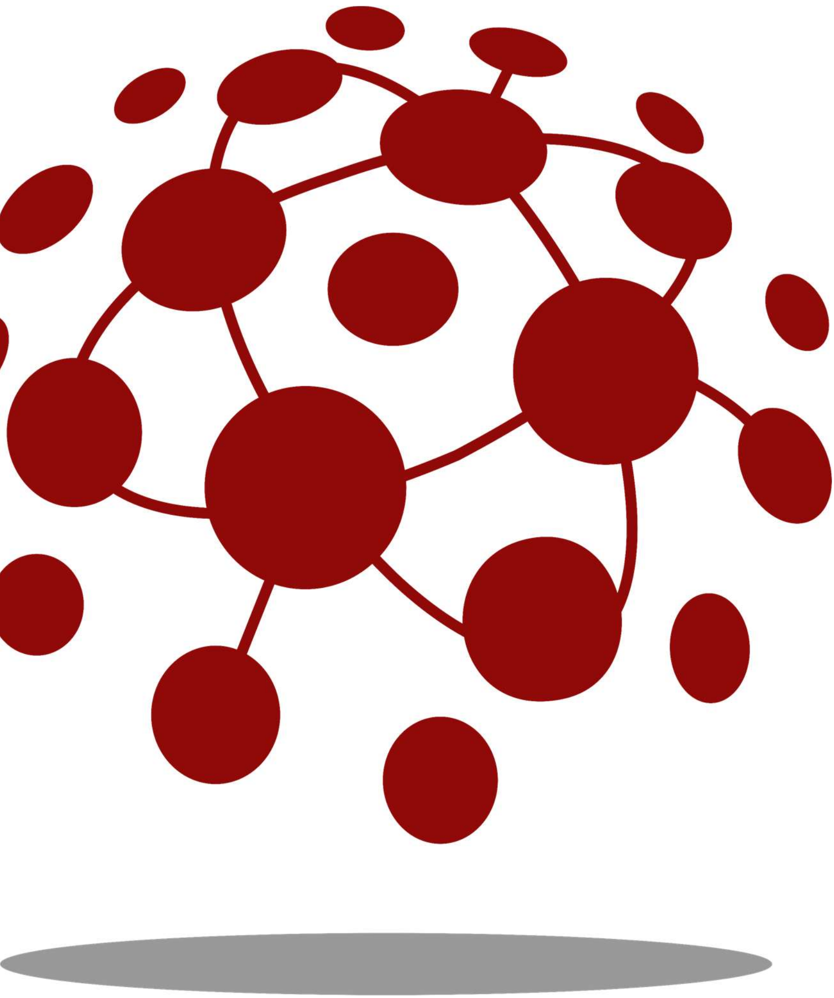
E-books
PCNA

FÍSICA
CAPÍTULO 2

VOL. 2 – ANÁLISE VETORIAL



Sumário

Apresentação

Ao chegar à UFPA, você tem a possibilidade de cursar gratuitamente cursos de nivelamento em Ciências Básicas (Física, Química e Matemática). Assistindo às aulas no próprio ambiente em que cursará sua graduação, isso auxiliará você a adquirir o conhecimento necessário para enfrentar melhor o programa curricular do seu curso. Então seja Bem-vindo ao Curso de Nivelamento em Física Elementar do PCNA. Este é o segundo de uma série de cinco E-books que vão lhe acompanhar durante o curso, o professor utilizará este material como apoio às suas aulas e é fundamental que você o leia e acompanhe as atividades propostas.

A série "E-books PCNA-Física" foi desenvolvida com o propósito de apresentar o conteúdo do curso de Física Elementar, fornecendo também ferramentas para facilitar o ensino e a aprendizagem da disciplina Física Fundamental I que você irá encontrar em breve na sua graduação.

Neste fascículo você irá encontrar o conteúdo de Vetores. É bom lembrar que não se pode aprender Física Fundamental I sem alguns pré-requisitos, que muitas das vezes não valorizamos por acharmos simples e descomplicados, todavia, atenção e compreensão se fazem necessária.

CAPÍTULO 2

2 ANÁLISE VETORIAL BÁSICA

2.1 Objetivos de aprendizagem:

- Entender a diferença entre grandezas escalares e vetoriais;
- Somar e subtrair vetores graficamente;
- Aprender o que significam as componentes de um vetor e utilizá-las em cálculo de vetores;
- Aprender o que são vetores unitários, o que os caracteriza e como aplicá-los;
- Utilizar as formas de multiplicação de vetores.

2.2 Diferenças entre escalares e vetores

Algumas grandezas físicas como o tempo, temperatura, volume e massa podem ser descritas apenas por um valor numérico acompanhado da(s) unidade(s) de medida da(s) grandeza(s) física(s) correspondente(s). Este tipo de grandeza é chamado de grandeza escalar. Por exemplo: quando alguém te pergunta qual a massa de um dado corpo e você diz que é de 2 kg, a informação está completa. Se alguém pergunta a hora e você responde que são 12 horas, a resposta está completa também. A maneira de somar essas grandezas é muito simples e em nada diferem da soma com números como nós estamos acostumados (além do fato de não podermos esquecer a unidade de medida da grandeza, é claro!).

Mas há grandezas que precisam de mais informação. Além do valor numérico acompanhado da unidade de medida é necessária, também, uma orientação espacial (uma espécie de "para onde" aponta a grandeza). Muitas grandezas físicas são assim. São chamadas de grandezas vetoriais. **O ente que representa essas grandezas físicas vetoriais e que possui tratamento**

matemático específico é chamado de vetor. Deslocamento, velocidade, aceleração e forças como o atrito, peso e normal são exemplos de grandezas vetoriais.

2.3 Conceitos básicos de vetores

A física lida com um grande número de grandezas que possuem amplitude e uma orientação espacial para serem corretamente representadas. **Tais grandezas se combinam segundo regras bem definidas.** Para entender essas grandezas e as regras segundo as quais elas se combinam é necessário compreender uma linguagem matemática especial, a linguagem dos vetores!

Essa linguagem é muito utilizada por cientistas e por engenheiros e, informalmente, até mesmo em conversas do dia a dia. Se você já explicou a alguém como chegar a um endereço usando expressões como "Siga por esta rua por cinco quarteirões e depois dobre à esquerda", então você usou a linguagem dos vetores.

Alguém consegue imaginar o voo das aeronaves sem uma determinação precisa de rotas aéreas? Rotas aéreas também são informações vetoriais. Saber caracterizar e manipular vetores é pré-requisito indispensável para a formação de qualquer engenheiro ou profissional da área de exatas.

IMPORTANTE!

Grandezas vetoriais necessitam de mais informação do que grandezas escalares. Essas informações são: direção, sentido e módulo. Grandezas vetoriais precisam de uma orientação espacial.

Além disso, conforme já dissemos, grandezas vetoriais se combinam (por soma e multiplicação) segundo regras específicas e bem definidas, ou seja, caso uma grandeza "tenha pinta" de vetor, mas não obedeça a essas regras, não é vetor!

Saber trabalhar com vetor é saber especificá-lo, determiná-lo (**compô-lo ou decompô-lo**) e combiná-lo com outros vetores (ou escalares) seguindo essas regras bem definidas. Acredite, você vai precisar disso na sua vida profissional.

Todo vetor possui módulo, direção e sentido. A representação gráfica de um vetor é dada por um segmento de reta orientado (uma seta). O tamanho do segmento de reta representa o módulo do vetor. A direção e o sentido da seta fornecem a direção e o sentido do vetor. Podemos rotular um vetor por uma letra com uma pequena seta (para a direita) acima da mesma. Por exemplo, o rótulo de um vetor que chamamos de A fica assim representado: $\vec{A}$.

Outra opção é colocar a letra que designa o vetor em negrito, porém faremos a opção pela pequena seta acima da letra. Antes de saber "fazer as contas" para valer com os vetores é útil aprender a somar vetores graficamente. Ou seja, vamos aprender a somar vetores por meio das suas representações em forma de segmentos de reta orientados (setas). As Figuras 1 e 2 mostram representações de vetores paralelos e negativos respectivamente.

2.4 Soma e subtração gráfica de vetores

Suponha que uma partícula sofra um deslocamento $\vec{a}$ e depois um deslocamento $\vec{b}$, conforme mostra a Figura 3. O que é o vetor $\vec{a} + \vec{b}$? Fisicamente corresponde ao deslocamento total sofrido pela partícula. Visualmente falando, o vetor resultante $\vec{a} + \vec{b}$ é o vetor que "fecha" o polígono, ou seja, é o segmento de reta orientado que vai da origem do vetor $\vec{a}$ até a extremidade ("flecha") do vetor $\vec{b}$ conforme mostra a Figura 3. O polígono é feito "arrastando" o vetor, sem mudar a direção deste vetor, até a extremidade do outro vetor (Este processo segue sucessivamente se tivermos mais de dois vetores até incluir todos os vetores. Como veremos, não importa a ordem que você escolhe para fazer o polígono).

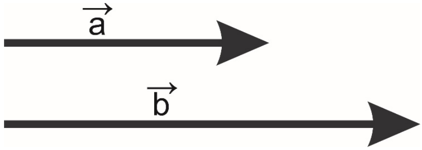


Figura 1: Representação de vetores paralelos, ou seja, vetores que apresentam o mesmo sentido e direção, apresentando ou não mesmo módulo.

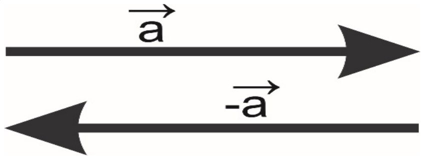


Figura 2: Representação de vetores negativos, ou seja, vetores que apresentam o mesmo módulo e direção do vetor positivo dado e sentido contrário.

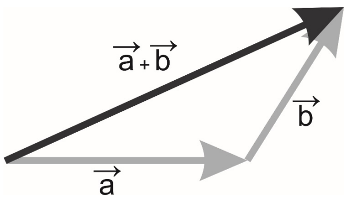


Figura 3: Representação geométrica de dois vetores.

Uma propriedade fundamental da soma de dois vetores é que a ordem em que os vetores são somados não importa.

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \tag{1}$$

(Lei comutativa)

Podemos também somá-los construindo um paralelogramo (lembramos que um paralelogramo é um quadrilátero de lados opostos paralelos). Graficamente falando, esse "faz de um jeito"($\vec{a}+\vec{b}$) e "faz de outro jeito"($\vec{b}+\vec{a}$) dando a "mesma coisa" (Equação

1) corresponde a um paralelogramo. Convença-se disso antes de seguir adiante!

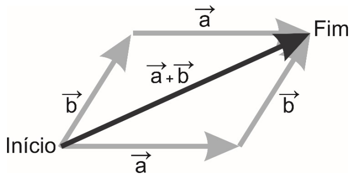


Figura 4: Representação de soma de dois vetores pela regra do paralelogramo [1].

Quando existem mais de dois vetores podemos agrupá-los em qualquer ordem para somá-los geometricamente. Assim, se queremos somar os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ podemos primeiro somar $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e depois somar o resultado a $\vec{c}$ e também podemos somar primeiro os vetores $\vec{b}$ e $\vec{c}$ e depois somar o resultado ao vetor $\vec{a}$.

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \tag{2}$$

(Lei associativa)

Quando dois vetores são perpendiculares entre si, na Figura 5 podemos encontrar usando o teorema de Pitágoras, o módulo do vetor resultante.

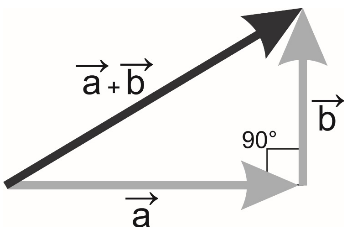


Figura 5: Representação geométrica de dois vetores perpendiculares.

$$\mid \vec{a}+\vec{b} \mid = \sqrt{\mid \vec{a} \mid^2 + \mid \vec{b} \mid^2} \tag{3}$$

Exemplo 2.1: De acordo com os vetores da Figura 6, mostrar, num gráfico em escala, um representante do vetor $\vec{a} - \vec{b}$.

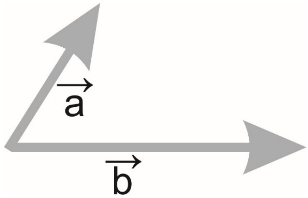


Figura 6: Exemplo 2.1.

Estratégia de raciocínio: Primeiramente, devemos escolher um eixo coordenado e indicar o sentido positivo desse eixo, Figura 7.

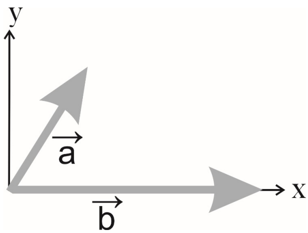


Figura 7: Vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ no plano cartesiano.

Podemos enxergar o vetor que se pede da seguinte forma: $\vec{a} + (-\vec{b})$. Perceba que o sinal negativo implica na inversão do vetor $\vec{b}$ em relação ao eixo "x" positivo (ver Figura 2). Ou seja, não alteramos a direção do vetor, mas apenas o seu sentido. Usando a regra do paralelogramo obtemos o vetor $\vec{a} - \vec{b}$ conforme mostra a Figura 8.

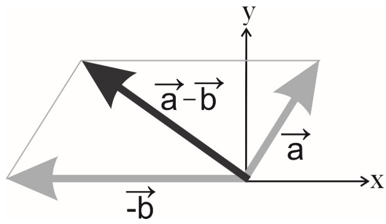


Figura 8: Regra do paralelogramo.

Antes de prosseguirmos no assunto, sugerimos que você resolva as questões a seguir.

1. Considerando o plano xz, construa, graficamente, os seguintes vetores: $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (3, 2)$, $\vec{c} = (1, 5)$, $\vec{d} = (-1, -2)$ e $\vec{e} = (-2, 3)$.

2. Dados os vetores da Figura 7, mostrar, num gráfico em escala, um representante do vetor: **a)** $\vec{b} - \vec{a}$ **b)** $-\vec{b} - \vec{a}$ **c)** $2\vec{a} - 3\vec{b}$

3. Dado os vetores $\vec{a} = (4, 1)$ e $\vec{b} = (2, 6)$, faça um esboço gráfico dos vetores: **a)** $\vec{a} + \vec{b}$ **b)** $2\vec{a}$ **c)** $2\vec{a} - \vec{b}$

2.5 Componentes de vetores

Uma componente de um vetor é a projeção do vetor sobre um eixo. A afirmação sobre componentes nos permite fazer uma pergunta: Qual eixo? Perceba que precisamos definir esse eixo! Bem, para projetar sobre um eixo, precisamos definir um eixo coordenado, e esse é um dos passos para estabelecer um sistema de referência de eixos coordenados (chamamos simplesmente de sistema de coordenadas). Precisamos de uma origem para o sistema de coordenadas e precisamos especificar qual é o sentido positivo de cada eixo coordenado (lembre-se que para cada direção há dois sentidos). Os eixos se cruzam formando um ângulo de 90°, logo, eles são perpendiculares (sempre trabalharemos com sistemas de eixos perpendiculares). No momento focaremos nossa discussão em um sistema de coordenadas fixo chamado de sistema de coordenadas cartesiano (inicialmente para o plano, ou seja, precisaremos de duas coordenadas).

Em um sistema cartesiano normalmente a abscissa (horizontal) é o eixo x (coordenada x) e a ordenada (vertical) é designada pelo eixo y (coordenada y). Mas veja bem! Não é obrigatório que o eixo x seja horizontal e o eixo y seja na vertical. Muitas vezes essa escolha (que é a usual) é útil, mas não é uma regra geral. A escolha depende do problema que você estiver analisando. Faça a escolha que simplifique a sua vida, ou seja, faça escolhas que tornem as contas mais fáceis!

Na figura 9, visualizamos o vetor $\vec{a}$ e sua projeção no eixo x e no eixo y. Vale ressaltar que a_x e a_y são escalares que podem ser positivos ou negativos (a depender da orientação do vetor em relação à orientação do sistema de coordenadas escolhido).

Muito bem! Já vimos que para projetar um vetor precisamos escolher um sistema de coordenadas para projetar o vetor sobre os eixos em questão. Para cada escolha de sistema de coordenadas encontraremos um par de componentes correspondente do vetor. Temos ainda um ponto muito importante para falar para você. **Não é qualquer projeção do vetor sobre o eixo que corresponde à componente do vetor em relação ao eixo. Somente a projeção ortogonal ao eixo (ou seja, perpendicular ao eixo) corresponde à componente do vetor. Isso é muito importante! Toda projeção corresponde à relações entre triângulos retângulos.** Você deve estar lembrado que as funções trigonométricas seno e cosseno envolvem relações em um triangulo retângulo. É por isso que funções seno e cosseno **sempre** vão aparecer em problemas de projeção (recomendamos que você reveja as seções 1.7 e 1.8 do capítulo anterior).

Uma observação, prezado leitor. **Estabelecer corretamente um sistema de coordenadas é fundamental para estabelecer um referencial a partir do qual vamos poder medir posições e velocidades de um corpo**. Não temos intenção que você aprenda tudo agora. O estudo do referencial é algo muito sutil e voltaremos a falar sobre isso nos contextos de dinâmica e também no de cinemática.

> IMPORTANTE!
> Só faz sentido falar em componentes de um vetor uma vez que o sistema de coordenadas em que o vetor será decomposto já tenha sido escolhido de maneira explícita.

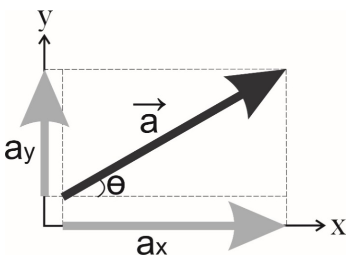


Figura 9: Representação de um vetor arbitrário e sua projeção sobre os eixos x e y.

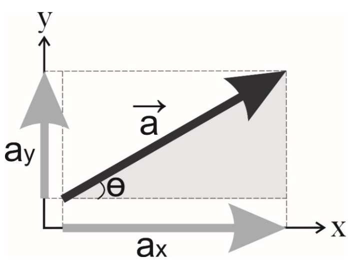


Figura 10: Triângulo formado pelo vetor principal e suas componentes.

Com base no triângulo da Figura 10, podemos encontrar as relações trigonométricas da Equação 4.

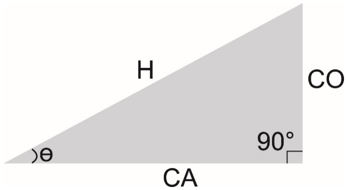


Figura 11: Triângulo para as relações trigonométricas.

$$sen\ \theta = \frac{CO}{H} \quad cos\ \theta = \frac{CA}{H} \quad tg\ \theta = \frac{CO}{CA} \tag{4}$$

(Relações trigonométricas)

Deste modo, obtemos:

$$a_x = \mid \vec{a} \mid .cos\ \theta \ \ e \ \ a_y = \mid \vec{a} \mid .sen\ \theta \tag{5}$$

Sendo θ o ângulo que o vetor $\vec{a}$ faz com o semieixo x positivo e $\mid \vec{a} \mid$ é o modulo do vetor.

Uma vez que um vetor tenha sido decomposto em relação a um conjunto de eixos, as componentes podem ser usadas no lugar do vetor, assim:

$$\mid \vec{a} \mid = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} \ \ e \ \ tg\ \theta = \frac{a_y}{a_x} \tag{6}$$

Exemplo 2.2: Quais são as componentes x e y do vetor $\vec{a}$? Seja $\mid \vec{a} \mid = 5,0m$ e o ângulo $\theta = 30^o$.

Estratégia de raciocínio: Usaremos as relações trigonométricas com base nos triângulos retângulos em questão.

$$sen\ \theta = \frac{a_y}{\mid \vec{a} \mid}$$

$$cos\ \theta = \frac{a_x}{\mid \vec{a} \mid}$$

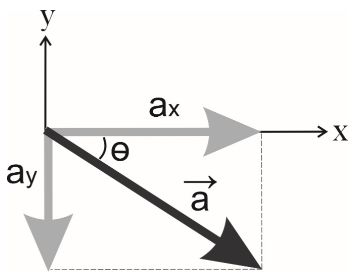


Figura 12: Exemplo 2.2.

Portanto,

$$a_x = |\ \vec{a}\ |.cos\ \theta \ \ e \ \ a_y = |\ \vec{a}\ |.sen\ \theta$$

$$a_x = 5.cos30^o = 4,33m$$

$$a_y = 5.sen30^o = 2,5m$$

Exemplo 2.3: Quais são as componentes x e y do vetor $\vec{A}$? A Figura 13 mostra qual foi a escolha adotada para os eixos x e y. Considere $|\ \vec{a}\ | = 8m$ e $\theta = 30^o$.

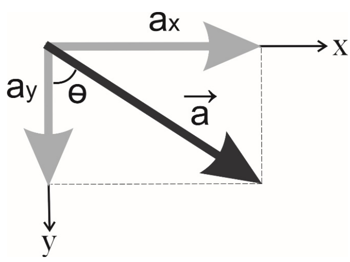


Figura 13: Exemplo 2.3.

Estratégia de raciocínio: Novamente, lançamos mão das relações trigonométricas, com base nos triângulos retângulos em questão, para encontrar as seguintes relações:

$$sen\ \theta = \frac{a_x}{|\ \vec{a}\ |}$$

$$cos\ \theta = \frac{a_y}{\mid \vec{a} \mid}$$

Portanto,

$$a_x = 8.sen30^o = 4m$$

$$a_y = 8.cos30^o = 6,92m$$

Vamos exercitar mais um pouco o conteúdo até aqui aprendido. A ideia é que você exercite a decomposição de vetores para escolhas não usuais de sistemas coordenados.

1. Quais são as componentes x e y do vetor $\vec{a}$ na Figura 14? Seja $\mid \vec{a} \mid = 5,0m$ e $\theta = 50^o$.

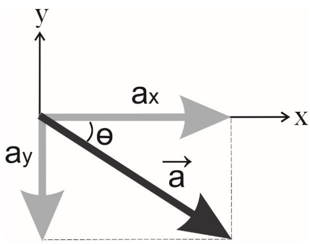


Figura 14: Exercício 1.

2. Quais são as componentes x e y do vetor $\vec{a}$ na Figura 15? Seu módulo $\mid \vec{a} \mid = 6,50m$ e o ângulo $\theta = 45^o$.

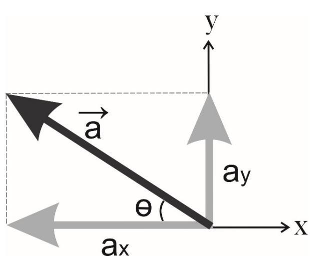


Figura 15: Exercício 2.

3. Quais são as componentes x e y do vetor $\vec{a}$ na Figura 16? Seja $|\vec{a}| = 8,0m$ e o ângulo $\theta = 60^o$.

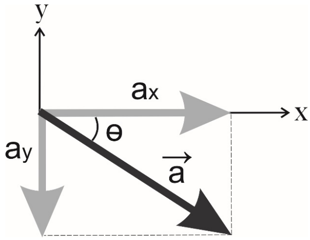


Figura 16: Exercício 3.

4. Quais são as componentes x e y do vetor $\vec{a}$ na Figura 17? Seu módulo $|\vec{a}| = 9,0m$ e o ângulo $\theta = 120^o$.

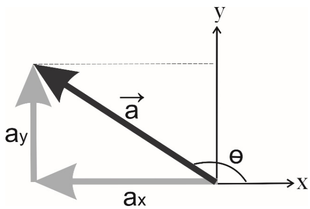


Figura 17: Exercício 4.

5. Um pequeno avião decola do aeroporto de Belém em um dia chuvoso e é avistado mais tarde a 300 km de distância, em um curso que faz um ângulo de 30° a partir de leste no sentido anti-horário. A que distância a leste e ao norte do aeroporto está o avião no momento em que é avistado?

6. **a)** Quais os sinais das componentes x de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ na Figura 18? **b)** Quais são os sinais das componentes y de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$? **c)** Quais são os sinais das componentes x e y de $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$? Dados: $|\vec{a}| = 8N$, $|\vec{b}| = 7N$ e $|\vec{c}| = 10N$.

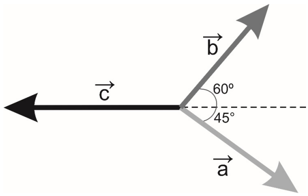


Figura 18: Exercício 6.

Exemplo 2.4: Um vetor deslocamento **d** possui um módulo $|\vec{d}| = 175,0m$ e uma inclinação de 50,0º, em relação ao eixo dos x como mostrado na figura abaixo. Determine as componentes x e y deste vetor.

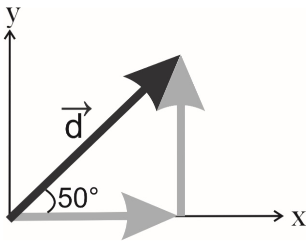


Figura 19: Representação do vetor deslocamento de suas componentes x e y.

Estratégia de raciocínio: De acordo com o nosso conhecimento de trigonometria básica, podemos observar o triângulo retângulo formado pelo vetor **d** e suas componentes x e y. Isto nos permite aplicar as funções trigonométricas seno e cosseno para determinar as componentes em questão.

Solução: A componente y pode ser obtida usando o ângulo de 50,0º e a seguinte relação:

$$sen\ \theta = \frac{y}{|\vec{d}|}$$

$$y = \mid \vec{d} \mid .sen\ \theta = (175m)(sen50,0^{o}) = 134m$$

Seguindo o mesmo raciocínio, a componente x pode ser obtida da seguinte maneira:

$$cos\ \theta = \frac{x}{\mid \vec{d} \mid}$$

$$x = \mid \vec{d} \mid .cos\ \theta = (175m)(cos50,0^{o}) = 112m$$

Outra forma de determinar as componentes é por meio do ângulo α. Observe:

Sabemos que:

$$cos\alpha = \frac{y}{\mid \vec{d} \mid}$$

Desse modo:

$$y = \mid \vec{d} \mid .cos\alpha = (175m)(cos40,0^{o}) = 134m$$

$$x = \mid \vec{d} \mid .sen\alpha = (175m)(cos40,0^{o}) = 112m$$

O valor de 40,0º foi encontrado por meio do conhecimento da soma de ângulos internos de um triângulo que tem que ser igual a 180,0º.

2.6 Vetores unitários ou versores

Outro método de expressar componentes vetoriais consiste em usar vetores unitários. Mas, para que usar vetores unitários? Ou ainda, o que são vetores unitários? Para que eles servem? Quais são as suas características? Um vetor unitário também conhecido como **versor** é um vetor que possui um módulo unitário e é adimensional. Possui a seguinte notação:

$\hat{\imath}$ é um vetor unitário adimensional de comprimento 1 que aponta no sentido positivo do eixo dos x.

$\hat{\jmath}$ é um vetor unitário adimensional de comprimento 1 que aponta no sentido positivo do eixo dos y.

Ou seja, para cada coordenada temos um e somente um versor associado. O versor serve para indicar o sentido positivo da coordenada a qual o versor está associado. Lembre-se disso, ok?

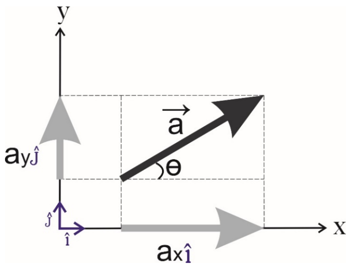


Figura 20: Representação do vetor $\vec{a}$ em duas dimensões, x e y.

2.7 Soma de vetores a partir de suas componentes

Uma forma de somar vetores é combinar suas componentes eixo por eixo. Depois de encontrar as componentes do vetor resultante temos as informações necessárias para determinar o vetor resultante. Esse é um ponto essencial ao se trabalhar com vetor. Faremos um exemplo para dois vetores. Mas preste atenção! Esse método pode ser utilizado para soma envolvendo uma quantidade qualquer de vetores. Portanto, você estará aprendendo um método geral, muito útil e importante para a sua formação.

Considere os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e suas respectivas componentes a_x, a_y e b_x, b_y.

Logo, podemos escrever os vetores em termos de seus versores da seguinte forma:

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath}$$

Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ estão sendo representados na Figura 21.

Não devemos esquecer que só podemos somar vetores que estejam na mesma direção ou eixo coordenado! (lembramos que se os vetores estiverem em sentido contrário terão sinais contrários, necessariamente). No nosso caso, analisando o eixo x notamos que, sobre o eixo, encontram-se as componentes a_x e b_x pois ambas estão orientadas pelo versor $\hat{\imath}$! Devemos extender o mesmo raciocínio para o eixo y.

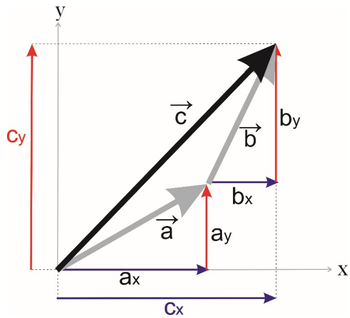


Figura 21: Representação dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ fornecendo o vetor resultante $\vec{c}$, a partir de suas componentes.

Portanto, temos:

$$\vec{c} = c_x\hat{\imath} + c_y\hat{\jmath} = (a_x + b_x)\hat{\imath} + (a_y + b_y)\hat{\jmath} \tag{7}$$

Exemplo 2.5: Um corredor se desloca 145 m numa direção nordeste, que faz 20º com a direção norte tomado no sentido horário (representado pelo vetor deslocamento $\vec{a}$) e depois 105 m em uma direção sudeste fazendo 35,0º com a direção leste também no sentido horário (representado pelo vetor deslocamento $\vec{b}$). Determine o módulo, a direção e o sentido do vetor resultante para a soma destes dois deslocamentos.

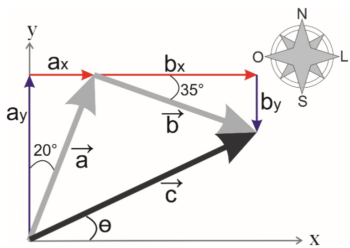


Figura 22: Representação dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ somados fornecendo o vetor resultante $\vec{c}$.

Estratégia de raciocínio: A Figura 22 nos mostra os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Suponhamos que o eixo y positivo coincide com a direção norte e o eixo x positivo com o sentido leste. O primeiro passo é decompor cada um dos vetores nos eixos escolhidos para compor o sistema de coordenadas. Com isso achamos as componentes a_x, b_x e a_y, b_y. Em seguida fazemos a soma para determinar a resultante em cada eixo. Tendo a resultante para cada eixo aplicamos o teorema de Pitágoras para encontrar o módulo do vetor resultante. Para encontrar a orientação espacial do vetor resultante (ou seja, a direção e o sentido do vetor) faremos uso das relações trigonométricas seno, cosseno ou tangente (a depender em relação a quem vamos querer especificar a direção do vetor e se vamos querer usar a informação do módulo do vetor em si ou das suas componentes).

Solução: Com as informações dadas na figura, montamos a seguinte tabela:

Vetor	Componente x	Componente y
$\vec{a}$	$a_x = (145m)$ $.sen20^o$ $= 49,6m$	$a_y = (145m)$ $.cos20^o$ $= 136m$
$\vec{b}$	$b_x = (105m)$ $.cos35^o$ $= 86m$	$b_y = -(105m)$ $.sen35^o$ $= -60,2m$
$\vec{c}$	$c_x = a_x + b_x$ $= 135,6m$	$c_y = a_y + b_y$ $= 76m$

Tabela 1: Componente de vetores.

A terceira linha da tabela fornece as componentes x e y do vetor resultante $\vec{c}$: $c_x = a_x + b_x$ e $c_y = a_y + b_y$. A figura seguinte nos mostra o vetor resultante $\vec{c}$ e suas componentes vetoriais. E aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo fornecido pela mesma, temos:

Desse modo:

$$| \vec{c} |= \sqrt{{c_x}^2 + {c_y}^2} = \sqrt{(135,6m)^2 + (76m)^2}$$

$$| \vec{c} |= 155,4m$$

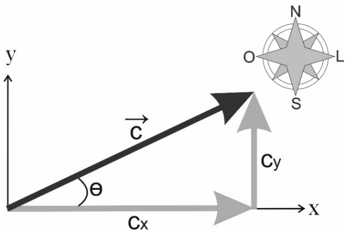


Figura 23: Representação de um vetor resultante $\vec{c}$ formando um triângulo retângulo com suas componentes.

Pergunta importante: **em relação a quem nós vamos especificar a orientação do vetor?** Se usarmos uma bússola, normalmente é feito em relação à direção norte. **Em relação ao sistema cartesiano, normalmente a orientação é dada em relação ao semieixo x positivo** (mas não obrigatoriamente). Portanto, em relação a essa escolha, o ângulo θ que $\vec{c}$ faz com o eixo x é:

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{c_y}{c_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{76m}{135,6m}\right) = 29,3^{\text{o}}$$

a partir de $x(+)$ no sentindo antihorário.

Lembre-se! Para encontrar o valor da componente do vetor resultante você deve somar a contribuição de todos os vetores. As componentes podem ser positivas ou negativas. Se a projeção de um dado vetor sobre um eixo tiver orientação contrária a que foi estabelecida como positiva ela entrará com sinal negativo na soma.

Sugerimos neste momento que você, leitor, faça as questões a seguir:

1. Dados os vetores $\vec{a} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$, $\vec{b} = \hat{\imath}+\hat{\jmath}$ e $\vec{c} = -4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$. Calcule:
   a) $\vec{a} + \vec{b}$ **b)** $\vec{a} + \vec{c}$ **c)** $\vec{a} - \vec{b}$

2. Com base nos vetores da 10ª questão, calcule:
   a) $2\vec{a} - \vec{b}$ **b)** $\vec{b} + \vec{c}$ **c)** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

3. Esboce, no gráfico xy, os vetores da questão 10.

4. Esboce, no gráfico xy, os vetores da questão 11.

2.8 Multiplicação de vetores

No início do capítulo dissemos que vetores se combinam segundo regras bem definidas de soma e multiplicação. Já vimos as relações de soma. Fica então a pergunta: **Como vetores se combinam segundo regras de multiplicação?** Multiplicar um vetor por um escalar é fácil. Significa que estamos alterando o módulo (intensidade) do vetor sem mudar a direção do mesmo. Temos ainda duas formas de multiplicar vetores entre si. Ambas são úteis e muito importantes. Vejamos!

2.8.1 Multiplicação de um vetor por escalar

Podemos multiplicar um vetor arbitrário $\vec{a}$ por um escalar (número) w. Dessa operação obtemos um vetor resultante $\vec{r}$ com as seguintes características:

$$\vec{r} = \vec{a}.w \tag{8}$$

$$\mid \vec{r} \mid = \mid \vec{a} \mid .w \tag{9}$$

- O módulo do vetor resultante é o módulo que resulta da multiplicação do módulo de $\vec{a}$ vezes w.
- A direção do novo vetor é a mesma.
- O sentido de $\vec{r}$ é o mesmo de $\vec{a}$ se w for positivo e sentido oposto se w for negativo.
- A dimensão do vetor $\vec{r}$ é igual a dimensão do vetor $\vec{a}$ multiplicada pela dimensão do escalar w.

2.8.2 Multiplicação de um vetor por um vetor

Existem duas formas de multiplicar um vetor por um vetor: uma forma conhecida como produto escalar que resulta em um escalar, a outra conhecida como produto vetorial que resulta em um vetor.

2.8.2.1 Produto escalar

A multiplicação de um vetor por outro vetor resultando em um escalar é denominada produto escalar. Dados dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, o produto escalar é escrito como $\vec{a}.\vec{b}$ e definido pela equação:

$$\vec{a}.\vec{b} = \mid \vec{a} \mid . \mid \vec{b} \mid .cos\ \theta \tag{10}$$

Vemos, portanto, que o produto escalar entre dois vetores depende dos módulos dos vetores, mas também depende da angulação entre dois vetores (e a dependência é com a função cosseno. Lembre-se disso!). Isso quer dizer que o produto escalar entre dois vetores de módulo muito grande pode ser zero, a depender da angulação entre eles.

Baseado nisso responda: Qual ângulo entre os vetores faz com o que o produto escalar dê zero, independente dos módulos dos vetores? Observe a Figura 24.

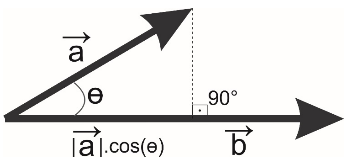


Figura 24: Representação da multiplicação de um vetor por um escalar.

Repare que $\mid \vec{a} \mid .cos\ \theta$ corresponde exatamente à projeção do vetor $\vec{a}$ sobre o vetor $\vec{b}$. É exatamente disso que se trata o produto escalar!

Podemos escrever a equação que define o produto escalar separando as componentes da seguinte forma:

$$\vec{a}.\vec{b} = (|\ \vec{a}\ |.cos\ \theta).\ |\ \vec{b}\ |= (cos\ \theta.|\ \vec{b}\ |).\ |\ \vec{a}\ |$$

Vemos, portanto que a propriedade comutativa se aplica ao produto escalar. Desse modo,

$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$$

Em três dimensões $(x,\ y,\ z)$ o produto escalar dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, escritos em termos de seus vetores unitários, assume a forma:

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + a_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + a_z\hat{\boldsymbol{k}}).(b_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + b_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + b_z\hat{\boldsymbol{k}}) \tag{11}$$

Aplicaremos a propriedade distributiva na Equação 11. Não é surpresa para ninguém que as direções x, y, z são ortogonais entre si. Portanto os versores relacionados a essas direções são ortogonais entre si. Sabendo que os versores possuem módulo unitário e utilizando a expressão (10) que define o produto escalar demonstre que $\hat{\boldsymbol{\imath}}.\hat{\boldsymbol{\imath}}$=$\hat{\boldsymbol{\jmath}}.\hat{\boldsymbol{\jmath}}$=$\hat{\boldsymbol{k}}.\hat{\boldsymbol{k}} = 1$ e $\hat{\boldsymbol{\imath}}.\hat{\boldsymbol{\jmath}}$=$\hat{\boldsymbol{\jmath}}.\hat{\boldsymbol{k}}$=$\hat{\boldsymbol{k}}.\hat{\boldsymbol{\imath}}$=$0$ Usando essas informações no produto da expressão (11), obtemos:

$$\vec{a}.\vec{b} = a_x.b_x + a_y.b_y + a_z.b_z \tag{12}$$

IMPORTANTE!

Se o ângulo θ entre dois vetores é 0^o, a componente de um vetor em relação ao outro é máxima. Se o ângulo é 90^o, a componente de um vetor em relação ao outro é nula.

Exemplo 2.6: Qual é o ângulo θ entre $\vec{a} = 3,0\hat{\imath} - 4,0\hat{\jmath}$ e $\vec{b} = -2,0\hat{\imath} + 3,0\hat{k}$?

Estratégia de raciocínio: Sabemos que o ângulo entre dois vetores aparece na definição de produto de escalar (Equação 10).

Solução: Sabemos que $\mid \vec{a} \mid$ é o módulo do vetor $\vec{a}$, dado por:

$$\mid \vec{a} \mid = \sqrt{(3,0)^2 + (-4)^2} = 5,0$$

E que $\mid \vec{b} \mid$ é o módulo do vetor $\vec{b}$ dado por:

$$\mid \vec{b} \mid = \sqrt{(-2)^2 + (3,0)^2} = 3,61$$

Podemos calcular o produto escalar escrevendo os vetores em termos dos vetores unitários e aplicando a propriedade distributiva:

$$\vec{a}.\vec{b} = (3,0\hat{\imath} - 4,0\hat{\jmath}).(-2,0\hat{\imath} + 3,0\hat{k})$$

$$\vec{a}.\vec{b} = (3,0\hat{\imath}).(-2,0\hat{\imath}) + (3,0\hat{\imath}).(+3,0\hat{k}) + (-4,0\hat{\jmath}).(-2,0\hat{\imath}) + (-4,0\hat{\jmath}).(+3,0\hat{k})$$

De acordo com o produto escalar

$$\text{Logo, } \vec{a}.\vec{b} = -6,0.$$

Substituindo todos os resultados encontrados na equação do produto escalar, obtemos,

$$-6,0 = (5,0).(3,61).cos\ \theta$$

$$\theta = cos^{-1}\left[\frac{-6,0}{(5,0).(3,61)}\right] = 109^{o}$$

Chegou o momento! Vamos exercitar o conteúdo até aqui aprendido.

1. Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{a} = (1,1,4)$ e $\vec{b} = (-1,2,2)$.

2. Dados os vetores $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$, $\vec{b} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ e $\vec{c} = -4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$. Calcule o produto escalar:
   a) $\vec{a}.\vec{b}$, **b)** $\vec{a}.\vec{c}$ e **c)** $\vec{b}.\vec{c}$

3. Com base na questão 15, calcule o produto escalar:
   a) $(\vec{a} + \vec{b}).\vec{a}$, **b)** $(\vec{a} + \vec{b}).\vec{b}$ e **c)** $(\vec{a} + \vec{b}).\vec{c}$

2.8.2.2 Produto vetorial

A multiplicação de um vetor por outro vetor resultando em um terceiro vetor é denominada produto vetorial. Dados dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, o produto vetorial é escrito como $\vec{a} \times \vec{b}$. O módulo do vetor $\vec{c}$ obtido pelo produto vetorial entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é dado por

$$\mid \vec{c} \mid = \mid \vec{a} \mid . \mid \vec{b} \mid .sen\ \theta \tag{13}$$

Sendo θ o menor ângulo formado entre os vetores dados, uma vez que $sen\ \theta$ e $sen(360^o - \theta)$ apresentam sinais opostos. O produto $\vec{a} \times \vec{b}$ é lido como " $\vec{a}$ vetor $\vec{b}$".

A direção do vetor resultante $\vec{c}$ é perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O seu sentido pode ser determinado pela **Regra da Mão Direita.** Superponha as origens de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sem mudar suas orientações. Já falamos que a direção do vetor resultante $\vec{c}$ é perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A receita para determinar o sentido de $\vec{c}$ é a seguinte. Vá de $\vec{a}$ para $\vec{b}$ pelo menor percurso angular entre os dois vetores. Quatro dedos da sua mão direita fazem o menor percurso angular de $\vec{a}$ para $\vec{b}$ e o dedo polegar estendido indica o sentido do vetor resultante. Se fizermos o mesmo percurso angular, mas agora de $\vec{b}$ para $\vec{a}$, o sentido do vetor resultante indicado pelo dedo polegar extendido é invertido conforme indicado na Figura 25 como a regra da mão direita nos fornece de forma clara sobre as características do produto vetorial. Isso traz uma importante consequência. Observamos que o produto vetorial entre vetores não é comutativo, ou seja, $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$. Por isso que o sentido do vetor resultante é invertido quando invertemos a ordem do produto (o módulo do vetor resultante é o mesmo para os dois casos). Portanto, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Vamos então resumir a toda a informação do produto vetorial entre vetores numa tabela a seguir.

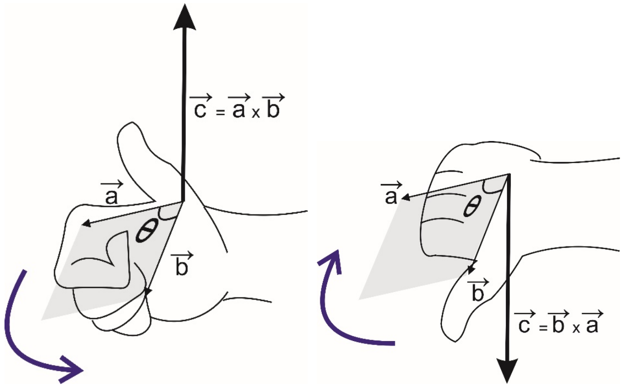


Figura 25: Regra da mão direita.

PRODUTO VETORIAL $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$	
MÓDULO	$\mid \vec{c} \mid = \mid \vec{a} \mid . \mid \vec{b} \mid$ $sen\ \theta$ (função dos módulos dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e do ângulo entre eles)
DIREÇÃO	Perpendicular ao plano formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$
SENTIDO	Convencionado pela *regra da mão direita*. Quatro dedos vão de $\vec{a}$ para $\vec{b}$, pelo menor percurso angular e o dedo polegar indica o sentido do vetor resultante.

Tabela 2: Propriedades do vetor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

IMPORTANTE!

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos ou antiparalelos, $\vec{a} \times \vec{b} = 0$. E o módulo de $\vec{a} \times \vec{b}$ é máximo quando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares.

Para finalizar! Vamos exercitar o conteúdo até aqui aprendido.

1. Dados os vetores $\vec{a} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath}$, $\vec{b} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ e $\vec{c} = -2\hat{\imath} + \hat{k}$, determine as expressões:
   a) $\vec{a} \times \vec{b}$, **b)** $\vec{c} \times \vec{b}$, **c)** $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ e **d)** $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

Principais pontos do capítulo:

- Grandezas vetoriais, diferentemente das grandezas escalares que precisam apenas de um módulo para serem descritas, precisam de uma orientação espacial.

- Grandezas vetoriais se combinam usando regras de soma vetorial.

- Soma vetorial também pode ser feita usando componentes de vetores.

- A decomposição de vetores é feita utilizando as funções trigonométricas básicas.

- Um vetor unitário tem módulo igual a 1, é adimensional e tem a função de descrever uma direção no espaço.

- O produto escalar entre dois vetores é uma grandeza escalar. Enquanto que o produto vetorial é uma grandeza vetorial orientada sempre perpendicular ao plano formado pelos vetores multiplicados e com sentido definido pela regra da mão direita.

EXERCÍCIOS

1. Determine (a) a soma de $\vec{a}+\vec{b}$, em termos de vetores unitários para $\vec{a} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ e $\vec{b} = -13\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}$. Determine (b) o módulo e (c) a orientação de $\vec{a} + \vec{b}$.

2. Um vetor pode ter módulo igual a zero se uma de suas componentes for diferente de zero?

3. É possível que a soma dos módulos de dois vetores seja sempre igual à soma destes dois vetores?

4. Você pode ordenar os acontecimentos no tempo. Por exemplo, o evento b pode proceder ao evento c, porém seguir o evento a, dando a ordenação temporal do evento a, b e c. Consequentemente, existe um sentido para o tempo, distinguindo o passado, o presente e o futuro. Será que o tempo, então, é uma grandeza vetorial? Se não, por quê?

5. O produto escalar pode ser uma quantidade negativa? Justifique.

6. a) Sendo $\vec{a}.\vec{b} = 0$, podemos concluir daí que os vetores são perpendiculares entre si? b) Se $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c}$, segue-se daí que $\vec{b} = \vec{c}$?

7. Se $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ devem ser paralelos entre si? O inverso é verdadeiro?

8. Considere dois deslocamentos, um igual a 3 m e um outro de módulo igual a 4 m. Mostre como os vetores deslocamento podem ser combinados de modo a fornecer um deslocamento resultante de módulo igual a:
   a) 7 m; b) 1 m; c) 5 m.

9. Uma mulher caminha 250 m na direção de 30° a nordeste em relação a norte no sentido horário e em seguida 175 m

diretamente para leste. a) Utilizando métodos gráficos, determine o deslocamento resultante. b) Compare o módulo do deslocamento com a distância que ela caminhou.

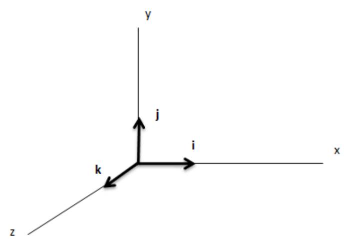
10. Uma pessoa caminha do seguinte modo: 3,1 km para o norte, depois 2,4 km para oeste e, finalmente, 5,2 km para o sul. a) Construa o diagrama vetorial que representa este movimento. b) Que distância um pássaro deveria voar, em linha reta, em que direção, de modo a chegar ao mesmo ponto final?

11. Quais são os componentes de um vetor $\vec{a}$ localizado no plano xy, se sua direção faz um ângulo de 205º com o eixo x positivo e o seu módulo é igual a 7,3 unidades?

12. Um vetor deslocamento $\vec{r}$ no plano xy tem um comprimento igual a 15 m e faz um ângulo de 15º com o eixo x positivo. Determine os componentes x e y deste vetor.

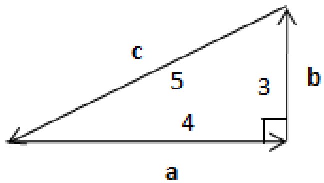
13. Determine, utilizando os vetores unitários, a) a soma dos dois vetores $\vec{a} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ e $\vec{b} = -3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$. B) Quais são o módulo e a direção do vetor $\vec{a}$ e $\vec{b}$?

14. No sistema de coordenadas da figura abaixo, mosque que: $\hat{\imath}.\hat{\imath}=\hat{\jmath}.\hat{\jmath}=\hat{k}.\hat{k} = 1$ e $\hat{\imath}.\hat{\jmath}=\hat{\jmath}.\hat{k}=\hat{k}.\hat{\imath}=0$



15. Um vetor $\vec{a}$ de módulo igual a 10 unidades e outro vetor $\vec{b}$ de módulo igual a 6 unidades apontam para direções que fazem um ângulo de 60º entre si. a) Determine o produto escalar entre os dois vetores e b) o produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$.

16. A soma de três vetores é igual a zero, como nos mostra a figura abaixo. Calcule o módulo de:
a) $\vec{a} \times \vec{b}$; b) $\vec{a} \times \vec{c}$; c) $\vec{b} \times \vec{c}$.



17. Sejam dois vetores representados em termos de suas coordenadas como:
$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ e $\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$

Mostre que: $\vec{a}.\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

18. Uma força de $\vec{F_1}$, de módulo igual a 2 N forma um ângulo de 30º com o eixo O_x.Uma força $\vec{F_2}$, de módulo igual a 6 N forma um ângulo de 80º com o eixo O_x. Calcule: (a) o módulo $|\vec{F_r}|$ da força resultante $\vec{F_r}$; (b) o ângulo formado entre a resultante e o eixo O_x.

19. Um vetor $\vec{a}$ forma um ângulo $\theta = 60$ com um vetor $\vec{b}$. Sabendo que $\mid \vec{a} \mid = 3$ e $\mid \vec{b} \mid = 4$, calcule o módulo do vetor resultante $\vec{r}$ (unidades de força em Newton).

20. Um vetor $\vec{F}$ forma um ângulo $\theta = 30^o$ com um vetor $\vec{G}$. Sabendo que $\mid \vec{F} \mid = 5$ e $\mid \vec{G} \mid = 8$, calcule: (a) o módulo da resultante $\vec{R}$; (b) o ângulo formado entre a resultante e o vetor $\vec{F}$.

PROBLEMAS ADICIONAIS

21. Uma ciclovia circular possui raio igual a 500 m. a) Qual a distância percorrida por uma ciclista que percorre a pista da extremidade norte para a extremidade sul? b) Qual o módulo do deslocamento feito pela ciclista da extremidade norte para a extremidade sul? c) Qual o módulo do deslocamento feito pela ciclista ao executar uma volta completa na ciclovia?

22. Os controladores de tráfego aéreo fornecem instruções para os pilotos informando em que direção e sentido eles devem voar. Essas instruções são chamadas de "vetores". Se estas forem as únicas informações dadas aos pilotos, o nome de "vetor"está sendo ou não usado corretamente? Explique por que sim ou por que não.

23. Um engenheiro civil desorientado em uma grande obra dirige 3,25 km para o norte, depois 4,75 km para o oeste, por seguinte 1,50 km para o sul e por fim 2,50 km para o leste. Determine o módulo, a direção e o sentido do deslocamento resultante feito pelo engenheiro civil em sua obra.

24. Um explorador polar foi surpreendido por uma nevasca, que reduziu a visibilidade a praticamente zero, quando retornava ao acampamento. Para chegar ao acampamento, deveria ter caminhado 5,6 km para o norte, em seguida 3,4 km na direção 30º a nordeste medido do norte e por fim 2,3 km fazendo um ângulo de 85º em relação a oeste no sentido anti-horário. Quantos quilômetros e em que direção o explorador deverá seguir em linha reta para chegar ao acampamento?

25. Uma pesquisadora está indo fazer uma pesquisa em uma caverna e para isso ela deve percorrer 180 m para oeste,

depois 210 m fazendo um ângulo de 45º em relação a oeste no sentido horário e por fim 280 m fazendo um ângulo de 30º em relação a leste no sentido anti-horário. Depois um quarto deslocamento não medido, ela retorna ao ponto de partida, pois esqueceu seu material de pesquisa. Determine o módulo, a direção e o sentido desse quarto deslocamento.

26. Determine a soma de $\vec{a} + \vec{b}$ em termos de vetores unitários para $\vec{a} = (4,0m)\hat{\imath} + (3,0m)\hat{\jmath}$ e $\vec{b} = (-13,0m)\hat{\imath} + (4,0m)\hat{\jmath}$ juntamente com o seu módulo e a orientação de $\vec{a}+\vec{b}$ relativa a $\hat{\jmath}$. Obs.: O símbolo m é expresso nos vetores é pra denotar que esses possuem dimensão de comprimento.

27. O módulo do vetor $\vec{a}$ é 6,00 unidades, o módulo do vetor $\vec{b}$ é 7,00 unidades e $\vec{a}.\vec{b} = 14$. Qual o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$?

GABARITO

1º Questão
R: a) $\vec{a}+\vec{b}=-9\hat{\imath}+10\hat{\jmath}$, b) 13,45 e c) $\theta=132^o$, em relação ao eixo x positivo.
2º Questão
R: Conceitual
3º Questão
R: Conceitual
4º Questão
R: Conceitual
5º Questão
R: Conceitual
6º Questão
R: Conceitual
7º Questão
R: Conceitual
8º Questão
R: Conceitual
9º Questão
R: a) 370 m e b) 425 m
10º Questão
R: a) Gráfico, b) 3,19 Km e c) $\theta=-138,81^o$
11º Questão
R: $A_x=-6,61$ unid. e $B_x=-3,08$ unid.
12º Questão
R: $R_x=14,48m$ e $R_y=3,88m$
13º Questão
R: a) $\vec{a}+\vec{b}=\hat{\imath}+7\hat{\jmath}$, b) $\mid\vec{a}\mid=5$ e $\theta=36,87^o$; $\mid\vec{b}\mid=5$ e $\theta=126,87^o$.
14º Questão
R: Conceitual
15º Questão
R: a) $\vec{a}.\vec{b}=30$ unid. e b) $\vec{a}\times\vec{b}=51,96$ unid.
16º Questão
R: a) $\vec{a}\times\vec{b}=12$ unid., b) $\vec{a}\times\vec{c}=12$ unid. c)$\vec{b}\times\vec{c}=12$ unid.

17º Questão
R: Conceitual
18º Questão
R: a) 7,43 N e b) 68,12º
19º Questão
R: 6,08 N
20º Questão
R: a) 12,58 N e b) 11,46º

PROBLEMAS ADICIONAIS

21º Questão
R: a) 1570,8 m, b) 1000 m e c) zero
22º Questão
R: Conceitual
23º Questão
R: a) 2,85 km e b) O vetor deslocamento, $\theta = 142,12^o$ em relação ao eixo x positivo.
24º Questão
R: a) 6,43km e b) O vetor deslocamento, $\theta = 76,5^o$ em relação ao eixo x positivo.
25º Questão
R: a) 301,04 metros e b) O vetor deslocamento, $\theta = 286,6^o$ em relação ao eixo x positivo.
26º Questão
R: a) $\vec{a} + \vec{b} = -9\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}$ e b) O vetor deslocamento, $\theta = 52,13^o$ em relação à $\hat{\jmath}$, no sentido anti-horário.
27º Questão
R: $\theta = 70,52^o$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CUTNELL. J. D; JOHSON, K. W. Física. Volume 1. Sexta Edição. Ed. LTC.
- DOCA, R. H.; BISCUOLA, G. J.; BÔAS, N. V. Tópicos de Física 1: MECÂNICA. 18ª Ed. São Paulo: Saraiva, 2001.
- FEYNMAN, R.P., LEIGHTON, R.B., SANDS, M., Lectures on Physics. v. 1, New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1963.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R., Física. v. 1, 4ª ed. Rio de Janeiro: LTC Ltda, 1992.
- HEWITT, P. G. Física Conceitual. trad. Trieste Freire Ricci e Maria Helena Gravina. 9ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2002.
- MARK, R.; Cálculo para Leigos. 2ª Edição. Rio de Janeiro : Alta Books 2012.
- NUSSENZVEIG, H.M., Curso de Física Básica, v. 1, São Paulo: Edgar Blücher LTDA, 1987.
- PAUL, A.T; GENE. M; Física para Cientistas e Engenheiros. Volume 1 Rio de Janeiro: LTC 2012
- WALKER, J. Fundamentos de Física-Hlalliday-Resnick. Volume 1 8ª. Edição. Rio de Janeiro: LTC Ltda, 1993.
- YOUNG. H. D; FREEDMAN. Física 1-Sears & Zemansky. Mecânica. 12ª. Edição. Ed. Pearson.