25.11.23

Physics 1st Paper

Chapter-8

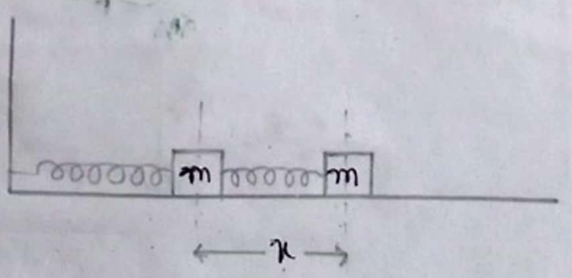
সরল ছন্দিত স্পন্দন
Simple Harmonic Motion [S.H.M]

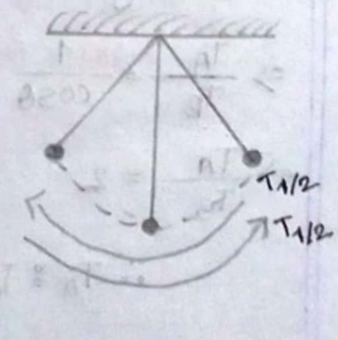
Topic 01: Basic Introduction

পর্যায়বৃত্ত গতি (Periodic motion)

যদি কোনো বস্তুকণার গতি এমন হয় যেটি এর গতিপথের নির্দিষ্ট কোনো বিন্দুকে একটি নির্দিষ্ট সময় পর পর অতিক্রম করে তবে বস্তুকণার সেই গতিকে বলা হয় পর্যায়বৃত্ত গতি, এবং নির্দিষ্ট সময়কে বলা হয় পর্যায়কাল।
যেমন:- ঘড়ির কাঁটার গতি, ফ্যানের গতি, স্প্রিং এর গতি, সরল দোলকের গতি ইত্যাদি।

স্পন্দন গতি বা সরল ছন্দিত স্পন্দন (S.H.M): কোনো পর্যায়বৃত্ত গতিসম্পন্ন বস্তুকণার গতি যদি এমন হয় যে এটি এর গতি পথের অর্ধেক সময় একটি নির্দিষ্ট দিকে এবং বাকি অর্ধেক সময় পূর্বের দিকের বিপরীত দিকে গমন করে তবে বস্তুকণার সেই গতিকে বলা হয় স্পন্দন গতি বা সরল ছন্দিত স্পন্দন।
যেমন: স্প্রিং এর গতি, সরল দোলকের গতি ইত্যাদি.

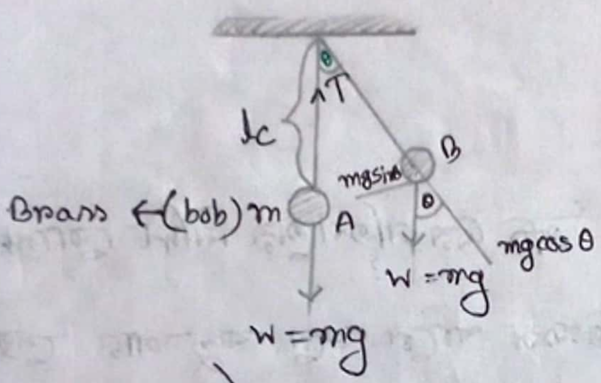




সরল ছন্দিত স্পন্দন এর বৈশিষ্ট্য (Properties of S.H.M)

1) এটি একটি পর্যায়বৃত্ত গতি।

2) সরল ছন্দিত স্পন্দনে বস্তুর অভিমুখ সর্বদা সাম্যাবস্থান অভিমুখে।



সরল দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য, $l = l_c + r$

↳ radius of bob

↳ length of chord

A : সুতার টান $T = mg$

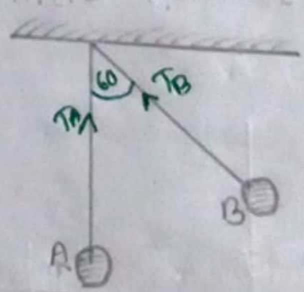
B : " " $T' = mg\cos\theta$

$\therefore \Sigma F = mg\sin$

$\Rightarrow ma = mg\sin\theta$

$$\boxed{\therefore a = g\sin\theta}$$

Q. A ও B স্থানে সুতার টান বলের অনুপাত নির্ণয় কর।



$T_A = mg$

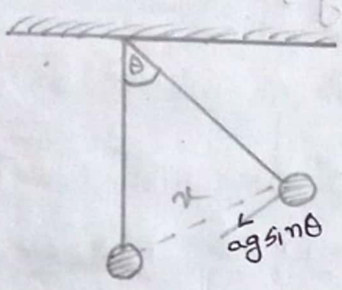
$T_B = mg\cos\theta$

$\Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{1}{\cos\theta}$

$\Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = 2$

$\therefore T_A : T_B = 2 : 1$

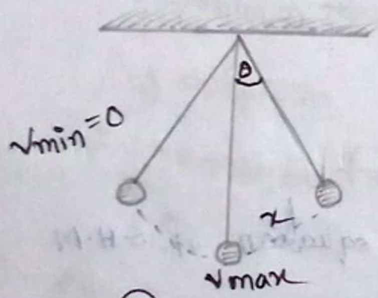
৩. সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দনরত কোনো বস্তুর সর্বোচ্চ বিস্তারে ত্বরণ সর্বোচ্চ হয় এবং সাম্যাবস্থায় ত্বরণ সর্বনিম্ন হয় অর্থাৎ 0 হয়।



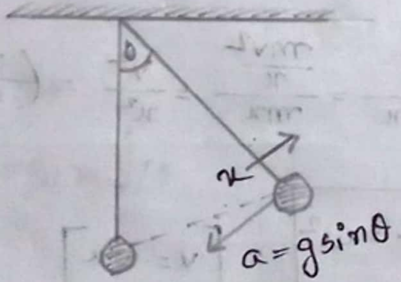
$x\uparrow \quad \theta\uparrow \quad a\uparrow$

সাম্যাবস্থায় $x=0,\ \theta=0,\ a=0$

4. সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দনরত কোনো বস্তুর বেগ সাম্যাবস্থায় সর্বোচ্চ হয়। এবং সর্বোচ্চ বিস্তারে সর্বনিম্ন হয় অর্থাৎ (0) শূন্য হয়।



5. সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দনরত কোনো বস্তুর ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখী।



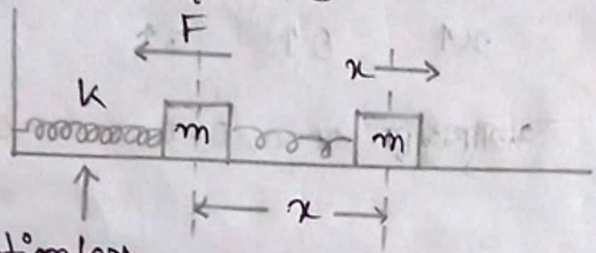
$x\uparrow \quad \theta\uparrow \quad a\uparrow$

$\therefore a \propto -x$

Topic 02 . হুকের সূত্র ও সরল ছন্দিত স্পন্দনের ব্যবকলনীয় সমীকরণ .

Hook's law & differential eq^n of S.H.M

প্রত্যয়নী বল (Restoring force)



Frictionless

From, Hook's law, $F = -kx$

$$\Rightarrow ma = -kx$$

$$\Rightarrow a = -\frac{k}{m}x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}.x = 0$$

এখানে, $\frac{k}{m} = \omega^2$

$$\boxed{\therefore \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0} \rightarrow \text{differential equation of S.H.M}$$

$\rightarrow$ 2nd order ODE (ordinary differential equation)

y: $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$

x: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

$$\frac{k}{m} = \frac{\frac{F}{x}}{m} = \frac{F}{mx} = \frac{\frac{mv^2}{x}}{mx} = \frac{v^2}{x^2} = \left(\frac{v}{x}\right)^2$$

$$\boxed{\frac{k}{m} = \omega^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} v = \omega x \\ \Rightarrow \frac{v}{x} = \omega \end{array}\right]$$

$\omega^2 = \frac{k}{x}$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\Rightarrow \frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{m}{k}}$

$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

→ Time period

$\omega = 2\pi f$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f$

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

Q: সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দনরত কোনো বস্তুর গতির ব্যবকলনীয় রূপ $\frac{d^2x}{dt^2} + 81x = 0$ বস্তুটির জন্য

i) কৌণিক বেগ / কৌণিক কম্পাঙ্ক

ii) পর্যায়কাল

iii) কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

(i)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 81x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\therefore \omega^2 = 81$$

$$\Rightarrow \omega = 9 \text{ rad/s}$$

(ii)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

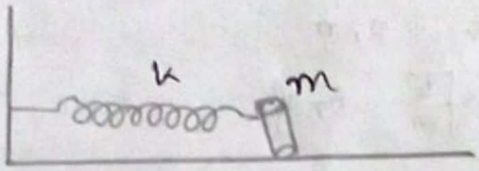
$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{9} \text{ sec}$$

(iii)

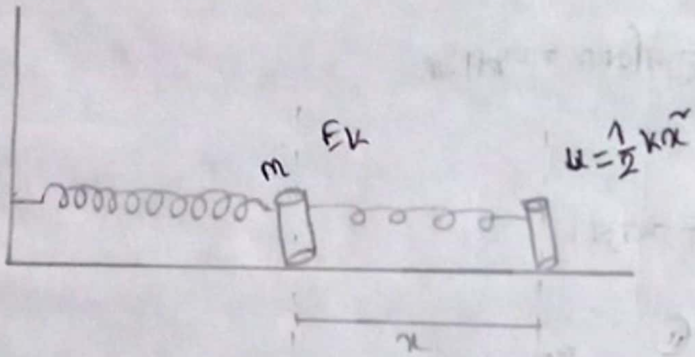
$$f = \frac{1}{T}$$

$$= \frac{9}{2\pi} \text{ Hz}$$

৪.



চিত্রে, একটি আনুভূমিক স্প্রিং এর মাধ্যমে m ভরের একটি সিলিন্ডার এমন ভাবে সংযুক্ত যেন সিলিন্ডারটি স্প্রিং এর মাধ্যমে তলটিকে থেকে নিজ অক্ষের চারিদিকে ঘুরতে পারে। যদি স্প্রিংটিকে প্রসারিত করে ছেড়ে দেওয়া হয় তবে সিস্টেমটি সরল ছন্দিত স্পন্দন লাভ করে। দেখাও যে, উক্ত স্পন্দন গতির পর্যায়কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$



$$U = E_{k_L} + E_{k_A}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\frac{v^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2$$

$$\Rightarrow kx^2 = mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow kx^2 = \frac{3}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(kx^2) = \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}mv^2\right)$$

$$\Rightarrow k\cdot\frac{d}{dt}(x^2) = \frac{3}{2}m\frac{d}{dt}(v^2)$$

$$\Rightarrow k\cdot 2x\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{3}{2}m\cdot 2v\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow kx\cdot v=\frac{3}{2}m\,v\cdot a$$

$$\Rightarrow kx=\frac{3}{2}m\cdot a$$

$$\Rightarrow a=-\frac{2k}{3m}x$$

$$\Rightarrow a=\frac{2k}{3m}x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}-\underbrace{\boxed{\frac{2k}{3m}}}_{\omega^2}x=0$$

$$\omega^2=\frac{2k}{3m}$$

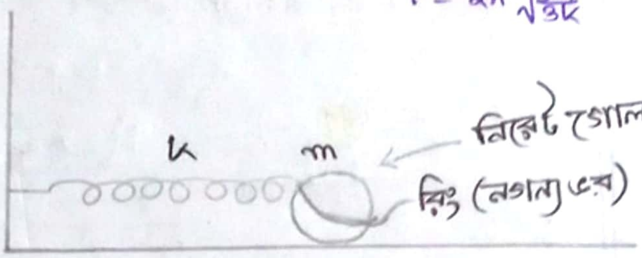
$$\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

$$\boxed{** \ \therefore T=2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}}$$ → cylinder এর জন্য

** ফাঁপা গোলক হলে,
$T=2\pi\sqrt{\frac{5m}{3k}}$

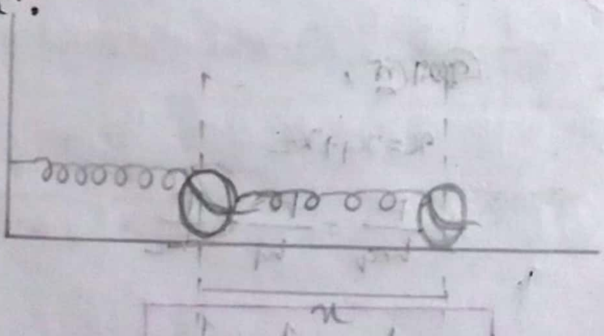
Q.



চিত্রে, কোনো আনুভূমিক স্প্রিং এর মাধ্যমে একটি নিরেট গোলক এমনভাবে যুক্ত যেন গোলকটিকে নৈখিক তল বরাবর গতিশীল করলে এটি নিজ অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরতে পারে। উক্ত সিস্টেমটি ব্যবহার করে S.H.M তৈরী করা হলে উক্ত স্পন্দন গতির পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

[Ans: $2\pi\sqrt{\frac{7m}{3k}}$]

Soln:

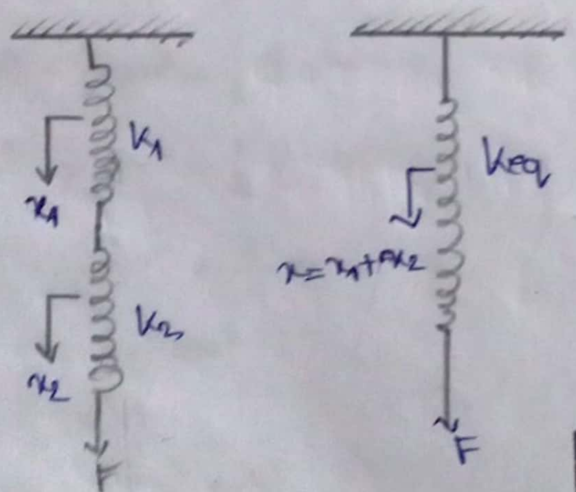


স্প্রিং এর সমবায় (Combination of spring):

3 types –
i) Series combination
ii) Parallel combination
iii) Mixed combination

→ Aim ↳ তুল্য স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয় (k_{eq})

i) শ্রেণি সমবায় (Series combination)



এখানে,

$$x = x_1 + x_2$$

$$\Rightarrow \frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

$$\left[\begin{array}{l} F = k_{eq} \cdot x \; ; \; x = \frac{F}{k_{eq}} \\ F = k_1 \cdot x_1 \; ; \; x = \frac{F}{k_1} \\ F = k_2 \cdot x_2 \; ; \; x = \frac{F}{k_2} \end{array}\right]$$

∴ সুতরাং, $(k_1, k_2 \ldots\ldots k_n)$ স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট n সংখ্যক স্প্রিংকে শ্রেণিতে যুক্ত করলে, তুল্য স্প্রিং ধ্রুবক,

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{k_n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}$$

$$\boxed{k_{eq} < k_i}$$

$\boxed{n=2}$

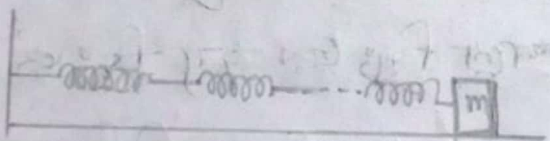
$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$\boxed{k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}}$$

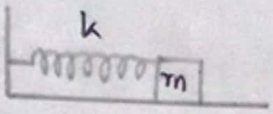
$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}}$$

এবার মানের n সংখ্যক স্প্রিং শ্রেণিতে যুক্ত করলে তুল্য স্প্রিং ধ্রুবক,

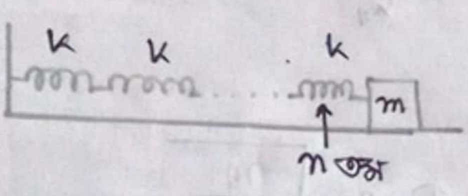


$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \cdots\cdots n \text{ সংখ্যক}$$

Special observation



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



$$k_{eq} = \frac{k}{n}$$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{k}{n}}} = \sqrt{n} \times \underbrace{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}_{T}$$

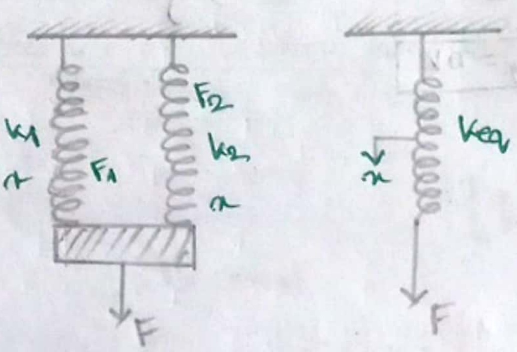
$$\Rightarrow \boxed{T' = \sqrt{n}\, T}$$

** একটাই মানের n সংখ্যক স্প্রিং শ্রেণিতে যুক্ত করলে যে পর্যায়কাল পাওয়া যায় তা একটি স্প্রিং ব্যবহারে পর্যায়কালের $\sqrt{n}$ গুণ।

*** Q. নির্দিষ্ট স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট কোনো স্প্রিং এর জন্য স্প্রিং এর সিস্টেমে 0.2 sec পর্যায়কাল পাওয়া যায়। অনুরূপ 25টি স্প্রিং শ্রেণিতে যুক্ত করলে পর্যায়কাল কত?

Ans : 1

ii) সমান্তরাল সমবায় (Parallel Combination) :



$F = F_1 + F_2$

এখানে,

$F = F_1 + F_2$

$\Rightarrow k_{eq} \cdot x = k_1 x \;\; k_2 x$

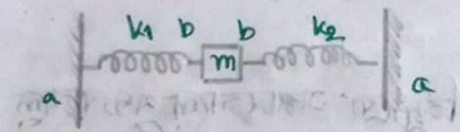
$\Rightarrow k_{eq} = k_1 + k_2$

$\left[\begin{array}{l} F = k_{eq} \cdot x \\ F_1 = k_1 \cdot x \\ F_2 = k_2 x \end{array} \right.$

$\therefore (k_1, k_2 \cdots + k_n)$ স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট n সংখ্যক স্প্রিংকে সমান্তরালে যুক্ত করলে তুল্য স্প্রিং ধ্রুবক, $k_{eq} = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$

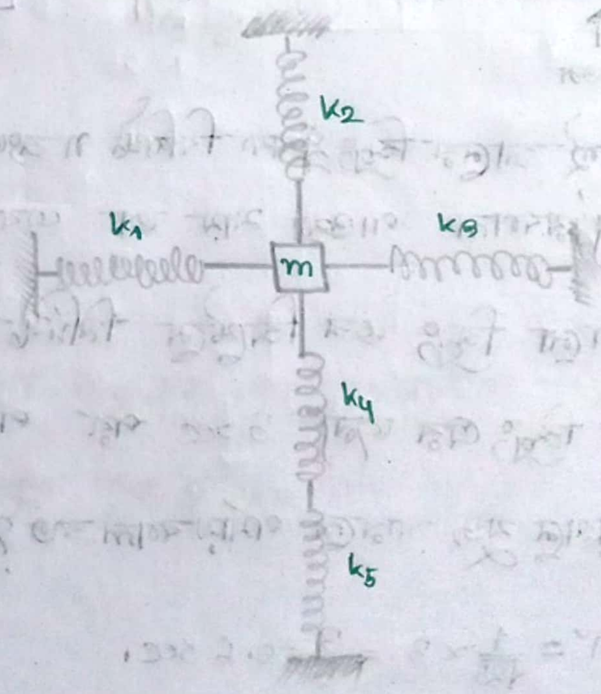
$$\Rightarrow k_{eq} = \sum_{i=1}^{n} k_i \quad [k_{eq} > k_i]$$

* স্প্রিংকে সমান্তরালে যুক্ত করলে স্প্রিং ধ্রুবকের মান বেড়ে যায়।



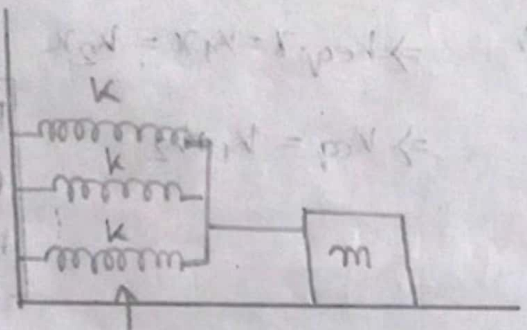
$k_{eq} = k_1 + k_2$

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$



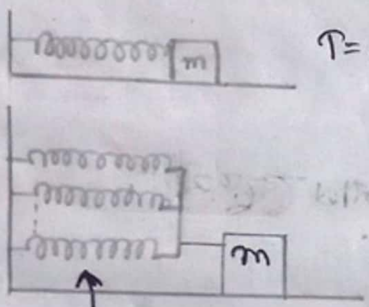
∴ একটাই মানের স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট n সংখ্যক স্প্রিং সমান্তরালে যুক্ত করলে তুল্য স্প্রিং ধ্রুবক, $k_{eq} = k_1 + k_2 + \cdots$ n সংখ্যক

$$\boxed{k_{eq} = nk}$$



n তম

Special observation



n তম

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$k_{eq} =$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{nk}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \times \left(2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{T' = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot T}$$

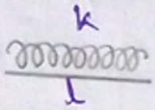
∴ একটাই মানের স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট n সংখ্যক স্প্রিংকে সমান্তরালে যুক্ত করলে যে পর্যায়কাল পাওয়া যায় তা একটি স্প্রিং ব্যবহারের $\frac{1}{\sqrt{n}}$ গুণ।

Q: কোনো স্প্রিং ভর সিস্টেমে নির্দিষ্ট মানের স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট কোনো স্প্রিং এর জন্য 3 sec পর পাওয়া যায়, অনুরূপ 25টি স্প্রিং সমান্তরালে যুক্ত করলে পর্যায়কাল কত?

$\Rightarrow T' = \frac{1}{\sqrt{25}} \times 3 = \frac{3}{5} = 0.6$ sec.

*** স্প্রিং এর কর্তন/বিভাজন (Division of spring):

- → material same
- → Number of turning per unit length is same
  (পাক সংখ্যা)

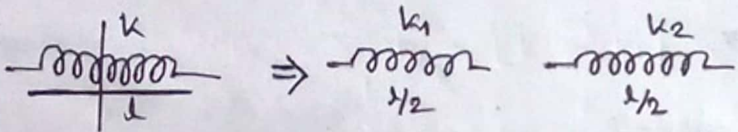


$\boxed{k \propto \frac{1}{l}}$ [l = length of spring]

$\therefore kl = \text{const}$

For a particular spring, $k_1 l_1 = k_2 l_2$

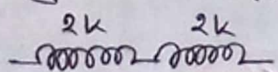
Q. k স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট একটি স্প্রিংকে কেটে সমান দুই টুকরা করা হলো। প্রতিটি টুকরার স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয় কর।



$kl = k_1 \frac{l}{2}$ $\quad$ $kl = k_2 \frac{l}{2}$

$\Rightarrow k_1 = 2k$ $\quad$ $\Rightarrow k_2 = 2k$.

শ্রেণিতে আবার যুক্ত করলে,

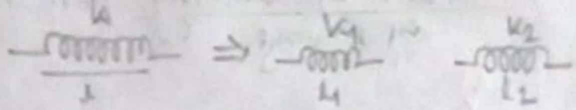


$$k_{eq} = \frac{4k^2}{4k} = k$$

$\therefore$ k স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট কোনো স্প্রিংকে কেটে সমান n সংখ্যক টুকরায় বিভক্ত করা হলে প্রতিটি টুকরার স্প্রিং ধ্রুবক $= nk$

৬. k মানের স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট কোনো স্প্রিংকে 2:5 অনুপাতে কেটে 2 টুকরা করা হলো। প্রতিটি টুকরার স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয় কর।

Soln:



2 : 5

$l_1 = l$ এর $\frac{2}{7} = \frac{2l}{7}$

$l_2 = l$ " $\frac{5}{7} = \frac{5l}{7}$

$kl = k_1 l_1$

$= k_1 \frac{2l}{7}$

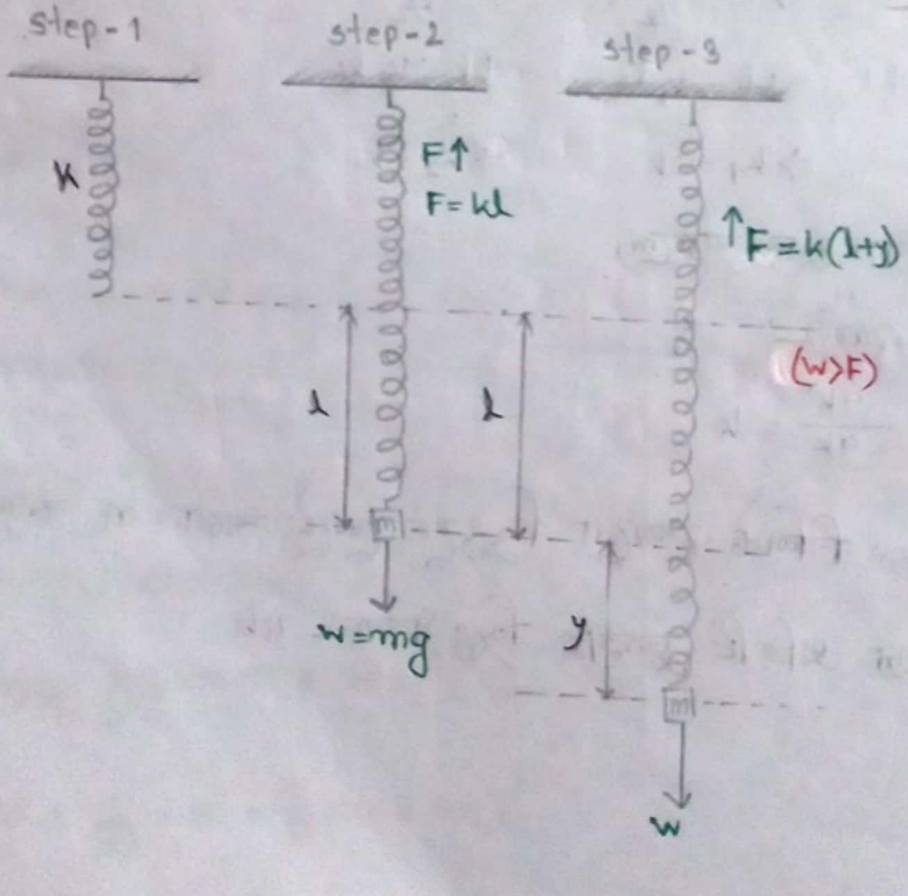
$\therefore k_1 = \frac{7k}{2}$

$kl = k_2 l_2$

$= k_2 \frac{5l}{7}$

$\therefore k_2 = \frac{7k}{5}$

উল্লম্ব স্প্রিং এর গতি



State-1

$$F = W$$

$$\Rightarrow mg = kl \text{ ——— } (1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{g}{l} = \frac{k}{m} = \omega^2}$$

State-2

$$\Sigma F = W - F$$

$$\Rightarrow ma = mg - k(l+y)$$

$$\Rightarrow ma = mg - kl - ky$$

$$\Rightarrow ma = mg - mg - ky \quad [\text{using } (1)]$$

$$\Rightarrow ma = -ky$$

$$\Rightarrow a = -\frac{k}{m}y$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad \left[\frac{k}{m} = \omega^2\right]$$

∴ উলম্ব স্প্রিং এর গতি সরল ছন্দিত স্পন্দন।

আবার,

$$\frac{g}{l} = \frac{k}{m} = \omega^2$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{l}{g}} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

কম্পাঙ্ক, $\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$

***

Q. একটি উল্লম্ব স্প্রিং সাম্যাবস্থায় 5cm প্রসারিত হয়, উক্ত স্প্রিং এর জন্য পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$= 2\pi\sqrt{\frac{0.05}{9.8}}$

$= 0.45$ sec

$l = 5$ cm

$= 0.05$ m

Q. 200 N/m স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট কোনো উল্লম্ব স্প্রিং এর মাথায় 500g ভরের একটি বস্তু ঝুলানো হলো।

i) সাম্যাবস্থায় স্প্রিংটি কতটুকু প্রসারিত হবে?

ii) স্প্রিংটির পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

(i)

$mg = kl$

$\Rightarrow l = \frac{mg}{k}$

$= 0.0245$ m

$\therefore l = 2.45$ cm

$m = 0.5$ kg

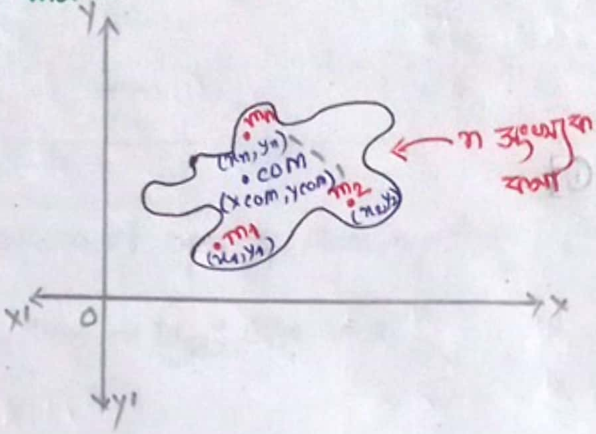
$k = 200$ Nm^{-1}

(ii)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.5}{200}}$

$= 0.314$ sec

Center of mass



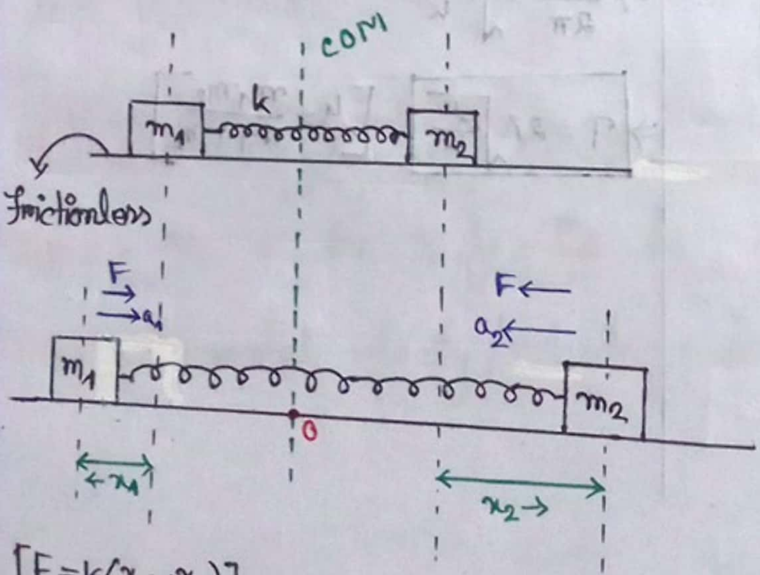
$$X_{COM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

$$X_{com} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}$$

$$Y_{com} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

$$Y_{com} = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}$$

Two-block system:



$[F = k(x_1 + x_2)]$

এখানে, সিস্টেমের ভরকেন্দ্রের সরণ ঘটেনা।

$$\Delta COM = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$\Rightarrow -m_1x_1 + m_2x_2 = 0 \qquad \left[\begin{array}{l} mx = \text{const} \\ x \propto \frac{1}{m} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{m_1x_1 = m_2x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{x_2}{x_1} \quad \text{——} (1)$$

আবার,

$$F = k(x_1 + x_2)$$

$$\Rightarrow F = k x_1 \left(1 + \frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$\Rightarrow F = k x_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \quad [\text{using } ①]$$

$$\Rightarrow F = k x_1 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right)$$

$$\Rightarrow m_1 a_1 = k x_1 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right)$$

$$\Rightarrow a_1 = k\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right) x_1$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{k}{\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)} x_1$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \underbrace{\boxed{\frac{k}{\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)}}}_{\omega^2} \cdot x_1 = 0$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{k}{\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)}$$

let,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \begin{bmatrix} \mu < m_1 \\ \mu < m_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$\mu \rightarrow$ Reduced mass / হ্রাসকৃত ভর

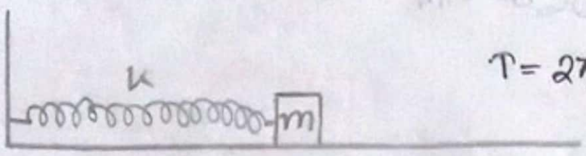
$$\omega^2 = \frac{k}{\mu}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

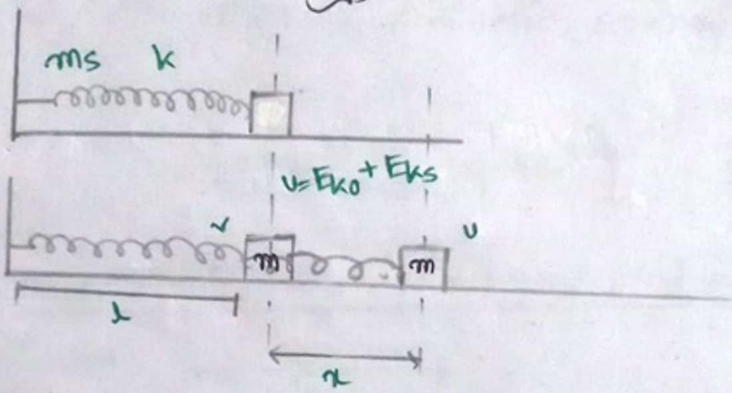
$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}} \quad \left[\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right]$$



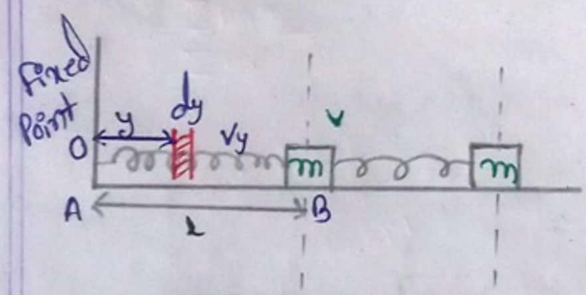
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Eff tive mass of spring-Mass system : (m_{eff})

$m_s \rightarrow$ স্প্রিং এর ভর



* স্প্রিং এর গতিশক্তি (Kinetic energy of spring)



Step 1 : একক দৈর্ঘ্যের ভর, $\lambda = \frac{m_s}{l}$

Step 2 : ক্ষুদ্র ভর $dm = \lambda \cdot dy = \frac{m_s}{l} \cdot dy$

Step 3 : Elemental velocity / velocity gradiant (slope)

এখানে,

AB অংশের ঢাল = "y" অংশের ঢাল

$$\therefore \frac{v-0}{l-0} = \frac{v_y - 0}{y-0}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{l} = \frac{v_y}{y}$$

$$\boxed{\therefore v_y = \frac{v}{l} y}$$

এখানে,

l দৈর্ঘ্যে বেগ v

$\therefore 1$ " " $\frac{v}{l}$

$\therefore y$ " " $\frac{v}{l} y$

Step 4:

$$\therefore dE_k = \frac{1}{2} dm\, v_y^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_s}{l} dy \left(\frac{v}{l} y\right)^2$$

$$dE_k = \frac{m_s v^2}{2l^3} y^2 \, dy$$

$$\boxed{\therefore dE_k = \frac{m_s v^2}{2l^3} y^2 \, dy}$$

$$\Rightarrow \int_0^{E_k} dE_k = \frac{m_s v^2}{2l^3} \int_0^l y^2 \, dy$$

$$\Rightarrow \left[E_k\right]_0^{E_k} = \frac{m_s v^2}{2l^3} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^l$$

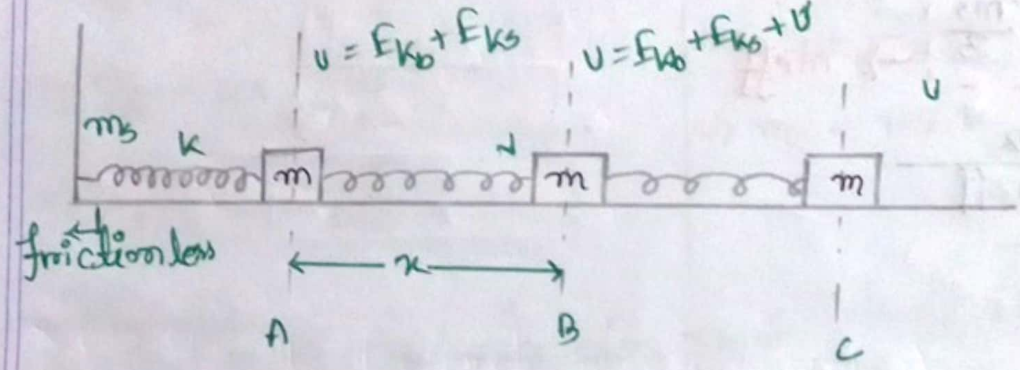
$$\Rightarrow \left[E_k - 0\right] = \frac{m_s v^2}{2l^3} \left[\frac{l^3}{3}\right]$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{m_s v^2}{6 l^3} \cdot l^3$$

$$\boxed{\therefore E_k = \frac{1}{6} m_s v^2}$$

* স্প্রিং এর গতিশক্তি স্প্রিং এর দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভর করে না।

স্প্রিং এর গতিশক্তি (kinetic energy of spring) :



এখানে, B বিন্দুতে,

$$U = E_{kb} + E_{ks} + U'$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m_s v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} m \cdot \frac{d}{dt}(v^2) + \frac{1}{6} m_s \frac{d}{dt}(v^2) + \frac{1}{2} k \frac{d}{dt}(x^2)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2} m \cdot 2v \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{1}{6} m_s \cdot 2v \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} k \cdot 2x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow 0 = mva + \frac{1}{3} m_s va + kx \cdot v$$

$$\Rightarrow 0 = v(ma + \frac{1}{3} m_s a + kx)$$

$$\Rightarrow \left(m + \frac{m_s}{3}\right) a + kx = 0$$

$$\Rightarrow a + \frac{k}{\left(m + \frac{m_s}{3}\right)} \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{k}{\left(m + \frac{m_s}{3}\right)}}_{\omega^2} \cdot x = 0$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{k}{\underbrace{m + \frac{m_s}{3}}_{m_{eff}}}$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{k}{m_{eff}}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_{eff}}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m_{eff}}}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{m_{eff}}{k}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{eff}}{k}}} \quad \left[m_{eff} = m + \frac{m_s}{3}\right]$$

***

প্র. কোনো আনুভূমিক স্প্রিং ভর সিস্টেমে $400\ Nm^{-1}$ স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট কোনো আনুভূমিক স্প্রিং এর মাথায় 3.5 kg ভরের একটি ব্লক লাগিয়ে স্পন্দন গতি সৃষ্টি করলে $2\pi/10$ sec পর্যায়কাল পাওয়া যায়। এক্ষেত্রে স্প্রিংটির ভর নির্ণয় কর।

Soln:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{eff}}{k}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{10} = 2\pi\sqrt{\frac{m_{eff}}{k}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{10} = 2\pi\sqrt{\frac{m_{eff}}{400}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{100} = \frac{m_{eff}}{400}$$

$$\Rightarrow m_{eff} = 4$$

$$\Rightarrow m + \frac{m_s}{3} = 4$$

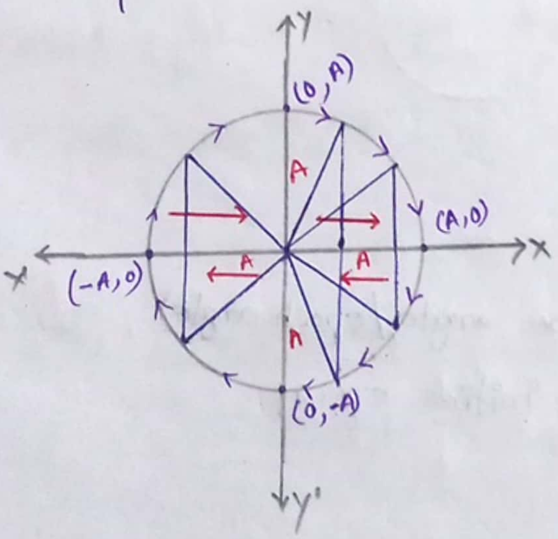
$$\Rightarrow 3.5 + \frac{m_s}{3} = 4$$

$$\Rightarrow m_s = 1.5\ kg$$

Ans.

Topic 03

স্পন্দন গতির সাথে বৃত্তীয় গতির সম্পর্ক



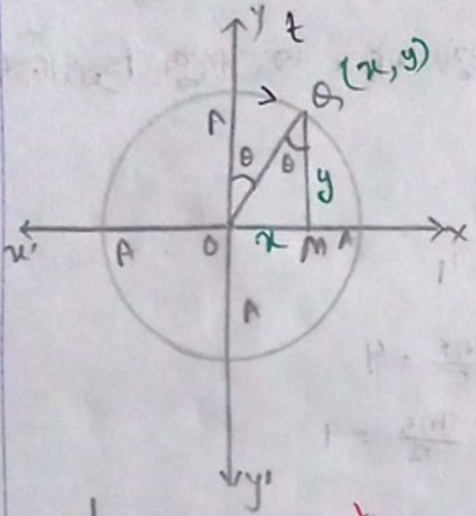
$$x = [-A, A]$$

$$\boxed{-A \leq x \leq A}$$

Radial mapping

*সরল ছন্দিত স্পন্দনে বস্তুর সরণ, বেগ ও ত্বরণ :

☐ সরণ (Displacement)



∴ কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{\theta}{t}$

$\therefore \theta = \omega t$

in ΔAOQ,

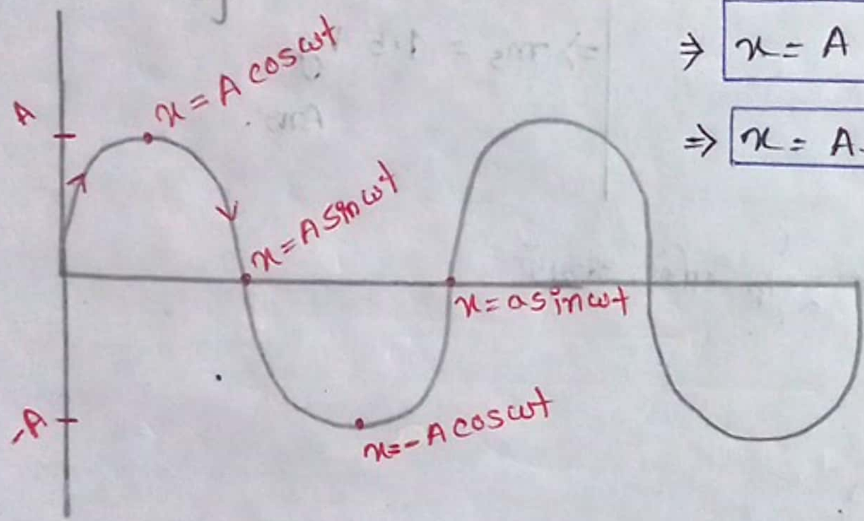
$$\sin\theta = \frac{x}{OQ} = \frac{x}{A}$$

$\Rightarrow x = A\sin\theta$

$\Rightarrow \boxed{x = A\sin\omega t}$

$\Rightarrow \boxed{x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$

$\Rightarrow \boxed{x = A\sin 2\pi f t}$



$x = A\cos\omega t$

$\Rightarrow x = A\sin(\omega t + \underbrace{90^\circ}_{})$

→ দশা কোণ (Phase angle / epoch angle) / আদি দশা

→ It depends on initial energy

→ (δ)

$\boxed{\therefore x = A\sin(\omega t + \delta)}$ → Time dependent equation of displacement in S.H.M.

$$\boxed{x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \delta\right)}$$

$$\boxed{x = A\sin(2\pi f t + \delta)}$$

Q. স্পন্দন গতি সম্পন্ন কোনো কণার সরণের সমীকরণ $x = -A\sin\omega t$ হলে কণাটির আদি দশা নির্ণয় কর।

$$x = -A\sin\omega t$$

$$\Rightarrow x = -A\sin(\pi + \omega t)$$

$$\Rightarrow x = A\sin(\omega t + \pi)$$

$$\hookrightarrow \delta = \pi$$

Q. সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দনরত কোনো কণার সরণ $x = 4\sin\omega t + 3\cos\omega t$। (যেখানে চিহ্নগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে) কণাটির বিস্তার ও আদি দশা নির্ণয় কর।

$$\rightarrow x = A\sin(\omega t + \delta)$$

$$x = 4\sin\omega t + 3\cos\omega t$$

Let,

$$\left.\begin{aligned} 4 &= r\cos\delta \\ 3 &= r\sin\delta \end{aligned}\right] \qquad \begin{aligned} r &= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \\ \delta &= \tan^{-1}\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$x = r[\sin\omega t\cos\delta + \cos\omega t\sin\delta]$$

$$\Rightarrow x = r\sin(\omega t + \delta)$$

$$\Rightarrow x = 5\sin\left(\omega t + \tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$$

$$\hookrightarrow A = 5 \qquad \hookrightarrow \delta$$

* $x = 5\sin\omega t + 12\cos\omega t$

$$A = \sqrt{12^2+5^2} = 13$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$$

* $x = \sin\omega t + \cos\omega t$

$$A = \sqrt{2}$$

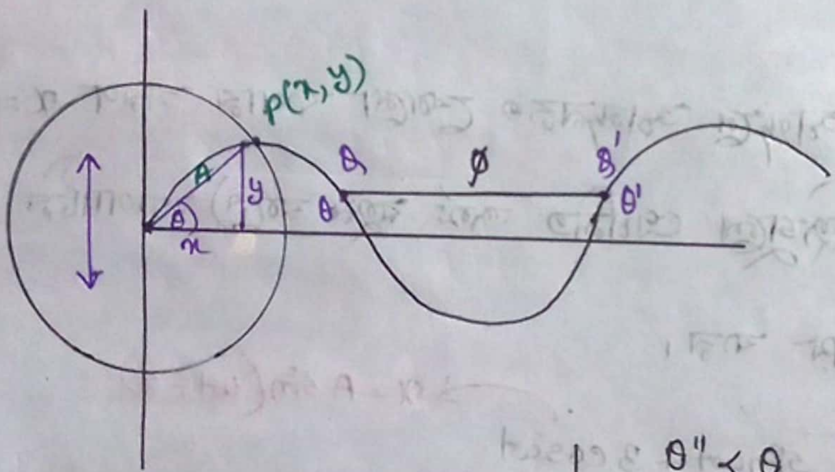
$$\delta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$x = \sqrt{3}\sin\omega t + \cos\omega t$

$$A = 2$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}$$



$y = A\sin\theta$

এখানে,

$\theta + \phi = \theta'$ $[\theta' > \theta]$

$\Rightarrow \theta = \theta' - \phi$

$\theta'' < \theta$

$\theta - \phi = \theta''$

$\Rightarrow \theta = \theta'' + \phi$

$$y = A\sin(\theta' - \phi)$$

$$\Rightarrow y = A\sin(\omega t - \phi)$$

$$\Rightarrow y = A\sin(2\pi f t - \phi)$$

$$\Rightarrow y = A\sin\left(\frac{2\pi v t}{\lambda} - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$\boxed{\therefore y = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)}$$

$$\left[\begin{array}{l} \omega t = 2\pi f t \\ f = \frac{v}{\lambda} \\ \phi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x \end{array}\right]$$

$$E = E_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(ct - x)$$

ক) বেগ:

$$x = A\sin(\omega t + \delta)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\{A\sin(\omega t + \delta)\}$$

$$\Rightarrow v = A\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t + \delta)\}$$

$$\Rightarrow v = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$\boxed{\therefore v = \omega A\cos(\omega t + \delta)}$$

→ Time dependent eqn. of velocity in S.H.M.

$$x = A\sin(\omega t + \delta)$$

$$\therefore \sin(\omega t + \delta) = \frac{x}{A}$$

$$\therefore \cos(\omega t + \delta) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \delta)}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{A^2 - x^2}{A^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{A}$$

আবার,

$$v = \omega A\cos(\omega t + \delta)$$

$$\Rightarrow v = \omega A\frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{A}$$

$$\boxed{\therefore v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}}$$

→ Position dependent eqn of velocity in S.H.M

$$\boxed{\therefore v = \frac{2\pi}{T}\sqrt{A^2 - x^2}}$$

$$\boxed{\therefore v = 2\pi f\sqrt{A^2 - x^2}}$$

সাম্যাবস্থায় : $x=0$

$\boxed{V_{max} = \omega A}$

$\boxed{V_{max} = \frac{2\pi}{T} A}$

$\boxed{V_{max} = 2\pi f A}$

$\boxed{V_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}} A}$

$x = [-A, A]$

or, $-A \leq x \leq A$

সর্বোচ্চ বিস্তারে : $x = \pm A$

$\boxed{V_{min} = 0}$

◘ ত্বরণ

$$v = \omega A \cos(\omega t + \delta)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \omega A \frac{d}{dt}\{\cos(\omega t + \delta)\}$$

$$\Rightarrow a = \omega A \{-\sin(\omega t + \delta)\} \cdot \omega$$

$$\Rightarrow a = -\omega^2 \underbrace{A \sin(\omega t + \delta)}_{x}$$

$$\Rightarrow a = -\omega^2 x$$

$$\boxed{\therefore a \propto -x}$$

আবার,

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \delta)$$

∴ শুধু মান নিয়ে,

$$a = \omega^2 A \sin(\omega t + \delta)$$ [সময় শুরুণ]

→ time dependent eqⁿ of acceleration in S.H.M

$$x = A \sin(\omega t + \delta)$$

$$a = \omega^2 x$$

→ Position dependent eqⁿ of acceleration in S.H.M.

$$\boxed{\therefore a = \frac{k}{m}x}$$

$$\boxed{a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot x}$$

$$\boxed{a = (2\pi f)^2 x}$$

special observation

আম্যাবস্থায় : $x = 0$

$$\boxed{a_{min} = 0}$$

অবোচ্চ বিস্তারে : $x = |A|$

$$\boxed{a_{max} = \omega^2 A}$$

$$\boxed{a_{max} = \frac{k}{m} \cdot A}$$

$$\boxed{a_{max} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot A}$$

$$\boxed{a_{max} = (2\pi f)^2 A}$$

আবার,

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \delta)$$

$$\Rightarrow a = -\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

Q. স্পন্দন গতি সম্পন্ন কোনো বস্তুকণার বেগ x_1 ও x_2 অবস্থানে যথাক্রমে v_1 ও v_2 হলে দেখাও যে বস্তুটির গতির পর্যায়কাল, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}$ $[x_1 > x_2]$

Sol^n:

$$v_1 = \frac{2\pi}{T}\sqrt{A^2 - x_1^2} \Rightarrow v_1^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (A^2 - x_1^2) \quad \text{—(i)}$$

$$v_2 = \frac{2\pi}{T}\sqrt{A^2 - x_2^2} \Rightarrow v_2^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (A^2 - x_2^2) \quad \text{—(ii)}$$

(ii) - (i) $\Rightarrow$

$$v_2^2 - v_1^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \{A^2 - x_2^2 - A^2 + x_1^2\}$$

$$\Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (x_1^2 - x_2^2)$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{v_2^2 - v_1^2}{x_1^2 - x_2^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}}$$

Differential eq^n of S.H.M

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad [2^{nd} \text{ order ODE}]$$

$$\Rightarrow a + \omega^2 x = 0$$

$$\Rightarrow a = -\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = -\omega^2 x$$

$$\Rightarrow v\,dv = -\omega^2 x\,dx$$

$$\Rightarrow v\,dv = -\omega^2 x\,dx$$

$$\Rightarrow \int v\,dv = -\omega^2 \int x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} + c_1 = -\frac{\omega^2 x^2}{2} + c_2$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = c_2 - c_1$$

$$\Rightarrow v^2 = -\omega^2 x^2 + 2(c_2 - c_1)$$

$\hookrightarrow$ const

$$\Rightarrow v^2 = -\omega^2 x^2 + C \quad \text{——} (1)$$

যদি, $x = A$ হলে, $v = 0$

$$0 = -\omega^2 A^2 + C$$

$$\therefore C = \omega^2 A^2$$

$C = \omega^2 A^2$, (1) নং এ বসাই,

$$\Rightarrow v^2 = -\omega^2 x^2 + \omega^2 A^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega\, dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega \int dt$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{x}{A} + C_1 = \omega t + C_2$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{x}{A} = \omega t + \underbrace{(C_2 - C_1)}_{\delta}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{x}{A} = \omega t + \delta$$

$$\Rightarrow \frac{x}{A} = \sin(\omega t + \delta)$$

$$\boxed{\therefore x = A \sin(\omega t + \delta)}$$

$$\therefore e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Let, $y = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = i^2 \sin\theta + i\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = i(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = iy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = i\,d\theta$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = i \int d\theta$$

$$\Rightarrow \ln y = i\theta + C \quad \text{—} (1)$$

Let, $\theta = 0$, $y = 1$

$$\ln 1 = i \cdot 0 + C$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + C$$

$\therefore C = 0$, (1) নং এ বসাই,

$$\ln y = i\theta$$

$$\Rightarrow y = e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

$$\boxed{e^{in\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\theta = \pi$

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$

$\Rightarrow e^{i\pi} = -1$

$\Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$

$\Rightarrow e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$

$$\Rightarrow \boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$$

$$\boxed{\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}}$$

* $25\dfrac{d^2x}{dt^2} + 400x = 0$

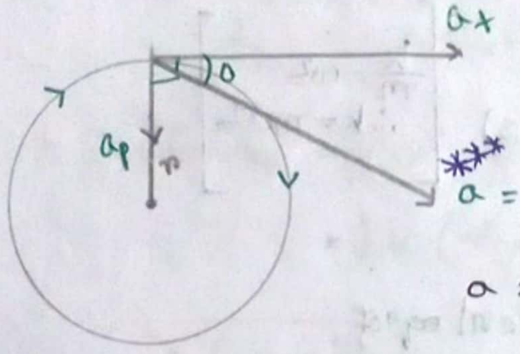
$\Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$

$\Rightarrow a = -16x$

$\Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = -16x$

$\Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = -16x$

Topic 04



$$a_t = \alpha r$$

$$a_p = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

*** $a = \sqrt{a_t^2 + a_p^2}$

$$a = \sqrt{\alpha^2 r^2 + \omega^4 r^2}$$

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = a_t \qquad \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = a_p$$

$\vec{v} = \text{const}$

$a_t = 0$

$\alpha = 0$

$\omega = \text{const}$

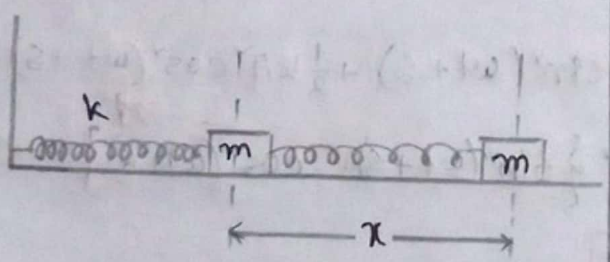
সরল ছন্দিত স্পন্দনে শক্তির বণ্টন (Energy distribution in S.H.M)

আমরা জানি,

মোট শক্তি, $E = E_p + E_k \rightarrow$ kinetic energy

$E_p \downarrow$ Potential energy

বিভব শক্তি :



$\therefore$ বিভব শক্তি, $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ → Position dependent eq^n of P.E in S.H.M

$x = A\sin(\omega t + \delta)$

$$\boxed{\therefore E_p = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \delta)}$$

→ Time dependent eq^n of P.E in S.H.M

গতি শক্তি : (E_k)

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

এখানে, $v = \omega A \cos(\omega t + \delta)$

$$\therefore E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

$$\left[\frac{k}{m} = \omega^2 \quad \therefore k = m\omega^2 \right]$$

$$\boxed{\therefore E_k = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \delta)}$$

↳ time dependent eqn of k.E in S.H.M

আবার,

$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2) \quad [m\omega^2 = k]$$

$$\boxed{\therefore E_k = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)}$$

↳ Position dependent eqn of kE in SHM

মোট শক্তি :

Taking time dependent eqn

$$E_p = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

$$E_k = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

$$\therefore E = E_p + E_k = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \{ \underbrace{\sin^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta)}_{1} \}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} k A^2}$$

Taking position dependent eqⁿ

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

$$\therefore E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

$$= \frac{1}{2}k(x^2 + A^2 - x^2)$$

$$\boxed{\therefore E = \frac{1}{2}kA^2}$$

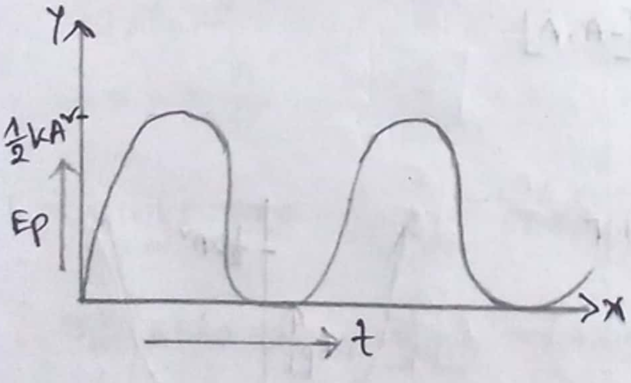
$$\therefore E \propto A^2 \quad \left[\frac{1}{2}k = \text{const}\right]$$

∴ সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দনরত কোনো বস্তুর মোট শক্তি বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক।

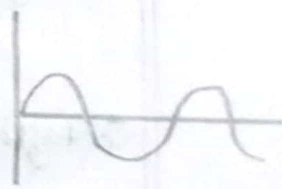
⊞ Graph

⇒ Time dependent eqⁿ :

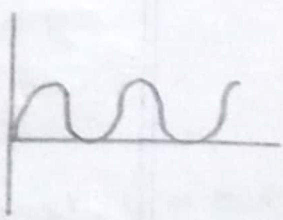
$$\therefore E_p = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \delta)$$



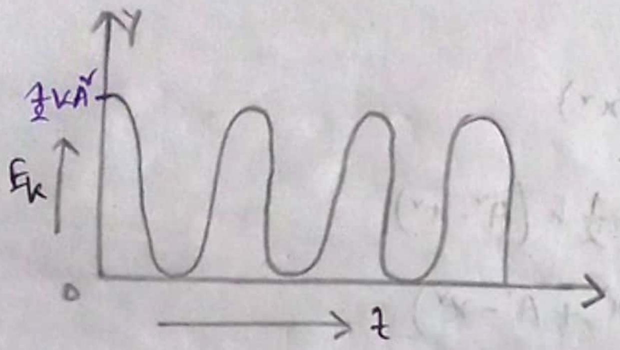
$y = \sin x$



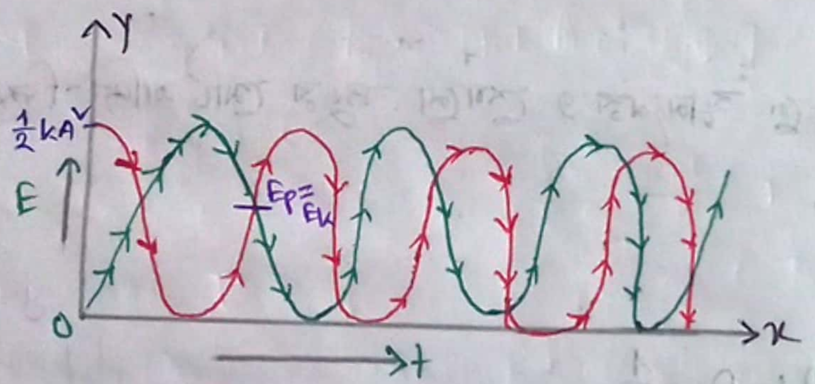
$y = \sin^2 x$



$$\therefore E_k = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\delta)$$



মোট শক্তি :



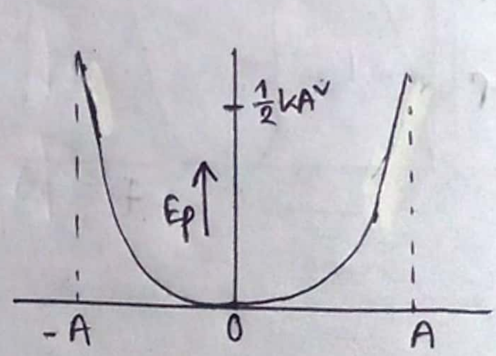
অবস্থান- নির্ভর সমীকরণ

বিভব শক্তি : $E_p = \frac{1}{2}kx^2 \quad x = [-A, A]$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\boxed{y = c\ x^2}$$

পরাবৃত্তের সমীকরণ



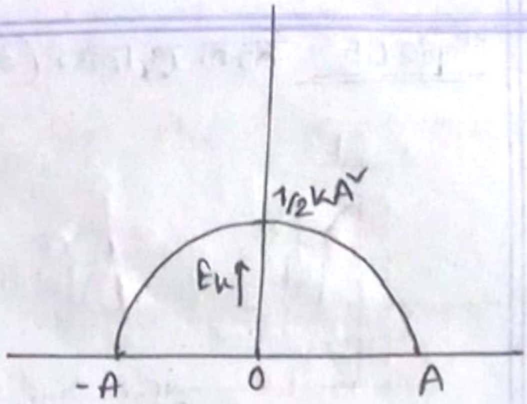
গতিশক্তি

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)} \quad x = [-A, A]$$

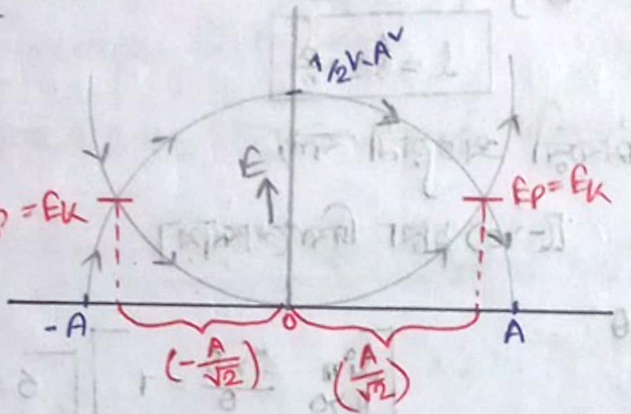
$$\downarrow$$

$$\boxed{Y = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)}$$

→ প্যারাবৃত্তের সমীকরণ



Combined Graph



এখানে,

$E_p = E_k$

$\Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$

$\Rightarrow x^2 + x^2 = A^2$

$\Rightarrow 2x^2 = A^2$

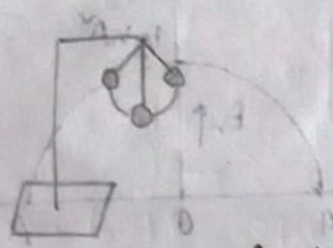
$\Rightarrow x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}}$

∴ সাম্যাবস্থা থেকে $\frac{A}{\sqrt{2}}$ দূরে গতিশক্তি, বিভবশক্তির সমান হবে।

Q. স্পন্দনগতি সম্পন্ন কোনো বস্তুকণার বিস্তার 5√2 cm. সাম্যাবস্থা থেকে কত দূরে বস্তুটির গতিশক্তি ও বিভবশক্তি পরস্পর সমান হবে?

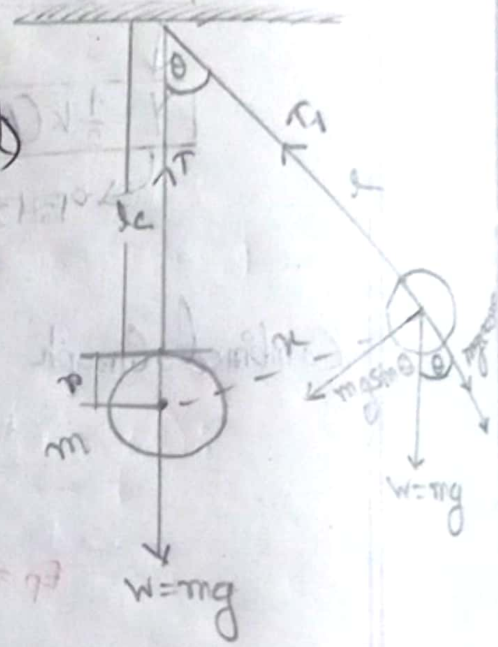
Ans: 5 cm

Topic 05 সরল দোলক (Simple Pendulum):



অপ্রসারণশীল সুতার দৈর্ঘ্য $= l_c$ (chord)

∴ ববের ব্যাসার্ধ $= r$



কার্যকরী দৈর্ঘ্য, $\boxed{l = l_c + r}$

$$\boxed{l = l_c + \frac{d}{2}}$$

∴ ববের উপর কার্যকরী প্রত্যয়নী বল,

$\Sigma F = -mg\sin\theta$ [(−ve) দ্বারা দিক বোঝায়]

$\Rightarrow ma = -mg\sin\theta$

$\Rightarrow a = -g\sin\theta$

$\Rightarrow a = -g\theta$ [θ ক্ষুদ্র]

$\Rightarrow a = -g\frac{x}{l}$

$\Rightarrow a = -\frac{g}{l}x$

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega^2} x = 0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$

$$\left[\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \quad \therefore \lim_{\theta\to 0}\sin\theta = \theta\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} s = r\theta \\ \downarrow \quad \downarrow\downarrow \\ x = l\theta \\ \therefore \theta = \frac{x}{l} \end{array}\right]$$

$\omega^2 = \frac{g}{l}$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

∴ সরলদোলকের গতি সরল ছন্দিত স্পন্দন।

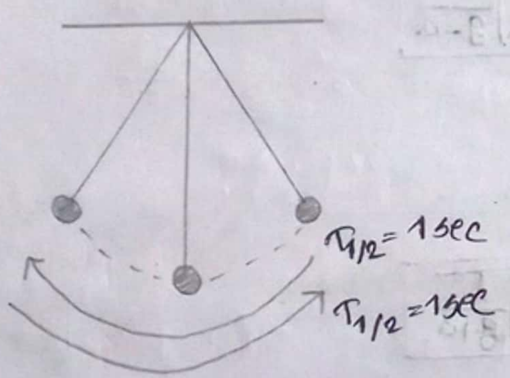
সরল দোলকের ব্যবহার

1. যে কোনো স্থানের অভিকর্ষজ ত্বরণ, g এর মান নির্ণয়ের জন্য সরল দোলক ব্যবহার করা হয়।

2. ভূপৃষ্ঠ থেকে কোনো উঁচু স্থানের উচ্চতা নির্ণয়ের জন্য সরলদোলক ব্যবহার করা হয়।

সেকেন্ড দোলক (Second Pendulum):

যে দোলকের পর্যায়কাল 2sec তাকে second দোলক বলে।



$T = 2sec$

$T_{1/2}$ = অর্ধদোলন এর সময়কাল

$\boxed{\text{পর্যায়কাল} = 2 \times \text{অর্ধদোলন এর সময়কাল}}$

সেকেন্ড দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য

$$T = 2sec$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\Rightarrow 2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\Rightarrow 1 = \pi^2 \frac{l}{g}$$

$$\Rightarrow l = \frac{g}{\pi^2} = \frac{9.8}{\pi^2}$$

$$= 0.9929m = 99.29\ cm$$

Special observation

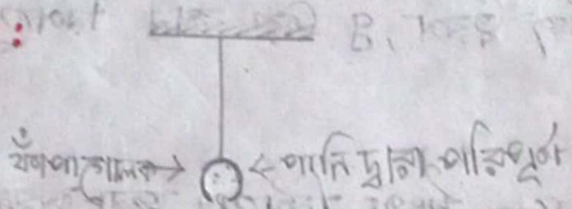
সরলদোলকের পর্যায়কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$\boxed{g \text{ const};\ T \propto \sqrt{l}}$

$\boxed{l \text{ const};\ T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}}$

Special cases

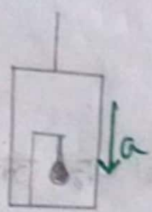
Case 01:



তরল নির্গত হওয়ার সময় নিচের দিকে নেমে যায় ফলে কার্যকরী দৈর্ঘ্য বেড়ে যায়। তাই, পর্যায়কাল বৃদ্ধি পায়।

সরল দোলকের পর্যায়কালের উপর লিফ্টের প্রভাব (Case 02):

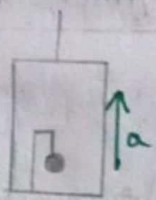
i.



$g' = g - a$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}}$$

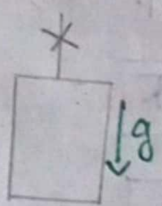
ii.



$g' = g + a$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}}$$

iii.

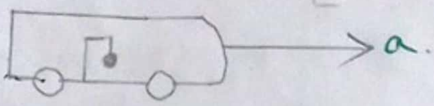


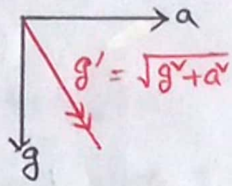
$g' = 0$

$$\boxed{T = \infty}$$

Case 03 :

অনুভূমিক বরাবর a ত্বরণে গতিশীল কোনো গাড়িতে রাখা সরল দোলকের জন্য পর্যায়কালের সমীকরণ :



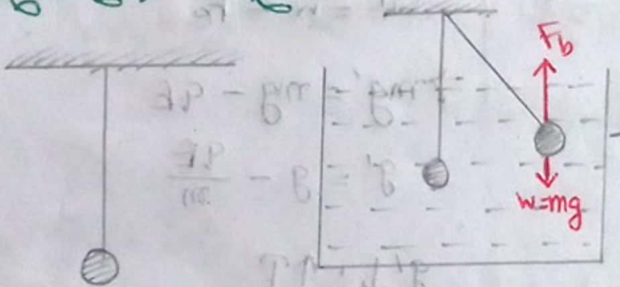


$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}}$$

Case 04 :

সরলদোলকের পর্যায়ের উপর প্লবতা বলের প্রভাব



→ তরলের ঘনত্ব = ρ_l

ববের ঘনত্ব = ρ_b

$(\rho_b > \rho_l)$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ —(i)

$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$ —(ii)

ববের কার্যকরী ওজন, $W' = W - F_b$

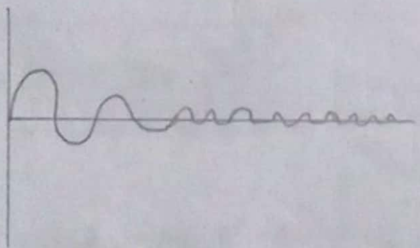
$\Rightarrow mg' = mg - F_b$

$\Rightarrow \rho_b V g' = \rho_b V g - \rho_l V g$

$\Rightarrow \rho_b g' = g(\rho_b - \rho_l)$

$\Rightarrow \boxed{g' = g\left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_b}\right)}$

F_b = প্লবতা বল
= অপসারিত তরলের ওজনের সমান
= $\rho_l V g$



$\rho_l < \rho_b$

$\therefore 0 < \frac{\rho_l}{\rho_b} < 1$

$\therefore 0 < \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_b}\right) < 1$

$\boxed{\therefore g' < g}$

(i) ÷ (ii) ⇒

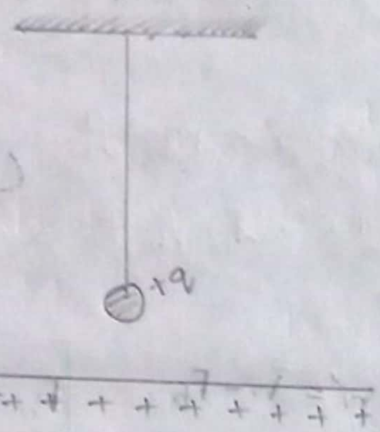
$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{g'}{g}}$$

$$\left[\begin{array}{l} g' = g\left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_b}\right) \\ \therefore \frac{g'}{g} = 1 - \frac{\rho_l}{\rho_b} \end{array}\right]$$

$$\therefore \frac{T}{T'} = \sqrt{\left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_b}\right)}$$

Case 05 :

সরল দোলকের পর্যায়কালের উপর তড়িৎ বলের প্রভাব



$$w' = w - F_e$$

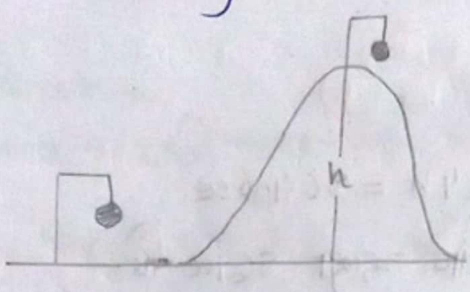
$$\Rightarrow mg' = mg - qE$$

$$g' = g - \frac{qE}{m}$$

$$g' \downarrow ; \uparrow T$$

* চার্জ ক্ষেত্রে একই চার্জযুক্ত হলে T বাড়বে আর বিপরীতধর্মী হলে T কমবে।

সরলদোলক ব্যবহার করে পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয়



$g' \downarrow \quad T' \uparrow$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} \quad \text{—— (ii)}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{—— (i)}$$

T = ভূপৃষ্ঠে বা পাহাড়ের পাদদেশে পর্যায়কাল

(i) ÷ (ii) ⇒

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{g'}{g}} \quad \text{—— (iii)}$$

এখানে, $g' = g\,\dfrac{R^2}{(R+h)^2}$

$$\Rightarrow \frac{g'}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \quad \text{—— (iv)}$$

Using (iv) in (iii)

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{R^2}{(R+h)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{T'} = \frac{R}{(R+h)}$$

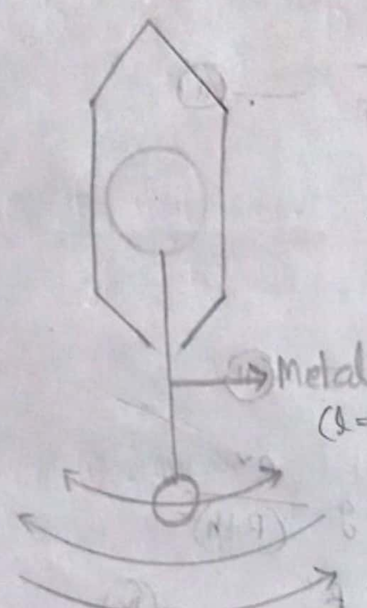
$$\Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{R+h}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T'}{T} = \left(1 + \frac{h}{R}\right)} \ ***$$

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6400\ km = 6.4 \times 10^6\ m$

*** Math করার সময় দশমিকের পর 6 ঘর নিতে হবে।

Pendulum Clock



∴ 2 বীট = পর্যায়কাল (T)

1 দিন = 24 h = 86400 sec

∴ 1 দিনে বীট সংখ্যা 86400 টি

T = 2 sec

1 sec = অর্ধদোলন = 1 বীট

গ্রীষ্মকাল

Pendulum ঘড়ি গ্রীষ্মকালে ধীরে চলে। গ্রীষ্মকালে তাপমাত্রা বৃদ্ধির জন্য কার্যকরী দৈর্ঘ্য বেড়ে যায়। ফলে পর্যায়কাল বেড়ে যায়। তাই, ঘড়ি slow হয়ে যায়।

ঘড়ি n sec ধীরে চলে

∴ ঘড়ি n সংখ্যক বীট কম দেয়

∴ সারাদিনে বীট সংখ্যা $(86400-n)$ টি

∴ $(86400-n)$ টি বীট দেয় 86400 sec

∴ 1 টি " " $\frac{86400}{86400-n}$ "

∴ 2 টি " " $\frac{2\times 86400}{86400-n}$ "

∴ পরিবর্তিত পর্যায়কাল $\boxed{T' = \frac{2\times 86400}{86400+n}}$

Let, $86400 = t$ $\boxed{T' = \frac{2 \times t}{(t+n)}}$ $[T' >> 2 sec]$

শীতকাল

শীতকালে ঘড়ি দ্রুত চলে। কারণ, তাপমাত্রা কমে যাওয়ার জন্য কার্যকারী দৈর্ঘ্য কমে যায়। ফলে পর্যায়কাল কমে যায়। তাই, ঘড়ি দ্রুত চলে।

ধরি,

ঘড়ি n sec দ্রুত চলে।

∴ " n সংখ্যক বেশি বীট দেয়।

∴ আমাদের বীট সংখ্যা $(86400+n)$ টি

∴ $(86400+n)$ টি বীট দেয় 86400 sec

∴ 1 টি " " $\frac{86400}{86400+n}$ "

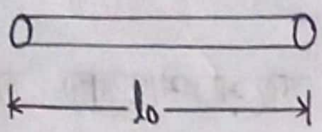
∴ 2 টি " " $\frac{2 \times 86400}{86400+n}$ "

∴ পরিবর্তিত পর্যায়কাল, $\boxed{T' = \frac{2 \times 86400}{86400+n}}$

Let,

$86400 = t$ $[T' << 1 sec]$

$$\boxed{T' = \frac{2 \times t}{t+n}}$$



$\Delta\theta$ বৃদ্ধি করা হলে,

$\Delta l \propto l_0$ —— (i)

$\Delta l \propto \Delta\theta$ —— (ii)

from (i) & (ii) $\Rightarrow$

$\Delta l \propto l_0 \Delta\theta$

$\Rightarrow \Delta l = \alpha l_0 \Delta\theta$

$\alpha \rightarrow$ দৈর্ঘ্য প্রসারণ সহগ

$$\boxed{\therefore \alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta\theta}}$$

Unit: $\frac{m}{m\ ^\circ C} = {}^\circ C^{-1}$

$l_0 = 1m$, $\Delta\theta = 1^\circ C$,

$\therefore \alpha = \Delta l$

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta\theta}$$

$\Rightarrow \Delta l = \alpha l_0 \Delta\theta$

$\Rightarrow l_f - l_0 = \alpha l_0 \Delta\theta$

$$\Rightarrow \boxed{l_f = l_0 (1 + \alpha\Delta\theta)}$$

$[\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1]$

9. কক্ষ তাপমাত্রায় অ্যালুমিনিয়ামের তৈরী একটি Pendulam ঘড়ি সঠিক-সময় দেয়। যদি, গ্রীষ্মকালে 43°C হয় তবে ঘড়িটি প্রতিদিনে কত sec ধীরে বা দ্রুত চলবে? [অ্যালুমিনিয়ামের, $\alpha = 2.5\times10^{-5}\ {}^\circ C^{-1}$]

Soln:

$\Delta\theta = 43^\circ C - 25^\circ C = 18^\circ C$

গ্রীষ্মকাল হওয়ায় ঘড়িটি slow চলবে. কার্যকরী দৈর্ঘ্য বেড়ে যাবে.

$l' = l_0 (1 + \alpha \Delta\theta)$

$= 0.9929 (1 + 2.5\times10^{-5} \times 18)$

$l' = 0.99335\ m$

$\therefore$ পরিবর্তিত পর্যায়কাল, $T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$

$= 2\pi\sqrt{\frac{0.99335}{9.8}}$

$= 2.0004053$

$T' = \frac{2t}{t-n}$

$\Rightarrow T' = \frac{2\times86400}{86400-n}$

$\Rightarrow 2.0004053 = \frac{2\times86400}{86400-n}$

$\Rightarrow 86400 - n = \frac{2\times86400}{86400-n}$

$\Rightarrow n = 86400 - 86382.5$

$\therefore n = 17.5$ sec

Q. একটি Pendulum ঘড়ি পাহাড়ের চূড়ায় নিয়ে গেলে এটি 2 ঘন্টায় 8 sec ধীরে চলে। উক্ত পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় কর। (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, R = 6400 km)

Soln:

∴ পরিবর্তিত পর্যায়কাল, $T' = \frac{2t}{t-n}$ | $t = 2h = 7200$ sec

$$= \frac{2 \times 7200}{7200 - 8}$$

$$= 2.002225 \text{ sec}$$

$$\frac{T'}{T} = 1 + \frac{h}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{2.002225}{2} = 1 = \frac{h}{R}$$

$$\Rightarrow 1.1125 \times 10^{-3} = \frac{h}{R} = \frac{h}{6.4 \times 10^{6}}$$

$$\therefore h = 7120 \text{ m}$$

$$= 7.12 \text{ km}$$

Ans.