Wstęp do informatyki

Wykład 5

Uniwersytet Wrocławski

Instytut Informatyki

Plan na dziś

1. Rekurencja oraz … kiedy NIE należy jej stosować:

   Rozważane problemy:

   – potęgowanie,

   – wyznaczanie liczb Fibonacciego,

   – współczynników dwumianowych,…

2. Programowanie dynamiczne… jako alternatywa dla rekurencji.

REKURENCJA

… a recursive definition defines objects in terms of "**previously** defined" objects of the class to define …

wikipedia

Potęgowanie

Definicja rekurencyjna:

$$a^b = \begin{cases} 1 & b = 0 \\ a^{b-1} * a & b > 0 \end{cases}$$

- wartość a^b definiujemy w oparciu o $a^{b\text{-}1}$, tzn. o wartość **tej samej** funkcji dla **mniejszego** argumentu

$$f(a,b) = \begin{cases} 1 & b = 0 \\ f(a,b-1) * a & b > 0 \end{cases}$$

Potęgowanie cd.

Specyfikacja:

Wejście: a, b – liczby naturalne

Wyjście: a^b

Funkcja rekurencyjna: „wywołuje sama siebie”

NIEREKURENCYJNIE

```
int pot(int a, int b)
{ int i, rez;
   rez = 1;
   for(i=0; i<b; i++) rez = rez * a;
   return rez;

}
```

REKURENCYJNIE

```
int pot(int a, int b)
{ if (b==0) return 1;
   return a * pot(a, b-1);

}
```

$$a^b = \begin{cases} 1 & b = 0 \\ a^{b-1} * a & b > 0 \end{cases}$$

Potęgowanie cd.

Specyfikacja:

Wejście: a, b – liczby naturalne

Wyjście: a^b

Funkcja rekurencyjna: „wywołuje sama siebie”

NIEREKURENCYJNIE

```
def pot(a, b):
   rez = 1;
   for i in range(b):
       rez = rez * a
   return rez
```

REKURENCYJNIE

```
def pot(a, b):
    if b==0:
        return 1
    return a * pot(a, b-1)
```

$$a^b = \begin{cases} 1 & b = 0 \\ a^{b-1} * a & b > 0 \end{cases}$$

Potęgowanie cd

Co się dzieje na stosie wywołań?

pot(5,3)

pot	a=5, b=3

Potęgowanie cd

Co się dzieje na stosie wywołań?

pot(5,3)=5*pot(5,2)

↓

pot(5,2)

pot	a=5, b=2
pot	a=5, b=3

Potęgowanie cd

Co się dzieje na stosie wywołań?

pot(5,3)=5*pot(5,2)

↓

pot(5,2)=5*pot(5,1)

↓

pot(5,1)

pot	a=5, b=1
pot	a=5, b=2
pot	a=5, b=3

Potęgowanie cd

Co się dzieje na stosie wywołań?

pot(5,3)=5*pot(5,2)

↓

pot(5,2)=5*pot(5,1)

↓

pot(5,1)=5*pot(5,0)

↓

pot(5,0)

pot	a=5, b=0
pot	a=5, b=1
pot	a=5, b=2
pot	a=5, b=3

Potęgowanie cd

Co się dzieje na stosie wywołań?

pot(5,3)=5*pot(5,2)

↓

pot(5,2)=5*pot(5,1)

↓

pot(5,1)=5*pot(5,0)

↓

pot(5,0)=1

pot	a=5, b=0
pot	a=5, b=1
pot	a=5, b=2
pot	a=5, b=3

Potęgowanie cd

Co się dzieje na stosie wywołań?

pot(5,3)=5*pot(5,2)

pot(5,2)=5*pot(5,1)

pot(5,1)=5*pot(5,0)=5*1=5

pot(5,0)=1

pot	a=5, b=1
pot	a=5, b=2
pot	a=5, b=3

Potęgowanie cd

Co się dzieje na stosie wywołań?

pot(5,3)=5*pot(5,2)

↓

pot(5,2)=5*pot(5,1)=5*5=25

↓

pot(5,1)=5*pot(5,0)=5*1=5

↓

pot(5,0)=1

pot	a=5, b=2
pot	a=5, b=3

Potęgowanie cd

Co się dzieje na stosie wywołań?

pot(5,3)=5*pot(5,2)=5*25=125

pot(5,2)=5*pot(5,1)=5*5=25

pot(5,1)=5*pot(5,0)=5*1=5

pot(5,0)=1

pot	a=5, b=3

Potęgowanie cd

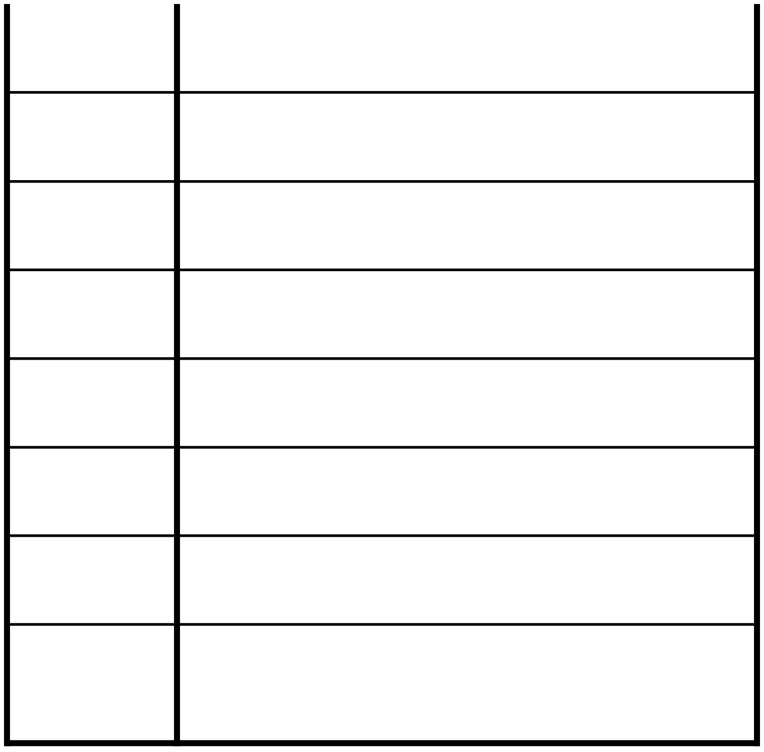
Co się dzieje na stosie wywołań?

pot(5,3)=5*pot(5,2)=125

pot(5,2)=5*pot(5,1)=25

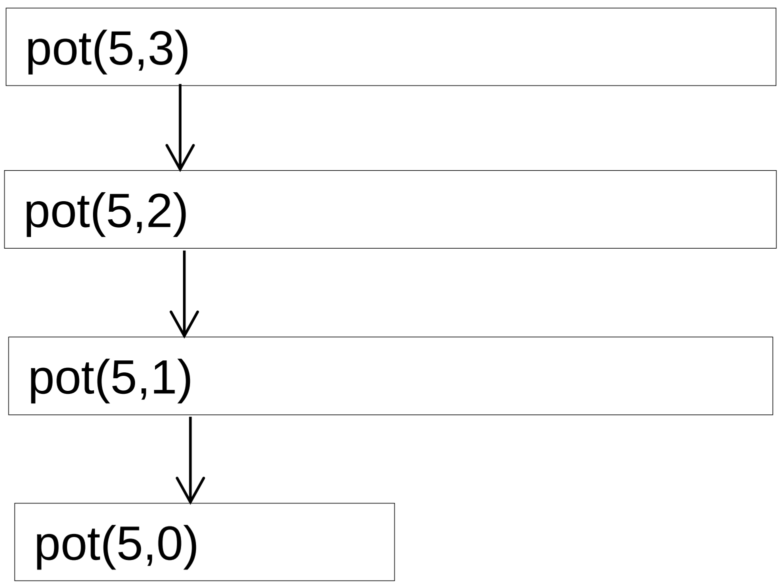
pot(5,1)=5*pot(5,0)=5

pot(5,0)=1



Drzewo wywołań (rekurencyjnych)

Drzewo wywołań (rekurencyjnych) dla pot(5,3):



Krawędź („strzałka”) prowadzi od funkcji wywołującej do funkcji wywoływanej.

Skąd nazwa drzewo? O tym później…

Algorytm Euklidesa rekurencyjnie

Relacja rekurencyjna:

$$\mathrm{nwd}(n,m)=\begin{cases} n & m=0 \\ \mathrm{nwd}(m, n \bmod m) & n \geq m \\ \mathrm{nwd}(m,n) & n < m \end{cases}$$

NIEREKURENCYJNIE

```
int nwd(int n, int m)
{ if (n<m) {
    k = m; m = n; n = k; }
  while (m!=0) {
    k = n % m;
    n = m;
    m = k;
  }
 return n;
}
```

REKURENCYJNIE

```
int nwd(int n, int m)
{ if (m==0) return n;
  if (m>n) return nwd(m, n);
  return nwd(m, n % m);
}
```

Algorytm Euklidesa rekurencyjnie

Relacja rekurencyjna:

$$\mathrm{nwd}(n,m) = \begin{cases} n & m = 0 \\ \mathrm{nwd}(m, n \bmod m) & n \geq m \\ \mathrm{nwd}(m,n) & n < m \end{cases}$$

NIEREKURENCYJNIE

```
def nwd(n,m):
    if n<m:
        k = m
        m = n
        n = k
    while m!=0:
        k = n % m
        n =m
        m =k
    return n
```

REKURENCYJNIE

```
def nwd(n,m):
    if m==0:
        return n
    if m>n:
        return nwd(m, n)
    return nwd(m, n % m)
```

Algorytm Euklidesa rekurencyjnie

Relacja rekurencyjna:

$$\mathrm{nwd}(n,m) = \begin{cases} n & m = 0 \\ \mathrm{nwd}(m, n \bmod m) & n \geq m \\ \mathrm{nwd}(m,n) & n < m \end{cases}$$

NIEREKURENCYJNIE

```
def nwd(n,m):
    if n<m:
        n,m = m,n
    while m!=0:
        n, m = m, n % m
    return n
```

REKURENCYJNIE

```
def nwd(n,m):
    if m==0:
        return n
    if m>n:
        return nwd(m, n)
    return nwd(m, n % m)
```

Algorytm Euklidesa rekurencyjnie

Drzewo wywołań:

nwd(6,15)

↓

nwd(15,6)

↓

nwd(6,3)

↓

nwd(3,0)

```
int nwd(int n, int m)
{ if (m==0) return n;
  if (m>n) return nwd(m, n);
  return nwd(m, n % m);
}
```

```
def nwd(n,m):
    if m==0:
        return n
    if m>n:
        return nwd(m, n)
    return nwd(m, n % m)
```

Silnia

Definicja rekurencyjna:

$$0! = 1$$
$$n! = n \cdot (n-1)! \quad \text{for} \ \ n > 0$$

$$\text{silnia}(0) = 1$$
$$\text{silnia}(n) = n \cdot \text{silnia}(n-1) \quad \text{for} \ \ n > 0$$

Iteracyjnie:

```
int sil(int n)
{ int i, res=1;
  for(i=2; i<=n; i++) res*= i;
  return res;
}
```

```
def sil(n):
    res=1
    for i in range(2,n+1):
        res*=i
    return res
```

Rekurencyjnie:

```
int sil(int n)
{
  if (!n) return 1;
  return n * sil(n-1);
}
```

```
def sil(n):

    if n==0:
        return 1
    return n * sil (n-1)
```

Szybkie potęgowanie

Idea szybkiego potęgowania

Idea wyznaczania a^b:

Jeśli b jest naturalną potęgą dwójki:

- $a^2 = a * a$: jedno mnożenie,
- $a^4 = a^2 * a^2$: dwa mnożenia
  (a^2 liczymy tylko jeden raz),
- $a^8 = a^4 * a^4$: trzy mnożenia
- itd.

Przykład

a^{1024} : 10 mnożeń (zamiast 1024)!

Idea szybkiego potęgowania

Gdy *b* nie jest potęgą dwójki…

Obserwacja:

Każdą naturalną potęgę liczby *a* można rozbić na „niewielką” liczbę potęg z wykładnikiem będącym potęgą dwójki.

Przykład

$a^{49}=a^{32}\cdot a^{16}\cdot a^{1}$

$a^{90}=a^{64}\cdot a^{16}\cdot a^{8}\cdot a^{2}$

Szybkie potęgowanie

Obserwacja

Niech $b_k\, b_{k\text{-}1} \ldots b_0$ to binarna reprezentacja liczby b. Wówczas:

$$a^b = a^{b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + \cdots + b_k \cdot 2^k} = a^{b_0 \cdot 2^0} \cdot a^{b_1 \cdot 2^1} \cdot \cdots \cdot a^{b_k \cdot 2^k}$$

Obserwacja – inne sformułowanie

Aby uzyskać a^b wystarczy wymnożyć potęgi a odpowiadające jedynkom w binarnej reprezentacji liczby b.

Szybkie potęgowanie

Obserwacja inaczej

Aby uzyskać a^b wystarczy wymnożyć potęgi a odpowiadające jedynkom w binarnej reprezentacji liczby b.

Algorytm

1. wczytaj a, b
2. rez ← 1
3. c ← a
4. dopóki b>0
   - Jeśli b % 2 =1:
     rez ← rez * c
   - b ← b / 2
   - c ← c * c
5. wypisz rez

Uwagi:

- zmienna **c** przechowuje w kolejnych iteracjach $a, a^2, a^4, a^8,\dots$
- instrukcja „b ← b / 2” usuwa z b najmniej znaczący bit (**dzielenie całkowite!**)
- b % 2 to wartość najmniej znaczącego bitu b
- w rez przechowujemy „dotychczas domnożone” potęgi liczby a

Szybkie potęgowanie

Algorytm:

1. wczytaj a, b
2. rez $\leftarrow$ 1
3. dopóki b>0
   - Jeśli b % 2 =1:
     rez $\leftarrow$ rez * a
   - b $\leftarrow$ b / 2
   - a $\leftarrow$ a * a
4. wypisz rez

Implementacja:

```
int pot(int a, int b)
{ int rez;
  rez = 1;
  while (b>0) {
    if (b%2) rez = rez * a;
    b = b / 2;
    a = a * a;
  }
  return rez;
}
```

Komentarze:

- Czy ta implementacja jest prosta/skomplikowana? …
- Jak wykazać poprawność (formalnie)?

Szybkie potęgowanie

Algorytm:

1. wczytaj a, b
2. rez ← 1
3. dopóki b>0
   - Jeśli b % 2 =1:

     rez ← rez * a
   - b ← b / 2
   - a ← a * a
4. wypisz rez

Implementacja:

```
def pot(a, b):
    rez = 1
    while b>0:
        if b%2:
            rez = rez * a
        b = b // 2
        a = a * a
    return rez
```

Komentarze:

- Czy ta implementacja jest prosta/skomplikowana? …
- Jak wykazać poprawność (formalnie)?

Szybkie potęgowanie… rekurencyjnie

Obserwacja (jeszcze) inaczej

Dla nieujemnych całkowitych *a* i *b* zachodzi:

$$a^b = \begin{cases} 1 & \text{gdy } b = 0 \\ (a^2)^{b/2} & \text{gdy } b > 0, \text{ parzyste} \\ (a^2)^{(b-1)/2} * a & \text{gdy } b > 0, \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

Szybkie potęgowanie… rekurencyjnie

Obserwacja (jeszcze) inaczej

Dla nieujemnych całkowitych *a* i *b* zachodzi:

$$a^b = \begin{cases} 1 & \text{gdy } b = 0 \\ (a^2)^{b/2} & \text{gdy } b > 0\text{, parzyste} \\ (a^2)^{(b-1)/2} * a & \text{gdy } b > 0\text{, nieparzyste} \end{cases}$$

Dowód poprawności:

- b = 0: oczywiste
- b > 0, parzyste

  $a^b = a^{2*(b/2)} = (a^2)^{b/2}$
- b > 0, nieparzyste

  $a^b = a^{1+2*((b-1)/2)} = (a^2)^{(b-1)/2} * a$

Szybkie potęgowanie… rekurencyjnie

Obserwacja (jeszcze) inaczej

Dla nieujemnych całkowitych *a* i *b* zachodzi:

$$a^b = \begin{cases} 1 & \text{gdy } b = 0 \\ (a^2)^{b/2} & \text{gdy } b > 0, \text{parzyste} \\ (a^2)^{(b-1)/2} * a & \text{gdy } b > 0, \text{nieparzyste} \end{cases}$$

Algorytm rekurencyjny (w oparciu o zależność rekurencyjną):

- jeśli b=0: zwróć 1
- jeśli b nieparzyste: zwróć a pomnożone przez wynik wywołania dla a równego a^2 oraz b równego (b-1) /2
- jeśli b parzyste: zwróć wynik wywołania dla a równego a^2 oraz b równego b / 2

Szybkie potęgowanie… rekurencyjnie

$$a^b = \begin{cases} 1 & \text{gdy } b = 0 \\ (a^2)^{b/2} & \text{gdy } b > 0, \text{parzyste} \\ (a^2)^{(b-1)/2} * a & \text{gdy } b > 0, \text{nieparzyste} \end{cases}$$

Algorytm rekurencyjny:

- jeśli b=0: zwróć 1
- jeśli b nieparzyste: zwróć a pomnożone przez wynik wywołania dla a równego a^2 oraz b równego (b-1) /2
- jeśli b parzyste: zwróć wynik wywołania dla a równego a^2 oraz b równego b / 2

ALE: w C „stosujemy” dzielenie całkowite, czyli (b-1)/2 jest równe b/2 dla nieparzystego b.

Implementacja:

```
int pot(int a, int b)
{
  if (!b) return 1;
  if (b%2) return a* pot(a*a,b/2);
  return pot(a*a, b/2);
}
```

Szybkie potęgowanie… rekurencyjnie

$$a^b = \begin{cases} 1 & \text{gdy } b = 0 \\ (a^2)^{b/2} & \text{gdy } b > 0, \text{ parzyste} \\ (a^2)^{(b-1)/2} * a & \text{gdy } b > 0, \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

Algorytm rekurencyjny:

- jeśli b=0: zwróć 1
- jeśli b nieparzyste: zwróć a pomnożone przez wynik wywołania dla a równego a^2 oraz b równego (b-1) /2
- jeśli b parzyste: zwróć wynik wywołania dla a równego a^2 oraz b równego b / 2

ALE: dla b nieparzystego (b – 1)/2 jest równe wynikowi dzielenia całkowitego b przez 2

Implementacja:

```
def pot(a, b):
    if not b:
        return 1
    if b%2:
        return a*pot(a*a,b//2)
    return pot(a*a,b/2)
```

Przykład: drzewo wywołań (rekurencyjnych)

Drzewo wywołań (rekurencyjnych) dla pot(2,17):

pot(2,17) = 2 * pot(2^2,8)

↓

pot(2^2,8) = pot(2^4,4)

↓

pot(2^4,4) = pot(2^8,2)

↓

pot(2^8,2) = pot(2^{16},1)

↓

pot(2^{16},1) = 2^{16} * pot(2^{32},0)

↓

pot(2^{32},0) = 1

Implementacja:

```
int pot(int a, int b)
{
  if (!b) return 1;
  if (b%2) return a* pot(a*a,b/2);
  return pot(a*a, b/2);
}
```

Implementacja:

```
def pot(a, b):
    if not b:
        return 1
    if b%2:
        return a*pot(a*a,b//2)
    return pot(a*a,b/2)
```

Przykład: drzewo wywołań (rekurencyjnych)

Drzewo wywołań (rekurencyjnych) dla pot(2,17):

pot(2,17)

↓

pot(2^2,8)

↓

pot(2^4,4)

↓

pot(2^8,2)

↓

pot(2^{16},1)

↓

pot(2^{32},0)

Przykład: drzewo wywołań vs binarna repr. potęgi

Drzewo wywołań (rekurencyjnych) dla pot(2,17):

pot(**2**,17)	$17 = 1\ 0\ 0\ 0\ \mathbf{1}_{(2)}$
↓	
pot(2^2,8)	$8 = 1\ 0\ 0\ 0_{(2)}$
↓	
pot(2^4,4)	$4 = 1\ 0\ 0_{(2)}$
↓	
pot(2^8,2)	$2 = 1\ 0_{(2)}$
↓	
pot($\mathbf{2^{16}}$,1)	$1 = \mathbf{1}_{(2)}$
↓	
pot(2^{32},0)	$0 = 0_{(2)}$

Szybkie potęgowanie… porównanie

Nierekurencyjnie:

```
int pot(int a, int b)
{ int rez;
  rez = 1;
  while (b>0) {
    if (b%2) rez = rez * a;
    b = b / 2;
    a = a * a;
  }
  return rez;
}
```

Rekurencyjnie:

```
int pot(int a, int b)
{
  if (!b) return 1;
  if (b%2) return a* pot(a*a,b/2);
  return pot(a*a, b/2);
}
```

Szybkie potęgowanie… porównanie

Nierekurencyjnie:

```
def pot(a, b):
    rez = 1
    while b>0:
        if b%2:
            rez = rez * a
        b = b // 2
        a = a * a
    return rez
```

Rekurencyjnie:

```
def pot(a, b):
    if not b:
        return 1
    if b%2:
        return a*pot(a*a,b//2)
    return pot(a*a,b/2)
```

Szybkie potęgowanie: złożoność

Implementacja nierekurencyjna

Pamięć: O(1)

Czas: O(log b)

- liczba powtórzeń (obrotów) pętli proporcjonalna do długości reprezentacji binarnej liczby b.

„Naiwne” a szybkie potęgowanie

Czas naiwnego potęgowania: O(b)

b	1	2	4	256	1024	65536
log b	0	1	2	8	10	16

Szybkie potęgowanie: złożoność

Implementacja rekurencyjna

Czas:

- Intuicyjnie: każde wywołanie „skraca” binarną reprezentację b o jeden; więc O(log b)
- Formalnie możemy czas wyrazić **zależnością rekurencyjną**:

  T(1) = 1

  T(b) = 1 + T(b / 2) dla parzystego b

  T(b) = 1 + T((b – 1) / 2) dla nieparzystego b

  Można pokazać, że T(b) = **O(log b)**

Pamięć:

- Musimy uwzględnić zajętość stosu wywołań (ile wywołań jednocześnie?)
- Liczba wywołań ograniczona przez czas (p. wyżej)
- Złożoność: **O(log b)**

Liczby Fibonacciego

Liczby Fibonacciego (czyli: kiedy nie używać rekurencji!)

Definicja:

$$F_0 = 1$$
$$F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ dla } n > 1$$

Rekurencyjnie:

```
long fib(int i)
{  if (i<=1) return 1;
   return fib(i-1)+fib(i-2);
}
```

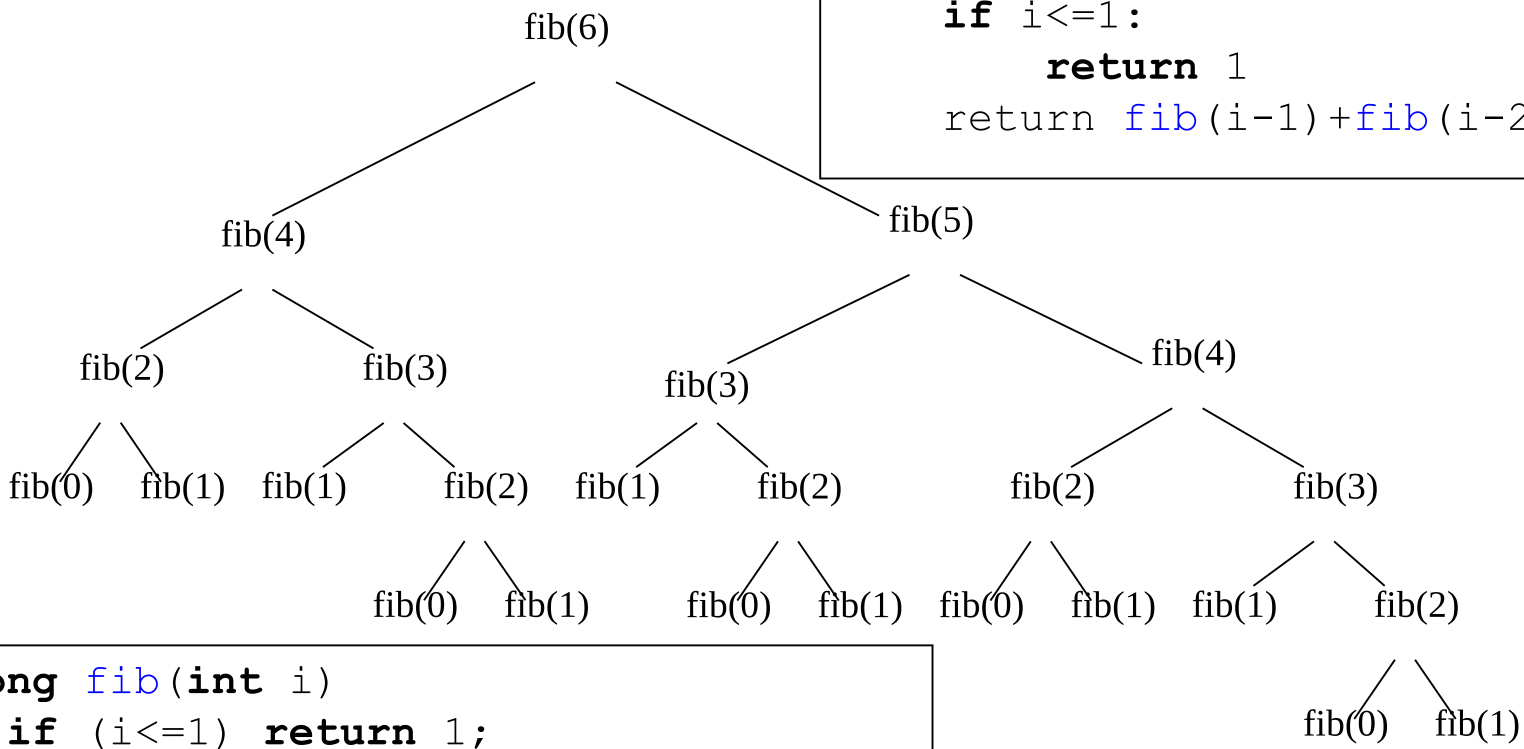
```
def fib(i):
    if i<=1:
        return 1
    return fib(i-1)+fib(i-2)
```

n	Fib_n
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144

Liczby Fibonacciego

Drzewo wywołań rekurencyjnych:

```
def fib(i):
    if i<=1:
        return 1
    return fib(i-1)+fib(i-2)
```




```
long fib(int i)
{ if (i<=1) return 1;
  return fib(i-1)+fib(i-2);
}
```

Liczby Fibonacciego

Liczba „liści” drzewa wywołań dla fib(n):

- fib(n)

Złożoność czasowa co najmniej fib(n) :

- większa niż liczba węzłów drzewa wywołań
- czyli ≥ fib(n)

Wniosek:

- funkcja **rekurencyjna** nieefektywna!

Liczby Fibonacciego

Rozwiązanie nierekurencyjne:

- Utwórz tablicę int f[];
- „zapamiętuj” wartości F_i w f[i];
- użyj f[i-1] i f[i-2] obliczając F_i.

```
#define MaxN 1000

long fib1(int n)
{ long f[MaxN];
  f[0]=f[1]=1;
  for (i=2; i<=n; i++)
   f[i] = f[i-1]+f[i-2];
  return f[n];
}
```

```
MaxN=1000

def fib1(n):
    f=Array(MaxN)
    f[0]=1
    f[1]=1
    for i in range(2,n+1):
      f[i] = f[i-1]+f[i-2]
    return f[n]
```

Liczby Fibonacciego

Rozwiązanie nierekurencyjne:

- Czas: O(n)
- Pamięć: O(n)

```
#define MaxN 1000

long fib1(int n)
{ long f[MaxN];
  f[0]=f[1]=1;
  for (i=2; i<=n; i++)
   f[i] = f[i-1]+f[i-2];
  return f[n];
}
```

```
MaxN=1000

def fib1(n):
    f=Array(MaxN)
    f[0]=1
    f[1]=1
    for i in range(2,n+1):
      f[i] = f[i-1]+f[i-2]
    return f[n]
```

Pyt.: jak zmniejszyć wymagania pamięciowe?
ćwiczenia…

Liczby Fibonacciego - podsumowanie

- Rekurencja w oparciu o definicję ciągu: czas obliczenia F_n proporcjonalny do (co najmniej) wartości F_n.
- Iteracja ze spamiętywaniem wartości:
  - czas O(n)
  - czyli dużo(!) szybciej niż rekurencyjnie
- **Pyt.**: Czy można jeszcze szybciej?

  Odp.: Tak, wykorzystując szybkie potęgowanie… dla iloczynu macierzy

Współczynnik dwumianowy

Współczynnik dwumianowy

Definicja:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Algorytm „naiwny”:

```
int newton(int n, int m)
{
  return sil(n)/(sil(m)*sil(n-m));
}
```

```
def newton(n, m):
  return sil(n)/(sil(m)*sil(n-m))
```

Wady:

- Duże liczby w trakcie obliczeń (zakres?).
- Powtarzanie obliczeń (np. (n-m)! jest „pośrednim wynikiem” przy wyliczaniu n!).

Współczynnik dwumianowy

Fakt (trójkąt Pascala)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} \text{ dla } n, m > 0, m < n$$

Funkcja rekurencyjna

```
long newton(int n, int m)
{ if ((m==0) || (m==n)) return 1;
  else return newton(n-1,m-1)+newton(n-1,m);
}
```

```
def newton(n, m):
    if m==0 or m==n:
        return 1
    else:
        return newton(n-1,m-1)+newton(n-1,m)
```

Współczynnik dwumianowy

Rekurencyjnie:

```
long newton(int n, int m)
{ if ((m==0) || (m==n)) return 1;
  else return newton(n-1,m-1)+newton(n-1,m);
}
```

```
def newton(n, m):
    if m==0 or m==n:
        return 1
    else:
        return newton(n-1,m-1)+newton(n-1,m)
```

Złożoność czasowa: proporcjonalna do wartości funkcji

Wniosek: rozwiązanie **rekurencyjne** jest bardzo **niewydajne**!

Dlaczego? Wielokrotne powtarzanie „tych samych" obliczeń!

Współczynnik dwumianowy bez rekurencji

Wykorzystamy zależność:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} \text{ dla } n, m > 0$$

Wartości przechowujemy w tablicy dwuwymiarowej:

$$\binom{i}{j} = a[i][j]$$

Współczynnik dwumianowy bez rekurencji

Algorytm:

- umieść jedynki w pierwszej kolumnie i na głównej przekątnej
- Wypełniaj pozostałe komórki od góry w dół, od lewej do prawej (jak w trójkącie Pascala).

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	

Wsp. dwumian. nierekur. – v. 1

```
long newton(int n, int m)
{ int a[n+1][n+1];
  int i, j;

  a[0][0]=1;
  for (i=1; i<=n; i++)
  { a[i][0]=1;
     for (j=1; j<i; j++)
       a[i][j]=a[i-1][j-1]+a[i-1][j];
     a[i][i]=1;
  }
  return a[n][m];
}
```

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	

Złożoność:

- Czas: O($n \cdot n$)
- Pamięć: O($n \cdot n$)

Wsp. dwumian. nierekur. – v. 1

```
def newton3(n, m):
    a=Array(n+1,n+1)
    a[0][0]=1
    for i in range(1,n+1):
        a[i][0]=1
        for j in range(1,i):
            a[i][j]=a[i-1][j-1]+a[i-1][j]
        a[i][i]=1
    return a[n][m]
```

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	

Złożoność:

•Czas: O($n \cdot n$)

•Pamięć: O($n \cdot n$)

Wsp. dwumian. nierekur. – v. 2

Jak zmniejszyć pamięć?

Obserwacja

Wartości w i-tym wierszu zależą jedynie od wartości w wierszu $i - 1$:

$$a[i][j] = a[i-1][j-1]+a[i-1][j]$$

Rozwiązanie

Przechowuj tylko dwa wiersze:

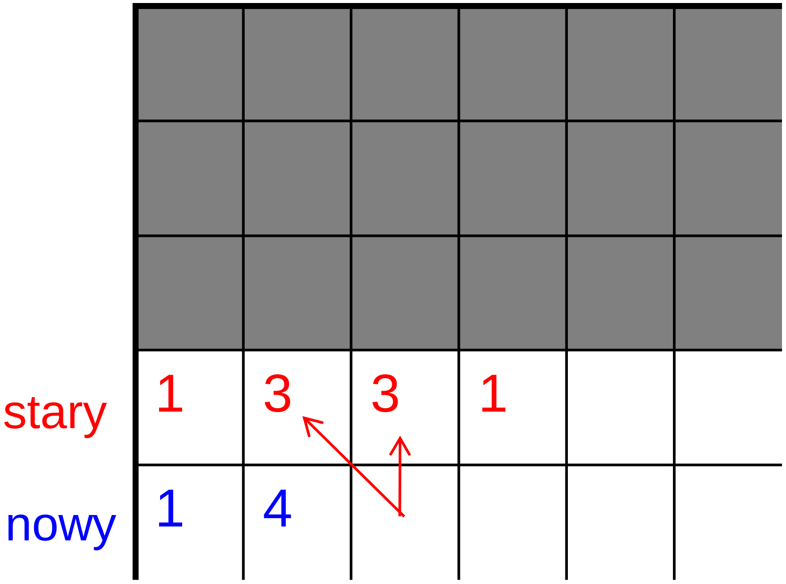
- bieżący;
- poprzedni.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	

Wsp. dwumian. nierekur. – v. 2

```
long newton(int n, int m)
{    int i, j;
     long stary[n+1],nowy[n+1];

     stary[0]=1;
     for (i=0;i<n;i++)
     {   nowy[0]=1;
         for (j=1; j<=i; j++)
             nowy[j]=stary[j-1]+stary[j];
         nowy[i+1]=1;
         for (j=0;j<=i+1;j++)
          { stary[j]=nowy[j];
             nowy[j]=0;
          }
     }
     return(stary[m]);
}
```



Wsp. dwumian. nierekur. – v. 2

```
long newton(int n, int m)
{   int i, j;
    long stary[n+1],nowy[n+1];

    stary[0]=1;
    for (i=0;i<n;i++)
    {  nowy[0]=1;
       for (j=1; j<=i; j++)
         nowy[j]=stary[j-1]+stary[j];
       nowy[i+1]=1;
       for (j=0;j<=i+1;j++)
        { stary[j]=nowy[j];
          nowy[j]=0;
        }
    }
    return(stary[m]);
}
```

Uwagi:

- nowy[0]=1 wystarczy raz
- wypełnianie nowy zerami nie jest konieczne

Wsp. dwumian. nierekur. – v. 2

```
def newton4(n, m):
    stary=Array(n+1)
    nowy=Array(n+1)

    stary[0]=1
    for i in range(0,n):
        nowy[0]=1
        for j in range(1,i+1):
            nowy[j]=stary[j-1]+stary[j]
        nowy[i+1]=1
        for j in range(i+2):
            stary[j]=nowy[j]
            nowy[j]=0
    return stary[m]
```

Uwagi:

- nowy[0]=1 wystarczy raz
- wypełnianie nowy zerami nie jest konieczne

Wsp. dwumian. nierekur. – v. 2

```
long newton(int n, int m)
{   int i, j;
    long stary[n+1],nowy[n+1];
    nowy[0]=1;
    stary[0]=1;
    for (i=0;i<n;i++)
    {  nowy[0]=1;
       for (j=1; j<=i; j++)
         nowy[j]=stary[j-1]+stary[j];
       nowy[i+1]=1;
       for (j=0;j<=i+1;j++)
        { stary[j]=nowy[j];
          nowy[j]=0;
        }
    }
    return(stary[m]);
}
```

Uwagi:

- nowy[0]=1 wystarczy raz
- wypełnianie nowy zerami nie jest konieczne

Wsp. dwumian. nierekur. – v. 2.1

```
long newton(int n, int m)
{  int i, j;
   long stary[n+1],nowy[n+1];
   stary[0]=1;
   nowy[0]=1;
   for (i=0;i<n;i++)
   {
    for (j=1; j<=i; j++)  nowy[j]=stary[j-1]+stary[j];
    nowy[i+1]=1;
    for (j=1;j<=i+1;j++)  stary[j]=nowy[j];
   }
   return(nowy[m]);
}
```

Uwaga

Zamiana wartości tablic stary i nowy jest czasochłonna.

Obserwacja

Do policzenia nowy[j] potrzebujemy tylko stary[j] i stary[j-1].

Wsp. dwumian. nierekur. – v. 2.1

Uwaga

Zamiana wartości tablic stary i nowy jest czasochłonna.

Obserwacja

Do policzenia nowy[j] potrzebujemy tylko stary[j] i stary[j-1].

Rozwiązanie

Używaj jednej tablicy, obliczaj wartości „od prawej do lewej”.

Dwie tablice

stary	1	5	10	10	5	1	
nowy	1	6	15				

stary	1	5	10	10	5	1	
nowy	1	6	15	20			

Jedna tablica

1	5	10	10			
				15	6	1

1	5	10				
			20	15	6	1

Wsp. dwumian. nierekur. – v. 3

Nowe rozwiązanie – przykład

1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
1	4	6	4	5	1	0	0	0	0
1	4	6	10	5	1	0	0	0	0
1	4	10	10	5	1	0	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0	0	0

Wsp. dwumian. nierekur. – v. 3

```
long newton(int n, int m)
{   int i, j;
     long nowy[m+1];

     nowy[0]=1;
     for (i=0;i<n;i++)
     {
          nowy[i+1]=1;
          for (j=i; j>0; j--)
             nowy[j]=nowy[j-1]+nowy[j];
     }
   return(nowy[m]);
}
```

Złożoność:

•Czas: O($n \cdot n$) [łatwo poprawić do O($n \cdot m$); jak???]

•Pamięć: O(m) [dynamicznie deklarowany rozmiar tablicy…]

Wsp. dwumian. nierekur. – v. 3

Obserwacja:

Wyznaczanie wartości w kolumnach m+1, m+2, … niekonieczne

```
long newton(int n, int m)
{   int i, j, maxc;
    long nowy[m+1];

    nowy[0]=1;
    for (i=0;i<n;i++)
    {   if (i<m) nowy[i+1]=1;
        maxc = i>m ? m : i;
        for (j=maxc; j>0; j--)
            nowy[j]=nowy[j-1]+nowy[j];
    }
  return(nowy[m]);
}
```

- Czas: O($n \cdot m$)
- Pamięć: O(m)

Wsp. dwumian. nierekur. – v. 3

Obserwacja:

Wyznaczanie wartości w kolumnach m+1, m+2, … niekonieczne

```
def newton(n, m):
    nowy=Array(m+1)
    nowy[0]=1
    for i in range(0,n):
        if i<m:
            nowy[i+1]=1
        if  i>m:
            maxc = m
        else:
            maxc = i
        j=maxc
        while j>0:
            nowy[j]=nowy[j-1]+nowy[j]
            j=j-1
    return nowy[m]
```

- Czas: $O(n \cdot m)$
- Pamięć: $O(m)$

Podsumowanie

1. Rekurencja:
   - wygodne narzędzie do zapisywania algorytmów wykorzystujących zależności rekurencyjne
   - unikać, gdy wymaga wielokrotnego powtarzania obliczeń
2. Programowanie dynamiczne jako alternatywa dla nieefektywnej rekurencji:
   - spamiętywanie wyników dla mniejszych wartości argumentów
   - Wykorzystanie „spamiętanych” wartości zamiast wywołań rekurencyjnych