Chapter-3

গতিবিদ্যা (Dynamics)

Topic: 1: রৈখিক গতি (Linear motion):

বেগ: $v = \frac{ds}{dt}$ $\boxed{s(t)}$ $s = ut + \frac{1}{2}at^2$, $u \to v_0$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(s) = \frac{d}{dt}(v_0 t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}at^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(s) = v_0 \frac{d}{dt}(t) + \frac{1}{2}a\frac{d}{dt}(t^2)$$

$$\Rightarrow v = v_0 + \frac{1}{2}a.2t$$

$$\Rightarrow \boxed{v = v_0 + at}$$

* $\boxed{v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}}$ → সময়ের সাপেক্ষে একবার differentiate করলে s এর উপর একটা ডট (·)।

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

* $$\boxed{\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}}$$

ত্বরণ:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

$$\boxed{a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}}$$

সময়ের সাপেক্ষে সরণকে দুইবার differentiate করলে ত্বরণ পাওয়া যায়।

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = v_0 + at$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt}(at)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} = a\frac{d}{dt}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} = a$$

$$\therefore \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{d^2 x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2 y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2 z}{dt^2}\hat{k}$$

$$\therefore \boxed{\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}}$$

* $s(t) = 2t^2 + 4t + 9$; 2sec এ বেগ নির্ণয় কর।

i) $\frac{ds}{dt} = 4t + 4$

$\Rightarrow v(t) = 4 + 4t$

$t = 2sec.$

$v(2) = 4 + 8$

$= 12 m/s$

$v(t) = 4 + 4t$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4 m/s^2$

$\therefore a = 4 m/s^2$

অথবা,

$s(t) = 2t^2 + 4t + 9$

$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$s(t) = 4t + 2t^2 + 9$

$v_0 = 4ms^{-2}$

$\frac{1}{2}a = 2$

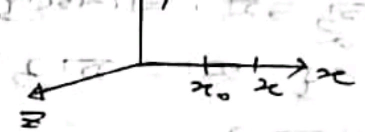
$v = v_0 + at$

$v = 4 + 4 \times 2$

$= 12 ms^{-2}$

$s = vt$

$\Rightarrow x - x_0 = vt$



$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$\downarrow$

$(x - x_0) = v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$

$\Rightarrow x = v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 + x_0$

আগের সমীকরণও আসছে এই ভাবে।

---

i. $v = v_0 + at$

ii. $s = \left(\frac{v + v_0}{2}\right) t$

iii. $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

iv. $v^2 = v_0^2 + 2as$

v. "t" তম সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব :- $s_{th} = v_0 + \frac{1}{2} a (2t - 1)$

■ কোনো বস্তুর t_1 সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$s_{th_1} = v_0 + \frac{1}{2} a (2t_1 - 1) \text{ ——— (i)}$$

আবার, বস্তুর t_2-তম সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$s_{th_2} = v_0 + \frac{1}{2} a (2t_2 - 1) \text{ ——— (ii)} \quad [t_2 > t_1]$$

(ii) - (i) করে,

$$s_{th_2} - s_{th_1} = v_0 + \frac{1}{2} a (2t_2 - 1) - v_0 - \frac{1}{2} a (2t_1 - 1)$$

$$\Rightarrow s_{th_2} - s_{th_1} = \frac{1}{2} a (2t_2 - 1 - 2t_1 + 1)$$

$$\Rightarrow s_{th_2} - s_{th_1} = \frac{1}{2} a \cdot 2 (t_2 - t_1)$$

***

$$\boxed{\therefore a = \frac{s_{th_2} - s_{th_1}}{t_2 - t_1}} \quad [t_2 > t_1]$$

* 10kg ভরের একটি বস্তু 5ম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব 10m এবং 7ম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব 26m। বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল কত?

উ: $a = \frac{26-10}{9-5}$

$= \frac{16}{4}$

$= 4$

$\therefore F = ma = 4 \times 10 = 40N$

□ গড়বেগ (Average velocity): $\bar{v}$ or (V_{avg})

* কোনো বস্তুর মোট অতিক্রান্ত সরণকে মোট সময় দিয়ে ভাগ করলে গড় বেগ পাওয়া যায়।

□ গড়দ্রুতি: মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব।

$$V_{avg} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n} = \frac{\Sigma s}{\Sigma t}$$

$$V_{avg} = \frac{\Sigma d}{\Sigma t}$$

* যাত্রির $10\,ms^{-1}$ বেগে বাসা থেকে কলেজে যায় ও $2ms^{-1}$ বেগে ~~বাসা~~ কলেজ থেকে বাসায় যায়।

(i) যাত্রির গড় বেগ নির্ণয় কর। উ: 0

(ii) যাত্রির গড় দ্রুতি নির্ণয় কর। উ: $\frac{2uv}{v_1+v_2} = \frac{2\times 10\times 2}{10+2}$

$= 8.24$

(ii) b

বাসা $\xrightarrow[\quad d \quad]{v_1}$ কলেজ $\quad t_1 = \frac{d}{v_1}$

$\xleftarrow[\quad t_2 \quad]{d \quad v_2}$

$$t_2 = \frac{d}{v_2}$$

$$v_{avg} = \frac{d+d}{t_1+t_2} = \frac{2d}{\frac{d}{v_1}+\frac{d}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$$

$$\boxed{v_{avg} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}}$$

* একটি গাড়ি সুষম ত্বরণে চলমান, গাড়িটি সুষম ত্বরণে 8m/s বেগ থেকে 10s এ $28 ms^{-1}$ বেগ লাভ করে।
(i) গড় বেগ নির্ণয় কর।

উ: $s = \bar{v}t \qquad \bar{v} = \frac{v_0+v}{2} = \frac{8+28}{2} = 18\ m/s$

$s = \left(\frac{v_0+v}{2}\right)t$

$v_0 = 8\ m/s$

$a = 2\ m/s^2$

$s = v_0 \times t + \frac{1}{2}at^2 = (8\times10) + \frac{1}{2}\times2\times(10)^2 = 180\ m$

$\therefore \bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{180}{10} = 18$

* একটি গাড়ি 1ম 3s এ গড়বেগ $12\ ms^{-1}$ এবং পরবর্তী 3s এ গড়বেগ $8ms^{-1}$, গাড়িটি সমত্বরণে গতিশীল হলে এর আদিবেগ ও শেষবেগ নির্ণয় কর।

উ: ১ম 3s এ গড়বেগ $\bar{v}_1 = 12\ m/s$
পরবর্তী 3s এ গড়বেগ, $\bar{v}_2 = 8\ m/s$

ধরি, আদিবেগ v_0, শেষবেগ v, ত্বরণ a

১ম 3s এ শেষ বেগ $v' = v_0 + 3a$

পরবর্তী 3sec এ শেষ বেগ $v = v_0 + 6a$

প্রথম 3s এ,

$$\overline{v_1} = \frac{v_0 + v'}{2}$$

$$\Rightarrow 12 = \frac{v_0 + v_0 + 3a}{2}$$

$$\Rightarrow 24 = 2v_0 + 3a \text{ ——— (i)}$$

~~১ম ও ২য় এর ক্ষেত্রে বেগ v~~

পরবর্তী 3s এর জন্য,

$$\overline{v_2} = \frac{v' + v}{2} = \frac{2v_0 + 9a}{2}$$

$$\Rightarrow 8 = \frac{2v_0 + 9a}{2}$$

$$\Rightarrow 8 = \frac{2v_0 + 9a}{2}$$

$$2v_0 + 9a = 16 \text{ ——— (ii)}$$

(ii) − (i)

$$2v_0 + 9a = 16$$

$$\underline{\overset{(-)}{2v_0} \overset{(-)}{+ 3a} = \overset{(-)}{24}}$$

$$\Rightarrow 6a = -8$$

$$\boxed{a = -1.33 \text{ m/s}^2}$$

a এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$2v_0 + (-11.97) = 16$$

$$\therefore v_0 = 13.985 \text{ m/s} \Rightarrow \text{আদিবেগ}$$

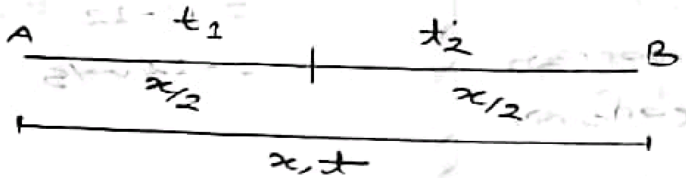
শেষবেগ, $v = v_0 + 6a$

$$\Rightarrow v = 13.985 + 6 \times (-1.33)$$

$$= 6.005 \text{ m/s} \rightarrow \text{শেষবেগ (Ans.)}$$

* একজন ব্যক্তি তার গন্তব্যস্থলের অর্ধেক পথ 12 km/h বেগে অতিক্রম করে। বাকি অর্ধেক পথ কত বেগে গেলে সমগ্র পথের গড়বেগ হবে 18 km/h? [D.U-MCQ]

উ:



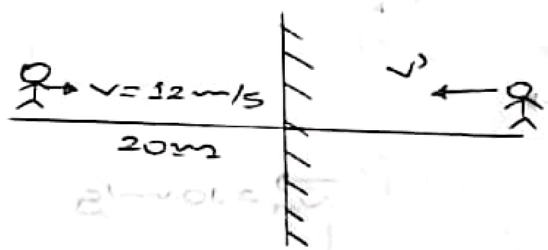
$t = t_1 + t_2$

$\Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{x/2}{12} + \frac{x/2}{v}$

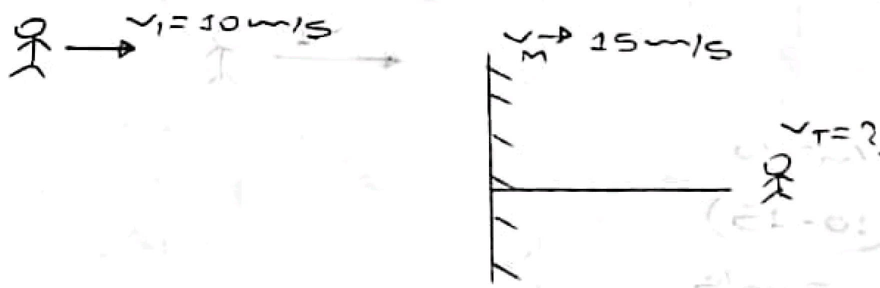
$\Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{12} + \frac{1}{v}$

$\Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{9} - \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{36} \Rightarrow v = 36\ km/h$ (Ans.)

*



*



($v_m > v_o$)

আয়নার সাপেক্ষে object-এর বেগ যা তাই বিম্বের বেগ।

observer-এর আয়নার

★ object

V_0 V_M

observer-এর সাপেক্ষে Mirror-এর আপেক্ষিক বেগ।

$V_{MO} = V_M - V_0$
$= 0 - 12$
$= -12\ m/s$

$V_0 = 12\ m/s$ (+ve)

★ $V_0 = 10\ m/s$ $V_M = 15\ m/s$ $V_i = 5\ m/s$

$V_{MO} = V_i = V_M - V_0$
$= 15 - 10$
$= 5\ m/s$

★ $V_0 = 15\ m/s$ $\vec{V}_M = 10\ m/s$ V_i

$V_i = V_{MO} = V_M - V_0$
$= (10 - 15)$
$= -5\ m/s$

উত্তল দর্পণ হলেও একই কাহিনী হবে।

পড়ন্ত বস্তুর সূত্র:

Linear

(i) $v = v_0 + at$

(ii) $s = \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)t$

(iii) $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

(iv) $v^2 = v_0^2 + 2as$

(v) $s_{th} = v_0 + \frac{1}{2}a(2t-1)$

$a \rightarrow g$

$s \rightarrow h$

Falling bodies

(i) $v = v_0 + gt \downarrow$

$v = v_0 - gt \uparrow$

(ii) $h = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t$

(iii) $h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \downarrow$

$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \uparrow$

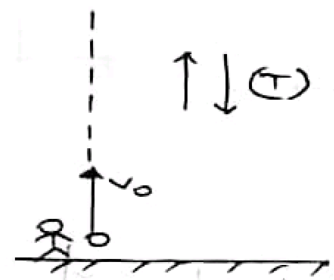
(iv) $v^2 = v_0^2 + 2gh \downarrow$

$v^2 = v_0^2 - 2gh \uparrow$

(v) $h_{th} = v_0 + \frac{1}{2}g(2t-1) \downarrow$

$h_{th} = v_0 - \frac{1}{2}g(2t-1) \uparrow$

* পর্যায়কাল (Time period):



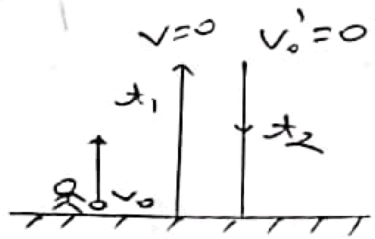
$\cancel{h}^{\,0} = v_0 T - \frac{1}{2}gT^2$

$\Rightarrow v_0 T - \frac{1}{2}gT^2 = 0$

$\Rightarrow T\left(v_0 - \frac{1}{2}gT\right) = 0$

$\Rightarrow T \neq 0 \quad \therefore v_0 - \frac{1}{2}gT = 0$

$\boxed{\therefore T = \frac{2v_0}{g}}$



$T = t_1 + t_2$

উপরে উঠার সময়:

$0 = v_0 - gt_1$

$\Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{v_0}{g}}$

নিচে পড়ার সময়:

$t_1 + t_2 = \frac{2v_0}{g}$

$\Rightarrow \frac{v_0}{g} + t_2 = \frac{2v_0}{g}$

$\Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{v_0}{g}}$

আবার,

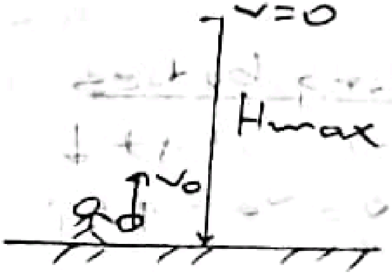
$v' = \cancel{v_0'}^{\,0} + gt_2$

$\Rightarrow t_2 = \frac{v'}{g}$

$\Rightarrow \frac{v_0}{g} = \frac{v'}{g}$

$\boxed{v_0 = v'}$

* সর্বোচ্চ উচ্চতা (Maximum height): H_{max}

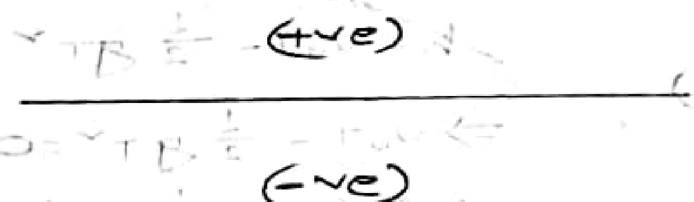


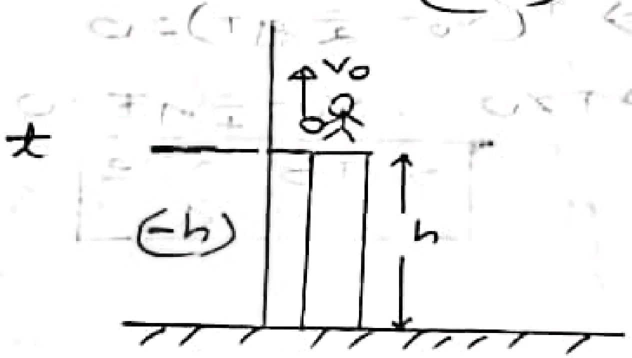
$$\cancel{v^2} \to 0 = v_0^2 - 2gH_{max}$$

$$\boxed{\therefore H_{max} = \frac{v_0^2}{2g}}$$

* Reference line/Datum line:

For vertical displacement,



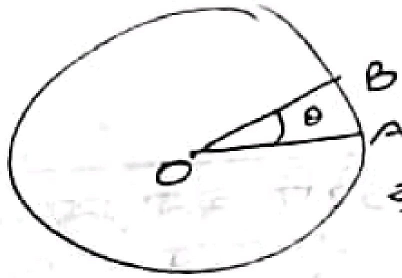


$$-h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Big| \quad h = -v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Circular motion/Angular motion (বৃত্তীয় গতি/কৌণিক গতি):

বৃত্তাকার পথে কোনো বস্তুর গতিই হচ্ছে কৌণিক গতি।

(i) কৌণিক সরণ (Angular displacement): (θ)



* বৃত্তাকার পথে গতিশীল কোনো বস্তু কোনো নির্দিষ্ট সময়ে কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে কৌণিক সরণ বলে।

chapter 7

$\boxed{\theta}$ Unit: Rad

Dimension: $[\theta] = \left[\frac{L}{L}\right] = 1$

$\left[S = r\theta \quad \theta = \frac{S}{r}\right]$

কেন্দ্রে একবার ঘূর্ণনে পূর্ণ আবর্তনে কোণ $360°$

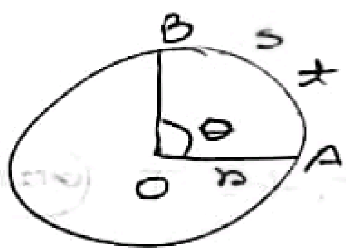
* কৌণিক সরণ মাত্রাবিহীন রাশি।

$$\boxed{\therefore \text{ঘূর্ণন } n = \frac{\theta}{2\pi}}$$

2π	1
1	$\frac{1}{2\pi}$
θ	$\frac{\theta}{2\pi}$

(ii) কৌণিক বেগ (Angular Velocity): (ω)

বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুর একক সময়ে অতিক্রান্ত কৌণিক সরণকে কৌণিক বেগ বলা হয়।



* t সময়ে অতিক্রান্ত কৌণিক সরণ $= \theta$

$\therefore 1$ " " " " $= \frac{\theta}{t}$

$$\boxed{\omega = \frac{\theta}{t}} \Rightarrow \theta = \omega t$$

Unit: Rad/s

Dimention: $[\omega] = \left[\frac{1}{T}\right] = [T^{-1}]$

Differential form,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad [\theta(t)]$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$S = r\theta$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(s) = r\frac{d\theta}{dt}$

$\Rightarrow \boxed{v = \omega r}$ ***

* $v = \omega r \quad \left[\omega = \frac{v}{r}\right]$

$\Rightarrow v = \omega r.1$

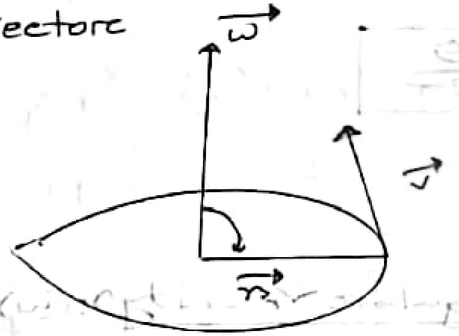
$\Rightarrow v = \omega r \sin 90^\circ$

$\Rightarrow |\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}|$

$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$

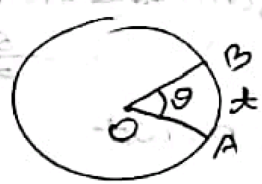
Axail vector

* দুইটি সমান্তরাল আয়নার মাঝখানে কোনো বস্তু রাখলে অসীম সংখ্যক বিম্ব গঠিত হয়



★ বৃত্তাকার পথের যেকোনো বিন্দুতে রৈখিক বেগের দিক স্পর্শক বরাবর যা ব্যাসার্ধের সাথে লম্ব।

*



$\omega = \frac{\theta}{t}$

$A \rightarrow A$

$\theta = 2\pi, t = T$ (পর্যায়কাল)

$$\boxed{\therefore \omega = \frac{2\pi}{T}}$$

$$\therefore \omega = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi f} \quad \left[f = \frac{1}{T}\right]$$

$f \rightarrow$ Natural frequency [Hz or S^{-1}]

$\omega \rightarrow$ Angular frequency
[কৌণিক কম্পাঙ্ক]

t-সময়ে ঘূর্ণনসংখ্যা N

$\therefore$ 1 " " " $\frac{N}{t}$

$$\therefore f = \frac{N}{t}$$

* $\omega = 2\pi f$

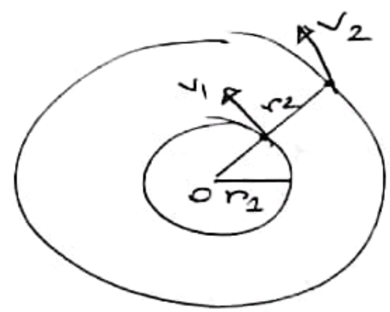
$$\boxed{\omega = \frac{2\pi N}{t}}$$

Let, $t = 1\,min = 60\,sec$

$N \rightarrow$ Revolution Per ~~Second~~ Minute
(R.P.M or r.p.m)

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi N}{60}}$$

$t = 1\,sec$, $N \rightarrow$ (r.p.s)
$\omega = 2\pi N$

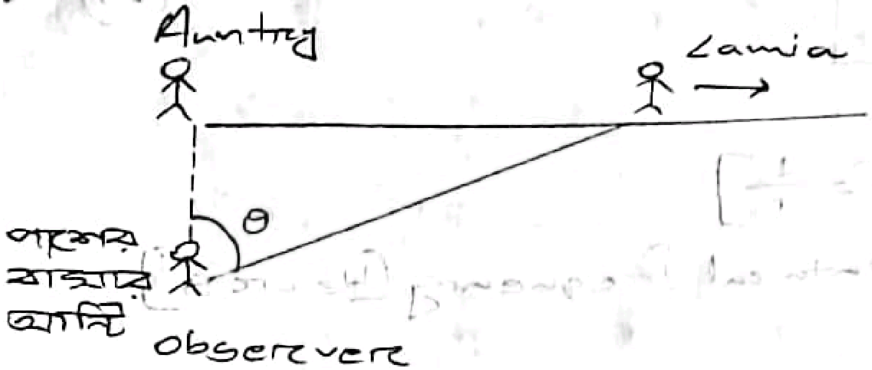


$v_2 > v_1$

$V = \omega r$

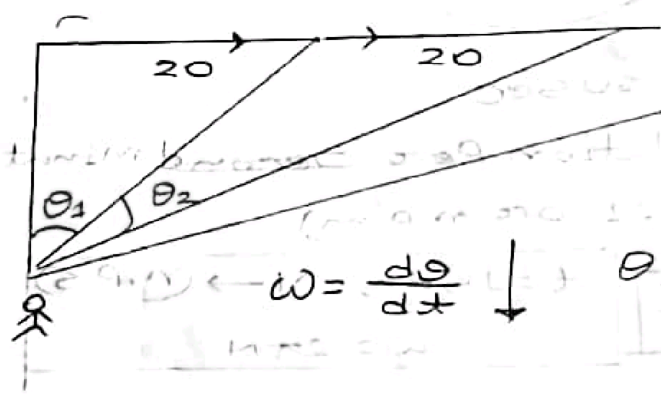
$$\boxed{\omega = const}$$

$$\boxed{v \propto r}$$

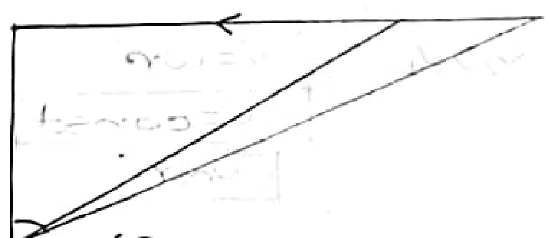


* observer এর সাপেক্ষে যেকোনো একটি particle এর জন্য যে কোনো পথে কৌণিক বেগ বিবেচনা করা যায়।

* $v = 10\ m/s = const$

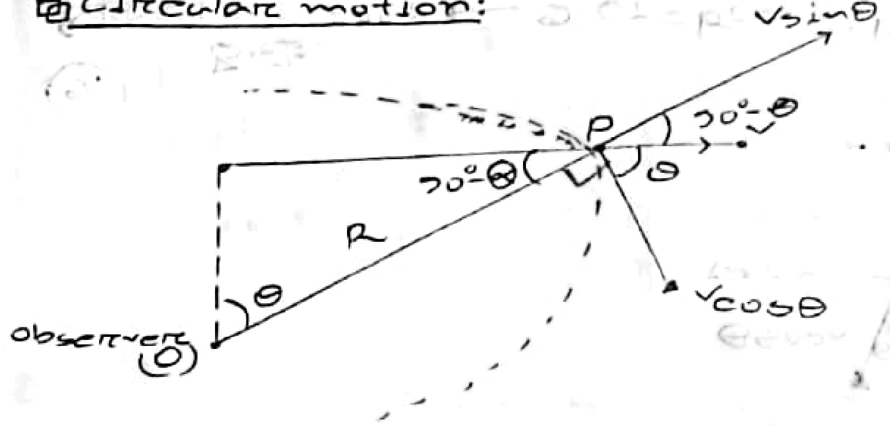


$\omega = \frac{d\theta}{dt} \downarrow \quad \theta \downarrow$



$\omega = \frac{d\theta}{dt} \uparrow \quad \theta \uparrow$

Circular motion:



vcosθ দিয়েই rotation তৈরী হয়েছে।

$$\boxed{\omega_{PO} = \frac{v\cos\theta}{R}}$$

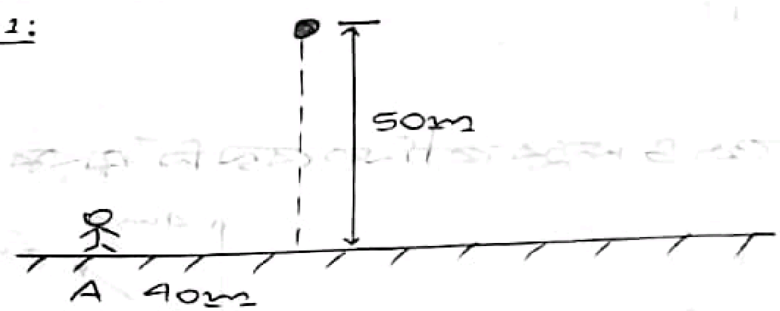
Angular velocity of Partical with respect to observer

লম্ব

$$\omega_{PO} = \frac{\text{component of velocity Perpendicular to } R}{R\text{(distance betn Partical \& observer)}}$$

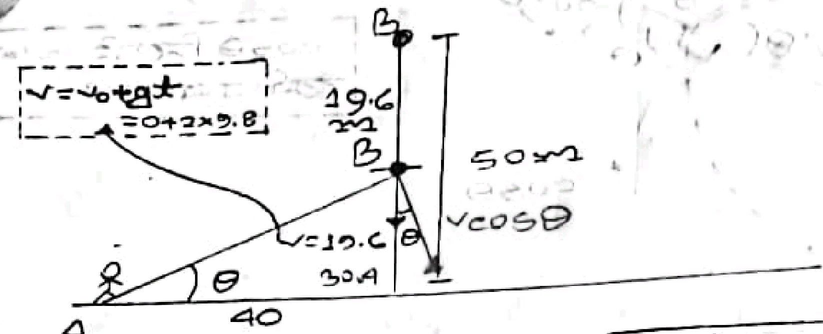
$$\boxed{\omega_{PO} = \frac{v_\perp}{R}}$$

*** Math:-1:**



* A বিন্দুতে দাঁড়ানো ব্যক্তির সাপেক্ষে মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুটির 2sec পর কৌণিক বেগ নির্ণয় কর।

উ: $h = \frac{1}{2} g t^2 = 2g = 19.6 \longrightarrow$ 2 sec এ অতিক্রান্ত দূরত্ব

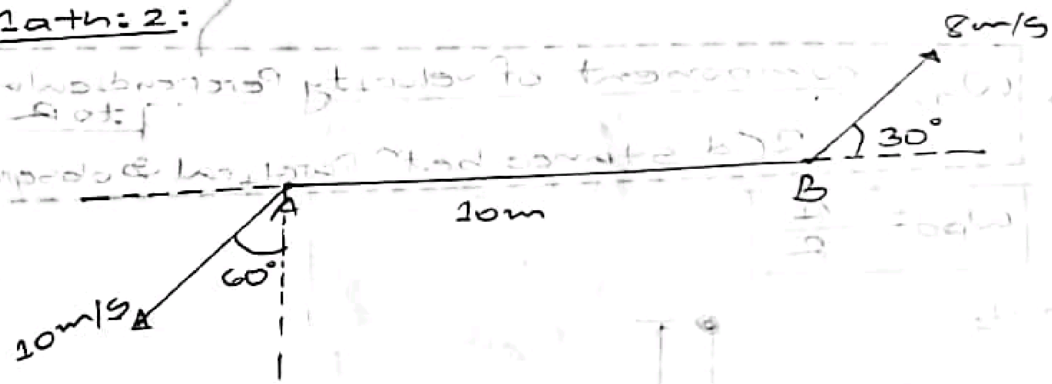


$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{30.4}{40}\right)$ $\quad AB = \sqrt{(30.4)^2 + (40)^2}$

$= 37.23^\circ$ $\quad = 50.24$ m.

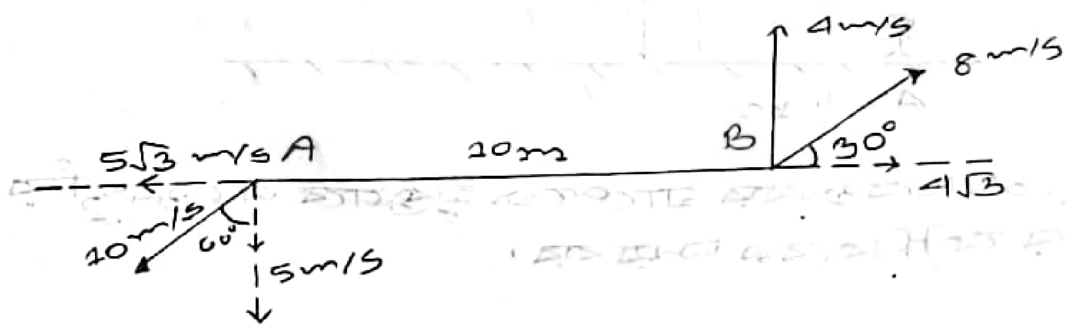
$\therefore \omega_{BA} = \frac{v\cos\theta}{AB} = 0.312$ rad/s (Ans.)

Math: 2:



*A বিন্দুর সাপেক্ষে B বিন্দুর কৌণিক বেগ নির্ণয় কর।

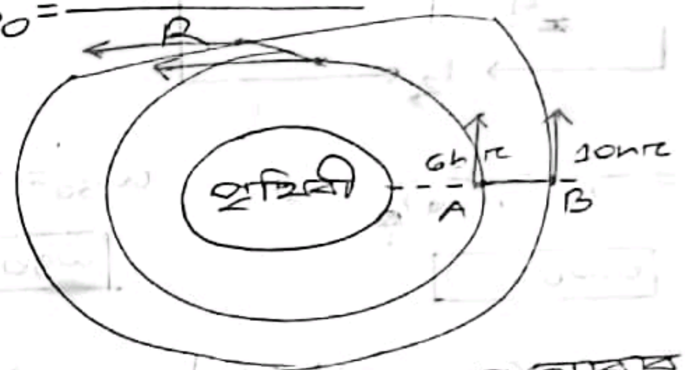
উ:



$|V_{BA}| = 9\ m/s$

$\omega_{BA} = \frac{9}{10} = 0.9\ rad/s$ (Ans.)

$\omega_{PO} = \frac{V_{\perp Relative}}{R}$



$\theta = 2\pi$

$t = T$

$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$

★ প্রদত্ত চিত্রে A ও B বিন্দু দুইটি কত সময় পরে আবার একত্রে যাত্রা শুরু করবে / মিলিত হবে?

উঃ A বিন্দুতে, $\omega_A = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

B বিন্দুতে, $\omega_B = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\omega_{relative} = \frac{2\pi}{T}$

$\omega_{relative} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}$

$= \frac{2\pi}{15}$

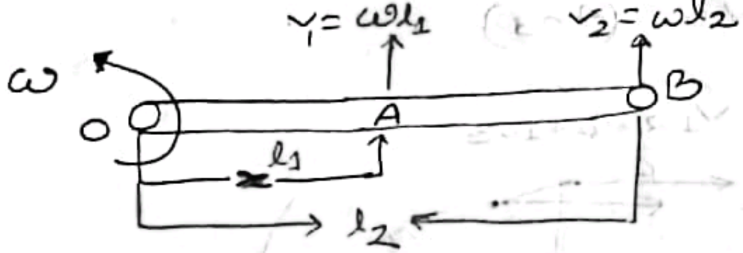
$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega_{relative}}$

$T = 15\ hr$

***

$v = \omega r$

rigid body → দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব একই



$$\omega_{AO} = \frac{v_1}{l_1} = \frac{\omega l_1}{l_1} = \omega$$

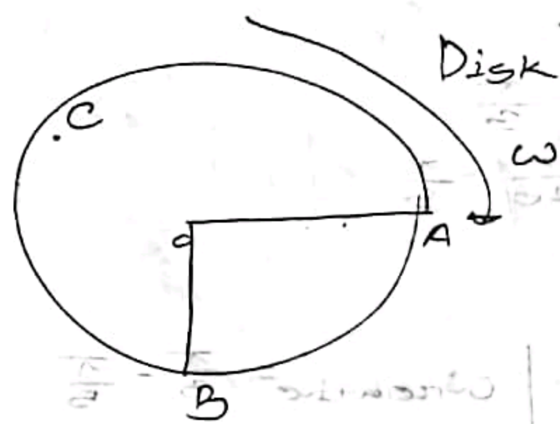
$$\boxed{\omega_{AO} = \omega}$$

$$\omega_{BO} = \frac{\omega l_2}{l_2} = \omega$$

$$\boxed{\omega_{BO} = \omega}$$

$$\omega_{BA} = \frac{v_2 - v_1}{(l_2 - l_1)} = \frac{\omega l_2 - \omega l_1}{(l_2 - l_1)} = \frac{\omega (l_2 - l_1)}{(l_2 - l_1)}$$

$$\boxed{= \omega}$$



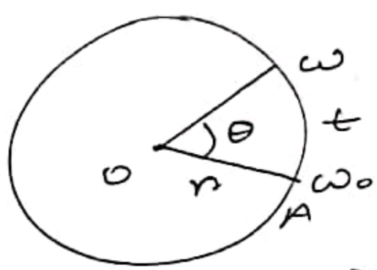
* ঘূর্ণনরত কোনো দৃঢ়বস্তু বা rigid body এর প্রতিটি কণার কৌণিক বেগ সমান থাকে।

কৌণিক বেগের বেলায় ও আপেক্ষিকভাবে 0 হতে পারে

Rotation হইল। নিজের চারপাশে, নিজ অক্ষের চারপাশে।

কৌণিক ত্বরণ (Angular acceleration): (α)

একক সময়ে কৌণিক বেগের পরিবর্তনকে কৌণিক ত্বরণ বলা হয়।



$t \ldots\ldots \Delta\omega$

$\therefore 1 \ldots\ldots \frac{\Delta\omega}{t}$

$$\boxed{\therefore \alpha = \frac{\Delta\omega}{t} = \frac{\omega - \omega_0}{t}}$$

$\therefore$ unit: $\frac{rad/s}{s} = rad/s^2$

Dimension, $[\alpha] = \left[\frac{\frac{1}{T}}{T}\right] = \left[\frac{1}{T^2}\right] = [T^{-2}]$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{t} = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

i) $\omega > \omega_0$, $\Delta\omega$ (+ve), α (+ve)

ii) $\omega < \omega_0$, $\Delta\omega$ (−ve), α (−ve) → কৌণিক মন্দন (Angular deceleration)

iii) $\omega = \omega_0$, $\boxed{\alpha = 0}$

Differential form,

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}$

$\boxed{\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}}$

* $v = \omega r$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$

$\Rightarrow a = \alpha r$

$\boxed{a_t = a = \alpha r}$

tenzensial (স্পর্শক)

$a = \alpha r$

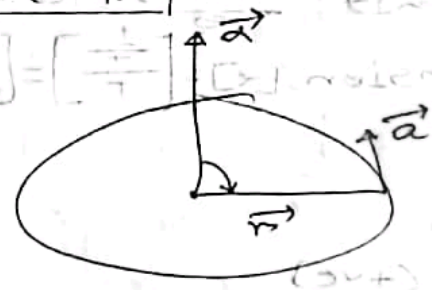
[α = axial vector]

$\Rightarrow a = \alpha r . 1$

$\Rightarrow a = \alpha r \sin 90^\circ$

$\Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{\alpha} \times \vec{r}|$

$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r}}$



$\vec{a} = a_t$

$a = a_t = \alpha r$

বৃত্তাকার বা কৌণিক সূত্রসমূহ:

Linear		Angular
(i) $v = v_0 + at$	$v \to \omega$	(i) $\omega = \omega_0 + \alpha t$
(ii) $s = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t$	$v_0 \to \omega_0$	(ii) $\theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)t$
(iii) $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$s \to \theta$	(iii) $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
(iv) $v^2 = u^2 + 2as$	$a \to \alpha$	(iv) $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$
(v) $s_{th} = u + \frac{1}{2}a(2t-1)$		(v) $\theta_{th} = \omega_0 + \frac{1}{2}\alpha(2t-$

*Math: একটি চাকা 800 rpm এ ঘূর্ণায়মান। সুইচবন্ধ করার পর 40s ঘুরে থেমে যায়। সুইচবন্ধের পর চাকাটি কতবার ঘুরবে?

উ: $\omega_0 = \frac{2\pi N}{60}$

$= \left(\frac{2\times \cancel{180}\,3.1416 \times 800}{60}\right)$ rad/s

$\omega_0 = \cancel{4800}$ rad/s 83.77

$t = 40s$

$\omega = 0$

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$

$\Rightarrow 0 = (83.77)^2 + 2\alpha\theta$

$\Rightarrow \theta = 1678.8$

$\omega = \omega_0 + \alpha t$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{\omega_0}{t} = -\frac{83.77}{40}$

$= -2.094$ rad/s

$$\boxed{\begin{aligned}\theta &= \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)t \\ &= \left(\frac{83.77}{2}\right)\times 40 \\ &= 1675.4\end{aligned}}$$

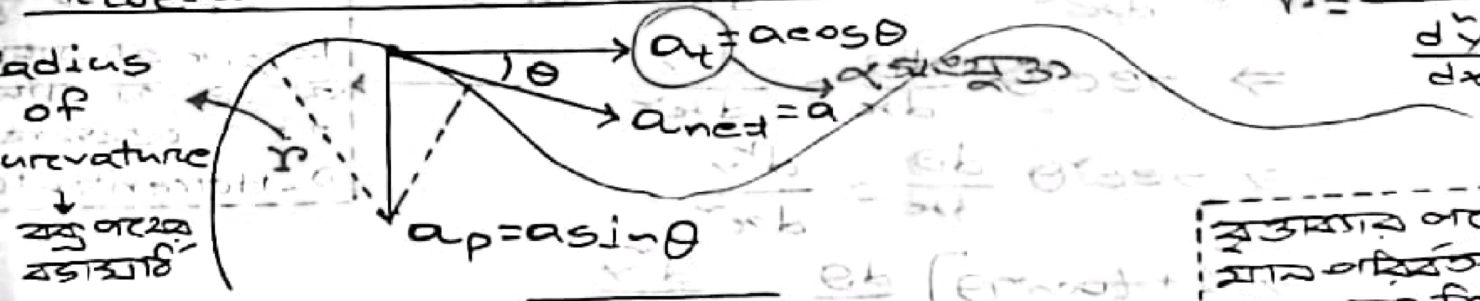
$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1678.8}{2\times 3.1416}$

$= 267.2$

≈ 267 বার

*বৃত্তাকার গতির জন্য ত্বরণ:
Acceleration in circular motion:

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$



$a_{net} = \sqrt{a_t^2 + a_p^2}$

বৃত্তাকার পথে বেগের মান পরিবর্তন নাও হতে পারে কিন্তু দিক অবশ্যই পরিবর্তন হবে।

$a_t \longrightarrow$ বেগের মানের পরিবর্তন করে।

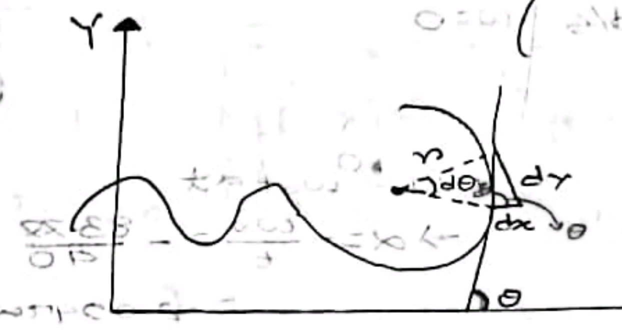
$a_p \longrightarrow$ বেগের দিকের পরিবর্তন করে।

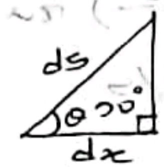
$\longrightarrow$ কেন্দ্রমুখী ত্বরণ (centripetal acceleration)

Radius of curvilinear path:
বৃত্তাকার

$y = f(x) \longrightarrow$ বক্ররেখা

চিত্রে একটু ভুল আছে।





ত্রিভুজটির অনুপাতের θ° কোণ উল্টো হয়েছে

এখানে, $ds = r\,d\theta$ —— (i)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{dx^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} \text{ —— (ii)}$$

আবার, ঢাল, $\tan\theta = \frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\tan\theta) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \sec^2\theta \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$\frac{d}{dx}(\tan\theta) = \sec^2\theta$ কিন্তু, x আলাদা আর θ আলাদা তাই আরেকবার Differentiate

$$\Rightarrow \sec^2\theta \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\Rightarrow \left[1 + \tan^2\theta\right] \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\Rightarrow \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \left[\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]$$

$$\Rightarrow d\theta = \left[\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right] dx \text{ —— (iii)}$$

using (i) & (ii) in (i)

$$ds = r\,d\theta$$

$$\Rightarrow \cancel{dx}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = r\left[\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]\cancel{dx}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \neq \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

দুইবার differentiate

একবার differentiate করে বর্গ করে দিলাম

$$\Rightarrow r = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\boxed{r = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}}$$

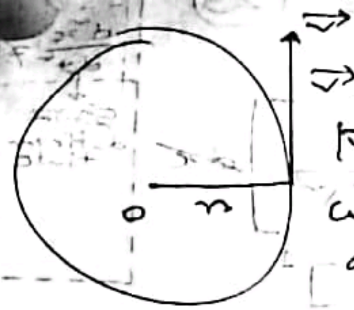
*। $y = x^2$ (0, 0) বিন্দুতে বক্রতার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর?

উঃ

(i) $\frac{dy}{dx} = 2x$ (0,0) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$ [x এর 0 বসাইলে 0 হবে]

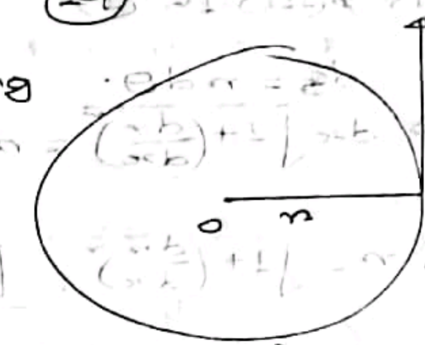
(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$ (0,0) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$

$$r = \frac{[1+0]^{3/2}}{2} = \frac{1}{2}\text{ unit}$$



$\vec{v}$ = changing
$|\vec{v}|$ = const
ω = const
$\alpha = 0$

uniform circular Motion

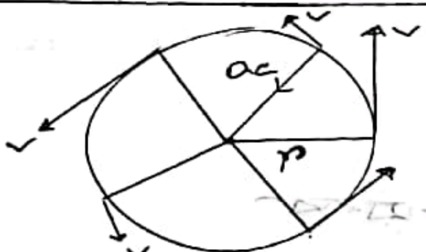


$\vec{v}$ = changing
$|\vec{v}|$ = changing
$\omega \neq$ const
$\alpha \neq 0$

non-uniform circular Motion

$\boxed{a_t \text{ ০ হয়। } a_p \text{ ০ না।}}$

কেন্দ্রমুখী ত্বরণ (centripetal acceleration):

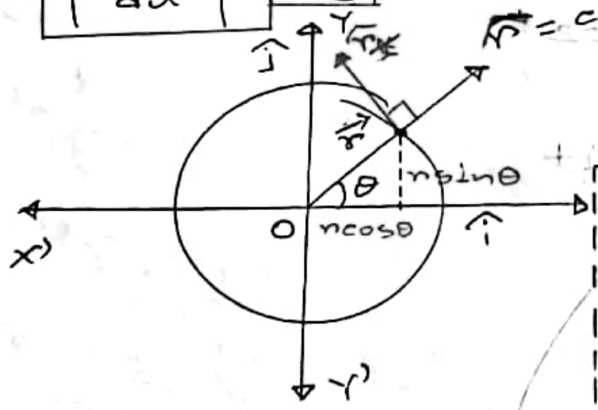


$\vec{v}$ = changing
$|\vec{v}|$ = const
ω = const
$\alpha = 0$

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \neq 0$$

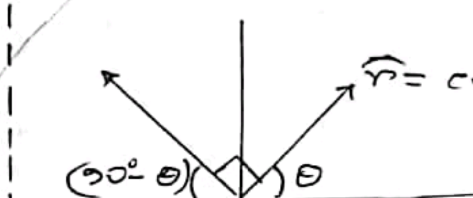
$$\boxed{\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = a_c}$$



$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{i} + r\sin\theta\,\hat{j}$$

$$\hat{r}_t = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$



$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$

$\cos(90^\circ - \theta)\,\hat{i} + \sin(90^\circ - \theta)\,\hat{j}$

$-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$

↳ ২য় চতুর্ভাগে cosθ Negative (−) তাই

$$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{i} + r\sin\theta\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = r(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{i} + r\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\cdot\hat{j}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = r\,\frac{d\theta}{dt}\left[-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega r\left[-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \omega r\left[-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}\right]$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \omega r\left|\underbrace{-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}}_{1}\right|$$

$$v = \omega r$$

$|\vec{v}|$ = changing

$\omega \neq$ const

$$\Rightarrow \vec{v} = \omega r\left[-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = r\left[\omega\frac{d}{dt}(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}) + (-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})\frac{d\omega}{dt}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = r\left[\omega\left\{-\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{i} - \sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}\hat{j}\right\} + (-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})\alpha\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \omega^2 r\left[-\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j}\right] + \alpha r(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})$$

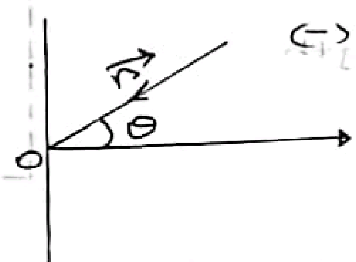
$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 r(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}) + \alpha r(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})$$

a_{net}

$\omega^2 r$: $a_c \rightarrow$ কেন্দ্রমুখী ত্বরণ

αr: $a_t \rightarrow$ স্পর্শকীয় ত্বরণ

(-) চিহ্ন বিপরীতমুখী নির্দেশ করে।



∴ কেন্দ্রমুখী ত্বরণ, $\boxed{a_c = \omega^2 r}$

$$a_c = \frac{v^2}{r^2}\cdot r$$

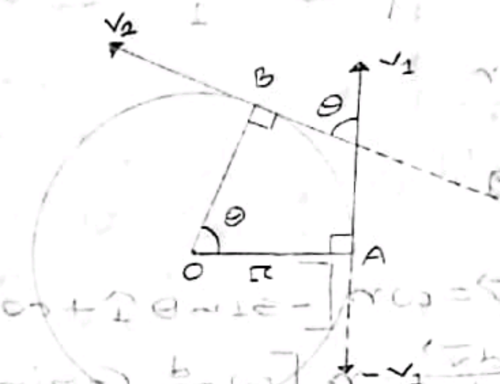
$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$$

প্রশ্ন: 3m ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট কোনো বৃত্তাকার পথে একটি বস্তু $3ms^{-1}$ বেগে ও $4ms^{-2}$ ত্বরণে গতিশীল, বস্তুটির লব্ধি ত্বরণ নির্ণয় কর। [a_{net}] (26)

উ: $a_t = 4ms^{-2}$

$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{3^2}{3} = 3ms^{-2}$

$a_{net} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5ms^{-2}$ (Ans.)



$\boxed{AB = v\Delta t}$

$\vec{v_1} = \vec{v_2} = \vec{v}$

$\vec{v}$ = change

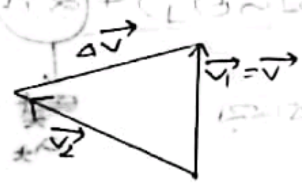
$|\vec{v}|$ = const

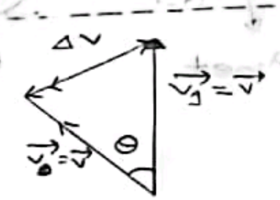
$a_t = 0$

$AB = r\theta$

$\Rightarrow v\Delta t = r\theta$

$\therefore \theta = \frac{v\Delta t}{r}$ ——(i)





$\vec{v_1} + \Delta v = \vec{v_2}$

$\therefore \Delta v = \vec{v_2} - \vec{v_1}$

Let, Δv is an arc length

$\Delta v = v_1\theta$ [$s = r\theta$]

$\Delta v = v\theta$

$\Rightarrow \theta = \frac{\Delta v}{v}$ ——(ii) from (i) and (ii),

$$\frac{v\Delta t}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$$

Uniform circular Motion

$\vec{v}$ = change

$|\vec{v}|$ = const

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0$$

ω = const

$\alpha = 0$

$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = a_{net} = \sqrt{a_c^2 + \cancel{a_t^2}} = a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Non-uniform circular Motion

$\vec{v}$ = change

$|\vec{v}|$ = change

$$a_t = \frac{d\vec{v}}{dt} \neq 0$$

$\omega \neq$ const

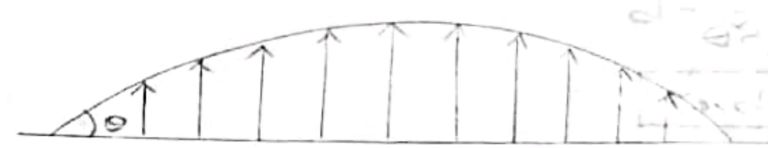
$\alpha \neq 0$

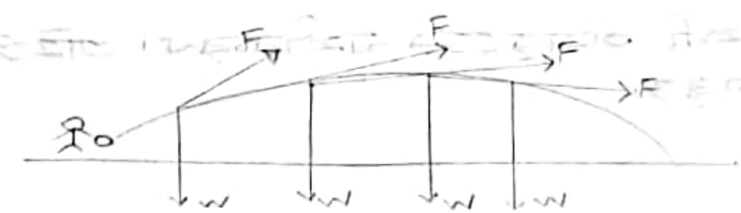
$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = a_{net} = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{\alpha^2 r^2 + \omega^4 r^2}$$

$$\boxed{\therefore a_{net} = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}}$$

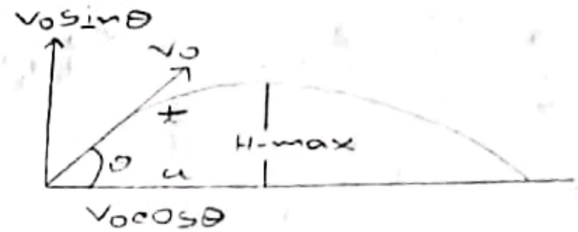
2D-Motion:

Projective (Prass):





প্রাসের গতিপথ:



আনুভূমিক বরাবর:

$x = (V_0 \cos\theta) t$

$\Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos\theta}$ —— (i)

উলম্ব বরাবর:

$Y = (V_0 \sin\theta) t - \frac{1}{2} g t^2$

$\therefore Y = (V_0 \sin\theta) \left(\frac{x}{V_0 \cos\theta}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_0 \cos\theta}\right)^2$ [using 1]

$$\therefore \boxed{Y = x \tan\theta - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\theta} \cdot x^2}$$

Let, $\tan\theta = a$

এবং $\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\theta} = b$

$\therefore \boxed{Y = ax - bx^2}$

এখানে,

সমীকরণটি একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ। তাই প্রাসের গতিপথ পরাবৃত্ত।

General equation of curve:

$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

case:01: $A = B = \overset{H}{\cancel{\phi}} = 0$ হলে,

$2gx + 2fy + c = 0$ যা সরলরেখার সমীকরণ।

case:02: $\boxed{A=B}$ হলে,

$H = 0$, বৃত্তের সমীকরণ।

case:03: $AB - H^2 = 0$, পরাবৃত্তের সমীকরণ।

case:04: $AB - H^2 < 0$; উপবৃত্তের সমীকরণ।

case:05: $AB - H^2 > 0$, অধিবৃত্তের সমীকরণ।

এখন,

$y = ax - bx^2$

$\Rightarrow ax - bx^2 - y = 0$

$\Rightarrow -bx^2 + 2\cdot 0\cdot xy + 0\cdot y^2 + 2\cdot 0\cdot x - 2\cdot \frac{1}{2} y + 0 = 0$

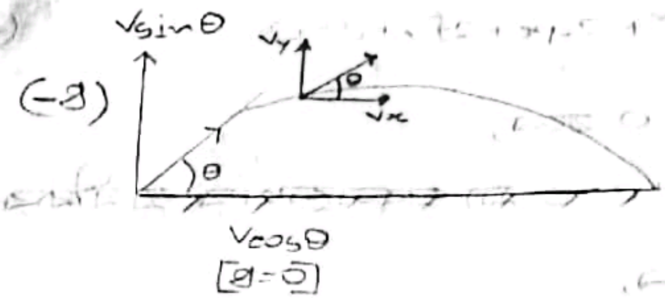
$A = -b$; $B = 0$

$H = 0$

$AB - H^2 = (-b)\,0 - (0)^2 = 0$

$\therefore$ পরাবৃত্তের সমীকরণ।

*



$v_y = (v_0 \sin\theta) - gt$

$v_x = v_{x_0} = v_0 \cos\theta$

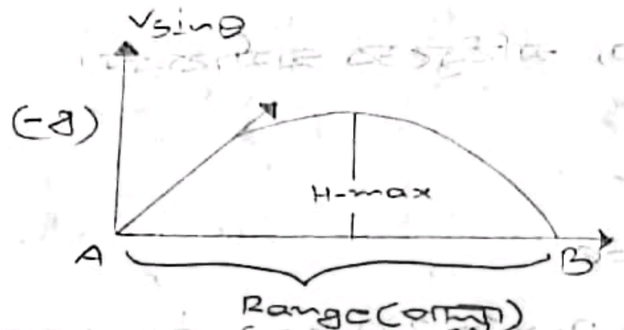
$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$

আবার,

$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$

$\Rightarrow \boxed{\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)}$

*



প্রাসের সর্বোচ্চ উচ্চতা:
(H-max)

খাড়া-বস্তু

v_0

$H_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$

প্রাস

$v_0 \sin\theta$

$H_{max} = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}$

$\therefore \boxed{H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}}$

প্রাসের পর্যায়কাল:
(Time period)

খাড়াবস্তু

v_0

$T = \frac{2v_0}{g}$

প্রাস

$v_0 \sin\theta$

$\boxed{T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}}$

প্রাসের পাল্লা : (Range of Prass):

* কোনো প্রাস আনুভূমিক বরাবর যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকেই প্রাসের পাল্লা বলে। (31)

$$R = v_0 \cos\theta \, T$$

$$\Rightarrow R = v_0\cos\theta \frac{2v_0 \sin\theta}{g} = \frac{v_0^2(2\sin\theta\cos\theta)}{g}$$

$$\therefore \boxed{R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}}$$

সর্বাধিক পাল্লা:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Let, $\sin 2\theta = 1$

$$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \text{ বা } 90^\circ$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} \text{ বা } 45^\circ$$

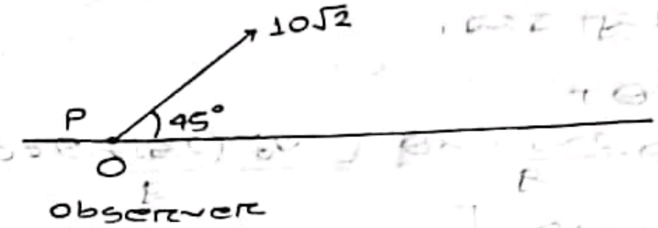
$$\therefore \boxed{R_{max} = \frac{v_0^2}{g}}$$

এখন,

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

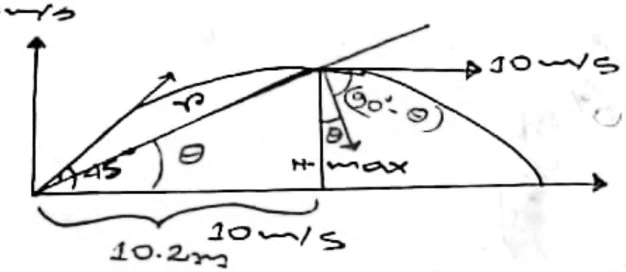
$$\boxed{\therefore g = \frac{v_0^2}{R_{max}}} \quad \left[a_c = \frac{v^2}{r_c}\right]$$

অর্থাৎ, প্রাসের গতিতে g হলো কেন্দ্রমুখী ত্বরণ



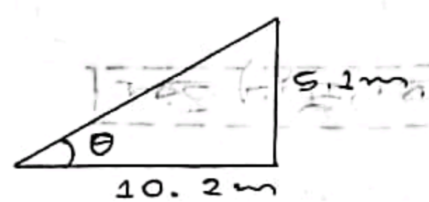
চিত্রে, O বিন্দুতে একজন পর্যবেক্ষক P বস্তুকে ভূমির সাথে 45° কোণে $10\sqrt{2}\ ms^{-1}$ বেগে উপরে ছুড়ে মারে, P বস্তুটি যখন সর্বোচ্চ বিন্দুতে থাকবে তখন O বিন্দুতে পর্যবেক্ষকের সাপেক্ষে P বিন্দুটির কৌণিক বেগ নির্ণয় কর।

উঃ



$$H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{(10\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{2}}{2g} = \frac{100}{2\times9.8}$$
$$= 5.1m$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{(10\sqrt{2})^2}{9.8} = \frac{200}{9.8} = 20.4$$

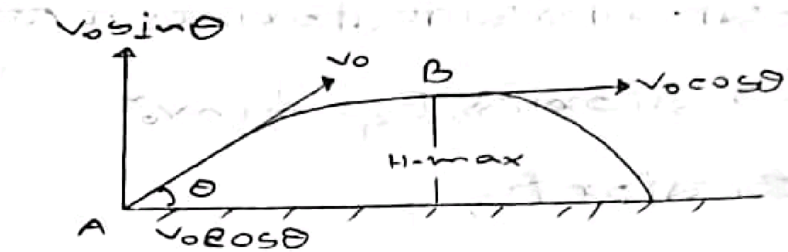


$$r = \sqrt{(5.1)^2 + (10.2)^2}$$
$$= 11.4m$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5.1}{10.2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= 26.6°$$

$$\omega_{PO} = \frac{4.5}{11.4} = 0.4\ rad/s.\ \text{(Ans.)}$$

প্রাসের সর্বোচ্চ বিন্দুতে গতিশক্তি ও বিভবশক্তি/স্থিতিশক্তি:



$$H_{max} = \frac{V_0^2 \sin^2\theta}{2g} \qquad E_T = E_p + E_K$$

A বিন্দুতে: $E_p = 0$

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} m V_0^2}$$

$$E_T = E_p + E_K = 0 + \frac{1}{2} m V_0^2$$

$$\boxed{E_T = \frac{1}{2} m V_0^2}$$

At maximum Point : B:

প্রাসের বিভবশক্তি, $E_p = mgH_{max} = mg \cdot \frac{V_0^2 \sin^2\theta}{2g}$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} m V_0^2 \sin^2\theta}$$

প্রাসের গতিশক্তি $E_K = \frac{1}{2} m (V_0 \cos\theta)^2$

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} m V_0^2 \cos^2\theta}$$

∴ মোট শক্তি $E_T = E_p + E_K = \frac{1}{2} m V_0^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2} m V_0^2 \cos^2\theta$

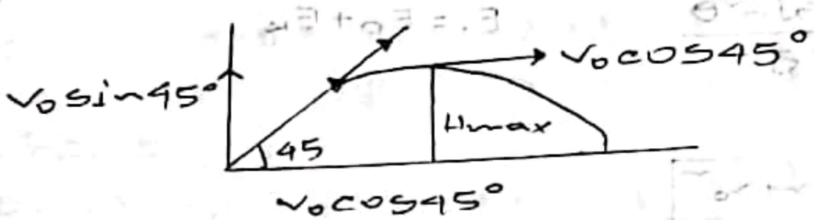
$$= \frac{1}{2} m V_0^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$\boxed{E_T = \frac{1}{2} m V_0^2}$$

* দেখাও যে, কোনো প্রাসের সর্বাধিক পাল্লার ক্ষেত্রে সর্বোচ্চ বিন্দুতে গতিশক্তি আদিগতিশক্তির অর্ধেক।

উ: আদি বিন্দুতে গতিশক্তি, $E_{K_1} = \frac{1}{2} m v_0^2$

সর্বোচ্চ বিন্দুতে গতিশক্তি,



$$E_{K_2} = \frac{1}{2} m (v_0 \cos 45)^2$$
$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{v_0}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} m \frac{v_0^2}{2}$$
$$E_{K_2} = \frac{\left(\frac{1}{2} m v_0^2\right) \rightarrow E_{K_1}}{2}$$

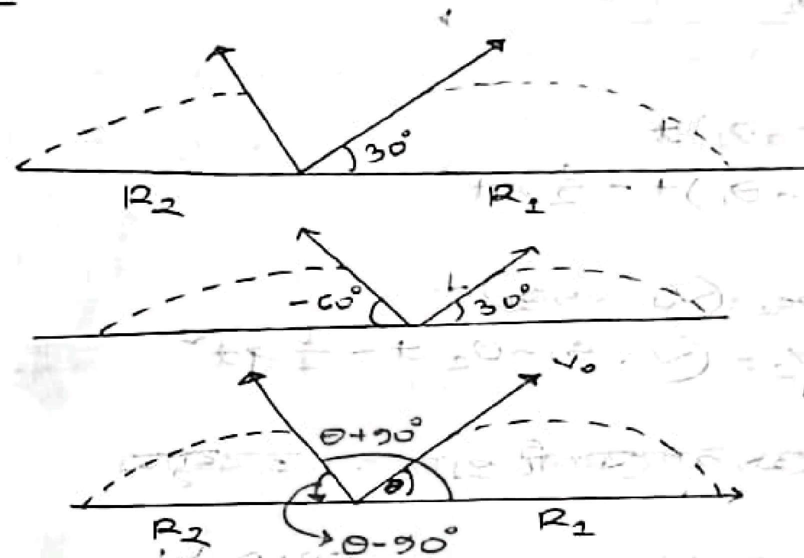
$$\boxed{E_K = \frac{E_{K_0}}{2}}$$ ***

* 2kg ভরের বস্তুকে ভূমির সাথে $\boxed{45^\circ}$ কোণে $10\, ms^{-1}$ বেগে ছোড়া হলো, সর্বোচ্চ বিন্দুতে গতিশক্তি কতো?

উ:
$$E_{K_2} = \frac{1}{2} m (v_0 \cos 45^\circ)^2$$
$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \left(10 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$= 50$$

* একই নিক্ষেপণ বেগে দুটি প্রাসের জন্য প্রক্ষেপণ/ নিক্ষেপণ কোণ θ অথবা $\theta \pm 90^\circ$ হলে, দেখাও যে প্রাপ্ত দুইটির পাল্লা সমান ও বিপরীতমুখী।
(Range)

উ:



$\theta + 90^\circ = 120$

$30^\circ - 90^\circ = -60^\circ$

অর্থাৎ কোণের দিকে তার বিপরীত দিকে চলে যাবে।

$$R_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$\sin(\pm\theta) = \pm\sin\theta$

$$R_2 = \frac{v_0^2 \sin 2(\theta \pm 90^\circ)}{g}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin(2\theta \pm 180^\circ)}{g}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin\{\pm(180^\circ \pm 2\theta)\}}{g}$$

$$= \pm \frac{v_0^2 \sin(180^\circ \pm 2\theta)}{g}$$

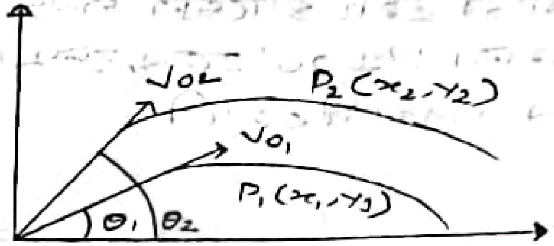
$$= \pm \frac{v_0^2 (\mp \sin\theta)}{g}$$

$$= -\frac{v_0^2 \sin\theta}{g}$$

$$\boxed{R_2 = -R_1}$$

*** একটা প্রাসের সাপেক্ষে আরেকটা প্রাসের গতিপথ সরলরেখা।

*



১ম প্রাসের জন্য,

$$x_1 = (V_{01}\cos\theta_1)t$$
$$y_1 = (V_{01}\sin\theta_1)t - \frac{1}{2}gt^2$$

২য় প্রাসের জন্য,

$$x_2 = (V_{02}\cos\theta_2)t$$
$$y_2 = (V_{02}\sin\theta_2)t - \frac{1}{2}gt^2$$

একটি প্রাসের সাপেক্ষে আরেকটি প্রাসের অবস্থান $P(x, y)$।

$$x = x_2 - x_1 = (V_{02}\cos\theta_2 - V_{01}\cos\theta_1)t$$

$$t = \frac{x}{(V_{02}\cos\theta_2 - V_{01}\cos\theta_1)}$$

আবার, $y = y_2 - y_1$

$$= (V_{02}\sin\theta_2)t - \frac{1}{2}gt^2 - (V_{01}\sin\theta_1)t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = (V_{02}\sin\theta_2 - V_{01}\sin\theta_1)t$$

$$y = (V_{02}\sin\theta_2 - V_{01}\sin\theta_1)\frac{x}{(V_{02}\cos\theta_2 - V_{01}\cos\theta_1)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{(V_{02}\sin\theta_2 - V_{01}\sin\theta_1)}{(V_{02}\cos\theta_2 - V_{02}\cos\theta_1)}x$$

$$\therefore x = \frac{(V_{02}\cos\theta_2 - V_{02}\cos\theta_1)}{(V_{02}\sin\theta_2 - V_{02}\sin\theta_1)} Y$$

Let, $$\left(\frac{V_{02}\sin\theta_2 - V_{01}\sin\theta_1}{V_{02}\cos\theta_2 - V_{01}\cos\theta_1}\right) = const = C$$

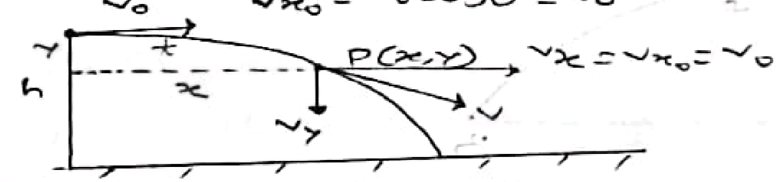
$\therefore Y = cx$ যা একটি সরলরেখার সমীকরণ;

অর্থাৎ, $P(x,y)$ বিন্দু দ্বারা গঠিত সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা।

$\therefore$ একটি প্রাসের সাপেক্ষে অপর প্রাসের গতিপথ সরলরেখা।

আনুভূমিক প্রক্ষেপণ প্রাসের গতিপথ:
(Horizontal Press):-

$v_{y_0} = v_0 \sin 0° = 0$ $\qquad v_{x_0} = v_0 \cos 0° = v_0$



→ $\boxed{\text{একটি পরাবৃত্ত}}$

আনুভূমিক বরাবর,
$x = v_x t = v_0 t$
$\Rightarrow x = v_0 t$
$\Rightarrow t = \frac{x}{v_0}$ —— (i)

উলম্ব বরাবর,
$Y = \cancel{v_{y_0} t}^{\,0} + \frac{1}{2} g t^2$
$\Rightarrow Y = \frac{1}{2} g t^2$
$\Rightarrow Y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}$
$\Rightarrow Y = \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$
$\Rightarrow x^2 = \frac{2v_0^2}{g} \cdot Y$

Let, $\frac{2v_0^2}{g} = 4A$

$\boxed{\therefore x^2 = 4AY}$ যা একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

অর্থাৎ, $P(x,y)$ বিন্দু দ্বারা গঠিত সঞ্চারপথ একটি পরাবৃত্ত।

$\therefore$ আনুভূমিক প্রাসের গতিপথ পরাবৃত্ত।

*** t সময় পরে বেগ:**

$$v_x = v_0$$

$$v_y = \cancel{v_{y0}}^{0} + gt = gt$$

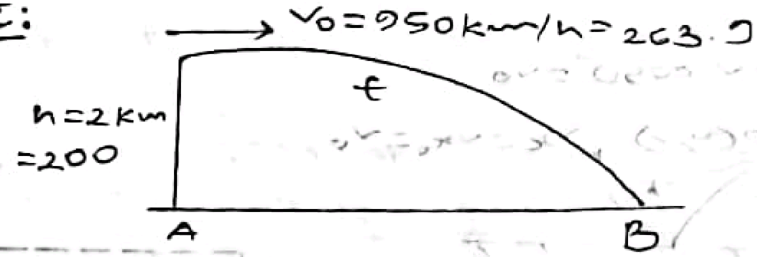
$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \qquad \boxed{v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)}$$

* ভূমি থেকে 2km উচ্চতায় 950km/h বেগে একটি যুদ্ধ বিমান গতিশীল, বিমানটি যখন ভূমিবরাবর A অবস্থানে তখন লক্ষ্যবস্তুকে আঘাত করে মিসাইল ছুড়ল যা B লক্ষ্যবস্তু বিন্দুতে আঘাত করে। ভূমি বরাবর AB এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

উ:



$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

A হতে h উচ্চতায় উঠতে যত সময় লাগছে আনুভূমিক ভাবে AB যেতে একই সময় লাগবে

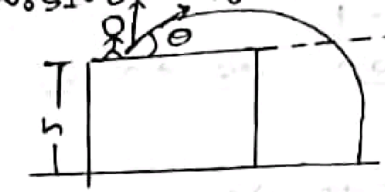
$$\Rightarrow 2000 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{4000}{9.8}} = 20.2 sec$$

$$AB = (263.9 \times 20.2) = 5330.78 m$$

$$= 5.33 km$$

*



$\boxed{-h = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2}$

(30).

* একটি নির্দিষ্ট উচ্চতা থেকে কোনো বস্তুকে মুক্তভাবে পড়তে দিলে বস্তুটি ভূমিতে পড়তে 7s সময় নেয়। বস্তুটিকে মুক্তভাবে পড়তে দেওয়ার 4s পর বস্তুটিকে আটকে ফেলা হলো। আবার 2s পর বস্তুটিকে পড়তে দিলে বাকি পথ অতিক্রম করতে বস্তুটির সময় লাগবে?

উঃ $t = 7sec$ $\qquad t_1 = 4sec$

$h = \frac{1}{2}gt^2$ $\qquad h_1 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 4^2 = 78.4m.$

$= 240.1m$

$h_2 = h - h_1 = -161.7m$

$h_2 = 161.7m$

$\Rightarrow \frac{1}{2}gt_2^2 = 161.7$

$\Rightarrow t_2 = 5.74 sec$

$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$t_2 = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$

*