Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

MOMENTO DE INÉRCIA DE ÁREA E MOMENTO DE INÉRCIA DE MASSA

7.10. Circulo de Mohr para momentos de inércia

7.10. CIRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE INÉRCIA

- As equações:

1ª
$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta$$

2ª
$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta$$

3ª
$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\text{sen}\,2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

4ª
$$\text{tg}\,2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}$$

5ª
$$I_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

- Possuem uma solução gráfica conveniente e geralmente fácil de ser lembrada;

- Elevando a primeira e a terceira das equações ao quadrado e somando-as, descobrimos que:

$$\left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{uv}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2$$

7.10. CIRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE INÉRCIA

$$\left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{uv}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2$$

- $\boldsymbol{I_x}, \boldsymbol{I_y}$ e $\boldsymbol{I_{xy}}$ são constantes conhecidas;

- Assim, a equação anterior pode ser escrita de forma compacta como:

$$(I_u - a)^2 + I_{uv}^2 = R^2$$

7.10. CIRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE INÉRCIA

$$(I_u - a)^2 + I_{uv}^2 = R^2$$

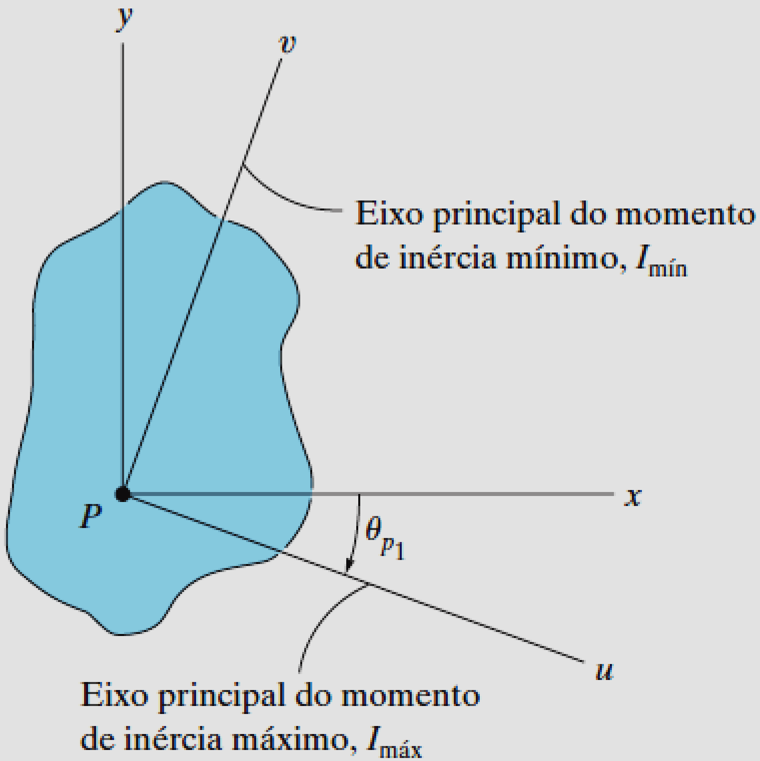
- Quando essa equação é apresentada graficamente em um conjunto de eixos que representam, respectivamente, o momento de inércia e o produto de inércia, o gráfico resultante é um círculo de raio:

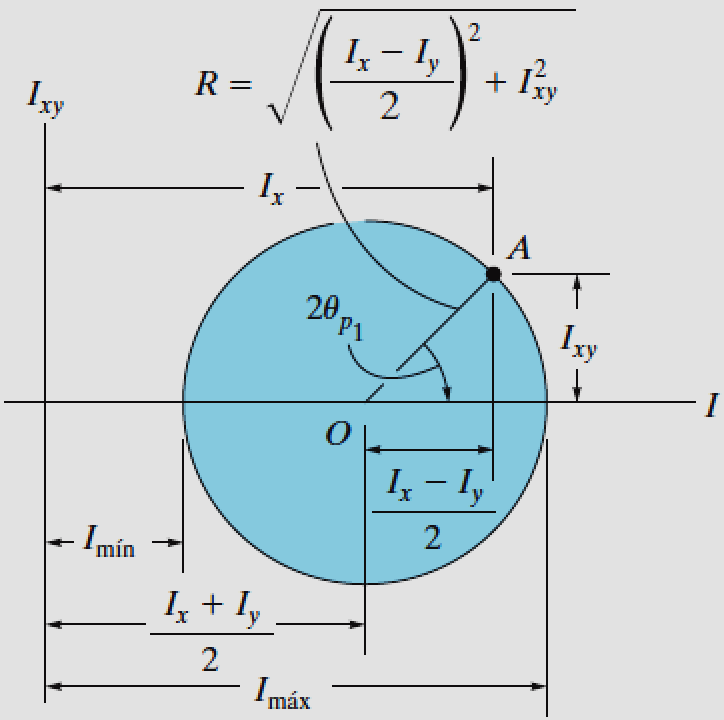
$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

- E com centro localizado no ponto $(\boldsymbol{a}, \mathbf{0})$, em que:

$$\boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{I_x} + \boldsymbol{I_y})}{\mathbf{2}}$$

7.10. CIRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE INÉRCIA





- ➢ O círculo assim construído é chamado ***círculo de Mohr***, em homenagem ao engenheiro alemão Otto Mohr (1835-1918).

7.10. CIRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE INÉRCIA

Passo a passo para a determinação do círculo de Mohr

- A finalidade principal do uso do círculo de Mohr é ter um meio simples e conveniente de encontrar os momentos de inércia principais de uma área.

1) Determine $\boldsymbol{I_x}$, $\boldsymbol{I_y}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{I_{xy}}$

- É necessário estabelecer os eixos $\boldsymbol{x, y}$ e na sequência determinar $\boldsymbol{I_x, I_y}$ e $\boldsymbol{I_{xy}}$;

2) Construa do círculo

- Construa um sistema de coordenadas retangular de modo que o eixo horizontal represente o momento de inércia $\boldsymbol{I}$ e o eixo vertical represente o produto de inércia $\boldsymbol{I_{xy}}$;
- Determine o centro do círculo, $\boldsymbol{O}$, que está localizado a uma distância $(\boldsymbol{Ix} + \boldsymbol{Iy})/\boldsymbol{2}$ da origem, e represente o ponto de referência $\boldsymbol{A}$ tendo coordenadas $(\boldsymbol{Ix, Ixy})$;
- Lembre-se de que $\boldsymbol{I_x}$ é sempre positivo, ao passo que $\boldsymbol{I_{xy}}$ pode ser positivo ou negativo;
- Conecte o ponto de referência $\boldsymbol{A}$ com o centro do círculo e determine a distância $\boldsymbol{OA}$ por trigonometria. Essa distância representa o raio do círculo;
- Finalmente, desenhe o círculo.

7.10. CIRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE INÉRCIA

Passo a passo para a determinação do círculo de Mohr

3) Momentos de inércia principais

- Os pontos em que o círculo cruza o eixo *I* indicam os valores dos momentos de inércia principais $\boldsymbol{I_{mín}}$ e $\boldsymbol{I_{máx}}$;

- Observe que, conforme esperado, o produto de inércia será zero nesses pontos;

4) Eixos principais

- Para determinar a orientação do eixo principal de máximo momento de inércia, use trigonometria para achar o ângulo $\boldsymbol{2\theta_{P1}}$, medido a partir do raio $\boldsymbol{OA}$ até o eixo $\boldsymbol{I}$ positivo;

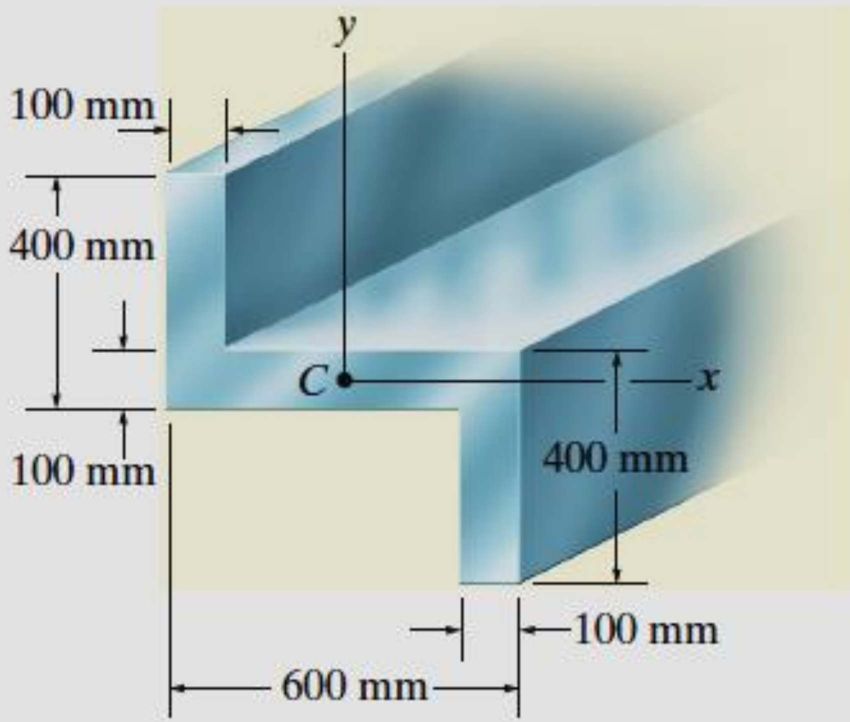
- Esse ângulo representa o *dobro* do ângulo do eixo $\boldsymbol{x}$ até o eixo do momento de inércia máximo $\boldsymbol{I_{máx}}$;

- Tanto o ângulo no círculo, $\boldsymbol{2\theta_{P1}}$, como o ângulo $\boldsymbol{\theta_{P1}}$ devem ser medidos no mesmo sentido. O eixo do momento de inércia mínimo $\boldsymbol{I_{mín}}$ é perpendicular ao eixo para $\boldsymbol{I_{máx}}$.

7.10. CIRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE INÉRCIA

Exemplo 51:

- Usando o círculo de Mohr, determine os momentos de inércia principais e a orientação do eixo principal do máximo momento de inércia da área da seção transversal do membro mostrado na figura abaixo, relativamente a um eixo passando pelo centroide.



7.10. CIRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE INÉRCIA

Solução:

1) Determine $\boldsymbol{I_x, \ I_y \ e \ I_{xy}}$

- Os momentos e o produto de inércia da seção transversal em relação aos eixos $\boldsymbol{x, \ y}$ foram determinados nas aulas anteriores. Os resultados são:

$$I_x = 2{,}90(10^9)\ \text{mm}^4$$

$$I_y = 5{,}60(10^9)\ \text{mm}^4$$

$$I_{xy} = -3{,}00(10^9)\ \text{mm}^4$$

7.10. CIRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE INÉRCIA

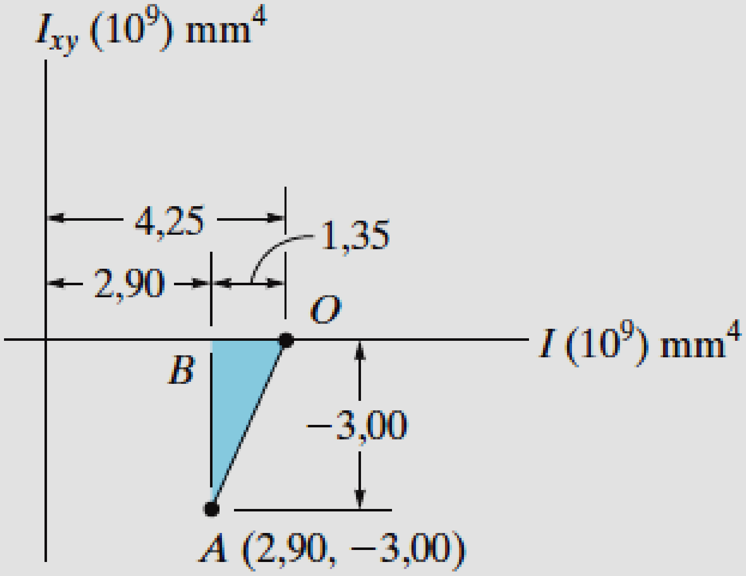
Solução:

2) Construa do círculo

- A partir da origem, o centro do círculo, $\boldsymbol{O}$, está a uma distância:

$$\frac{(I_x + I_y)}{2} = \frac{(2,90 + 5,60)}{2} = 4,25$$

- Quando o ponto de referência $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I_x}, \boldsymbol{I_{xy}})$ ou $\boldsymbol{A}(2,90, -3,00)$ é conectado ao ponto $\boldsymbol{O}$, o raio $\boldsymbol{OA}$ é determinado a partir do triângulo $\boldsymbol{OBA}$ usando o teorema de Pitágoras. Logo:



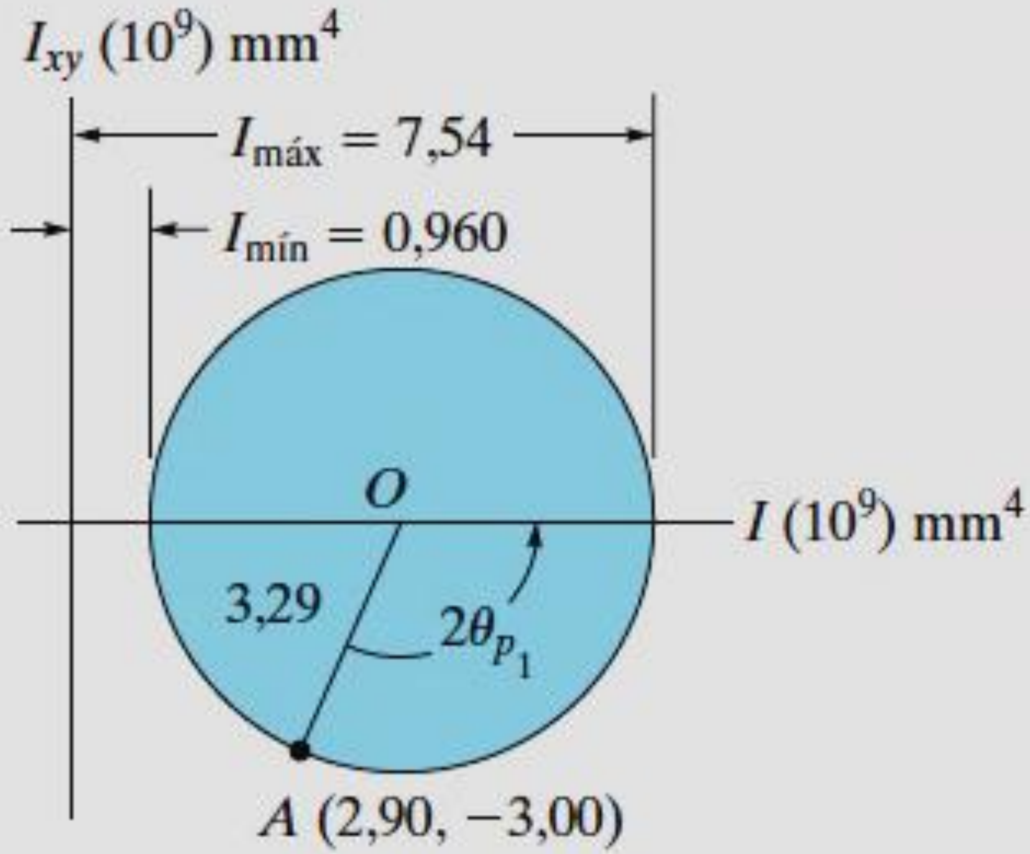
$$OA = \sqrt{(1,35)^2 + (-3,00)^2} = 3,29$$

7.10. CIRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE INÉRCIA

Solução:

2) Construa do círculo

- Construindo o círculo:



7.10. CIRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE INÉRCIA

Solução:

3) Momentos de inércia principais

- O círculo cruza o eixo $\boldsymbol{I}$ nos pontos $(\mathbf{7,54,0})$ e $(\mathbf{0,960,0})$;

- Logo:

$$I_{\text{máx}} = (4{,}25 + 3{,}29)10^9 = 7{,}54(10^9)\ \text{mm}^4$$

$$I_{\text{mín}} = (4{,}25 - 3{,}29)10^9 = 0{,}960(10^9)\ \text{mm}^4$$

7.10. CIRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE INÉRCIA

Solução:

4) Eixos principais

- O ângulo $\boldsymbol{2\theta_{P1}}$ é determinado a partir do círculo medindo em sentido anti-horário a partir de $\boldsymbol{OA}$ até a direção do eixo $\boldsymbol{I}$ positivo.

- Logo:

$$2\theta_{p_1} = 180° - \text{sen}^{-1}\left(\frac{|BA|}{|OA|}\right)$$

$$= 180° - \text{sen}^{-1}\left(\frac{3{,}00}{3{,}29}\right) = 114{,}2°$$

$$= 114{,}2°$$

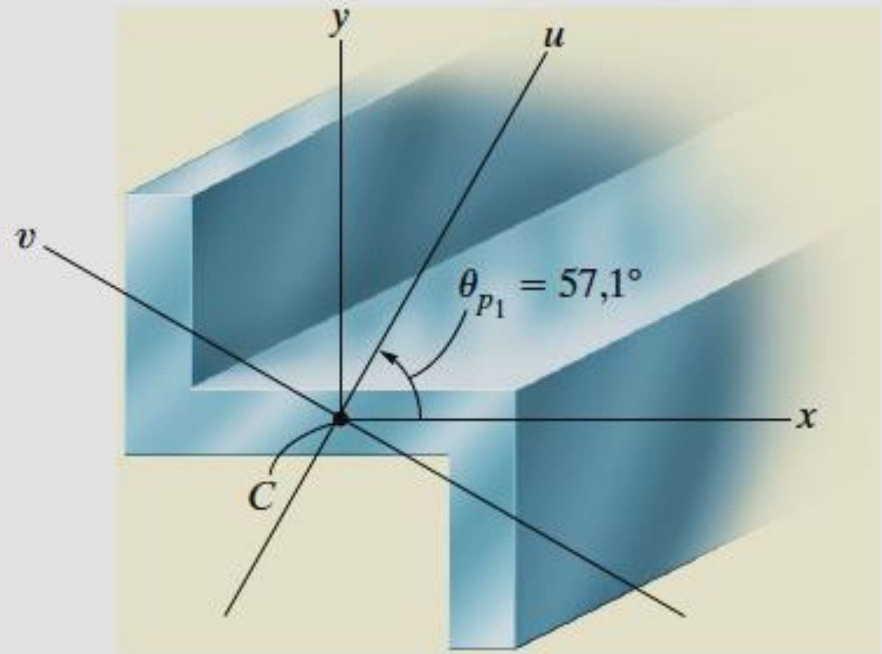
7.10. CIRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE INÉRCIA

Solução:

4) Eixos principais

- O eixo principal para $\boldsymbol{I_{máx}} = \mathbf{7,54(10^9)}\ \boldsymbol{mm^4}$ é, portanto, orientado em um ângulo $\boldsymbol{\theta_{P1}} = \mathbf{57,1}°$, medido no sentido anti-horário a partir do eixo $\boldsymbol{x}$ positivo até o eixo $\boldsymbol{u}$ positivo;

- O eixo $\boldsymbol{v}$ é perpendicular a esse eixo.



ATÉ A PRÓXIMA!