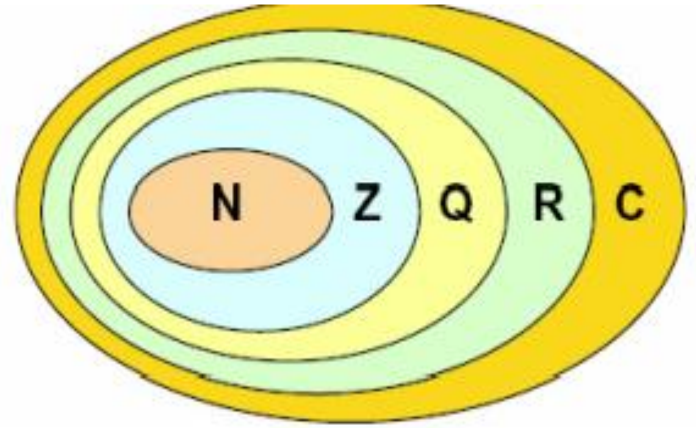
$$x = \pm\sqrt{-1}$$

Para resolver este problema:

$$j^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad j = \sqrt{-1}$$

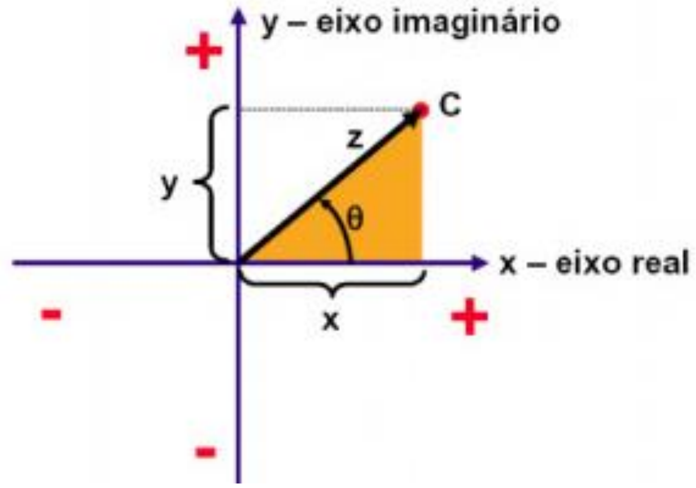
OPERAÇÕES MATEMÁTICAS COM FASORES E DIAGRAMAS FASORIAIS

Conjunto dos números complexos:



Um número imaginário está deslocado de 90° de um número real no plano cartesiano.

Um número complexo é um ponto no plano cartesiano complexo.



OPERAÇÕES MATEMÁTICAS COM FASORES E DIAGRAMAS FASORIAIS

Um número complexo na Forma Retangular (ou Cartesiana) é composto por uma parte real e uma parte imaginária

$$C = x + jy$$

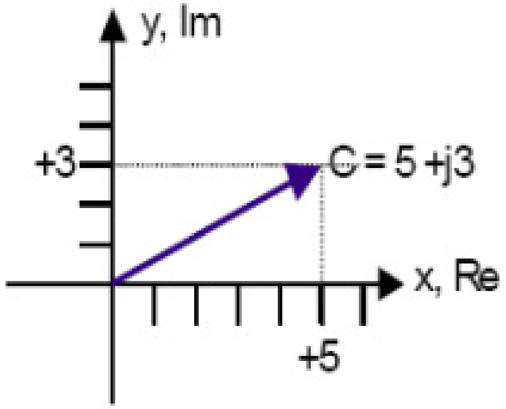
C – número complexo na forma retangular;

x – projeção no eixo x (abscissa) referente à parte real;

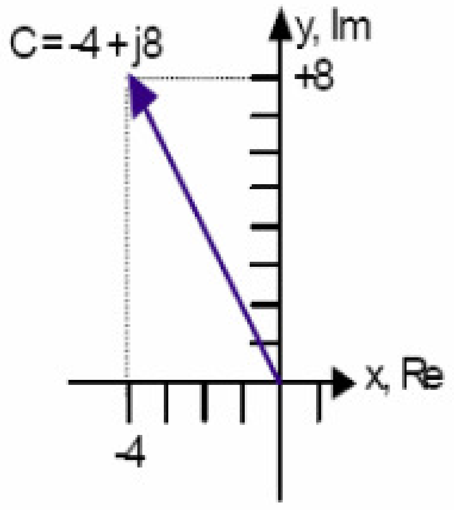
y – projeção no eixo y (ordenada) referente à parte imaginária.

Exemplos:

$C = 5 + j3$



$C = -4 + j8$



OPERAÇÕES MATEMÁTICAS COM FASORES E DIAGRAMAS FASORIAIS

Um número complexo na Forma Polar é um número composto por um vetor e um ângulo.

$$C = z\angle\theta$$

C - número complexo na forma polar;

z – módulo (comprimento) do vetor radial desde a origem até o ponto (**z**>0);

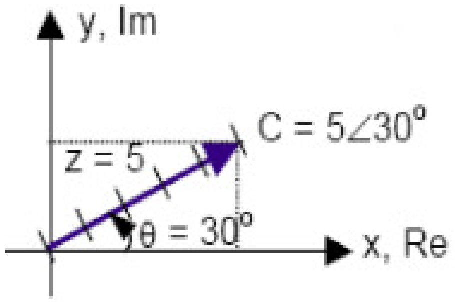
θ - argumento (ângulo) do vetor desde o eixo horizontal, medido no sentido anti-horário.

Ângulos positivos (+) *são medidos no* ***sentido anti-horário*** *a partir do eixo horizontal x.*

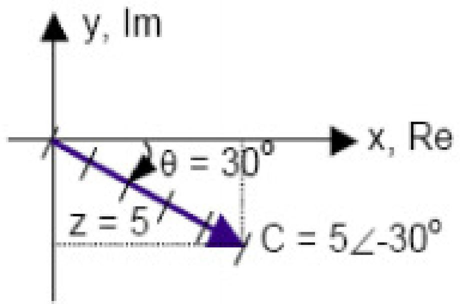
Ângulos negativos (-) *são medidos* ***no sentido horário*** *a partir do eixo horizontal x.*

Exemplos:

$C = 5 \angle 30^o$



$C = 5 \angle -30^o$



CONVERSÃO ENTRE FORMAS

Conversão de retangular para polar:

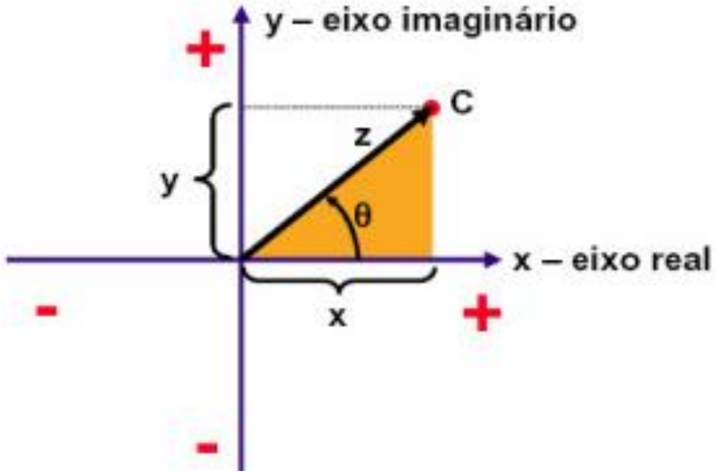
$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$C = z\angle\theta = \sqrt{x^2 + y^2}\angle\left[tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemplos: $C = 60 + j80$

$$tg\theta = \frac{y}{x}$$



$$z = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{80}{60}\right) = 53{,}13^o$$

$$C = 100\angle 53{,}13^o$$

CONVERSÃO ENTRE FORMAS

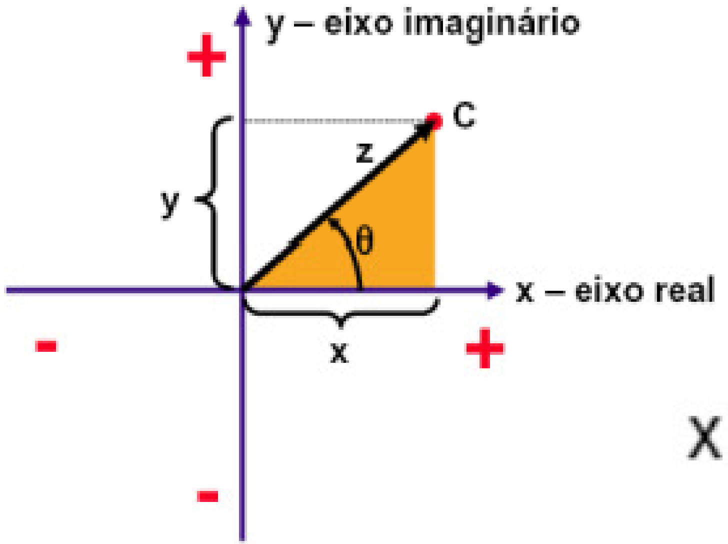
Conversão de polar para retangular:

$$\cos\theta = \frac{x}{z}$$

$$x = z \cdot \cos\theta$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{z}$$

$$y = z \cdot \text{sen}\,\theta$$



$$C = x + jy = z \cdot \cos\theta + j(z \cdot \text{sen}\,\theta)$$

Exemplos:

$$C = 200\angle 45^\circ$$

$$x = 200 \cdot \cos 45^\circ = 141{,}42$$

$$y = 200 \cdot \text{sen}\,45^\circ = 141{,}42$$

$$C = 141{,}42 + j141{,}42$$

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Conjugado complexo:

$$C = x + jy = z\angle\theta$$

$$C^{*} = x - jy = z\angle -\theta$$

Exemplos:

a) $C = 5 + j7 \quad \Rightarrow \quad C^{*} = 5 - j7$

b) $C = 100\angle\text{-}30^{\circ} \quad \Rightarrow \quad C^{*} = 100\angle +30^{\circ}$

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Soma e Subtração algébrica de números complexos são feitas na forma retangular.

Somam-se ou subtraem-se algebricamente as partes reais e as partes imaginárias, separadamente.

$$C_1 + C_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$C_1 - C_2 = (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Exemplos:

$$(3 + j4) + (5 + j6) = (3 + 5) + (j4 + j6) = 8 + j10$$

$$(3 + j4) - (5 + j6) = (3 - 5) + (j4 - j6) = -2 - j2$$

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Multiplicação de números complexos é feita na forma polar.

$$C_1 \cdot C_2 = z_1 \cdot z_2 \angle(\theta_1 + \theta_2)$$

Divisão de números complexos é feita na forma polar.

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{z_1 \angle \theta_1}{z_2 \angle \theta_2} = \frac{z_1}{z_2} \angle(\theta_1 - \theta_2)$$

Exemplos:

$$10\angle 45^\circ \times 20\angle 30^\circ = 10 \times 20 \angle(45^\circ + 30^\circ) = 200 \angle 75^\circ$$

$$10\angle 45^\circ / 20\angle 30^\circ = 10/20 \angle(45^\circ - 30^\circ) = 0{,}5 \angle 15^\circ$$

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Um fasor é um número complexo na forma polar.

Fasor Tensão: $\dot{V} = V_{ef} \angle \theta_v$

Fasor Corrente: $\dot{I} = I_{ef} \angle \theta_i$

Exemplos:

a) $v(t) = 311 \cdot sen(377 \cdot t)\,V \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = 220\angle 0^o\,V$

b) $i(t) = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot sen(\varpi t + 30^o)\,A \quad \Rightarrow \quad \dot{I} = 10\angle 30^o\,A$

c) $v(t) = 50 \cdot cos(\omega t - 15^o)\,mV \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = \frac{50}{\sqrt{2}}\angle 75^o\,mV$

REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS DE SINAIS SENOIDAS

	Tensão (V)	*Corrente (A)*
Valor Instantâneo Domínio do Tempo ***Forma Trigonométrica***	$v(t) = V_p \cdot sen(\omega \cdot t \pm \theta_v)$	$i(t) = I_p \cdot sen(\omega \cdot t \pm \theta_i)$
Fasor Domínio Fasorial ***Forma Polar***	$\dot{V} = V_{ef} \angle \theta_v$	$\dot{I} = I_{ef} \angle \theta_i$
Fasor Domínio Fasorial ***Forma Retangular*** ***(Cartesiana)***	$\dot{V} = V_{ef} \cdot \cos\theta_v + j \cdot V_{ef} \cdot sen\theta_v$	$\dot{I} = I_{ef} \cdot \cos\theta_i + j \cdot I_{ef} \cdot sen\,\theta_i$
Valor Eficaz (Médio Quadrático, RMS)	$V_{ef} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$	$I_{ef} = \frac{I_p}{\sqrt{2}}$

- Somar e subtrair dois sinais senoidais

$$V1(t) = 20.\sqrt{2}sen(377t + 45°) \Rightarrow \dot{V}1 = 20\angle 45° \ V$$
$$V2(t) = 40\sqrt{2}sen(377t - 30°) \Rightarrow \dot{V}2 = 40\angle -30° \ V$$
$$\dot{V}1 = x + jy = 20 \,.\cos(45°) + 20.\,sen(45°)j = 14{,}14 + 14{,}14\,j$$
$$\dot{V}2 = 40 \,.\cos(-30°) + 40\,.\,sen(-30°)j = 34{,}64 - 20j$$
$$\dot{V}1 + \dot{V}2 = 14{,}14 + 14{,}14\,j + 34{,}64 - 20j = (14{,}14 + 34{,}64) + j(14{,}14 - 20) = 48{,}78 \ - j5{,}86\,V$$
$$\dot{V}1 - \dot{V}2 = (14{,}14 + 14{,}14\,j) - (34{,}64 - 20j) = (14{,}14 \ - 34{,}64) - j(14{,}14 - 20) = -20{,}5 + j5{,}86\,V$$

Bibliografia

Boylestad, Robert L. **Introdução a Análise de Circuitos**. São Paulo, . 10ª Ed. LTC, 2014.

DOS SANTOS, Alex Ferreira. **Eletricidade Aplicada.** 1 ed, 2016.