Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

FORÇA, MOMENTO E SISTEMAS EQUIVALENTES

Parte 1:

2.1. Formulação escalar do momento de uma força
2.2. Produto vetorial
2.3. Formulação vetorial do momento de uma força

Parte 2:

2.4. Princípios dos momentos
2.5. Momento de uma força em relação a um eixo específico
2.6. Momento de um binário
2.7. Sistemas equivalentes

FORÇA, MOMENTO E SISTEMAS EQUIVALENTES

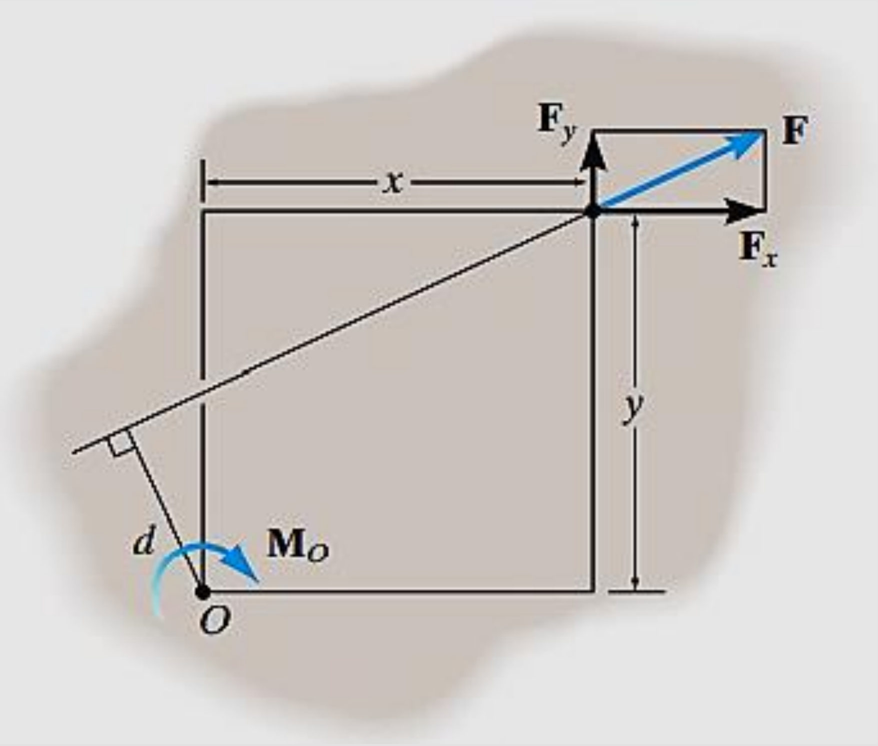
Parte 2:

2.4. Princípios dos momentos
2.5. Momento de uma força em relação a um eixo específico

2.4. PRINCÍPIOS DE MOMENTO

- O princípio de momentos é um conceito bastante utilizado em mecânica, sendo também conhecido por teorema de Varignon, por ter sido originalmente desenvolvido pelo matemático francês Pierre Varignon (1654 – 1722);

- Este teorema estabelece que *o momento de uma força em relação a um ponto é igual à soma dos momentos dos componentes das forças em relação ao mesmo ponto;*

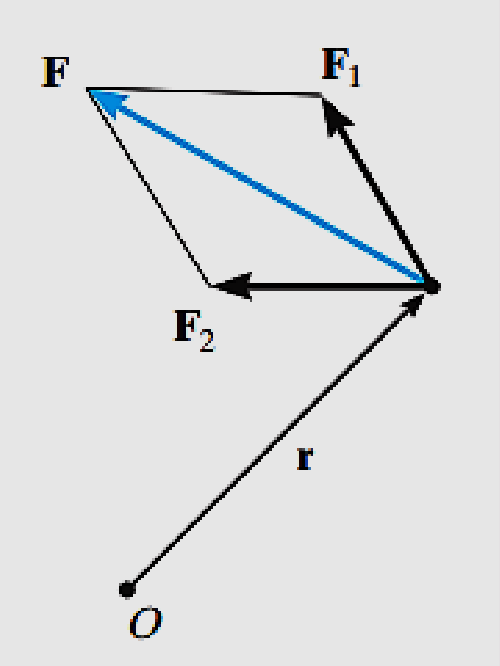


$$M_O = F_x y - F_y x$$

2.4. PRINCÍPIOS DE MOMENTO

- Este teorema pode ser provado diretamente da propriedade distributiva do produto vetorial;

- Considerando uma força **F** e dois de seus componentes, em coordenadas retangulares, onde **F** = $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, logo:

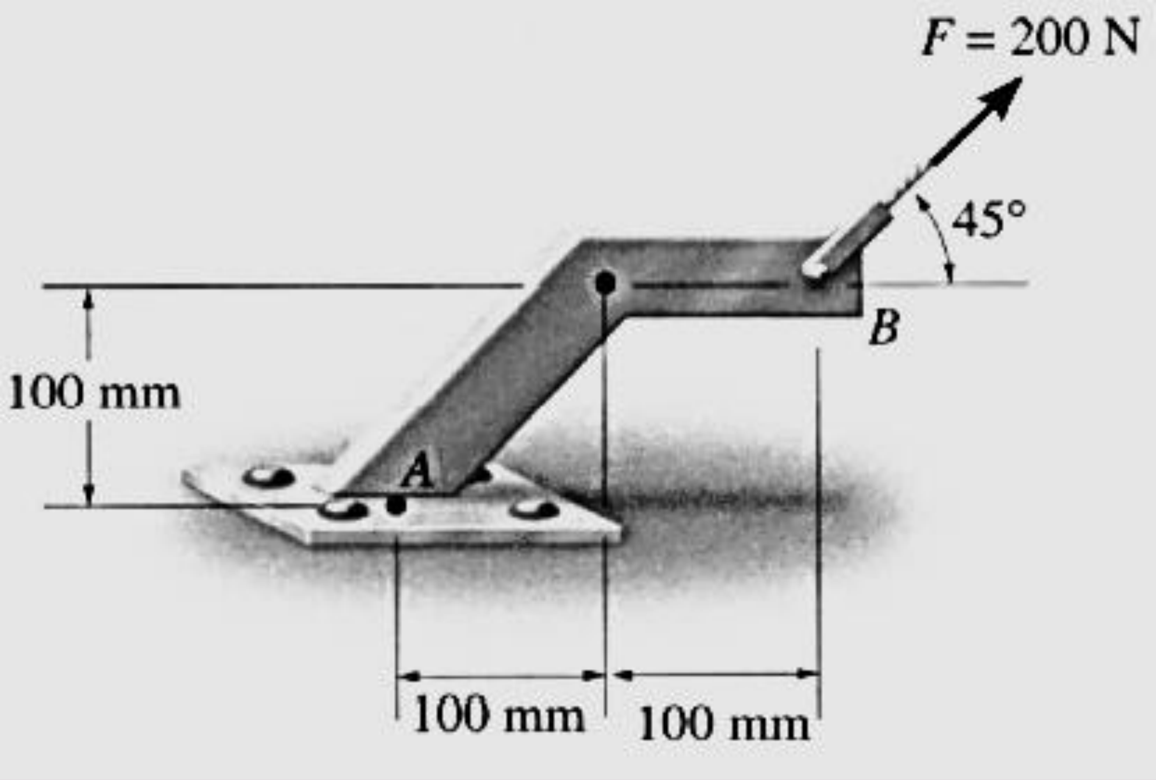


$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

2.4. PRINCÍPIOS DE MOMENTO

Exercício 12:

- Uma força de 200 N atua sobre o suporte mostrado abaixo. Determine o momento da força em relação ao ponto A.

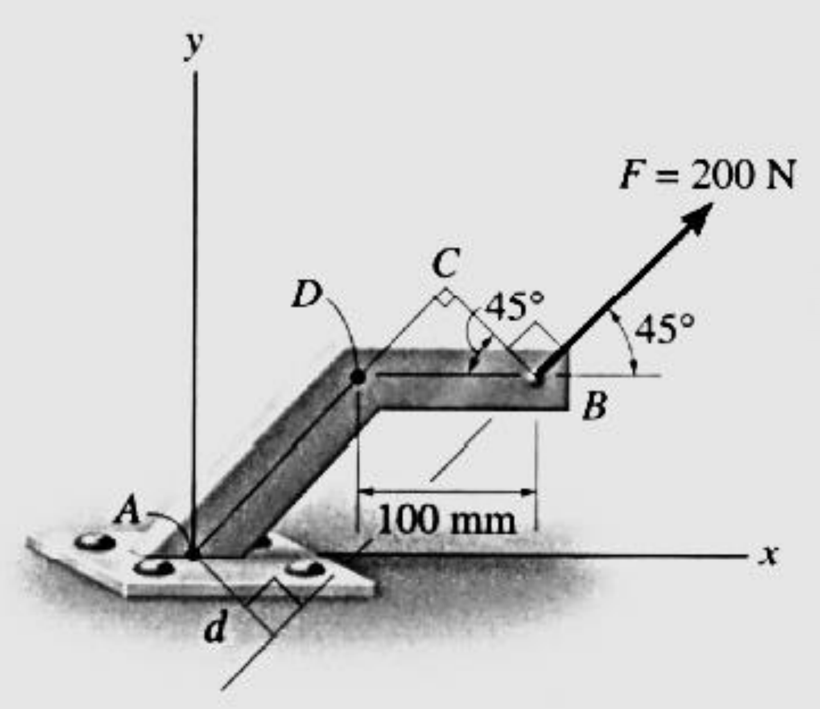


2.4. PRINCÍPIOS DE MOMENTO

Solução I:

- O braço de momento *d* pode ser encontrado através de trigonometria;
- Analisando o triângulo BCD:

$$CB = d = 100 \cos 45° = 70{,}71 \text{ mm} = 0{,}07071 \text{ m}$$



- Portanto:

$$M_A = Fd = 200 \text{ N}(0{,}07071 \text{ m}) = 14{,}1 \text{ N} \cdot \text{m} \circlearrowleft$$

- Conforme a regra da mão direita, o vetor $\boldsymbol{M_A}$ está orientado na direção +**k**, uma vez que a força tende a girar o suporte no sentido anti-horário em relação a A. Assim, a representação cartesiana de $\boldsymbol{M_A}$ é:

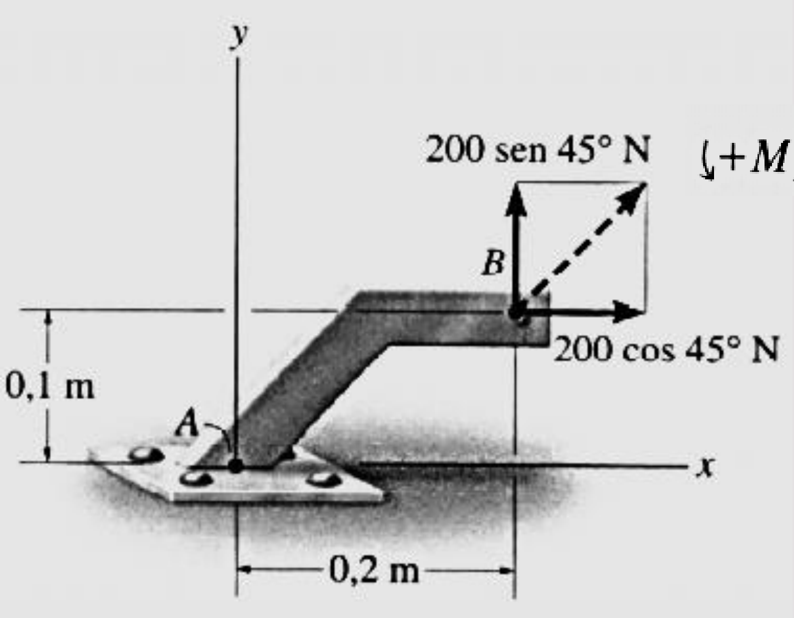
$$\mathbf{M}_A = \{14{,}1\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$$

2.4. PRINCÍPIOS DE MOMENTO

Solução II:

- A força de 200 N pode ser decomposta nos eixos x e y. De acordo com o princípio dos momentos, o momento de **F** em relação ao ponto A é equivalente à soma dos momentos produzidos pelos dois componentes da força;

- Supondo uma tendência de giro no sentido anti-horário, ou seja, na direção +**k**, temos que:



$$M_A = \Sigma Fd$$

$$\circlearrowleft + M_A = (200 \text{ sen } 45° \text{ N})(0{,}20 \text{ m}) - (200 \cos 45° \text{ N})(0{,}10 \text{ m})$$

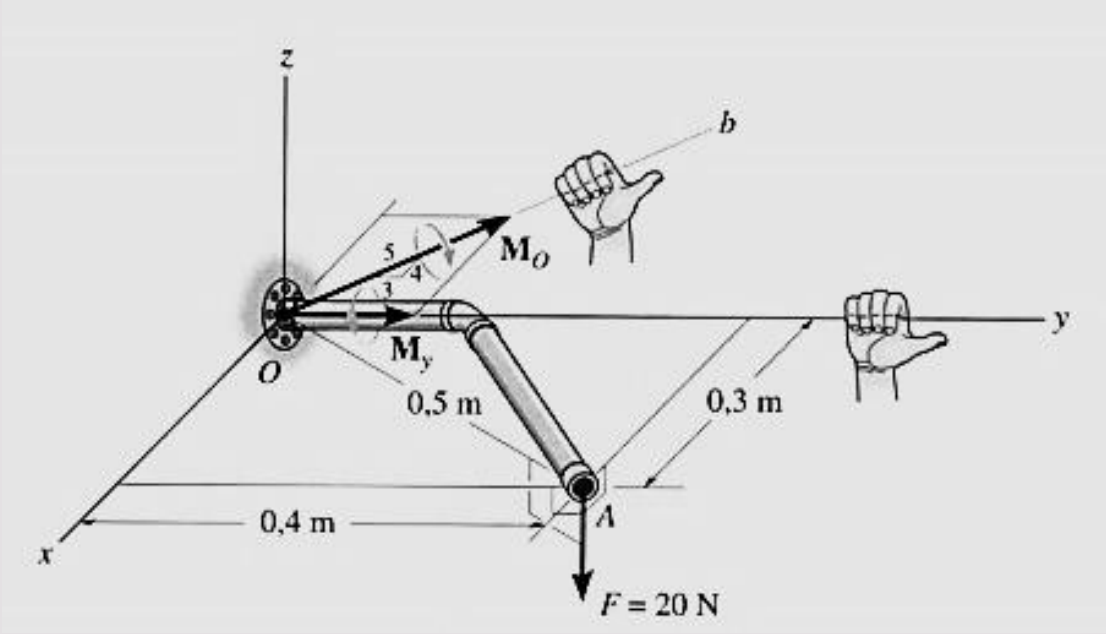
$$= 14{,}1 \text{ N} \cdot \text{m} \circlearrowleft$$

$$\mathbf{M}_A = \{14{,}1\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$$

2.5. MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM EIXO ESPECÍFICO

- Quando o momento de uma força é calculado em relação a um ponto, seu eixo é sempre perpendicular ao plano contendo a força e o braço de momento;

- Em alguns problemas, é importante encontrar o componente desse momento ao longo de um eixo específico que passa pelo ponto. Para isto, pode ser usada a análise escalar ou a vetorial.



2.5. MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM EIXO ESPECÍFICO

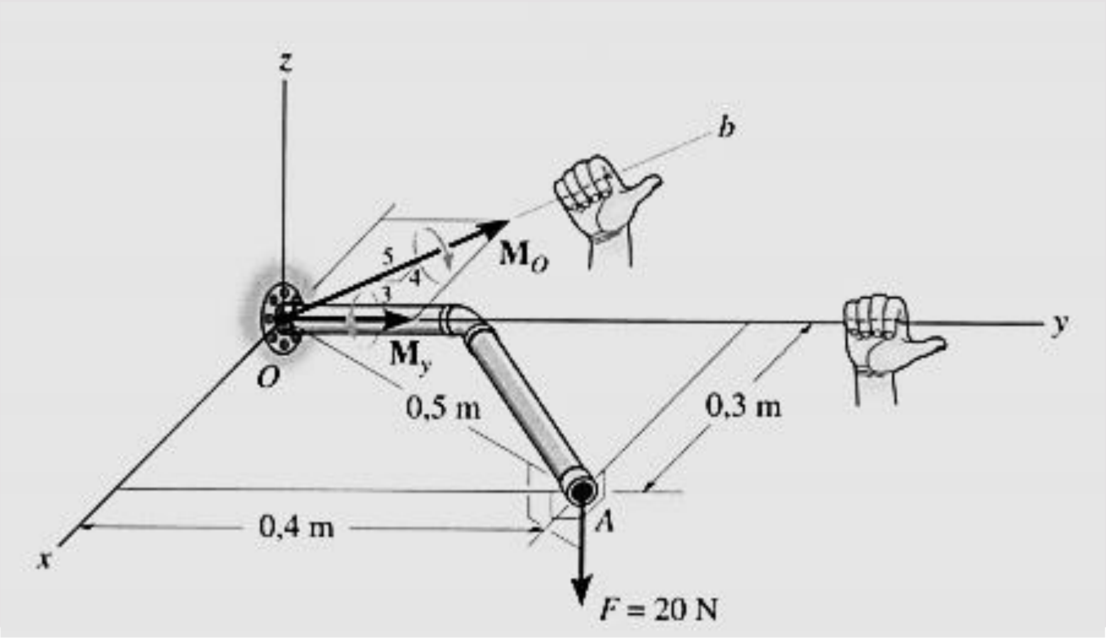
Análise escalar:

- Consideremos uma estrutura tubular que se esrende no plano horizontal e está sujeita a uma força vertical F de 20 N aplicada no ponto A;

- O momento dessa força em relação ao ponto *O* tem intensidade dada por:

$$M_O = (20\ \text{N})\ (0{,}5\ \text{m}) = 10\ \text{N} \cdot \text{m}$$

- A direção e sentido são determinadas pela regra da mão direita; Esse momento tende a girar o conjunto em relação ao eixo *Ob*.



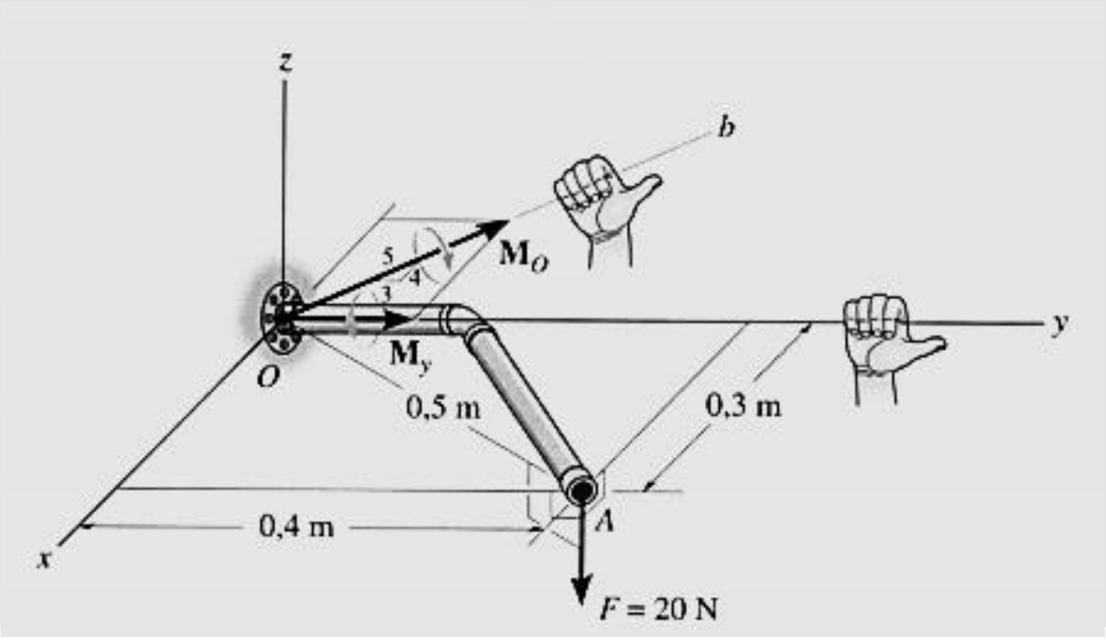
2.5. MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM EIXO ESPECÍFICO

Análise escalar:

- Por razões práticas, pode ser necessário determinar o componente deste momento $\boldsymbol{M_O}$ em relação ao eixo y, $\boldsymbol{M_y}$, uma vez que este componente tende a desparafusar o cano da flange em *O;*

- Logo:

$$M_y = \tfrac{3}{5}(10\ \mathrm{N \cdot m}) = 6\ \mathrm{N \cdot m}$$



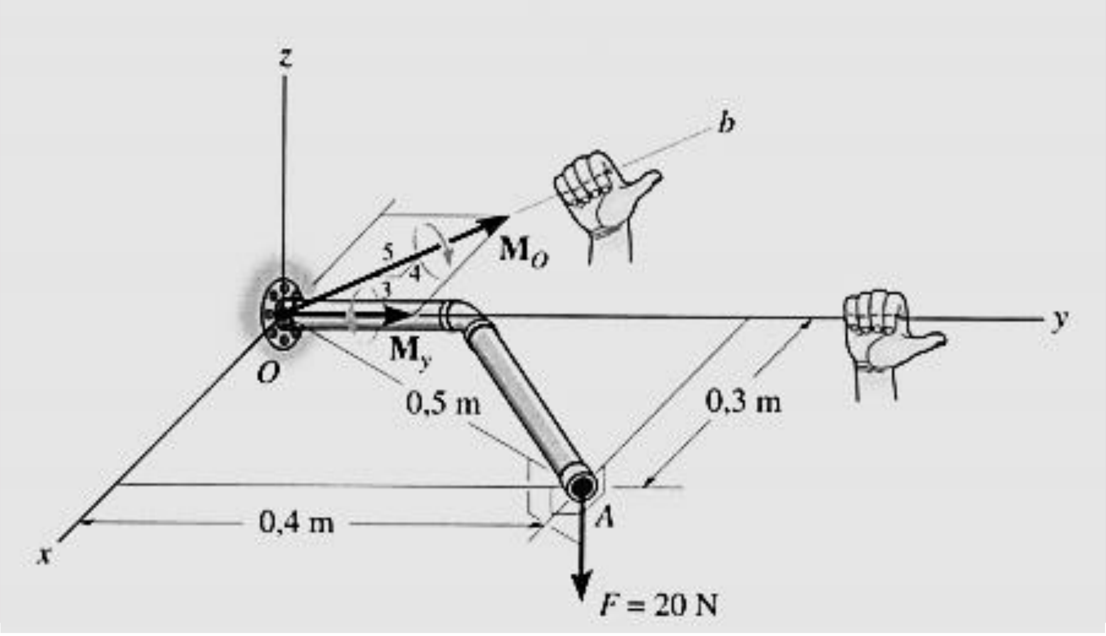
2.5. MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM EIXO ESPECÍFICO

Análise escalar:

- Em vez de executar esse procedimento em duas etapas, ou seja, primeiramente determinar o momento $\boldsymbol{M}_O$ e depois o componente $\boldsymbol{M}_y$, é possível resolver este problema diretamente, encontrando o braço de momento ou a distância perpendicular da linha de ação da força **F** até o eixo y;

- Deste modo:

$$M_y = 0{,}3(20\ \text{N}) = 6\ \text{N}\cdot\text{m}$$



2.5. MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM EIXO ESPECÍFICO

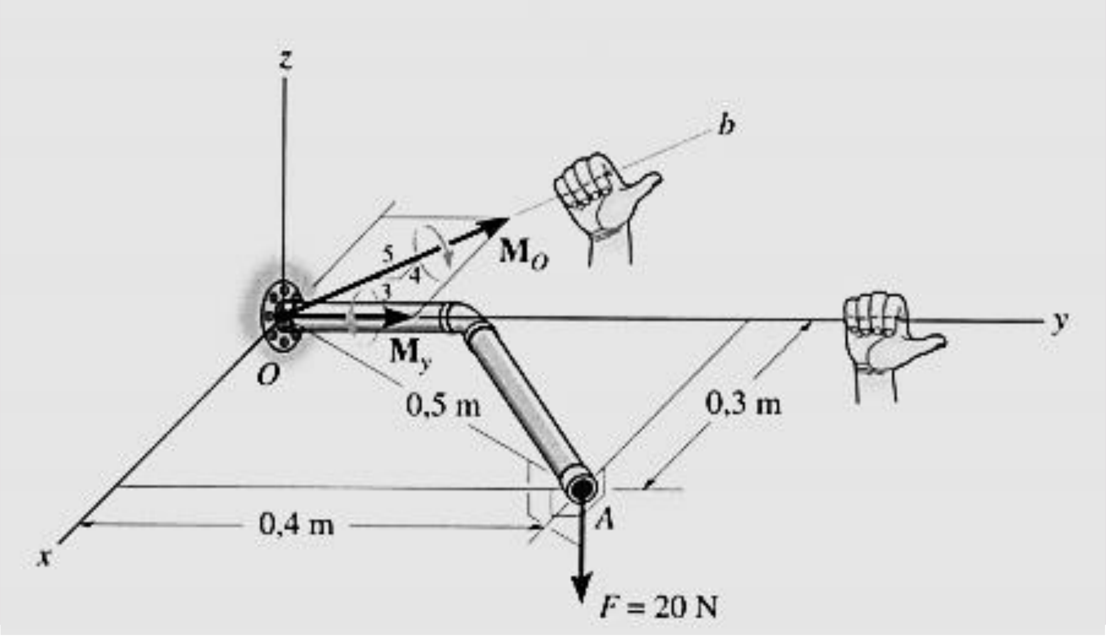
Análise vetorial:

- O momento da força **F** em relação ao ponto *O* é dado pelo produto vetorial:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} = (0{,}3\mathbf{i} + 0{,}4\mathbf{j}) \times (-20\mathbf{k}) = \{-8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}\}\ \mathrm{N \cdot m}$$

- O componente ou a projeção desse momento sobre o eixo y é então determinado pelo produto escalar:

$$M_y = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u}_a = (-8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} = 6\ \mathrm{N \cdot m}$$



2.5. MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM EIXO ESPECÍFICO

- Situações como esse podem ser generalizadas da seguinte maneira:
- O vetor $\boldsymbol{M_O}$:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

- A intensidade do vetor $\boldsymbol{M_a}$:

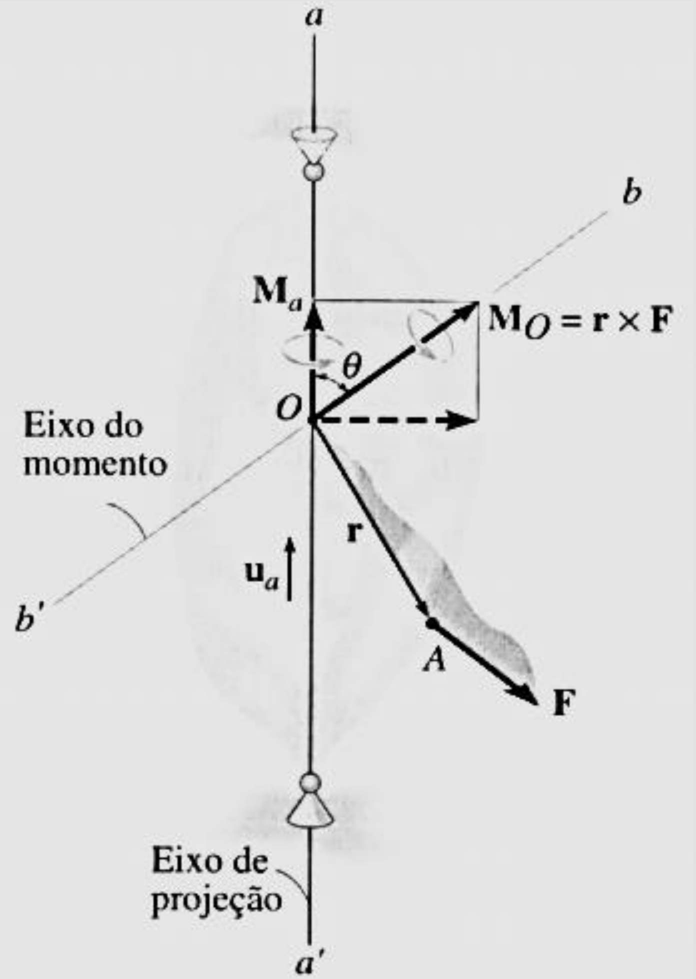
$$M_a = M_O \cos\theta = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u}_a$$

$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

- Produto escalar triplo para determinar M_a:

$$M_a = (u_{a_x}\mathbf{i} + u_{a_y}\mathbf{j} + u_{a_z}\mathbf{k}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\boxed{M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} u_{a_x} & u_{a_y} & u_{a_z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}}$$



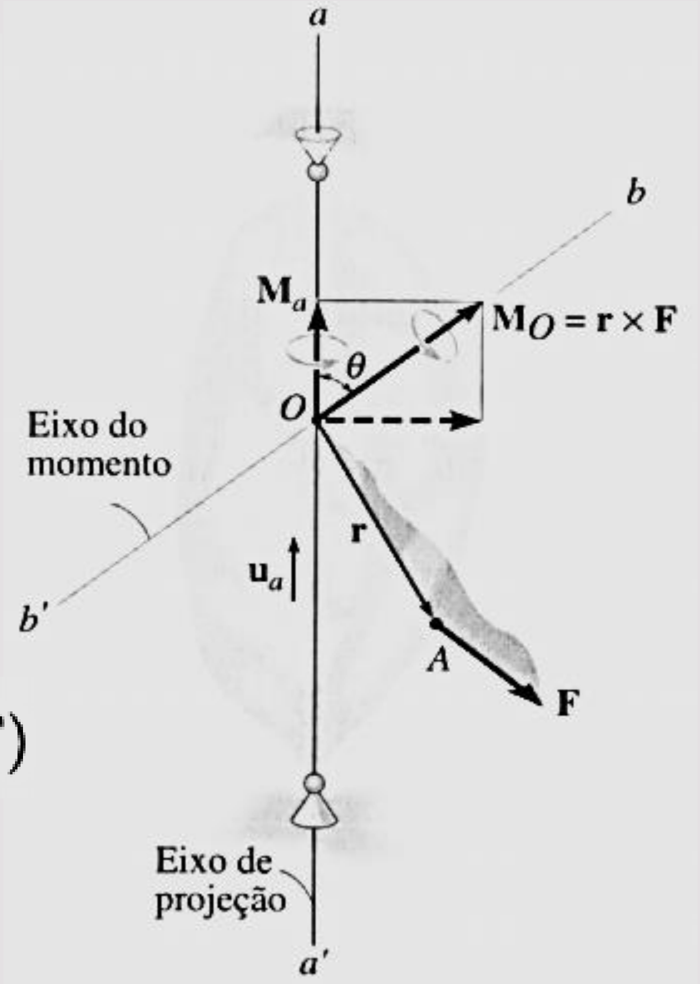
2.5. MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM EIXO ESPECÍFICO

- Uma vez calculado M_a, pode-se determinar $\boldsymbol{M}_a$ na forma vetorial cartesiana:

$$\mathbf{M}_a = M_a \mathbf{u}_a = [\mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})]\mathbf{u}_a$$

- Caso seja necessário calcular o momento resultante de uma série de forças atuantes em relação ao eixo *aa'*, então os componentes dos momentos de cada força devem ser somados algebricamente, já que se encontram ao longo do mesmo eixo. Logo:

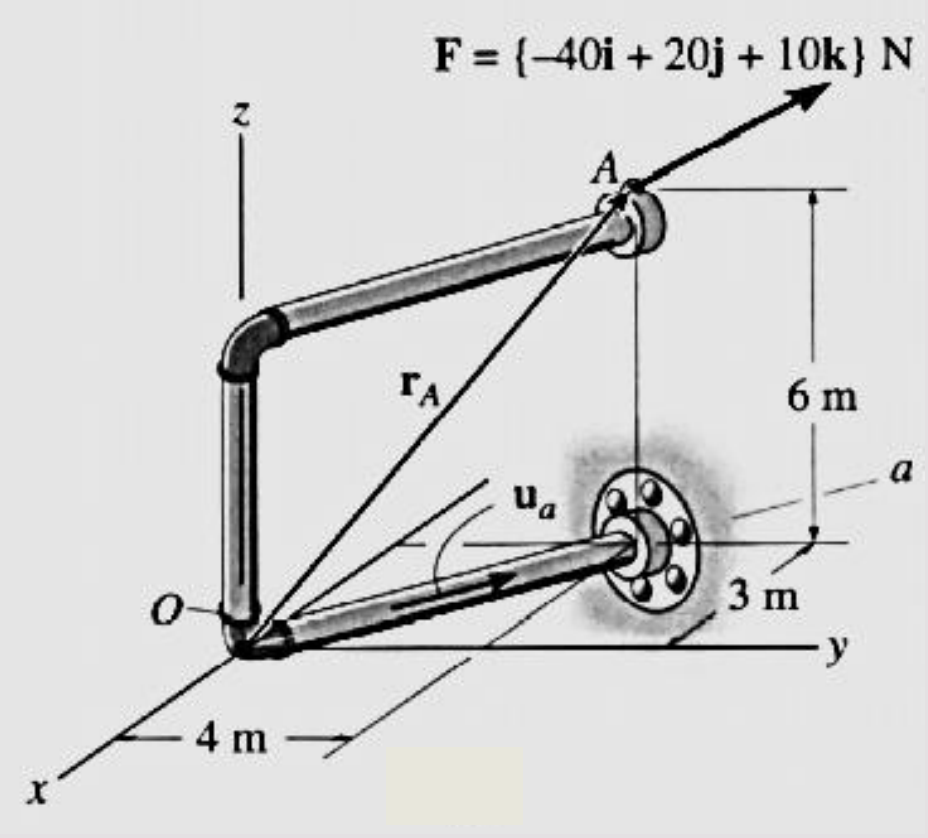
$$M_a = \Sigma[\mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})] = \mathbf{u}_a \cdot \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$



2.5. MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM EIXO ESPECÍFICO

Exercício 13:

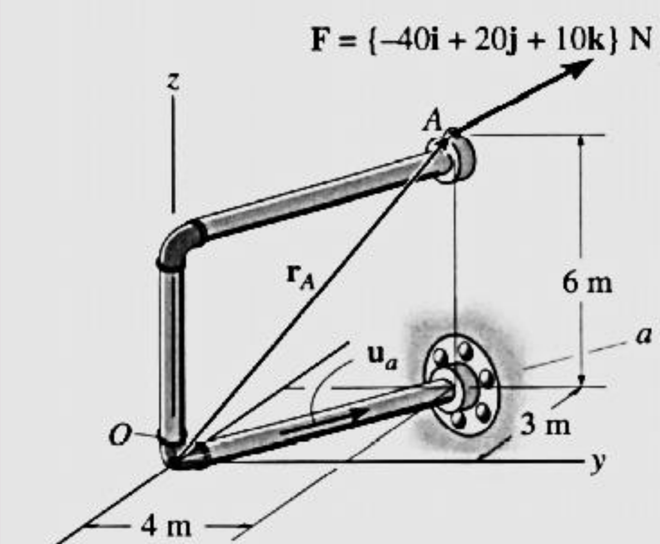
- A força **F** = {-40**i** + 20**j** + 10**k**} atua no ponto A mostrado na figura abaixo. Determine o momento desta força em relação aos eixos x e a. z



2.5. MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM EIXO ESPECÍFICO

<u>Solução I</u>: *Análise vetorial*

- Podemos resolver este problema usando o vetor posição $\boldsymbol{r}_A$, sendo o vetor unitário $\boldsymbol{u}_x = \boldsymbol{i}$.



(a)

$$\mathbf{r}_A = \{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\}$$

$$M_x = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \\ -40 & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

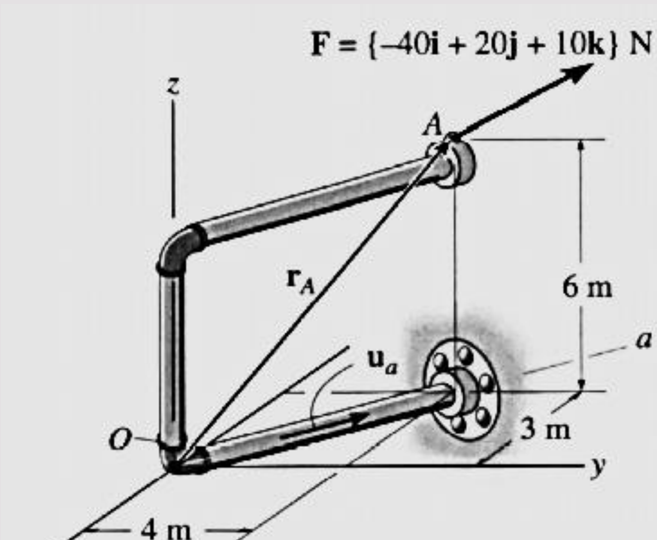
$$= 1[4(10)-6(20)]-0[(-3)(10)-6(-40)]+0[(-3)(20)-4(-40)]$$

$$= -80\ \mathrm{N \cdot m}$$

2.5. MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM EIXO ESPECÍFICO

<u>Solução I</u>: *Análise vetorial*

- O momento M_a pode ser determinado da seguinte maneira:



(a)

$$\mathbf{u}_a = -\tfrac{3}{5}\mathbf{i} + \tfrac{4}{5}\mathbf{j}$$

$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -3 & 4 & 6 \\ -40 & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

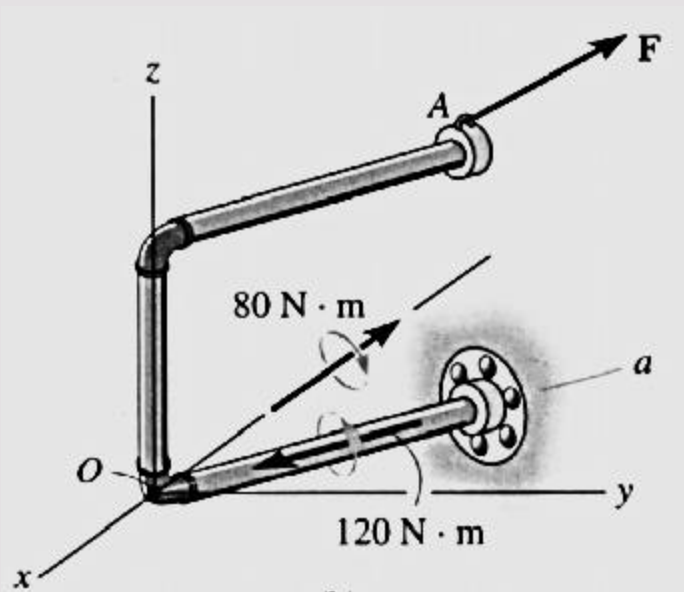
$$= -\tfrac{3}{5}[4(10)-6(20)]-\tfrac{4}{5}[(-3)(10)-6(-40)]+0[(-3)(20)-4(-40)]$$

$$= -120\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

2.5. MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM EIXO ESPECÍFICO

Solução I: *Análise vetorial*

- Podemos resolver este problema usando o vetor posição $\boldsymbol{r}_A$, sendo o vetor unitário $\boldsymbol{u}_x = \boldsymbol{i}$.



$$\mathbf{u}_a = -\tfrac{3}{5}\mathbf{i} + \tfrac{4}{5}\mathbf{j}$$

$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -3 & 4 & 6 \\ -40 & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

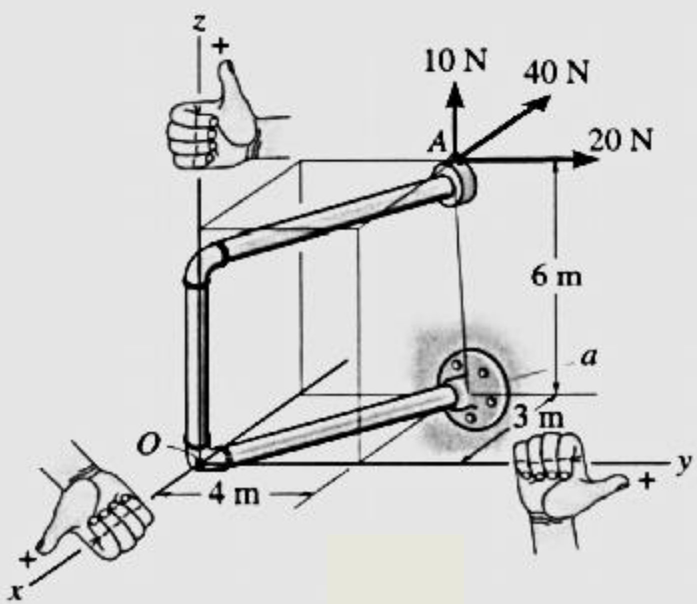
$$= -\tfrac{3}{5}[4(10)-6(20)]-\tfrac{4}{5}[(-3)(10)-6(-40)]+0[(-3)(20)-4(-40)]$$

$$= -120\ \text{N}\cdot\text{m}$$

2.5. MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM EIXO ESPECÍFICO

<u>Solução II</u>: *Análise escalar*

- Os componentes das força e os braços do momento são fáceis de determinar para calcular M_x;



$$M_x = (10\,\text{N})(4\,\text{m}) - (20\,\text{N})(6\,\text{m}) = -80\,\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_y = (10\,\text{N})(3\,\text{m}) - (40\,\text{N})(6\,\text{m}) = -210\,\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_z = (40\,\text{N})(4\,\text{m}) - (20\,\text{N})(3\,\text{m}) = 100\,\text{N}\cdot\text{m}$$

OBRIGADO PELA ATENÇÃO!