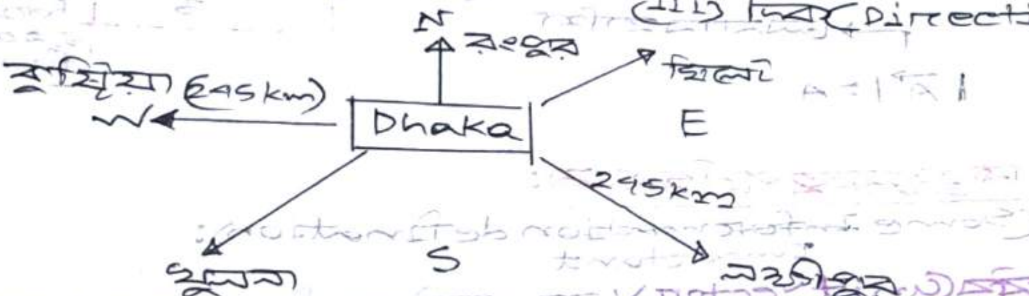
Topic: 01: Basic Introduction:

রাশি (Quantity): ভৌত জগতে যা কিছু পরিমাপ করা হয় তাই হচ্ছে রাশি।

কোয়ান্টাম Physics সবকিছুই প্রকারের রাশি

রাশি
- স্কেলার রাশি (2টি বিষয়)
  - → মান (Magnitude)
  - → একক (unit)
- ভেক্টর রাশি (3টি বিষয়)
  - (i) মান (Magnitude)
  - (ii) একক (unit)
  - (iii) দিক (Direction) ***



ভেক্টর রাশির প্রকাশ: (Expression of vector): **

$\vec{A}$, $\bar{A}$, **A** ← Italian Bold letter.

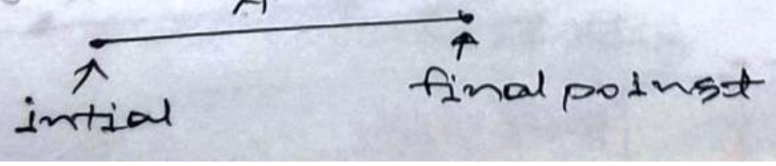
$\underline{a}$ → অবস্থান ভেক্টর (Position vector)

$\hat{a}$ → "a" cap
→ "a" roof
→ unit vector

ভেক্টর রাশির মান (Magnitude of vector):

যেকোনো ভেক্টর রাশির মান বলতে ঐ ভেক্টর রাশির দৈর্ঘ্যকে বোঝানো হয়।

* ভেক্টর রাশির মান কখনো ঋণাত্মক হতে পারে না।



$|\vec{A}| = A$

পরমমান (Modulus) → (Absolute value)

স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় মূল বিন্দু হতে কোনো প্রতিরূপী বিন্দুর (যেকোনো বিন্দু) দূরত্বকে পরমমান বলা হয়।

→ Variable
$x \in \mathbb{R}$

3 Postulates (স্বীকার্য)

(i) $|x| = x;\ x > 0$

(ii) $|x| = -x;\ x < 0$

(iii) $|x| = 0;\ x = 0$

$|-5|$
$x = -5 < 0$
$|x| = -x$
$\Rightarrow |-5| = -(-5)$
$= 5$

1,2 আছে যে জায়গায় ছিল থাকবে. কিন্তু যোগ বিয়োগের ক্ষেত্রে চিহ্ন বসিয়ে থাকে.

$|\vec{A}| = A$ → মান রাশি

Topic:02: কিছু গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা:

(Some ~~Information~~ Important defination):

একক ভেক্টর (Unit vector): যে ভেক্টরের রাশির মান 1 একক তাকে একক ভেক্টর বলা হয়।

** কোনো ভেক্টর রাশিকে উক্ত ভেক্টর রাশির মান দ্বারা ভাগ করলেও ঐ ভেক্টর রাশির দিকে ~~বরাবর~~ একটি একক ভেক্টর পাওয়া যায়।

$\vec{A}$ এর মান $|\vec{A}| = A$

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

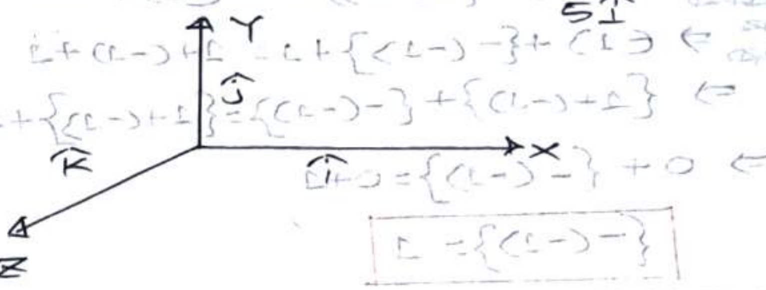
$$\therefore \vec{A} = \hat{a} \cdot |\vec{A}|$$

কোনো ভেক্টর = উক্ত ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর × ভেক্টরের মান
↓
scaler

* কোনো স্কেলারকে ভেক্টরে convert করতে একক ভেক্টর ব্যবহার করা হয়।

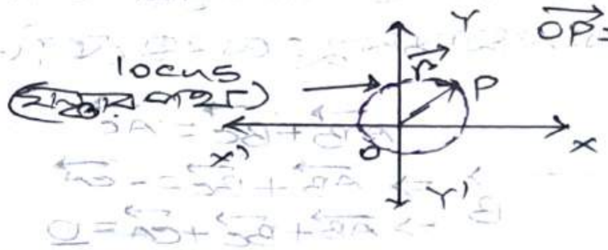
আয়ত একক ভেক্টর (Rectangular unit vector):

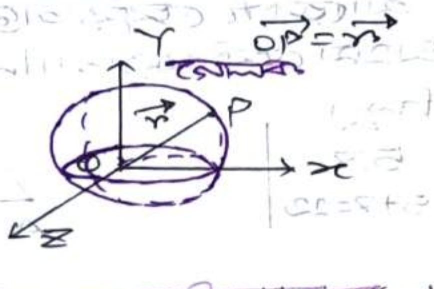
ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় x, y, z অক্ষ বরাবর $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ কে একক ভেক্টর হিসেবে বিবেচনা করা হয়। এই $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ কে একত্রে আয়ত একক ভেক্টর বলা হয়।



অবস্থান ভেক্টর: (Position vector):

কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য যে ভেক্টর ব্যবহার করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলা হয়।





* অবস্থান ভেক্টর কে ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলা হয়। (Radius vector) তাই একে $\vec{r}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অক্ষীয় ভেক্টর (Axial vector):

ঘূর্ণনজনিত কারণে যেসমস্ত ভেক্টরের দিক তলের সাথে লম্ব তাদেরকে অক্ষীয় ভেক্টর বলা হয়।

কৌণিক সরণ (θ), কৌণিক বেগ (ω), কৌণিক ত্বরণ (α), টর্ক (τ)

$\boxed{\text{টর্ক}}$

শূন্য ভেক্টর (Null or Zero vector):

যে ভেক্টরের মান 0 হয় তাকে শূন্য ভেক্টর বলা হয়। * 0 ভেক্টরের জন্য একক ভেক্টর নির্ণয় করা যায় না।

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

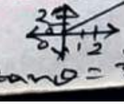
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\vec{AB} + \vec{BA} = \underline{0}$

$\vec{AB} - \vec{AB} = \underline{0}$

$\boxed{\tan 45^\circ = \frac{0}{0}}$

$y = mx$



$y = x$, $m = 1$, $\theta = 45^\circ$, $= \frac{0}{0}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$a \in \mathbb{R}$ $\quad a+(-a)=0$ (বিপরীতকের অস্তিত্ব)

$a=-1 \in \mathbb{R}$ $\quad (-1)+\{-(-1)\}=0$

$1+0=1$ → যোগের অভেদক

$a \cdot 1 = a$ → গুণের অভেদক

$\Rightarrow (-1)+\{-(-1)\} = 1+(-1)$

$\Rightarrow (-1)+\{-(-1)\}+1 = 1+(-1)+1$

$\Rightarrow \{1+(-1)\}+\{-(-1)\} = \{1+(-1)\}+1$

$\Rightarrow 0+\{-(-1)\} = 0+1$

$$\boxed{\{-(-1)\} = 1}$$

$5 \rightarrow 5+0 \cdot i$

Real number ⊂ Complex number

বাস্তব সংখ্যা জটিল সংখ্যার একটি সেট

Topic:03: ভেক্টরের যোগের নিয়ম: (law of vector Addition):

(triangle law)

ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্র: কোনো ভেক্টরের প্রান্ত বিন্দুতে অপর আরেকটি ভেক্টর অঙ্কন করলে ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির আদি বিন্দু হবে প্রথম ভেক্টরের আদি বিন্দু এবং প্রান্ত বিন্দু হবে ২য় ভেক্টরের প্রান্ত বিন্দু।

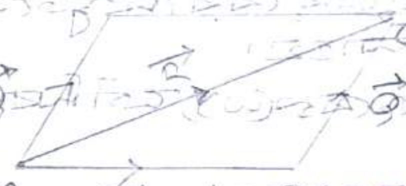
5, 7
$5+7=12$

$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$

$\Rightarrow \vec{AB}+\vec{BC}=-\vec{CA}$

$\Rightarrow \vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=\underline{0}$

সামান্তরিক সূত্র (Parallelogram law): কোনো সামান্তরিকের 2টি সন্নিহিত বাহু বরাবর 2টি ভেক্টর নির্দেশিত হলে ঐ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি উক্ত সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা নির্দেশিত হবে।



$\vec{AB}=\vec{P}$

$\vec{AD}=\vec{Q}$

in $\triangle ABC$, $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$ (Applying triangle law)

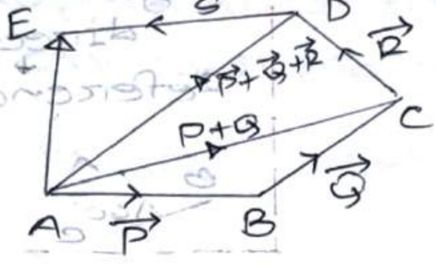
$\Rightarrow \vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$

$\therefore \vec{R}=\vec{P}+\vec{Q}$

$\underline{0} = \overleftarrow{AB}+\overleftarrow{BA}$

$0 = \overleftarrow{BA}-\overleftarrow{BA}$

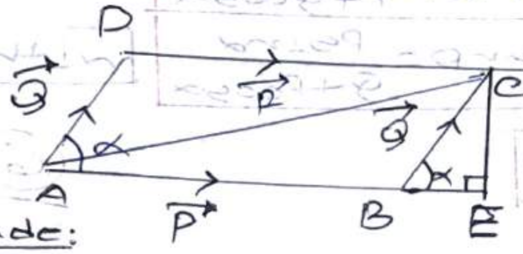
বহুভুজ সূত্র (law of Polygon):



$$\boxed{\vec{AE}=\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}+\vec{S}}$$

5

সামান্তরিক সূত্রের লব্ধির মান ও দিক:
(Magnitude & direction of Resultant in Parallelogram Law):



$|\vec{AB}|=|\vec{P}|=P$

$|\vec{AD}|=|\vec{Q}|=Q$

$\vec{BC}=|\vec{Q}|=Q$

$\vec{AC}=|\vec{R}|=R$

Magnitude:

$\triangle BCE$ এ, $\cos\alpha=\frac{BE}{BC}$ $\qquad \sin\alpha=\frac{CE}{BC}$

$\Rightarrow BE=BC\cos\alpha=Q\cos\alpha \qquad \Rightarrow CE=BC\sin\alpha$

in $\triangle ACE$, $AC^2=AE^2+CE^2$

$\Rightarrow AC^2=(AB+BE)^2+CE^2$

$\Rightarrow AC^2=AB^2+2AB\cdot BE+CE^2+BE^2$

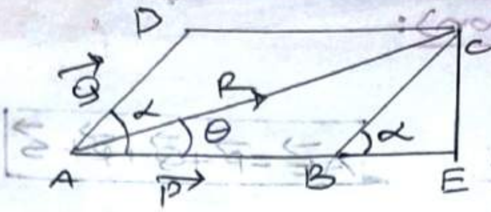
$\Rightarrow AC^2=AB^2+(BE)^2+(CE)^2+2AB\cdot BE$

$\Rightarrow AC^2=AB^2+BC^2+2AB\cdot BE$

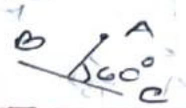
$$\boxed{\therefore R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha} \qquad \boxed{R=f(P,Q,\alpha)}$$

$\therefore |\vec{R}|=R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$

— × —



Angel base direction
↓
Reference line/point



Direction:

in $\triangle ACE$

$\tan\theta = \frac{CE}{AE}$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{CE}{AB+BE}$

$\boxed{\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}}$ $\boxed{\text{with } \vec{P}}$

$\boxed{\tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{Q+P\cos\alpha}}$ $\boxed{\text{with } \vec{Q}}$

$\boxed{\therefore \theta \text{ or } \beta = f(P, Q, \alpha)}$

6

Resultant:

$R = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$ $\quad R = f(P, Q, \alpha)$

Direction:

$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha} \rightarrow \text{with } \vec{P}$ $\quad \theta = f(P, Q, \alpha)$

$\tan\beta = \frac{P\sin\alpha}{Q+P\cos\alpha} \rightarrow \text{with } \vec{Q}$ $\quad \beta = f(P, Q, \alpha)$

Q.1: 5N ও 6N মানের 2টি বল 60° কোণে ক্রিয়া করে। বলদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

উ: $F_R = \sqrt{5^2+6^2+2\times5\cdot6\cos60^\circ}$ N. $\quad \tan\theta = \frac{6\sin60^\circ}{5+6\cos60^\circ}$

$= 9.54$N $\quad = \cancel{4.9.11}$ (5N বলের সাথে)

Q.2: 2টি সমান মানের ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি যেকোনো একটি ভেক্টরের সমান হলে ঐ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

উ: $P = Q, \quad R = P$

$\therefore P = Q = R$

$R^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$

$\Rightarrow P^2 = P^2+Q^2+2P^2\cos\alpha$

$\Rightarrow 2P^2\cos\alpha = -P^2$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$\alpha = 120^\circ$ or $\frac{2\pi}{3}$

Q.3: দুইটি ~~[illegible]~~ ভেক্টর একটি অপরটির দ্বিগুণ, ভেক্টর দ্বয়ের লব্ধি ক্ষুদ্রতর ভেক্টরের সাথে সমকোণে অবস্থিত। ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, লব্ধি ক্ষুদ্রতর ভেক্টরের $\sqrt{3}$ গুণ।

উ: মনে করি, একটি ভেক্টর $= P$

7

$\therefore$ অপর ভেক্টরটি $= 2P$

$\therefore \tan\theta = \dfrac{2P\sin\alpha}{P+2P\cos\alpha}$

$\Rightarrow \tan 90^\circ = \dfrac{2P\sin\alpha}{P+2P\cos\alpha}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{0} = \dfrac{2P\sin\alpha}{P+2P\cos\alpha}$

$\Rightarrow P+2P\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow 2P\cos\alpha = -P$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = 120$ (Ans)

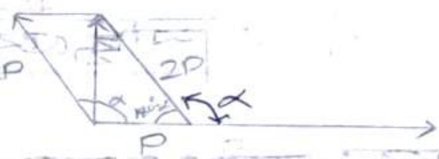
$\therefore$ লব্ধি $= \sqrt{P^2+4P^2+2.2P.P\cos\alpha}$

$= \sqrt{5P^2+4P^2\cos 120^\circ}$

$= \sqrt{5P^2+4P^2(-\frac{1}{2})}$

$= \sqrt{5P^2-2P^2}$

$= \sqrt{3P^2} = P\sqrt{3} = \sqrt{3}P$ (Ans)



M-2: $\cos(180^\circ-\alpha) = \dfrac{P}{2P}$

$\Rightarrow -\cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$\alpha = 120^\circ$

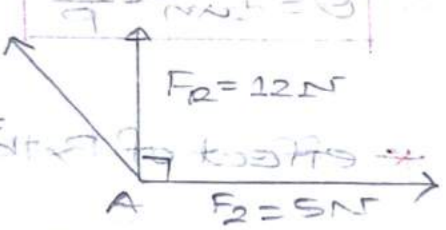
M-3: $R^2+P^2 = (2P)^2$

$\Rightarrow R^2 = 4P^2 - P^2$

$\Rightarrow R^2 = 3P^2$

$R = \sqrt{3}P$

Q:4:

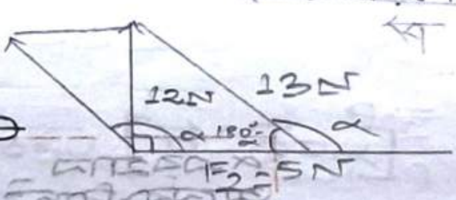


চিত্রে, F_1 ও F_2 বলের লব্ধি F_R যেখানে লব্ধি F_R, F_2 এর সাথে সমকোণে অবস্থিত। F_1 এর মান নির্ণয় কর এবং F_1 ও F_2 এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

উ: $\dfrac{1}{0} = \dfrac{F_1\sin\alpha}{5+F_1\cos\alpha}$

~~$\Rightarrow 5+F_1\cos\alpha = 0$~~

$\Rightarrow$

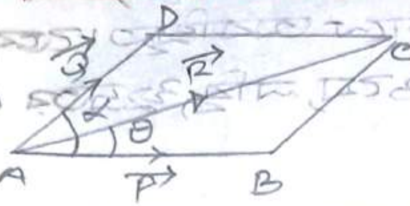


$\cos(180^\circ-\alpha) = \dfrac{5}{13}$

$\Rightarrow 180^\circ-\alpha = \cos^{-1} 5/13$

$\Rightarrow \alpha = 112.62^\circ$ (Ans)

Topic: 04: Special cases on Parallelogram law:



$$|\vec{R}| = R = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$$

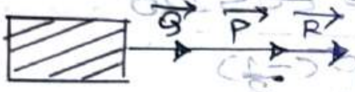
$$R = f(P, Q, \alpha)$$

$$\theta = f(P, Q, \alpha) \quad \tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

variation of 'α':

case: 01:: $\alpha = 0^\circ$

(ভেক্টরদ্বয় একই দিকে ক্রিয়াশীল)



$$R = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos 0^\circ}$$

$$R = \sqrt{(P+Q)^2}$$

$$R = P+Q$$

$$\therefore \boxed{R_{max} = P+Q}$$

দিক:

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{Q\sin 0^\circ}{P+Q\cos 0^\circ}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{0}{P+Q}$$

$$\boxed{\therefore \theta = 0}$$

∴ লব্ধি ভেক্টরদ্বয়ের দিকে

case: 02: $\alpha = 90^\circ$

(ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের সাথে সমকোণে ক্রিয়াকরে)

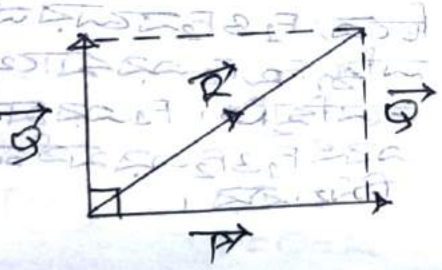
$$R = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos 90^\circ}$$

$$\boxed{R = \sqrt{P^2+Q^2}}$$

$$\tan\theta = \frac{Q\sin 90^\circ}{P+Q\cos 90^\circ}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{Q}{P}$$

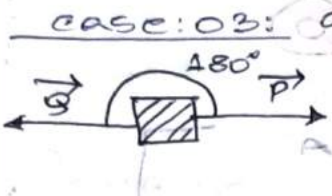
$$\therefore \boxed{\theta = \tan^{-1}\frac{Q}{P}}$$



* effect of Pythagoras.

α এর মান অনেক কিছুই হতে পারে কিন্তু আমরা Boundary condition গুলো নিব	Vector আসলে জ্যামিতিক বিষয় তাই α নিয়ে অনেক কাহিনিকরণ জ্যামিতির মূল বিষয়ই কোণ।

case:03: $\alpha = 180^\circ$ (ভেক্টরদ্বয় পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল)



মান:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 180^\circ}$$
$$= \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ}$$
$$= \sqrt{(P-Q)^2}$$

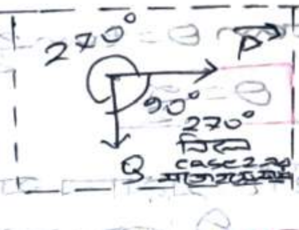
$$\therefore \boxed{R_{min} = P \sim Q}$$

$$\left[\begin{array}{l} R_{min} = P - Q,\ P > Q \\ R_{min} = Q - P,\ Q > P \end{array}\right]$$

→ sign of difference (অন্তর)

$2-5=-3$

$2\sim5=3$



দিক: $\tan\theta = \dfrac{Q\sin 180^\circ}{P + Q\cos 180^\circ} = \dfrac{0}{P-Q}$

$\tan\theta = 0 \quad \boxed{\theta = 0}$

লব্ধি বৃহত্তর ভেক্টরের সাথে 0° কোণে

case:04: $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$-1 \le \cos\alpha \le 1$

$\Rightarrow -2PQ \le 2PQ\cos\alpha \le 2PQ$

$\Rightarrow P^2 + Q^2 - 2PQ \le P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha \le P^2 + Q^2 + 2PQ$

$\Rightarrow (P-Q)^2 \le R^2 \le (P+Q)^2$

$$\boxed{(P\sim Q) \le R \le (P+Q)}$$

$$\left[\begin{array}{l} R_{min} = P \sim Q \\ R_{max} = P + Q \end{array}\right]$$

case:05: If $\boxed{P=Q}$

$\left[\vec{A} \wedge \vec{B} = 120^\circ\right]$

Magnitude:

$R = \sqrt{P^2 + P^2 + 2\cdot P\cdot P\cdot\cos\alpha} \quad \left[\vec{P} \wedge \vec{Q} = \alpha\right]$

$= \sqrt{2P^2(1+\cos\alpha)}$

$= \sqrt{2P^2 \cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \quad \left[1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right]$

$= \sqrt{4P^2\cos^2\alpha/2}$

$$\boxed{R = 2P\cos\alpha/2}$$

Direction: $P=Q$

$$\tan\theta = \frac{P\cos\alpha}{P+P\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$\sin 2A = 2\sin A\cdot\cos A$

$A \to \frac{A}{2}$

$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\boxed{\theta = \frac{\alpha}{2}}$$

∴ দুইটি সমমান মানের ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি ঐ ভেক্টর দ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

Q:5: ২টি ভেক্টরের ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ মান 14 একক এবং সর্বনিম্ন মান 6 একক। ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 60° হলে এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর। ধরি, $P>Q$

উঃ $R_{max} = P+Q$ $\qquad R_{min} = P-Q$

$\Rightarrow 14 = P+Q$ —(i) $\qquad \Rightarrow P-Q = 6$ —(ii)

(i) ও (ii) হতে, $P=10$
$Q=4$

$$\therefore R = \sqrt{10^2+4^2+2\times10\times4.\cos(60)}$$

$= 2\sqrt{39}$ (Ans)

Q:6: ২টি ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এবং এর লব্ধি $\vec{R}$, $\vec{Q}$ এর সাথে সমকোণে অবস্থিত এবং এর মান P এর অর্ধেক হলে P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর?

উঃ $\vec{P}, \vec{Q}$ $\qquad \vec{R} = \frac{1}{2}P$

$$\tan 90^\circ = \frac{P\sin\alpha}{Q+P\cos\alpha}$$

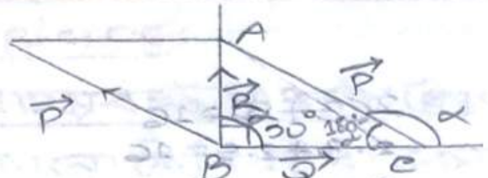
$$\Rightarrow \frac{1}{0} = \frac{P\sin\alpha}{Q+P\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow Q + P\cos\alpha = 0$$

$\cos$ $\sin(180^\circ-\alpha) = \frac{R}{P}$

$\Rightarrow \sin(180-\alpha) = \frac{2P}{P}$

$\Rightarrow$



প্রশ্নমতে,

$R = \frac{1}{2}P$

$\triangle ABC$ এ, $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{R}{P}$

$\Rightarrow \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{\frac{1}{2}P}{P}$

$\Rightarrow \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$

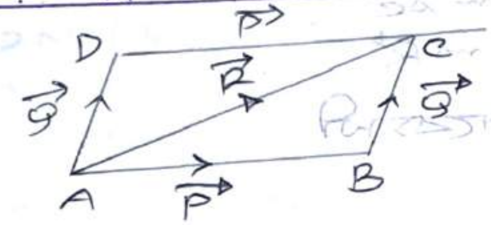
$\Rightarrow \sin(180^\circ - \alpha) = \sin 30^\circ$

$\Rightarrow 180^\circ - \alpha = 30^\circ$

$\Rightarrow \alpha = 150^\circ$ (Ans)

Topic: 05: ভেক্টর যোগের বিধিসমূহ:

i) বিনিময় সূত্র (commutative law):



$3+5=8$
$5+3=8$
$3+5=5+3$

in $\triangle ABC$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

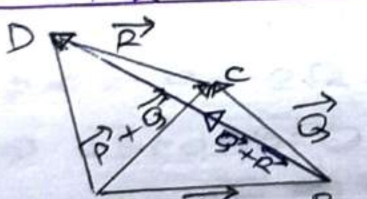
$\Rightarrow \vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$ —— (i)

in $\triangle ADC$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \vec{Q} + \vec{P} = \vec{R}$ —— (ii)

$\therefore \vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$

ii) সংযোগ সূত্র (law of addition):



$(\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R} = \overrightarrow{AD}$ —— (i)

$\vec{P} + (\vec{Q} + \vec{R}) = \overrightarrow{AD}$ —— (ii)

~~$(3+5)+2=8$~~
$3+(5+2)=10$
$(3+5)+2=10$

$\therefore \vec{P} + (\vec{Q} + \vec{R}) = (\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R}$

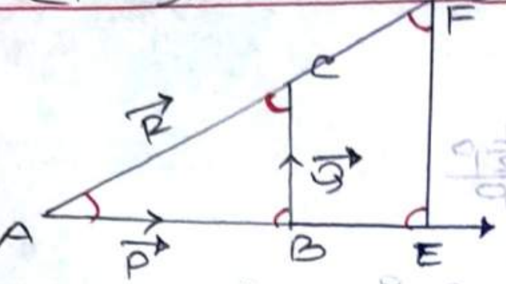
iii) বণ্টন সূত্র (distributive law):

i) $\boxed{m(\vec{p}+\vec{q}) = m\vec{p} + m\vec{q}}$

$2(3+5) = 16$

$2\cdot 3 + 2\cdot 5 = 16$

$2(3+5) = 2\cdot 3 + 2\cdot 5$



in $\triangle ABC$, $\vec{p} + \vec{q} = \vec{R}$

AB ও AC কে E ও F পর্যন্ত বর্ধিত করে EF যোগ করি।

$$\frac{AE}{AB} = m, \quad \frac{AF}{AC} = m$$

$$\Rightarrow AE = mAB \;;\; AF = mAC$$

$$\Rightarrow \vec{AE} = m\vec{AB} \;;\; \vec{AF} = m\vec{AC}$$

$$\therefore \vec{AE} = m\vec{p} \;;\; \vec{AF} = m\vec{R}$$

এখানে, $\triangle ABC$ ও $\triangle AEF$ সদৃশকোণী

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

$$\therefore \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} = m$$

$$\therefore \frac{EF}{BC} = m$$

$$\Rightarrow \vec{EF} = m\vec{BC}$$

$$\vec{EF} = m\vec{q}$$

in $\triangle AEF$, $\vec{AE} + \vec{EF} = \vec{AF}$

$$\Rightarrow m\vec{p} + m\vec{q} = m\vec{R}$$

$$\Rightarrow m\vec{R} = m\vec{p} + m\vec{q}$$

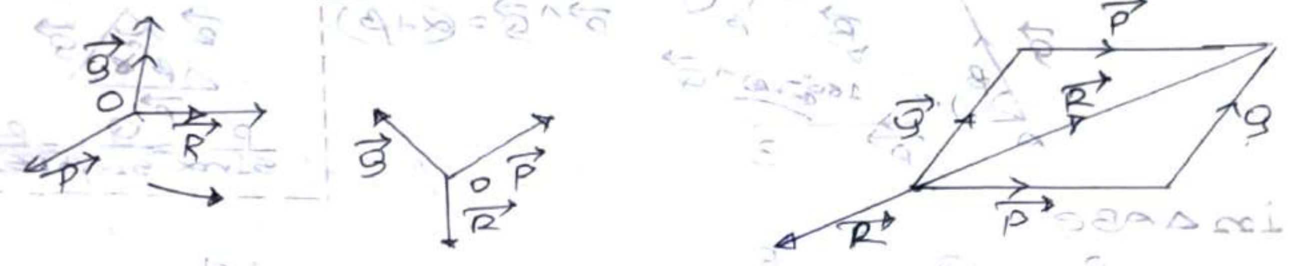
$$\boxed{\Rightarrow m(\vec{p}+\vec{q}) = m\vec{p} + m\vec{q}}$$

Topic: 06:

সাম্যাবস্থার শর্ত: (equilibrium condition):

কোনো বৈশিষ্ট্য বা কোনো বস্তুর সাম্যাবস্থা বলতে বোঝায়:-

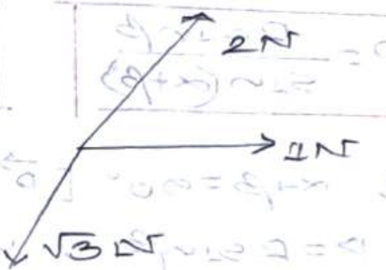
Σ ঐ বৈশিষ্ট্যে = 0 or Σ ঐ শর্ত = 0



* তিনটি ভেক্টর কোনো বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় থাকলে যেকোনো একটি ভেক্টর অপর ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি।

Q.1: 1N, 2N, √3N মানের তিনটি বল কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে, 1N ও 2N বলের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

উঃ ধরি, * $1N \wedge 2N = \alpha$



$(\sqrt{3})^2 = 1^2 + 2^2 + 2.1.2\cos\alpha$

$\Rightarrow 3 = 5 + 4\cos\alpha$

$\Rightarrow 4\cos\alpha = -2$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha = 120°$

* $1N \wedge \sqrt{3}N = \beta$

$\Rightarrow 2^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 + 2.1.\sqrt{3}\cos\beta$

$\Rightarrow 4 = 4 + 2\sqrt{2}\cos\beta$

$\Rightarrow \sqrt{3}\cos\beta = 0$

$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$ বা $90°$

* $2N \wedge \sqrt{3}N = \gamma$

$1^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 + 2.2.\sqrt{3}\cos\gamma$

$\Rightarrow 1 = 4 + 3 + 4\sqrt{3}\cos\gamma$

$\Rightarrow 4\sqrt{3}\cos\gamma = -6$

$\Rightarrow \cos\gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos\gamma = \cos(180° - 30°)$

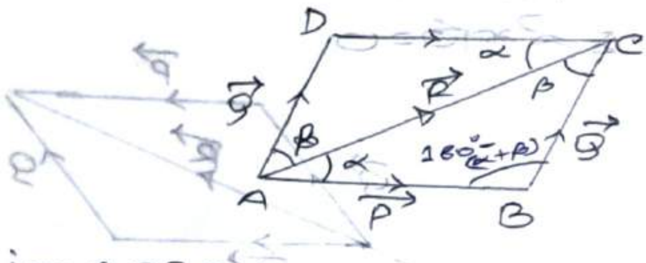
$\Rightarrow \cos\gamma = \cos 150°$

$\gamma = 150°$

* $|\vec{P}+\vec{Q}| = |\vec{P}-\vec{Q}|$, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

Topic: 07: ভেক্টরের বিভাজন:

(Resolution of vectors):



$\vec{P} \wedge \vec{Q} = (\alpha+\beta)$

ত্রিভুজের sin-সূত্র

$$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$$

in $\triangle ABC$,

$$\frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\{180^\circ-(\alpha+\beta)\}}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore \boxed{\frac{P}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}}, \quad \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore \boxed{P = \frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}} \qquad \boxed{Q = \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}}$$

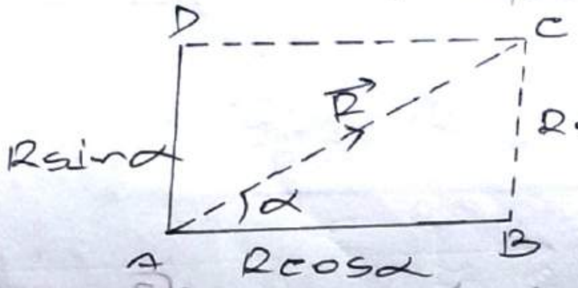
Let, $\alpha+\beta = 90^\circ$ $[\vec{P} \perp \vec{Q}]$

$P = R\sin\beta$, $Q = R\sin\alpha$

$\beta = 90^\circ - \alpha$

$\Rightarrow \boxed{P = R\cos\alpha}$ $\qquad \boxed{Q = R\sin\alpha}$

∴ যে দিকে কোণ উৎপন্ন সে দিকে cosα এবং cosα এর স্থানে অন্যত্র হবে sinα



$AC = \sqrt{(R\cos\alpha)^2 + (R\sin\alpha)^2}$

$= \sqrt{R^2 \cdot 1}$

$= R$

$\tan\theta = \frac{R\sin\alpha}{R\cos\alpha}$

$\tan\theta = \tan\alpha$

$\boxed{\therefore \theta = \alpha}$

→ Ans: $|\vec{P}+\vec{Q}| = |\vec{P}-\vec{Q}|$

$$\Rightarrow P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha = P^2+Q^2+2PQ\cos(180^\circ-\alpha)$$

$$\Rightarrow 2PQ\cos\alpha = -2PQ\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = -\cos\alpha$$

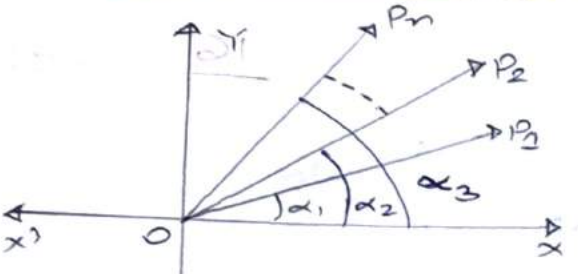
$$\Rightarrow 2\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = 0$$

$$\alpha = 90^\circ \text{ (Ans)}$$

15

বহু দিকরাশির বিভাজন (Resultant of multivectors):

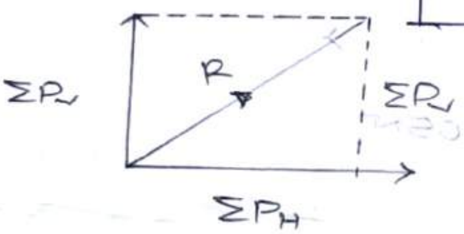


$$\Sigma P_H = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots + P_n\cos\alpha_n$$

$$\boxed{\Sigma P_H = \sum_{i=1}^{n} P_i\cos\alpha_i}$$

$$\Sigma P_V = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + \ldots + P_n\sin\alpha_n$$

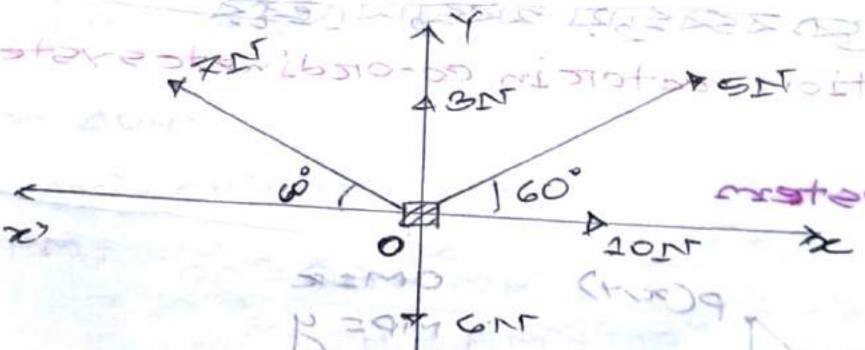
$$\boxed{\Sigma P_V = \sum_{i=1}^{n} P_i\sin\alpha_i}$$



$$\tan\theta = \frac{\Sigma P_V}{\Sigma P_H}$$

→ আনুভূমিক অবস্থানে ΣP_H এর সাথে।

$$R = \sqrt{(\Sigma P_H)^2 + (\Sigma P_V)^2}$$



চিত্রে, O বিন্দুতে একটি বস্তুর উপর বিভিন্ন বল ক্রিয়াশীল। বস্তুটির উপর কার্যকর লব্ধি বল নির্ণয় কর।

উঃ $\sum F_H = 10\cos 0° + 5\cos 60° + 3\cos 90° + 7\cos 120° + 6\cos 270°$

$= 10 + 2.5 - 3.5$

$= 12.5 - 3.5$

$\sum F_H = 9N$ → Horizontal

$\xrightarrow{+ve}$ $\uparrow +ve$

$\sum F_v = 10\sin 0° + 5\sin 60° + 3\sin 90° + 7\sin 120° + 6\sin 270°$

Vertical

$= 7.39$

$\approx 7.4N$

$\sum F_v = 7.4N$

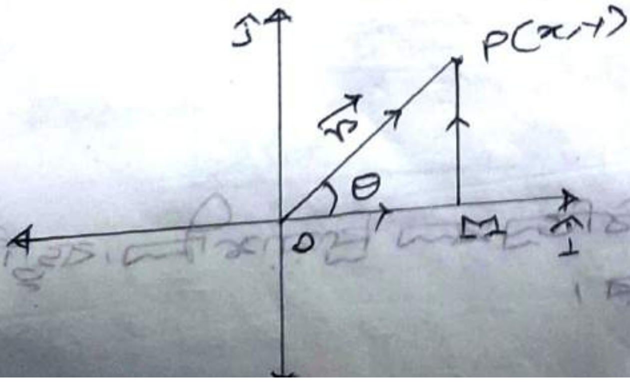
$R = \sqrt{9^2 + (7.4)^2} = 11.65N$

$\tan\theta = \frac{7.4}{9}$

$\theta = 39.4°$, 9N এর সাথে

Topic: 08: স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় অবস্থান ভেক্টর (Position vector in co-ordinate system):

case: 01: 2D System



OM = x

MP = y

in $\triangle OPM$,

$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}}$

$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$
$\overrightarrow{OM} = x\hat{i}$
$\overrightarrow{MP} = y\hat{j}$

মান: $r^2 = x^2 + y^2$

$\boxed{|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}}$

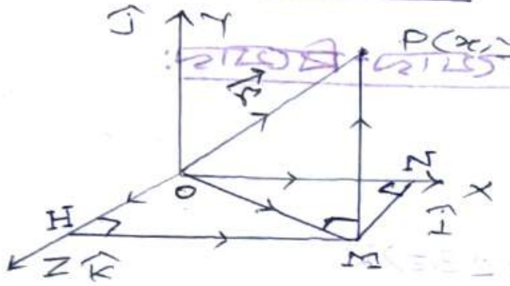
দিক:

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$\boxed{\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$

$\hookrightarrow$ with x axis

Case: 02: 3D system:



$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

P হতে XZ তলের উপর PM লম্ব, M হতে z অক্ষের উপর লম্ব, M হতে x অক্ষের উপর লম্ব N।

$ON = HM = x$
$OH = NM = z$ } যথাক্রমে
$MP = y$

$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$
$\overrightarrow{OH} = z\hat{k}$
$\overrightarrow{HM} = x\hat{i}$
$\overrightarrow{MP} = y\hat{j}$

in $\triangle OHM$, $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OM}$ ——(i)

in $\triangle OMP$, $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{MP}$ [using (i)]

$\boxed{\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}$

(5, 6, 7)
$\vec{r} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}$

মান: in $\triangle OHM$,

$OM^2 = OH^2 + HM^2$ ——(i)

in $\triangle OPM$, $OP^2 = OM^2 + MP^2$

$\therefore OP^2 = OH^2 + HM^2 + MP^2$

$= z^2 + x^2 + y^2$

$\therefore r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$y = f(x)$
$z = g(y)$
$z \to y \to x$

$z = g(y)$
$= g(f(x))$
$\boxed{z = gof(x)}$

So $fog(x)$
$= gof(g(x))$

*

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{9 + 16 + 25}$$
$$= 5\sqrt{2}$$

$$\hat{a} = \frac{(3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})}{5\sqrt{2}}$$

18

* $\hat{a} = \frac{3}{5\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{4}{5\sqrt{2}}\hat{j} + \frac{5}{5\sqrt{2}}\hat{k}$

$$|\hat{a}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5}{5\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$= 1$$

স্থানাঙ্কে ত্রিমাত্রায় অবস্থান ভেক্টরের যোগ বিয়োগ:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$
$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x)\hat{i} + (A_y \pm B_y)\hat{j} + (A_z \pm B_z)\hat{k}$$

$$\boxed{|\vec{A} \pm \vec{B}| = \sqrt{(A_x \pm B_x)^2 + (A_y \pm B_y)^2 + (A_z \pm B_z)^2}}$$

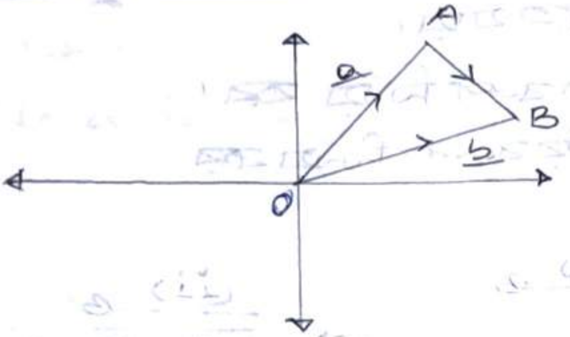
* $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$; $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির সমান্তরাল দিকে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

উ: $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(1+2)^2 + (2+1)^2 + (3+3)^2}$
$$= 3\sqrt{6}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{|\vec{A} + \vec{B}|} = \frac{3\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}}{3\sqrt{6}} \text{ (Ans.)}$$

Special observation:



A, B, C, D
$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$
$\vec{CD} = \underline{d} - \underline{c}$

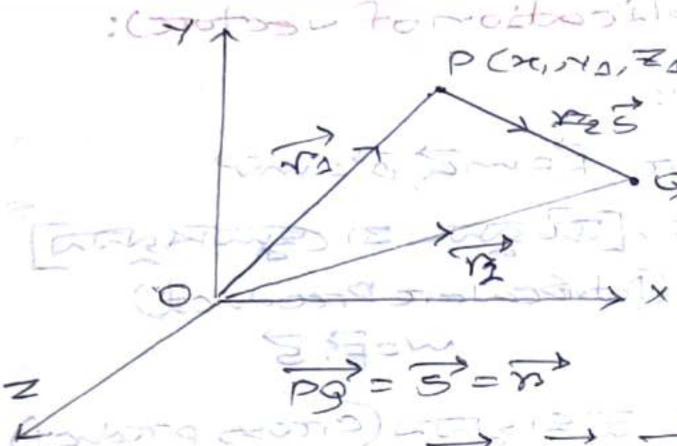
19

in $\triangle OAB$, $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$\Rightarrow \vec{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

সরণ ভেক্টর নির্ণয়: (Determination of displacement vector):



$\vec{r_1} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$

$\vec{r_2} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$

$\vec{PQ} = \vec{s} = \vec{r}$

in $\triangle OPQ$, $\vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OQ}$

$\Rightarrow \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$

$\Rightarrow \vec{PQ} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$

$\Rightarrow \vec{PQ} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{PQ} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}}$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

* ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় একটি বস্তু (1,2,3) বিন্দু হতে 2s এ (5,6,7) বিন্দুতে যায়।

20

(i) বস্তুটির সরণের ভেক্টর রূপ নির্ণয় কর।
(ii) বস্তুটির বেগের ভেক্টর রূপ নির্ণয় কর।
(হোমওয়ার্ক)

(i)

$\vec{P} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{Q} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}$

$\therefore \vec{S} = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$

(ii)

$|\vec{S}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2}$
$= 4\sqrt{3}$

বেগ $= \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

Topic: 09. ভেক্টরের গুণন (Multiplication of vector):

3 types of multiplication:

(i) Vector × ~~Vector~~ Scaler = Vector, $\vec{F} = m\vec{a}$, $\vec{p} = m\vec{v}$

(ii) Vector × Vector = Scaler, [ডট গুণন বা স্কেলার গুণন]
(Dot/Scaler Product)
$W = \vec{F} \cdot \vec{S}$

(iii) Vector × Vector = Vector ক্রস গুণন (Cross product)
(Related with rotation)

Function:

x	$h = x^2$
0	$0 = 0^2$
1	$1 = 1^2$
2	$4 = 2^2$
3	$9 = 3^2$

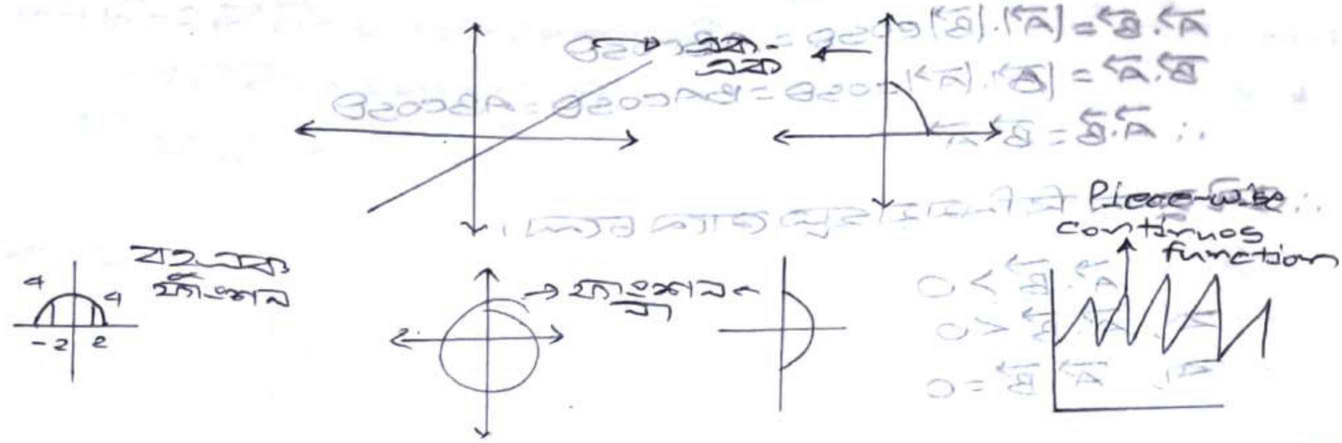
x = Independent variable
$h \rightarrow$ Dependent variable

Height is dependent on time:

Mathematician:

21

Height is a function of time

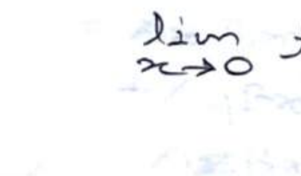


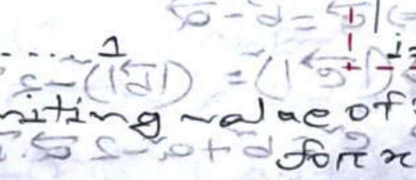
$f(x)=x^2$

$x=4,\ f(4)=16 \rightarrow$ functional value of $f(x)$ for $x=4$

$x=5,\ f(5)=25 \rightarrow$ " " " $f(x)$ " $x=5$

$f(x)=x$	$f(x)=\frac{x^2}{x}$
$f(1)=1$	$f(1)=1^2/1=1$
$f(2)=2$	$f(2)=2$
$f(0)=0$	$f(0)=\frac{0^2}{0}=$ undefined





$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-7x+10}{x-5}$

$\sum_{i=1}^{n}$, $n=1.2.3.4\ldots = n!$

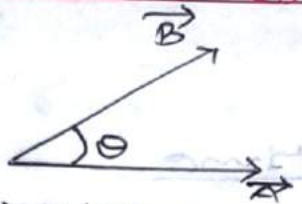
Method of approximation,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.000\ldots1$$

$\approx 0 \rightarrow$ limiting value of $f(x)$ for $x \to 0$

*যখন কোনো মানের জন্য কোনো function discontinuous হয়, তার জন্য limiting value বের করতে হয়।

Topic:10: ভেক্টরের স্কেলার গুণন



$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cos\theta = AB\cos\theta$

$\vec{B}\cdot\vec{A} = |\vec{B}|\cdot|\vec{A}|\cos\theta = BA\cos\theta = AB\cos\theta$

$\therefore \vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

∴ ডট গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

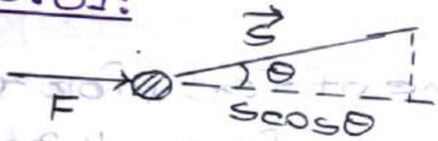
$\vec{A}\cdot\vec{B} > 0$

বা, $\vec{A}\cdot\vec{B} < 0$

বা, $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

Case:01:

Method:1

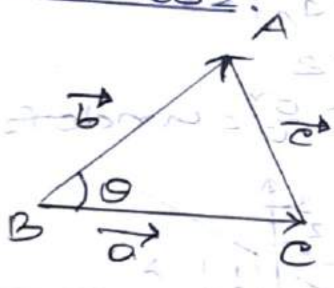


$w = \vec{F}\cdot\vec{S}$

$= FS\cos\theta$

$\therefore \vec{F}\cdot\vec{S} = FS\cos\theta \left[\vec{F} \wedge \vec{S} = \theta\right]$

~~Case:02~~: Method2:



Applying triangle law:

$\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$

$\Rightarrow (|\vec{c}|)^2 = (|\vec{b}|)^2 - 2\,\vec{b}\cdot\vec{a} + |\vec{a}|^2$

$\Rightarrow c^2 = b^2 + a^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b}$ ——(i)

ΔABC এ ত্রিভুজের cosine সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\theta \text{ —— (ii)}$$

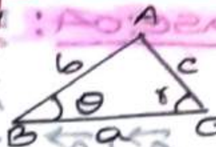
From (i) & (ii)

$$a^2+b^2-2\vec{a}\vec{b} = a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

$$-2\vec{a}\vec{b} = -2ab\cos\theta$$

$$\boxed{\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta}$$

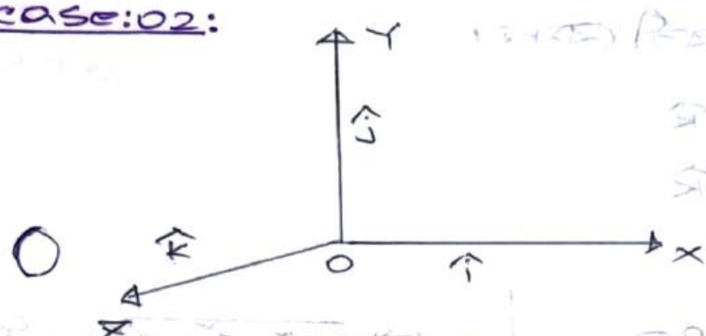
cosine সূত্র



$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\theta$

$b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\gamma$

case:02:



$\hat{i}\cdot\hat{i} = 1$ $\hat{i}\cdot\hat{j}=0$ $\hat{i}\cdot\hat{k}=0$

$\hat{j}\cdot\hat{j} = 1$ $\hat{j}\cdot\hat{k}=0$ $\hat{k}\cdot\hat{j}=0$

$\hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ $\hat{k}\cdot\hat{i}=0$ $\hat{j}\cdot\hat{i}=0$

$\hat{i}\cdot\hat{i} = |\hat{i}|.|\hat{i}|\cos0^\circ$
$= 1.1.1$
$= 1$

★ একই জাতীয় আয়ত একক ভেক্টরের ডট গুণফল 1

$\hat{i}\cdot\hat{j} = |\hat{i}|.|\hat{j}|.\cos90^\circ$
$= 1.1.0$
$= 0$

★ দুইটি ভিন্ন আয়ত একক ভেক্টরের ডট গুণফল 0

case:03:

$$\vec{A} = A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$$

$$= A_x B_x(\hat{i}\cdot\hat{i}) + A_x B_y(\hat{i}\cdot\hat{j}) + A_x B_z(\hat{i}\cdot\hat{k})$$
$$+ A_y B_x(\hat{j}\cdot\hat{i}) + A_y B_y(\hat{j}\cdot\hat{j}) + A_y B_z(\hat{j}\cdot\hat{k})$$
$$A_z B_x(\hat{k}\cdot\hat{i}) + A_z B_y(\hat{k}\cdot\hat{j}) + A_z B_z(\hat{k}\cdot\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

24

case:04: দুইটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত:-

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$

$\vec{A} \perp \vec{B}$, $\vec{A} \wedge \vec{B} = 90^\circ$ বা $\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = 0}$$

* $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$
$\vec{B} = \hat{i} - m\hat{j} + \hat{k}$ লম্ব হবে? $\Rightarrow m = 2$

$(2\times1) + (-3m) + 4 = 0$

case:05: দুইটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ।

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

Let, $\vec{A} \wedge \vec{B} = \theta$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

$B = |\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$

$$\Rightarrow AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\cdot\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

$$\therefore \boxed{\theta = \cos^{-1}\frac{A_xB_x + A_yB_y + A_z\cdot B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\cdot\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}}$$

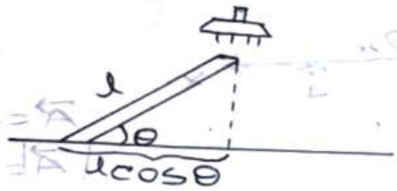
case:06: লম্ব অভিক্ষেপ: (Orthogonal Projection):-

⊕ অভিক্ষেপ (Projection): অভিক্ষেপ হলো কোনো কিছুর উপর কোনো কিছুর প্রভাব। (Effect of something on something)

↓

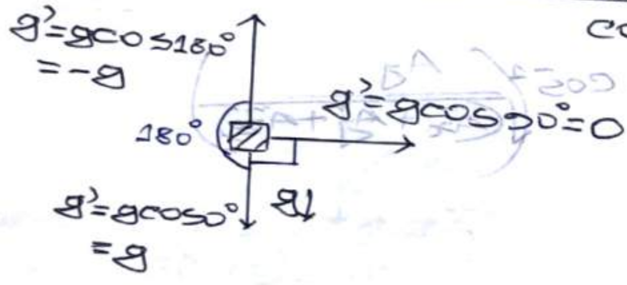
লম্ব অভিক্ষেপ

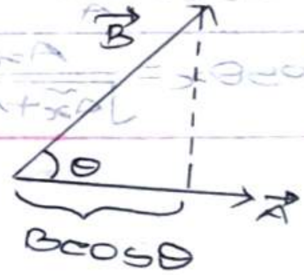
25



যার লম্ব অভিক্ষেপ তার $\cos\theta$, এখানে θ হচ্ছে যে দিকে লম্ব অভিক্ষেপ নিবো যে দিকে উৎপন্ন কোণ।

$\cos 90° = 0$





$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

$\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ

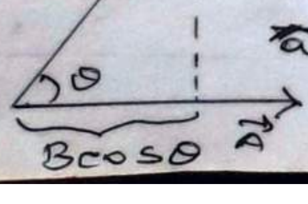
$$\boxed{B\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|}}$$

$\therefore \vec{B}$ " " $\vec{A}$ " "

$$\boxed{A\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}}$$

case:02: একটি ভেক্টর বরাবর আরেকটি ভেক্টরের অংশ:

Portion of a vector along a vector:



$\therefore \vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$ এর অংশ $= B\cos\theta\,\hat{a}$

$$\boxed{= \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A}\cdot\frac{\vec{A}}{A}}$$

$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{A}$

$\therefore \vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ এর অংশ $= A\cos\theta\,\hat{b}$

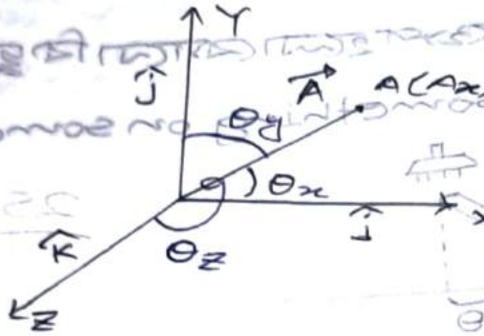
$$\boxed{= \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B}\cdot\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}}$$

case: 08:

Directional cosine

$\vec{A} = 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$
$\vec{B} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ হলে
$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরের অংশক নির্ণয় কর;

উপাংশের ক্ষেত্রে অংশক→ভেক্টর



$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

For θ_x:

$\vec{A}\cdot\hat{i} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k})$

26

$\Rightarrow |\vec{A}|\cdot|\hat{i}|\cos\theta_x = A_x$

$\Rightarrow A\cos\theta_x = A_x$

$\Rightarrow \cos\theta_x = \frac{A_x}{A}$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta_x = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}}$$

$$\theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{A_y}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}\right)$$

For θ_y:

$\vec{A}\cdot\hat{j} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot\hat{j}$

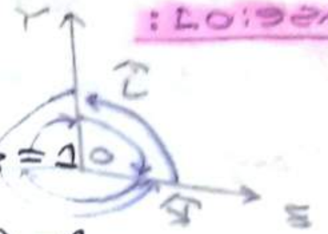
$\Rightarrow |\vec{A}|\cdot|\hat{j}|\cdot\cos\theta_y = A_y$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta_y = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}}$$

For θ_z:

$$\boxed{\cos\theta_z = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}}$$

$$\boxed{\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1}$$



$$1-\sin^2\theta_x + 1-\sin^2\theta_y + 1-\sin^2\theta_z = 1$$

$$\Rightarrow 3-(\sin^2\theta_x + \sin^2\theta_y + \sin^2\theta_z) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin^2\theta_x + \sin^2\theta_y + \sin^2\theta_z = 2}$$

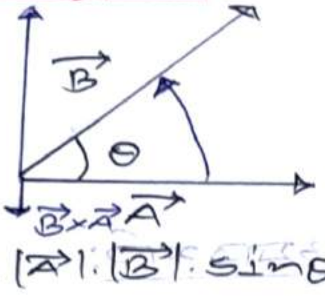
27

* $\vec{A} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $|\vec{A}| = A = \sqrt{3}$

$$\cos\theta_x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\theta_y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\theta_z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$
$$= 1$$

Topic: 11: ক্রসগুণন: $\longrightarrow$ Realated with rotational impact



$\vec{A}\times\vec{B} =$

$\uparrow$ ccw

$$\vec{A}\times\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|\sin\theta.\hat{n}$$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যেই তলে অবস্থিত সেই তলের লম্ব বরাবর উপরের দিকে অথবা নিচের দিকে।

$\downarrow$ c.w

$$\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A} = -AB\sin\theta.\hat{n}$$

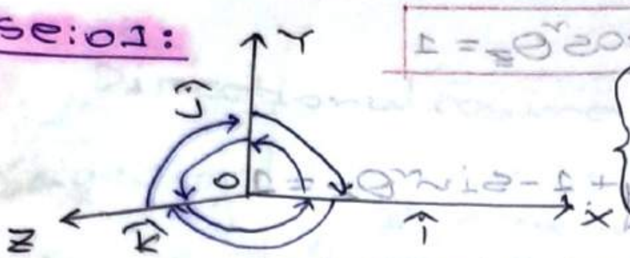
$$\therefore \vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

আবার, $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{B}\times\vec{A}|$

or $\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$

case:01:



$$\left\{\begin{array}{l}\hat{i}\times\hat{i}=0\\ \hat{j}\times\hat{j}=0\\ \hat{k}\times\hat{k}=0\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l}\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}\\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l}\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}\\ \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}\\ \hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}\end{array}\right.$$

28

$$\hat{i}\times\hat{i}=|\hat{i}||\hat{i}|\sin 0^\circ\,\hat{n} = 0$$

$$\hat{i}\times\hat{j}=|\hat{i}|.|\hat{j}|.\sin 90^\circ\,\hat{n} = \hat{n} = \hat{k}$$

lecture-08

case:02:

$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$$
$$\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$$
$$=\hat{i}(A_yB_z-A_zB_y)+\hat{j}(A_zB_x-A_xB_z)+\hat{k}(A_xB_y-A_yB_x)$$

$$\boxed{\therefore \vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}}$$

case:03: দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হওয়ার শর্ত:

$\vec{A}\parallel\vec{B}$ $\quad \vec{A}\wedge\vec{B}=0$

$\boxed{\vec{A}\times\vec{B}=0}$ ⇒ দুইটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ 0° হলে তাদের ক্রস গুণফল 0।

এখন,

$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k} \qquad \vec{A}\parallel\vec{B}$$
$$\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k} \qquad \therefore \vec{A}\wedge\vec{B}=0^\circ$$

$$\therefore \vec{A}\times\vec{B}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=0$$

স্বীকার্য:

$$|\vec{A}\times\vec{B}|^2 + |\vec{A}\cdot\vec{B}|^2 = A^2B^2$$

$$\Rightarrow |\vec{A}\times\vec{B}| + A^2B^2\cos^2\theta = A^2B^2$$

$$\Rightarrow |\vec{A}\times\vec{B}|^2 = A^2B^2 - A^2B^2\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow |\vec{A}\times\vec{B}|^2 = A^2B^2(1-\cos^2\theta)$$

$$\Rightarrow |\vec{A}\times\vec{B}|^2 = A^2B^2\sin^2\theta$$

$$\boxed{\Rightarrow |\vec{A}\times\vec{B}| = AB\sin\theta}$$

এক্ষেত্রে ও $\sin\theta$ ~~[illegible]~~ যেভাবে আছে।

$$\Rightarrow \hat{i}(A_yB_z - A_zB_y) - \hat{j}(A_xB_z - A_zB_x) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x) = 0 \quad \text{(ii)}$$

যেহেতু সমীকরণের ডানপাশে 0 তাই সমীকরণের বামপাশে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগকে আলাদা আলাদা ভাবে শূন্য হতে হবে।

30

$$\therefore A_yB_z - A_zB_y = 0; \quad A_xB_z - A_zB_x = 0; \quad A_xB_y - A_yB_x = 0$$

$$\Rightarrow A_yB_z = A_zB_y; \quad A_xB_z = A_zB_x \quad \Rightarrow A_xB_y = A_yB_x$$

$$\Rightarrow \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} \quad \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_z}{B_z} \quad \Rightarrow \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} \quad \text{(iii)}$$

$$\therefore \boxed{\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}}$$

case:04: দুইটি ভেক্টরের সমান্তরালে একটি লম্ব একক ভেক্টর

$\vec{A}$ & $\vec{B}$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\, \hat{n}$$

$$\therefore \hat{n} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{AB\sin\theta}$$

$$\boxed{\hat{n} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}}$$

(i) $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় যে সমতলে অবস্থিত সেই সমতলের লম্ব বরাবর একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

$$\Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & +1 \\ 2 & -1 & +4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-4+1) - \hat{j}(4-2) + \hat{k}(-1+2)$$

$$= -3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\hat{n} = \frac{-3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}{\cancel{AB\sin\theta}\ \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (1)^2}} \quad \therefore \hat{n} = \frac{-3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{14}}$$

(ii) $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}\times\vec{B}|$ হলে, $\vec{A}\wedge\vec{B} = ?$

উঃ $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}\times\vec{B}|$

$\Rightarrow AB\cos\theta = AB\sin\theta$

$\Rightarrow \tan\theta = 1$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ (Ans.)

(iii) এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা xz তলে অবস্থিত এবং $(3\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k})$ ভেক্টরদ্বয়ের সাথে লম্ব।

উঃ ধরি, ভেক্টরটি $\vec{A} = A_x\hat{i}+A_z\hat{k}$

$\therefore \vec{A}\cdot(3\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow (A_x\hat{i}+A_z\hat{k})\cdot(3\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 3A_x - 3A_z = 0$

$\Rightarrow A_x = A_z$

$\vec{A} = A_x\hat{i}+A_x\hat{k}$

$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2+A_x^2}$

$= \sqrt{2}A_x$

$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x(\hat{i}+\hat{k})}{\sqrt{2}A_x}$

$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}+\hat{k})$ (Ans.)

(iv) $\vec{A}\times\vec{B} = \hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ হলে,

$|(\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}-\vec{B})| = ?$

উঃ

$(\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}-\vec{B}) = \vec{A}\times\vec{A} - \vec{A}\times\vec{B} + \vec{B}\times\vec{A} - \vec{B}\times\vec{B}$

$= -\vec{A}\times\vec{B} - \vec{A}\times\vec{B}$

$= -2(\vec{A}\times\vec{B})$

$= -2(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$

$= -2\hat{i}-4\hat{j}-2\hat{k}$

$\therefore |(\vec{A}+\vec{B}) \times (\vec{A}-\vec{B})| = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(-2)^2}$

$= \sqrt{24}$

$= 2\sqrt{6}$ (Ans.)

প্র: $(6\hat{i}+7\hat{j}+8\hat{k})$ ভেক্টরটিকে এমন দুইটি ভেক্টরের যোগফল আকারে প্রকাশ কর যার একটি $(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ ভেক্টরের সাথে লম্ব এবং অপরটি $(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})$ ভেক্টরের সমান্তরাল।

সমা: $\vec{A} = \vec{A_1} + \vec{A_2}$

ধরি, A_1, $(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ এর সাথে লম্ব এবং A_2, $(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})$ এর সাথে সমান্তরাল

Let, $\vec{A_2} = m(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})$

$\Rightarrow \vec{A_2} = 2m\hat{i}+3m\hat{j}+4m\hat{k}$ —— (i)

$\vec{A} = 6\hat{i}+7\hat{j}+8\hat{k}$

$\Rightarrow \vec{A_1}+\vec{A_2} = 6\hat{i}+7\hat{j}+8\hat{k}$

$\Rightarrow \vec{A_1} = (6\hat{i}+7\hat{j}+8\hat{k}) - (2m\hat{i}+3m\hat{j}+4m\hat{k})$

$\vec{A_1} = (6-2m)\hat{i}+(7-2m)\hat{j}+(8-4m)\hat{k}$ —— (ii)

যেহেতু, $\vec{A_1}$, $(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ এর সাথে লম্ব

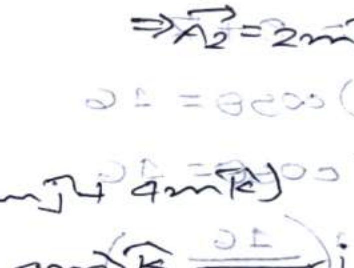
$\therefore \vec{A_1} \cdot (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow \{(6-2m)\hat{i}+(7-3m)\hat{j}+(8-4m)\hat{k}\} \cdot (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 6-2m+7-3m+8-4m = 0$

$\Rightarrow 21-9m = 0$

$\Rightarrow m = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$



m এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\vec{A_2} = 2 \cdot \frac{7}{3}\hat{i} + 7\hat{j} + \frac{28}{3}\hat{k}$

m এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$A_1 = \ldots\ldots$

(*) $\vec{A} = 9\hat{i}+8\hat{j}+7\hat{k}$, ভেক্টরটির xz তলের সাথে উৎপন্ন কোণ নির্ণয় কর।

উঃ মনেকরি,

xz তলে একটি ভেক্টর, $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_z\hat{k}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

$\Rightarrow (9\hat{i}+8\hat{j}+7\hat{k})(B_x\hat{i}+B_z\hat{k}) = \sqrt{9^2+8^2+7^2}\sqrt{B_x^2+B_z^2}\cos\theta$

$\Rightarrow 9B_x + 8P\,7B_z = \sqrt{194}$

$\vec{A} = 9\hat{i}+8\hat{j}+7\hat{k}$

$|\vec{A}| = \sqrt{81+64+49}$

$= \sqrt{194}$

$\vec{A}\cdot(\hat{i}+\hat{k}) = 9+7$

$\Rightarrow A\cdot(\hat{i}+\hat{k})\cos\theta = 16$

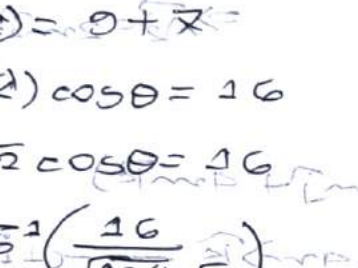
$\Rightarrow \sqrt{194}\cdot\sqrt{2}\cos\theta = 16$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{16}{\sqrt{194}\cdot\sqrt{2}}\right)$

$= 35.68$ (Ans)

Topic: 12: Area related Problem:

case: 01: ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Area of triangle):-



$\vec{BC} = \vec{p}$ $\therefore |\vec{BC}| = p$

$\vec{BA} = \vec{q}$ $|\vec{BA}| = q$

$$\boxed{(ABC) = \frac{1}{2}\left|\vec{P}\times\vec{Q}\right|}$$

In $\triangle ABD$

$\sin\theta = \frac{h}{AB}$

$\Rightarrow h = AB\sin\theta$

$\Rightarrow h = Q\sin\theta$

$$(ABC) = \frac{1}{2} BC \cdot AD$$
$$= \frac{1}{2} PQ\sin\theta$$

★ একটি ত্রিভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু বরাবর দুইটি ভেক্টর ক্রিয়া করলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঐ দুই ভেক্টরের ক্রস গুণফলের মানের অর্ধেক।

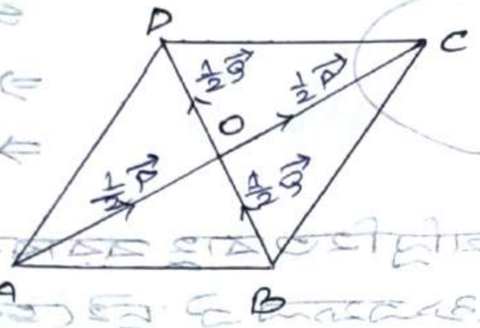
<u>case:02:</u> সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল (Area of Parallelogram)

$$(ABCD) = 2\,(ABC)$$
$$= 2\times\frac{1}{2}\left|\vec{P}\times\vec{Q}\right|$$

$$\boxed{(ABCD) = \left|\vec{P}\times\vec{Q}\right|}$$

★ একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু বরাবর দুইটি ভেক্টর ক্রিয়া করলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হবে ভেক্টরদ্বয় ক্রসগুণফলের মানের সমান।

case:03: রম্বসের ক্ষেত্রফল (Area of Rhombus):



$\vec{AC} = \vec{P}$

$\vec{BD} = \vec{Q}$

$\vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{P}$

$\vec{OB} = \frac{1}{2}\vec{Q}$

$(ABCD) = 4 \times (AOB)$

$= 4 \times \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}\vec{P} \times \frac{1}{2}\vec{Q} \right|$

$= 4 \times \frac{1}{8} \left| \vec{P} \times \vec{Q} \right|$

$$\boxed{(ABCD) = \frac{1}{2} \left| \vec{P} \times \vec{Q} \right|}$$

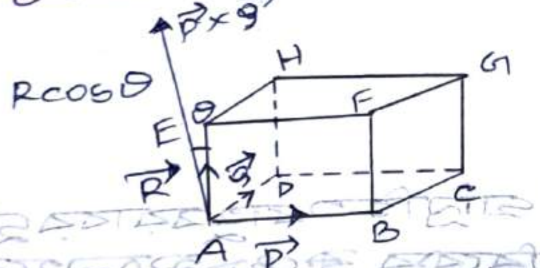
$\frac{1}{2} PQ \sin\theta$

$\frac{1}{2} PQ \sin 90^\circ$

$\frac{1}{2} PQ$

Topic: 13: Volume Related Problem

ঘনবস্তু বা সামান্তরকের আয়তন



সামান্তরিক এর 3D হচ্ছে সামান্তরক

ABCD তলের ক্ষেত্রফল $= |\vec{P} \times \vec{Q}|$

$\therefore$ সামান্তরকের আয়তন $= |\vec{P} \times \vec{Q}| . R\cos\theta$

$= (\vec{P} \times \vec{Q}) . \vec{R}$

$\vec{P} = P_x\hat{i} + P_y\hat{j} + P_z\hat{k}$

$\vec{Q} = Q_x\hat{i} + Q_y\hat{j} + Q_z\hat{k}$

$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$

$$\vec{P}\times\vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(P_yQ_z - P_zQ_y) - \hat{j}(P_xQ_z - P_zQ_x) + \hat{k}(P_xQ_y - P_yQ_x)$$

$$(\vec{P}\times\vec{Q})\times\vec{R} = \{\hat{i}(P_yQ_z - P_zQ_y) - \hat{j}(P_xQ_z - P_zQ_z) + \hat{k}(P_xQ_y - P_yQ_x)\}.(R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k})$$

$$= R_x(P_yQ_z - P_zQ_y) - R_y(P_xQ_z - P_zQ_x) + R_z(P_xQ_y - P_yQ_x)$$

$$\boxed{\text{আয়তন} = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}}$$

তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হওয়ার শর্ত:

$$\boxed{(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C} = 0}$$

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = 0$$

Topic: 14: আপেক্ষিক বেগ (Relative velocity)

কোনো বস্তুর সাপেক্ষে কোনো বস্তুর বেগকে আপেক্ষিক বেগ বলা হয়।

* আপেক্ষিক বেগ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে যে বস্তুর আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করতে হবে তার বেগ থেকে যে বস্তুর সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করতে হবে তার বেগ বিয়োগ করতে হবে। প্রাপ্ত বেগের মান ও দিক হবে আপেক্ষিক বেগের মান ও দিক।

37

v_{DE}

$\boxed{A} \rightarrow v_A$

$\boxed{B} \rightarrow v_B$

B বস্তুর সাপেক্ষে A এর বেগ, v_{AB} or $v_{A/B}$
→ velocity of 'A' with respect to B

A বস্তুর সাপেক্ষে B এর বেগ, v_{BA}
→ velocity of B with respect to A

$$\boxed{v_{AB} = v_A - v_B}$$

$$\boxed{v_{BA} = v_B - v_A}$$

$$\boxed{v_{CD} = v_C - v_D}$$

বস্তুদ্বয় একই সরলরেখায় বা সমান্তরালে গতিশীল:

case: 01: বস্তুদ্বয় একই দিকে গতিশীল:

(+ve) →

$\boxed{A} \rightarrow v_A = 12\ ms^{-1}$

$\boxed{B} \rightarrow v_B = 10\ ms^{-1}$

$v_{AB} = v_A - v_B = (12-10) = 2\,ms^{-1} \longrightarrow$

$v_{BA} = v_B - v_A = (10-12) = -2\,ms^{-1} \longleftarrow$

38

case:02: বস্তুদ্বয় বিপরীত দিকে গতিশীল:

(+ve) $\longrightarrow$

$\boxed{A} \longrightarrow v_A = 12\,m/s$

$\longleftarrow \boxed{B}$

$v_B = -10\,m/s$

$\therefore v_{AB} = v_A - v_B = 12-(-10) = 22\,ms^{-1} \longrightarrow$

$\therefore v_{BA} = v_B - v_A = -10-12 = -22\,ms^{-1} \longleftarrow$

case:03: একটি বস্তু স্থির ও একটি বস্তু গতিশীল:

✓

$v_C = 80\,km/h$ (+ve) $\longrightarrow$

$v_T = 0$

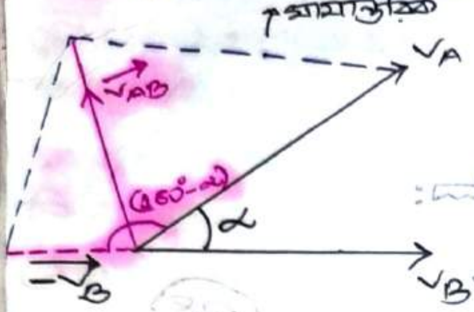
গাড়িবেগ 80 km/h
তাও আপেক্ষিক, অন্য
এর সাপেক্ষে।

$v_{TC} = \cancel{v_T}^{\,0} - v_C = -80\,km/h \longleftarrow$

$v_{CT} = v_C - \cancel{v_T}^{\,0} = 80\,km/h \longrightarrow$

$v_{AG} = v_A - \cancel{v_G}^{\,0}$
$= v_A$

বস্তুদ্বয় একই দিকে বা সমান্তরালে গতিশীল না হলে:

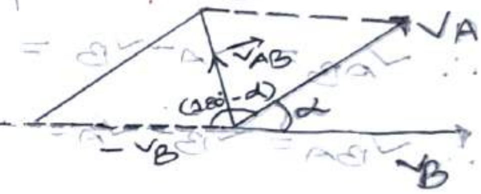


$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$
$$\Rightarrow \vec{v}_{AB} = \vec{v}_A + (-\vec{v}_B)$$

$v_{AB} = v_A - v_B$
$= v_A + (-v_B)$
→ যার সাপেক্ষে আ. বেগ নির্ণয় করতে হয় তার বেগ বিপরীত দিকে যোগ করতে হয়।
$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A + (-\vec{v}_B)$

$$|\vec{v}_{AB}| = v_{AB} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 + 2v_A v_B \cos(180^\circ-\alpha)}$$

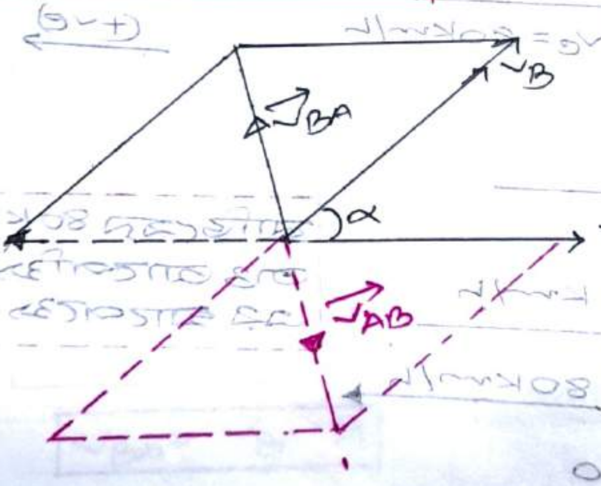
$$\therefore \boxed{v_{AB} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos\alpha}}$$



$$\tan\theta = \frac{v_B \sin(180^\circ-\alpha)}{v_A + v_B\cos(180^\circ-\alpha)}$$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{v_B \sin\alpha}{v_A - v_B\cos\alpha}}$$ ⇒ v_A এর সাথে

39



* $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ বস্তুদ্বয়ের বেগ যথাক্রমে $12\,ms^{-1}$ ও $10\,ms^{-1}$। বস্তুদ্বয় পরস্পর এর সাথে 60° কোণে গতিশীল হলে, A বস্তুর সাপেক্ষে B বস্তুর বেগ নির্ণয় কর।

উ:

$|\vec{v}_A| = 12\,ms^{-1}$
$|\vec{v}_B| = 10\,ms^{-1}$
$\alpha = 60^\circ$

$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A + (-\vec{v}_B)$

$\therefore V_{BA} = \sqrt{12^2 + 10^2 + 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \cos(180^\circ - 60^\circ)}$

$= 2\sqrt{31}\ ms^{-1}$ (Ans.)

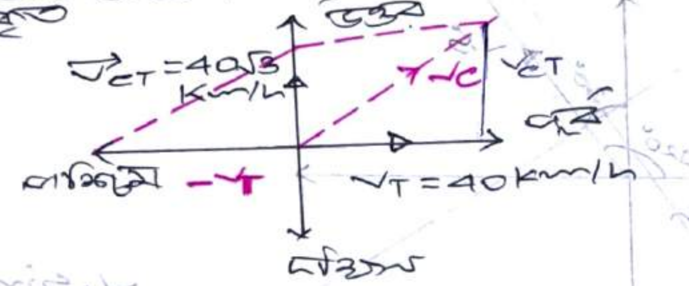
$\tan\theta = \cancel{\dfrac{v_B \sin(180^\circ-\alpha)}{v_A + v_B\cos(180^\circ-\alpha)}}$ $\qquad \dfrac{v_A \sin(180^\circ-\alpha)}{v_B + v_A\cos(180^\circ-\alpha)}$

$= \cancel{51.05^\circ}$ (Ans.) $\qquad = 68.95$

* 40 km/h বেগে পূর্ব দিকে গতিশীল একটি ট্রাক একটি গাড়িকে $40\sqrt{3}$ km/h বেগে উত্তর দিকে যেতে দেখতে পেল। গাড়িটির ~~আপেক্ষিক~~ প্রকৃত বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

40

উ:



Method-1:

$\vec{V}_{CT} = \vec{V}_C - \vec{V}_T$

$\Rightarrow \vec{V}_C = \vec{V}_{CT} + \vec{V}_T$

$V_C = \sqrt{V_{CT}^2 + V_T^2}$

$= \sqrt{(40\sqrt{3})^2 + (40\cancel{\sqrt{3}})^2}$

$= 80$ km/h

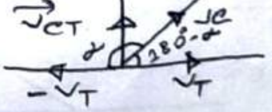
Method-2:

ডাইরেক্ট জ্যামিতিক

$v_C = \sqrt{V_{CT}^2 + V_T^2}$

$= \sqrt{(40\sqrt{3})^2 + 40^2}$

$= 80$ km/h



দিক: $\tan 90^\circ = \dfrac{v_C \sin\alpha}{v_T + v_C\cos\alpha}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{0} = \dfrac{v_C\sin\alpha}{v_T + v_C\cos\alpha}$

$\Rightarrow v_T + v_C\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{v_T}{v_C}$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{\cancel{80}\,40}{80}$

$\Rightarrow \cos\alpha = -1/2$

$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(-\tfrac{1}{2})$

$\Rightarrow \alpha = \cancel{180^\circ}\ 120^\circ$

$\therefore 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

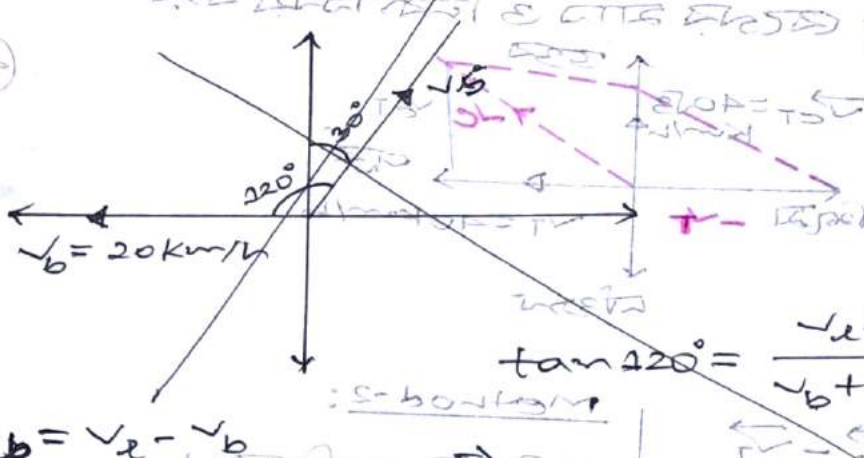
$\therefore$ গাড়িটি ট্রাকের সাথে 60° কোণে গতিশীল।

* যমুনায় 20km/h বেগে পশ্চিম দিকে গতিশীল একজন নৌকার মাঝি উত্তরের দিকে 30° কোণে চলমান একটি জাহাজকে উত্তর দিকে যেতে দেখল।

(i) নৌকার সাপেক্ষে জাহাজের আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় কর।

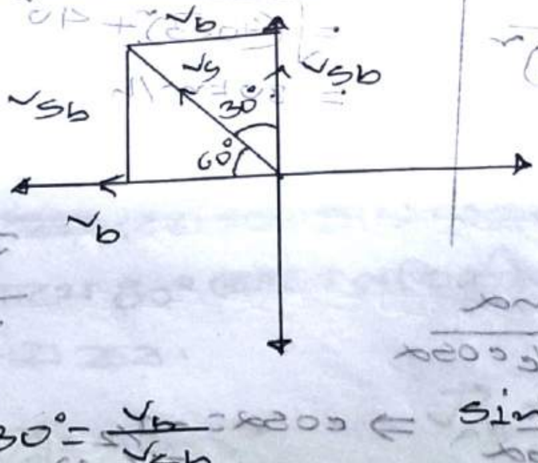
(ii) জাহাজের প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

(i)



$$\tan 120^\circ = \frac{v_s \sin 120^\circ}{v_b + v_s \cos 120^\circ}$$

$v_{sb} = v_s - v_b$ ⇒



$$\tan 30^\circ = \frac{v_b}{v_{sb}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{20}{v_{sb}}$$

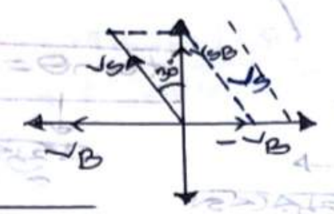
$$\Rightarrow v_{sb} = 20\sqrt{3} \text{ km/h}$$

$$\sin 60^\circ = \cancel{\frac{v_s}{v_{sb}}} = \frac{v_{sb}}{v_s}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\cancel{2\sqrt{3}}\,20}{\cancel{v_{sb}}} \quad \frac{v_{sb}}{20 v_b}$$

$$\Rightarrow v_{sb} = \cancel{40\text{km/h}}$$

$20\sqrt{3}$ Km/h



$$\therefore |\vec{V}_g| = \sqrt{v_{sB}^2 + v_B^2}$$
$$= \sqrt{(20\sqrt{3})^2 + (20)^2} = 40\ km/h$$

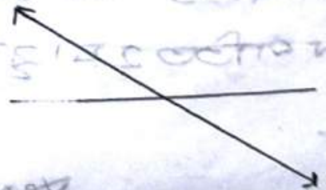
* 2 টি বস্তু যথাক্রমে $10\ ms^{-1}$ এবং $15\ ms^{-1}$ বেগে গতিশীল। বস্তু দুইটি পরস্পরের সাথে $120°$ কোণে গতি করছে।
(i) ১ম বস্তুর সাপেক্ষে ২য় বস্তুর আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় কর।
(ii) পরস্পরকে অতিক্রম করার 5s পর বস্তুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

(i) B

$$\tan\theta = \frac{10\sin 60°}{15 + 10\cos 60°}$$

$$\therefore v_{12} = \sqrt{(10)^2 + (15)^2 + 2\times 15\times 10\cos 60°}\ ms^{-1}$$
$$= 5\sqrt{19}\ ms^{-1}$$

(ii)



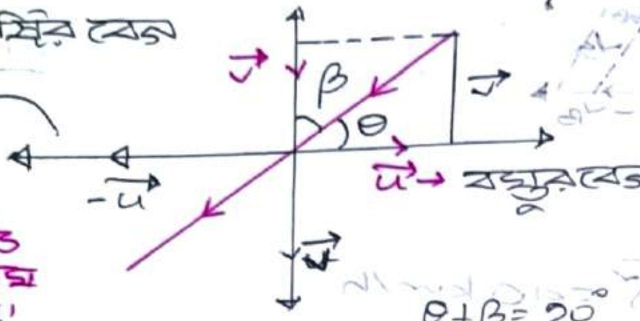
$s = vt$

$\therefore$ 5 sec পর দূরত্ব, $s = v_{21} \times 5$
$= (21.75 \times 5)\ m$
$= 108.75\ m$

Topic: 14:

⊞ বৃষ্টি ও ছাতা সংক্রান্ত সমস্যা:

find factor



Relative wind ⇓ সামনে যাওয়ার জন্য পিছনে বাতাস চলে আসছে।

$\boxed{\tan\theta = \frac{v}{u}}$ ↓ বস্তুর বেগের সাথে

$\boxed{\tan\beta = \frac{u}{v}}$ → বৃষ্টির বেগের সাথে/ উলম্বের সাথে

$\theta + \beta = 90°$

* একজন পথচারী $6ms^{-1}$ বেগে গতিশীল, $4ms^{-1}$ বেগে বৃষ্টি পড়ছে, পথচারী বৃষ্টি থেকে বাঁচার জন্য উলম্বের সাথে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে?

উ:

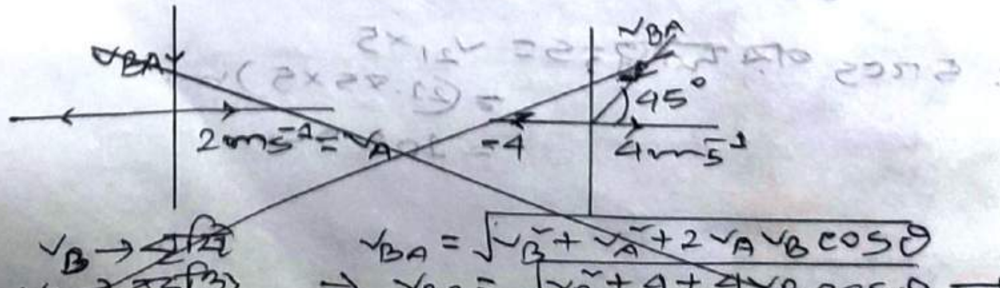
43

$$\tan\beta = \frac{6}{4}$$
$$\Rightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{6}{4}\right)$$
$$= 56.31° \text{ (Ans)}$$

∴ বৃষ্টির লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{v^2 + u^2}$

* একজন বালক সমতলে বৃষ্টির দিকে $2ms^{-1}$ বেগে চললে বৃষ্টি তার উপর লম্বভাবে পড়ে। ঐ একই দিকে বালকটি ~~একটি~~ $4ms^{-1}$ বেগে চললে বৃষ্টি বালকের বেগের সাথে $45°$ কোণে পতিত হয়। বৃষ্টির প্রকৃত বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

উ:



$\Rightarrow$ $v_B \rightarrow$ বৃষ্টি, $v_A \rightarrow$ বালক

$$v_{BA} = \sqrt{v_B^2 + v_A^2 + 2v_Av_B\cos\theta}$$
$$\Rightarrow v_{BA} = \sqrt{v_B^2 + 4 + 4v_B\cos\theta} \quad \text{—(i)}$$

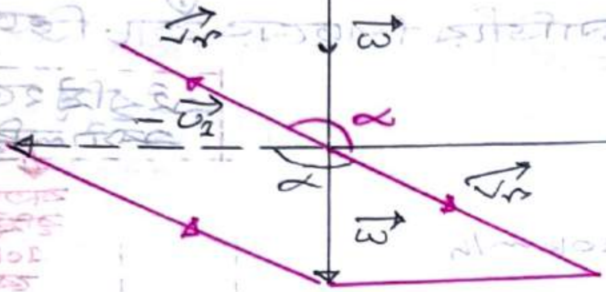
44

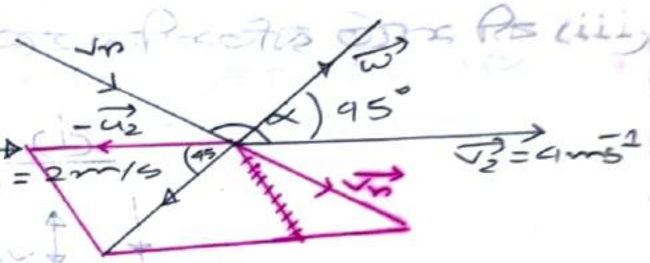
$v_{BA} = \sqrt{}$

$\tan 135^\circ = \dfrac{4\sin 135^\circ}{v_B + 4\cos 135^\circ}$

$\Rightarrow -v_B + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow v_B = 0$





$\tan 90^\circ = \dfrac{v_r \sin\alpha}{2 + v_r\cos\alpha}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{0} = \dfrac{v_r \sin\alpha}{2 + v_r\cos\alpha}$

$\Rightarrow 2 + v_r\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow v_r\cos\alpha = -2$ ——— (i)

$\tan 45^\circ = \dfrac{v_r \sin\alpha}{4 + v_r\cos\alpha}$

$\Rightarrow 1 = \dfrac{v_r \sin\alpha}{4-2}$

$\Rightarrow v_r \sin\alpha = 2$ ——— (ii)

(ii) ÷ (i) করে, $\tan\alpha = -1$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ বা $135^\circ \Rightarrow$ (i)

$v_r \cos 135^\circ = -2$

$\Rightarrow v_r\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2$

$\Rightarrow v_r = 2\sqrt{2}\ m/s$

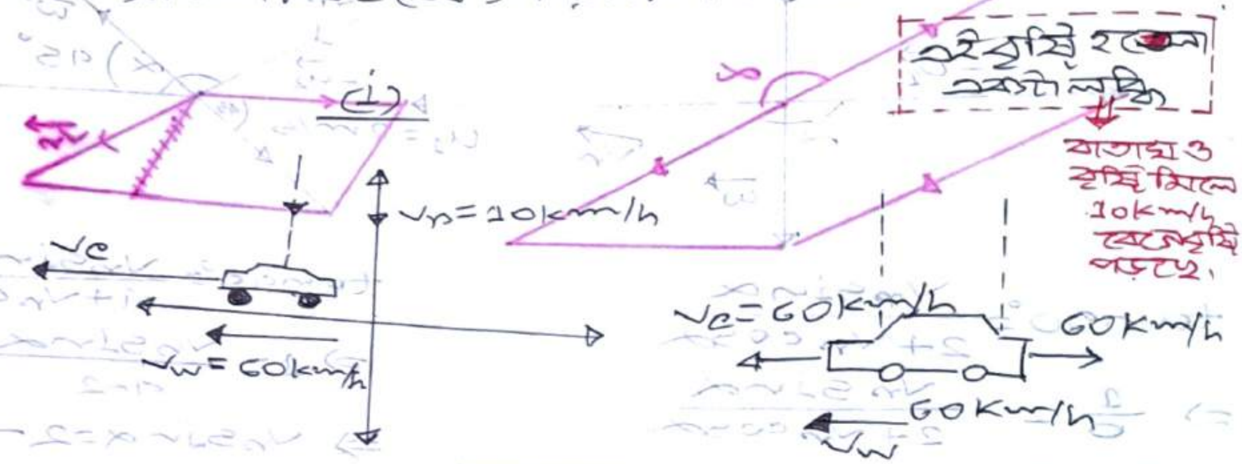
একটি গাড়ি পূর্ব থেকে পশ্চিম দিকে গতিশীল। 10 km/h বেগে বৃষ্টি পড়ছে। 60 km/h বেগে পূর্ব থেকে পশ্চিম দিকে ঝড় বাতাস বইছে।

(i) গাড়িটি কত বেগে গতিশীল হলে গাড়িটির উভয় কাচ ভিজবে? 45

(ii) কী শর্তে গতিশীল হলে গাড়িটির সামনের কাচ ভিজবে?

(iii) কী শর্তে গতিশীল হলে গাড়িটির পিছনের কাচ ভিজবে?

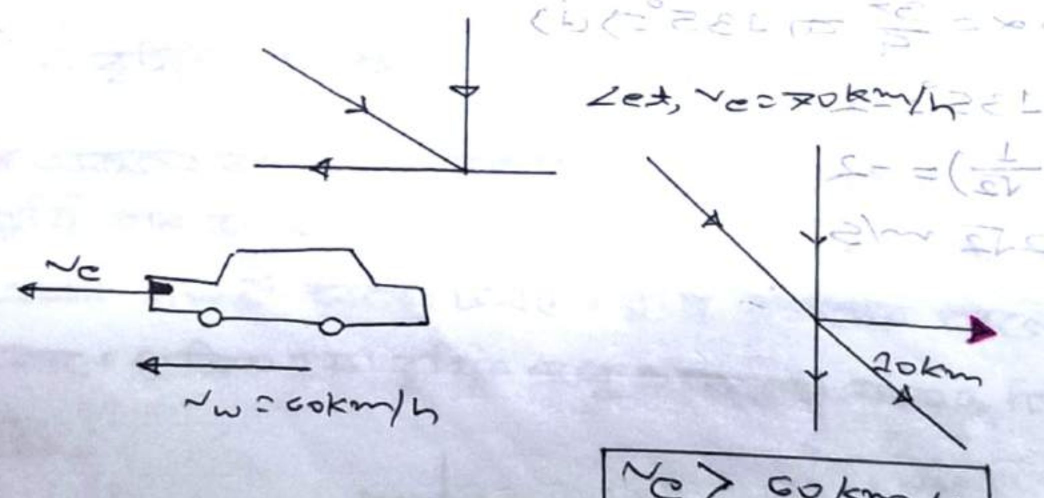
(i)



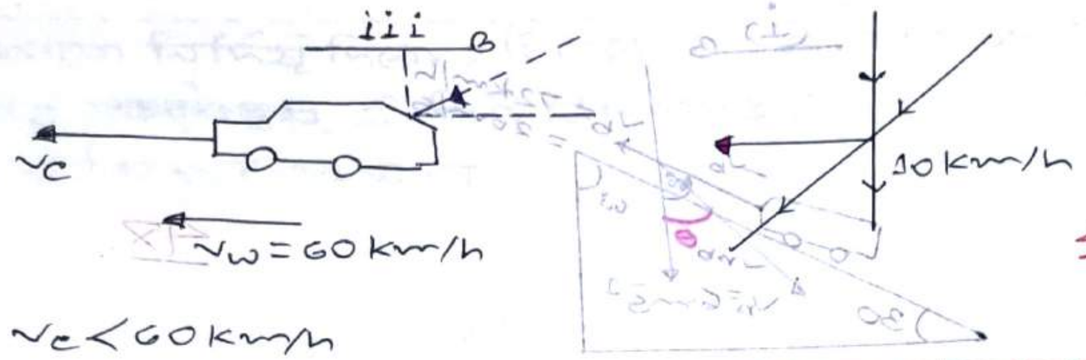
$\boxed{V_C = 60 \text{ km/h}}$

গাড়ির বেগের ফলে পেছনে 60 km/h বেগে বাতাস যেয়ে কাটাকাটি হয়ে যাবে।

(ii)



$\boxed{V_C > 60 \text{ km/h}}$



46

$v_C < 60$ km/h

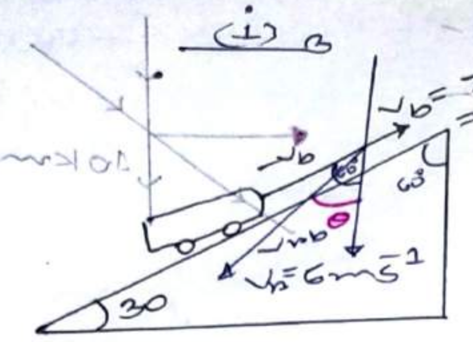
★ বাতাসের দিক এবং গাড়ির বেগের দিক একই দিকে হলে এই condition apply করা যাবে কিন্তু বিপরীত দিকে হলে শুধু ~~বিয়োগফলের~~ যোগফলের মান নিতে হবে।

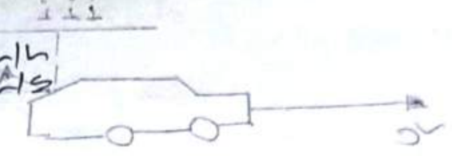
* 30° কোণে আনত পাহাড়ের ঢাল বেয়ে 72 km/h সমবেগে একটি বাস উপরে উঠছে। এমন সময় হঠাৎ বৃষ্টি $6\ ms^{-1}$ সমবেগে খাড়া নিচের দিকে পড়তে শুরু করল। বৃষ্টি যখন প্রায় শেষ তখন আনুভূমিকভাবে বায়ু প্রবাহ শুরু হলো।

(খ) শুরুতে বাস চালক কত কোণে বৃষ্টি পড়তে দেখবে নির্ণয় কর।

(গ) বায়ু প্রবাহের দরুন বাস চালক খাড়া নিচের দিকে বৃষ্টি পড়তে দেখলে, বায়ু প্রবাহের প্রকৃত মান ও দিক গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ঘ) বায়ু প্রবাহের দরুন বাস চালক আনত তলের সাথে লম্বভাবে বৃষ্টি পড়তে দেখলে, বায়ু প্রবাহের প্রকৃত মান ও দিক নির্ণয় কর।





$$v_{nb} = \sqrt{v_b^2 + v_n^2 + 2 v_b v_n \cos 60^\circ}$$

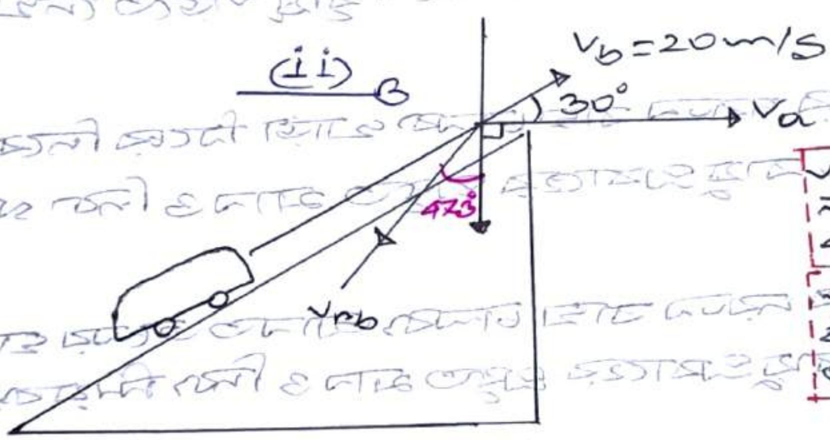
$$= \sqrt{(20)^2 + (6)^2 + 2 \times 20 \times 6 \times \frac{1}{2}}$$

উল্লম্বের সাথে 47.27° কোণে ঘুরিয়ে পড়তে দেখাবে।

$$= 23.57 \text{ m/s}$$

$$\tan\theta = \frac{v_b \sin 60^\circ}{v_n + v_b \cos 60^\circ} \qquad \therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{10\sqrt{3}}{16}\right) = 47.269^\circ \text{ (Ans)}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{20 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{6 + 20 \times \frac{1}{2}} = \frac{10\sqrt{3}}{16}$$



v_a এবং v_{nb} এর লব্ধির দিকে ঘুরিয়ে পড়তে দেখাবে।

v_{nb} already Realise করা আছে এটাকে আবার ইনপুট দিবে।

$$\tan 90^\circ = \frac{v_{nb} \sin 137.5}{v_a + v_{nb} \cos 137.3^\circ} \qquad \Rightarrow v_a - 17.32 = 0$$

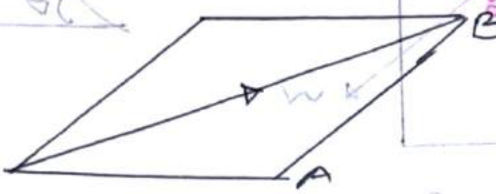
$$\therefore v_a = 17.32 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0} = \frac{v_{nb} \sin 137.3^\circ}{v_a + v_{nb} \cos 137.3^\circ}$$

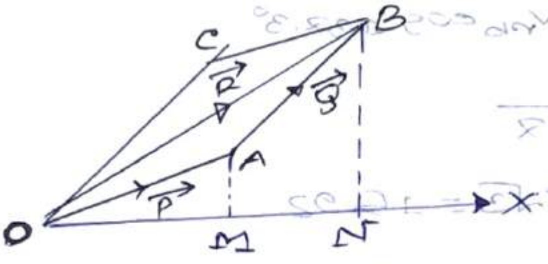
$$\Rightarrow v_a + v_{nb} \cos 137.3^\circ = 0$$

$$\Rightarrow v_a + (23.57 \cos 137.5^\circ) = 0$$

কোনো নির্দিষ্ট দিকে 2টি ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপের সমষ্টি ~~ভেক্টরদ্বয়~~, ঐ নির্দিষ্ট দিকে ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির লম্ব অভিক্ষেপের সমান।



48.



$\vec{P}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ = OM

$\vec{Q}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ = MN

∴ $\vec{R}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ = ON = OM + MN

$\vec{R}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ = $\vec{P}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ + $\vec{Q}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ

—x—

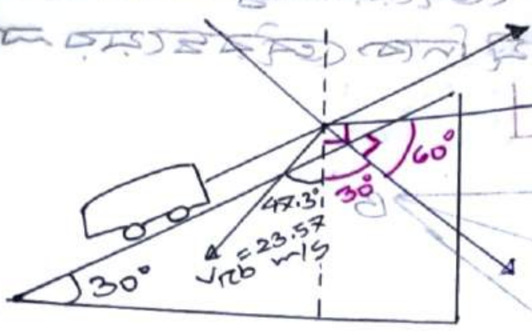
V_a বরাবর,

$$V_a \cos 0° + v_{rb} \cos 137.3° = w \cos 90°$$

$$\Rightarrow V_a - 17.32 = 0$$

$$\Rightarrow v_a = 17.32 \text{ m/s (Ans)}$$

লম্ব অভিক্ষেপ Apply করা যায় যখন যেকোনো একটি ভেক্টরের সাথে ~~কোণ~~ 90° হলে



49.

$$\tan 60° = \frac{V_{rb} \sin 137.3°}{V_a + V_{rb} \cos 137.3°}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{15.92}{V_a - 17.37}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} V_a - 17.37\sqrt{3} = 15.92$$

$$\Rightarrow V_a = \frac{15.92 + 17.37\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \qquad V_a = 26.56\,m/s$$

Method:2:

আনত তল বরাবর,

$$V_a \cos 30° + V_{rb} \cos 167.3° = W \cos 90°$$

$$\Rightarrow V_a(0.87) - 22.99 = 0$$

$$\Rightarrow V_a = \frac{22.99}{0.87} = 26.5\,m/s$$

Topic:15: নদী ও নৌকা সংক্রান্ত সমস্যা:

50.

Case:01:

নদী পার হতে সময় ও ন্যূনতম সময় (Minimum time)

Given data,

নদীর প্রস্থ = d

নদীতে স্রোতের বেগ = $\vec{u}$

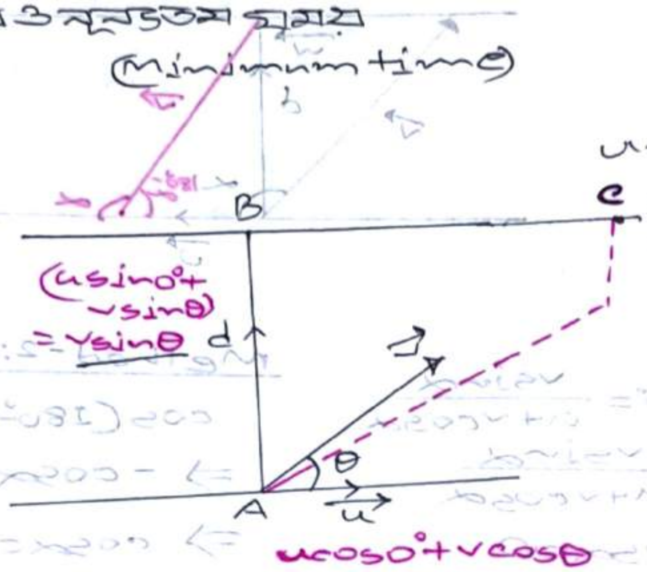
নৌকার নদীতে স্রোতের বেগ = $\vec{v}$

পাড়ের স্রোতের সাথে উৎপন্ন কোণ = θ

Unknown:

নদী পার হতে সময় t

নদী পার হতে ন্যূনতম সময় = t_{min}



★ নদীর প্রস্থ বরাবর স্রোতের বেগের কোনো প্রভাব নেই।

$$d = (v\sin\theta)t$$

$$\therefore \boxed{t = \frac{d}{v\sin\theta}}$$

ন্যূনতম সময়,

$$\sin\theta = 1$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ বা } 90^\circ$$

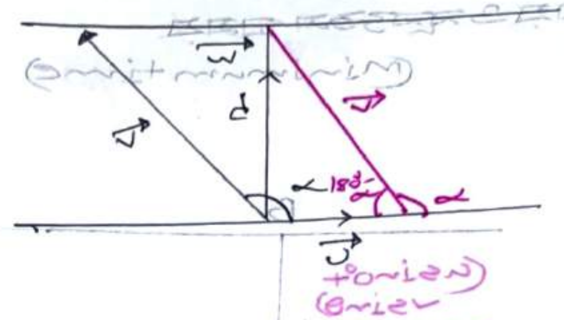
$\boxed{t_{min} = \frac{d}{v}}$ → t_{min} হতে পারত কিন্তু হতে পারেনাই।

* নদীর প্রস্থ বরাবর গমন করলে ন্যূনতম সময়ে নদী পার হওয়া যায়।

case:02: নদীর প্রস্থ বরাবর নমান।

Given data,
নদীর প্রস্থ = d
নদীতে স্রোতের বেগ = $\vec{u}$
নৌকার বেগ = $\vec{v}$

unknown, α, $\vec{w}$
t



α:

Method-1:

$\tan 90° = \frac{v\sin\alpha}{u+v\cos\alpha}$

$\Rightarrow \frac{1}{0} = \frac{v\sin\alpha}{u+v\cos\alpha}$

$\Rightarrow u+v\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = -\frac{u}{v}}$

$\therefore \boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right)}$

Method-2:

$\cos(180°-\alpha) = \frac{u}{v}$

$\Rightarrow -\cos\alpha = \frac{u}{v}$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{u}{v}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right)}$

method-3: u বরাবর,

$u\cos 0° + v\cos\alpha = w\cos 90°$

$\Rightarrow u+v\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = -\frac{u}{v}}$ $\therefore \boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right)}$

w:

$w = \sqrt{v^2+u^2+2uv\cos\alpha}$

$= \sqrt{v^2+u^2+2vu\left(-\frac{u}{v}\right)}$

$= \sqrt{v^2+u^2-2u^2}$

$\boxed{w = \sqrt{v^2-u^2}}$

M:2:

$v^2 = w^2+u^2$

$\Rightarrow w^2 = v^2-u^2$

$\Rightarrow w = \sqrt{v^2-u^2}$

t: $d = wt$

$\Rightarrow t = \frac{d}{w}$

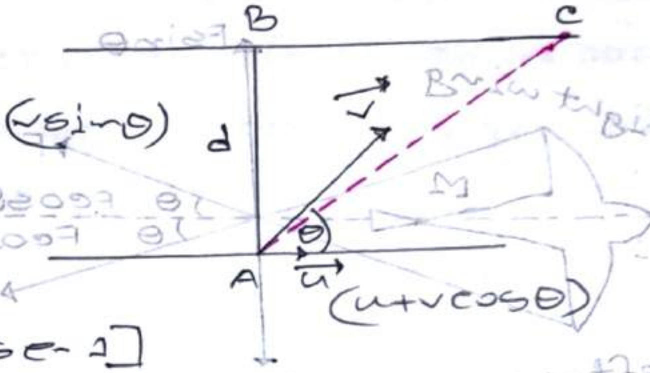
$\therefore \boxed{t = \frac{d}{\sqrt{v^2-u^2}}}$

case:03: আনুভূমিক বরাবর অতিক্রান্ত দূরত্ব

:52

Given data,

নদীর প্রস্থ $= d$



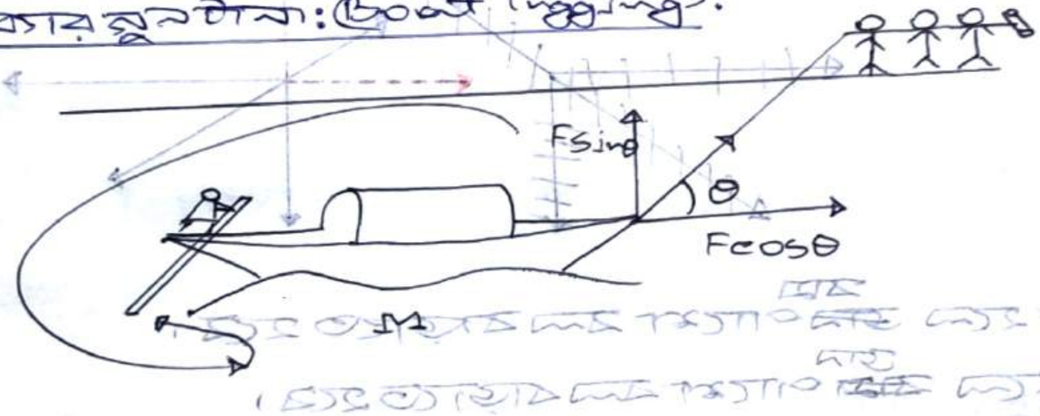
$t = \dfrac{d}{v\sin\theta}$ [case-1]

$BC = (u+v\cos\theta)t$

$\boxed{BC = (u+v\cos\theta)\dfrac{d}{v\sin\theta}}$ $\boxed{AC = \sqrt{AB^2+BC^2}}$

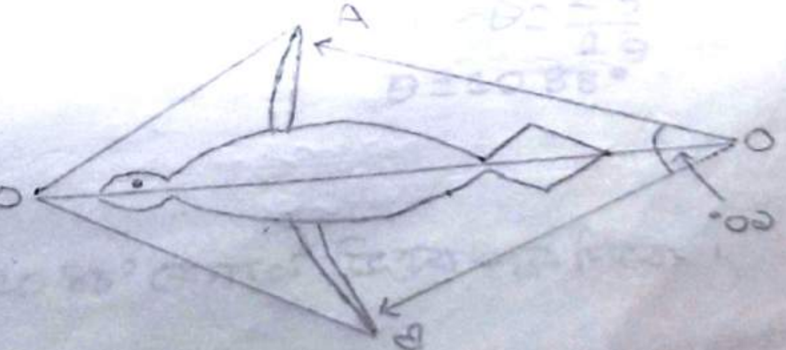
Topic: 16:

* নৌকার গুনটানা: (Boat Tugging):



$F\cos\theta = Ma$

$\boxed{\therefore a = \dfrac{F\cos\theta}{M}}$



পাখির উড়া:

Top view:

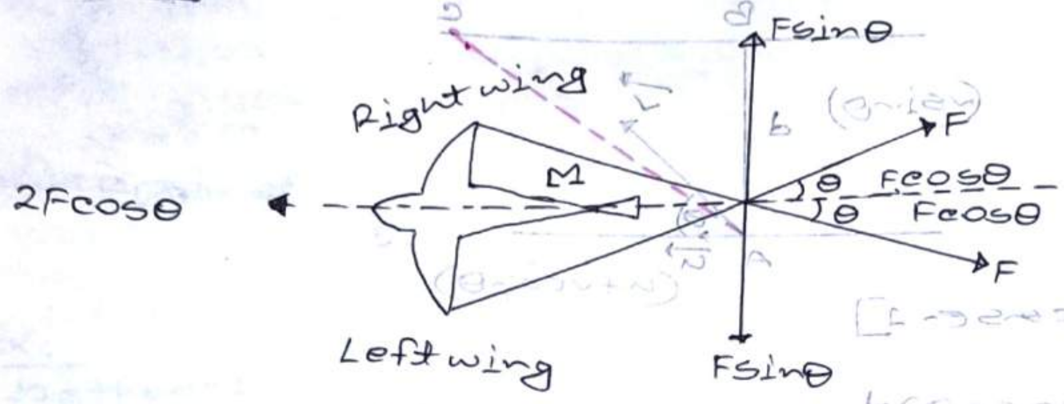
$P = Q$

$R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

$= 2F\cos\theta$

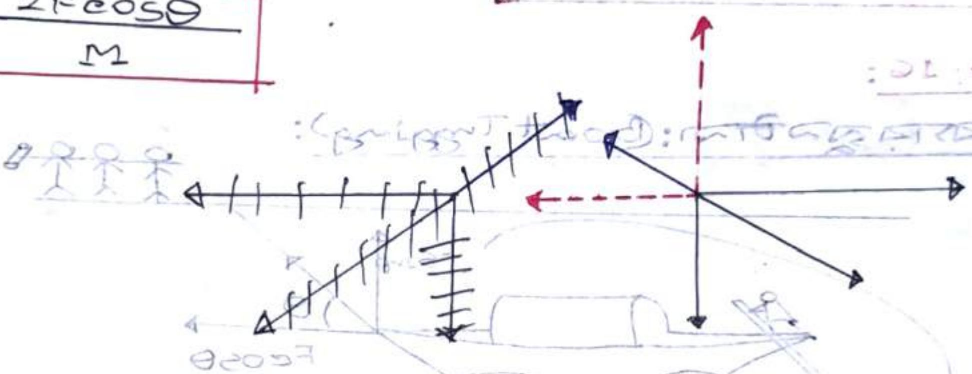
$P = F$

$\alpha = 2\theta$



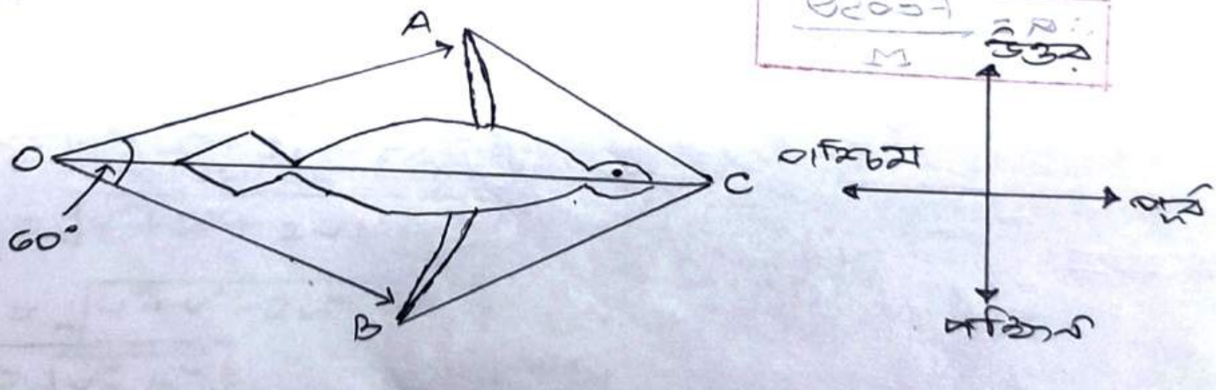
$2F\cos\theta = MQ$

$\therefore \boxed{Q = \frac{2F\cos\theta}{M}}$



*বামে যেতে হলে ~~ডান~~ বাম পাশের বল বাড়াতে হবে।

* ডানে যেতে হলে ~~বাম~~ ডান পাশের বল বাড়াতে হবে।



চিত্রানুযায়ী একটি সমতল ভূমির সমান্তরালে আকাশে উড়ন্ত পাখিটির উপর পাখা কর্তৃক ক্রিয়ার পরিমাণ 5N,

(i) চিত্রে OC বরাবর প্রতিক্রিয়া বলের মান কত?

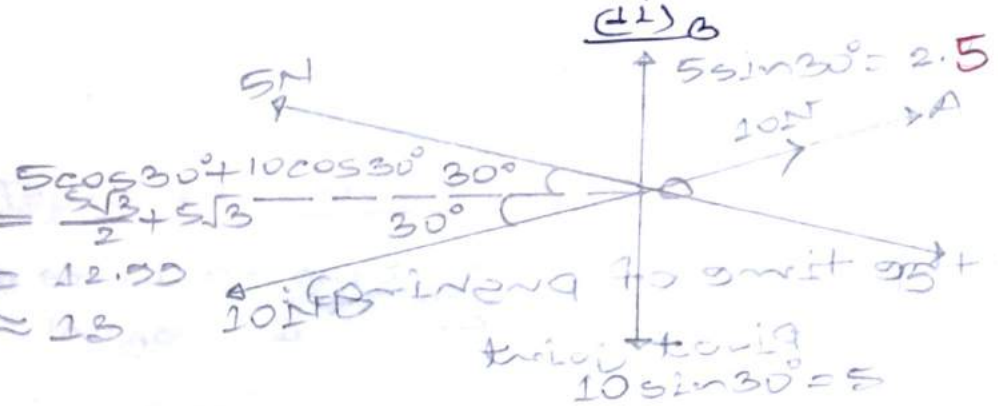
(ii) AO বরাবর ক্রিয়ার পরিমাণ দ্বিগুণ করা হলে, পাখিটি কোন দিকে উড়বে?

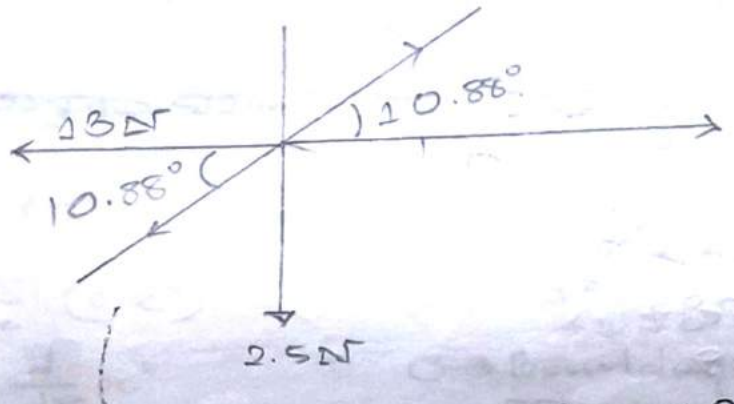
54

(i)

$$\text{প্রতিক্রিয়া বল} = 2F\cos 30^\circ$$
$$= 5\sqrt{3}$$

(ii)





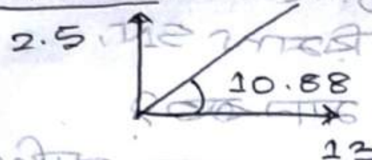
$$\sqrt{(2.5)^2 + (13)^2} = 13.24\text{N}$$

$$\tan\theta = \frac{2.5}{13}$$

$$\theta = 10.88^\circ$$

∴ পূর্ব দিকের সাথে 10.88° কোণে উত্তর পূর্ব দিকে।

Method2:



দুইটাই ক্রিয়া
অথবা দুইটাই প্রতিক্রিয়া

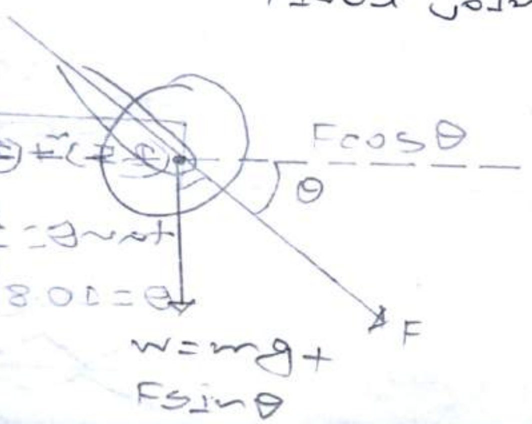
Gliding condition of birb:

$$\left[\begin{array}{l}\Sigma F_V=0\\ \Sigma F_H=0\end{array}\right.$$ *Newton's first law

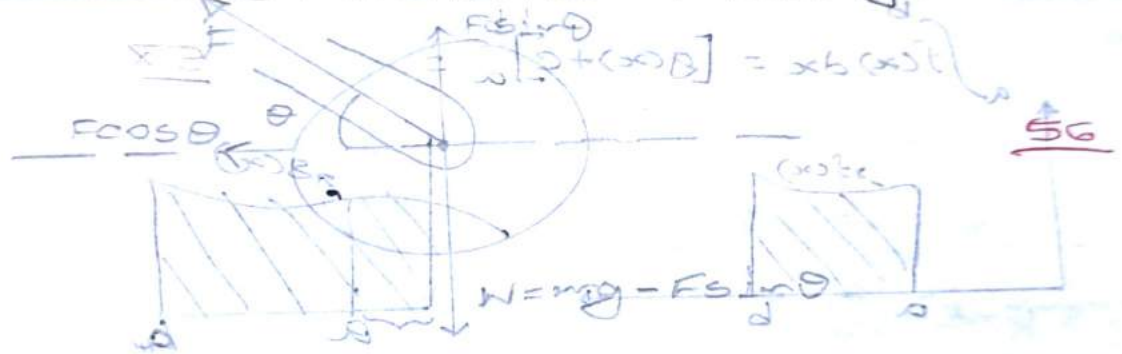
লন রোলার (Lon roller):

ঠেলার সময়: (At the time of pushing):

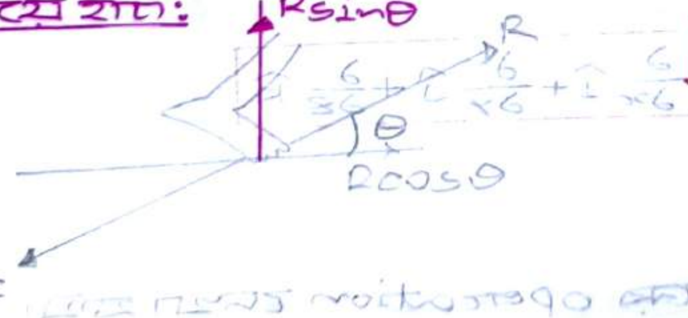
Pivot joint



টানার সময়: (At the time of Pulling):



⊞ পায়ে হাঁটা:



$\boxed{R\sin\theta = mg}$

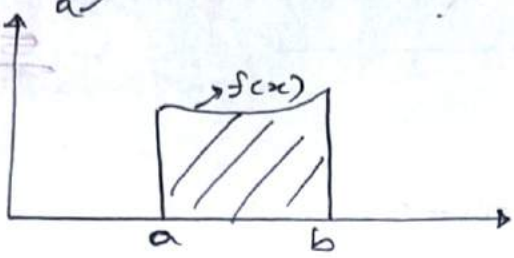
θ এর মান যত কমবে গতি তত বাড়বে।

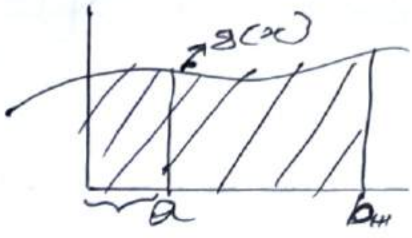
Topic: 47: Vector calculus:

⊞ small amount → less error.

নির্দিষ্ট যোগজ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [g(x)+c]_a^b =$$





Differentiation:

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}}$$

Nabla operator

* vector calculus এ ৩ রকমের operation দেখা যায়।
  - → Gradient (গ্রেডিয়েন্ট)
  - → curl (কার্ল)
  - → divergence (ডাইভারজেন্স)

Gradient (গ্রেডিয়েন্ট):

↓

Special kind of slope

$\phi(x,y,z) \Rightarrow$ scaler 3D function

$$\boxed{\vec{\nabla}(\phi) = \text{Grad}(\phi)}$$

পাহাড়ের কোথায় বেড় কম কোথায় বেশি তা Gradient ব্যবহার করি।

* $\phi(x,y,z) = 3x^2y^2z^2$ একটি স্কেলার ফাংশন। (1, 1, 1) বিন্দুতে ফাংশনের Gradient নির্ণয় কর।

58

উঃ $\text{Grad}(\phi) = \vec{\nabla}(\phi)$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(3x^2y^2z^2)$$

$$= \hat{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2z^2) + \hat{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2z^2) + \hat{k}\,(3x^2y^2z^2)$$

$$\text{Grad}(\phi) = 6xy^2z^2\,\hat{i} + 6x^2yz^2\,\hat{j} + 6x^2y^2z\,\hat{k}$$

$$\text{Grad}(\phi) = 6\hat{i} + 6\hat{j} + 6\hat{k} \quad \text{(Ans)}$$

2D হতে পারে।

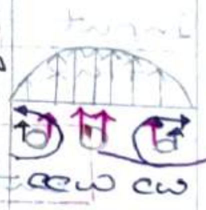
Curl:

$\phi(x,y,z) \rightarrow$ Vector 3D function

এর curl বলতে বোঝায় এই function টি দ্বারা কোনো rotational impact বা ঘূর্ণনজনিত প্রভাব তৈরী করা যাবে কী না।

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\phi} = \text{curl}(\phi)}$$

* curl 0 হলে vector field অঘূর্ণনশীল (irrotational)



curl = 0

নদীর মাঝে সবচেয়ে বেশি স্রোত থাকে পাশে স্রোত কম, এখানে, তাই প্যারাবোলার মতো একটা ঘূর্ণীবলয় হয়।

এখন, একটা বোতলের cap মাঝে রাখলে একপাশে বেশি বল পেয়ে counter clock wise ঘুরবে আবার তাকে রাখলে clock wise ঘুরবে কিন্তু মাঝে রাখলে দুই দিকে সমান বল প্রয়োগ হবে অঘূর্ণনশীল থাকবে।

$$\underbrace{\vec{\omega}}_{\text{strength of a tornedo}} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

* $\vec{\Phi} = 3x\hat{i} + 3y\hat{j} + 3z\hat{k}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\Phi} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(0-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(0-0)$$
$$= 0$$

59

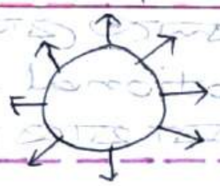
Divergence:

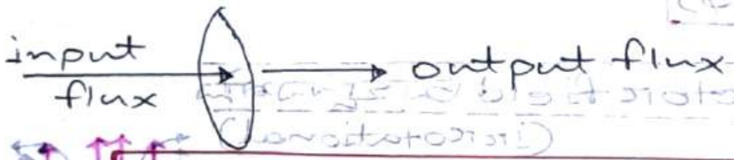
$\vec{\Phi}(x,y,z) \rightarrow$ vector 3D function.

Divergence দ্বারা কোনো vector field এর প্রভাব জানা যায়।

$\boxed{\vec{\Phi}\cdot\vec{\nabla} = div(\Phi) \rightarrow output \rightarrow scaler}$

case: 01: $div(\Phi) > 0$,





$\boxed{\text{output flux} > \text{input flux}}$

case: 02: $div(\Phi) < 0$,

output < input flux

case: 03: $Div(\Phi) = 0$ input flux = output flux

vector field → solinoidal (সলিনয়েডাল)
↓
effectless

* $\phi(x,y,z) = 5y^2z\,\hat{i} + 5x^2z\,\cancel{\hat{k}}\,\hat{j} + 5x^2y^2\,\hat{k}$; দেখাও যে,
এই ফাংশনের vector field সলিনয়ডাল।

উঃ:
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\phi} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left(5y^2z\,\hat{i} + 5x^2z\,\hat{j} + 5x^2y^2\,\hat{k}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(5y^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(5x^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^2)$$
$$= 0 + 0 + 0$$
$$= 0$$

60

page:- 1.