physics-1st

chapter-6
মহাকর্ষ ও অভিকর্ষ
Gravitation & Gravity

Topic: 01: Basic Introduction

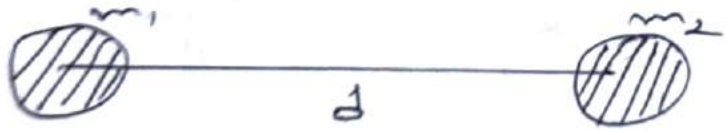
* এ মহাবিশ্বের প্রতিটি বস্তুকণা একে অপরকে নিজের দিকে আকর্ষণ করে, এ আকর্ষণজনিত ঘটনাকে মহাকর্ষ বলা হয়।

* আকর্ষণরত বস্তু সমূহের মধ্যে একটি যদি হয় পৃথিবী তবে তাকে অভিকর্ষ বলে।

* মহাকর্ষজনিত কারণে যে বল অনুভূত হয় তাকে মহাকর্ষীয় বল বলে।

* নিউটনের মহাকর্ষীয় সূত্র: (Newton's law of gravitation)

এ মহাবিশ্বের প্রতিটি বস্তুকণা একে অপরকে নিজের দিকে আকর্ষণ করে, এ আকর্ষণ বলের মান বস্তুদ্বয়ের ভরের গুণফলের সমানুপাতিক এবং মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক, এই বল বস্তুদ্বয়ের ভরকেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করে।



$$F \propto m_1 m_2 \quad \text{—(i)}$$

$$F \propto \frac{1}{d^2} \quad \text{—(ii)}$$

(i) & (ii), $F \propto \frac{m_1 m_2}{d^2}$

$$\Rightarrow F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

G → মহাকর্ষীয় ধ্রুবক ($6.673 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$)

★ মহাকর্ষীয় ধ্রুবক G এর মান মাধ্যমের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে না। তাই একে সার্বজনীন ধ্রুবক বলা হয়।

$\downarrow$

(Newtonian Limit) এর মাধ্যমে দেখানো যায়।

*** মহাকর্ষীয় সূত্রের ভেক্টর রূপ:**

$$F = G.\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

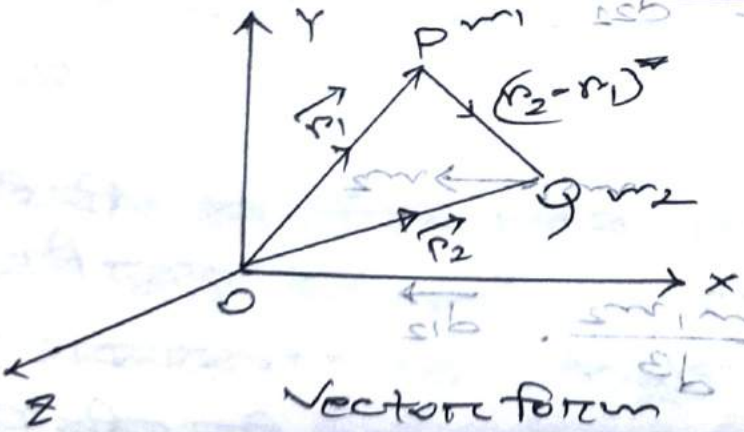
$$\Rightarrow F.|\hat{F}| = G.\frac{m_1 m_2}{d^2}|\hat{d}|$$

মান এক, তাই এভাবে লিখা যায়।

$$\Rightarrow \cancel{F}.\frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} = G.\frac{m_1 m_2}{d^2}\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = G.\frac{m_1 m_2}{d^3}.\vec{d}} \qquad \boxed{\vec{F} = G.\frac{m_1 m_2}{|\vec{d}|^3}.\vec{d}}$$

*** ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় মহাকর্ষীয় সূত্র:**



$$\boxed{F = G.\frac{m_1 m_2}{|r_2 - r_1|^2}}$$

Vector form

$$\boxed{\vec{F} = G.\frac{m_1 m_2}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3}(\vec{r_2} - \vec{r_1})}$$

* ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় 4 kg ও 6 kg ভরের দুটি বস্তুর অবস্থান যথাক্রমে (1,2,3) ও (7,8,9) বস্তুদ্বয়ের মধ্যে ক্রিয়াশীল মহাকর্ষীয় বল নির্ণয় কর।

<u>উঃ</u>

$$\vec{F} = G \cdot \frac{4\times 6}{\{\sqrt{6^2+6^2+6^2}\}^2} \cancel{(6\hat{i}+6\hat{j}+6\hat{k})}$$

: [illegible]

$$= 1.48\times10^{-11}\ N$$

special-observation-1:

$$|\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}|$$

This is a fact

case:01: $m_1 > m_2$

$$m_1 \longleftarrow m_2$$

গুরুত্বপূর্ণ

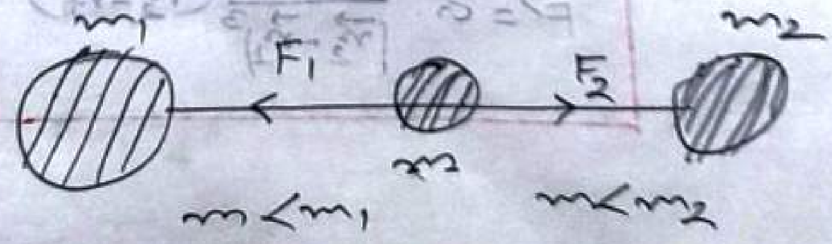
: [illegible]

$$\vec{F}_{21} = G\cdot\frac{m_1 m_2}{d^3}\cdot\vec{d}_{21}$$

case:02: $m_1 < m_2$ $\quad m_1 \longrightarrow m_2$

$$\vec{F}_{12} = G\cdot\frac{m_1 m_2}{d^3}\cdot\vec{d}_{12}$$

special observation:-2:



$m < m_1$ $\qquad$ $m < m_2$

case:01: $F_1 > F_2$ হয়,

m ভরের বস্তুটি m_1 এর দিকে গতিশীল হবে।
যেক্ষেত্রে ত্বরণ,
$$\boxed{a = \frac{F_1 - F_2}{m}}$$

case:02: $F_2 > F_1$ হয়,

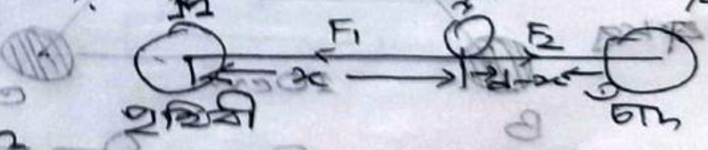
m ভরের বস্তুটি m_2 এর দিকে গতিশীল হবে।
যেক্ষেত্রে ত্বরণ,
$$\boxed{a = \frac{F_2 - F_1}{m}}$$

case:03: $F_1 = F_2$ হলে, → যেটা আর্টিকেলে বিবেচিত হবে
Neutral point always

m_1 ও m_2 এর বস্তুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার উপরস্থ কোনো বিন্দুতে স্থির থাকবে। বস্তুটি যে বিন্দুতে স্থির থাকবে, তাকে নিরপেক্ষ বিন্দু (Neutral point) বলা হয়।

* পৃথিবীর ভর চাঁদের ভরের 49 গুণ এবং এদের কেন্দ্রের মধ্যবর্তী দূরত্ব 40×10^4 km হলে, এদের সংযোজককারী সরলরেখার কোন বিন্দুতে কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল লব্ধিবল 0 হবে?

উ: চাঁদের ভর, m



পৃথিবীর ভর = 49m

3.5×10^8 m

$F_{m1} = F_{m2}$

$$\Rightarrow \frac{m\times 49m}{x^2} = \frac{m\times 49m}{(40\times10^4 - x)^2} \Rightarrow \left(\frac{40\times10^4 - x}{x}\right)^2 = 49$$

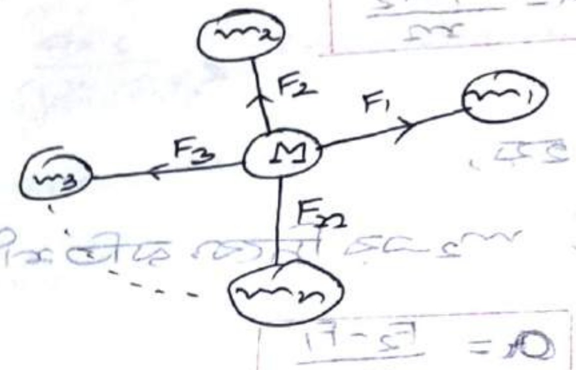
$\Rightarrow 40\times10^4 - x = 7x$

$\Rightarrow \cancel{7x + x = 40\times10^4}$

$\Rightarrow 8x = \frac{40\times10^4}{8}$

* নিউটনের মহাকর্ষীয় সূত্রের সীমাবদ্ধতা (Limitation of Law of Gravitation)

* একই সময়ে শুধুমাত্র দুইটি বস্তুর মধ্যেই ক্রিয়াশীল বল নির্ণয় করা যায়।

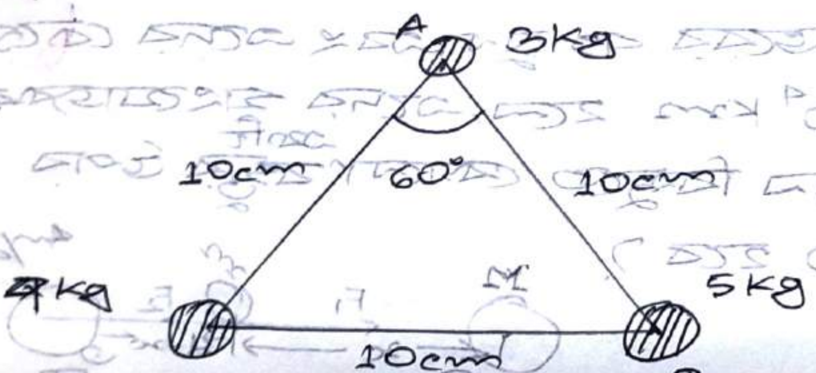


$$\vec{F_R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \dots\dots + \vec{F_n}$$

$$\therefore \boxed{\vec{F_R} = \sum_{i=1}^{n} F_i}$$

$n=2$ $\quad \vec{F_R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

$$\therefore F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} \quad (\vec{F_1} \wedge \vec{F_2} = \alpha)$$



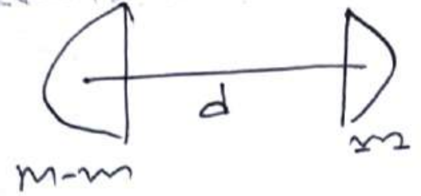
*চিত্রে, A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল লব্ধি মহাকর্ষ বল নির্ণয়

বস্তুটির উপর

* একটি সুষম ঘনকের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, ঘনকটির প্রতিটি শীর্ষে 1kg ভরের বস্তু স্থাপন করা হলো, যেকোনো শীর্ষে অবস্থানরত ভরের উপর অন্য ৭টি ভর দ্বারা সৃষ্ট লব্ধি মহাকর্ষীয় বল নির্ণয় কর। →20

* M ভরের একটি নিরেট গোলককে কেটে m ও (M-m) ভরের দুইটি টুকরায় পরিণত করা হলো। যদি টুকরা দুইটির মধ্যে ক্রিয়াশীল মহাকর্ষীয় বল সর্বোচ্চ হয়, তবে $\frac{m}{M}$ এর মান বের কর।

উঃ



$$F = G.\frac{(M-m)m}{d^2}$$

$$\Rightarrow F = G.\frac{(Mm-m^2)}{d^2}$$

এখানে, $(Mm-m^2)$ সর্বোচ্চ হলে F সর্বোচ্চ হবে।

$$\therefore \frac{d}{dm}(Mm-m^2)=0$$

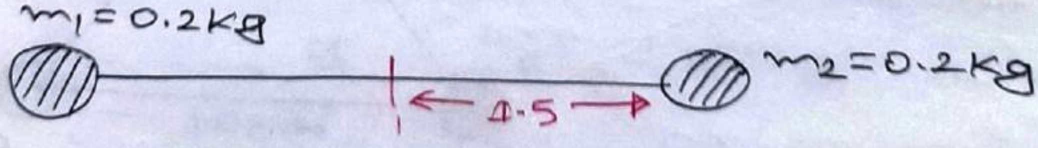
$$\Rightarrow M-2m=0$$

$$\Rightarrow M=2m$$

$$\Rightarrow \frac{m}{M}=\frac{1}{2}$$

*200gm ভরের দুটি বস্তু পরস্পর হতে 3m দূরে অবস্থিত। মহাকর্ষীয় বলের প্রভাবে বস্তুদ্বয় কতদিন পর পরস্পর এর মিলিত হবে? (ঘর্ষণ বল উপেক্ষণীয়)

উঃ



$$F = G.\frac{m_1m_2}{d^2}$$

$$\therefore F = (6.673\times10^{-11})\frac{(0.2)^2}{3^2}$$

$$\therefore = 2.966\times10^{-13} N$$

$$\approx 3\times10^{-3} N$$

$a_1 = a_2 = \frac{3\times10^{-13}}{0.2} = 1.5\times10^{-12}\ ms^{-2}$

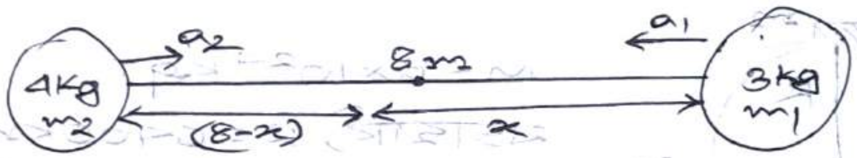
দূরত্ব মিলিত হবে।

$1.5 = \frac{1}{2} a_1 t^2$

$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{3}{a_1}} = \sqrt{\frac{3}{1.5\times10^{-12}}} = 16.4$ days.

* ৭kg ভরের একটি বস্তু হঠাৎ বিস্ফোরিত হয়ে 3:4 অনুপাতে দুইটি টুকরায় বিভক্ত হলো, পরস্পর হতে 8m দূরত্বে গিয়ে পড়ল, মহাকর্ষীয় বলের প্রভাবে টুকরা দুইটি পরস্পর এর কত দিন পর মিলিত হবে? (মহাকর্ষ ধ্রুবক

উ:



এখানে, $m_2 > m_1$

∴ m_1 ভরের বস্তুর ত্বরণ বেশি হবে এবং m_2 ভরের ত্বরণ কম।

মনেকরি, m_1 হতে x দূরত্বে বস্তুদ্বয় মিলিত হবে।

এখন, $F = G\cdot\frac{m_1 m_2}{8^2} = 1.25\times10^{-11}$ N.

m_1 বস্তুর জন্য, $a_1 = \frac{1.25\times10^{-11}}{3} = 4.171\times10^{-12}\ ms^{-2}$

m_2 বস্তুর জন্য, $a_2 = \frac{1.25\times10^{-11}}{4} = 3.125\times10^{-12}\ ms^{-2}$

মনেকরি, t সময় পরে বস্তুদ্বয় মিলিত হবে।

$x = \frac{1}{2}\times a_1\times t^2$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\times 4.171\times10^{-12}\times t^2$

$\Rightarrow x = 2.0855\times10^{-12} t^2$ — (i)

আবার,

$8-x = \frac{1}{2}\times a_2\times t^2$

$\Rightarrow 8-x = \frac{1}{2}\times 3.125\times10^{-12}\times t^2$

$\Rightarrow 8 = \left(\frac{1}{2}\times 3.125\times10^{-12}\times t^2\right) + x$

$1.5625\times10^{-12} t^2 + 2.0855\times10^{-12} t^2$

Topic: 02: অভিকর্ষজ ত্বরণ ও এর রাশিমালা (Acceleration due to gravity)

⊞ ওজন (Weight): (w): কোনো বস্তুকে পৃথিবী যে বলে আকর্ষণ করে তাকে ঐ বস্তুর ওজন হয়।

$$\boxed{W = mg}$$

→ অভিকর্ষজ ত্বরণ

⊞ অভিকর্ষজ ত্বরণের রাশিমালা:

$M = 6\times10^{24}\ kg$

ব্যাসার্ধ, $R = 6400\ km$
$= 6.4\times10^{6}\ m$

এখানে, $F = G\cdot\frac{Mm}{R^2}$ —(i)

আবার, বস্তুর ওজন, $w = mg$ —(ii)

$\therefore w = F$

$\Rightarrow mg = G\frac{mM}{R^2}$

$\Rightarrow \boxed{g = \frac{GM}{R^2}}$ → পৃথিবীর পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ

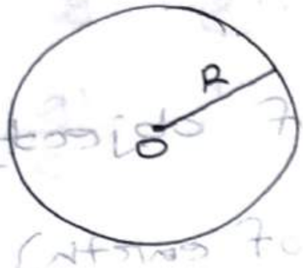
* অভিকর্ষজ ত্বরণ বস্তুর ভরের উপর নির্ভর করে না। *

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6.673\times10^{-11}\times6\times10^{24}}{(6.4\times10^{6})^2}$$

$= 9.775\ ms^{-2}$

$\approx 9.8\ ms^{-2}$

* পৃথিবীর ঘনত্বের সাপেক্ষে অভিকর্ষজ ত্বরণ।



পৃথিবীর ঘনত্ব বা গড় ঘনত্ব $= \rho$

" আয়তন $= V = \frac{4}{3}\pi R^3$

" ভর $= M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{G \cdot \frac{4}{3}\rho\pi R^3}{R^2}$$

$$\therefore \boxed{g = \frac{4}{3} G\pi\rho R}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{3g}{4G\pi R}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{3\times 9.8}{4\times 6.673\times 10^{-11}\times 3.1416\times 6.4\times 10^{6}}$$

$$= 5478.17\ kgm^{-3}$$

$$\boxed{\rho = 5.478\times 10^{3}\ kgm^{-3}}$$

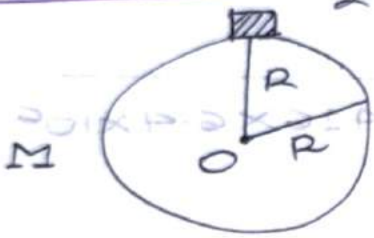
Topic: 03: "g" এর মানের পরিবর্তন

* তিনটি ~~কারণের~~ বৈশিষ্ট্য / Three reasons:

- → বস্তুর অবস্থান (Position of object)
- → পৃথিবীর আকার (Shape of earth)
- → পৃথিবীর নিজ অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণন বা আহ্নিক গতি। (Diurnal rotation of earth)

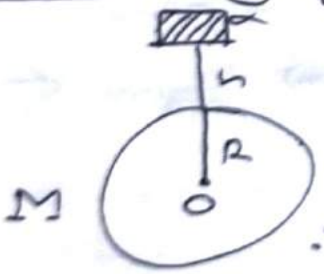
case: 01:

বস্তুর অবস্থান: বস্তু যখন ভূ-পৃষ্ঠে।



$$\boxed{g = \frac{GM}{R^2}} \text{ or } \boxed{g = \frac{4}{3} G \pi \rho R}$$

case: 02: বস্তু ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায়,



$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \text{—(i)}$$

∴ h উচ্চতায়, $g' = \frac{GM}{(R+h)^2}$ —(ii)

(ii) ÷ (i) করে,

$$\frac{g'}{g} = \frac{\frac{GM}{(R+h)^2}}{\frac{GM}{R^2}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{g'}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}} \quad ***$$

Actual form

$$\frac{g'}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

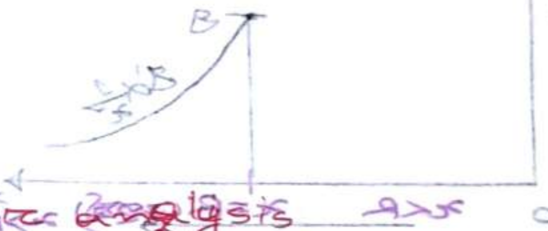
$$(1+x)^{-2} = 1-2x+3x^2-4x^3+5x^3 \ldots \pm nx^{n-1} \ldots \infty$$

$$\Rightarrow \frac{g'}{g} = \frac{1}{\left(\frac{R+h}{R}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{g'}{g} = \left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{g'}{g} = 1 - 2\frac{h}{R} + \frac{3h}{R} \times \frac{h}{R} - 4\left(\frac{h}{R}\right)^3 + \ldots\ldots \infty$$

এখানে, $h << R$, $0 < \frac{h}{R} < 1$ তাই উচ্চতর ঘাত সমূহকে উপেক্ষা করতে পারি,



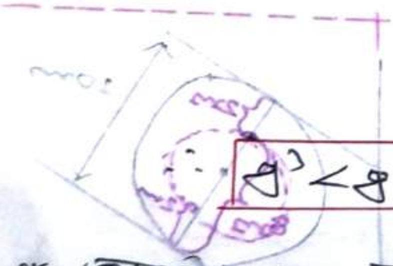
$$\boxed{\frac{g'}{g} = \left(1 - \frac{2h}{R}\right)}$$

$$\Rightarrow g' = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

এখানে, $h << R$, * $0 < \frac{h}{R} < 1$

$$\therefore 0 < \frac{2h}{R} < 1$$

$$\therefore 0 < 1 - \frac{2h}{R} < 1$$



$$\boxed{g' < g}$$

* অর্থাৎ, ভূপৃষ্ঠ হতে যত উপরে উঠা যাবে g এর মান তত কমতে থাকবে।

$$\frac{g'}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

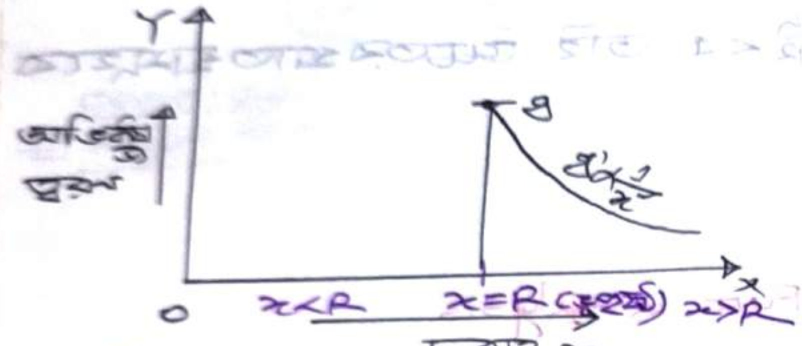
$$\Rightarrow g' = \frac{gR^2}{(R+h)^2} \rightarrow \text{const}$$

$g' \rightarrow Y$, $(R+h) \rightarrow x$

$$\Rightarrow Y = \frac{\text{const}}{x^2}$$

$$\Rightarrow Yx^2 = \text{const} \longrightarrow \text{(equation of hyperbola)}$$

(অধিবৃত্ত)



$x=0$
center

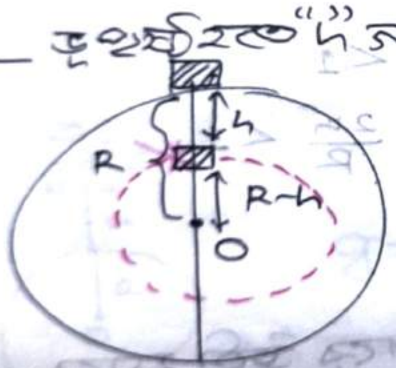
$x = R$

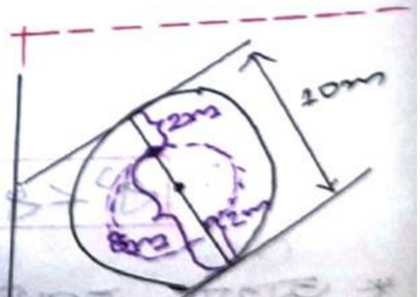
$\therefore R+h = R$

$\therefore h = 0$

$$g' = \frac{gR^2}{R^2} = g$$

Case:03: ভূপৃষ্ঠ হতে "h" গভীরতায় বস্তু:



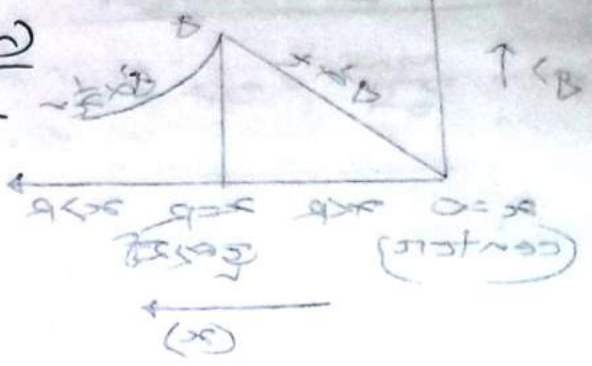


$8m - 2m$
$= 6m + 2m - 2m$
$= 6m$

ভূপৃষ্ঠে: $g = \frac{4}{3}\pi G\rho R$ —(i)

h গভীরতায়: $g' = \frac{4}{3}\pi G\rho(R-h)$ —(ii) (ii÷i) হতে,

$$\frac{g'}{g} = \frac{\frac{4}{3} G\pi\rho (R-h)}{\frac{4}{3} G\pi\rho R}$$



$$\Rightarrow \frac{g'}{g} = 1 - \frac{h}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{g' = \left(1 - \frac{h}{R}\right) g}$$

$R >> h$, $0 < \frac{h}{R} < 1$

$$\Rightarrow 0 < \left(1 - \frac{h}{R}\right) < 1$$

$$\therefore \boxed{g' < g}$$

কেন্দ্রে, $h = R$

$$\boxed{g' = 0}$$

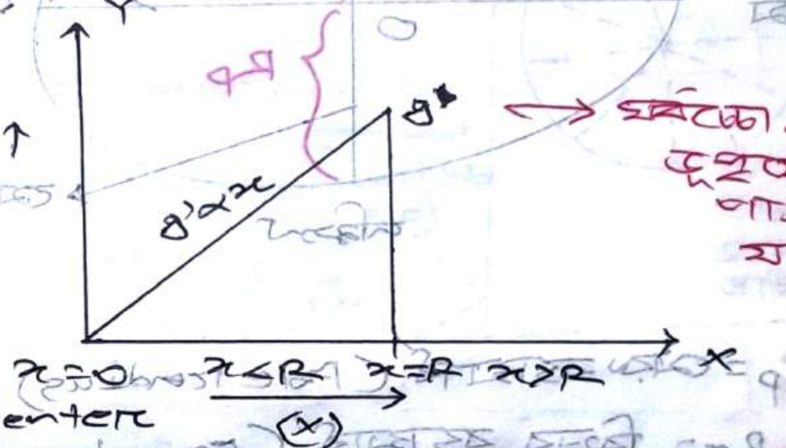
*

$$\Rightarrow g' = g\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

$$\Rightarrow g' = \frac{g}{R}(R-h)$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

$Y = m x$



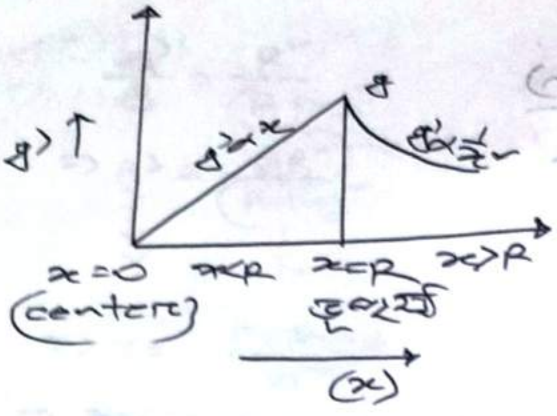
g^* ⟷ সর্বোচ্চ মান ভূপৃষ্ঠে পাওয়া যায়।

if, $x = R$

$\Rightarrow R - h = R$

$\Rightarrow h = 0$

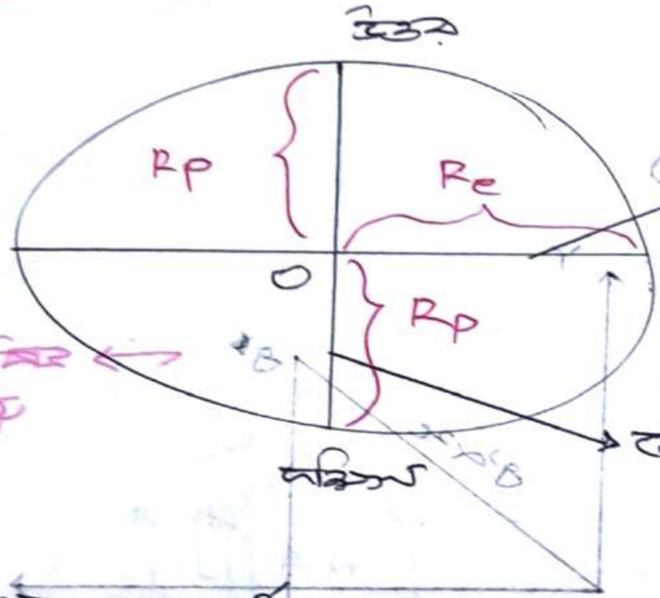
$$\therefore \boxed{g' = g}$$



⟹ (inverse square law)

পৃথিবীর আকার:

Elipsoid condition
(উপবৃত্ত কিছু ডিম)



বিষুব রেখা বা নিরক্ষ রেখা (Equator Line)

মেরু রেখা (Pole line)

কমলা লেবুর
উপবৃত্ত
মতো
। হবে

R_p = মেরু ব্যাসার্ধ (Pole radius)

R_e = বিষুব ব্যাসার্ধ (Equator radius)

$$\boxed{R_e = R_p + 22\,km}$$

$\therefore R_e > R_p$

মেরুতে:

$$g_p = \frac{GM}{R_p^2} \quad \text{—(i)}$$

বিষুবীয় অঞ্চলে:—

$$g_e = \frac{GM}{R_e^2} \quad \text{—(ii)}$$

(i) ÷ (ii)

$$\frac{g_p}{g_e} = \frac{\frac{GM}{R_p^2}}{\frac{GM}{R_e^2}}$$

$$\frac{g_p}{g_e} = \frac{R_e^2}{R_p^2}$$

এখানে, $R_e > R_p$

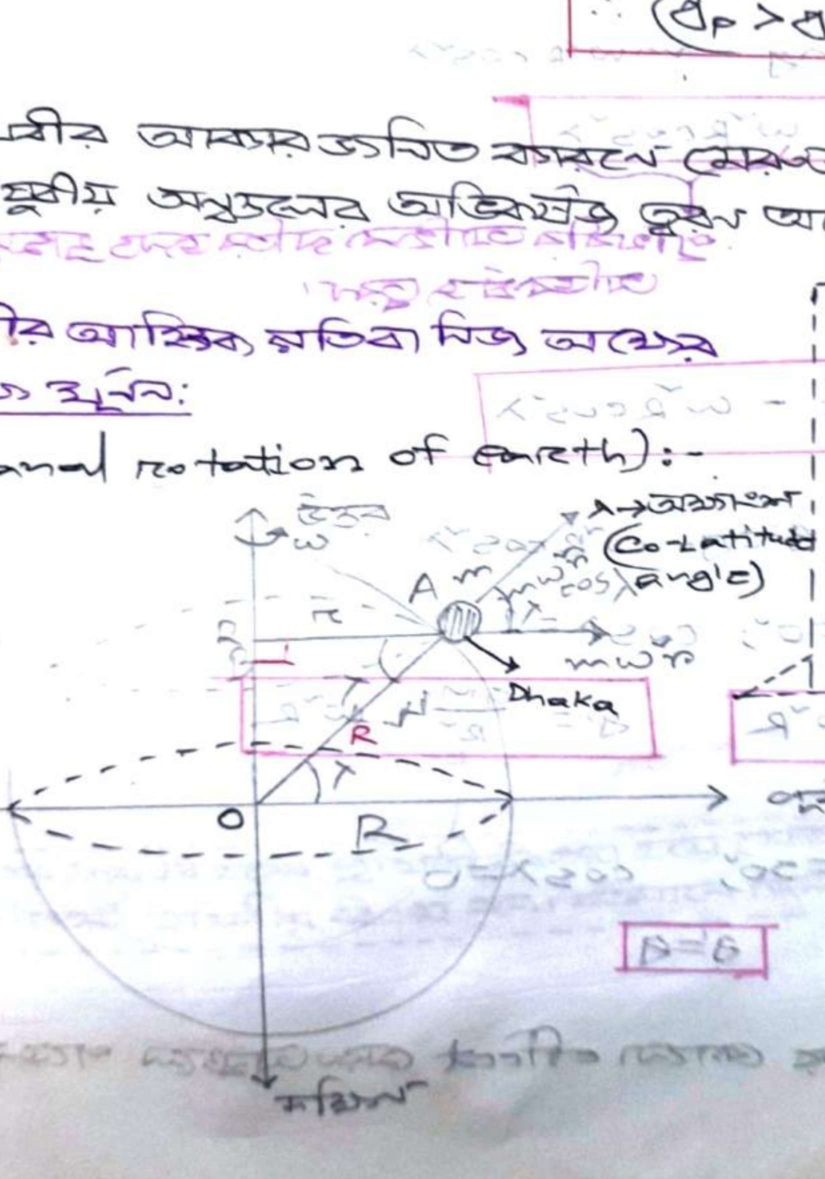
$$\therefore \boxed{(g_p > g_e)}$$

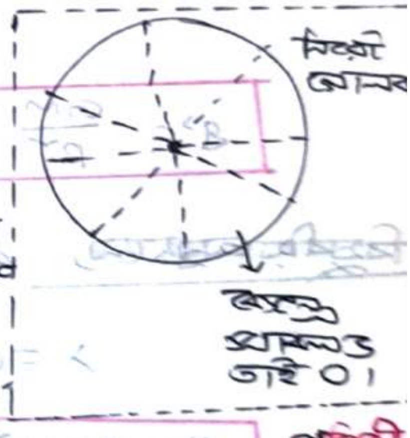
∴ পৃথিবীর আকার জনিত কারণে মেরু অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ বিষুবীয় অঞ্চলের অভিকর্ষজ ত্বরণ অপেক্ষা বেশি।

ঘ. পৃথিবীর আহ্নিক গতি বা নিজ অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণন:

(Diurnal rotation of earth):-

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7.27 \times 10^{-5}\ \text{rad s}^{-1}$$





পৃথিবী নিজ অক্ষের সাপেক্ষে Anticlockwise ঘুরে তাই anticlockwise বেশি হয়।

∴ বস্তুর কার্যকরী ওজন,

$$W' = W - m\omega^2 r \cos\lambda$$

$$\Rightarrow W' = W - m\omega^2 (R\cos\lambda)(\cos\lambda)$$

$$\Rightarrow \boxed{W' = W - m\omega^2 R\cos^2\lambda}$$

পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য বস্তুর হ্রাসকৃত ওজন।

ΔAOB,

$\cos\lambda = \frac{r}{R}$

$\Rightarrow r = R\cos\lambda$

$$\Rightarrow mg' = mg - m\omega^2 R\cos^2\lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{g' = g - \omega^2 R\cos^2\lambda}$$

পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য হ্রাসকৃত অভিকর্ষজ ত্বরণ।

$$\boxed{g' = \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R\cos^2\lambda}$$

বিষুবীয় অঞ্চলে, $g' = g - \omega^2 R\cos^2\lambda$

$\lambda = 0°;\ \cos\lambda = 1$

$$\boxed{g' = g - \omega^2 R} \qquad \boxed{g' = \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R}$$

মেরু অঞ্চলে: $\lambda = 90°,\ \cos\lambda = 0$

$$\boxed{g' = g}$$

আহ্নিক গতির কোনো effect মেরু অঞ্চলে পড়েনা।

* $\frac{0^\circ+90^\circ}{2} = 45^\circ$ বিষুবরেখার সাপেক্ষে যে কোন উচ্চতায় করে তাই অক্ষাংশ।

∴ সমুদ্রপৃষ্ঠে 45° অক্ষাংশে g এর মানকে আদর্শ ধরা হয়।

* পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য কৌণিক বেগ, বর্তমান কৌণিক বেগের কত গুণ হলে, বিষুবীয় অঞ্চলে থাকা একটি বস্তু নিজেকে ওজনহীন মনে করবে?

উ: $\cancel{g' = g - \omega^2 R\cos^2\lambda}$

বিষুবীয় অঞ্চলে,

$$\cancel{g'}^{\,0} = g - \omega^2 R$$

$$\cancel{\Rightarrow g = \omega^2 R\cos^2} \qquad \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

ধরি, কৌণিক বেগ n গুণ হলে বস্তু নিজেকে ওজনহীন মনে করবে।

$(g'=0)$, $\omega' = n\omega$

$$0 = g - (n\omega)^2 R$$

$$\Rightarrow n^2 = \frac{g}{\omega^2 R}$$

$$\Rightarrow n = \sqrt{\frac{g}{\omega^2 R}} = \sqrt{\frac{9.8}{(7.27\times10^{-5})^2 \times 6.4\times10^6}}$$

$$= 17.021$$

$$\boxed{n \approx 17}$$

n এর মান 17 হলে পৃথিবী ধ্বংস হয়ে যেত। পৃথিবীর ঘূর্ণন গতির মান বেড়ে গেলেও পৃথিবীর ধ্বংস হবে। বর্তমানে দিন 24 ঘণ্টা থেকে কমে গেছে।

* ঢাকার অক্ষাংশ 23° উত্তর। যদি পৃথিবীর আহ্নিক গতি না থাকত তবে ঢাকায় পৃথিবীর অভিকর্ষজ ত্বরণ শতকরা কত বৃদ্ধি পেত?

উঃ

$$g' = g - \omega^2 R\cos^2\lambda \quad [g' < g]$$

$$\Rightarrow \omega^2 R\cos^2\lambda = \cancel{\omega^2 R\cos^2\lambda}\ g - g'$$

$$\Rightarrow \Delta g = \omega^2 R\cos^2\lambda$$

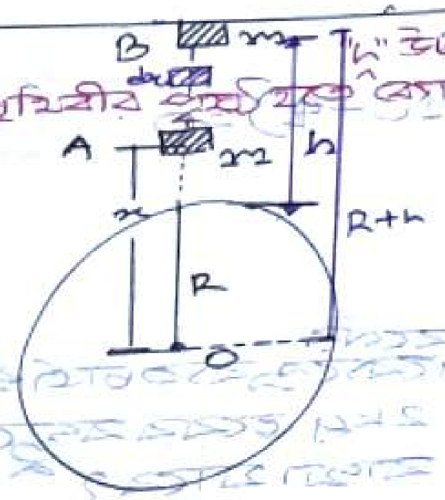
$$\Rightarrow \frac{\Delta g}{g}\times 100\% = \frac{\omega^2 R\cos^2\lambda}{g}\times 100\%$$

$$= \frac{(7.27\times10^{-5})^2\times 6.4\times10^6\times(\cos 23)^2}{9.8}\times 100\%$$

$$= 0.29\%$$

পরবর্তী note khata

Topic: 04: পৃথিবীর পৃষ্ঠ হতে "h" উচ্চতায় কোনো বস্তুকে সরাতে কৃতকাজ:-



পৃথিবীর ভর $= M$

বস্তু যখন 'A' বিন্দুতে, $F = \frac{GMm}{x^2}$

বস্তুটির "dx" সরণে কৃতকাজ,

$$dw = F \cdot dx$$

$$dw = \frac{GMm}{x^2} \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int_0^w dw = GMm \int_R^{(R+h)} \frac{1}{x^2} \cdot dx$$

$$\Rightarrow w = GMm \cdot \left[-\frac{1}{x}\right]_R^{R+h}$$

$$\Rightarrow w = -GMm\left[\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{w = GMm\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right]}$$

$R \rightarrow x_i$, $R+h \rightarrow x_f$

$$\therefore \boxed{w = GMm\left[\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_f}\right]}$$

x_i, x_f → কেন্দ্র হতে দূরত্ব

$$W = GMm\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right]$$

$$= GMm\left[\frac{R+h-R}{R(R+h)}\right]$$

$$= \frac{GMmh}{R(R+h)} \qquad \left[\begin{array}{l} h << R \\ R+h \approx R \end{array}\right]$$

$$= \frac{GMmh}{R \cdot R}$$

$$= m\left(\frac{GM}{R^2}\right) \cdot h$$

$$\boxed{W = mgh}$$

★ <u>পৃথিবীর পৃষ্ঠ হতে "h" উচ্চতায় কোনো বস্তুকে পাতিত বস্তুর নিক্ষিপ্ত বেগ:</u>

পৃথিবীর পৃষ্ঠ হতে "h" উচ্চতায় কোন বস্তুকে নিতে কৃতকাজ,

$$W = GMm\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right]$$

$$\Rightarrow E_K = GMm\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right] \quad [W = E_K]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = GMm\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2GM\left[\frac{1}{\underset{\downarrow\, x_i}{R}} - \frac{1}{\underset{\downarrow\, x_f}{R+h}}\right]}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2GM\left[\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_f}\right]}$$

x_i, x_f → কেন্দ্র হতে দূরত্ব।

v → বস্তুর ভরের উপর নির্ভর করে না।

$$\therefore v = \sqrt{2GM\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right]}$$

$$= \sqrt{2GM\left[\frac{R+h-R}{R(R+h)}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{2GMh}{R(R+h)}} \quad \left[\begin{array}{l} h \ll R \\ R+h \approx R \end{array}\right.$$

$$= \sqrt{\frac{2GMh}{R^2}} = \sqrt{2\left(\frac{GM}{R^2}\right) \cdot R}$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

*m ভরের কোনো বস্তুকে পৃথিবীর ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ উচ্চতায় উঠাতে কৃতকাজ কত?

উঃ $W = GMm\left[\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_f}\right]$

$$x_i = R$$

$$x_f = R + 2R = 3R$$

$$W = GMm\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{3R}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{GMm}{R}$$

$$= \frac{2}{3} m \left(\frac{GM}{R^2}\right) \cdot R$$

$$= \frac{2}{3} mgR$$

$$\therefore W = \frac{2}{3} mgR$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} mv^2 = \frac{2}{3} mgR \Rightarrow v^2 = \frac{4}{3} gR$$

$$\Rightarrow v = 9144.8\ m/s$$

$$= 9.14\ km/s$$

* একটি রকেটকে ভূপৃষ্ঠ থেকে 5 km/s বেগে উল্লম্ব দিকে নিক্ষেপ করা হলো, রকেটটি ভূপৃষ্ঠে ফিরবার মুহূর্তে, পৃথিবীর ভূ-পৃষ্ঠ হতে কত উচ্চতায় থাকবে? ***

এক্ষেত্রে যে মুহূর্তে নিচে নেমে যাবে বা যে উচ্চতায় গিয়ে থেমে নিচে পড়া শুরু করবে!

উঃ

$$v = \sqrt{2GM\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right]}$$

$$\Rightarrow v^2 = 2GM\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} = \frac{v^2}{2GM}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R} - \frac{v^2}{2GM}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R+h} = \frac{1}{6.4\times10^6} - \frac{(5000)^2}{2\times6.673\times10^{-11}\times6\times10^{24}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R+h} = 1.25\times10^{-7}$$

$$\Rightarrow R+h = 7.998\times10^6 \approx 8\times10^6$$

$$\Rightarrow h = (8\times10^6) - R = 8\times10^6 - 6.4\times10^6$$

$$\therefore h = 1.6\times10^6 m$$

Topic: 05: মুক্তিবেগ (Escape velocity):- পৃথিবীর কোনো স্থান হতে যে বেগে কোনো বস্তুকে ছুড়ে দিলে বস্তুটি আর পৃথিবীর ঐ স্থানে ফিরে আসবে না, সে বেগকে ঐ স্থানের মুক্তিবেগ বলা হয়।

পৃথিবীর পৃষ্ঠের মুক্তিবেগ:

আমরা জানি,

$$v=\sqrt{2GM\left[\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_f}\right]}$$

$x_i=R;\quad x_f=\infty$

$v\rightarrow v_e$

$$v_e=\sqrt{2GM\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{\infty}\right]}$$

$$\therefore \boxed{v_e=\sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

$M\rightarrow$ const

$$\boxed{v_e\propto\frac{1}{\sqrt{R}}}$$

$$v_e=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$=\sqrt{2.\frac{GM}{R^2}.R}$$

$\boxed{v_e=\sqrt{2gR}}\rightarrow$ পৃথিবীর পৃষ্ঠের মুক্তিবেগ

$$\therefore v_e=\sqrt{2\times 9.8\times 6.4\times 10^6}$$

$$=11200\ m/s$$

$$\boxed{v_e=11.2\ km/s}$$

* $v=\sqrt{2GM\left[\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_f}\right]}$

$x_i = R+h$, $x_f = \infty$

$v \rightarrow v_e$

$\therefore v_e = \sqrt{2GM\left[\frac{1}{R+h}-\frac{1}{\infty}\right]}$

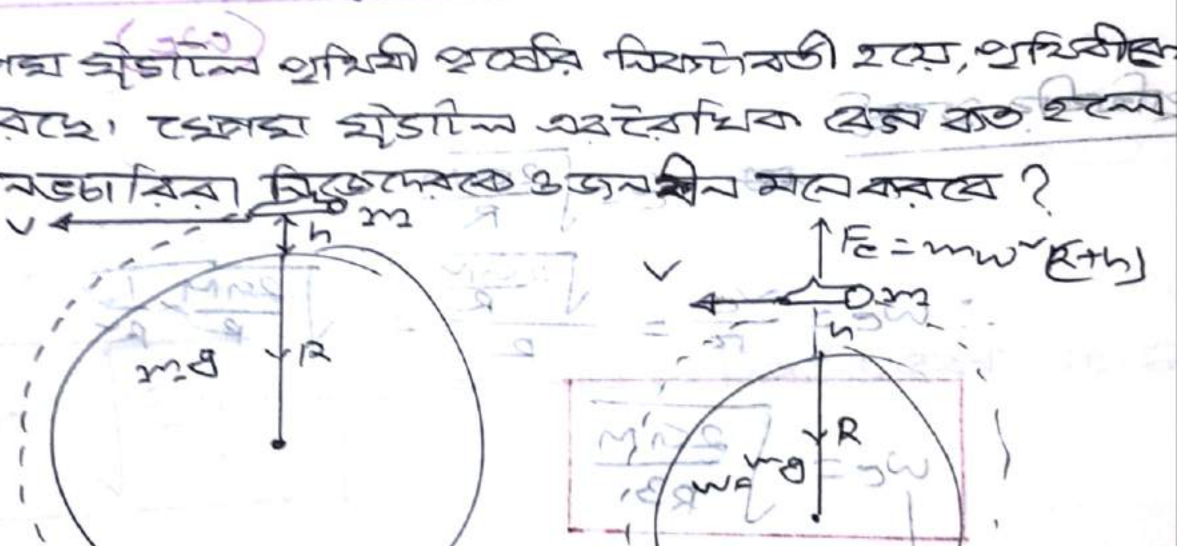
$$\boxed{v_e=\sqrt{\frac{2GM}{R+h}}}$$

$$v_e=\sqrt{2\cdot\left\{\frac{GM}{(R+h)^2}\right\}(R+h)}$$

$$\therefore \boxed{v_e=\sqrt{2g'(R+h)}}$$

"h" উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ g'

* একটি স্পেস স্টেশন পৃথিবী পৃষ্ঠের নিকটবর্তী হয়ে, পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করছে। স্পেস স্টেশন এর রৈখিক বেগ কত হলে এতে থাকা নভোচারীরা নিজেদেরকে ওজনহীন মনে করবে?



ওজনহীন হওয়ার শর্ত,

$$W = F_c$$
$$\Rightarrow mg = m\omega^2(R+h)$$
$$\Rightarrow g = \frac{v^2}{R+h}$$
$$\Rightarrow g = \frac{v^2}{R}$$

$\left[h << R,\ R+h \approx R \right.$

$\sqrt{9.8\times 6.4\times 10^6} = 7919.5$

* পৃথিবী পৃষ্ঠের নিকটবর্তী হয়ে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণরত কোনো বস্তুর বেগ, $\boxed{v = \sqrt{gR}}$

এখানে, পৃথিবীর পৃষ্ঠে মুক্তিবেগ,

$$v_e = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{gR}$$

$$\therefore \boxed{v_e = \sqrt{2}\,v}$$

∴ পৃথিবী পৃষ্ঠের নিকটবর্তী হয়ে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণরত কোনো বস্তুর বেগ √2 গুণ করা হলে, বস্তুটি মুক্তিবেগ লাভ করবে এবং মহাশূন্যে হারিয়ে যাবে।

কৌণিক মুক্তিবেগ (Angular escape velocity): (ω_e)

পৃথিবীর পৃষ্ঠে

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$\therefore \omega_e = \frac{v_e}{r} = \frac{\sqrt{\frac{2GM}{R}}}{R} = \sqrt{\frac{2GM}{R}\times\frac{1}{R^2}}$$

$$\boxed{\omega_e = \sqrt{\frac{2GM}{R^3}}}$$

ভূ-পৃষ্ঠে কৌণিক মুক্তিবেগ।

$$\therefore \omega_e = \sqrt{\frac{2GM}{R^3}}$$

$$= \sqrt{2 \cdot \frac{GM}{R^2} \cdot \frac{1}{R}}$$

$$\boxed{\omega_e = \sqrt{\frac{2g}{R}}}$$

<u>পৃথিবীর পৃষ্ঠ হতে "h" উচ্চতায়:</u>

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}}$$

$$\omega_e = \frac{v_e}{R+h} = \frac{\sqrt{\frac{2GM}{R+h}}}{R+h}$$

$$= \sqrt{\frac{2GM}{R+h} \cdot \frac{1}{(R+h)^2}}$$

$$\therefore \boxed{\omega_e = \sqrt{\frac{2GM}{(R+h)^3}}}$$

$$\therefore \omega_e = \sqrt{2 \cdot \frac{GM}{(R+h)^2} \cdot \frac{1}{R+h}}$$

$$\boxed{\omega_e = \sqrt{\frac{2g'}{R+h}}}$$ → "h" উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ

* পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য কৌণিক বেগ বর্তমান কৌণিক বেগের কত গুণ হলে ভূপৃষ্ঠে থাকা একটি বস্তু মহাশূন্যে হারিয়ে যাবে?

উ: পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400} = 7.27\times10^{-5}\ rad/s$$

পৃথিবীর পৃষ্ঠের কৌণিক মুক্তিবেগ,

$$\omega_e = \sqrt{\frac{2g}{R}} = \sqrt{\frac{2\times9.8}{6.4\times10^{6}}} = 1.75\times10^{-3}\ rad/s$$

$$\therefore n = \frac{\omega_e}{\omega} = \frac{1.75\times10^{-3}}{7.27\times10^{-5}} = 24.07 \approx 24$$

$$\omega_e = 24\times\omega$$

Topic:06: Satellite (উপগ্রহ):

যদি কোনো বস্তু কোনো গ্রহকে নির্দিষ্ট দূরত্ব বজায় রেখে প্রদক্ষিণ করে তবে সে বস্তুকে ঐ গ্রহের উপগ্রহ বলা হয়।

- উপগ্রহ
  - প্রাকৃতিক উপগ্রহ (Natural satellite)
  - কৃত্রিম উপগ্রহ (Artificial satellite)
    - পোলার
    - Geo-satellite ভূস্থির উপগ্রহ

Polar Satellite:

→ low orbit satellite

(PSLV → Rocket)

Geo-stationary satellite: [GSLV — Rocket]

→ High orbit satellite

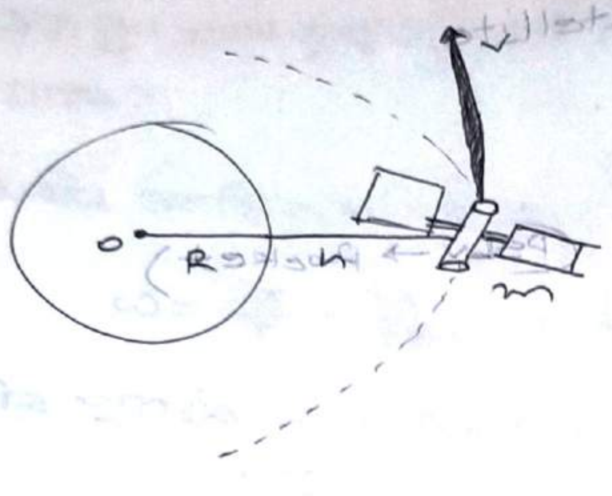
* যে উপগ্রহের পর্যায়কাল পৃথিবীর আহ্নিক গতির পর্যায়কালের সমান অর্থাৎ, 24 hours, তাকে ভূ-স্থির উপগ্রহ বলা হয়।

★ পৃথিবীর পৃষ্ঠ হতে একে স্থির বলে মনে হয়। $\omega_{relative}=0$

পার্কিং উচ্চতা (Parking height): ভূ-পৃষ্ঠ হতে ভূস্থির উপগ্রহের উচ্চতাকে পার্কিং উচ্চতা বলা হয়।

পার্কিং কক্ষপথ (Parking orbit): ভূস্থির উপগ্রহ যে কক্ষপথে অবস্থান করে তাকে পার্কিং কক্ষপথ বলে।

উপগ্রহের বেগ: (v)



$$F_G = F_c$$

$$\Rightarrow \frac{GM\cancel{m}}{(R+h)^2} = \cancel{m}v^2 \times \frac{1}{(R+h)}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R+h}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}}$$ → উপগ্রহের রৈখিক বেগ উপগ্রহের ভর এর উপের নির্ভর করে না।

Special observation:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2GM}{R+h}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2GM}{R+h}}$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v_e$$

v_e → h উচ্চতায় মুক্তিবেগ।

$$\Rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{2}\, v}$$

* নির্দিষ্ট কক্ষপথে থাকা কোনো উপগ্রহের রৈখিক বেগ $\sqrt{2}$ গুণ হলে এটি মহাশূন্যে হারিয়ে যাবে।

উপগ্রহের কৌণিক বেগ (ω)

$$v = \omega (R+h)$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{v}{R+h} = \sqrt{\frac{GM}{R+h} \cdot \frac{1}{(R+h)^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}$$

পর্যায়কাল

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}}$$

ভূ-পৃষ্ঠ হতে উচ্চতা: (h)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}$$

$$\Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{(R+h)^3}{GM}$$

$$\Rightarrow (R+h)^3 = \frac{T^2 GM}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow (R+h) = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \left(\frac{T^2 GM}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R}$$

ভূ-স্থির উপগ্রহ:

$T = 24h = 86400\ sec$

$$h = \left(\frac{T^2 GM}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R$$

$$\therefore h = \left\{\frac{(86400)^2 \times 6.673\times10^{-11} \times 6\times10^{24}}{4\pi^2}\right\}^{\frac{1}{3}} - (6.4\times10^{6})$$

$= 35.9\times10^{6} m$

$\boxed{= 35.9\times10^{3} km}$ → It is a must parking Height

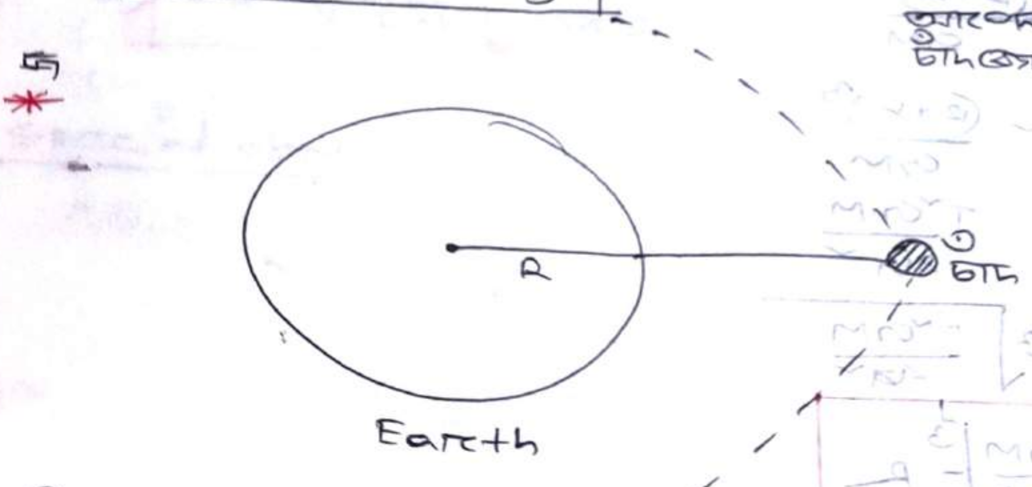
$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{6.673\times10^{-11}\times 6\times10^{24}}{(6.4\times10^{6}+35.9\times10^{6})}}$$

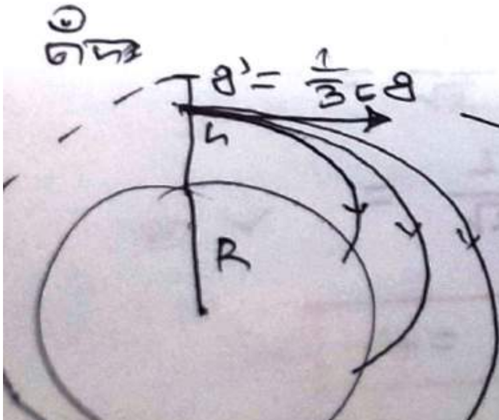
$= 3076.6\ ms^{-1}$

$\boxed{v = 3.076 kms^{-1}}$

আপেল পৃথিবী পড়লেও চাঁদ কেন পৃথিবীতে পড়ে না?

*

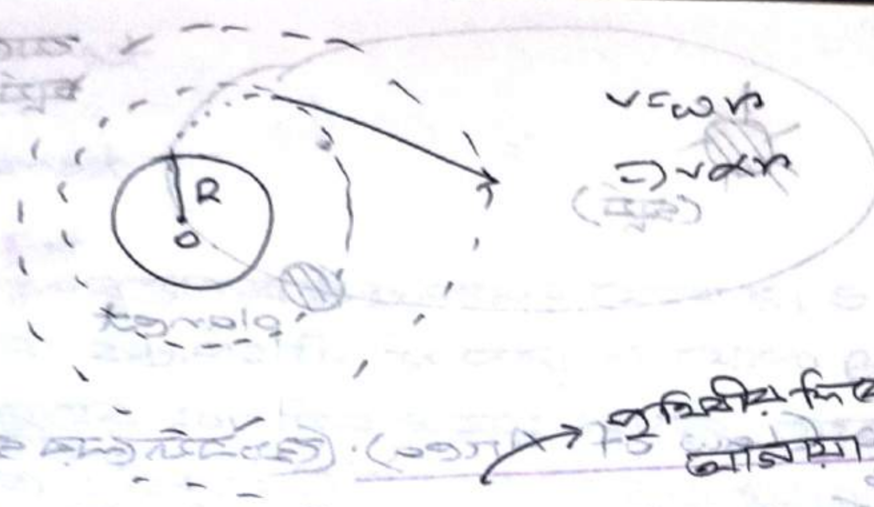




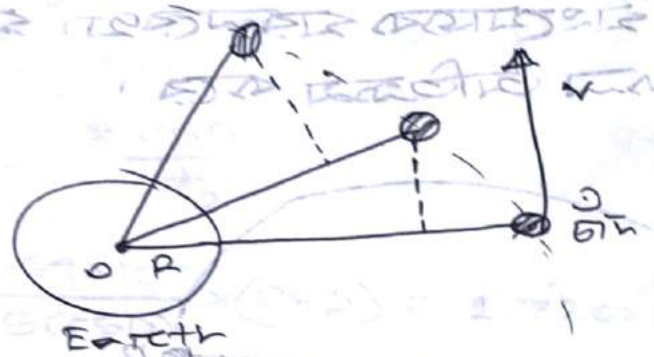
→ gravitation pull আগের মতো কাজ করে না।

বেগ এমনভাবে বাড়ছে যে circular path পেরিয়ে যায়।

→ মুক্তি বেগ



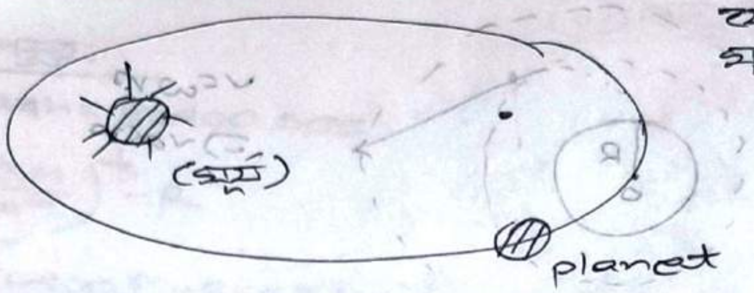
*



Topic: 02: কেপলারের গ্রহের গতি সংক্রান্ত সূত্র: (Kepler's law of planetary motion):

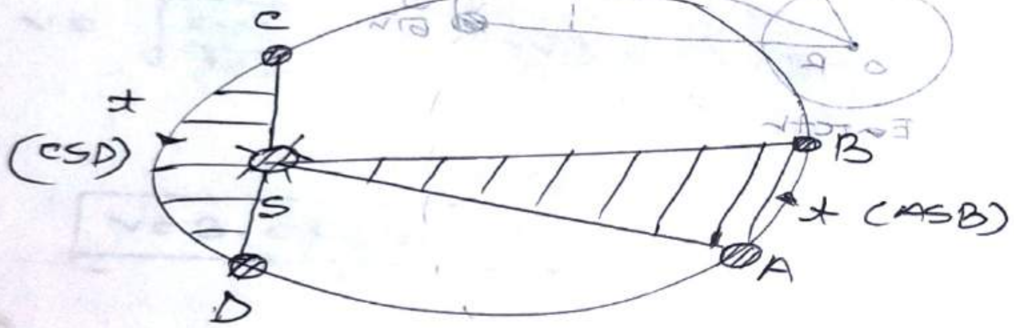
1st law (~~of~~ i.e Law of ellipse): (উপবৃত্তের সূত্র):
প্রতিটি গ্রহ সূর্যকে একটি ফোকাসে রেখে উপবৃত্তাকার পথে প্রদক্ষিণ করছে।

যেকোনো একটা ফোকাসে সূর্য থাকবে।



2nd law (Law of Area): (ক্ষেত্রফলের সূত্র):

প্রতিটি সূর্য ও গ্রহের সংযোজক সরলরেখা সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে।



সূত্রানুযায়ী,

$$(ASB) = (CSD) = A(\text{Area})$$

t সময়ে অতিক্রান্ত ক্ষেত্রফল A

1 " " " $\frac{A}{t}$

যেকোনো গ্রহের জন্য ক্ষেত্রফল পরিবর্তনের হার $\frac{A}{t}$ = const

$$\therefore \boxed{\frac{A_1}{t_1} = \frac{A_2}{t_2}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{t_1}{t_2}}$$

সমবেগের মতো চিন্তা করলে, প্রতিমুহূর্তে বেগসমান তখন $\frac{dr}{dt}$ ও সমান বা const $\Rightarrow \frac{dA}{dt}$ = const

আবার, $\frac{A}{t} = const$

$\therefore \frac{dA}{dt} = const$

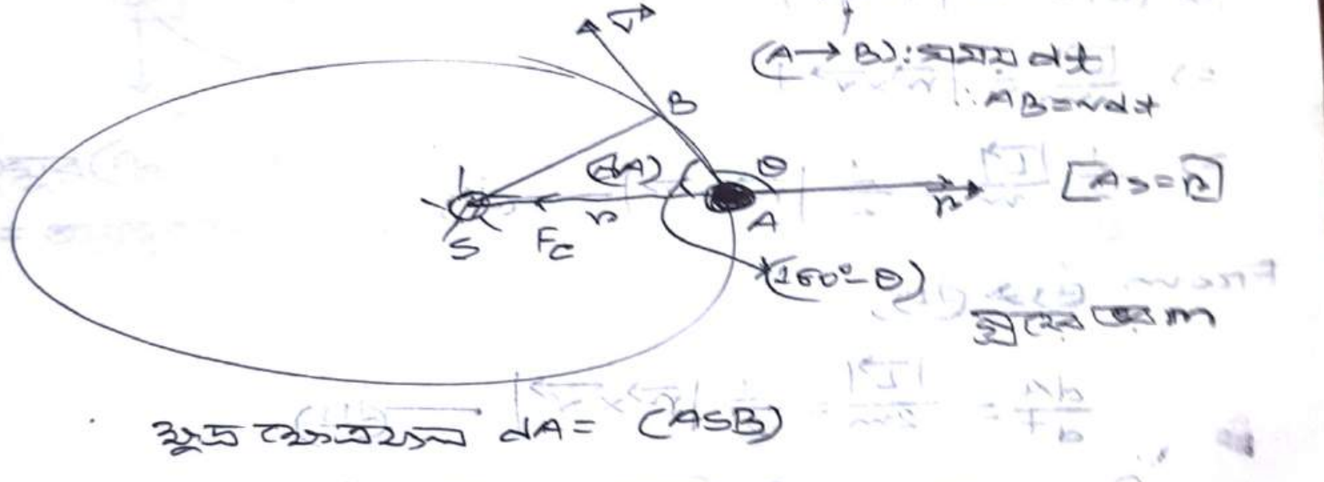
***

* কোনো একটি উপবৃত্তাকার কক্ষপথের ফোকাস S বিন্দুতে সূর্যের অবস্থান। কক্ষপথটির উপবৃত্ত A থেকে B বিন্দুতে যেতে কোনো গ্রহের 100 দিন সময় লাগে। তাহলে, কক্ষপথটির উপবৃত্ত C থেকে D বিন্দুতে যেতে গ্রহটির কত সময় লাগবে যেখানে $(ASB) = 5(CSD)$।

উ: $\frac{ASB \rightarrow 5(CSD)}{8.64\times10^6} = \frac{CSD}{t_2}$

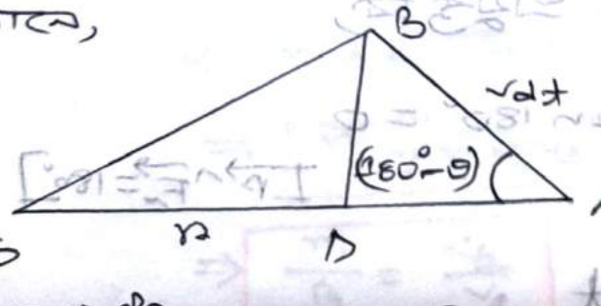
$\Rightarrow t_2 = \frac{8.64\times10^6}{5(CSD)} \times (CSD) = 1.728\times10^6\,\boxed{sec} = 20\,Days$

*



ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল $dA = (ASB)$

এখানে,



in $\triangle ADB$, $\sin(180^\circ-\theta) = \frac{BD}{AB}$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{BD}{AB}$

$\Rightarrow BD = AB\sin\theta \Rightarrow \boxed{BD = vdt\sin\theta}$

∴ ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল $dA = (ASB)$

$$= \frac{1}{2} \cdot AS \cdot BD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot r \cdot v\,dt \sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} rv\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}| \quad \text{---(i)}$$

আবার, গ্রহটির কৌণিক ভরবেগ,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\therefore |\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}|$$

$$\Rightarrow |\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}|$$

$$\Rightarrow |\vec{L}| = m|\vec{r} \times \vec{v}|$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{L}|}{m} = |\vec{r} \times \vec{v}|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m} = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}| \quad \text{---(ii)}$$

From (i) & (ii),

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}| \quad \text{---(iii)}$$

কেন্দ্রমুখী বলদ্বারা গ্রহটির উপর প্রযুক্ত টর্ক,

$$\tau = rF_c \sin 180^\circ = 0 \qquad [\vec{r} \wedge \vec{F_c} = 180^\circ]$$

$$\Leftarrow \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow L = const$$

$$\Rightarrow |\vec{L}| = const$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{L}|}{\;} = const$$

$\frac{d}{dt} I\omega$

$\Rightarrow I\frac{d}{dt}\omega$

$\Rightarrow I\alpha = \tau$

From (iii),

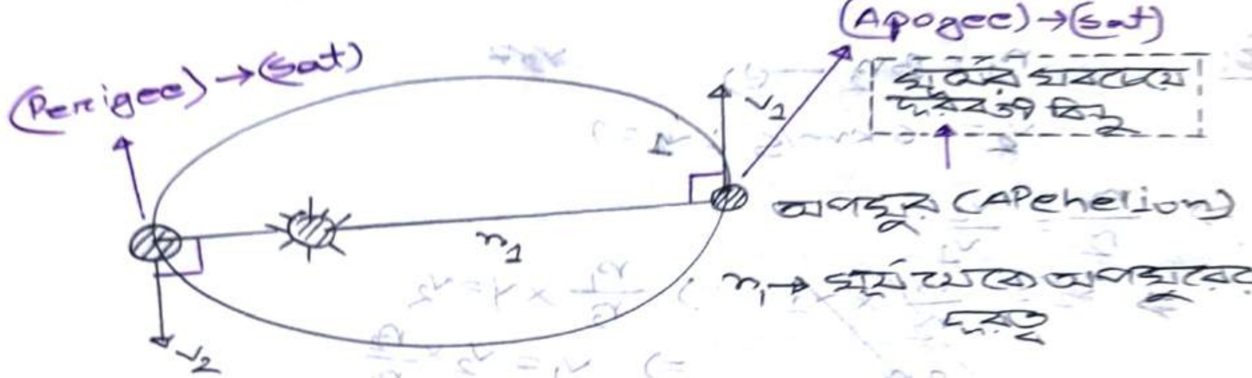
$$\boxed{\frac{dA}{dt} = const} \quad (Proved)$$

∴ কোনো গ্রহের জন্য

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}| = const}$$

* যে কোনো গ্রহের জন্য,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}| = const$$



অনুসূর (Perihelion)

r_2 = অনুসূরের দূরত্ব

সূর্যের সবচেয়ে নিকটবর্তী বিন্দু

$$\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}| = const$$

$$\therefore \frac{1}{2}|\vec{r_1}\times\vec{v_1}| = \frac{1}{2}|\vec{r_2}\times\vec{v_2}|$$

$$\Rightarrow r_1 v_1 \sin 90^\circ = r_2 v_2 \sin 90^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{r_1 v_1 = r_2 v_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{r_1}{r_2} = \frac{v_2}{v_1}}$$

$\left[rv = const \right.$

$\left. v \propto \frac{1}{r} \right.$

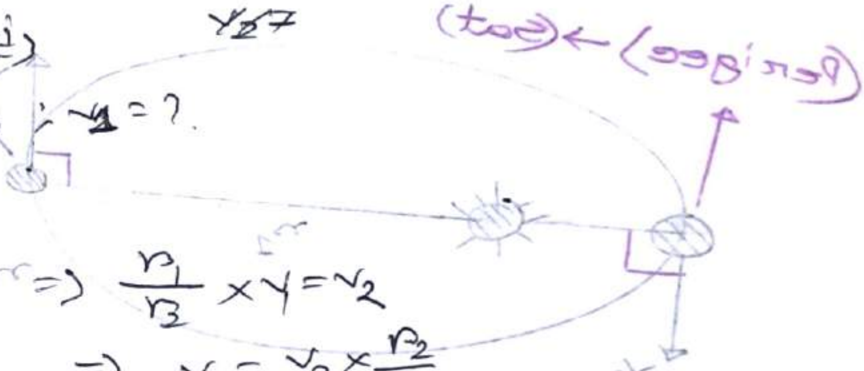
* একটি কৃত্রিম উপগ্রহ পৃথিবীর চারদিকে উপবৃত্তাকার পথে প্রদক্ষিণরত। কৃত্রিম উপগ্রহটির জন্য অপভূর বিন্দুর দূরত্ব, অনুভূর বিন্দুর দূরত্বের 3 গুণ, উপগ্রহটির অনুভূরে বেগ 6 km/s; পৃথিবীর ভর ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 6×10^{24} kg ও 6.4×10^{6} m।

(i) উপগ্রহটির অপভূর বিন্দুতে বেগ নির্ণয় কর।

(ii) উপগ্রহটির অনুভূর ও অপভূরের জন্য দূরত্ব পৃথিবীর পৃষ্ঠ হতে নির্ণয় কর।

উঃ $r_1 = 3r_2$ ——(i)

$v_2 = 6$ km/s ; $v_1 = ?$



$\Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{v_2}{v_1}$

$\Rightarrow \frac{r_1}{r_2} \times v = v_2$

$\Rightarrow v_1 = v_2 \times \frac{r_2}{r_1}$

$= 6 \times \frac{r_2}{3r_2} = 2$ km/s

(ii) অনুভূর এর ক্ষেত্রে,

$v_2 = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$

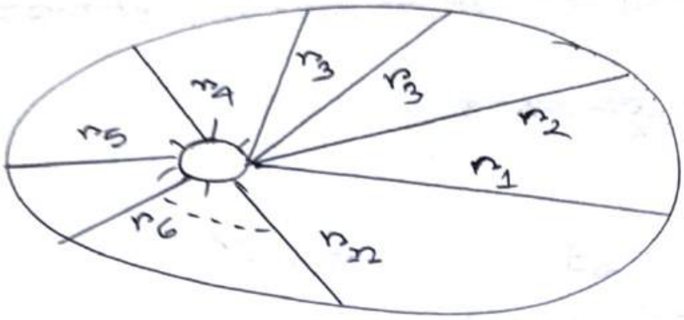
$\Rightarrow 6000 = \sqrt{\frac{6.673\times10^{-11}\times6\times10^{24}}{6.4\times10^{6}+h}}$

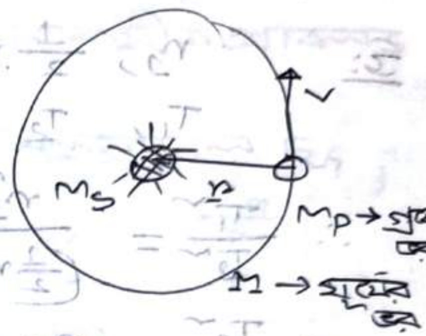
$\Rightarrow 3.6\times10^{7} = \frac{6.673\times10^{-11}\times6\times10^{24}}{6.4\times10^{6}+h}$

$\Rightarrow h =$

3rd law (Law of time period): (পর্যায়কালের সূত্র):

প্রতিটি গ্রহের পর্যায়কালের বর্গ, সূর্য থেকে ঐ গ্রহের গড় দূরত্বের ঘনফলের সমানুপাতিক। $\boxed{T^2 \propto r^3}$





$$r = \bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + \cdots + r_n}{n}$$

$$\therefore F_c = F_G$$

$$\Rightarrow \frac{v^2 \cancel{M_p}}{r} = \frac{G \cdot \cancel{M_p} M_s}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{\cancel{r}} = \frac{GM_s}{r}$$

$$\Rightarrow \omega^2 r^2 = \frac{GM_s}{r} \quad \boxed{v = \omega r}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{GM_s}{r^3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{GM_s}{r^3}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{r^3}{GM_s}$$

$$\Rightarrow T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_s}\right) r^3$$

$$\boxed{T^2 \propto r^3}$$

$$\therefore \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \text{const}}$$

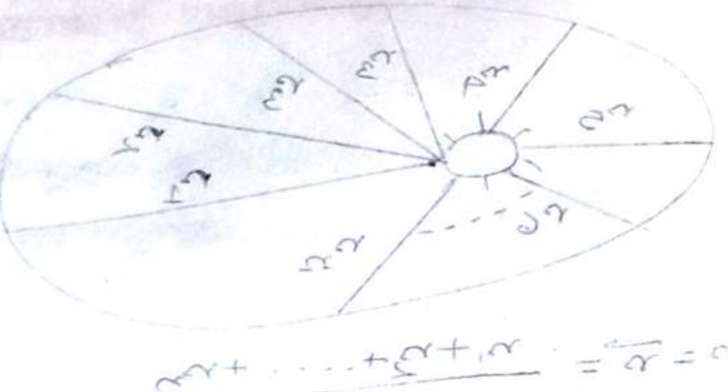
$$\therefore \boxed{\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}}$$

$$\boxed{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}}$$

* সূর্য হতে পৃথিবীর কেন্দ্র বর্তমান দূরত্বের অর্ধেক হলে পৃথিবীর বার্ষিক গতির পর্যায়কালের কীরূপ পরিবর্তন হবে?

উ: $r_1, \frac{1}{2}r_1$

T_1, T_2



$\therefore \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{(\frac{1}{2}r_1)^3}$

$\Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \cancel{r_1^3} \times \frac{8}{\cancel{r_1^3}}$

$\Rightarrow T_1^2 = 8T_2^2$

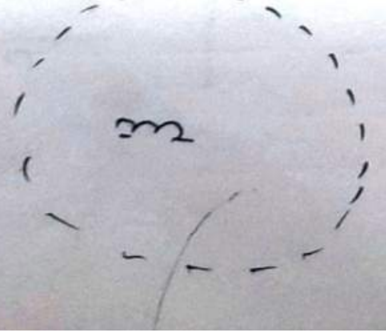
$\Rightarrow T_1 = 2\sqrt{2}\, T_2$

$\Rightarrow T_1 = 365$ Days, $T_2 = \frac{T_1}{2\sqrt{2}} = \frac{365}{2\sqrt{2}} = 129.05$

$\therefore T_1 - T_2 = (365 - 129.05)$ Days =

Topic: 08: মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র, মহাকর্ষীয় প্রাবল্য, মহাকর্ষীয় বিভব। Gravitational field, Gravitational field intensity, Gravitational Potential)

মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র (Gravitational field): কোনো একটি বস্তু চারপাশে যতটুকু জায়গা জুড়ে এর মহাকর্ষীয় প্রভাব বজায় থাকে, তাকে ঐ বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র বলা হয়।



* যেকোনো বস্তুর জন্য মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র হচ্ছে একটি কাল্পনিক গোলকের ন্যায়।

মহাকর্ষীয় প্রাবল্য (Gravitational field intensity): (E_G):

মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে কোনো বিন্দুতে একক ভরের কোনো বস্তুকে স্থাপন করলে বস্তুটি যে পরিমাণ বল অনুভব করে, তাকে ঐ মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের জন্য উক্ত বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য বলে।

m ভরের বস্তু কর্তৃক অনুভূত বল F_G

1 " " " " " $\frac{F_G}{m}$

$$\boxed{E_G = \frac{F_G}{m}}$$

Unit: $N/kg = N\,kg^{-1}$

Dimention: $[E_G] = \left[\frac{MLT^{-2}}{M}\right] = [LT^{-2}]$

$$F_G = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\Rightarrow E_G = \frac{F_G}{m} = \frac{GMm}{r^2} \times \frac{1}{m} = \frac{GM}{r^2}$$

$$\boxed{E_G = \frac{GM}{r^2}}$$

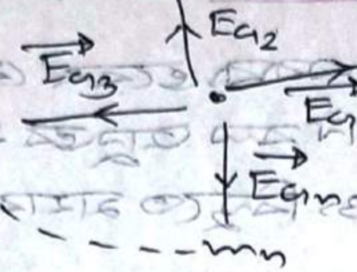
M = যেই ভরের জন্য মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র পাওয়া যায়।

r = যে ভরের জন্য মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র, সেই ভর থেকে দূরত্ব

আবার,

$$\boxed{\vec{E_G} = \frac{\vec{F_G}}{m}}$$ → মহাকর্ষীয় প্রাবল্য একটি ভেক্টর রাশি

$$\boxed{\vec{E_G} = \frac{GM}{r^3}\,\vec{r}}$$



$$\vec{E}_{GR} = \vec{E}_{G1} + \vec{E}_{G2} + \dots + \vec{E}_{Gn}$$

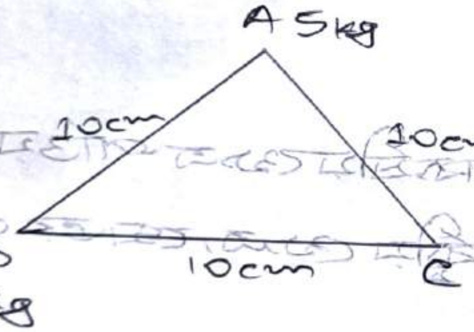
$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{GR} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_{Gi}}$$

$n=2$: $\vec{E}_{GR} = \vec{E}_{G1} + \vec{E}_{G2}$

$$\therefore E_{GR} = \sqrt{E_{G1}^2 + E_{G2}^2 + 2E_{G1}E_{G2}\cos\alpha}$$

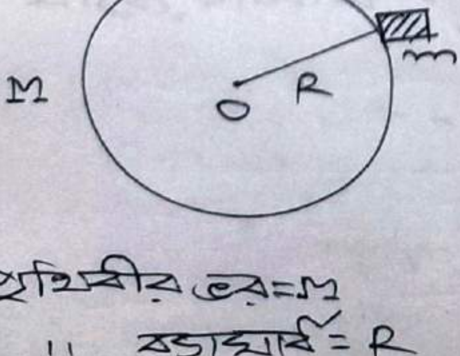
$$\left[\vec{E}_{G1} \wedge \vec{E}_{G2} = \alpha\right]$$

*



লব্ধি মহাকর্ষীয় C বিন্দুতে প্রাবল্য কত?

*পৃথিবী পৃষ্ঠে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য:



$$F_G = G\cdot\frac{Mm}{R^2}$$

$$\Rightarrow E_G = \frac{F_G}{m} = \frac{\frac{GMm}{R^2}}{m}$$

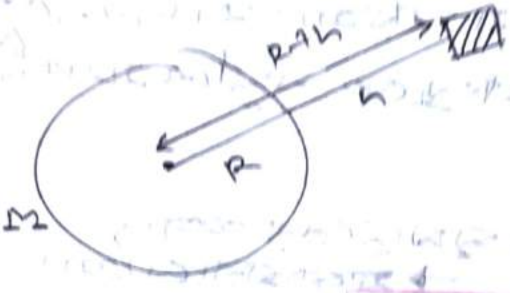
$$\Rightarrow \boxed{E_G = \frac{GM}{R^2}}$$

পৃথিবীর ভর $= M$

" ব্যাসার্ধ $= R$

পৃথিবীর পৃষ্ঠে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য, পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য
মান বের করো।

* পৃথিবীর পৃষ্ঠ হতে "h" উচ্চতায়

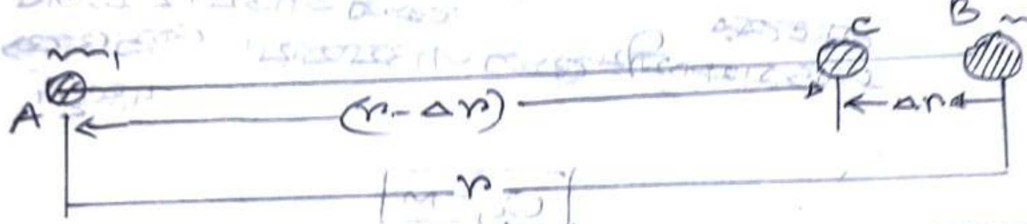


$F_g = \frac{GMm}{(R+h)^2}$

$E_g = \frac{GM}{(R+h)^2} = g$

h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ

* 1 Light year distance → 9.4608×10^{15} m



9:48AM
30dec,
2023

$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$

r = 1 light year distance

আগামী,
9:48AM
30dec,
2024

B কে C তে নিয়ে গেলে $F_g = \frac{Gm_1m_2}{(r-\Delta r)^2}$ $F_g = \frac{Gm_1m_2}{(r-\Delta r)^2}$

নিশ্চিত পারি না কারণ information pass হতে 1 বছর লাগে,
এটার উপর প্রাবল্য। প্রাবল্য সবসময় একই থাকে, তাই,

$\underline{B:}$ $E_{gB} = \frac{Gm_1}{r^2}$

$\underline{C:}$ $E_{gB} = \frac{Gm_1}{(r-\Delta r)^2}$

মহাকর্ষ সূত্রের এর সীমাবদ্ধতা।

৪৫। মহাকর্ষীয় বিভবশক্তি ও মহাকর্ষীয় বিভব (Gravitational Potential energy & Gravitation potential) (U_G ও V_G)

মহাকর্ষীয় বিভব শক্তি (U_G): কোনো বস্তুকে অসীম থেকে মহাকর্ষ ক্ষেত্রে কোনো বিন্দুতে আনতে যে পরিমাণ কাজ করতে হয় তাকে ঐ মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের উক্ত বিন্দুতে বস্তুটির মহাকর্ষীয় বিভবশক্তি বলে।

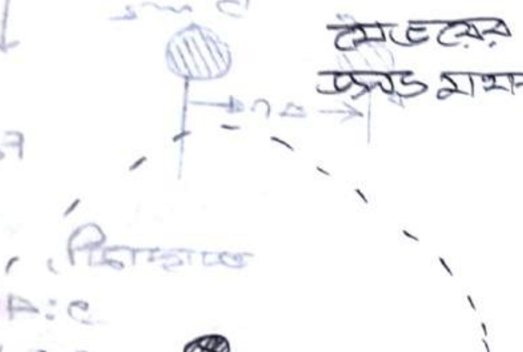
∴ মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে কোনো বস্তু স্থানান্তরে কৃতকাজ:-

→ যাকে সরানো হয়।

$$\boxed{W = GMm\left[\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_f}\right]}$$

→ যেই ক্ষেত্রের উপর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র পাওয়া যায়, তার কেন্দ্র থেকে দূরত্ব।

যে ক্ষেত্রের জন্য মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র পাওয়া যায়।



$\boxed{U_G = M}$ → Joule

m ভরের বস্তুটি আনতে কৃতকাজ,

$$W = GMm\left[\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_f}\right]$$

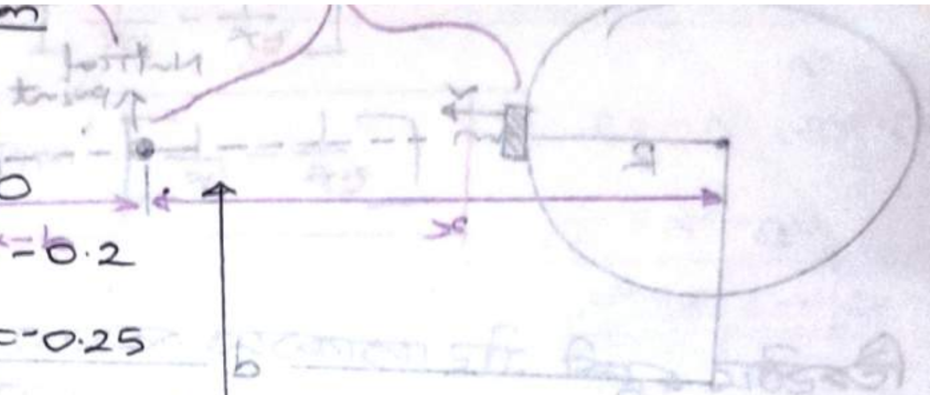
$x_i = \infty, \quad x_f = r$

$$W = GMm\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{W = -\frac{GMm}{r}}$$

$$W = -\frac{GMm}{r}$$

$$W \propto -\frac{1}{r}$$

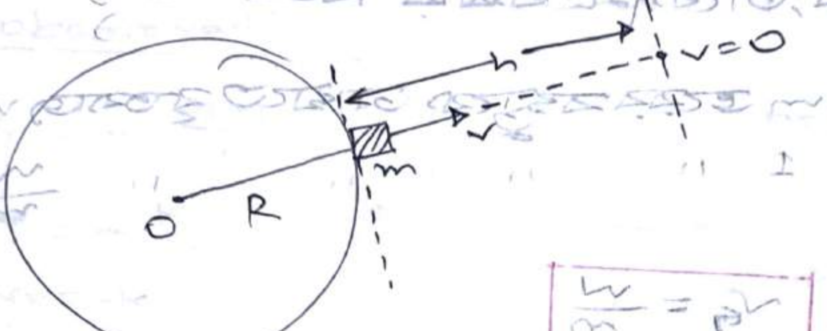


$r=\infty$	$W=0$
$r=5m$	$W=-0.2$
$r=4m$	$W=-0.25$
$r=2m$	$W=-0.5$

$$\boxed{U_G = -\frac{GMm}{r}}$$

বস্তুর সরণ আকর্ষণের দিকে

পৃথিবী M



$E_A = E_B$

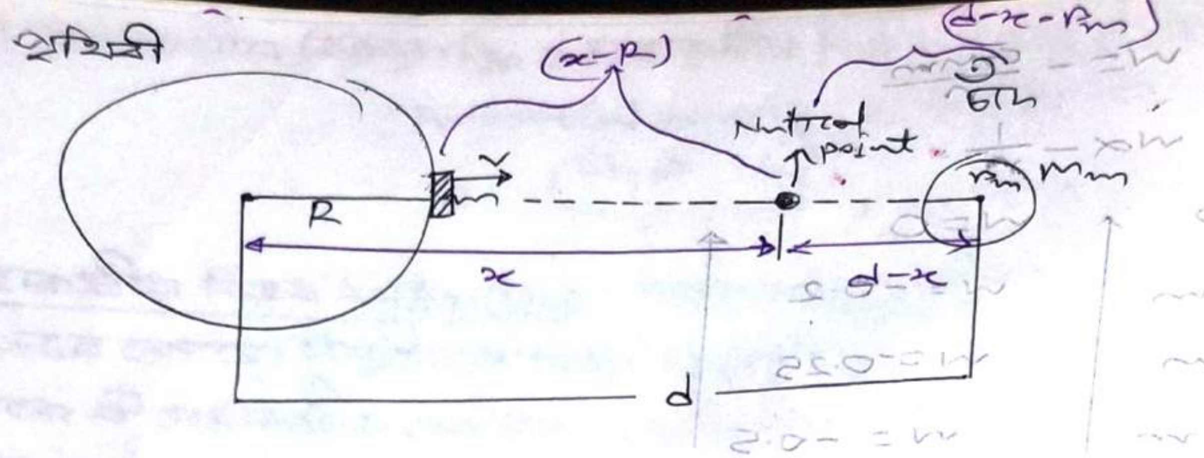
$$\Rightarrow \boxed{U_{GA} + E_K = U_{GB}} \quad ***$$

$$\Rightarrow -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{(R+h)}$$

$$\Rightarrow -\frac{GM}{R} + \frac{1}{2}v^2 = -\frac{GM}{(R+h)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{R} - \frac{GM}{R+h}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2GM\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right]}$$



$$-\frac{GMm}{R} - \frac{GM_m m}{d-R} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{x} - \frac{GM_m m}{d-x}$$

মহাকর্ষীয় বিভব: অসীম হতে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে একক ভরের কোনো বস্তুকে ঐ বিন্দুতে আনতে যে পরিমাণ কাজ করতে হয়, তাকে মহাকর্ষীয় বিভব বলে।

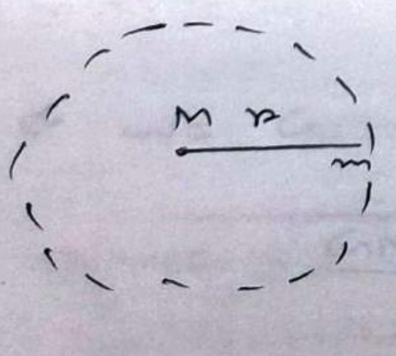
অসীম হতে m ভরের বস্তুকে আনতে কৃতকাজ, W

" " 1 " " " " $\frac{W}{m}$

$$\therefore \boxed{V_g = \frac{W}{m}}$$

$\therefore$ Unit: $\frac{J}{kg} = Jkg^{-1}$

Dimention: $[V_g] = \left[\frac{ML^2T^{-2}}{M}\right] = [L^2T^{-2}]$



$$W = -\frac{GMm}{r}$$

$$\Rightarrow V_g = \frac{W}{m} = -\frac{GMm}{r\,m}$$

$$\boxed{V_g = -\frac{GM}{r}}$$

$$W = GMm\left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right]$$

$$\boxed{V_G = \frac{W}{m} = GM\left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right]}$$

→ মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের যেকোনো দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী বিভব পার্থক্য।

* পৃথিবীকে একটি আদর্শ গোলক বিবেচনা করে এর পৃষ্ঠে মহাকর্ষীয় বিভব নির্ণয় কর।

উঃ $V_G = -\frac{GM}{R} = -\frac{6.673\times10^{-11}\times6\times10^{24}}{6.4\times10^{6}}$

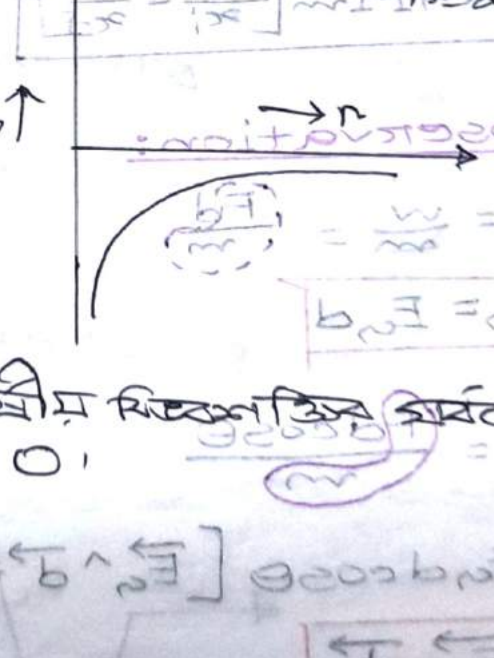
special observation:

$V_G = -\frac{GM}{r}$

$\Rightarrow y = -\frac{k}{x}$

$\Rightarrow yx = -k$

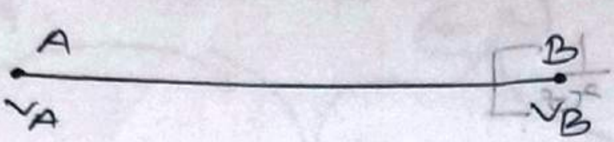
→ অধিবৃত্ত



$r=\infty, V_G=0, \therefore U_G=0$

* মহাকর্ষীয় বিভব ও মহাকর্ষীয় বিভবশক্তির সর্বোচ্চ মান অসীমে পাওয়া যায় এবং এ মান 0।

*



$V_A > V_B$; $A \rightarrow B$

$$V_B - V_A = \frac{W}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = m(V_B - V_A)}$$

$V_B > V_A$; $B \rightarrow A$

$$V_A - V_B = \frac{W}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = (V_A - V_B)m}$$

M ভরের বস্তুর জন্য,

$$W = m\left[-\frac{GM}{x_f} + \frac{GM}{x_i}\right]$$

$$\boxed{W = GMm\left[\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_f}\right]}$$

special observation:

$$V_G = \frac{W}{m} = \frac{Fd}{m}$$

$$\boxed{V_G = E_G d}$$

$$V_G = \frac{W}{m} = \frac{Fd\cos\theta}{m}$$

$$V_G = E_G d\cos\theta \left[\vec{E_G} \wedge \vec{d} = \theta\right]$$

$$\boxed{V_G = \vec{E_G} \cdot \vec{d}}$$

অনুরূপভাবে dr এর ক্ষেত্রে,

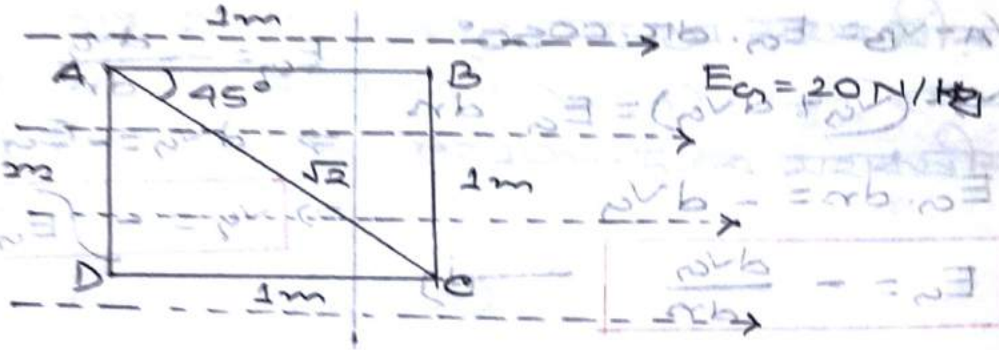
$$\boxed{V_G = \vec{E_G} \cdot \vec{dr}}$$

$V_A > V_B$ $\quad A \to B$

$\therefore \boxed{V_B - V_A = E_G \cdot d}$

$\boxed{V_B - V_A = \vec{E_G} \cdot \vec{d}}$

*



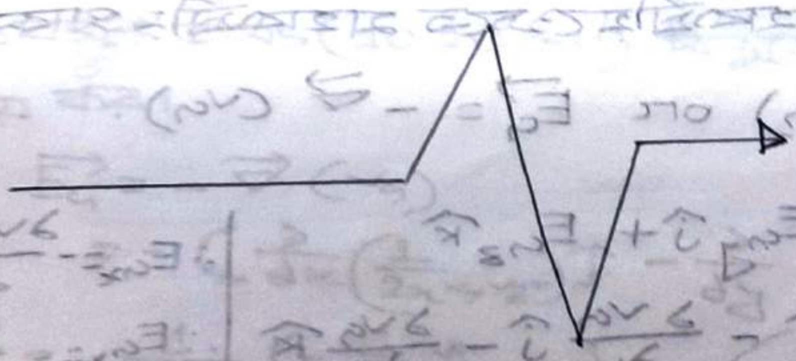
$V_B - V_A = ?$ $\quad V_C - V_A = ?$ $\quad V_D - V_A = ?$

Ans: $V_B - V_A = E_G \cdot d = 20\ J/kg$

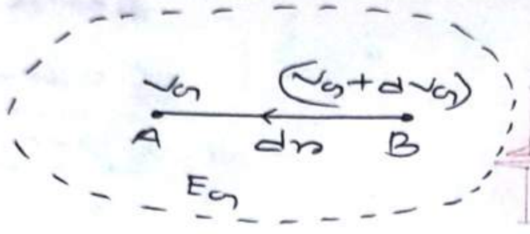
$V_C - V_A = E_G \times \sqrt{2} \times \cos 45^\circ$

$= 20\ J/kg$

$V_D - V_A = E_G \times 1m \times \cos 90^\circ = 0$



* মহাকর্ষীয় প্রাবল্য ও মহাকর্ষীয় বিভব এর মধ্যে ব্যবকলনীয় সম্পর্ক:-



$dV_G \to 0$

$dr \to 0$

$$V_A - V_B = E_G \cdot dr \cdot \cos 0^\circ$$

$$\Rightarrow V_G - (V_G + dV_G) = E_G \cdot dr$$

$$\Rightarrow E_G \cdot dr = -dV_G$$

$$\therefore \boxed{E_G = -\frac{dV_G}{dr}} \text{ —— (i)}$$

$$E_G = -\frac{dV_G}{dr}$$

$$\Rightarrow dV_G = -E_G dr$$

$$\Rightarrow \boxed{V_G = -\int E_G dr}$$

এখন,

$V_G = -\frac{GM}{r}$ (i) নং এ বসালে,

$$E_G = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GM}{r}\right)$$

$$= +GM\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\boxed{E_G = -\frac{GM}{r^2}}$$ → ঋণ আকর্ষণের দিকে

final − initial কার্তেসীয় ব্যবস্থায় এভাবে বলা হয়।

শুধু মান নিয়ে, $E_G = \frac{GM}{r^2}$

* দেখাও যে, কোনো মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য:-

$$\vec{E_G} = -\text{Grad}(V_G) \text{ or } \vec{E_G} = -\vec{\nabla}(V_G)$$

উঃ $\vec{E_G} = E_{Gx}\hat{i} + E_{Gy}\hat{j} + E_{Gz}\hat{k}$

$$\therefore \vec{E_G} = -\frac{\partial V_G}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V_G}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V_G}{\partial z}\hat{k}$$

$$\therefore E_{Gx} = -\frac{\partial V_G}{\partial x}$$

$$\therefore E_{Gy} = -\frac{\partial V_G}{\partial y}$$

$$\therefore E_{Gz} = -\frac{\partial V_G}{\partial z}$$

$$\therefore \vec{E_G} = -\frac{\partial V_G}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V_G}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V_G}{\partial z}\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{E_G} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(V_G)$$

$$\therefore \boxed{\vec{E_G} = -\vec{\nabla}(V_G)}$$

★ কোনো মহাজাগতিক বস্তুর জন্য যে মহাকর্ষীয় বিভব পাওয়া যায়, তার সমীকরণ $V_G(r) = -\frac{1}{5r}$ যেখানে r দূরত্ব নির্দেশ করে। $r = 10m$ দূরে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য নির্ণয় কর।

উঃ $E_G = -\frac{d}{dr}(V_G)$

$= -\frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{5r}\right)$

$= -\frac{1}{5r^2}$ ∴ শুধুমান নিয়ে $\frac{1}{5r^2}$

∴ $r = 10m$ হলে $E_G = \frac{1}{5\times10^2}\ N\,kg^{-1}$

$= \frac{1}{500}\ N\,kg^{-1}$

* ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় কোনো বস্তুর জন্য যে মহাকর্ষীয় বিভব পাওয়া যায়, তার সমীকরণ $V_G(x,y,z) = \frac{1}{2x^2y^2z^2}$; উক্ত বস্তুর জন্য $(10,20,30)$ বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য নির্ণয় কর।

উঃ $\vec{E_G} = -\vec{\nabla}(V_G)$

$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2x^2y^2z^2}\right)\hat{i} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2x^2y^2z^2}\right)\hat{j} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2x^2y^2z^2}\right)\hat{k}\right)$

$= -\frac{1}{2y^2z^2}\left(-\frac{1}{z^3}\right)\hat{i} - \frac{1}{2x^2z^2}\left(-\frac{1}{y^3}\right)\hat{j} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2x^2y^2}\left(-\frac{1}{z^3}\right)\hat{k}$

$= +\frac{1}{2x^3y^2z^2}\hat{i} + \frac{1}{2x^2y^3z^2}\hat{j} + \frac{1}{2x^2y^2z^3}\hat{k}$

$$= \frac{1}{2x^3y^2z^2}\hat{i} + \frac{1}{2x^2y^3z^2}\hat{j} + \frac{1}{2x^2y^2z^3}\hat{k}$$

∴ (10, 20, 30) বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য,

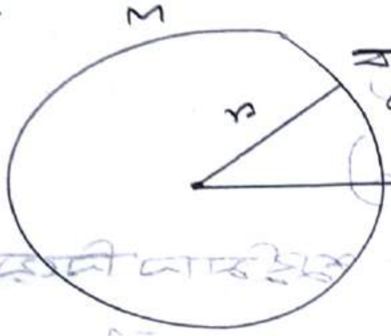
$$= \frac{1}{2\times(10)^3\times(20)^2\times(30)^2}\hat{i} + \frac{1}{2\times10^2\times20^3\times30^2}\hat{j} + \frac{1}{2\times10^2\times20^2\times30^3}\hat{k}$$

$$\therefore \text{মান} = \sqrt{\left(\frac{1}{2\times10^3\times20^2\times30^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\times10^2\times20^3\times30^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\times10^2\times20^2\times30^3}\right)^2}$$

বিভিন্ন বস্তুর জন্য মহাকর্ষীয় প্রাবল্য ও বিভব:

ফাঁপা গোলক:

i)

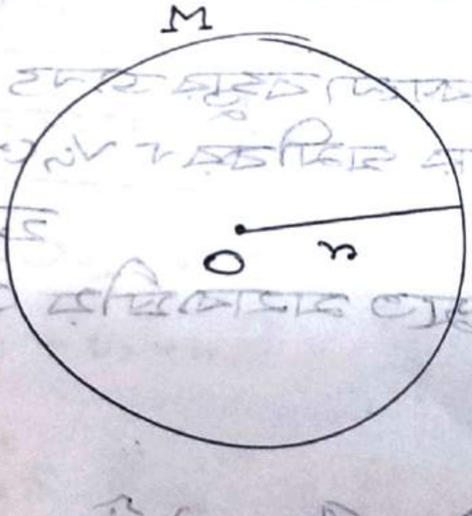


বাইরের কোন বিন্দুতে

$E_g = \frac{GM}{a^2}$

$V_g = -\frac{GM}{a}$

ii) পৃষ্ঠে: $\boxed{\text{প্রাবল্য সবচেয়ে বেশি।}}$

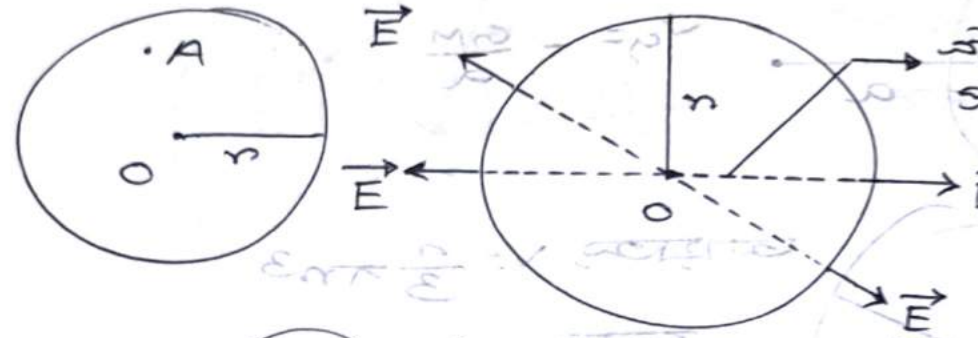


$E_g = \frac{GM}{r^2}$

$V_g = -\frac{GM}{r}$

iii) অভ্যন্তরের কোন বিন্দু:

★ ফাঁপা গোলকের অভ্যন্তরে কোন বিন্দুতে প্রাবল্য 0



এই পুরো জায়গায় প্রাবল্য 0; ফলে যেকোন বিন্দুতে প্রাবল্য 0

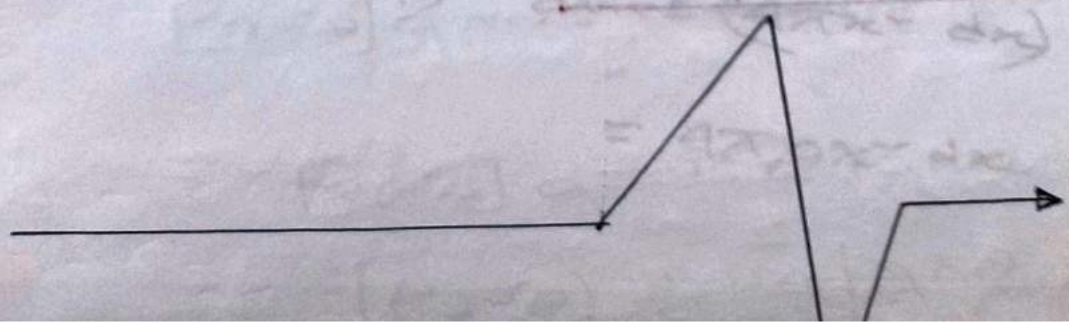
$V_A - V_G = \cancel{E_G} \cdot d$

$\Rightarrow V_A - V_G = 0$

$\Rightarrow \boxed{V_A = V_G}$

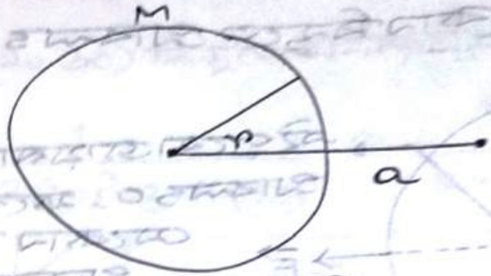
★ ফাঁপা গোলকের পৃষ্ঠে ও অভ্যন্তরে কোনো বিন্দুতে বিভব সমমান।

কোনো বিভব পার্থক্য নাই, তাই কোনো বস্তুকে স্থানান্তর করা যাবে না



নিরেট গোলক:

i।



$$E_g = \frac{GM}{a^2}$$

$$V_g = -\frac{GM}{a}$$

ii। পৃষ্ঠে:

আয়তন, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

ঘনত্ব $= \rho$

ভর, $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho$

$= \frac{4}{3}\pi \rho r^3$

$$E_g = \frac{GM}{r^2}$$

$$E_g = \frac{G \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho \cdot r^3}{r^2}$$

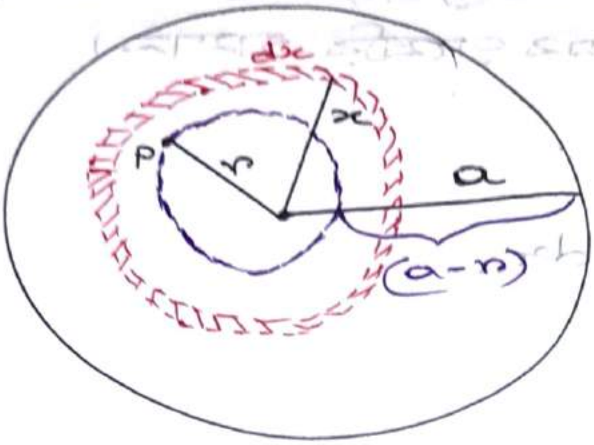
$$\therefore \boxed{E_g = \frac{4}{3} G\pi\rho r}$$

$$V_g = -\frac{GM}{r}$$

$$\therefore V_g = -\frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi\rho r^3}{r}$$

$$\therefore \boxed{V_g = -\frac{4}{3} G\pi\rho r^2}$$

iii) নিরেট গোলকের অভ্যন্তরে কোন বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য ও বিভব:



ব্যাসার্ধ = a

ভর = $M = \frac{4}{3}\pi \rho a^3$

ঘনত্ব = ρ

Step:1: গোলকের অভ্যন্তরে r ব্যাসার্ধের নিরেট গোলক হিসেবে বিবেচনা করে মহাকর্ষীয় বিভব,

$$V_{P_1} = -\frac{G\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r}$$

$$\boxed{V_{P_1}} = -\frac{4}{3} G\pi \rho r^2 \text{ ——— (i)}$$

একটি নিরেট গোলককে অসংখ্য ফাঁপা গোলকের সমষ্টি হিসেবে বিবেচনা করা যায়।

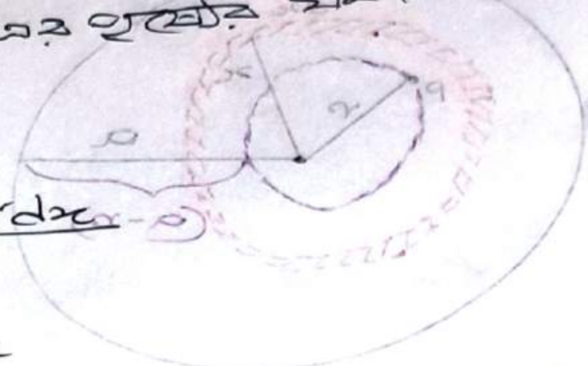
Step:2: কেন্দ্র হতে x ব্যাসার্ধের $(x>r)$ ও dx পুরুত্বের একটি ফাঁপা গোলক বিবেচনা করি।

∴ ফাঁপা গোলকের আয়তন, $dv = (4\pi x^2)\, dx$

" " ভর, $dm = (4\pi x^2\, dx)\, \rho$

$$= 4\pi \rho x^2\, dx$$

P বিন্দুটি ফাঁপা গোলকের অভ্যন্তরে, তাই ফাঁপা
গোলকের P বিন্দুটির বিভব এর পৃষ্ঠের সমান।



$$dV_{P_2} = -\frac{G\,dm}{x}$$
$$= -\frac{G\,4\pi\rho . x^2 dx}{x}$$

$$\Rightarrow dV_{P_2} = -4G\pi\rho x\,dx$$

এখন, একটি ফাঁপা নিরেট গোলক অসংখ্য ফাঁপা গোলকের সমষ্টি, তাই a-r ব্যবধির জন্য P বিন্দুতে মোট মহাকর্ষীয় বিভব,

$$dV_{P_2} = -4G\pi\rho \int_r^a x\,dx = -4\pi\rho G\left[\frac{x^2}{2}\right]_r^a$$

$$\Rightarrow V_{P_2} = -4G\pi\rho\left[\frac{a^2-r^2}{2}\right]$$

$$\Rightarrow V_{P_2} = -2G\pi\rho\left[a^2-r^2\right] \text{ ——— (ii)}$$

বিন্দুতে মোট বিভব,

$$V_G = V_{P_1} + V_{P_2}$$
$$= -\frac{4}{3}G\pi\rho r^2 - 2G\pi\rho\left[a^2-r^2\right]$$

$$V_G = -\frac{4}{3}G\pi\rho r^2 - 2G\pi\rho\left[a^2-r^2\right]$$
$$= -\frac{4}{3}G\pi\rho\left[r^2 + \frac{3}{2}\left(a^2-r^2\right)\right]$$
$$= -\frac{4}{3}G\pi\rho\left[r^2 + \frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{2}r^2\right]$$

$$= -\frac{4}{3}G\pi\rho\left[\frac{2r^2+3a^2-3r^2}{2}\right]$$

$$\boxed{V_g = -\frac{2}{3}G\pi\rho\,[3a^2-r^2]}$$

$$V_g = -G\left(\frac{4}{3}\pi\rho a^3\right)\left[\frac{3a^2-r^2}{2a^3}\right] \qquad \Big|\; M = \frac{4}{3}\pi\rho a^3$$

$$\boxed{\therefore V_g = -\frac{GM(3a^2-r^2)}{2a^3}}$$

∴ P বিন্দুতে প্রাবল্য

$$E_g = -\frac{d}{dr}(V_g)$$

$$= -\frac{d}{dr}\left[-\frac{GM(3a^2-r^2)}{2a^3}\right]$$

$$= \frac{GM}{2a^3}\left\{\frac{d}{dr}(3a^2-r^2)\right\}$$

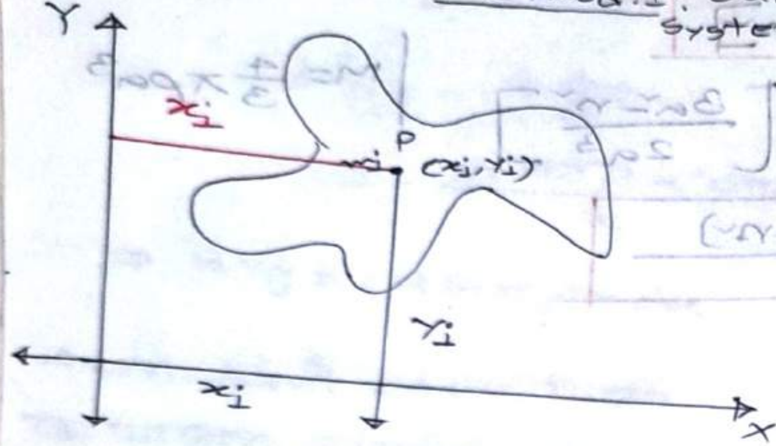
$$= \frac{GM}{2a^3}[0-2r]$$

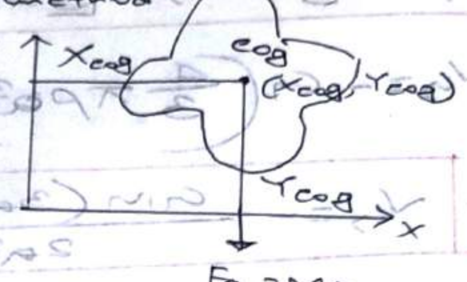
$$\boxed{E_g = -\frac{GM}{a^3}\cdot r}$$

∴ শুধুমান নিয়ে, $\boxed{E_g = \frac{GM}{a^3}\cdot r \quad [r<a]}$

Determination of (center of mass) & (center of gravity):-
(COM) (cog)

Method:1: Cartesian co-ordinate system method





$F_g = Mg$

$M = \sum m_i$

$F_{g_i} = m_i g$

∴ P বিন্দুতে Y অক্ষের সাপেক্ষে টর্ক, $\tau_{Y_i} = x_i F_{g_i}$

$\Rightarrow \tau_{Y_i} = x_i m_i g$ —(i)

বস্তুটির cog-বিন্দুর জন্য, Y অক্ষের সাপেক্ষে টর্ক,

$$T_Y = X_{cog} Mg \text{ —(ii)}$$

এখানে,

$$T_Y = \sum \tau_{Y_i}$$

$$\Rightarrow X_{cog} Mg = \sum x_i m_i g$$

$$\Rightarrow X_{cog} M\cancel{g} = \cancel{g} \sum x_i m_i$$

$$\Rightarrow X_{cog} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \quad [M = \sum m_i]$$

x অক্ষের ঋণাত্মক দিকে নিলে (−) হবে।

$$\therefore \boxed{X_{cog} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}}$$

Similarly:

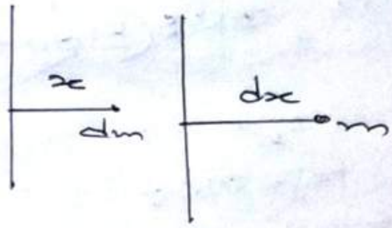
$$Y_{cog} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n y_n}$$

Method 2:

Method of integration

$$X_{cog} = \frac{\underbrace{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}_{\to \int m dx \ \to \int x dm}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

$$* \ X_{cog} = \frac{\int m dx}{M} = \frac{1}{M} \int m dx$$



$$* \ X_{cog} = \frac{\int x dm}{M}$$

$$\boxed{X_{cog} = \frac{1}{M} \int x dm}$$ → বেশি ব্যবহৃত হয়।

$$Y_{cog} = \frac{1}{M} \int m dy$$

or

$$Y_{cog} = \frac{1}{M} \int y dm$$