Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia
Faculdade de Engenharia Mecânica

MECÂNICA GERAL

PROFESSOR: IGOR DOS SANTOS GOMES
E-MAIL: IGOR.GOMES@ITEC.UFPA.BR

CÁLCULO VETORIAL E EQUILÍBRIO DE PARTÍCULAS

Cálculo vetorial

1.1. Escalares e vetores
1.2. Operações vetoriais
1.3. Adição de forças vetoriais
1.4. Adição de um sistema de forças coplanares
1.5. Vetores cartesianos
1.6. Adição e subtração de vetores cartesianos
1.7. Vetores posição
1.8. Vetor força orientado ao longo de uma reta
1.9. Produto escalar

Equilíbrio de partículas

1.10. Condição de equilíbrio de um ponto material
1.11. Diagrama de corpo livre
1.12. Sistemas de forças coplanares
1.13. Sistemas de forças tridimensional

EQUILÍBRIO DE PARTÍCULAS

Equilíbrio de partículas

1.10. Condição de equilíbrio de um ponto material
1.11. Diagrama de corpo livre
1.12. Sistemas de forças coplanares
1.13. Sistemas de forças tridimensional

1.10. CONDIÇÃO DE EQUILÍBRIO DE UM PONTO MATERIAL

- O termo **equilíbrio** ou **equilíbrio estático** é usado para descrever um objeto em repouso;

- Um ponto material encontra-se em equilíbrio estático desde que esteja em repouso ou então possua velocidade constante;

- Conforme esta condição, a soma de todas as forças que atuam sobre o ponto material deve ser igual a zero, logo:

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

- Esta não é somente uma condição necessária para o equilíbrio, mas uma condição suficiente, a qual decorre da segunda lei de Newton, onde $\sum F = m.a$;

- Devido ao sistema de forças satisfazer a equação, tem-se que $m.a = 0$, de modo que $a = 0$;

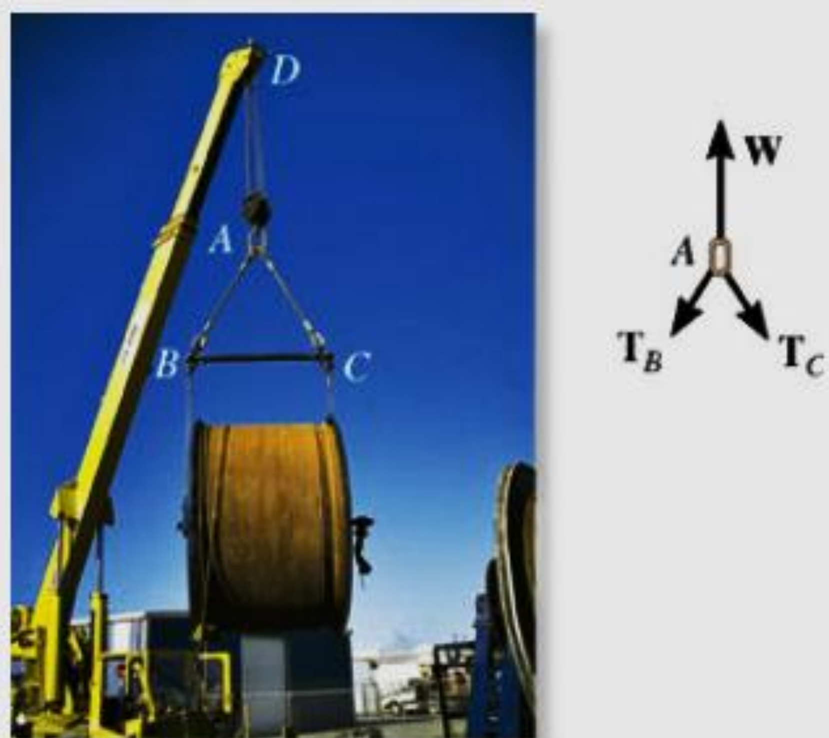
- Como consequência disto, o ponto material move-se com velocidade constante ou permanece em repouso.

1.11. DIAGRAMA DE CORPO LIVRE

- Para a aplicar a equação de equilíbrio, devem ser consideradas todas as forças conhecidas e desconhecidas que atuam sobre o dado ponto material, isto é, realizar $\sum F$;

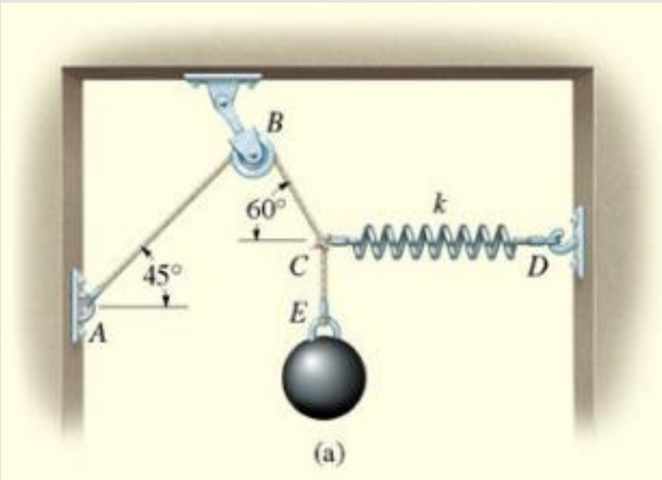
- Para isto é necessário desenhar o **diagrama de corpo livre** do ponto material;

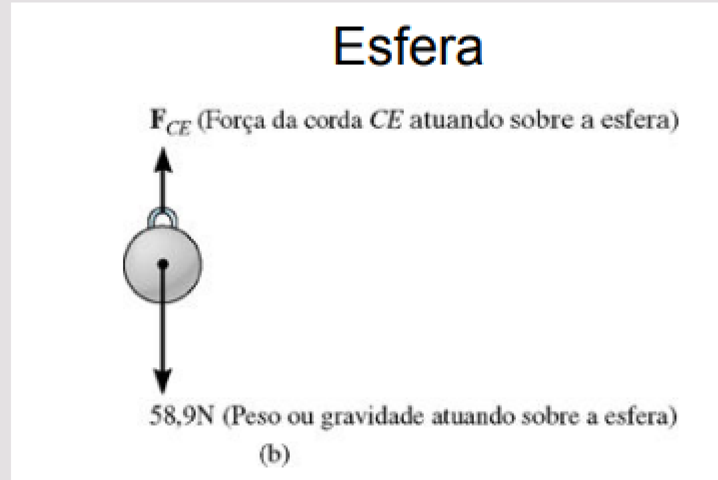
- O diagrama de corpo livre representa um esboço que mostra o ponto material livre do seu entorno e com todas as forças que atuam sobre ele.

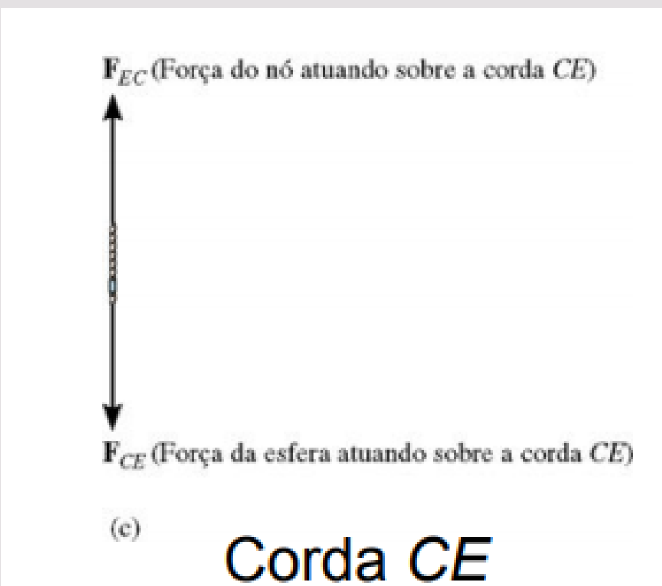


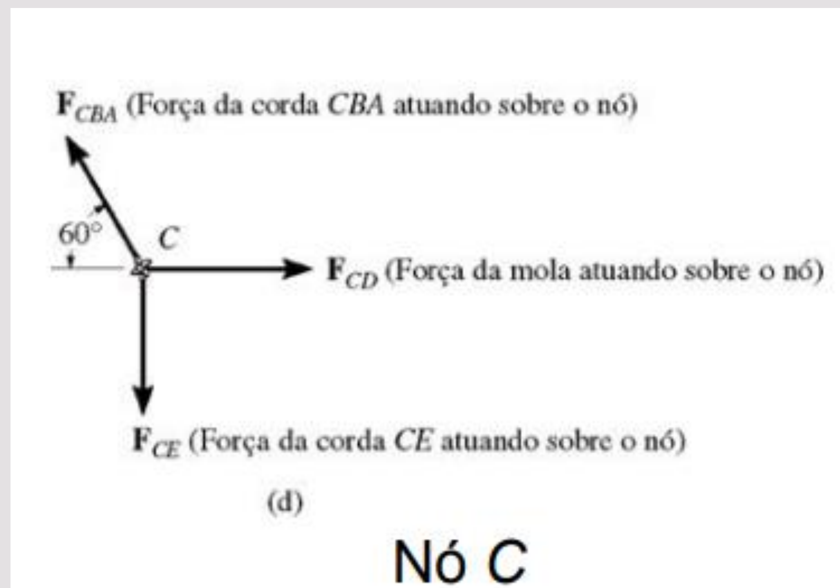
1.11. DIAGRAMA DE CORPO LIVRE

- Exemplo de um **diagrama de corpo livre**:







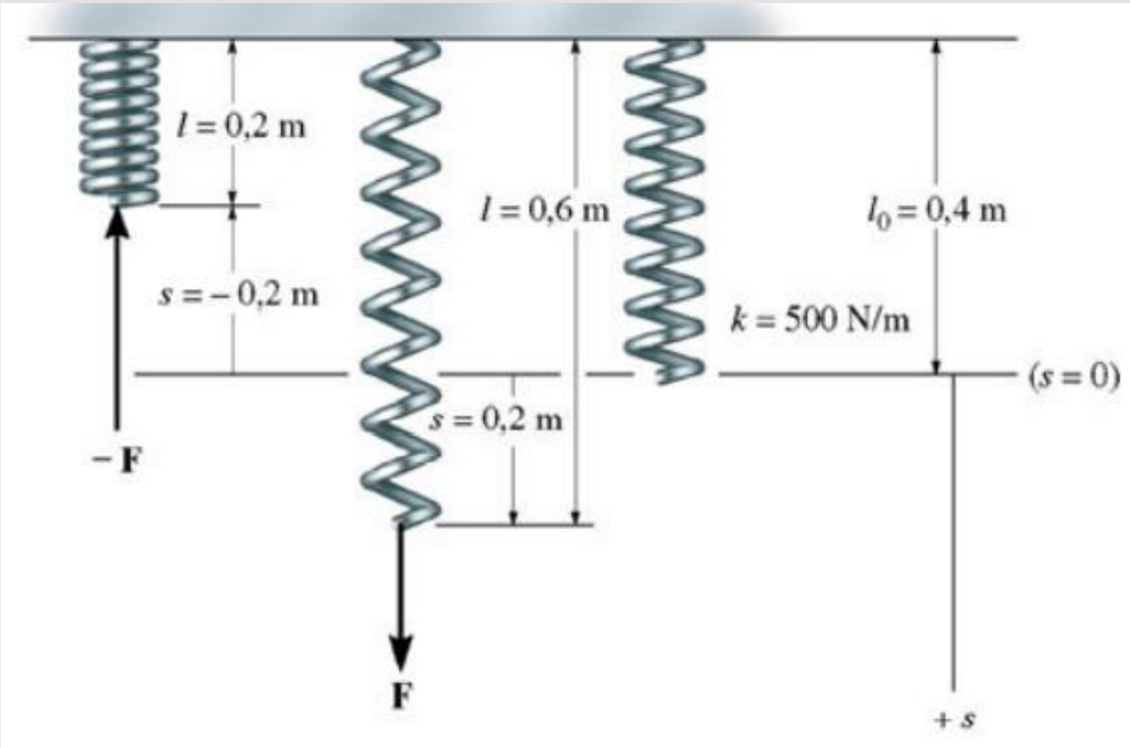


1.11. DIAGRAMA DE CORPO LIVRE

- Existem dois tipos comuns de conexões encontradas em problemas de equilíbrio:

a) Molas

- Quando se utilizar uma mola elástica, o comprimento da mola variará em proporção direta com a força que atua sobre ela;



- A equação da força atuante na mola é:

$$F = k.s$$

- Onde:
- F é a força atuante na mola;
- k é a rigidez da mola;
- s é a deformação da mola.

1.11. DIAGRAMA DE CORPO LIVRE

- Existem dois tipos comuns de conexões encontradas em problemas de equilíbrio:

b) Cabos

- Cabos suportam apenas uma força de tração que atua na direção do mesmo;

- Ao longo da disciplina os cabos (ou cordas) serão considerados como inextensíveis (indeformáveis) e de peso desprezível;

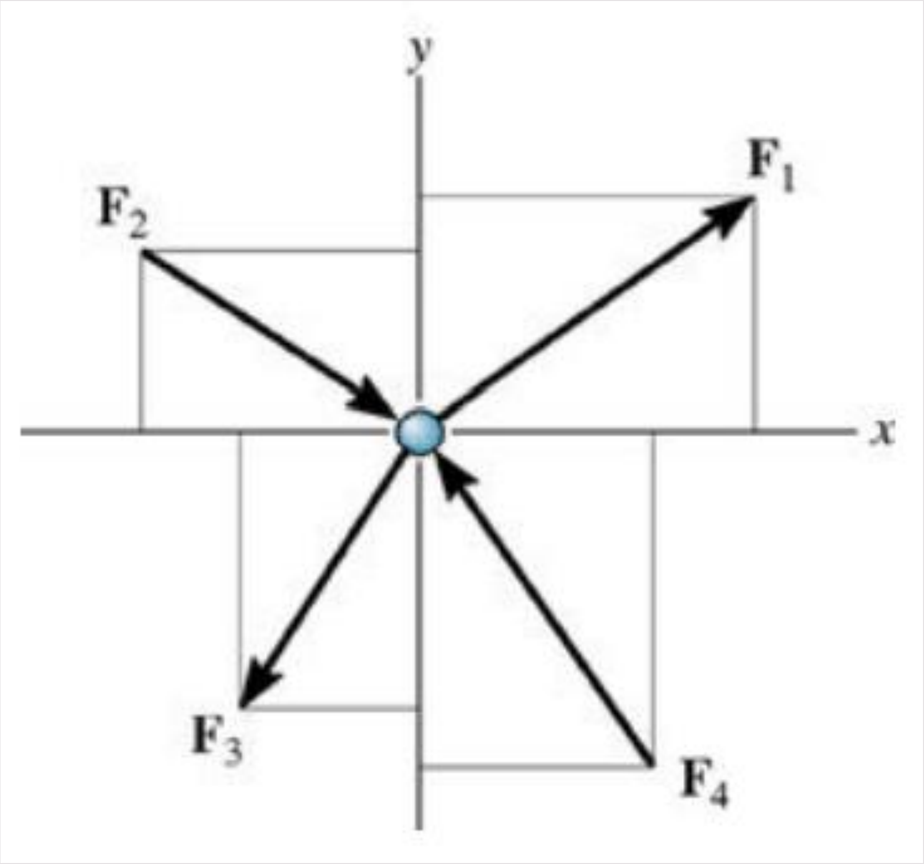
1.12. SISTEMAS DE FORÇAS COPLANARES

- Se um ponto material estiver submetido a um sistema de vária forças coplanares e colineares, cada força poderá ser decomposta em componentes x e y e para a condição de equilíbrio é necessário que as seguintes condições sejam atendidas;

- Deste modo:

$$\sum F_x = 0$$

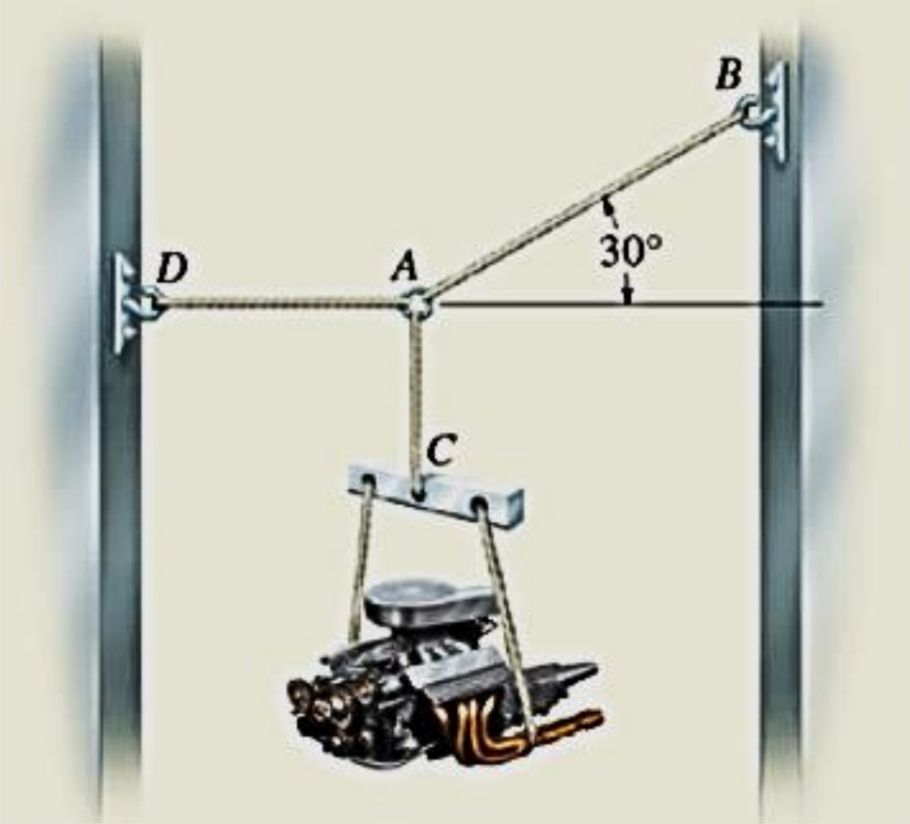
$$\sum F_y = 0$$



1.12. SISTEMAS DE FORÇAS COPLANARES

Exercício 6:

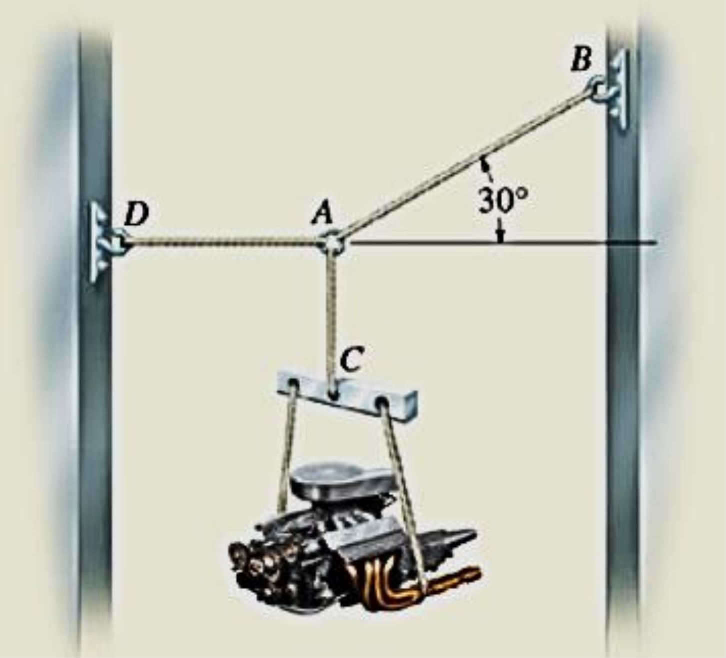
- Determine a tensão nos cabos AB e AD para o equilíbrio do motor de 250kg mostrado na figura.

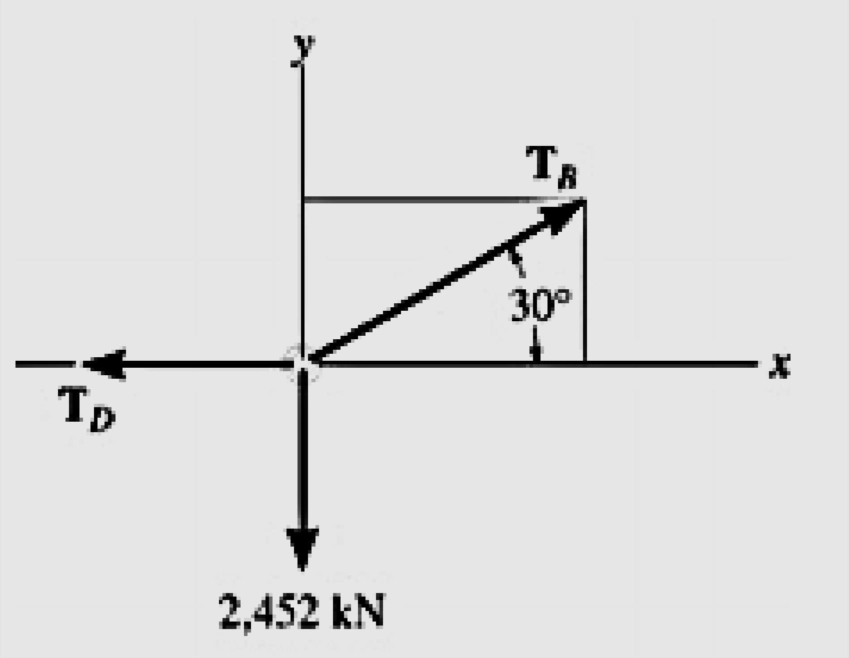


1.12. SISTEMAS DE FORÇAS COPLANARES

<u>Solução:</u>

1° passo: Diagrama de corpo livre (DCL);

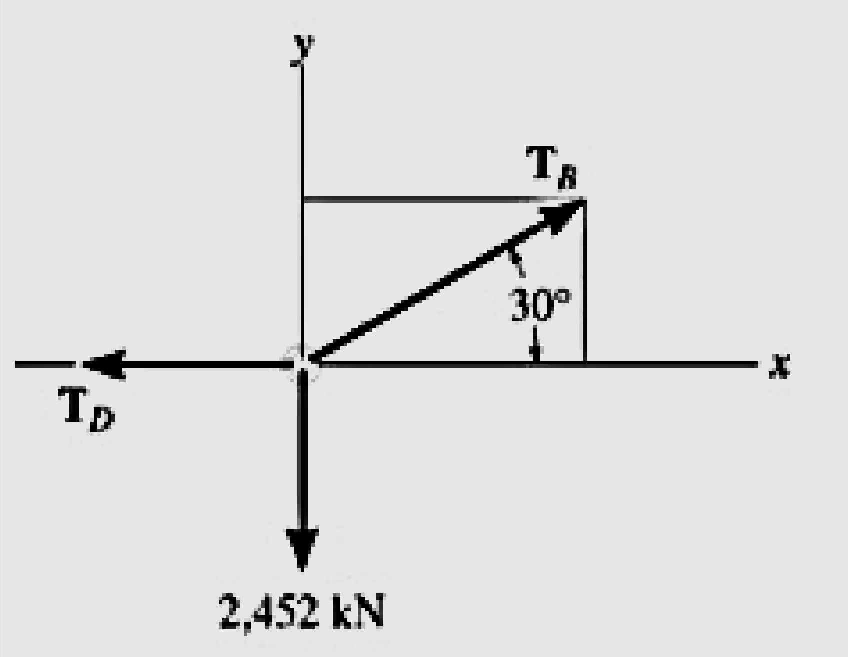




1.12. SISTEMAS DE FORÇAS COPLANARES

Solução:

2° passo: Mostrar e identificar cada força atuante no sistema;



Peso do motor:

$$P = m \cdot g \Rightarrow P = 250 \cdot 9{,}81$$

$$P = 2452\text{N}$$

Equações de equilíbrio:

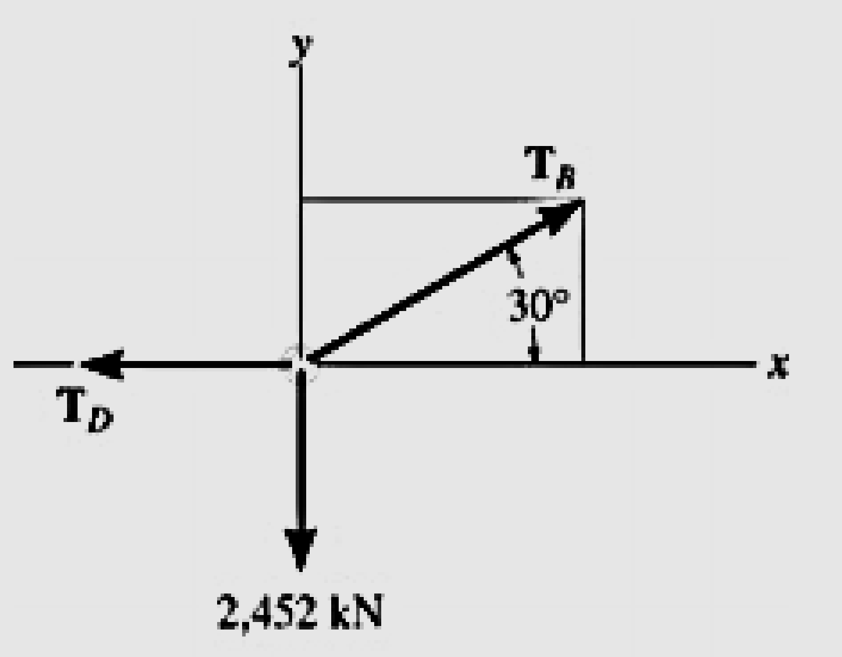
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_B \cdot \cos 30° - T_D = 0 \quad \text{(I)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_B \cdot sen 30° - P = 0 \quad \text{(II)}$$

1.12. SISTEMAS DE FORÇAS COPLANARES

Solução:

2° passo: Mostrar e identificar cada força atuante no sistema;



Equações de equilíbrio:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_B \cdot \cos 30^\circ - T_D = 0 \quad \text{(I)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_B \cdot sen 30^\circ - P = 0 \quad \text{(II)}$$

Resolvendo a equação II:

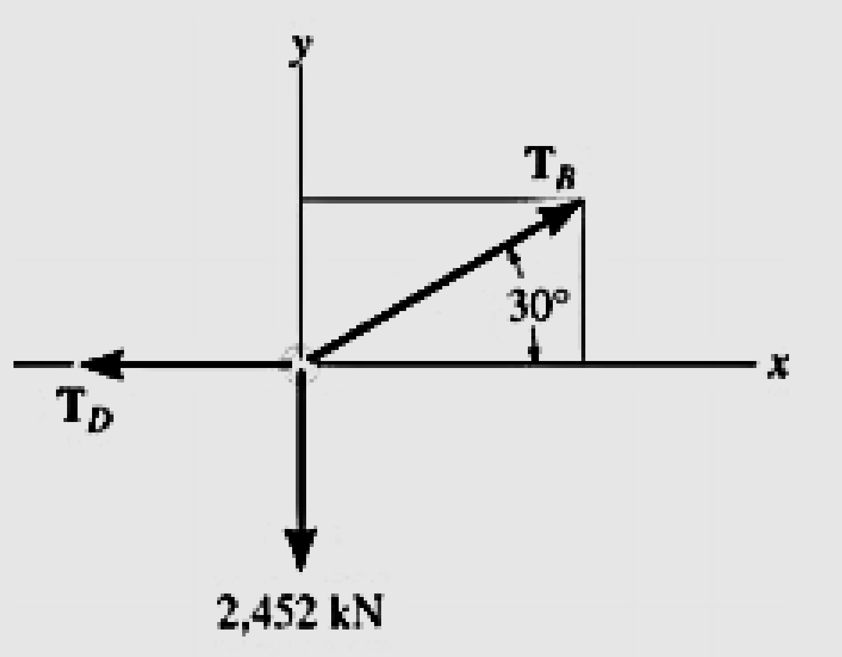
$$T_B \cdot sen 30^\circ - 2452 = 0 \Rightarrow T_B = \frac{2452}{sen 30^\circ}$$

$$T_B = 4904\text{N}$$

1.12. SISTEMAS DE FORÇAS COPLANARES

Solução:

2° passo: Mostrar e identificar cada força atuante no sistema;



Equações de equilíbrio:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_B \cdot \cos 30° - T_D = 0 \quad \text{(I)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_B \cdot sen 30° - P = 0 \quad \text{(II)}$$

Substituindo o T_B na equação I:

$$4904 \cdot \cos 30° - T_D = 0 \Rightarrow T_D = 4904 \cdot \cos 30°$$

$$T_D = 4247\text{N}$$

1.13. SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAL

- Para o equilíbrio de um ponto material, é necessário que:

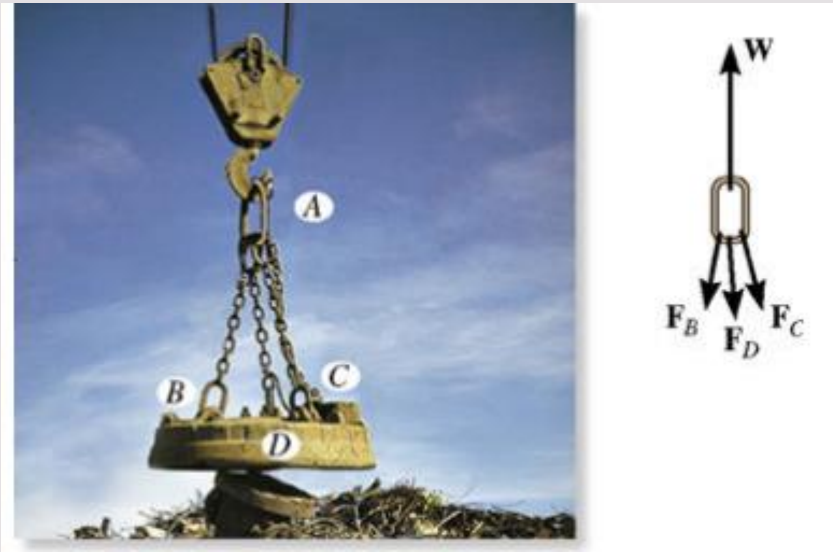
$$\sum F = 0$$

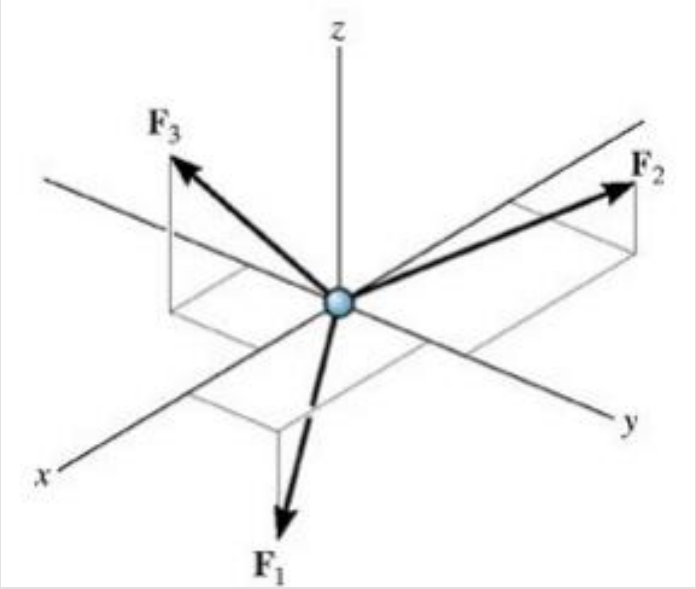
- Caso as forças estejam dispostas em seus respectivos componentes **i**, **j**, **k**, teremos:

$$\sum F_x \boldsymbol{i} + \sum F_y \boldsymbol{j} + \sum F_z \boldsymbol{k} = 0$$

- De modo que o equilíbrio seja garantido, é necessário que as três equações escalares dos componentes sejam satisfeitas, ou seja:

$$\sum \boldsymbol{F_x} = 0 \qquad \sum \boldsymbol{F_y} = 0 \qquad \sum \boldsymbol{F_z} = 0$$

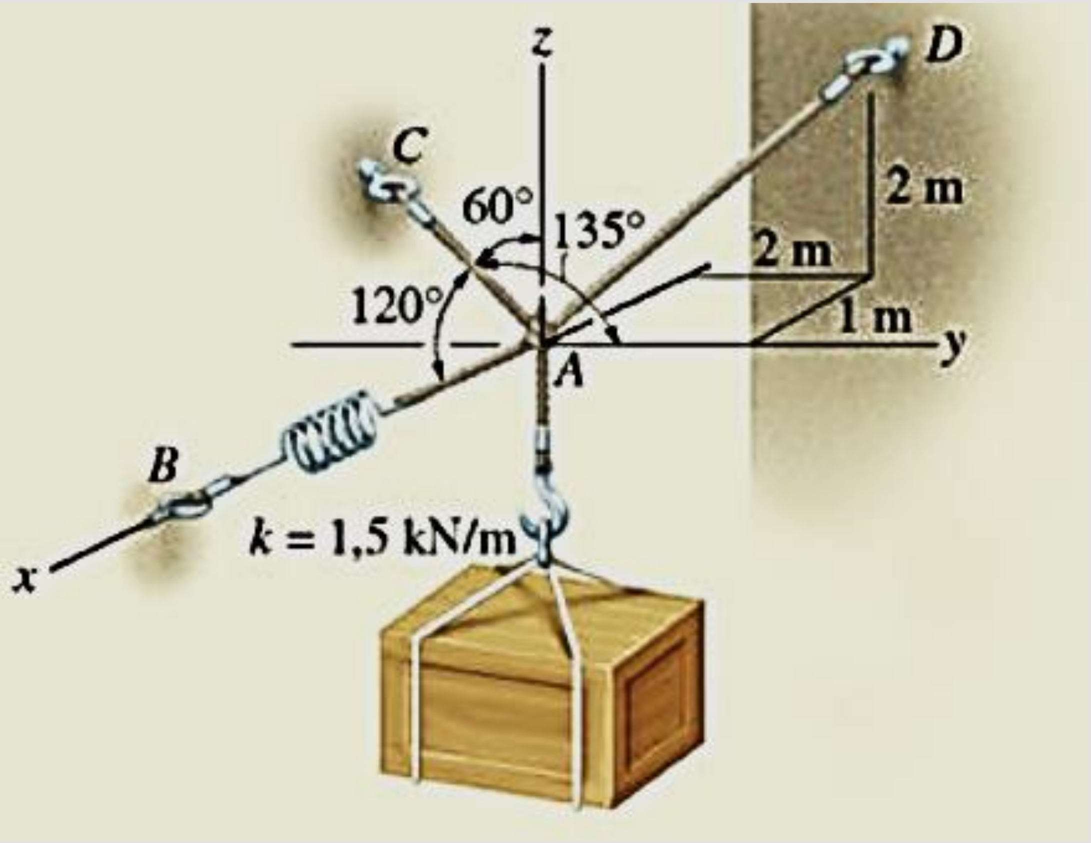




1.13. SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAL

Exercício 7:

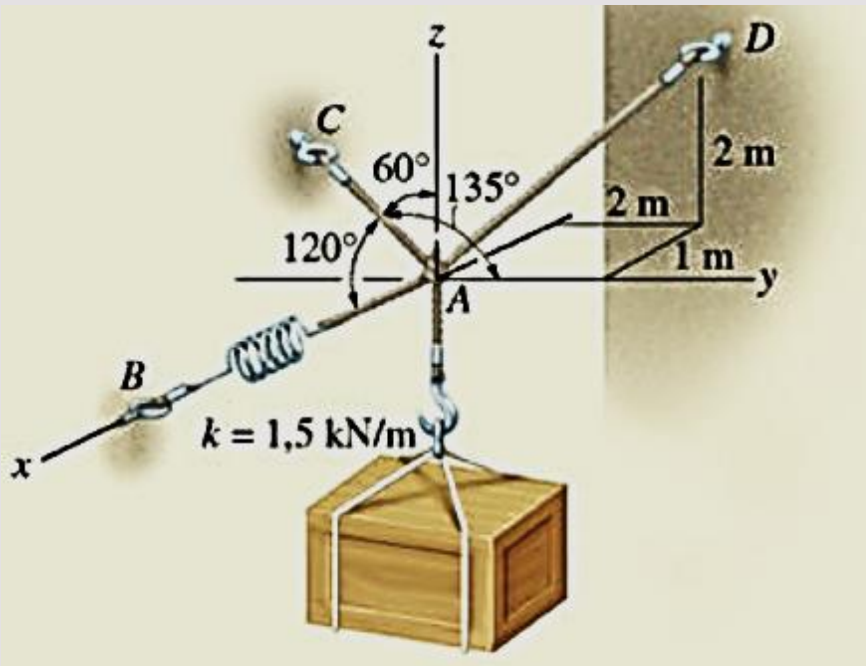
- A caixa de 100kg mostrada na figura é suportada por três cordas, uma delas é acoplada na mola mostrada. Determine a força nas cordas AC e AD e a deformação da mola.

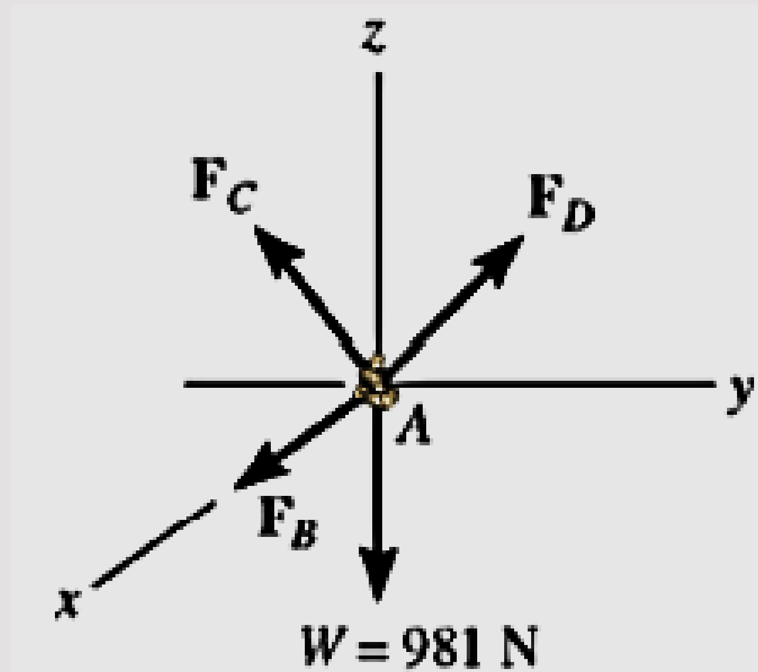


1.13. SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAL

Solução:

1° passo: Diagrama de corpo livre (DCL);



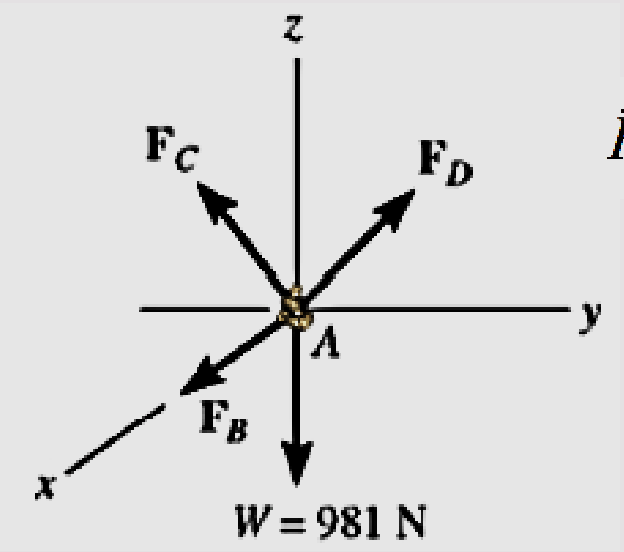


1.13. SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAL

Solução:

2° passo: Determinação das forças;

$$\vec{F}_B = (F_B \vec{i})\,\text{N}$$



$$\vec{F}_C = (F_C \cdot \cos 120° \vec{i} + F_C \cdot \cos 135° \vec{j} + F_C \cdot \cos 60 \vec{k})$$

$$\vec{F}_C = (-0{,}5 \cdot F_C \vec{i} - 0{,}707 \cdot F_C \vec{j} + 0{,}5 \cdot F_C \vec{k})\,\text{N}$$

$$\vec{W} = (-981 \vec{k})\,\text{N}$$

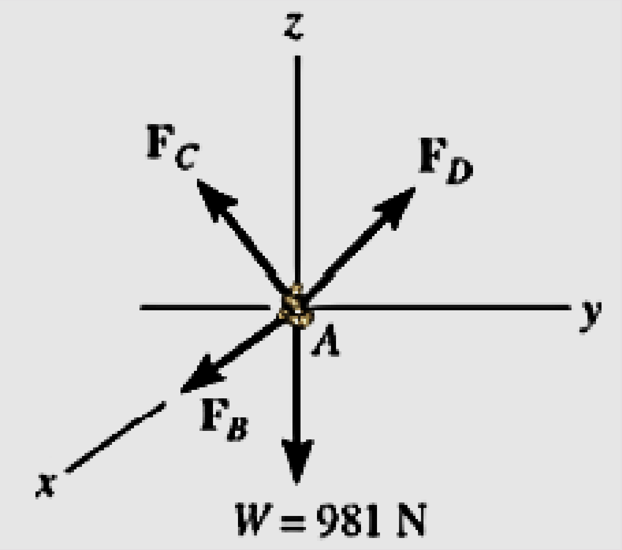
$$\vec{F}_D = F_D \cdot \vec{u}_{AD}$$

1.13. SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAL

Solução:

2° passo: Determinação das forças;

$$\vec{F}_D = F_D \cdot \vec{u}_{AD}$$



Vetor unitário e vetor posição:

$$\vec{u}_{AD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{r_{AD}}$$

$$\vec{r}_{AD} = -1\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \text{ m}$$

$$r_{AD} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}$$

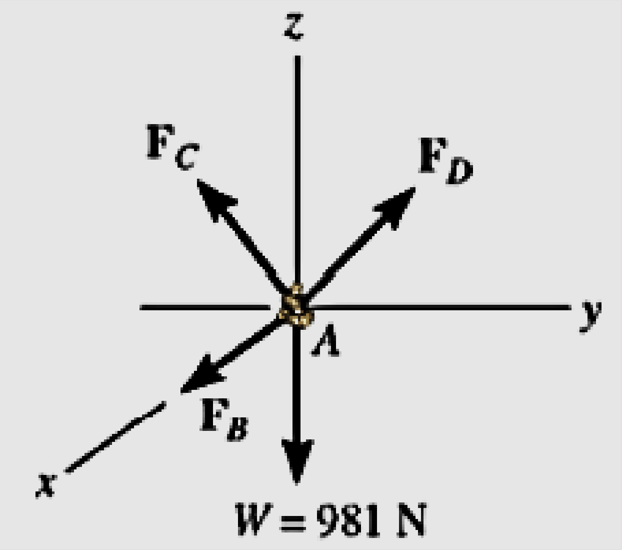
$$r_{AD} = 3\text{m}$$

1.13. SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAL

Solução:

2° passo: Determinação das forças;

$$\vec{F}_D = F_D \cdot \vec{u}_{AD}$$



Vetor unitário e vetor posição:

$$\vec{u}_{AD} = \frac{-1\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}$$

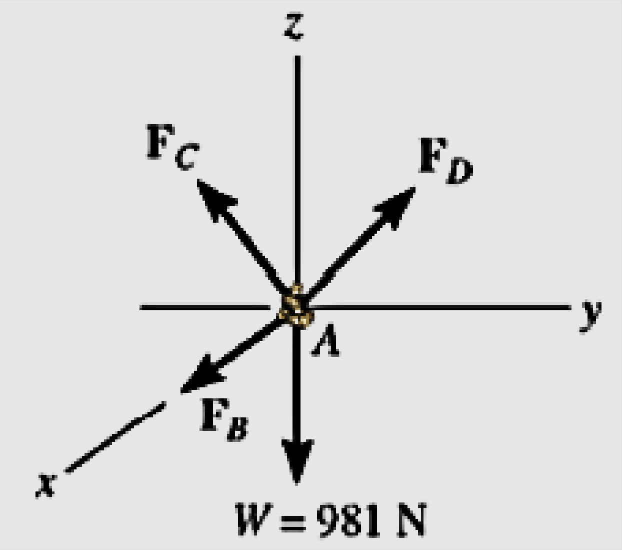
$$\vec{u}_{AD} = -0{,}333\vec{i} + 0{,}667\vec{j} + 0{,}667\vec{k}$$

1.13. SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAL

Solução:

2° passo: Determinação das forças;

$$\vec{F}_D = F_D \cdot \vec{u}_{AD}$$



Vetor unitário e vetor posição:

$$\vec{F}_D = F_D \cdot \vec{u}_{AD}$$

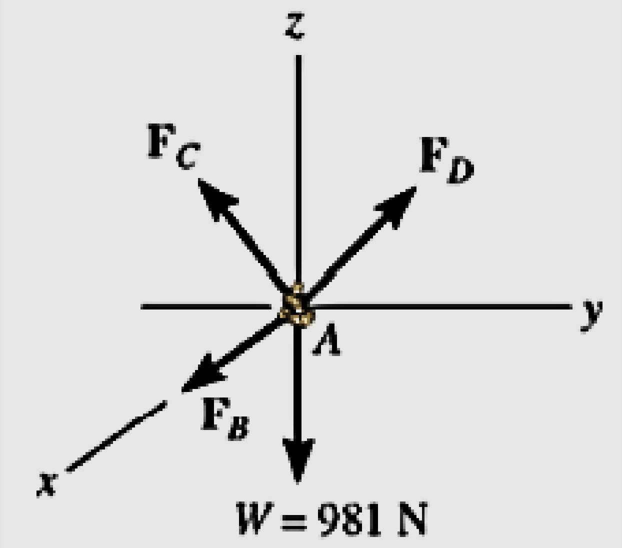
$$\vec{F}_D = F_D \cdot (-0{,}333\vec{i} + 0{,}667\vec{j} + 0{,}667\vec{k})$$

$$\vec{F}_D = (-0{,}333 \cdot F_D\vec{i} + 0{,}667 \cdot F_D\vec{j} + 0{,}667 \cdot F_D\vec{k})\text{N}$$

1.13. SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAL

Solução:

3° passo: Determinação das equações de equilíbrio;



$$\sum \vec{F} = 0$$

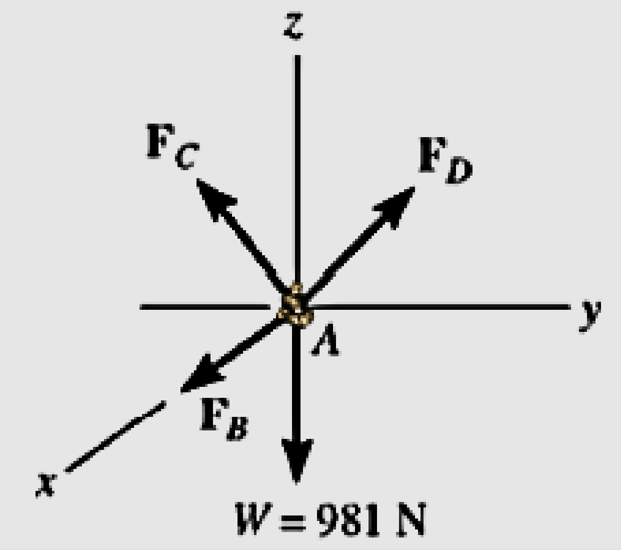
$$\vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{W} = 0$$

$$F_B\vec{i} - 0{,}5 \cdot F_C\vec{i} - 0{,}707 \cdot F_C\vec{j} + 0{,}5 \cdot F_C\vec{k} - 0{,}333 \cdot F_D\vec{i} + 0{,}667 \cdot F_D\vec{j} + 0{,}667 \cdot F_D\vec{k} - 981\vec{k} = 0$$

1.13. SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAL

Solução:

3° passo: Determinação das equações de equilíbrio;



$$\sum F_x = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_B - 0{,}5 \cdot F_C - 0{,}333 \cdot F_D = 0 \quad \text{(I)}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Longrightarrow \quad -0{,}707 \cdot F_C + 0{,}667 \cdot F_D = 0 \quad \text{(II)}$$

$$\sum F_z = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0{,}5 \cdot F_C + 0{,}667 \cdot F_D - 981 = 0 \quad \text{(III)}$$

1.13. SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAL

<u>Solução</u>:

4° passo: Solução das equações;

$$\sum F_y = 0 \quad \Longrightarrow \quad -0{,}707 \cdot F_C + 0{,}667 \cdot F_D = 0 \quad \text{(II)}$$

$$F_D = \frac{0{,}707 \cdot F_C}{0{,}667} \quad \Longrightarrow \quad F_D = 1{,}059 \cdot F_C$$

1.13. SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAL

<u>Solução</u>:

4° passo: Solução das equações;

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow 0{,}5 \cdot F_C + 0{,}667 \cdot F_D - 981 = 0 \quad \text{(III)}$$

$$F_D = 1{,}059 \cdot F_C$$

$$0{,}5 \cdot F_C + (0{,}667 \cdot (1{,}059 \cdot F_C)) - 981 = 0$$

$$0{,}5 \cdot F_C + 0{,}706 \cdot F_C - 981 = 0$$

$$1{,}207 \cdot F_C - 981 = 0$$

$$F_C = \frac{981}{1{,}207}$$

$$F_C = 813\text{N}$$

1.13. SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAL

<u>Solução</u>:

4° passo: Solução das equações;

$$F_D = 1{,}059 \cdot F_C$$

$$F_C = 813\text{N}$$

$$F_D = 1{,}059 \cdot 813$$
$$F_D = 862\text{N}$$

1.13. SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAL

Solução:

4° passo: Solução das equações;

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B - 0{,}5 \cdot F_C - 0{,}333 \cdot F_D = 0 \quad \text{(I)}$$

$$F_C = 813\text{N}$$

$$F_D = 862\text{N}$$

$$F_B - 0{,}5 \cdot 813 - 0{,}333 \cdot 862 = 0$$

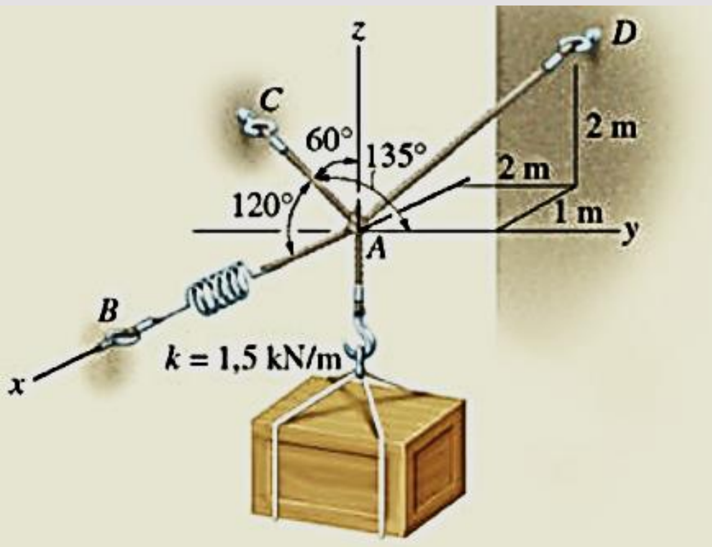
$$F_B = 406{,}5 + 287{,}04$$

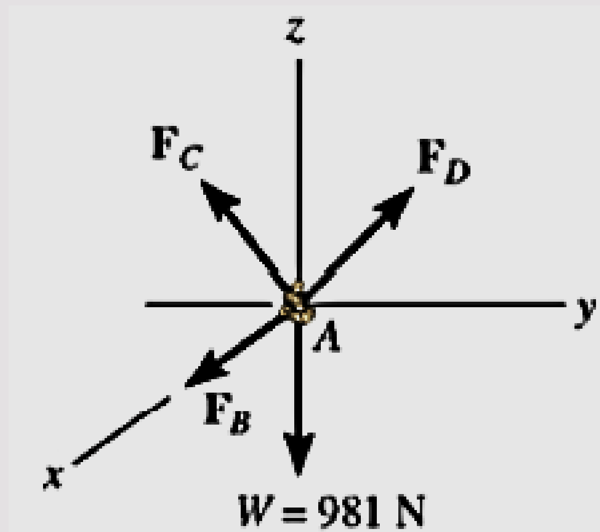
$$F_B = 693{,}7\text{N}$$

1.13. SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAL

<u>Solução</u>:

5° passo: Deformação da mola.





$$F_B = k \cdot s$$

$$693{,}7 = 1500 \cdot s$$

$$s = \frac{693{,}7}{1500}$$

$$s = 0{,}462\,\text{m}$$

OBRIGADO PELA ATENÇÃO!