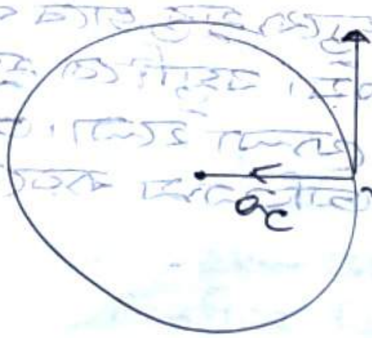
Chapter-4
Newtonian mechanics

Topic: 01: কেন্দ্রমুখী বল (Centripetal force):



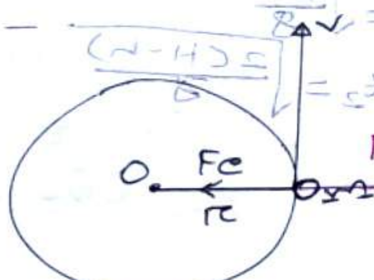
কেন্দ্রমুখী ত্বরণ, $a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$

∴ কেন্দ্রমুখী বল

$$F_c = ma_c = \frac{mv^2}{r} = \omega^2 m r$$

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$
$$= m\left(\frac{2\pi N}{t}\right)^2 r$$
$$= m\left(\frac{2\pi N}{60}\right)^2 r$$

* একটি বস্তু বৃত্তাকার পথে ঘুরতে গেলে অবশ্যই কেন্দ্রমুখী বল দরকার। অর্থাৎ কেন্দ্রমুখী বল ছাড়া ঘূর্ণন সম্ভব না।



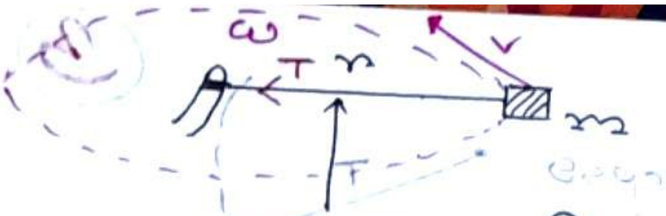
F_c' → কেন্দ্রবিমুখী বল (Centrifugal force) (Pseudo force)

এটাকে কল্পনা করে নেওয়া হয় to catch circular frame

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

* কেন্দ্রবিমুখী বল, কেন্দ্রমুখী বলের সমান ও বিপরীতমুখী।

$$\vec{F_c'} = -\vec{F_c}$$
$$|\vec{F_c'}| = |\vec{F_c}| = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$



$F_c' = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$

অপ্রসারণশীল (inextensible)

$\boxed{\text{টানবল, } T = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r}$

* 120 cm দৈর্ঘ্যের একটি অপ্রসারণশীল সুতার মাথায় 300g ভরের একটি বস্তু বেঁধে আনুভূমিক তলের সাথে সমান্তরালে মিনিটে 120বার (ঘোরানো) হচ্ছে। সুতার টান বল নির্ণয় কর।

উ: এখানে, সুতার দৈর্ঘ্য, $r = 120cm$
$= 1.2m$

$T = m\omega^2 r$

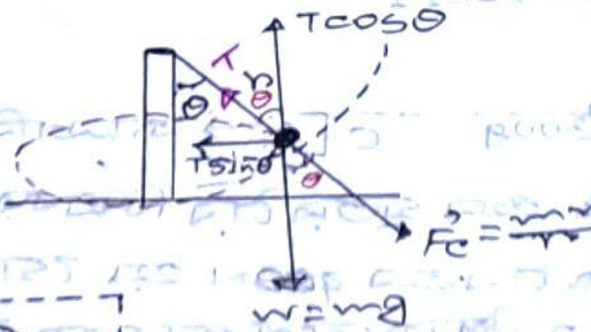
$\Rightarrow T = m\left(\frac{2\pi N}{T}\right)^2 r$ (Ans.)

x

দুইটা মূর্তির জন্য ω সমান।

প্রথমে বস্তুটি নিচে থাকবে, ω যত বাড়বে বস্তু উপরে উঠতে থাকবে এবং একসময় সবচেয়ে উপরে উঠবে।

দুইটা কেন্দ্রমুখী বলের বলে যেহেতু দুইটা বৃত্তাকার পথ (নিয়ন্ত্রিত এবং নিয়ন্ত্রণ পথ)

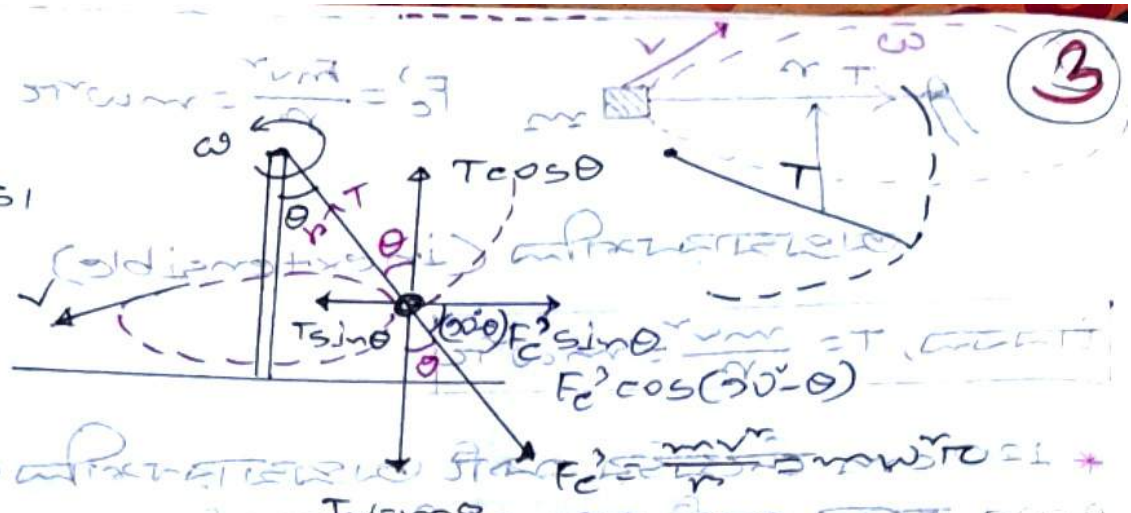


$F_c = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$

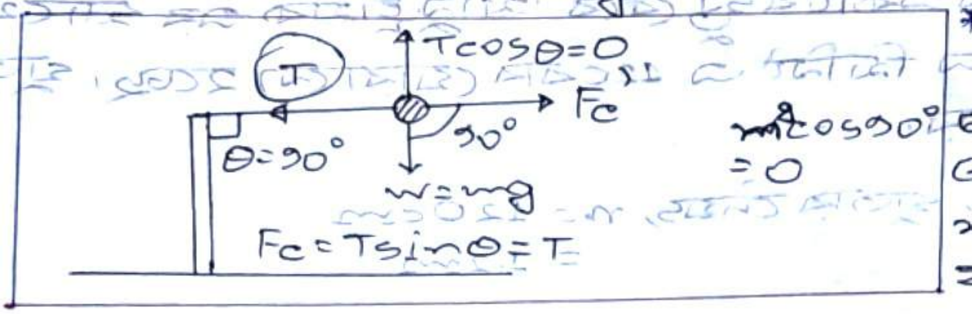
এখানে, T sin θ, Fc এর কাজ করে।

θ changeable

বস্তু উপরের দিকে উঠবে Tcosθ এর জন্য।



কনিক্যাল Pendulum



*** যখন সমান্তরালে ঘোরে তখন কেন্দ্রমুখী বল শুধুমাত্র টান বল।

$T\sin\theta = F_c'\sin\theta$

$T = F_c'$

অনুশীলনী

* 70 cm দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট কোনো সুতার মাথায় 300g ভরের একটি বস্তু বেঁধে উলম্বভাবে ঝোলানো যা চিত্রে দেখানো হয়েছে। বস্তুটি ভূমির সমান্তরালে কোনো বৃত্তাকার পথে উলম্ব অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরতে পারে।

(i) চিত্রে বস্তুটি যখন স্থির তখন সুতার টান নির্ণয় কর।

(ii) যদি সুতার সর্বোচ্চ টানবল 400N হয় তবে বস্তুটিকে সর্বোচ্চ কত কৌণিক বেগে ঘোরানো যাবে?

(iii) বস্তুটি যখন সর্বোচ্চ কৌণিক বেগ লাভ করবে [(ii) নং অনুযায়ী] তখন AC রেখা হতে বস্তুটি কত উচ্চতায় অবস্থান করবে?

(iv) বস্তুটি যখন কৌণিক বেগ লাভ করবে [(ii) নং অনুযায়ী] তখন AC রেখার সাপেক্ষে বস্তুটির বিভবশক্তি নির্ণয় কর।

(v) বস্তুটি যখন সর্বোচ্চ কৌণিক বেগ লাভ করবে [(ii) নং অনুযায়ী] তখন বস্তুটি কাল্পনিক উলম্ব অক্ষের সাপেক্ষে কত কোণে থাকবে? [30°]

(vi) বস্তুটি যখন সর্বোচ্চ কৌণিক বেগে থাকবে তখন বৃত্তাকার পথে কার্যকরী রৈখিক বেগ নির্ণয় কর। [$v = \omega_{max} \times l$]

4

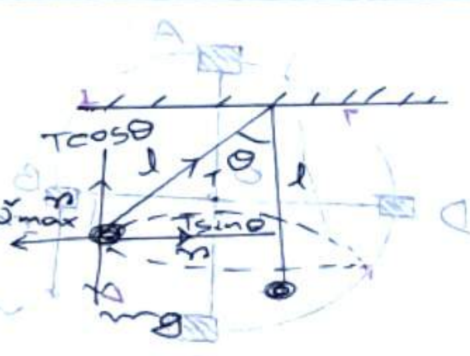
(i) উঃ

টানবল, $T = mg$ $\quad m = 300g = 0.3kg$

$= (0.3 \times 9.8)\ N$

$= 2.94\ N$

ii উঃ



~~$T = \omega^2 r m$~~

~~$\Rightarrow 400 = \omega^2 \times 0.7 \times 0.3$~~

~~$\Rightarrow \omega = 43.64\ rad/s$ (Ans.)~~

iii উঃ

$T\cos\theta = mg$ $\quad [\sin\theta = \frac{r}{l}$ $\therefore r = l\sin\theta$

$\Rightarrow T\sin\theta = m\omega_{max}^2 l \sin\theta$

$\Rightarrow T_{max} = m\,\omega_{max}^2 l$

$\Rightarrow \omega_{max} = \sqrt{\frac{T_{max}}{ml}}$

$= \sqrt{\frac{400}{0.3 \times 0.7}} = 43.64\ rad/s$

$T\cos\theta = mg$

$\Rightarrow 400\cos\theta = 0.3\times 9.8$

$\Rightarrow 400\cos\theta = 2.94$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{2.94}{400} \approx 0$

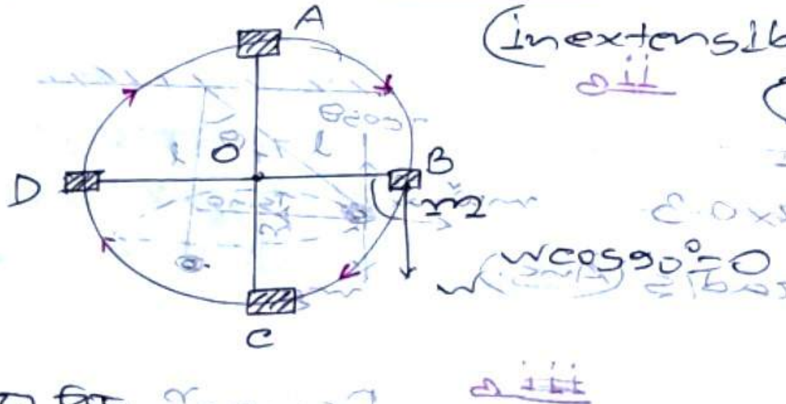
$\Rightarrow \theta \approx 90^\circ$

∴ 0.7m উচ্চতায় উঠবে।

বিভবশক্তি $= mg\times 0.7$

$= 2.058$

vertical circular Path:



(inextensible chord) T একই থাকে

A: সর্বোচ্চ বিন্দু
(Higher Point)

B: সর্বনিম্ন বিন্দু
(lowest point)

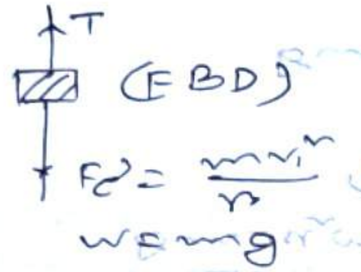
* চিত্রের বৃত্তাকার পথের দুইটি বিন্দু D ও B তে সুতার টানের উপর বস্তুর ওজনের কোনো প্রভাব নাই।

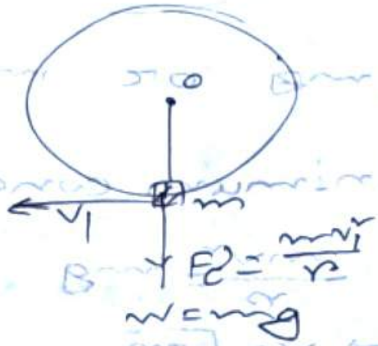
* D ও B বিন্দু ব্যতীত ঘূর্ণনপথের প্রতিটি বিন্দুতে সুতার টানের উপর বস্তুর ওজনের প্রভাব আছে।

* চিত্রে, উল্লম্ব বৃত্তাকার পথে রৈখিক বেগের মান সবচেয়ে বেশি C বিন্দুতে এবং সবচেয়ে কম A বিন্দুতে।
এখানে, ω একই না, রৈখিক বেগও পরিবর্তন হয়।

6

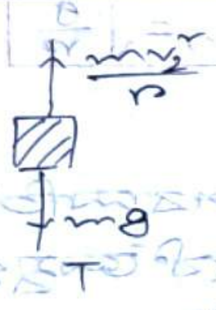
C:

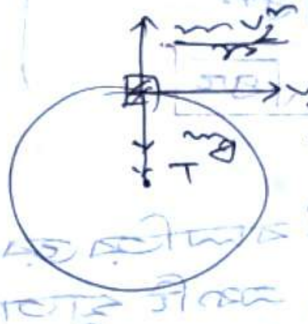




$$\boxed{T = \frac{mv_1^2}{r} + mg}$$

A:





$$T + mg = \frac{mv_2^2}{r}$$

$$\therefore \boxed{T = \frac{mv_2^2}{r} - mg}$$

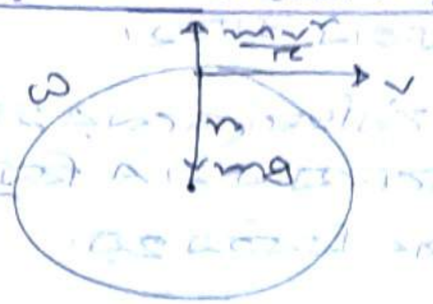
Method: 2: A: $\Sigma F = T$

$$\Rightarrow \frac{mv_2^2}{r} - mg = T \quad \left[\frac{mv_2^2}{r} > mg\right]$$

$$\boxed{T = \frac{mv_2^2}{r} - mg}$$

7

*উল্লম্ব বৃত্তাকার পথে সর্বোচ্চ বিন্দুতে বস্তুকে স্থির রাখার শর্ত:



$$\frac{mv^2}{r} \geq mg \quad \text{or} \quad m\omega^2 r \geq mg$$

Let, minimum condition,

$$\frac{mv^2}{r} = mg \qquad\qquad m\omega^2 r = mg$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{gr} \qquad\qquad \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$\boxed{V_{min} = \sqrt{gr}} \qquad\qquad \Rightarrow \boxed{\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{r}}}$$

* পানিভর্তি একটি বালতির ভর 1.2 kg। এবালতিটিকে 120 cm দৈর্ঘ্যের একটি সুতা দ্বারা বেঁধে উল্লম্ব বৃত্তাকার পথে, মিনিটে সর্বনিম্ন কতবার ঘোরানো হলে সর্বোচ্চ বিন্দুতে অবস্থানকালে বালতি হতে কোনো পানি পড়বে না?

উ:

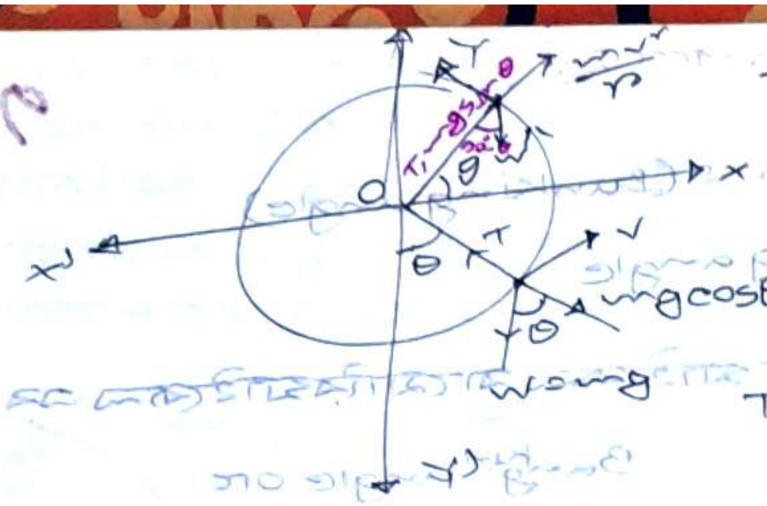
$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi N}{T} = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$\Rightarrow N = \sqrt{\frac{g}{r}} \times T \times \frac{1}{2\pi}$$

$$T = \frac{mv^2}{r} - mg\cos\theta$$

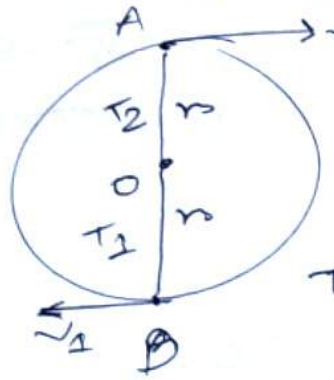
8



$$T = \frac{mv^2}{r} + mg\cos\theta$$

* r দৈর্ঘ্যের অপ্রসারণশীল সুতার মাথায় m ভরের বস্তু বেঁধে উল্লম্ব বৃত্তাকার পথে ঘোরানো হচ্ছে। বৃত্তাকার পথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে বস্তুটির বেগ $\sqrt{3gr}$ হলে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন বিন্দুতে সুতার টানের অনুপাত নির্ণয় কর।

উ:



$$T = \frac{mv_2^2}{r} - mg$$

$$T = \frac{mv_1^2}{r} + mg$$

~~$T_2 = 2g$~~
~~$T_1 = 4mg$~~
~~$T_1 : T_2 = 1:2$~~ → ভুল

$T_2 = 2mg$

$\therefore \frac{T_2}{T_1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
(1:4)

$E_A = E_B$

$\Rightarrow E_B = E_A$

$\Rightarrow E_B = E_A$

$\Rightarrow E_{P_B} = E_{P_A} + E_{K_A}$

$\Rightarrow$ ~~$\frac{1}{2} E_{K_B} =$~~

$\Rightarrow \frac{1}{2} mv_1^2 = mg(2r) + \frac{1}{2} mv_2^2$

$\Rightarrow v_1^2 = 4gr + v_2^2$

$\Rightarrow v_1^2 = 4gr + 3gr = 7gr \quad \therefore T_1 = \frac{mv_1^2}{r} + mg$

Topic: 02: কোনো বস্তুর বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণন:

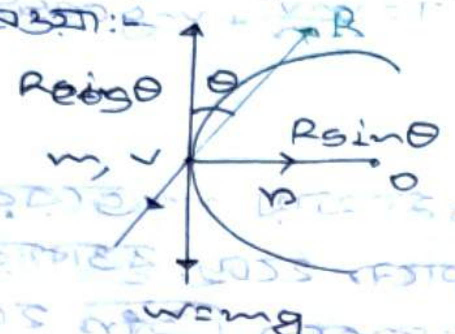
8

ব্যাংকিং কোণ (Banking angle)

↓

turning angle.

case: 01: বৃত্তাকার পথে সাইকেল বা মোটরসাইকেল এর বাঁক নেওয়া:-



Banking angle or turning angle

সাইকেলকে turn এর সময় একটু কাত করা হয়, এর ফলে উল্লম্বের সাথে কোণ উৎপন্ন হয়

$$R\sin\theta = \frac{mv^2}{r} \quad \text{---(i)}$$

$$R\cos\theta = mg \quad \text{---(ii)}$$

(i) ÷ (ii),

$$\frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{v^2}{rg}}$$

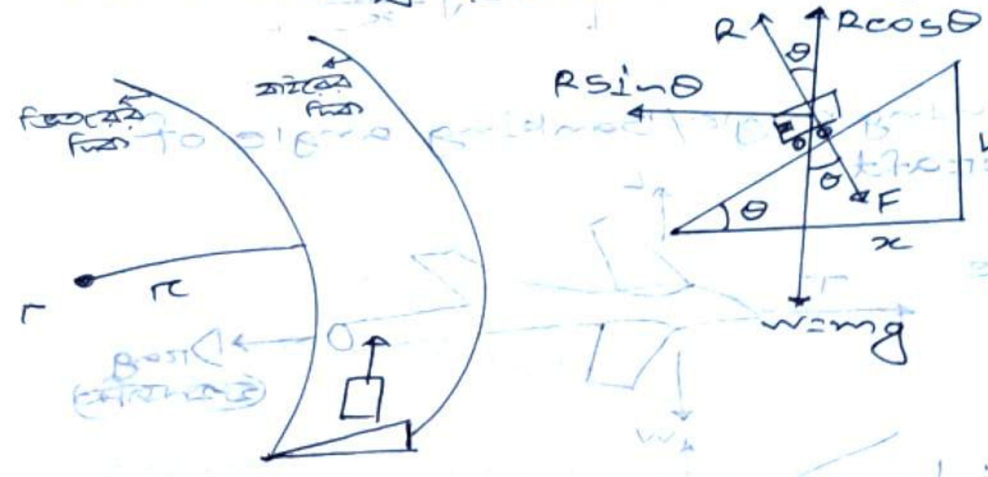
$*\quad \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

$v\uparrow \quad \theta\uparrow$

case:02: রাস্তার ব্যাংকিং কোণ:

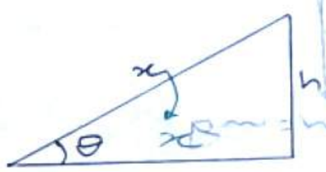
গাড়ি নিরাপদে বাঁক নেওয়ার জন্য কোনো বৃত্তাকার রাস্তার বাইরের দিকটা ভিতরের দিক অপেক্ষা খানিকটা উঁচু রাখা হয়, এক্ষেত্রে রাস্তার ভেতরের দিকের সাথে বাইরের দিকের একটা কোণ উৎপন্ন হয় একে বলা হয় রাস্তার ব্যাংকিং কোণ।

10



$$R\sin\theta = \frac{mv^2}{r} \quad \text{—(i)} \qquad R\cos\theta = mg \quad \text{—(ii)}$$

(i)÷(ii) করে, $\boxed{\tan\theta = \frac{v^2}{rg}}$ $\quad v\uparrow \;\; \theta\uparrow$



$\theta \to 0$
↳ক্ষুদ্র হলে

$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

$\lim_{\theta\to 0} \sin\theta \approx \theta$

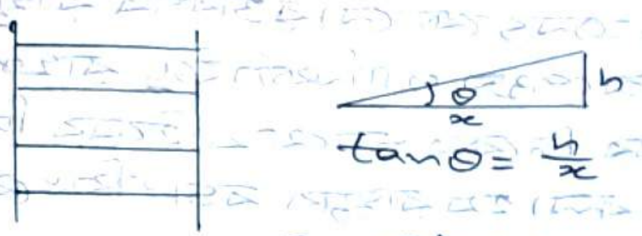
$\tan\theta \approx \sin\theta = \frac{h}{x}$ → রাস্তার বাইরের দিকে উচ্চতা
↳ রাস্তার প্রশস্ততা

$$\Rightarrow \frac{v^2}{rg} = \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{hrg}{x}$$

$$\boxed{\therefore v = \sqrt{\frac{rgh}{x}}}$$

case:03: রেললাইন এর ব্যাংকিং কোণ:



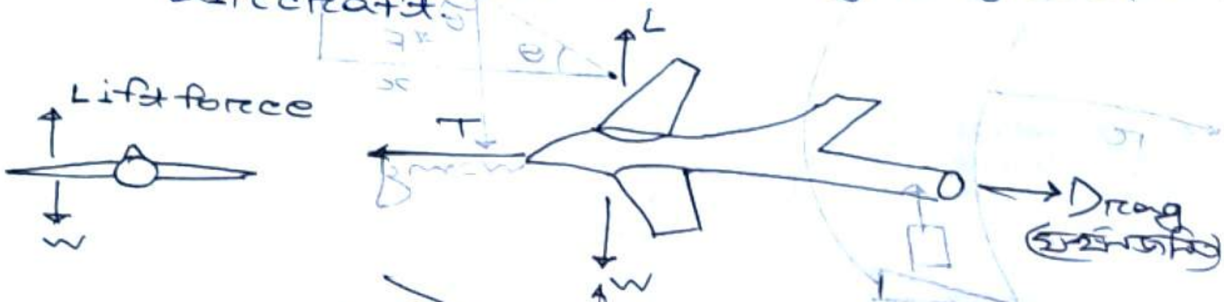
$$\tan\theta = \frac{h}{x}$$

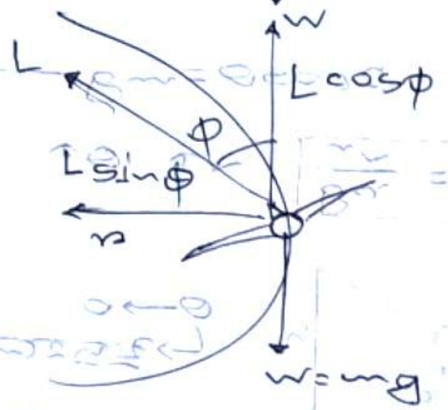
$$\boxed{\tan\theta = \frac{v^2}{rg}}$$

$$\boxed{v^2 = \frac{rgh}{x}}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{rgh}{x}}}$$

case:04: Turning angle/Banking angle of aircraft.





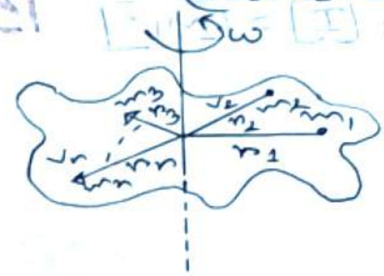
$$L\sin\phi = \frac{mv^2}{r} \text{ --- (i)}$$

$$L\cos\phi = mg \text{ --- (ii)}$$

(i) ÷ (ii) $\boxed{\tan\phi = \frac{v^2}{rg}}$

Topic: 03: জড়তার ভ্রামক/ঘূর্ণন জড়তা:

(Moment of inertia or rotational inertia):-



$n \rightarrow$ number of partical 12

$$E_K = E_{K_1} + E_{K_2} + E_{K_3} + \ldots + E_{K_n}$$

$$= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \ldots + \frac{1}{2}m_nv_n^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1(\omega r_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\omega r_2)^2 + \frac{1}{2}m_3(\omega r_3)^2 + \ldots + \frac{1}{2}m_n(\omega r_n)^2 \quad [v = \omega r]$$

$$= \frac{1}{2}m_1\omega^2r_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2r_2^2 + \ldots + \frac{1}{2}m_n\omega^2r_n^2$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_nr_n^2)$$

$$E_K = \frac{1}{2}\omega^2(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_nr_n^2)$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Let, $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$

$\therefore \boxed{E_K = \frac{1}{2}I\omega^2} \rightarrow$ (circular/angular motion)

$E_K = \frac{1}{2}I\omega^2$ [For circular motion]

$E_K = \frac{1}{2}mv^2$ [For Linear motion]

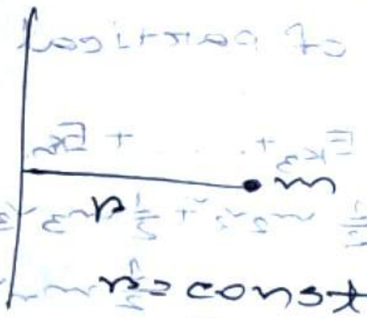
Linear	Circular
v	ω
m → রৈখিক জড়তা	I → ঘূর্ণন জড়তা/ বৃত্তাকার পথে জড়ের প্রভাব → জড়তার ভ্রামক

$$\boxed{I=\sum_{i=1}^{3} m_i r_i^2}$$

Unit :- $kg\,m^2$

Dimension: $[I]=[ML^2]$

*

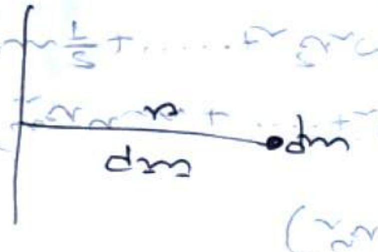


$$\boxed{I=mr^2}$$

$r=$ const, $I\propto m$

$m=$ const, $I\propto r^2$

*

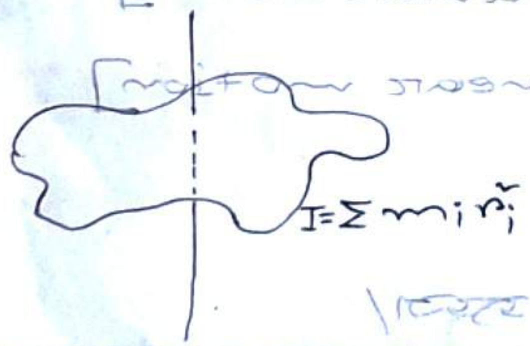


$\boxed{dI=r^2dm}$ → Differential form of MOI

$\boxed{I=\int r^2 dm}$ → Integral form of MOI

<u>চক্রগতির ব্যাসার্ধ (radius of gyration) (K):</u>

যদি কোনো দৃঢ় বস্তুর সমগ্র ভরকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত করা যায় যাতে করে কোনো নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে ঐ কেন্দ্রীভূত করা জড়তার ভ্রামক, ঐ নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র দৃঢ় বস্তুটির জড়তার ভ্রামকের সমান হয় তবে ঐ নির্দিষ্ট অক্ষ হতে ঐ কেন্দ্রীভূত করার লম্ব দূরত্বকে উক্ত দৃঢ় বস্তুর চক্রগতির ব্যাসার্ধ বলে।



$\sum m_i = M$

$I=MK^2$

চক্রগতির ব্যাসার্ধ (radius of gyration)

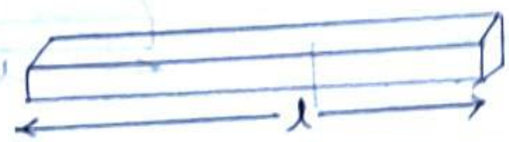
২। $I = MK^2$

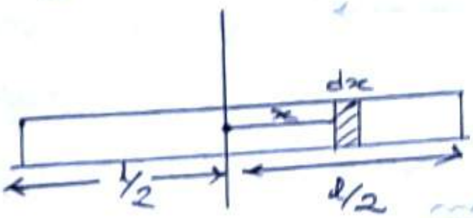
$\Rightarrow \boxed{K = \sqrt{\frac{I}{M}}}$

Topic: 04: বিভিন্ন সুষম বস্তুর জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ

case: 01:

একটি সরু সুষমদণ্ডের কেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ:-





Step:-1:

দণ্ডের একক দৈর্ঘ্যের ভর $\lambda = \frac{m}{l}$

l দৈর্ঘ্যের ভর m
1 একক " $\frac{m}{l}$

Step:-2:

$\therefore$ ক্ষুদ্র ভর $dm = \lambda dx = \frac{m}{l} dx$

Step:-3:

$\therefore$ ক্ষুদ্র জড়তার ভ্রামক $dI = x^2 dm$

$$\Rightarrow dI = x^2 \frac{m}{l} dx$$

$$\Rightarrow dI = \frac{m}{l} x^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_0^I dI = 2\times\frac{m}{l}\int_0^{l/2} x^2 dx$$

$$\Rightarrow [I]_0^I = \frac{2m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2}$$

$$\Rightarrow [I - 0] = \frac{2m}{3l}\left[\frac{l^3}{8} - 0^3\right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{2m}{3l}\times\frac{l^3}{8}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{12} ml^2}$$

$\int_0 = \frac{m}{l}\int_0^{l/2} x^2 dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^I dI =$

$\Rightarrow \int_0^I dI = 2\times\frac{m}{l}\int_0^{l/2} x^2 dx$

$$K = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} m l^2}{m}}$$

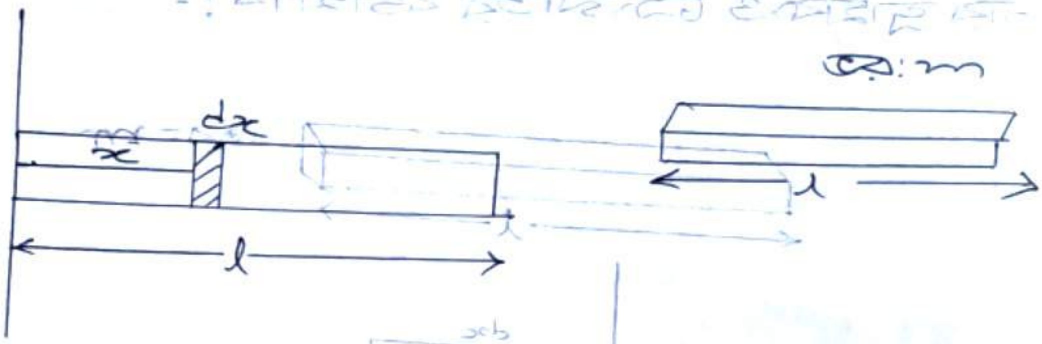
$$\boxed{K = \frac{l}{2\sqrt{3}}}$$

15

case: 02:

একটি সরু সুষম দন্ডের একপ্রান্ত দিয়ে লম্বভাবে অক্ষের সাপেক্ষে দন্ডটির জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ:-

ভর: m



Step: 1:

একক দৈর্ঘ্যের ভর $\lambda = \frac{m}{l}$

Step: 2:

$\therefore$ ক্ষুদ্র ভর $dm = \lambda . dx = \frac{m}{l} . dx$

Step: 3: $\therefore$ ক্ষুদ্র জড়তার ভ্রামক $dI = x^2 dm$

$$\Rightarrow dI = x^2 \frac{m}{l} dx$$

$$\Rightarrow dI = \frac{m}{l} x^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_0^I dI = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 dx$$

$$\Rightarrow [I]_0^I = \frac{m}{l} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l$$

$$\Rightarrow [I - 0] = \frac{m}{3l} \cancel{\left[\frac{l^3}{3} - 0\right]} [x^3]_0^l$$

$$\Rightarrow I = \frac{m}{3l} \times l^3$$

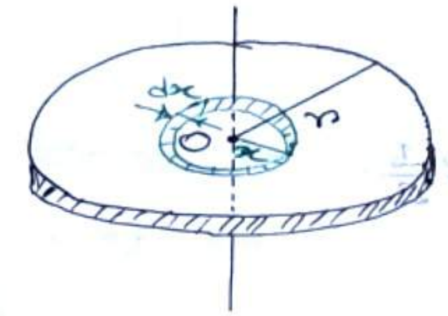
$$\therefore \boxed{I = \frac{1}{3} m l^2}$$

$$\therefore K=\sqrt{\frac{I}{m}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ml^2}{m}}$$

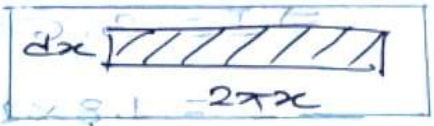
$$\therefore \boxed{K=\frac{l}{\sqrt{3}}}$$

16

case:03: একটি সুষম বৃত্তাকার চাকতির ভর কেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ:-



ভর $=m$
ব্যাসার্ধ $=r$



Step: 1: একক ক্ষেত্রফলের ভর $=\sigma=\frac{m}{\pi r^2}$

Step:02: ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল $dA=2\pi x\cdot dx$

Step:03: ক্ষুদ্র ভর $dm=\sigma dA$

$$=\frac{m}{\pi r^2}\times 2\pi x\cdot dx$$

$$dm=\frac{2m}{r^2}\times x\,dx$$

Step: 04:

$\therefore$ ক্ষুদ্র জড়তার ভ্রামক $dI=x^2dm$

$$\Rightarrow dI=x^2\,\frac{2m}{r^2}x\,dx$$

$$\Rightarrow dI=\frac{2m}{r^2}x^3dx$$

$$\Rightarrow \int_0^I dI=\frac{2m}{r^2}\int_0^r x^3dx$$

$$\Rightarrow [I]_0^I=\frac{2m}{r^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^r$$

$$\Rightarrow I=\frac{2m}{4r^2}[x^4]^r$$

$$\Rightarrow I=\frac{m}{2r^2}r^4$$

$$\therefore \boxed{I=\frac{1}{2}mr^2}$$

$$K=\sqrt{\frac{I}{m}}$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mr^2}{m}}$$

$$\boxed{K=\frac{r}{\sqrt{2}}}$$

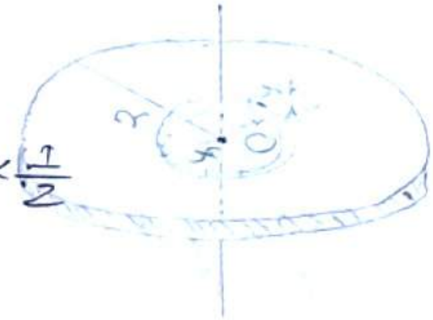
Math: 6cm ব্যাসার্ধ ও 100g ভর বিশিষ্ট একটি পাতলা বৃত্তাকার চাকতি কেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান চাকতিটির ঘূর্ণন গতিশক্তি 40J, হলে

17

(i) ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক নির্ণয় কর।

(ii) চাকতিটি ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে মিনিটে কতবার ঘুরবে?

উ: (i)



$$I = mr^2 \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I = 0.1\,kg \times (0.06)^2 \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I = 3.6 \times 10^{-4} \times \frac{1}{2}$$

$$I = 1.8 \times 10^{-4}\ kgm^2$$

(ii) $E_K = \frac{1}{2} I \omega^2$

$$\Rightarrow 80 = \frac{1}{2} \times 1.8 \times 10^{-4} \times \omega^2$$

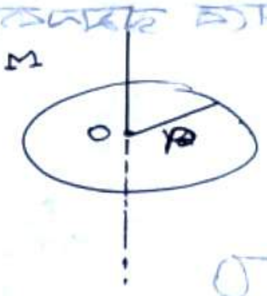
$$\Rightarrow \omega = \cancel{942.81}\ 666.67$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi N}{60} = 666.67$$

$$\Rightarrow N = 6366 \text{ বার}$$

18

case:04: একটি সুষম পাতলা রিং-এর মধ্যবিন্দু দিয়ে গমনকারী ও তলের সাথে লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ:



Step: 1: রিং-এর একক দৈর্ঘ্যের ভর, $\lambda = \frac{M}{2\pi r}$

Step: 2: ∴ ক্ষুদ্র ভর $dm = \lambda \cdot dx = \frac{M}{2\pi r} \cdot dx = \frac{M}{2\pi r} dx$

Step: 3: ∴ ক্ষুদ্র জড়তার ভ্রামক, $dI = r^2 dm$

$$\Rightarrow dI = r^2 \frac{M}{2\pi r} dx$$

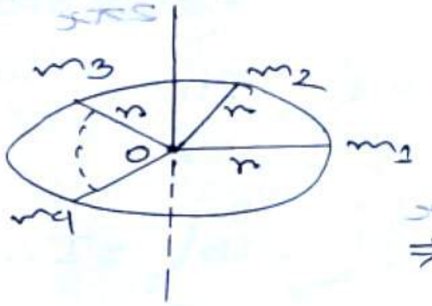
$$\Rightarrow dI = \frac{Mr}{2\pi} dx$$

$$\Rightarrow \int_0^I dI = \frac{Mr}{2\pi} \int_0^{2\pi r} dx$$

$$\Rightarrow [I]_0^I = \frac{Mr}{2\pi} [x]_0^{2\pi r}$$

$$\Rightarrow [I - 0] = \frac{Mr}{2\pi} [2\pi r - 0]$$

$$\Rightarrow \boxed{I = Mr^2}$$



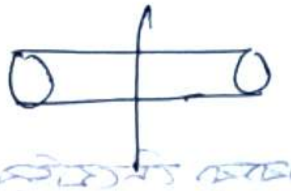
$$I = m_1 r^2 + m_2 r^2 + m_3 r^2 + \ldots + m_n r^2$$

$$I = r^2 (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n)$$

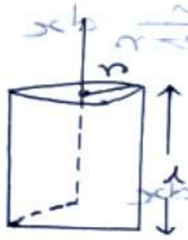
$$\Rightarrow I = r^2 \boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\boxed{K = r}$$

case 05: একটি নিরেট সিলিন্ডারের অক্ষকেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক / সিলিন্ডারের জ্যামিতিক অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক / মধ্যবিন্দু ও তলের সাথে লম্বভাবে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে:-



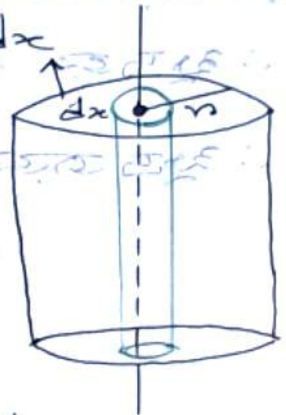
পুরুত্ব = dx



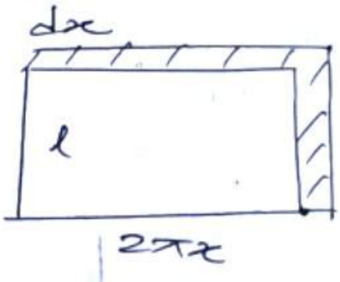
ভর = M

ব্যাসার্ধ = r

দৈর্ঘ্য = l



Step: 1: একক আয়তনের ভর $\lambda = \frac{M}{\pi r^2 l}$



Step: 2: ক্ষুদ্র আয়তন $dV = 2\pi x \times l \times dx$

$$= 2\pi l x dx$$

Step: 3:

ক্ষুদ্র ভর $dm = \lambda . dV$

$$= \frac{M}{\pi r^2 l} \cdot 2\pi l \times dx$$

$$dm = \frac{2M}{r^2} \times x dx$$

Step: 4: ক্ষুদ্র জড়তার ভ্রামক,

$$dI = x^2 dm$$

$$\Rightarrow dI = x^2 \frac{2m}{r^2} x dx$$

$\Rightarrow dI = \frac{2M}{r^2} x^3 dx$

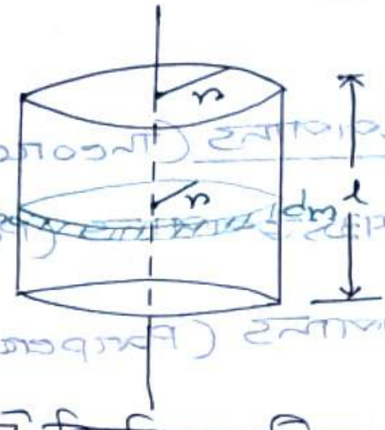
$\Rightarrow \int_0^I dI = \frac{2M}{r^2} \int_0^r x^3 dx$

$\Rightarrow [I]_0^I = \frac{2M}{4r^2} [r^4 - 0^4]$

$\Rightarrow I = \frac{M}{2r^2} r^4$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2} Mr^2}$

Method 2:



এখানে, আমরা নিরেট সিলিন্ডারটিকে অসংখ্য পাতলা বৃত্তাকার চাকতির সমষ্টি হিসেবে চিন্তা করা যায়।
dm ভরের পাতলা বৃত্তাকার চাকতির কেন্দ্রগামী অক্ষের জড়তার ভ্রামক

$dI = \frac{1}{2} dm\, r^2$

$dI = \frac{1}{2} r^2 dm$

$\therefore I = \int_0^I dI = \int_0^l \frac{1}{2} r^2 dm$

$\Rightarrow \int_0^I dI = \frac{Mr^2}{2l} \int_0^l dx$

$\Rightarrow I = \frac{Mr^2}{2l} \cdot l$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2} Mr^2}$

l দৈর্ঘ্যের ভর M

1 " " $\frac{M}{l}$

dx " " $\frac{M}{l} \times dx$

$dm = \frac{M}{l} \cdot dx$

case: 05: M ভর ও R ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কোনো ফাঁপা গোলকের অক্ষকেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক:

$$\boxed{I = \frac{2}{3} MR^2}$$

21

* M ভর ও R ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কোনো নিরেট গোলকের অক্ষকেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক:-

$$\boxed{I = \frac{2}{5} MR^2}$$

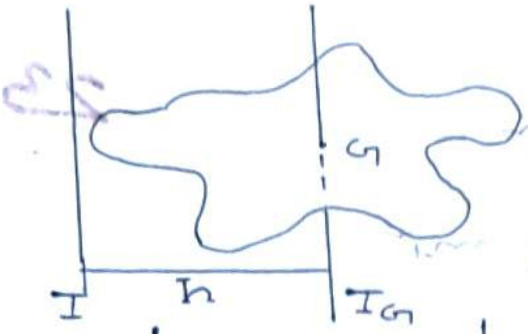
জড়তার ভ্রামকের উপপাদ্য (Theorem of MOI):

- → সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্য (Parallel axis theorem)
- → লম্ব অক্ষ উপপাদ্য (Perpendicular axis theorem)

সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্য (Parallel axis theorem):

কোনো বস্তুর ভরকেন্দ্রগামী অক্ষের সমান্তরাল যে কোনো অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক হবে, বস্তুটির ভরকেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক এবং বস্তুটির মোট ভর এবং দুই সমান্তরাল অক্ষের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্বের বর্গের গুণফলের সমষ্টির সমান।

22

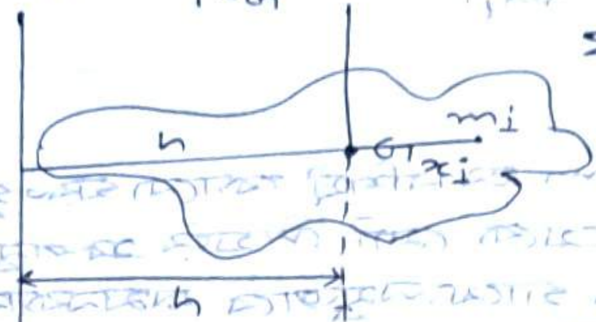


$\sum m_i = M$

$I = I_G + \sum m_i \times h^2$

$$\boxed{I = I_G + Mh^2}$$

*



$\sum m_i = M$

$$I = \sum m_i (h + x_i)^2$$
$$= \sum m_i (x_i + h)^2$$
$$= \sum m_i (x_i^2 + 2hx_i + h^2)$$
$$= \sum m_i x_i^2 + 2h \sum m_i x_i + \sum m_i h^2$$
$$I = \sum m_i x_i^2 + h^2 \sum m_i + 2h \sum m_i x_i \quad \text{---(i)}$$

এখানে, $\sum m_i x_i$ = ভরের ভ্রামক → *অক্ষের সাপেক্ষে*

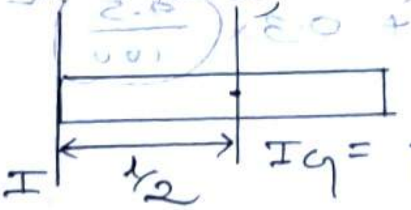
আমরা জানি, কোনো বস্তুর ভরকেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে ভরের ভ্রামক সবসময় শূন্য হয়।

$\therefore \sum m_i x_i = 0$

from (i), $I = \sum m_i x_i^2 + h^2 \sum m_i + 2h \sum m_i x_i \rightarrow 0$

$$\boxed{I = I_G + Mh^2} \quad \left[\begin{array}{l} \sum m_i x_i^2 = I_G \\ \sum m_i = M \end{array} \right]$$

একটি সরু সুষম দণ্ডের একপ্রান্ত দিয়ে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক



ভর=m দৈর্ঘ্য=l

$I_G = \frac{1}{12} m l^2$

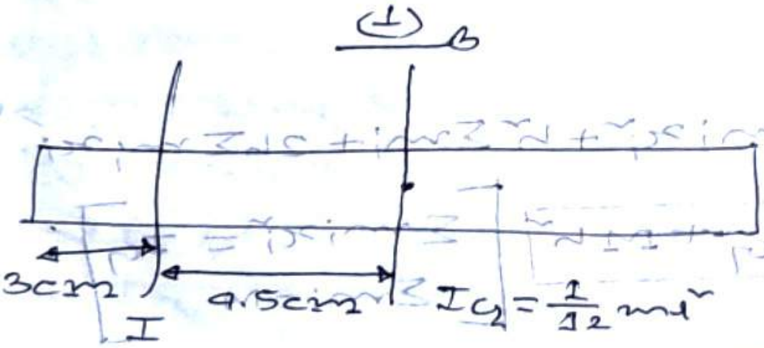
$$I = I_G + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2$$
$$= \frac{1}{12}ml^2 + 3\times\frac{1}{12}ml^2$$
$$= 4\times\frac{1}{12}ml^2$$
$$\boxed{I = \frac{1}{3}ml^2}$$

* 15 cm দৈর্ঘ্য ও 300 gm ভর বিশিষ্ট কোনো সরু সুষম দণ্ডের যেকোনো একপ্রান্ত থেকে মোট দৈর্ঘ্যের এক-পঞ্চমাংশ ভিতরের দিকে ও দৈর্ঘ্যের সাথে লম্বভাবে অবস্থানকারী অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান। এর ঘূর্ণন গতিশক্তি 100 J

(i) উদ্দীপকে উল্লেখিত অক্ষের সাপেক্ষে দণ্ডটির জড়তার ভ্রামক নির্ণয় কর।

(ii) উদ্দীপকে প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী দণ্ডটি অক্ষের সাপেক্ষে মিনিটে কতবার ঘুরবে?

(i)



$m = 300g = 0.3kg$

$l = 0.15m$

$I_G = \frac{1}{12}ml^2$

$$I = I_G + m\left(\frac{4.5}{100}\right)^2$$
$$= \frac{1}{12}\times 0.3\times(0.15)^2 + 0.3\times\left(\frac{4.5}{100}\right)^2$$

$I = 1.2\times 10^{-3}\ kgm^2$

(ii) B

$$E_K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2E_K}{I}} = \sqrt{\frac{2\times 100}{1.2\times 10^{-3}}}$$

$$\Rightarrow \omega = 408.25$$

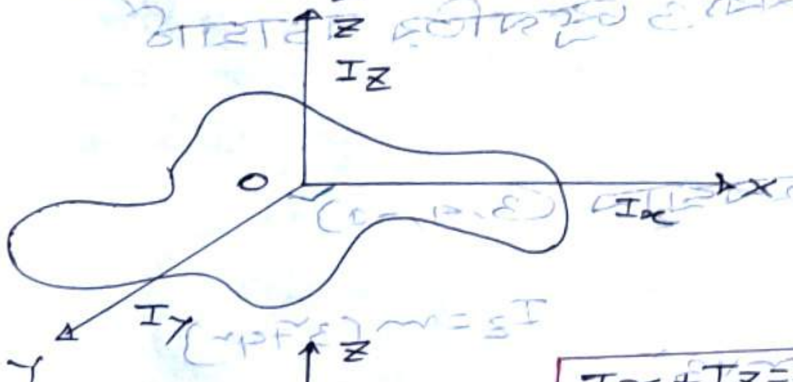
$$\Rightarrow \frac{2\pi N}{60} = 408.25$$

$$\Rightarrow N = \frac{408.25\times 60}{2\pi}$$

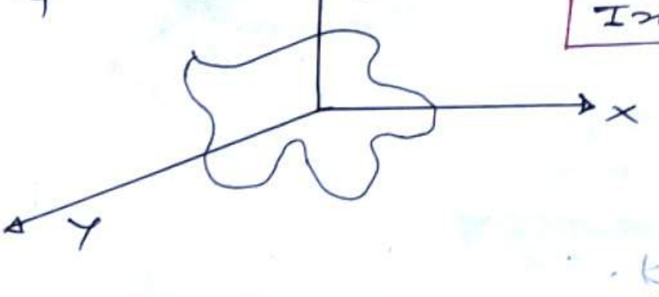
$$= 389.5$$

$$\approx 3899 \text{ r.p.m}$$

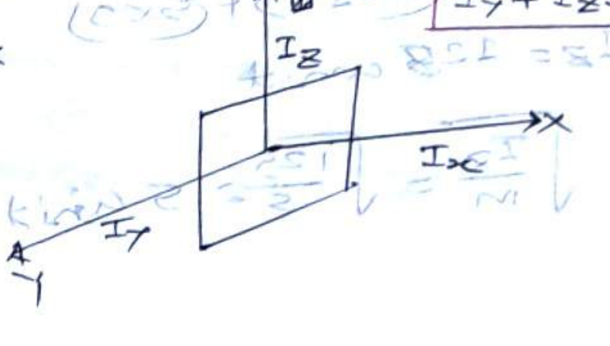
লম্ব অক্ষ উপপাদ্য (Perpendicular axis theorem):
কোনো বস্তুর উপর অবস্থিত পরস্পর লম্ব দুটি অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুর জড়তার ভ্রামকদ্বয়ের সমষ্টি, উক্ত অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী ও বস্তুর সাথে লম্বভাবে অবস্থানকারী অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুটির জড়তার ভ্রামকের সমান।



$$\boxed{I_x + I_y = I_z}$$

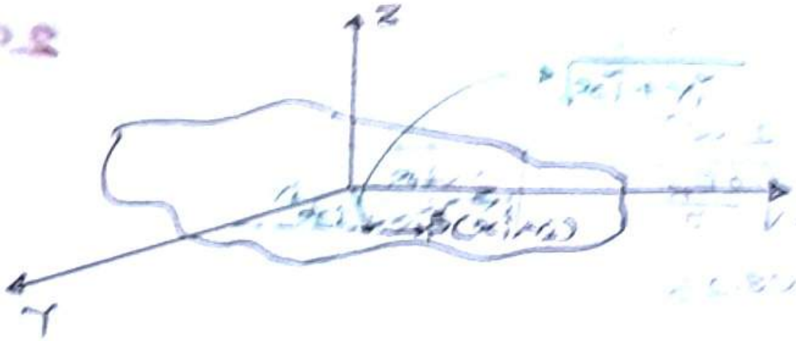


$$\boxed{I_x + I_z = I_y}$$



$$\boxed{I_y + I_z = I_x}$$

P.2



z অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক

$$I_z = \Sigma m_i \left(\sqrt{x_i^2+y_i^2}\right)^2$$
$$= \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2)$$
$$= \Sigma m_i x_i^2 + \Sigma m_i y_i^2$$

$$\boxed{I_x = \Sigma m_i y_i^2 \quad I_y = \Sigma m_i x_i^2}$$

$$\boxed{I_z = I_y + I_x}$$

Math: ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় 5, 7, 3 একক ভরের বিভিন্ন তিনটি ভরের অবস্থান যথাক্রমে (3,4,-1), (4,0,7), (-5,6,-1) বিন্দুতে হলে z অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিটি ভরের জড়তার ভ্রামক ও ঘূর্ণনের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর?

উ:

5 একক ভর ও অবস্থান (3,4,-1)

$$I_z = I_x + I_y \qquad I_z = m(3^2+4^2)$$
$$= m\times4^2 + m\times3^2$$
$$= (5\times16)+(5\times9)$$
$$I_z = 125 \text{ unit}$$

$$\therefore K = \sqrt{\frac{I_z}{m}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = 5 \text{ unit}.$$

৭ একক ভর অবস্থানে (4, 0, 7)

$\therefore I_z = I_x + I_y$

$= (7\times 0^2) + 7\times 4^2$

$= 0 + (7\times 16)$

$I_z = 112$ unit

$K = \sqrt{\frac{I_z}{m}} = \sqrt{\frac{112}{7}} = 4$ unit

*৯ একক ভর (−5, 0, −1)

$\therefore I_z = I_x + I_y$

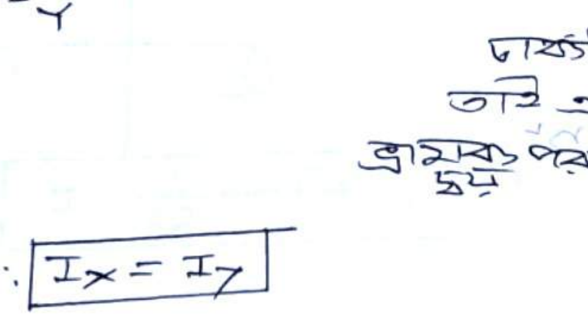
$= 9\times(0)^2 + 9\times(-5)^2$

$I_z = 225$ unit

$K = \sqrt{\frac{I_z}{m}} = 5\cdot 81$ unit

Math:

★ একটি সুষম বৃত্তাকার চাকতির উপর ত্রিমাত্রিক অক্ষ বিবেচনা করে প্রতিটি অক্ষের সাপেক্ষে চাকতির জড়তার ভ্রামক নির্ণয় কর।



ভর = m
ব্যাসার্ধ = r

এখানে, $I_z = \frac{1}{2} mr^2$

আবার, $I_z = I_x + I_y$

এখানে, x এবং Y অক্ষ বৃত্তাকার চাকতির ব্যাস বরাবর গমনকারী তাই এই অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামকদ্বয় পরস্পর সমান হবে।

$\therefore \boxed{I_x = I_y}$

$\therefore I_z = I_x + I_y$

$\Rightarrow I_z = I_x + I_x$

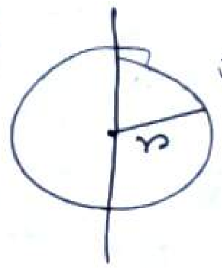
$\Rightarrow I_z = 2I_x$

$\Rightarrow I_x = \frac{1}{2} I_z$

$\Rightarrow I_x = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} mr^2$

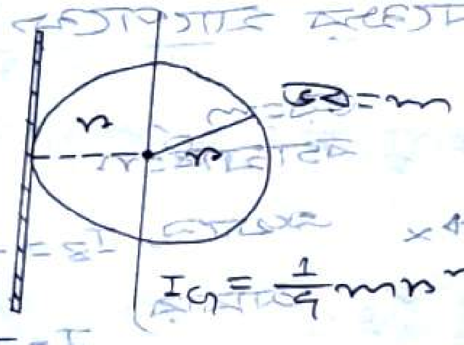
$\therefore \boxed{I_x = I_y = \frac{1}{4} mr^2}$

* একটি সুষম বৃত্তাকার চাকতির ব্যাস বরাবর সমান্তরাল অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক:-

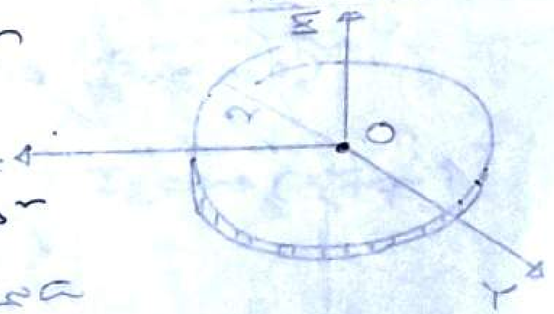


$\boxed{I = \frac{1}{4} mr^2}$

* একটি সুষম বৃত্তাকার চাকতির ব্যাসের সমান্তরাল এবং একপ্রান্ত দিয়ে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক



$I_G = \frac{1}{4} mr^2$



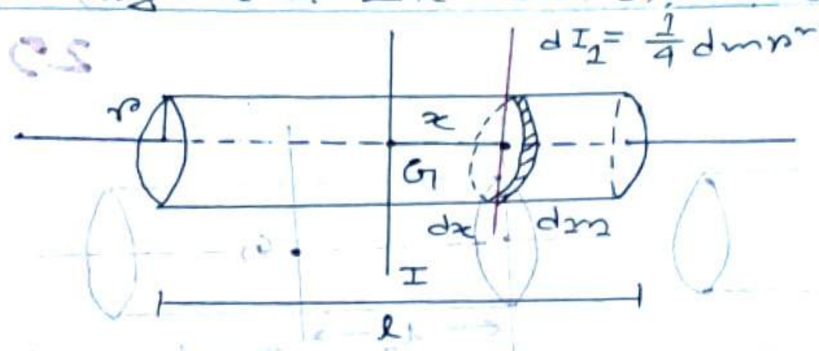
$I = \frac{1}{4} mr^2 + mr^2$

$= \frac{1}{4} mr^2 + 4 \cdot \frac{1}{4} mr^2$

$= 5 \cdot \frac{1}{4} mr^2$

$\boxed{I = \frac{5}{4} mr^2}$

★ একটি নিরেট সিলিন্ডারের ভরকেন্দ্রগামী ও তাহার অক্ষের সাথে লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক:- 28



এখানে, $dI = dI_1 + dm \cdot x^2$

$\Rightarrow dI = \frac{1}{4} dm\, r^2 + x^2 dm$

l দৈর্ঘ্যের ভর m
$\therefore 1$ " " $\frac{m}{l}$
$\therefore dx$ " " $\frac{m}{l} dx$

$$\boxed{dm = \frac{m}{l} dx}$$

$$\Rightarrow dI = \frac{1}{4} r^2 \frac{m}{l} dx + x^2 \frac{m}{l} dx$$

$$\Rightarrow dI = \frac{mr^2}{4l} dx + \frac{m}{l} x^2 dx$$

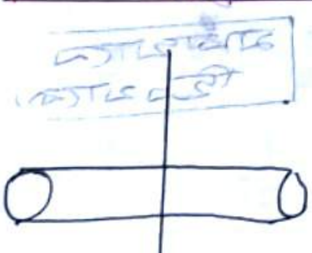
$$\Rightarrow \int_0^I dI = \frac{2\times mr^2}{4l} \int_0^{l/2} dx + 2\times\frac{m}{l} \int_0^{l/2} x^2 dx$$

$$\Rightarrow [I]_0^I = \frac{mr^2}{2l} [x]_0^{l/2} + \frac{2m}{l} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{mr^2}{2l} \times \frac{l}{2} + \frac{2m}{3l} \times \frac{l^3}{8}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{4} mr^2 + \frac{1}{12} ml^2}$$

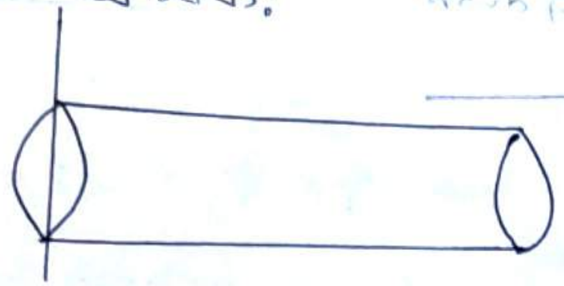
———×———

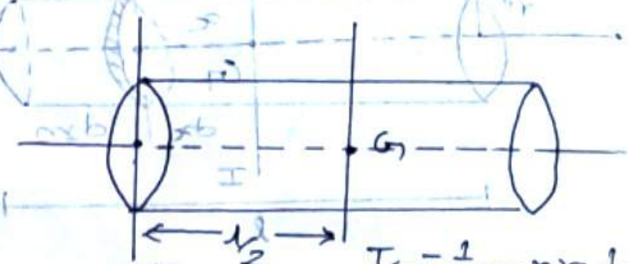


$$\boxed{I = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} mr^2}$$ $\Rightarrow$ সুষম দণ্ড হলে $\frac{1}{12} ml^2$ আবার, চাকতি আছে তাই $\frac{1}{4} mr^2$

★ একটি নিরেট সিলিন্ডারের জ্যামিতিক অক্ষের সাথে লম্ব ও একপ্রান্ত দিয়ে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক:

29





$$I_G = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$$

$$\boxed{I = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{4}mr^2}$$

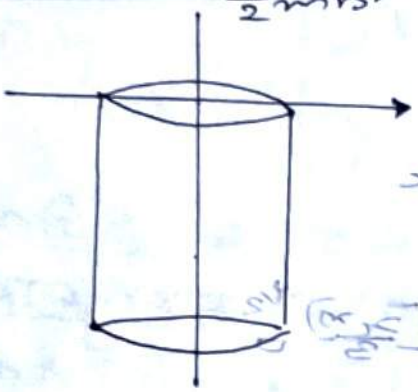
$$I = I_G + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{4}mr^2}$$

$\frac{1}{2}mr^2$

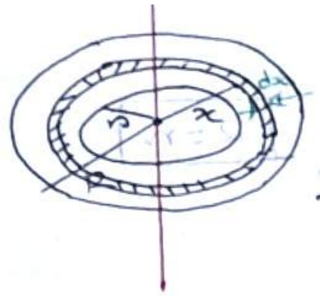
★



$\frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$

★ একটি বৃত্তাকার বলয় এর ভরকেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক: (Annular disc):

মাঝখানে ছিদ্র থাকে।

1ঙ 

ভর $= m$

অন্তঃব্যাসার্ধ $= r$

বহিঃ " $= R$

ক্ষেত্রফল $= \pi(R^2-r^2)$

30

<u>Step: 1:</u> একক ক্ষেত্রফলের ভর $\sigma = \dfrac{m}{\pi(R^2-r^2)}$

<u>Step: 2:</u> ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল $dA = (2\pi x)\,dx$

<u>Step: 3:</u> ক্ষুদ্র ভর $dm = \sigma\, dA = \dfrac{m}{\pi(R^2-r^2)}\, 2\pi x\cdot dx$

$$\therefore dm = \frac{2m}{(R^2-r^2)}\, x\cdot dx$$

<u>Step: 4:</u>

$$\therefore dI = x^2\, dm$$

$$\Rightarrow dI = x^2 \frac{2m}{(R^2-r^2)}\, x\, dx$$

$$\Rightarrow \int_0^I dI = \frac{2m}{(R^2-r^2)} \int_r^R x^3\, dx$$

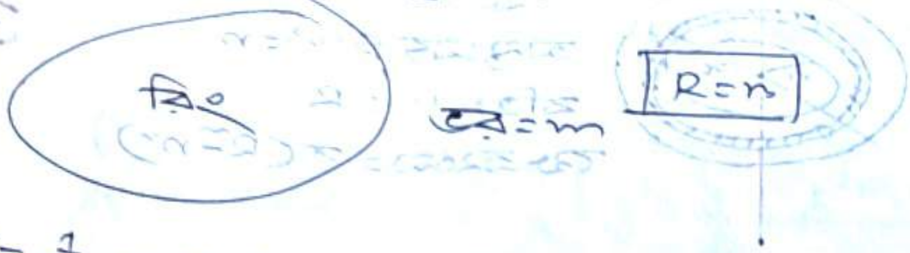
$$\Rightarrow I = \frac{2m}{R^2-r^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_r^R$$

$$\Rightarrow I = \frac{2m}{4(R^2-r^2)} \times (R^4-r^4)$$

$$\Rightarrow I = \frac{m}{2(R^2-r^2)} \times (R^2-r^2)(R^2+r^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2} m (R^2+r^2)}$$

Special observation:

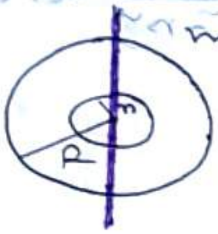


$$I = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2)$$

$$= \frac{1}{2} m (r^2 + r^2)$$

$$\boxed{\therefore I = mr^2}$$

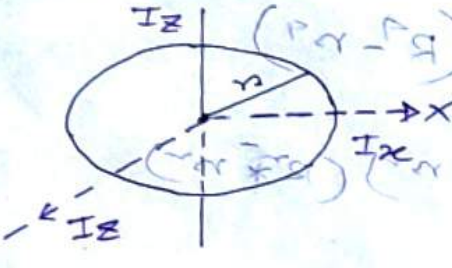
★ একটি বৃত্তাকার বলয় এর ব্যাস বরাবর গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক:



$$\boxed{I = \frac{1}{4} m (R^2 + r^2)}$$

★ একটি রিং এর ব্যাস বরাবর গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক:

$$I_x + I_y = I_z$$

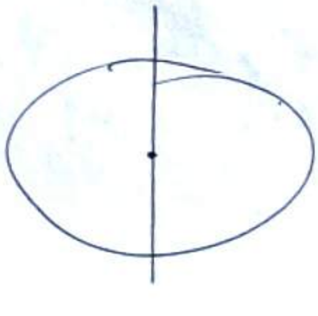


$$\Rightarrow I_x + I_x = I_z$$

$$\Rightarrow 2I_x = I_z$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{I_z}{2} = \frac{1}{2} mr^2$$

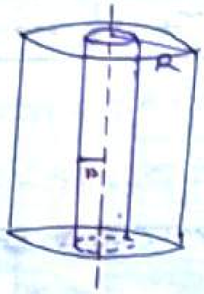
$$\Rightarrow \boxed{I_x = \frac{1}{2} mr^2}$$



$$\boxed{I = \frac{1}{2} mr^2}$$

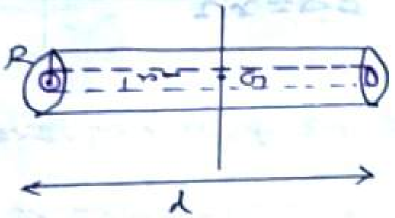
32

■ একটি আংশিক ফাঁপা সিলিন্ডারের ভরকেন্দ্রগামী বা জ্যামিতিক অক্ষ বরাবর সমান্তরাল অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক: (Partially hollow cylinder)



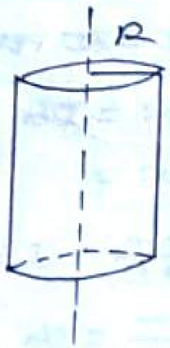
$$\boxed{I = \frac{1}{2} m(R^2 + r^2)}$$

* একটি আংশিক ফাঁপা সিলিন্ডারের ভরকেন্দ্রগামী এবং অক্ষের সাথে লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক:-



$$\boxed{I = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} m(R^2 + r^2)}$$

* একটি পাতলা ফাঁপা সিলিন্ডারের ভরকেন্দ্রগামী বা জ্যামিতিক অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক:



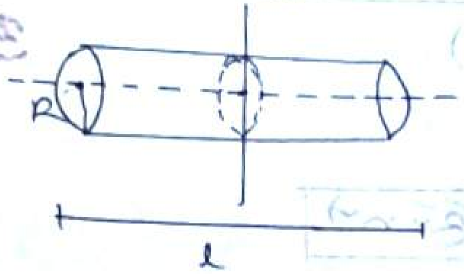
$R = r$ $\quad I = \frac{1}{2}(R^2 + r^2)$

$I = \frac{1}{2} m (R^2 + R^2)$

$\therefore \boxed{I = mR^2}$

* একটি পাতলা ফাঁপা সিলিন্ডারের ভরকেন্দ্রগামী এবং জ্যামিতিক অক্ষের সাথে লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক:-

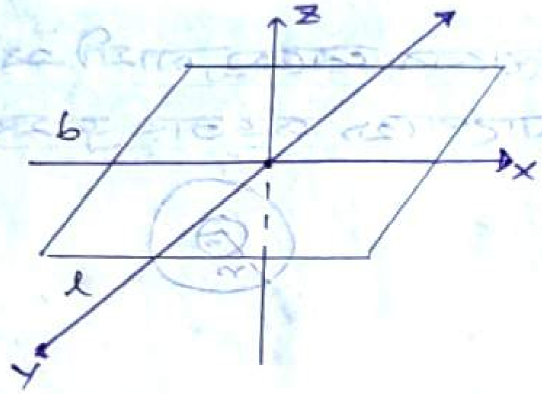
33



$$\boxed{I = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{2} m R^2}$$

$\frac{1}{4} m (R^2 + R^2)$
$= \frac{1}{2} \times m \times R^2$

* একটি সুষম পাতলা আয়তাকার পাতের ভরকেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক:-

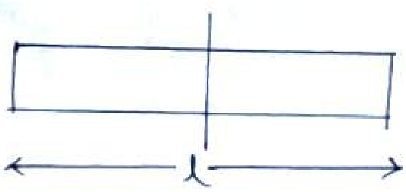


দৈর্ঘ্য $= l$
প্রস্থ $= b$
ভর $= m$

x-অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক,

$I_x = \frac{1}{12} m b^2$

Y-অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক,



$I_y = \frac{1}{12} m l^2$

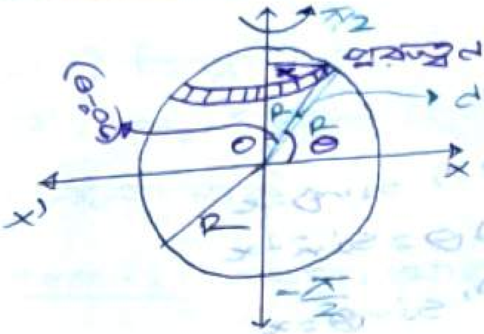
$\therefore I_z = I_x + I_y$

$$I = I_z = \frac{1}{12} m b^2 + \frac{1}{12} m l^2$$

$$\boxed{I = \frac{1}{12} m (l^2 + b^2)}$$

+ একটি পাতলা ফাঁপা গোলকের কেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক:-

ভর = m



ক্ষুদ্র dx (changeable)

→ dθ কোণ উৎপন্ন করে

$$x = R\cos\theta$$

$$dx = R\,d\theta$$

Step: 1: একক ক্ষেত্রফলের ভর $\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$

Step: 2: ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল $dA = (2\pi x)\,dx$

Step: 3: ক্ষুদ্র ভর $= \sigma\, dA$

$$= \frac{M}{4\pi R^2}(2\pi x\, dx)$$

$$= \frac{m}{2R^2} x\, dx$$

Step. 5: ক্ষুদ্র ভরের জড়তার ভ্রামক,

$$dI = x^2 dm$$

$$= x^2 \frac{m}{2R^2} x\, dx$$

$$dI = \frac{m}{2R^2} x^3 dx$$

$$\Rightarrow dI = \frac{m}{2R^2} R^3 \cos^3\theta \cdot R\, d\theta$$

$$\Rightarrow dI = \frac{m}{2R^2} R^4 \cos^3\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow dI = \frac{mR^2}{2} \cos^3\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow dI = \frac{mR^2}{2}\cos^3\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^I dI = 2\times\frac{mR^2}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\, d\theta$$

0 থেকে $\frac{\pi}{2}$
এবং 0 থেকে $-\frac{\pi}{2}$ } কিন্তু আমরা করেছি 0 থেকে $\frac{\pi}{2}$ দিয়ে 2 দ্বারা গুণ করে দিয়েছি।

$$\Rightarrow [I]_0^I = mR^2\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow I = mR^2\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\, d\theta \quad \text{——— (i)}$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos\theta(1-\sin^2\theta)\, d\theta$$

Let, $\sin\theta = x$

$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}x$

আবার, $\sin\theta = x$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{dx}{d\theta}$

$\Rightarrow \cos\theta\, d\theta = dx$

θ	0	$\pi/2$
x	~~$\pi/2$~~ 0	1

$$= \int_0^1 dx\,(1-x^2)$$

$$= \int_0^1 (1-x^2)\, dx$$

$$= \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2\, dx$$

$$= [x]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= [1-0] - \left[\frac{1}{3}-0\right]$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}$$

$$\therefore \boxed{\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\, d\theta = \frac{2}{3}}$$

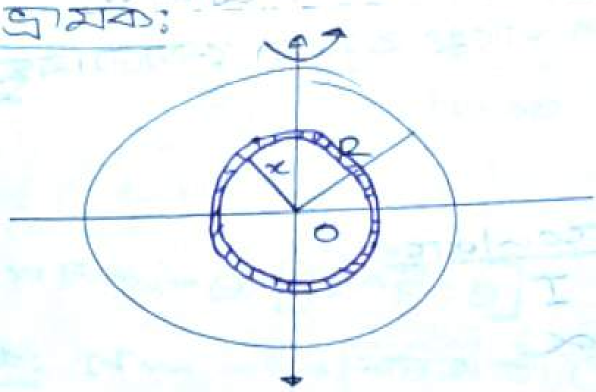
(i) নং এ মান বসিয়ে,

$$\therefore \boxed{I = \frac{2}{3}mR^2}$$

* একটি নিরেট গোলকের কেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক:

ভর = M

ব্যাসার্ধ = R



একটি নিরেট গোলককে অসংখ্য ফাঁপা গোলকের সমষ্টি ভাবি। কেন্দ্র হতে x দূরত্বে dx পুরুত্বের ফাঁপা গোলক বিবেচনা করি

Step-1: একক আয়তনের ভর $\sigma = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3}$

Step 2: ক্ষুদ্র আয়তন $dv = 4\pi x^2 dx$

Step 3: ক্ষুদ্র ভর $dm = \sigma dv = \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot 4\pi x^2 dx$

$$dm = \frac{3M}{R^3} x^2 dx$$

Step 4: ক্ষুদ্র জড়তার ভ্রামক, $dI = \frac{2}{3} dm\, x^2$

$$\Rightarrow dI = \frac{2}{3} \frac{3M}{R^3} x^2 dx \cdot x^2$$

$$\Rightarrow dI = \frac{2M}{R^3} x^4 dx$$

$$\Rightarrow \int_0^I dI = \frac{2M}{R^3} \int_0^R x^4 dx$$

$$\Rightarrow [I]_0^I = \frac{2M}{R^3} \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^R$$

$$\Rightarrow [I - 0] = \frac{2M}{R^3} \cdot \frac{R^5}{5}$$

$$\boxed{\therefore I = \frac{2}{5} MR^2}$$ ****

Topic: 05: আরেক নাম বলের ভ্রামক

টর্ক (Torque): (τ) : বৃত্তাকার পথে কণা বা কোনো বস্তুর উপর বৃত্তাকার পথে বলের প্রভাব।

Linear	circular
m	I
a	α
F	τ
$\boxed{F = ma}$	$\boxed{\tau = I\alpha}$

$$\tau = I\alpha$$
$$= mr^2 \cdot \frac{a}{r}$$
$$= rma.$$

$\boxed{\tau = rF}$ $\vec{r} \perp \vec{F}$ ⇒ কোনো ঘূর্ণন তৈরী করতে লম্ব ছাড়া হয় না।

$[\vec{r} \wedge \vec{F} = \frac{\pi}{2} \text{ or } 90^\circ]$

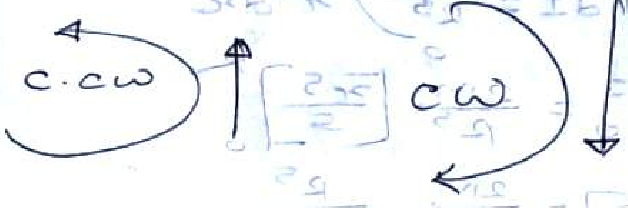
$\tau = rF \cdot 1$

$\tau = rF \cdot \sin 90^\circ$

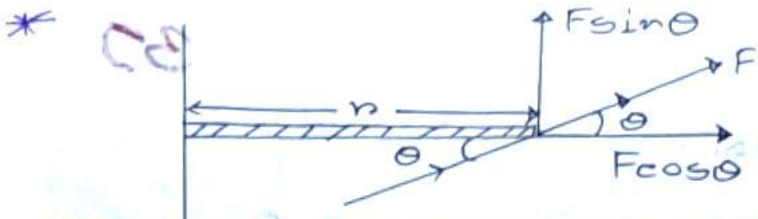
$|\tau| = |\vec{r} \times \vec{F}|$

$\Rightarrow \boxed{\tau = \vec{r} \times \vec{F}}$ ➡ টর্ক হচ্ছে রৈখিক বল ও ব্যাসার্ধের ক্রসগুণন।

দিক: $\vec{r}$ ও $\vec{F}$ যে তলে অবস্থিত সে তলের সাথে লম্বভাবে উপরের দিকে বা নিচের দিকে।



*



$\tau = rF\sin\theta$

$\Rightarrow |\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}|$

$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

* $\tau = rF\sin\theta \; [\vec{r} \wedge \vec{F} = \theta]$

Unit: Nm → [কাজ না, (J) না।] ⇒ Just একটা unit কোনো physical meaning নাই।

Dimention: $[\tau] = [MLT^{-2}.L]$

$= [ML^2T^{-2}]$

বলের ভ্রামক: (Moment of Force): প্রযুক্ত বল ও লম্ব দূরত্বের গুণফলকে বলের ভ্রামক বলা হয়।

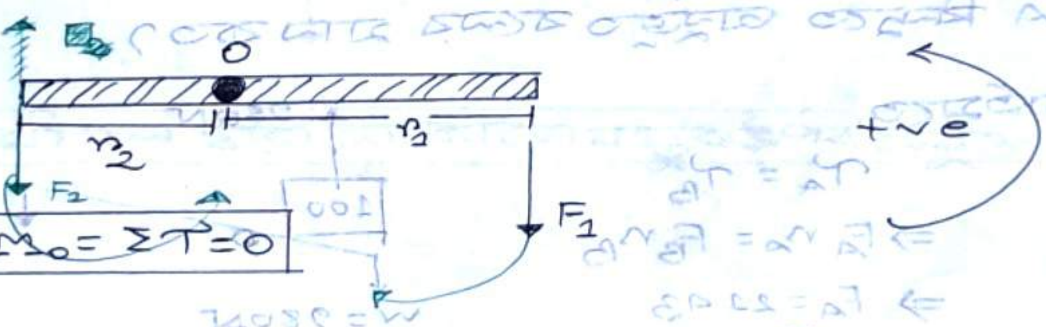
$\boxed{M_F = rF}$ $\quad \vec{r} \wedge \vec{F} = \frac{\pi}{2}$ বা $90°$

$\vec{M_F} = \vec{r} \times \vec{F}$

* মূলত টর্ক হচ্ছে বলের ভ্রামক।

$\therefore \boxed{\vec{M_F} = \vec{\tau}}$

case: 01: বৃত্তাকার পথে কোনো বস্তুকে স্থির রাখতে চাইলে:-



$\boxed{\Sigma M_0 = \Sigma \tau = 0}$

$\Sigma M_0 = \Sigma \tau = 0$

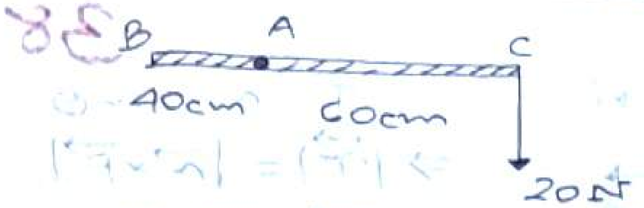
$\Rightarrow -F_1 r_1 + F_2 r_2 = 0$

$\Rightarrow F_1 r_1 = F_2 r_2$

$\boxed{\frac{r_1}{r_2} = \frac{F_2}{F_1}}$ * $[r_1 > r_2]$

$\therefore [F_2 > F_1]$ *

* ৪৫।



চিত্রে দন্ডটি A বিন্দুর সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান। B বিন্দুতে কত বল প্রয়োগ করলে দন্ডটি স্থির থাকবে?

উ: এখানে,

$r_1 = 60\,cm = 0.6\,m$ $\quad F_1 = 20N$

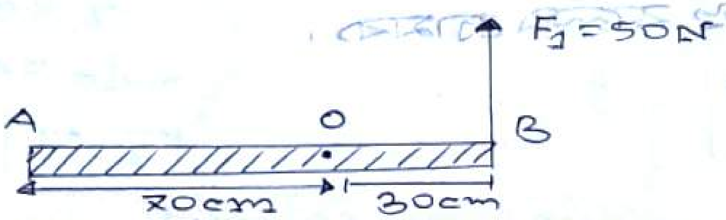
$r_2 = 40\,cm = 0.4\,m$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{0.6}{0.4} \times 20 = 30N \text{ (Ans.)}$$

case:02: কোনো বস্তু কোনো অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান হলে বস্তুটির দুইপাশের বলের Moment সমান হবে।

*



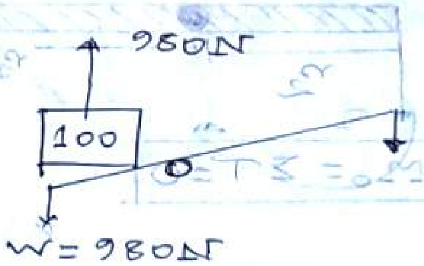
চিত্রে সুষম দন্ডটি O বিন্দুর সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান হলে A বিন্দুতে অনুভূত বলের মান কত?

উ: শর্তমতে,

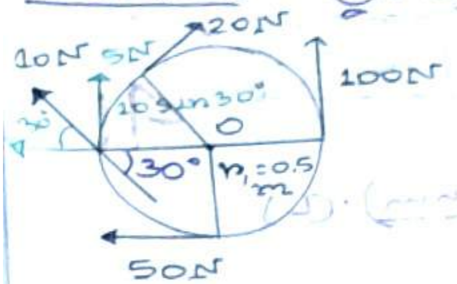
$$\tau_A = \tau_B$$

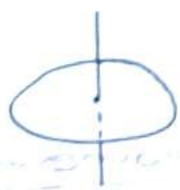
$$\Rightarrow F_A r_A = F_B r_B$$

$$\Rightarrow F_A = 21.43$$



case:03: বস্তুটি কোন দিকে ঘুরবে?





চিত্রে বৃত্তাকার বস্তুটি কোন দিকে ঘুরবে?

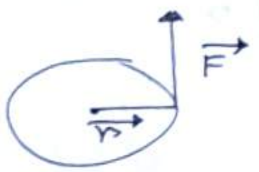
উঃ Let, +ve

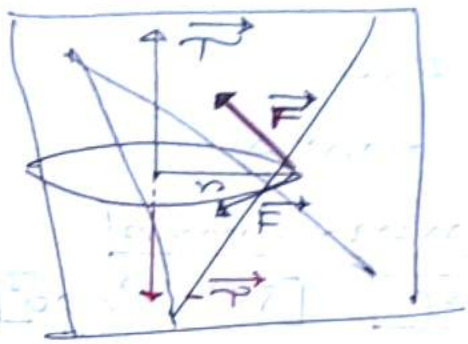
$$\Sigma M_o = \Sigma \tau = (-50 \times 0.5) + (-5 \times 0.5) + (-20 \times 0.5) + (100 \times 0.5)$$
$$= (-25) + (-2.5) + (-10) + 50$$
$$= 12.5 \text{ Nm}$$

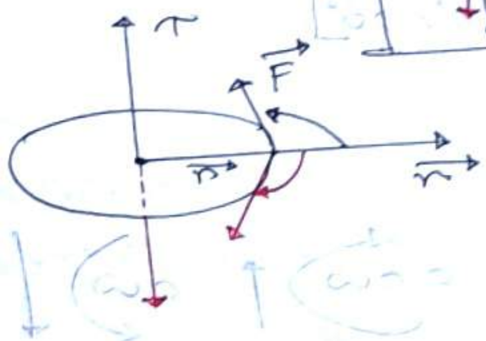
∴ বস্তুটি c.c.w এর দিকে ঘুরবে।

Special observation:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$







* কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা যেকোনো বস্তুর উপর প্রযুক্ত টর্ক শূন্য।

$T = rF \sin 180°$

$\boxed{T = 0}$

41

কৌণিক ভরবেগ (Angular momentum): (L)

বৃত্তাকার পথে বস্তুর ভরবেগ।

Linear	circular
m	I
v	ω
momentum = P	momentum = L
$P = mv$	$\boxed{L = I\omega}$

* $L = I\omega$

$\Rightarrow I = mr^2 \cdot \frac{v}{r}$

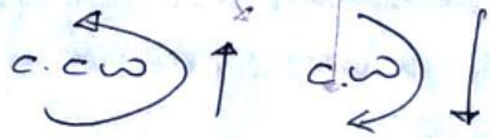
$\Rightarrow \boxed{L = rmv = mvr}$

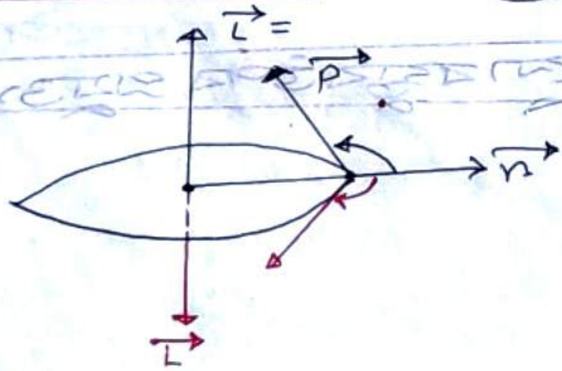
$\Rightarrow \boxed{L = rp} \quad [\vec{r} \wedge \vec{p} = 90°]$

$\Rightarrow L = rp \sin 90°$

$\Rightarrow |\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}|$

$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$





Axial vector

* $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

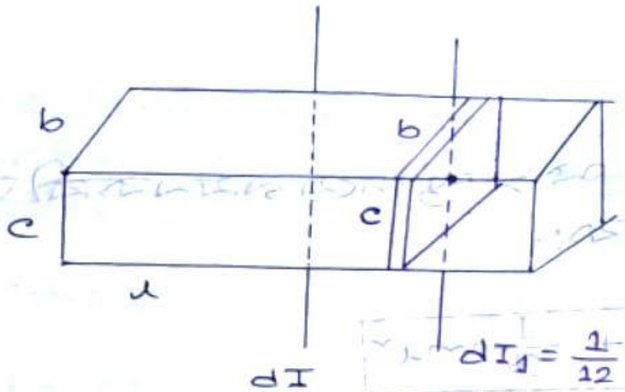
$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}}$ $\quad \boxed{\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})}$

Now, $L = rp \; [\vec{r} \wedge \vec{p} = 90^\circ]$

Unit: $kgms^{-1}m = kgm^2s^{-1}$

Dimension: $[L] = [MLT^{-1}L] = [ML^2T^{-1}]$

* আয়তাকার ঘনবস্তুর কেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক:



$dI_1 = \frac{1}{12} dm(b^2 + c^2)$

$dI = dI_1 + dm \cdot x^2$

$\Rightarrow dI = \frac{1}{12} dm (b^2 + c^2) + dm x^2$

$\Rightarrow dI = \frac{1}{12}(b^2 + c^2)\frac{m}{l}dx + \frac{m}{l}dx \cdot x^2$

l দৈর্ঘ্যের ভর $= m$

$\therefore 1$ " " $= \frac{m}{l}$

$\therefore dx$ " " $= \frac{m}{l}dx$

$\Rightarrow \int_0^I dI = 2 \times \frac{m}{12}\left(\frac{b^2 + c^2}{l}\right)\int_0^{l/2} dx + 2 \times \frac{m}{l}\int_0^{l/2} x^2 dx$

$\Rightarrow I = \frac{m}{6l}(b^2 + c^2)\left[\frac{l}{2}\right] + \frac{2m}{3l}\left[\frac{l^3}{8}\right]$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) + \frac{1}{12}ml^2}$

* ঘনকের কেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক:

$$I = \frac{1}{12} m(b^2+c^2) + \frac{1}{12} m l^2$$

93

ঘনকের ক্ষেত্রে, $a=b=l$

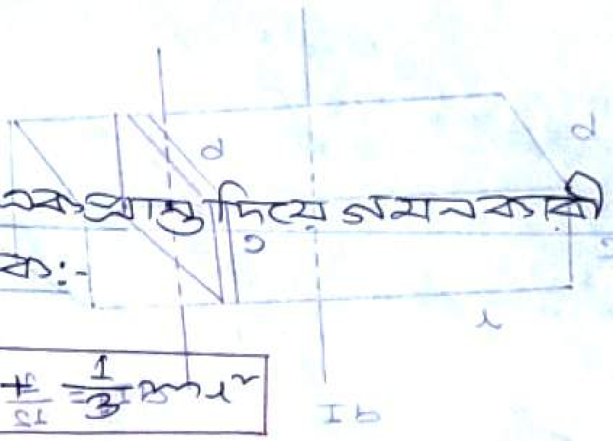
$$I = \frac{1}{12} m(l^2+l^2) + \frac{1}{12} m l^2$$

$$= \frac{1}{6} m l^2 + \frac{1}{12} m l^2$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{12} m l^2$$

$$= 3 \times \frac{1}{12} m l^2$$

$$\boxed{I = \frac{1}{4} m l^2}$$



* আয়তাকার ঘনবস্তুর এক প্রান্ত দিয়ে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক:-

$$\boxed{I = \frac{1}{12} m(b^2+c^2) + \frac{1}{3} m l^2}$$

* ঘনকের এক প্রান্ত দিয়ে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক:

$$I = \frac{1}{12} m(b^2+c^2) + \frac{1}{3} m l^2$$

$b=c=l$

$$I = \frac{1}{12} m(b^2+c^2) + \frac{1}{3} m l^2$$

$$= \frac{1}{6} m l^2 + \frac{1}{3} m l^2$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} m l^2}$$

কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র:

বাহ্যিক কোনো টর্ক প্রয়োগ না করা হলে কৌণিক ভরবেগ অপরিবর্তিত থাকে।

No external Torque, $\tau_{ext} = 0$

$$\Rightarrow I\alpha = 0$$
$$\Rightarrow I\frac{d\omega}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d(I\omega)}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0$$
$$\boxed{L = const}$$

$L = const$

$\Rightarrow \boxed{I\omega = const}$

$\therefore \boxed{\omega \propto \frac{1}{I}}$

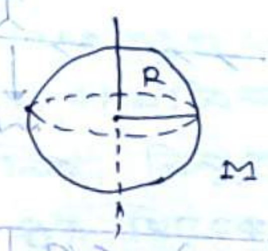
$\boxed{I_1\omega_1 = I_2\omega_2}$

* পৃথিবীকে একটি সুষম নিরেট গোলক বিবেচনা করে এর ভর অপরিবর্তিত রেখে ব্যাসার্ধ অর্ধেক করা হলে পৃথিবীর আহ্নিক গতির পর্যায়কাল এর কীরূপ পরিবর্তন হবে?

উ: ১ম ক্ষেত্রে, $I_1 = \frac{2}{5}MR_1^2$ ——(i)

২য় ক্ষেত্রে, $I_2 = \frac{2}{5} \times M \times \left(\frac{R_1}{2}\right)^2$

$$= \frac{MR_1^2}{10} \text{ ——(ii)}$$



$\therefore I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_2}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{\frac{2}{5}MR_1^2 \times \omega_1}{\frac{MR_1^2}{10}}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{2\cancel{MR_1^2} \times \omega_1}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{MR_1^2}}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = 4\omega_1$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T_2} = 4 \times \frac{2\pi}{T_1}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{4} = \frac{24h}{4} = 6h \text{ (Ans.)}$$

Topic: 06: "G" Force or "g" force:

একটি বস্তু/ কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল লম্ব বল ও এর ওজনের অনুপাতকে বলা হয় g force or G Force.

45

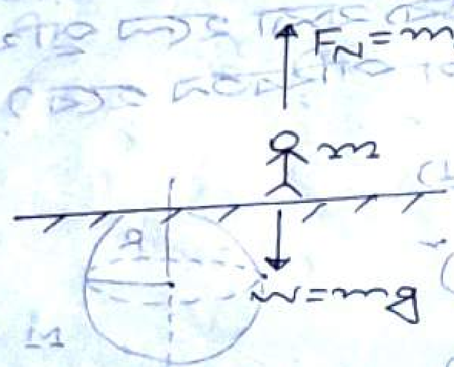
★ এটি দ্বারা বোঝা যায় একটি বস্তু তার ওজনের তুলনায় কতটুকু বল অনুভব করছে।

$$\boxed{g's = \frac{F_N}{W}}$$

F_N → acting Normal force on object

W → weight of object

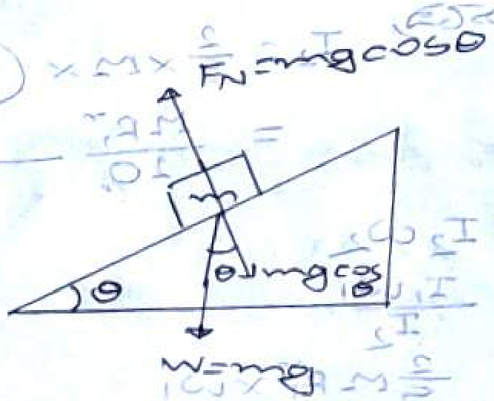
$g's$ → it's a dimensionless & unitless parameter.

* 

$$g's = \frac{F_N}{W} = 1$$

* $g's \in \mathbb{R}$

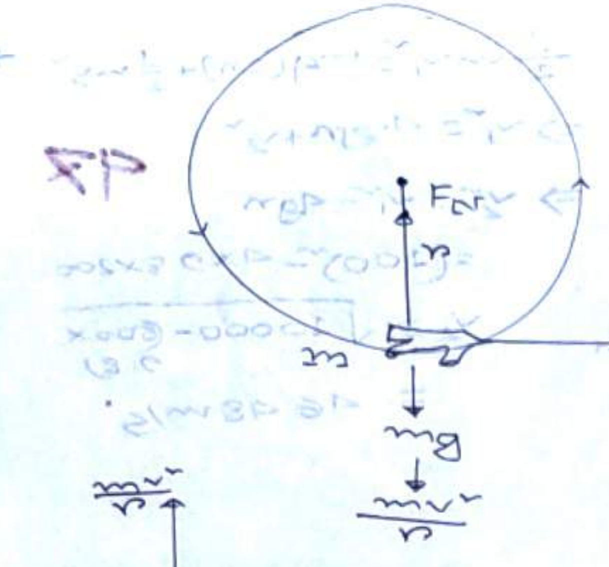
$g's = 0$ *



$$g's = \frac{F_N}{W} = \frac{mg\cos\theta}{mg}$$

$$\boxed{g's = \cos\theta}$$

*



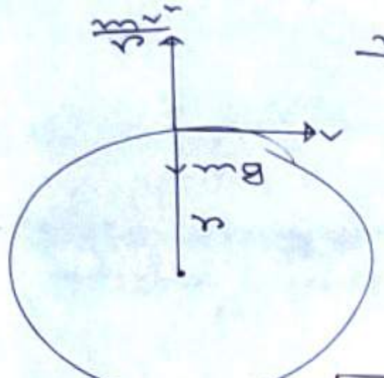
$$F_N = mg + \frac{mv^2}{r}$$

$$g's = \frac{F_N}{W} = \frac{mg + \frac{mv^2}{r}}{mg}$$

$$\boxed{g's = 1 + \frac{v^2}{rg}}$$

46

*



$$\frac{mv^2}{r} > mg \qquad F_N = \frac{mv^2}{r} - mg$$

$$g's = \frac{\frac{mv^2}{r} - mg \; (F_N)}{mg \; (W)} = \frac{v^2}{rg} - 1$$

$$\boxed{\therefore g's = \frac{v^2}{rg} - 1}$$

* একজন পাইলট ভূমির সাথে উলম্ব ভাবে অবস্থিত একটি বৃত্তাকার পথে বিমান চালনা করল, বৃত্তাকার পথটির ব্যাসার্ধ 200m। বিমানটি যখন বৃত্তাকার পথে সর্বনিম্ন বিন্দুতে অবস্থিত, তখন পাইলটের উপর কার্যকরী g's force নির্ণয়, যেখানে বিমানটির বেগ 360 km/h।

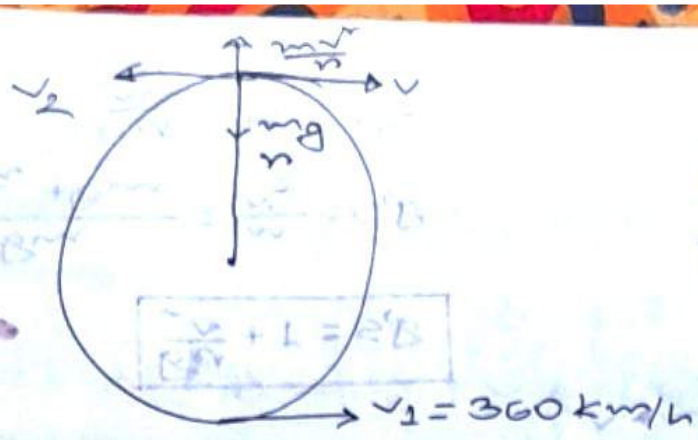
উ: $g's = 1 + \frac{v^2}{rg}$

$$= 1 + \frac{\cancel{360}\,(100)^2}{200 \times 9.8}$$

$$= 6.10$$

(ii) সর্বোচ্চ বিন্দুতে পাইলটের উপর কার্যকরী g's force নির্ণয় কর।

ট:



$= 100\,m/s$

$\frac{1}{2}mv_1^2 = mg(2r) + \frac{1}{2}mv_2^2$

$\Rightarrow v_1^2 = 4gr + v_2^2$

$\Rightarrow v_2^2 = v_1^2 - 4gr$

$= (100)^2 - 4 \times 9.8 \times 200$

$v_2 = \sqrt{10000 - (800 \times 9.8)}$

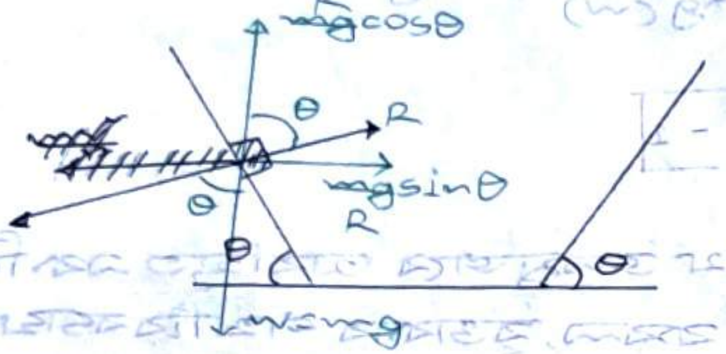
$= 46.48\,m/s$

$g's = \frac{v_2^2}{rg} - 1$

$= \frac{(46.48)^2}{200 \times 9.8} - 1$

$= 0.1$ (Ans.)

*



$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

$v = \sqrt{rg\tan\theta}$

$g's =$

$R = \sqrt{(R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2}$

$= \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{mv^2}{r}\right)^2}$

$\left[\begin{array}{l} R\cos\theta = mg \\ R\sin\theta = \frac{mv^2}{r} \end{array}\right.$

$= \sqrt{m^2g^2 + \frac{m^2v^4}{r^2}}$

$= \sqrt{m^2\left(\frac{v^4}{r^2} + g^2\right)}$

$= m\sqrt{\frac{v^4}{r^2} + g^2}$

$$g'(s) = \frac{F_N}{W}$$
$$= \frac{m\sqrt{\frac{v^4}{r^2}+g^2}}{mg}$$
$$= \sqrt{\frac{\frac{v^4}{r^2}+g^2}{g^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{v^4}{g^2 r^2}+1}$$
$$= \sqrt{1+\left(\frac{v^2}{rg}\right)^2}$$
$$g'(s) = \sqrt{1+\tan^2\theta}$$

$$g'(s) = \sqrt{1+\frac{v^4}{g^2 r^2}}$$
$$= \sqrt{1+\tan^2\theta}$$

* ভূমির সমান্তরালে চললে, আগের math এ
$$g'(s) = \sqrt{1+\frac{v^4}{g^2 r^2}}$$
$$= \sqrt{1+\frac{(100)^4}{(9.8)^2\times(200)^2}}$$

$$g'(s) = 5.2$$

Topic: 02: Newton's law of motion (NLM):

1st law (Law of inertia): বাহ্যিক কোনো বল প্রয়োগ না করলে স্থির বস্তু স্থির থাকবে এবং গতিশীল বস্তু সুষম গতিতে সরলরেখায় চলতে থাকবে।

* জড়তা (inertia): কোনো বস্তু যে অবস্থায় আছে সে অবস্থায় থাকার প্রবণতা।

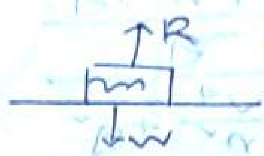
স্থিতি জড়তা (Static inertia) ⟷ গতি জড়তা (Kinetic inertia)

* জড়তার পরিমাপক হচ্ছে ভর।

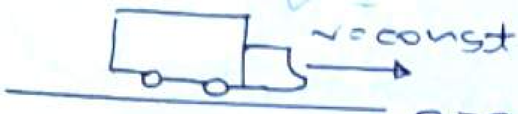
$m \rightarrow$ জড়তা / যৌগিক জড়তা।

বল (Force): বল হচ্ছে এমন একটি ক্রিয়ামূলক যা জড়তার পরিবর্তন করে।

$$\boxed{\Sigma F = 0}$$



$\Sigma F = W - R = 0$



$a = 0$ $\qquad$ $\Sigma F = 0$

* গাড়ির ক্ষেত্রে, $\Sigma F = ma \to 0$

$$\boxed{\Sigma F = 0}$$

2nd law (law of momentum): বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার এর উপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক এবং বল যে দিকে ক্রিয়া করে ভরবেগ সে দিকে পরিবর্তিত হয়।

ভরবেগ (momentum):(P): কোনো বস্তু তার ভরবেগ সাপেক্ষে কতটুকু বেগ লাভ করবে তা যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা জানা যায় তাকে ভরবেগ বলা হয়।

hypothesis: $P = f(m, v)$

$P \propto m$ —(i)

$P \propto v$ —(ii)

from (i) & (ii), $P \propto mv$

$\Rightarrow P = kmv$

$m = 1$ unit, $v = 1$ unit, $P = 1$ unit

$$\boxed{K = 1}$$

$P = mv$ or $\vec{P} = m\vec{v}$

Unit: $kgms^{-1}$

Dimension: $[P] = [MLT^{-1}]$

* $P = mv$, $\vec{p} = m\vec{v}$

$P = mv$

এখন, $P = const$

$\therefore mv = const$

$\Rightarrow v = \frac{const}{m}$

$\therefore v \propto \frac{1}{m}$

$P \propto m$

$\Rightarrow p = k_1 m$ —(i)

$P \propto v$

$\Rightarrow p = k_2 v$ —(ii)

(i) × (ii)

$p^2 = k_1 k_2 mv$

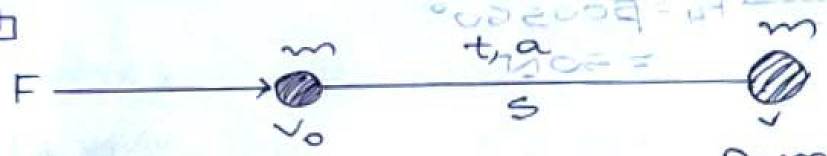
$\Rightarrow p.p = k_1 k_2 mv$

$\Rightarrow p = \frac{k_1 k_2}{p} mv$

$\Rightarrow p = kmv$

আমরা/বৈশিষ্ট্য একেক মুহূর্ত

এই হিসেবে P কে const ধরা হয়



$P_0 = mv_0$ $p = mv$

t সময়ে ভরবেগের পরিবর্তন $\Delta p = P - P_0 = mv - mv_0$

$\therefore 1$ " " " $\frac{\Delta p}{t} = \left(\frac{mv - mv_0}{t}\right)$

$\therefore \left(\frac{mv - mv_0}{t}\right) \propto F$

$\Rightarrow \left(\frac{mv - mv_0}{t}\right) = k_1 F$

$\Rightarrow \frac{m(v - v_0)}{t} = k_1 F$

$\Rightarrow ma = k_1 F$

$\Rightarrow F = \frac{1}{k_1} ma$

$\Rightarrow F = kma$ $\left[\frac{1}{k_1} = k = const\right]$

classical physics এ ব্যবহৃত সূত্রটি লেখা হচ্ছে সময় তাই সময়ের সাপেক্ষে ভরবেগের পরিবর্তন হিসাব করা হয়েছে

$\therefore k = 1$

$\boxed{F = ma}$

$m = 1kg$, $a = 1ms^{-1}$ $\Rightarrow F = 1N$

50

*** 20N:** $F = ma$

1kg	$20ms^{-1}$
$20ms^{-1}$	2kg
2	10
10	2
4	5
5	4
2.5	8
8	2.5

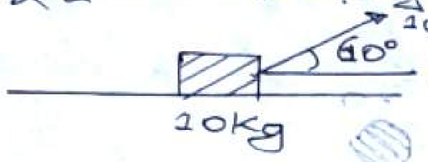
* কোনো বস্তুর উপর একাধিক বল প্রয়োগ করলে:-

$$\Sigma F = ma$$

51

* কোনো ঘর্ষণবিহীন তলে 10kg ভরের একটি বস্তুকে আনুভূমিক এর সাথে 60° কোণে 100N বলে টানা হচ্ছে বস্তুটির আনুভূমিক বরাবর ত্বরণ নির্ণয় কর।

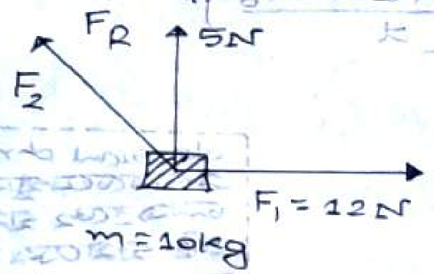
উ:



$$F_H = F\cos 60°$$
$$= 50N$$

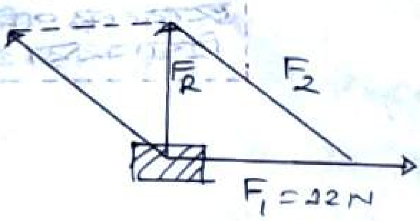
$$F_H = m a_H$$
$$\Rightarrow 50 = 10 \times a_H$$
$$\therefore a_H = 5 ms^{-1}$$

*



চিত্রে 10kg ভরের বস্তুটির উপর F_1 ও F_2 বল ক্রিয়াশীল, যেখানে এদের লব্ধি যা F_1 এর সাথে লম্ব, F_2 বলের জন্য বস্তুটির ত্বরণ কত হবে।

উ:



$$F_2^2 = F_R^2 + F_1^2$$
$$= \sqrt{(12)^2 + 5^2}$$
$$= 13N$$

$$a_2 = 1.3 ms^{-1}$$

$* \; F = ma$

$\Rightarrow F = m\dfrac{dv}{dt}$

$\Rightarrow F = \dfrac{d(mv)}{dt}$

$\Rightarrow \boxed{F = \dfrac{dP}{dt}}$

$F = \dfrac{dP}{dt}$

$\Rightarrow F = \dfrac{d}{dt}(mv)$

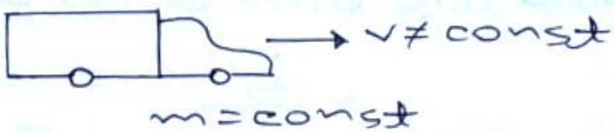
$\Rightarrow F = m\dfrac{dv}{dt} + v\dfrac{dm}{dt}$ $\left[\dfrac{d}{dt}(uv) = u\dfrac{dv}{dt} + v\dfrac{du}{dt}\right]$

$\boxed{F = m\dfrac{dv}{dt} + v\dfrac{dm}{dt}}$

[m const নাও হতে পারে, যেমন: আমরা রকেটে]

52

case:01: For solid:



$m = \text{const}; \quad v \neq \text{const}$

$\Rightarrow \dfrac{dm}{dt} = 0 \quad ; \quad \dfrac{dv}{dt} \neq 0$

from (i) $\quad F = m\dfrac{dv}{dt} + \cancel{v\dfrac{dm}{dt}}$

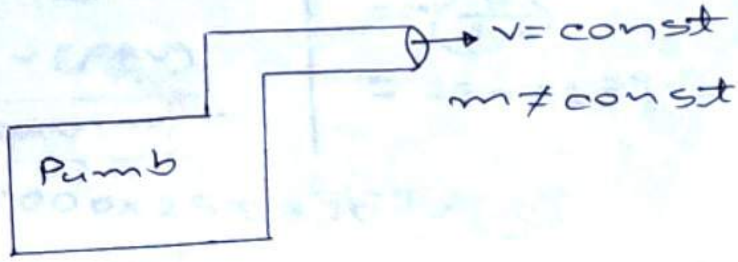
$\boxed{F = m\dfrac{dv}{dt}} = ma$

$F = \dfrac{d(mv)}{dt}$

$\therefore F = \dfrac{dP}{dt}$

case:02: Liquid + Gas

Fluid



$m \neq const$ $\quad v = const$

$\therefore \frac{dm}{dt} \neq 0$; $\quad \frac{dv}{dt} = 0$

53

$$F = m \cancel{\frac{dv}{dt}}^{0} + v\frac{dm}{dt}$$

$$\boxed{\therefore F = v\frac{dm}{dt}}$$

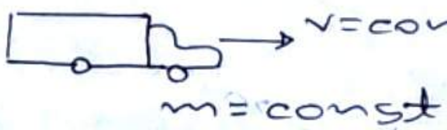
$\boxed{\frac{dm}{dt} \rightarrow \text{mass flow rate}}$ kg/s

$$F = v\frac{dm}{dt}$$

$$\Rightarrow F = \frac{dmv}{dt}$$

$$\therefore F = \frac{dP}{dt}$$

case: 03:



$m = const$ $\quad v = const$

$\frac{dm}{dt} = 0$; $\quad \frac{dv}{dt} = 0$

$$F = m \cancel{\frac{dv}{dt}}^{0} + v \cancel{\frac{dm}{dt}}^{0}$$

$$\therefore \boxed{F = 0} \rightarrow 1^{st} \text{ law}$$

* একটি ডিজেল পাম্প মাটির নিচের থেকে পানি উত্তোলন করে $10\,ms^{-1}$ বেগে বাইরে নির্গত করে পাম্পটির নির্গমন মুখের ব্যাসার্ধ 5 cm.

54

(i) পানি নির্গমনে পাম্প কর্তৃক প্রযুক্ত বল নির্ণয় কর।

(ii) পাম্পটির ক্ষমতা hp এককে নির্ণয় কর।

(iii) পাম্পটির নির্গমন মুখে তরল কর্তৃক অনুভূত চাপ কত?

(iv) পাম্পটির নির্গমন মুখ ভূমি থেকে 120 cm উঁচুতে অবস্থিত হলে নির্গত পানি ভূমি বরাবর কত দূরে পড়বে?

(i) ঃ

$\dot{m} = \rho A v$

$\dot{m} = const$

$\therefore \rho A v = const$

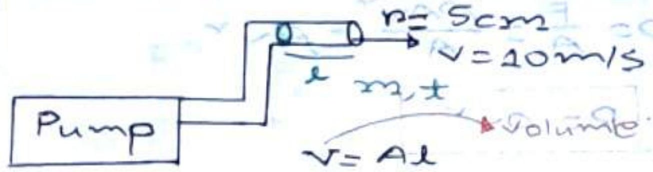
$\Rightarrow Av = \frac{const}{\rho}$

$\Rightarrow \boxed{Av = const} \rightarrow$ Flow Quantity

$v = \frac{const}{A}$

$\Rightarrow v \propto \frac{1}{A}$

$\boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2}$



$V = Al$ → Volume

'l' is changeable

$\therefore m = \rho A l$

$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho A l)$

$= \rho A \frac{dl}{dt}$

$\therefore \dot{m} = \frac{dm}{dt} = \rho A v$ → velocity

যে ব্যাসার্ধ তরল নির্গত হচ্ছে তার মুখ

$\boxed{\dot{m} = \rho A v}$

যেকোনো দূরত্ব সময় এর ক্ষেত্রে

এখন, $F = v \frac{dm}{dt}$

$\Rightarrow F = v(\rho A v)$

$\Rightarrow \boxed{F = \rho A v^2}$

$A = \pi r^2$

$= \pi \left(\frac{5}{100}\right)^2$

$= 25\pi \times 10^{-4}$

$= 1000 \times 25\pi \times 10^{-4} \times (10)^2$

$F = 785.4\,N$.

(ii)

power, $P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t}$

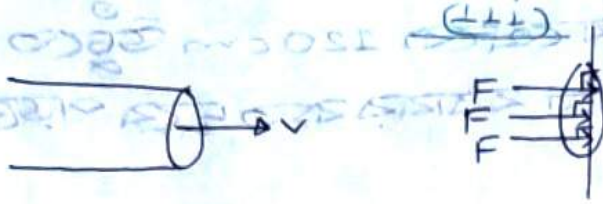
$\therefore P = 7854$ Watt
$= 10.53$ h.p

$P = Fv$

$P = \rho A v^2 v$

$$\boxed{P = \rho A v^3}$$

(iii)



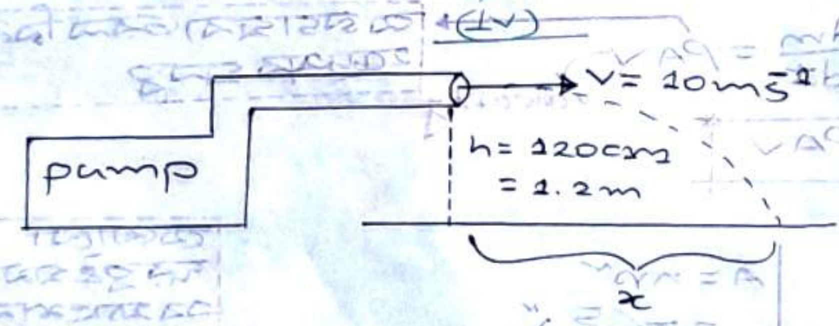
pressure, $p = \frac{F}{A} = \frac{\rho A v^2}{A} = \rho v^2$

$$\therefore \boxed{p = \rho v^2}$$

Dynamic Pressure, $P_d = \rho v^2$

$\Rightarrow P_d = 1000 \times (10)^2 = 10^5 Pa$

(iv)



$v_{x_0} = v\cos 0 = v$ $\quad v_{y_0} = v\sin 0 = 0$

$$\boxed{v_{x_0} = v_x}$$

$h = \frac{1}{2} g t^2$

$\Rightarrow 1.2 = \frac{1}{2} \times 4.9 \times t^2$

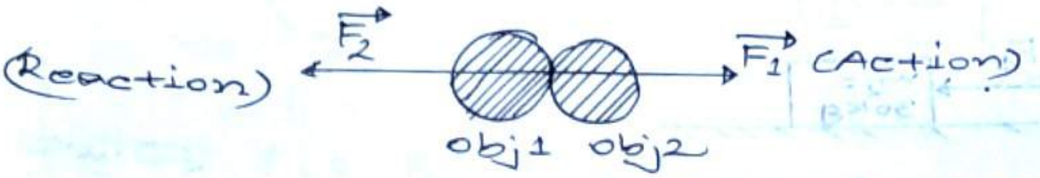
$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2.4}{9.8}} = 0.5$

$x = v_x t$
$= (0.5 \times 10)$

$x = 5m$

3rd law (law of Reaction): প্রত্যেক ক্রিয়ারই সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া আছে।

56



$$\vec{F_1} = -\vec{F_2} \quad [|\vec{F_1}| = \vec{F_2}]$$

$$\boxed{\text{Action} = -\text{Reaction}}$$

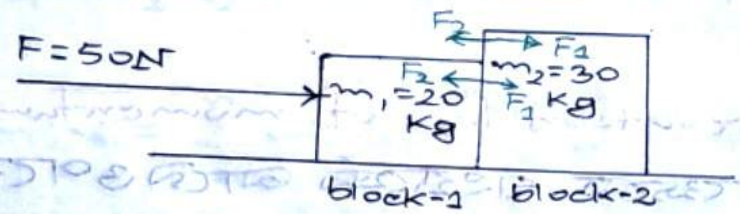
* A pair of force

এক জোড়া বল পাওয়া যায় এবং এদের লব্ধি একটি নাল ভেক্টর

$$\vec{F_1} = -\vec{F_2}$$
$$\Rightarrow \vec{F_1} + \vec{F_2} = \underline{0}$$

* বল অথবা বলরেখাকে সমরেখীয় হতে হবে।

**



এখানে, $(m_1+m_2)a = F$

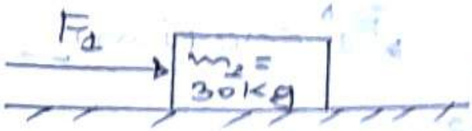
$$\Rightarrow 50 = 50 \times a$$

$$\therefore \boxed{a = 1 ms^{-2}}$$

block-1 এবং block-2 এর সংযোগস্থলে:-

$F_1 \rightarrow$ Action:

block-2:

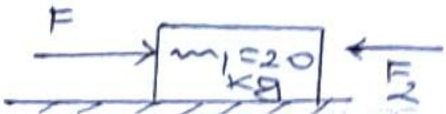


$$F_1 = m_2 a = (30 \times 1) = 30N$$

$$F_1 = 30N$$

F_2 - Reaction:

block-1



$$F + F_2 = m_1 a$$

$$\Rightarrow 50N + F_2 = 20 \times 1$$

$$\Rightarrow 50N + F_2 = 20N$$

$$\Rightarrow F_2 = -30N$$

$$\Rightarrow F_2 = -30N$$

$$\Rightarrow -F_2 = 30N$$

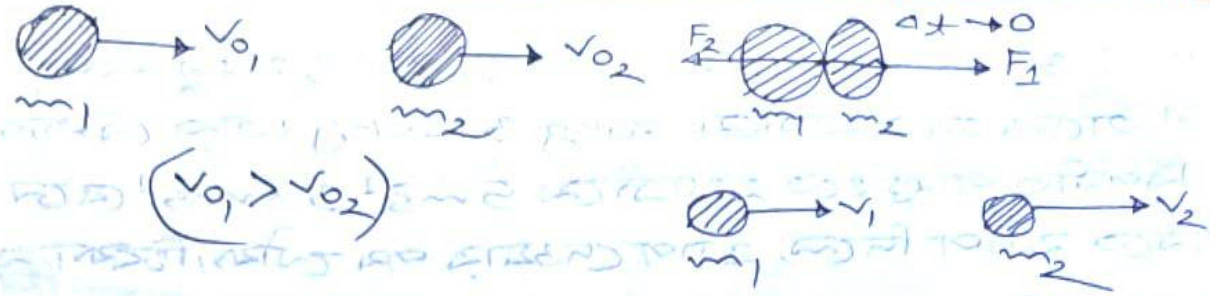
$$\Rightarrow -F_2 = F_1$$

$$\Rightarrow F_1 = -F_2$$

$$\boxed{\text{Action} = -\text{Reaction}}$$

Topic: 08: conservation law of momentum:-

দুই বা ততোধিক বস্তুর ক্ষেত্রে সংঘর্ষের আগে ও পরে ভরবেগের সমষ্টি সমান থাকে।



58

এখানে, $F_1 = -F_2$

$$\Rightarrow m_2 a_2 = -m_1 a_1$$

$$\Rightarrow m_2\left(\frac{v_2 - v_{02}}{\Delta t}\right) = -m_1\left(\frac{v_1 - v_{01}}{\Delta t}\right)$$

$$\Rightarrow m_2 v_2 - m_2 v_{02} = -m_1 v_1 + m_1 v_{01}$$

$$\Rightarrow m_2 v_2 + m_1 v_1 = m_1 v_{01} + m_2 v_{02}$$

$$\Rightarrow m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$ * রৈখিক ভরবেগ

For 3 objects, $m_1 v_{01} + m_2 v_{02} + m_3 v_{03} = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3$

- - - - - - - - - - - - -

For "n" number of object:-

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} + m_3 v_{03} + \dots + m_n v_{0n} = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \dots + m_n v_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i v_{0i} = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i} \quad [n \geq 2]$$

Math: 1: 300kg ভরের একটি নৌকার দুই প্রান্তে হাবলু ও কাবলু দাঁড়া তাদের ভর যথাক্রমে 70kg ও 80kg। তারা নৌকার দুই বিপরীত পার্শ্ব হতে যথাক্রমে $5ms^{-1}$ ও $7ms^{-1}$ বেগে পানিতে ঝাঁপ দিলে, ঝাঁপ দেওয়ার পর নৌকা কিরূপ দিকে যাবে?

উ:

(+ve) →

59

Hablu   Kablu

$m_2 = 70kg$ $m_3 = 80kg$

$v_{o_2} = 0$ $v_{o_3} = 0$

$v_2 = -5m/s$ $v_3 = 7m/s$

$m_1 = 300kg$

$v_{o_1} = 0$

$$\cancel{m_1 v_{o_1} + m_2 v_{o_2}} + m_3 v_{o_3} = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 \quad (\to 0)$$

$$\Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = 0$$

$$\Rightarrow 300 v_1 + (-350) + (560) = 0$$

$$\Rightarrow 300 v_1 + 210 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = -\frac{210}{300} = -0.7 m/s \leftarrow$$

Math-2: 5kg ভরের একটি বন্দুকের নলের দৈর্ঘ্য 60cm বন্দুকটি হতে 50g ভরের একটি বুলেট ছোঁড়ার জন্য বন্দুকে ট্রিগার চাপা হলে, ~~বন্দুকটি~~ বুলেটটি 3msec ($1ms = 10^{-3}s$) পর ত্বরণমান ~~ক~~ হয়। বন্দুকটি একজন শিকারী শিকারের কাজে ব্যবহৃত করছিল। শিকারী 8m উচ্চতা বিশিষ্ট গাছের ডালে বসা। শিকারী বসা অবস্থায় তার হতে 10m সামনে একই উচ্চতা বিশিষ্ট একটি গাছের ডালে 500g ভরের একটি পাখি দেখতে পেল, শিকারী

পাখিটিকে লক্ষ্য করে বুলেট ছুড়ল। বুলেটটি পাখিটিকে আঘাত করে এর মধ্যে বিদ্ধ হয়ে গেল, পাখিটি আঘাতপ্রাপ্ত হওয়ার পর গাছ থেকে পড়ে ভূমি বরাবর একটি নির্দিষ্ট দূরত্বে গিয়ে পড়ে।

60

(i) উদ্দীপকে বুলেট ছোড়ার ফলে বন্দুকের পশ্চাৎবেগ নির্ণয় কর।

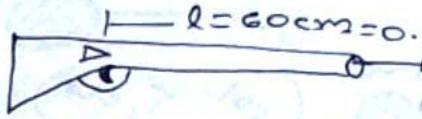
(ii) বুলেটটি পাখিটিকে আঘাত করার পর এদের সম্মিলিত বেগ নির্ণয় কর।

(iii) পাখিটি আঘাতপ্রাপ্ত হওয়ার পর গাছ থেকে ভূমি বরাবর কত দূরে গিয়ে পড়বে?

+ve →

(i) Ans

$l = 60cm = 0.6m$



$v_b = \frac{l}{t} = \frac{0.6}{3\times10^{-3}} = 200\ m/s$

$M_G = 5kg$ $m_b = 50gm = 0.05\ kg$

$v_{G0} = 0\ m/s$

$v_{b0} = 0\ m/s$

$M_G v_{G0} + m_b v_{b0} = M_G v_G + m_b v_b$

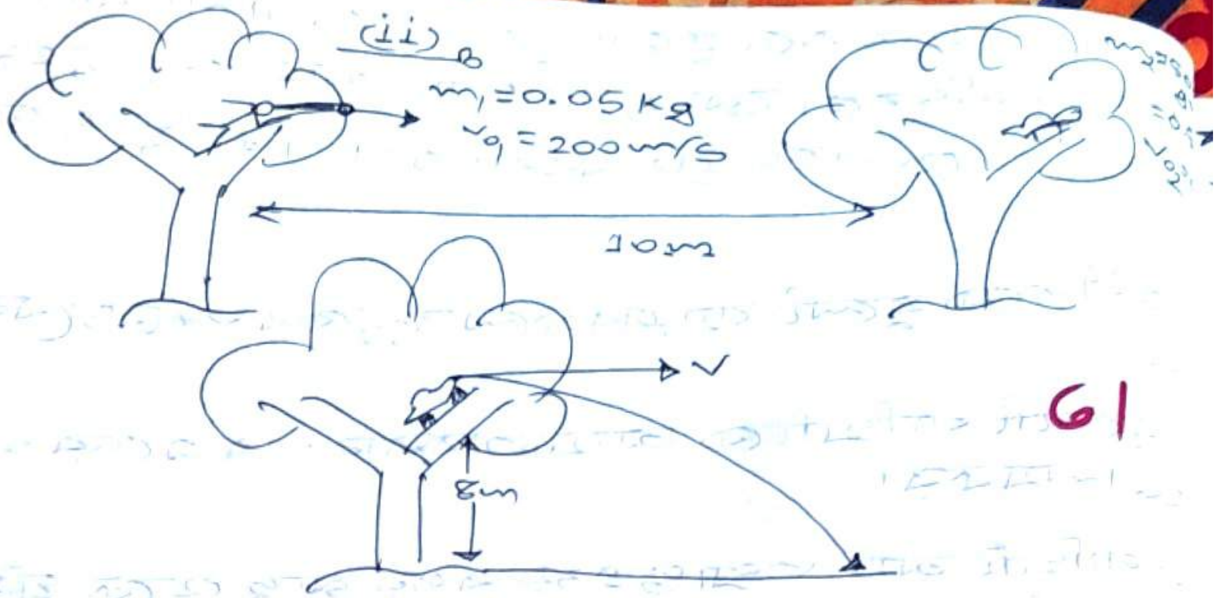
$\Rightarrow v_G = -\frac{m_b v_b}{M_G} = -\frac{200 + 0.05}{5}$

$= -2\ m/s$ ←

∴ বন্দুকের পশ্চাৎবেগ $2 m/s$.

—x—

(ii)



61

$$m_1 v_{0_1} + \cancel{m_2 v_2}^{0} = (m_1 + m_2) v$$

$$\Rightarrow (0.05 \times 200) = 0.55 v$$

$$\Rightarrow v = \frac{0.05 \times 200}{0.55} = 18.2\,m/s$$

(iii)

$h = \frac{1}{2} g t^2$

$\Rightarrow 8 = 4.9 t^2$

$\therefore t = \sqrt{\frac{8}{4.9}}$

$x = v \times t$

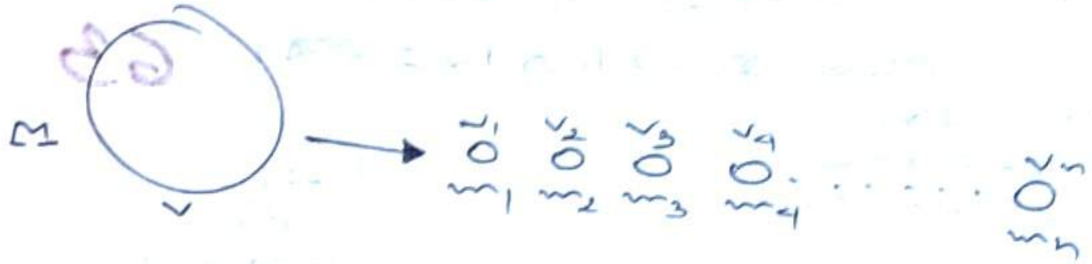
$= (18.2 \times 1.28)\,m$

$= 23.29\,m$

$= 23.3\,m$

—x—

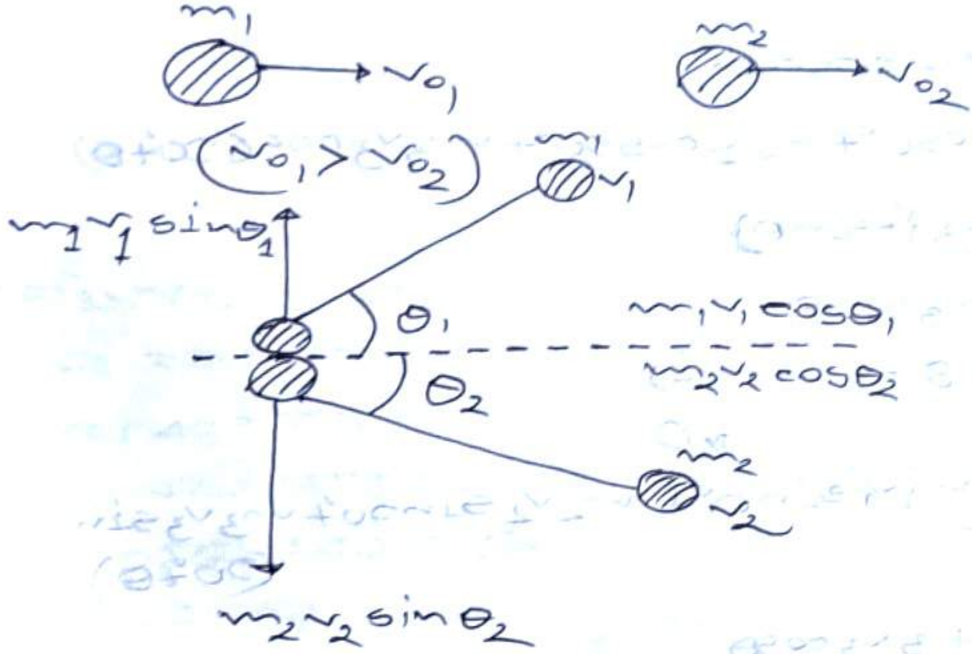
★ একটি বস্তু ভেঙে বা বিস্ফোরিত হয়ে অনেকগুলো বস্তুতে পরিণত হলে যে ভরবেগের সংরক্ষণশীলতা সূত্রকে সমর্থন করে।



$$Mv = m_1v_1 + m_2v_2 + \dots + m_nv_n$$

$$\boxed{Mv = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i}$$

★ Oblique collision (আড়াআড়ি সংঘর্ষ)



আনুভূমিক বরাবর: $\xrightarrow{(+ve)}$

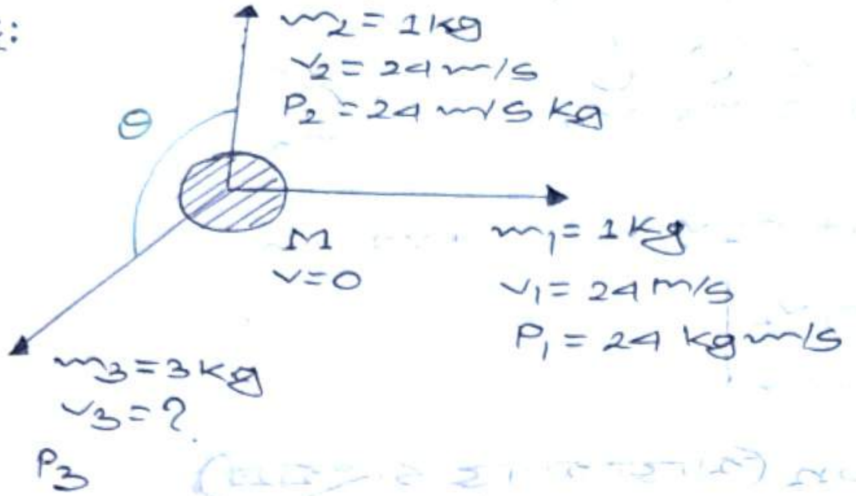
$$m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1\cos\theta_1 + m_2v_2\cos\theta_2$$

উলম্ব বরাবর: $\uparrow(+ve)$

$$0 + 0 = m_1v_1\sin\theta_1 - m_2v_2\sin\theta_2$$

* 5 kg ভরের একটি বস্তু হঠাৎ বিস্ফোরিত হয়ে 1:1:3 অনুপাতে 3টি টুকরায় বিভক্ত হলো, যদি সমান ভরের টুকরা দুইটি, পরস্পর এর সাথে সমকোণে 24 ms^{-1} বেগে গতিশীল হয় তবে ৩য় টুকরাটির বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর। 63

উ:



1:1:3
(5)
5 এর $\frac{1}{5} = 1$
5 এর $\frac{1}{5} = 1$
5 এর $\frac{3}{5} = 3$

Method: 1: অনুভূমিক বরাবর,

$$0 = m_1v_1\cos 0^\circ + m_2v_2\cos 90^\circ + m_3v_3\cos(90^\circ+\theta)$$

$$\Rightarrow 0 = 24 + 3v_3\{-\sin\theta\}$$

$$\Rightarrow 0 = 24 - 3v_3\sin\theta$$

$$\Rightarrow v_3\sin\theta = 8 \quad \text{--- (i)}$$

উলম্ব বরাবর, $0 = \cancelto{0}{m_1v_1\sin 0^\circ} + m_2v_2\sin 90^\circ + m_3v_3\sin(90^\circ+\theta)$

$$\Rightarrow 0 = 24 + 3v_3\cos\theta$$

$$\Rightarrow v_3\cos\theta = -8 \quad \text{--- (ii)}$$

(i) ÷ (ii) করে,

$\tan\theta = -1$

$\theta = 135^\circ$ বা $\frac{3\pi}{2}$

m_3 এর সাথে 135° কোণে গতিশীল।

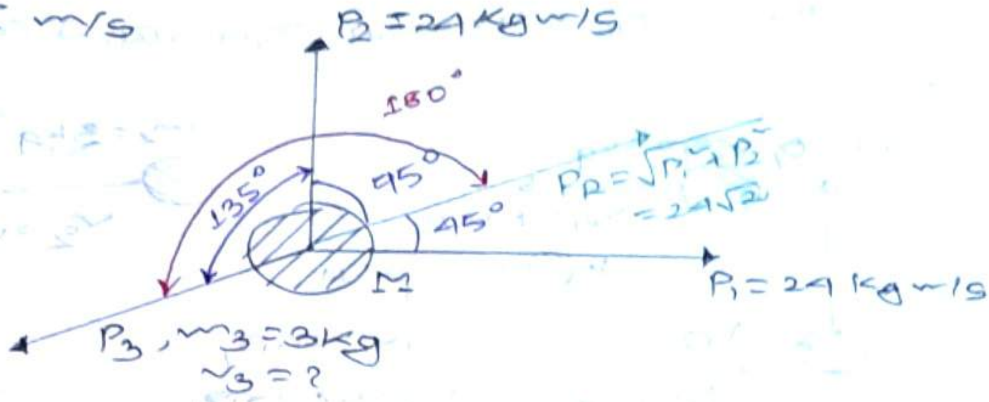
(i)² + (ii)²

$v_3^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 2\times 8^2$

$\Rightarrow v_3^2 = 2\times 8^2$

$\Rightarrow v_3 = 8\sqrt{2}$ m/s

69



Method:-2: $P_3 = P_R$

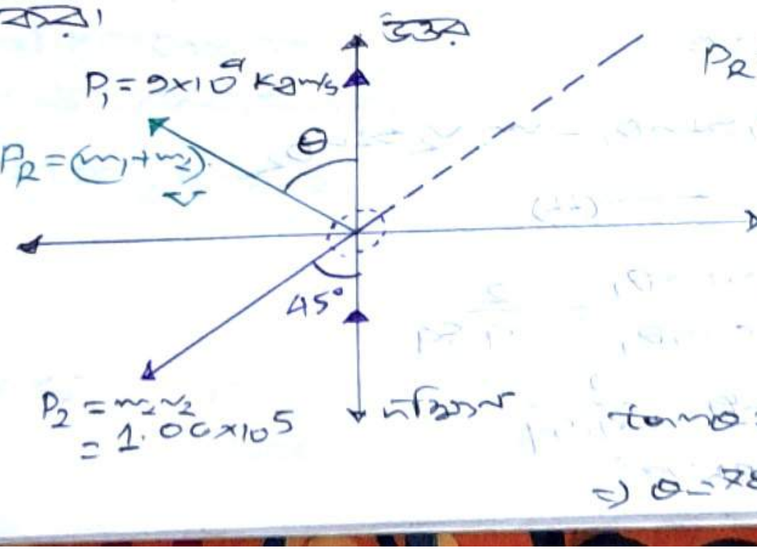
$\Rightarrow m_3 v_3 = 24\sqrt{2}$

$\Rightarrow 3v_3 = 24\sqrt{2}$

$v_3 = 8\sqrt{2}$ m/s (Ans)

* দক্ষিণ থেকে উত্তর দিকে 30m/s বেগে গতিশীল 3000kg ভরের একটি গাড়ির সাথে $30\sqrt{2}$ m/s বেগে দক্ষিণ দিকের সাথে 45° কোণে দক্ষিণ-পশ্চিমদিকে গতিশীল 2500kg ভরের একটি গাড়ির সংঘর্ষ হলো। গাড়িদ্বয় সংঘর্ষের পর মিলিত হয়ে একই বেগে চলতে থাকলে, এদের বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

উঃ



$P_R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos 135^\circ}$

$= 7.6\times10^4$

$P_R = (m_1+m_2)v$

$\Rightarrow v = \frac{7.6\times10^4}{5500}$

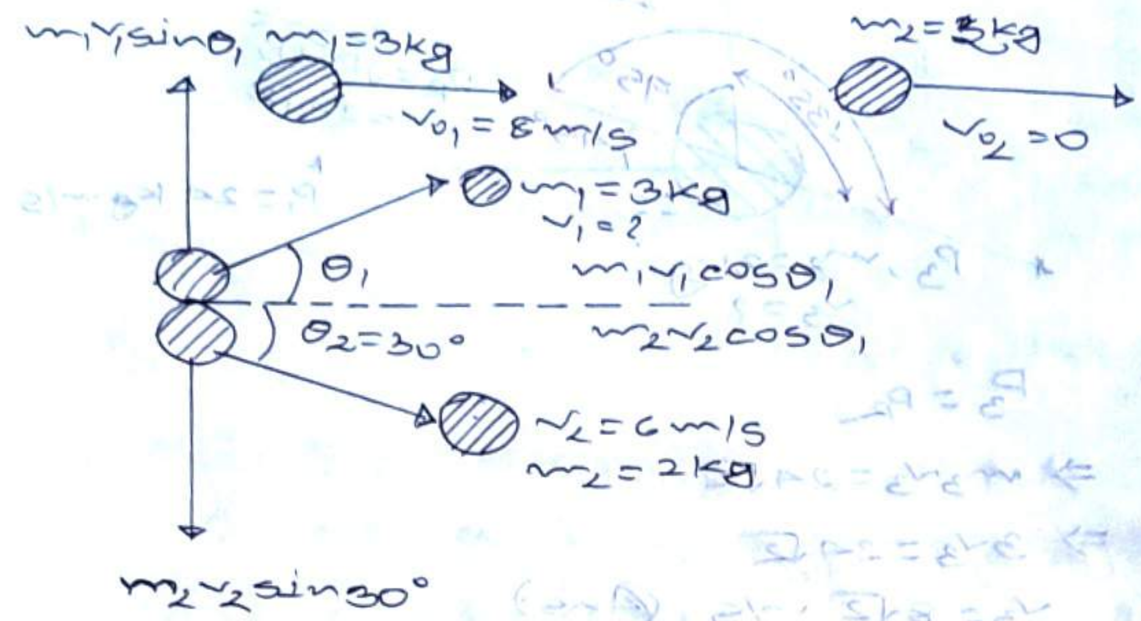
$= 13.9$ m/s

$\tan\theta = \frac{P_2\sin 135^\circ}{P_1 + P_2\cos 135^\circ}$

$\Rightarrow \theta = 78.65°$ উত্তর দিকের সাথে উত্তর-পশ্চিম দিকে

* 8 m/s বেগে গতিশীল 3 ms^{-1} বেগে kg ভরের গোলক 2 kg ভরের একটি স্থির গোলকের সাথে সংঘর্ষে লিপ্ত হলো। সংঘর্ষের পর স্থির গোলকটি বস্তুদ্বয়ের আদি গতিরেখার সাথে 30° কোণে ~~4~~ 6 ms^{-1} বেগে গতিশীল হলে, প্রথম গোলকটি সংঘর্ষের পর কোনটি কোনদিকে যাবে। 65

উঃ



আনুভূমিক বরাবর, $\xrightarrow{+ve}$

$$m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1\cos\theta_1 + m_2v_2\cos 30°$$

$$\Rightarrow 24 = 3v_1\cos\theta_1 + 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore v_1\cos\theta_1 = 4.54 \text{ —— (i)}$$

উলম্ব বরাবর, $\uparrow +ve$

$$0 + 0 = m_1v_1\sin\theta_1 - m_2v_2\sin\theta_2$$

$$\Rightarrow v_1\sin\theta_1 = 2 \text{ —— (ii)}$$

(ii) ÷ (i) করে, $\frac{v_1\sin\theta_1}{v_1\cos\theta_1} = \frac{2}{4.59}$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{2}{4.59}$$

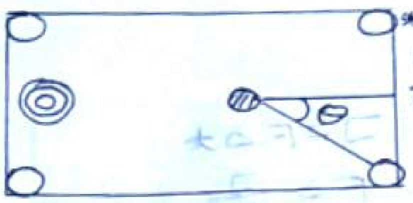
$$\Rightarrow \theta_1 = 23.78°$$

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow v_1^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 2^2 + (4.54)^2$

$v_1 \approx 5 \, m/s$

66

*



* স্পিন থাকবে কী না, জানতে চাইলে θ এর সাথে মিলতে হবে বা বেশি কিছু আছে নাকি দেখতে হবে।

Topic: 03: ঘাতবল (impulsive force):

যদি কোনো বড় মানের বল খুব ক্ষুদ্র সময়ের জন্য কোনো বস্তুর উপর প্রযুক্ত হয়, তবে সেই বলকে ঘাতবল বলা হয়।

$$F = ma$$
$$\Rightarrow F = m\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$$

if, $\Delta t \to 0$, $F \to$ impulsive force.

* ঘাতবল প্রয়োগে বস্তুর বেগের মান ও দিকের খুব দ্রুত পরিবর্তন ঘটে, ফলে বস্তুতে প্রচুর ক্ষয়ক্ষতি সাধিত হয়, তাই ঘাতবলকে ধ্বংসাত্মক বল (Destructive force)

উদা: গাড়িতে গাড়িতে আঘাত, ব্যাটে বল মারা, বিস্ফোরণ ইত্যাদি

* বলের ঘাত (impulse of force): যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা সময়ের সাপেক্ষে কোনো বস্তুর উপর ঘাত বলের প্রভাব জানা যায় তাকে বলের ঘাত বলে।

কোনো বস্তুর উপর 1 sec এ প্রযুক্ত বল F

" " " (Δt) " " " $(F\Delta t)$

$(\Delta t \to 0)$

বলের ঘাত $\boxed{J = F\Delta t}$

ঘাতবল ও তার ক্রিয়াকালের গুণফলই বলের ঘাত।

$$J = F.\Delta t \; [\Delta t \to 0]$$

Unit: $Ns = kgms^{-2}.s = kgms^{-1}$

Dimention: $[J] = [MLT^{-1}]$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{J} &= \vec{F}.\Delta t \\ \vec{J} &= \vec{F}.dt\end{aligned}}$$

$J = \vec{F} dt$

$J = F.\Delta t$

$\therefore F = \dfrac{J}{\Delta t}$

$J = F.\Delta t$

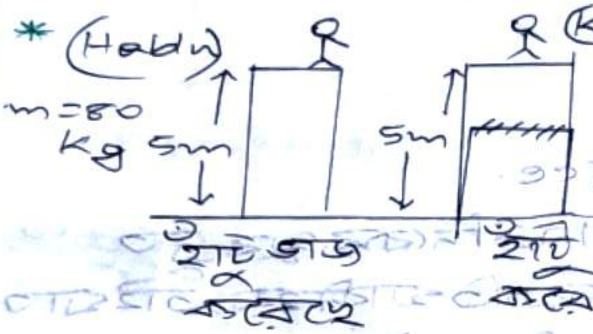
$\Rightarrow J = ma.\Delta t$

$\Rightarrow J = m.\left(\dfrac{v - v_0}{\Delta t}\right)\Delta t$

$\Rightarrow J = mv - mv_0$

$\Rightarrow \boxed{J = P - P_0}$

67

* 

$m = 80kg$

$\Delta t = 0.2 sec$

$$V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 5} = 9.9 \, m/s$$

Hablu:

$J = mv - mv_0$

$= (80 \times 9.9)$

$J = 792 \, kg \, m/s$

$\therefore F_H = \left(\dfrac{J}{\Delta t}\right) = \dfrac{792}{2} = 396$

Kablu:

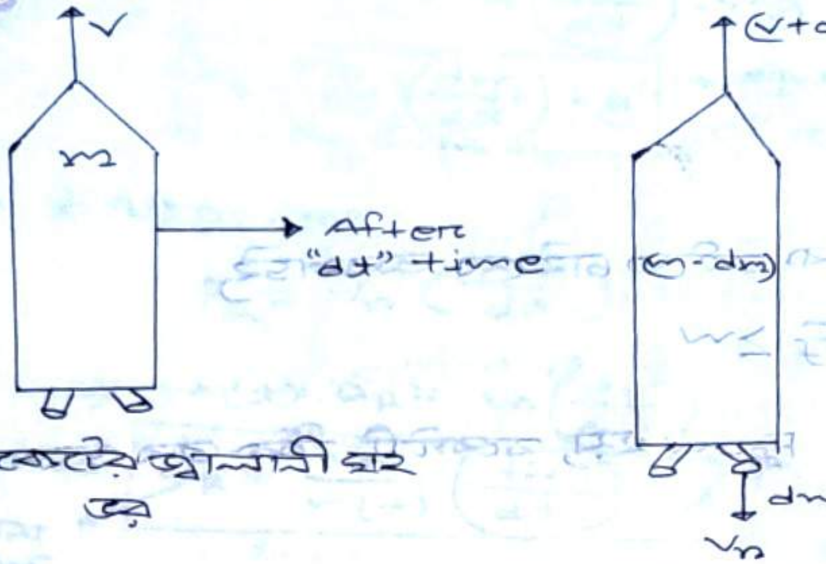
$J = 792 \, kg \, m/s$

$F_K = \dfrac{J}{\Delta t} = \dfrac{792}{0.2} = 3960 \, N$

Topic: 10: Rocket propulsion: (রকেটের গতির সঞ্চারণ)

- → Tsiolkovosky rocket equation
- → For single stage rocket.

68



v_n = রকেট হতে নির্গত বা নিঃসৃত জ্বালানির বেগ। (রকেটের সাপেক্ষে)

m → রকেটের জ্বালানী সহ ভর

* "dt" সময়ে নির্গত জ্বালানী dm

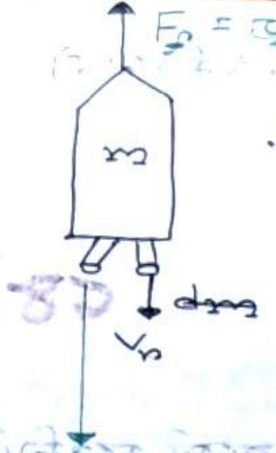
∴ 1 " " " $\left(\frac{dm}{dt}\right)$

$\left(\frac{dm}{dt}\right)$ → জ্বালানি নির্গমনের হার (Kg/s)

* "dt" সময়ে বেগ বৃদ্ধি "dv"

∴ 1 " " " $\left(\frac{dv}{dt}\right)$

∴ রকেটের ত্বরণ $\boxed{a_R = \frac{dv}{dt}}$



F_f = জ্বালানির ঊর্ধ্বমুখী ধাক্কা

$$\therefore F_f = v_r\left(\frac{dm}{dt}\right)$$

রকেট উপরের দিকে উঠতে চাইলে অবশ্যই,

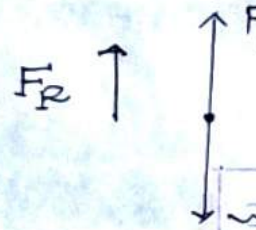
$$F_f \geq w$$

case:01: যদি, $F_f = w$ হয়, রকেটটি ঠিক তার ওজনকে অতিক্রম করবে।

$$F_f = w$$

$$\Rightarrow \boxed{v_r \frac{dm}{dt} = mg}$$

case:02: If, $F_f > w$ হয়, রকেটটি ঊর্ধ্বমুখী লব্ধি বল লাভ করবে।



$F_f > w$

$\therefore$ রকেটের ঊর্ধ্বমুখী লব্ধি বল, $\boxed{F_R = F_f - W}$

$$\boxed{F_R = v_r \frac{dm}{dt} - mg}$$

initial

equation of force of rocket motion

$$\boxed{F_R = v_r \frac{dm}{dt} - m(t)g} \qquad \boxed{m(t) = m_0 - \left(\frac{dm}{dt}\right) \times t}$$

ত্বরণ: initially, $F_R = v_r\left(\frac{dm}{dt}\right) - mg$

অগ্রগামী ত্বরণ $\Rightarrow m a_R = v_r\left(\frac{dm}{dt}\right) - mg$

70

$$\therefore \boxed{a_R = \left(\frac{v_r}{m}\right)\left(\frac{dm}{dt}\right) - g} \rightarrow \text{equation of acceleration of rocket motion}$$

আবার, t সময় পরে,

$$F_R = v_r\left(\frac{dm}{dt}\right) - m(t)g$$

$$\Rightarrow m(t) \cdot a_R = v_r\left(\frac{dm}{dt}\right) - m(t)g$$

$$\Rightarrow \boxed{a_R = \frac{v_r}{m(t)}\left(\frac{dm}{dt}\right) - g} \qquad m(t) = m_0 - \left(\frac{dm}{dt}\right)t$$

অগ্রগামী ত্বরণ

বেগ (velocity): $a_R = \frac{v_r}{m}\left(\frac{dm}{dt}\right) - mg$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{v_r}{m}\left(\frac{dm}{dt}\right) - g$$

$$\Rightarrow dv = \frac{v_r}{m} \cdot \left(\frac{dm}{dt}\right) dt - g\,dt$$

$$\Rightarrow dv = v_r \frac{dm}{m} - g\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = v_r \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} - g\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow [v]_{v_0}^{v} = v_r [\ln m]_{m_0}^{m} - g[t]_0^t$$

$$\Rightarrow [v - v_0] = v_r[\ln m - \ln m_0] - g[t - 0]$$

$$\Rightarrow \boxed{v = v_0 + v_r \ln\frac{m}{m_0} - gt}$$

মহাশূন্যে যাওয়ার সময় v_r (−ve) হিসেবে হবে।

$-v_r \ln \frac{m}{m_0}$ $[\ln x = -\ln \frac{1}{x}]$

$= v_r \ln \frac{m_0}{m}$

$\frac{m}{m_0} < 1$ $\boxed{\ln \frac{m}{m_0} \ (-ve)}$ $\boxed{v < 11.2 \text{ km/s}}$

৭1

* $V = V_0 + v_r \ln \frac{m}{m_0} - gt$

যদি $\boxed{m = m_0}$ $V = V_0 + v_r \ln 1 - gt$

$\boxed{V = V_0 - gt}$

---

* একটি রকেট হতে জ্বালানি নির্গমনের বেগ 10 km/sec এবং জ্বালানি নির্গমনের হার 100 kg/sec; রকেটটির উপর ক্রিয়াশীল ঊর্ধ্বমুখী বল নির্ণয় কর।

উঃ $F_R = v_r \frac{dm}{dt} - \cancel{mg} \to 0$

$F_R = 10^6 N$

$v_r = 10$ km/s $= 10^4$ m/s

$\frac{dm}{dt} = 10^2$ kg/s

* একটি রকেটের ভর 10 টন এবং রকেটের প্রযুক্ত জ্বালানি 30 টন, রকেটটির ঊর্ধ্বমুখী যাত্রাকালে জ্বালানি নির্গমন বেগ 8 km/sec এবং জ্বালানি নির্গমনের হার 100kg/sec রকেটটির জ্বালানি শেষ হওয়া মুহূর্তে এর ঊর্ধ্বমুখী লব্ধি বল নির্ণয় কর।

উঃ শুধুমাত্র রকেটের ভর, $m_R = 10$ Ton $= 10^4$ kg

$F_R = v_r \frac{dm}{dt} - mg$

$= 8\times10^3 \times 10^2 - 10^4 \times 9.8$

$F_R = 7.02 \times 10^5 N$

এখানে,

$m = 10$ টন → কারণ জ্বালানি শেষ হওয়া মুহূর্তে

$v_r = 8$ km/s $= 8\times10^3$ m/s

$\frac{dm}{dt} = 10^2$ kg

* জ্বালানিসহ একটি রকেটের ভর 50 টন, রকেটি হতে জ্বালানি নির্গমনের বেগ 8km/s এবং জ্বালানি নির্গমনের হার 70kg/s রকেটি ঊর্ধ্বমুখী যাত্রা শুরুর 20s পর রকেটের ঊর্ধ্বমুখী লব্ধি বল নির্ণয় কর।

72

উঃ $F_R = V_n \frac{dm}{dt} - m(t)g$

$= (8\times10^3\times70) - (4.86\times10^4\times9.8)$

$F_R = 8.4\times10^4 N$

$V_n = 8 km/s$
$= 8\times10^3 m/s$

$\frac{dm}{dt} = 70 kg/s$

$m(t) = m_0 - \left(\frac{dm}{dt}\right)\times t$
$= 5\times10^4 - 70\times20$
$= 4.86\times10^4$

$\boxed{t = 20sec \quad m_0 = 5\times10^4 kg}$

*** একটি রকেট তার ঊর্ধ্বমুখী যাত্রার প্রথম 2s এ এর ভরের $\frac{1}{50}$ অংশ হারায়, রকেট হতে নির্গত জ্বালানির নির্গমন বেগ 3km/s হলে, রকেটটির ত্বরণ নির্ণয় কর।

উঃ $a_R = \frac{V_n}{m}\frac{dm}{dt} - g$

$= \frac{3\times10^3}{m}\times\frac{\frac{m}{50}}{2} - 9.8$

$= \frac{3\times10^3}{100} - 9.8$

$= 30 - 9.8$

$a_R = 20.2 m/s^2$

initial

$V_n = 3km/s$
$= 3\times10^3 m/s$

$dm = \frac{m}{50}$

$dt = 2sec$

2sec পরিবর্তন:

$\frac{dm}{dt} = \frac{\frac{m}{50}}{2} = \frac{m}{100}$

$m(t) = m - \frac{m}{100}\times2$
$= m - \frac{m}{50}$

$a_R = \frac{V_n}{\frac{49m}{50}}\times\frac{\frac{m}{50}}{2} - 9.8$

$= \frac{3\times10^3}{2\times49} - 9.8$

$a_R = 20.8 m/s$

73

* একটি রকেটের পরিমুক্ত ভর 4000 kg, রকেটটি হতে জ্বালানি নির্গমনের হার 15 kg/s ও জ্বালানি নির্গমনের বেগ 8 km/s হলে 2 minit পর রকেটটির ত্বরণ নির্ণয় কর।

উ: $a_R = \frac{v_r}{m(t)} \frac{dm}{dt} - g$

$= \left(\frac{8\times10^3}{2200} \times 15 - 9.8\right) ms^{-2}$

$a_R = 44.745 ms^{-2}$

$\frac{dm}{dt} = 15 kg/s$

$v_r = 8 km/s = 8\times10^3 m/s$

$m(t) = m - \frac{dm}{dt}\times t$

$= 4000 - 15\times120$

$= 2200 kg$

(PSLV)

* জ্বালানিসহ একটি রকেটের ভর 10 টন, রকেট হতে জ্বালানি নির্গমনের বেগ 7 km/s, রকেট হতে জ্বালানি নির্গমনের হার কত হলে রকেটটি ঠিক তার ওজনকে অতিক্রম করতে সক্ষম হবে?

উ: $F_f = mg$

$\Rightarrow v_r \frac{dm}{dt} = mg$

$\Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{mg}{v_r} = 14$

$m = 10^4 kg$

$v_r = 7\times10^3 m/s$

* রকেটটি হতে জ্বালানি নির্গমনের হার কত হলে, রকেটটি অভিকর্ষজ ত্বরণ হতে দ্বিগুণ ত্বরণ লাভ করবে।

উ: $a_R = \frac{v_r}{m}\left(\frac{dm}{dt}\right) - g$

$\Rightarrow 2g = \frac{v_r}{m} \frac{dm}{dt} - g$

$\Rightarrow \frac{dm}{dt} = 3g \times \frac{m}{v_r}$

$= 3g \times \frac{10^4}{7\times10^3}$

* একটি রকেটের ভর 5 টন এবং জ্বালানির ভর 25 টন, রকেটটি হতে জ্বালানি নির্গমনের বেগ 8 m/s এবং জ্বালানি নির্গমনের হার 50 kg/s রকেটটি স্থির অবস্থান থেকে যাত্রা শুরু করলে, জ্বালানি শেষ হওয়া মুহূর্তে রকেটের বেগ নির্ণয় কর।

উঃ:

$$v = \overset{0}{\cancel{v_0}} + v_r \ln \frac{m}{m_0} - gt$$

$$= (-8000) \ln \frac{5\times10^3}{3\times10^4} - (9.8\times500)$$

$$= 9.4\times10^3 \, m/s$$

$$= 9.4 \, km/s \quad \text{(Ans.)}$$

$$m = m_0 - \left(\frac{dm}{dt}\right)\times t$$

$m = 5$ Ton $= 5\times10^3$ kg

$\frac{dm}{dt} = 50$ kg/s

50kg জ্বালানি নিঃসরণে 1sec

∴ 1 " " " " $\frac{1}{50}$ "

∴ 25×10^3 " " " " $\frac{25\times10^3}{50}$ "

$= 500$sec

$v_r = -8000$ m/s

Topic: 11:

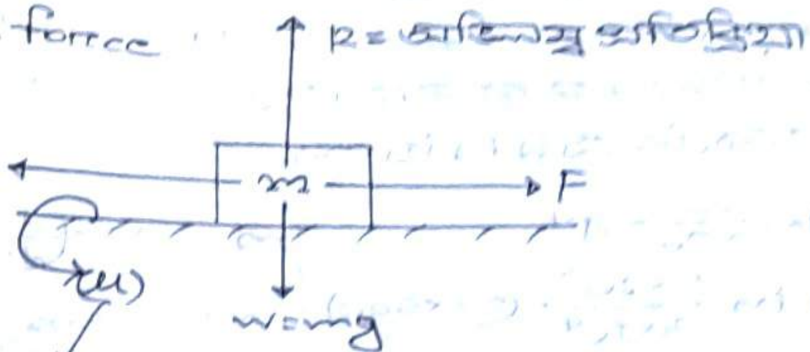
Friction (ঘর্ষণ): কোনো বস্তু কোনো তলের উপর দিয়ে গতিশীল হওয়ার সময় গতির বিপরীতে বাধা অনুভব করে তাকে ঘর্ষণ বলে।

* এ ঘর্ষণজনিত কারণে যে বল অনুভূত হয় তাকে বলা হয় ঘর্ষণ বল।

ঘর্ষণ (Friction)

- স্থিতি ঘর্ষণ (Static friction) (F_s)
- গতীয় ঘর্ষণ (Kinetic friction) F_k
  - আবর্ত ঘর্ষণ (Rolling friction)
  - বিসর্প ঘর্ষণ (Sliding friction) (Fluid friction)

Frictional force → F_f



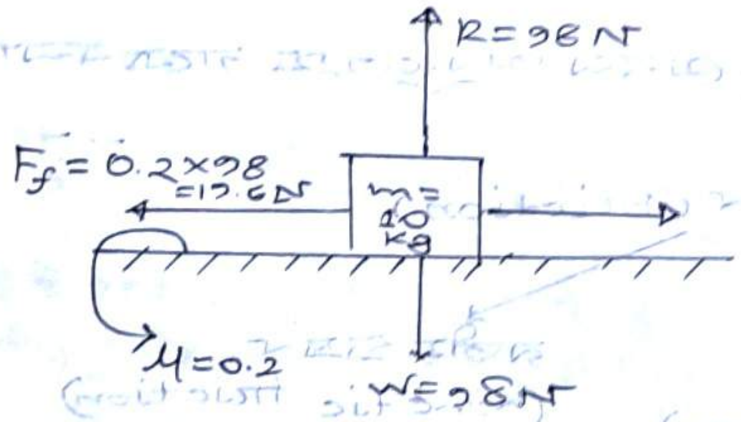
ঘর্ষণ গুণাঙ্ক
(co-efficient of friction)
(এটি একটি তলের মসৃণ বৈশিষ্ট্য)

* প্রমাণ করা যায়, $\frac{F_f}{R} = \mu$ $[0 < \mu < 1]$

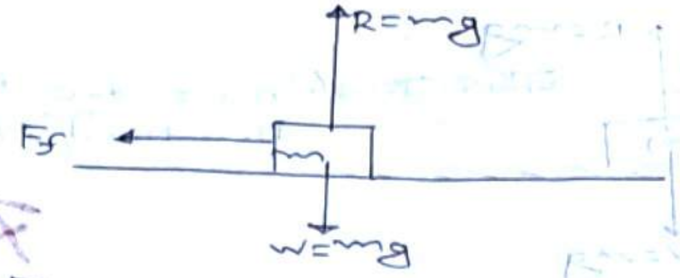
$\therefore \boxed{F_f = \mu R}$

★ অভিলম্ব প্রতিক্রিয়াকে ঘর্ষণগুণাঙ্ক দিয়ে গুণ করলে ঘর্ষণবল পাওয়া যায়।

*



*



76

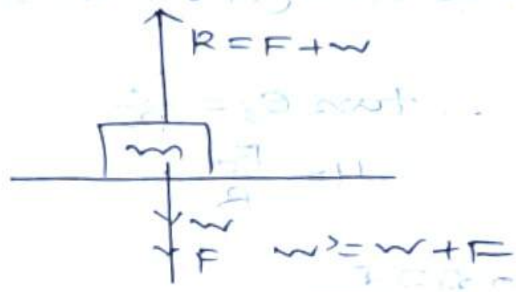
$F_f = \mu R$

$\boxed{F_f \propto R}$ $\boxed{\mu = const}$ → এটিই আমাদের সূত্র, এখান থেকে সূত্র $F_f = \mu R$ আসছে।

★ নির্দিষ্ট ঘর্ষণগুণাঙ্ক বিশিষ্ট কোনো তলে ঘর্ষণবল অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার সমানুপাতিক।

$$\therefore \frac{F_f}{R} = const$$

$$\therefore \boxed{\frac{F_{f_1}}{R_1} = \frac{F_{f_2}}{R_2}}$$



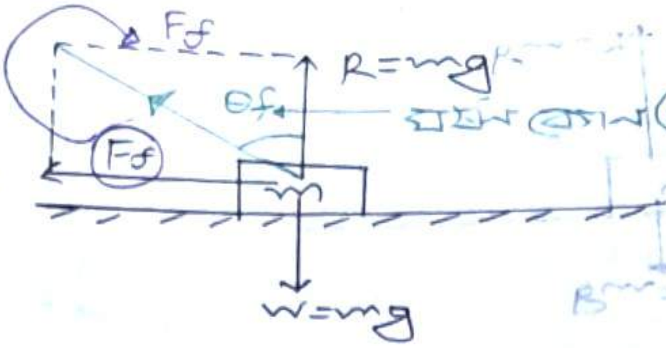
ঘর্ষণ গুণাঙ্ক:(μ):

$\mu = \frac{F_f}{R}$ এখন, $R = 1N$ $\boxed{\mu = F_f}$

কোনো তলে কোনো বস্তুর উপর একক অভিলম্বিক প্রতিক্রিয়া জন্য ঐ বস্তুতে যে পরিমাণ ঘর্ষণবল অনুভূত হয়, তাকে ঐ তলের ঘর্ষণ গুণাঙ্ক বলা হয়।

* কোনো তলের ঘর্ষণ গুণাঙ্ক 0.3 বলতে কী বুঝ?

উ: ... বোঝায় যে, ঘর্ষণযুক্ত তলে কোনো বস্তুর উপর 1N অভিলম্বিক প্রতিক্রিয়ার জন্য ক্রিয়াশীল ঘর্ষণবল 0.3N।



ঘর্ষণ কোণ (Angle due to friction)(fri

ঘর্ষণ কোণ: ঘর্ষণ বল ও অভিলম্বিক প্রতিক্রিয়ার লব্ধি, অভিলম্বিক প্রতিক্রিয়ার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ঐ তলের ঘর্ষণ কোণ বলা হয়।

$$\therefore \tan\theta_f = \frac{F_f}{R} \qquad \boxed{\mu = \tan\theta_f}$$

$$\therefore \mu = \frac{F_f}{R}$$

স্থিতি ঘর্ষণ		গতীয় ঘর্ষণ
F_s	$[F_s > F_k]$	F_k
μ_s	$(\mu_s > \mu_k)$	μ_k
θ_s	$[\theta_s > \theta_k]$	θ_k

$$\frac{F_k}{R} = \mu_k$$

$$\frac{F_s}{R} = \mu_s$$

$$\boxed{F_k = \mu_k R}$$

$$\boxed{F_s = \mu_s R}$$

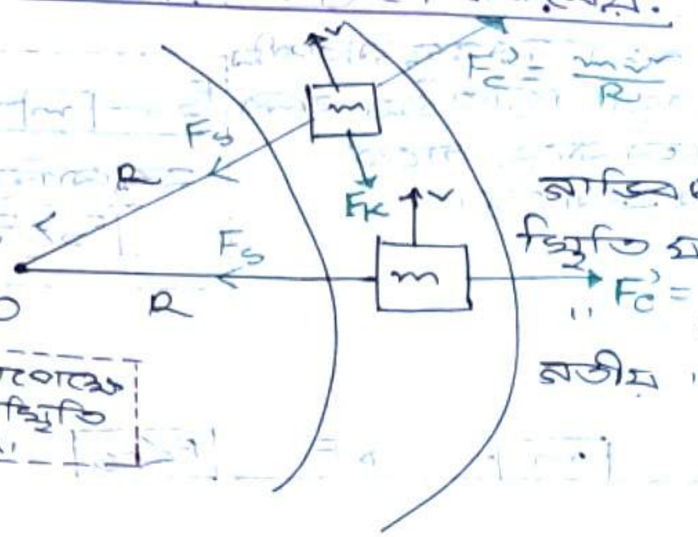
$$\boxed{\frac{F_k}{R} = \tan\theta_k}$$

$$\boxed{\frac{F_s}{R} = \tan\theta_s}$$

$$\boxed{\mu_k = \tan\theta_k}$$

$$\boxed{\mu_s = \tan\theta_s}$$

* সমতল রাস্তায় গাড়ির নিরাপদে বাঁক নেয়:



78

গাড়ির চাকার সাথে রাস্তার স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক $= \mu_s$

গতীয় " " " $= \mu_k$

রাস্তার কেন্দ্রের বাহিরে গাড়িটি ছিটকে যাবে ফলে স্থিতি ঘর্ষণ কাজ করবে।

For safe turning,

$$F_c' \le F_s \qquad \boxed{F_s = \mu_s mg}$$

$$\Rightarrow \frac{mv^2}{R} \le \mu_s mg$$

$$\Rightarrow v^2 \le \mu_s gR$$

$$\Rightarrow v \le \sqrt{\mu_s Rg}$$

সর্বোচ্চ বেগ, $\boxed{V_{max} = \sqrt{\mu_s Rg}}$

* 100m ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট কোনো সমতল বৃত্তাকার রাস্তায় একটি গাড়ি নিরাপদে বাঁক নিতে চাইলে গাড়িটি সর্বোচ্চ কত বেগে চলতে পারবে? যেখানে গাড়ির চাকার সাথে রাস্তার স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক 0.2

উ:

$R = 100m$
$\mu_s = 0.2$
$g = 9.8$

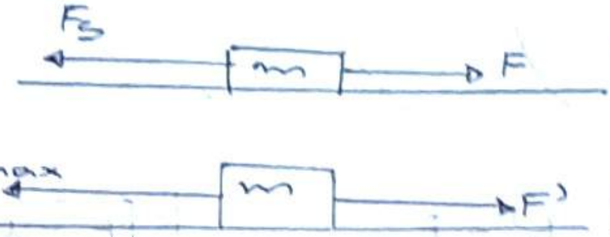
$$V_{max} = \sqrt{0.2 \times 100 \times 9.8}$$
$$= 14 \text{ m/s}$$

* **সীমাস্থিতিক ঘর্ষণ বল (Limiting static frictional force)**:- কোনো তলে স্থির বস্তু গতিশীল হওয়ার উপক্রম হলে বস্তুটি স্থিতি ঘর্ষণ বলের যে সর্বোচ্চ মান অর্জন করে, তাকে সীমাস্থিতিক ঘর্ষণ বল বলা হয়।

$F_s \longleftarrow \boxed{m} \longrightarrow F_{applied}$

বস্তুকে স্থির রাখতে, $\boxed{F_s > F_{applied}}$

79



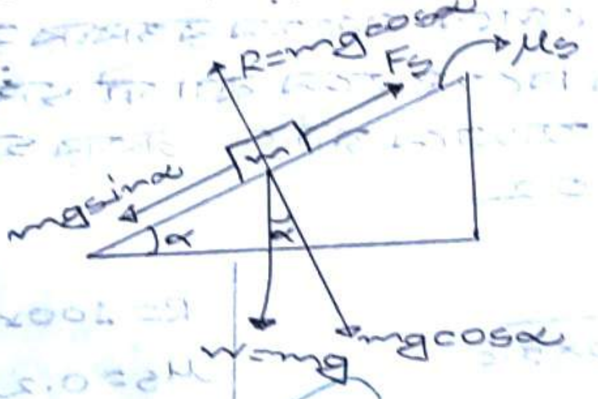
$\boxed{F \leq F_s}$

$\boxed{F' \leq F_{smax}}$

* সীমাস্থিতিক স্থিতি ঘর্ষণ বল, স্থিতি ঘর্ষণ বলের সর্বোচ্চ মান।

নিশ্চল কোণ (Angle of repose): (θ_n):
কোনো আনত তলে যে আনত কোণের জন্য কোনো বস্তু গতিশীল হওয়ার উপক্রম হয়, আনত তলের যে আনত কোণকে নিশ্চল কোণ বলা হয়।

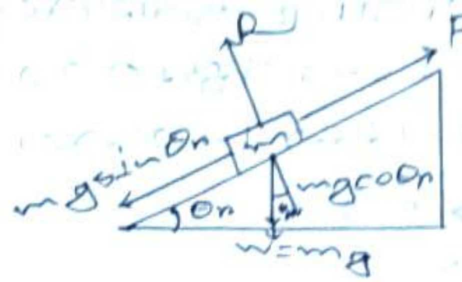
case:01:



$\boxed{mg\sin\alpha \leq F_s}$ (স্থির)

$\boxed{R = mg\cos\alpha}$

case: 02:



$F_{smax} = mg\sin\theta_n$ —— (i)

$R = mg\cos\theta_n$ —— (ii)

80

(i) ÷ (ii)

$$\frac{F_{smax}}{R} = \frac{mg\sin\theta_n}{mg\cos\theta_n}$$

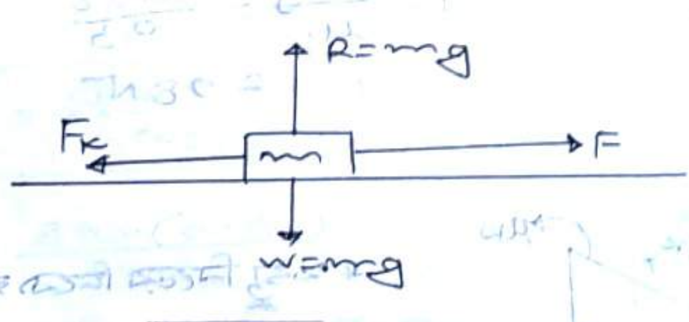
$$\Rightarrow \boxed{\mu_s = \tan\theta_n}$$

$$\Rightarrow \tan\theta_s = \tan\theta_n$$

$$\therefore \boxed{\theta_s = \theta_n}$$

∴ কোনো আনত তলের নিশ্চল কোণ ঐ তলের স্থিতি ঘর্ষণ কোণের সমান।

সমতল তলে গতীয় ঘর্ষণ বল:



গতিশীল অবস্থায়,

$F \geq F_k$

case: 01: $\boxed{F = F_k}$

$\boxed{F - F_k = 0}$

$\boxed{\Sigma F = 0}$

∴ বস্তু সমবেগে গতিশীল হবে

case: 02:

$F > F_k$

$\boxed{\Sigma F = ma}$

$\Rightarrow \boxed{F - F_k = ma}$

$\Rightarrow a = \frac{F - F_k}{m} = \frac{F - \mu_k mg}{m}$

$\therefore \boxed{a = \frac{F - \mu_k mg}{m}}$

* ঘর্ষণযুক্ত একটি সমতল রাস্তায় গাড়িটি সমবেগে গতিশীল। গাড়িটির ভর 12000kg, গাড়িটির উপর ইঞ্জিন কর্তৃক প্রযুক্ত বল 2500N, উক্ত রাস্তার ঘর্ষণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

উঃ ~~$\sum F = ma$~~

~~$\Rightarrow F - F_k = ma$~~

~~$\Rightarrow a = \frac{F - \mu_k mg}{mg}$~~

~~$\Rightarrow$~~

$\xrightarrow{2500N}$

$F = F_k$

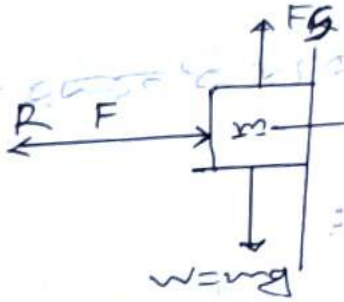
$\Rightarrow \cancel{mg=}\ \mu_k mg = 2500$

$\Rightarrow \mu = 0.2$

81

* 0.3 ঘর্ষণগুণাঙ্ক বিশিষ্ট কোনো উলম্ব দেয়ালের সাথে 3kg ভরের একটি ব্লক কে স্থির অবস্থায় রাখতে চাইলে, দেয়ালের সাথে লম্বভাবে কত বল প্রয়োগ করতে হবে?

উঃ



$F_s = mg$

$\Rightarrow \mu_s R = mg$

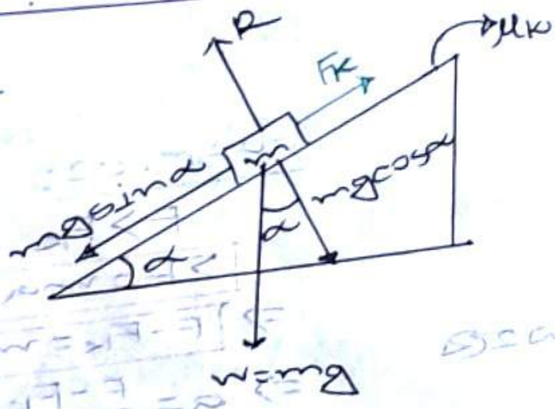
$\Rightarrow \mu_s F = mg$

$\therefore F = \frac{mg}{\mu_s} = \frac{3 \times 9.8}{0.3}$

$= 98N$

আনত তলের ঘর্ষণ:

case: 01:



* বস্তু নিচের দিকে গতিশীল

class 10

$\sum F = mg\sin\alpha$

$\Rightarrow ma = mg\sin\alpha$

$\Rightarrow \boxed{a = g\sin\alpha}$

$mg\sin\alpha \geq F_k$

* observation 1: $\boxed{mg\sin\alpha = F_k}$ $\therefore \Sigma F = 0$

∴ বস্তু সমবেগে নিচের দিকে পড়বে।

82

* obs-2:

$mg\sin\alpha > F_k$

$\Sigma F = mg\sin\alpha - F_k$ $\left[\begin{array}{l} F_k = \mu_k R \\ F_k = \mu_k mg\cos\alpha \end{array}\right]$

$\Rightarrow ma = mg\sin\alpha - \mu_k mg\cos\alpha$

$\therefore \boxed{a = g\sin\alpha - \mu_k g\cos\alpha}$ → সমত্বরিত সূত্র

$a = g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)$ $\left[\mu_k = \tan\theta_k = \frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k}\right]$

$= g\left(\sin\alpha - \frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k}\cos\alpha\right)$

$= g\left(\frac{\sin\alpha\cos\theta_k - \cos\alpha\sin\theta_k}{\cos\theta_k}\right)$

$= g\,\frac{\sin(\alpha-\theta_k)}{\cos\theta_k}$

$$\boxed{a = \frac{g\sin(\alpha-\theta_k)}{\cos\theta_k}}$$ ***

* $a = \frac{g\sin(\alpha-\theta_k)}{\cos\theta_k}$

Now, যদি, যদি $\alpha = \theta_k$

$\therefore \alpha - \theta_k = 0$

$\Rightarrow \sin(\alpha-\theta_k) = 0$

$\boxed{a=0}$

অনুরূপভাবে,

সমবেগে চললে, $a=0$

$\frac{g\sin(\alpha-\theta_k)}{\cos\theta_k} = 0$

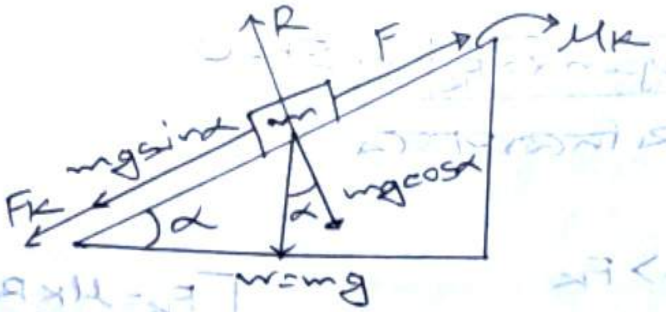
$\Rightarrow \sin(\alpha-\theta_k) = 0$

$\Rightarrow \alpha - \theta_k = 0$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \theta_k}$

* আনত তল বরাবর বস্তু সমবেগে গতিশীল হবে। অর্থাৎ কোনো আনত তলের সাথে আনত কোণ ও গতীয় ঘর্ষণ কোণ সমান হলে বস্তু সমবেগে গতিশীল হয়।

case:02: বস্তু নিম্নের দিকে গতিশীল হলে:



বস্তু আনত তল বরাবর উপরের দিকে গতিশীল হতে চাইলে,

$$F \geq mg\sin\alpha + F_k$$

* observation 1: $F = mg\sin\alpha + F_k$

$\therefore \boxed{\Sigma F = 0}$

∴ বস্তু সমবেগে উপরের দিকে যাবে।

* obs-2: $F > (mg\sin\alpha + F_k)$

$$\Sigma F = F - (mg\sin\alpha + F_k)$$

$$\Rightarrow ma_R = ma - (mg\sin\alpha + \mu_k mg\cos\alpha)$$

$$\boxed{a_R = a - (g\sin\alpha + \mu_k g\cos\alpha)}$$

a_R → Resultant

* 10 টন (1টন = 1000kg) ভরের একটি ট্রাক 15° আনত কোণ বিশিষ্ট কোনো আনত তল বরাবর 36 km/h সমবেগে উপরের দিকে গতিশীল। প্রতি 100 kg ভরের জন্য ট্রাকটির উপর ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ বলের মান 10N হলে, ট্রাকটির ক্ষমতা নির্ণয় কর।

উ: $\Sigma F = 0$

$\Rightarrow F = mg\sin\alpha + F_K$

$= 10000 \times 9.8 \times \sin 15 + 1000$

$= 26364.3N$

$m = 10000kg$

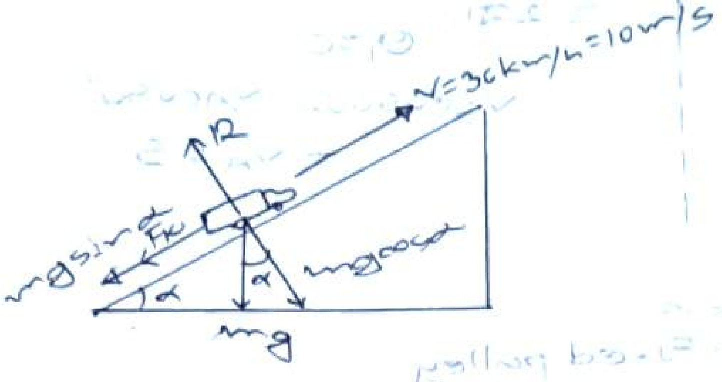
$F_K = 1000N$

power

$P = F v$

$= (263643 \times 10)$ watt

$= 263643$ watt



Topic: 12: সংযুক্ত বস্তুর গতি (constrain motion):-

→ Rope or rod constrain (দড়ি বা দণ্ড স্বীকার্য)

→ Pulley constrain (কপিকল স্বীকার্য):-

* সংখ্যারেখায় লেখ আকারে নির্ণয় কর

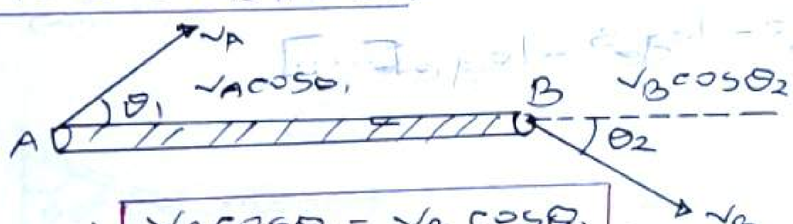
$x \in \mathbb{Z}$

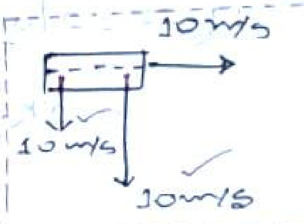
$-36 \le x \le 35$

$-36, -35, \ldots, 35$

দৃঢ় বস্তু: যেকোনো দুইটি কণার আপেক্ষিক বেগ 0

Rope or rod constrain:

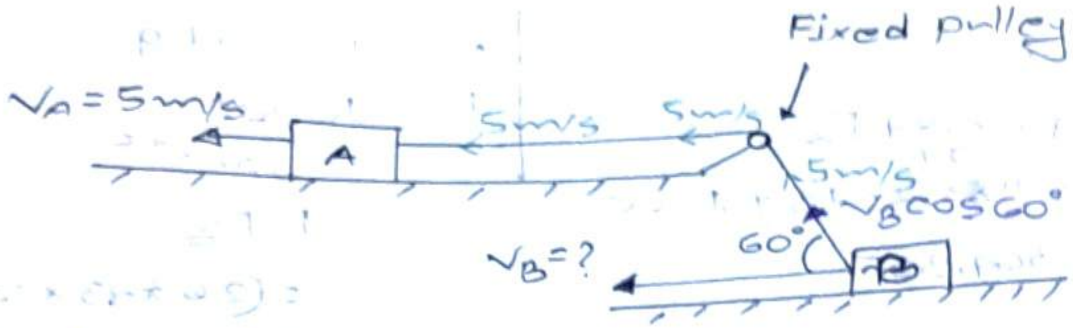




$\therefore \boxed{v_A\cos\theta_1 = v_B\cos\theta_2}$ → দৈর্ঘ্য বরাবর

*কোনো অপ্রসারণশীল সুতা বা দন্ডের দৈর্ঘ্য বরাবর প্রতিটি কণার বেগের উপাংশ সমান হবে।

*



$V_B \cos 60° = 5$

$\Rightarrow V_B \times \frac{1}{2} = 5$

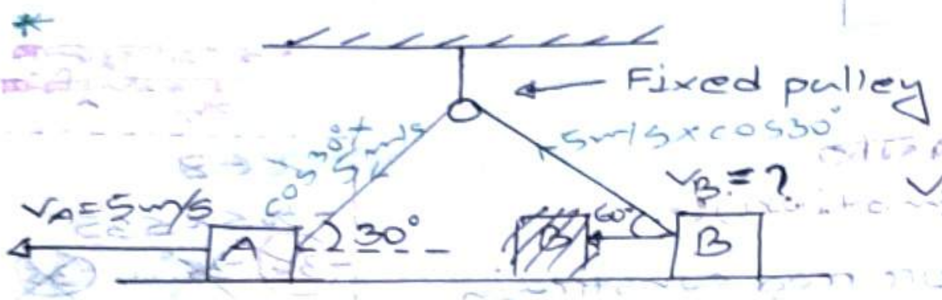
$\Rightarrow V_B = 10 m/s$

অথবা, $\theta_1 = 0$

$V_B \cos 60° = V_A \cos 0°$

$= V_A = 5$

*



$V_B \cos 60° = V_A \cos 30°$

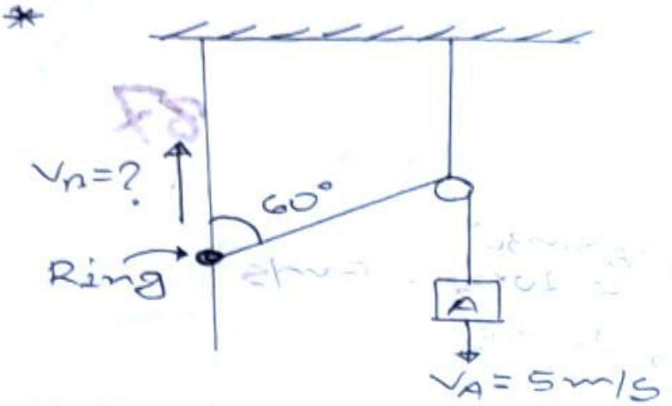
— x —

$\log_e 11 = 2\log_e x - \log_e 3 \left\{ \left(\frac{4}{x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x}\right)^4 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{x}\right)^6 + \dots \right\}$

$= 2\log_e x - \log_e 3 - \log_e [\dots]$

lo

*

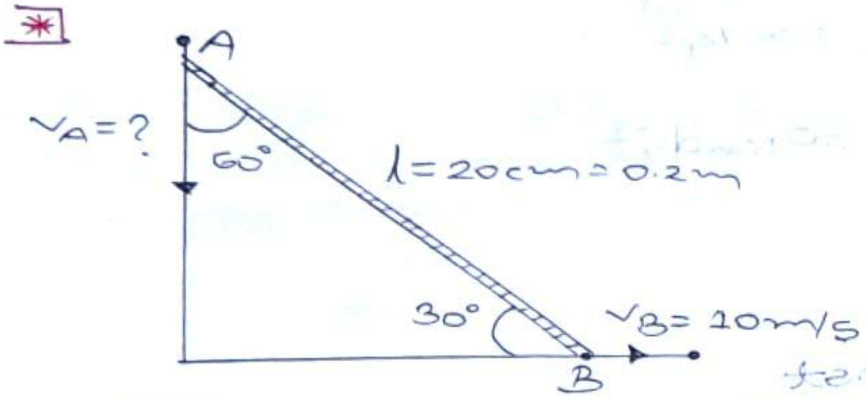


উ: ~~তাহলে~~ $v_r \cos 60^\circ = 5$

$\Rightarrow v_r \cdot \frac{1}{2} = 5$

$\Rightarrow v_r = 10$

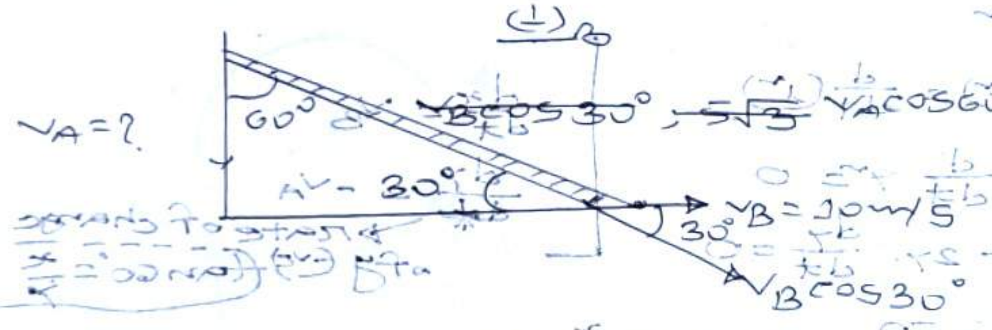
*



(i) চিত্রে, A প্রান্তের বেগের মান নির্ণয় কর?

(ii) যদি AB এর দৈর্ঘ্য 20cm হয় তবে B বিন্দুর সাপেক্ষে A বিন্দুর কৌণিক বেগ নির্ণয় কর।

(i)

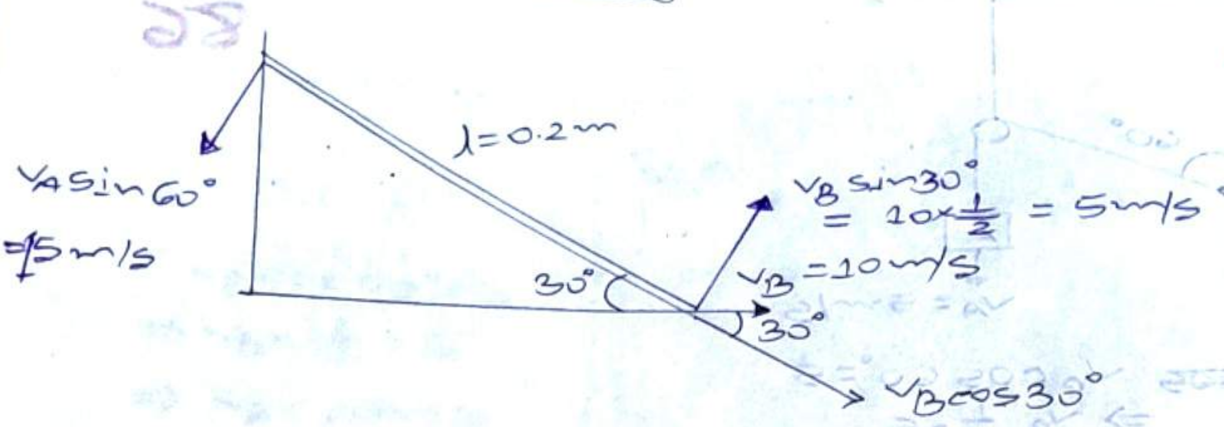


$v_A \cos 60^\circ = v_B \cos 30^\circ$

$\Rightarrow v_A \cdot \frac{1}{2} = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow v_A = 10\sqrt{3}$

(ii) B

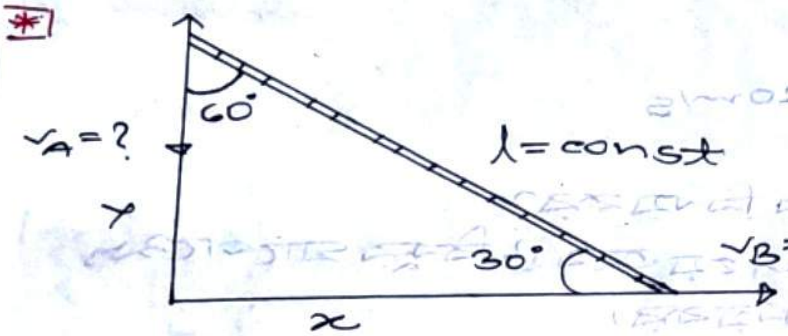


∴ দন্ড বরাবর আপেক্ষিক বেগ,

$$v_{AB} = v_A - v_B = 10\,m/s$$

$$\therefore \omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{l} = \frac{10}{0.2} = 50\,rad\,s^{-1}$$

*



$$x^2 + y^2 = l^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dt}(l^2)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}x^2 + \frac{d}{dt}y^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow x v_B - y v_A = 0$$

$$\Rightarrow x v_B - y v_A = 0$$

$$\Rightarrow y v_A = x v_B$$

$\frac{dx}{dt} = v_B$

$\frac{dy}{dt} = -v_A \rightarrow$ rate of change of y (-ve)

$\tan 60^\circ = \frac{x}{y}$

$$\Rightarrow v_A = \frac{x}{y} v_B$$

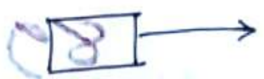
$$= \tan 60^\circ \times (10)$$

$$= \sqrt{3} \times 10$$

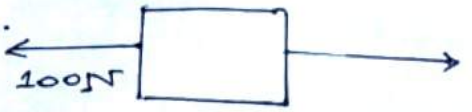
$$v_A = 10\sqrt{3}$$

* কপিকল (Pulley):

টান বল:

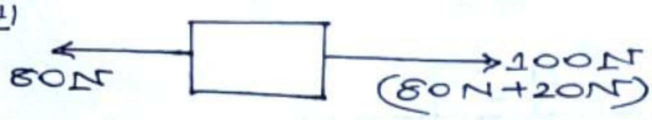
i. 

$\Sigma F = 100$
$T = 0$

ii. 

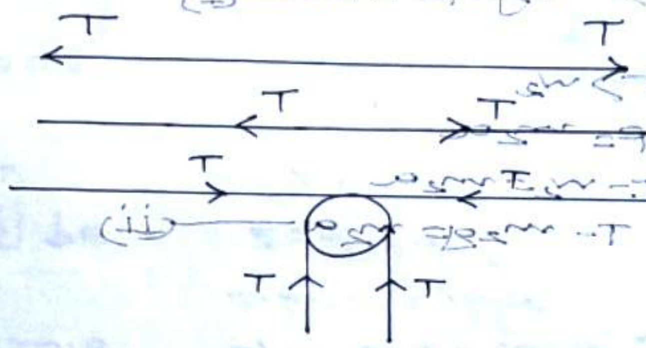
$\Sigma F = 0$
$\boxed{T = 100}\,N$

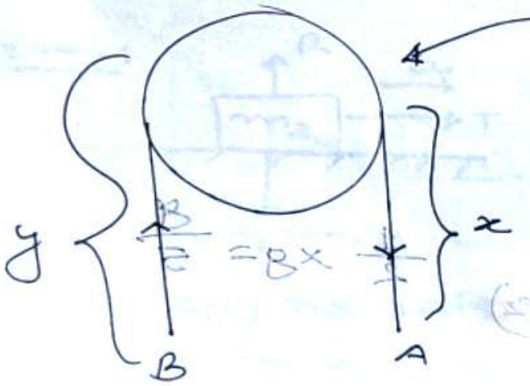
* কোনো বস্তুর দুই বিপরীত পাশে ক্রিয়াশীল টানবলদ্বয় পরস্পর সমান ও বিপরীতমুখী।

iii) 

$\Sigma F = 20$
$T = 80N$

* কোনো বস্তুর দুই বিপরীত পাশে ক্রিয়াশীল হলে, ছোট বলের মানটিই হবে টান বল। বলদ্বয়ের পার্থক্যের মানের জন্য বস্তুটি ত্বরণ লাভ করবে।





fixed pulley → frictionless

$x + y = l$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(l)$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0$

$\Rightarrow v_A + v_B = 0$

$\Rightarrow \boxed{v_A = -v_B}$

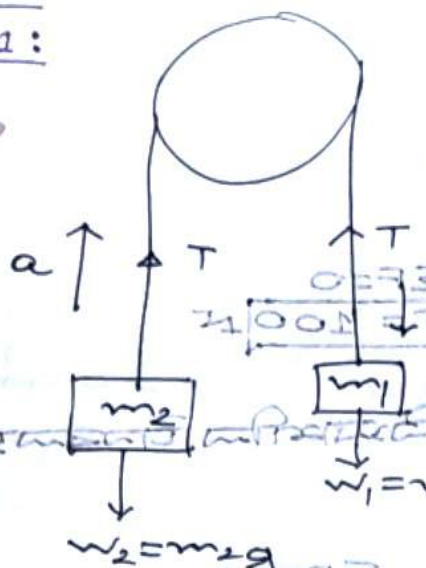
$\Rightarrow \boxed{|v_A| = |v_B|}$ $\quad |a_A| = |-a_B|$

$\boxed{a_A = -a_B}$

৪৪

case:01:

88

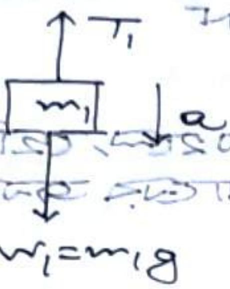


$\boxed{m_1 > m_2}$

89

unknown: a, T

$\underline{m_1}$:



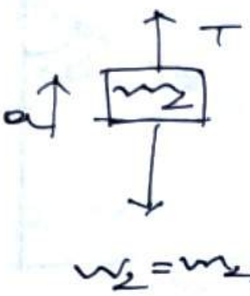
$w_1 > T$

$\Sigma F = m_1 a$

$\Rightarrow w_1 - T = m_1 a$

$\Rightarrow m_1 g - T = m_1 a$ —— (i)

$\underline{m_2}$:



$T > w_2$

$\Sigma F = m_2 a$

$\Rightarrow T - w_2 = m_2 a$

$\Rightarrow T - m_2 g = m_2 a$ —— (ii)

(i) + (ii),

$m_1 g - T = m_1 a$

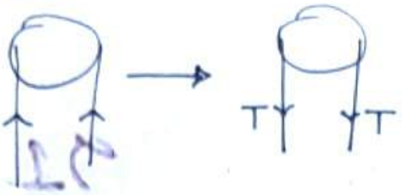
$T - m_2 g = m_2 a$

$\Rightarrow g(m_1 - m_2) = (m_1 + m_2) a$

$\Rightarrow \boxed{a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) g}$ $(m_1 > m_2)$

$\boxed{T = \left(\frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g}$ $(m_1 > m_2)$

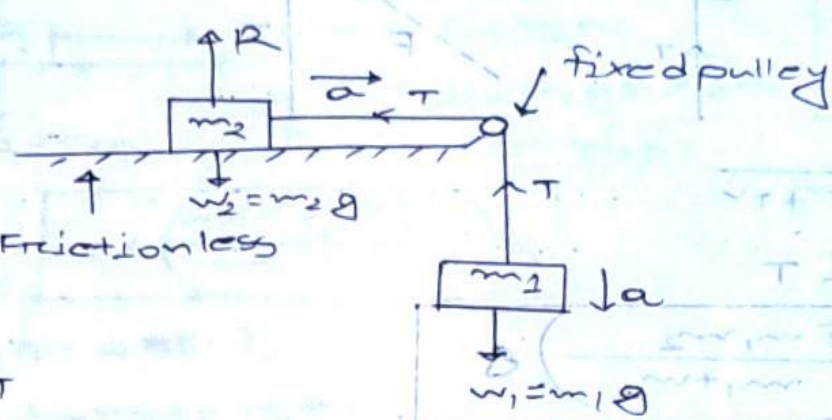
ক)



∴ কপিকলের উপর মোট প্রযুক্ত বল, $F = 2T = 2\left(\frac{2m_1 m_2}{m_1+m_2}\right) g$

$$\boxed{\therefore F = \left(\frac{4m_1 m_2}{m_1+m_2}\right) g}$$

case: 02:



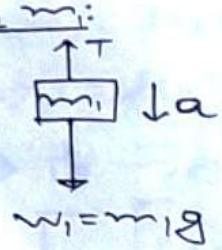
$m_1 > m_2$

Unknown:

ত্বরণ = a

সুতার টান = T

From m_1:



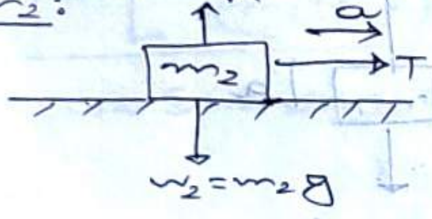
$w_1 > T$

$\Sigma F = m_1 a$

$\Rightarrow w_1 - T = m_1 a$

$\Rightarrow m_1 g - T = m_1 a$ —— (i)

For m_2:



$T = m_2 a$ —— (ii)

(ii) এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$m_1 g - m_2 a = m_1 a$

$\Rightarrow m_1 g = (m_1 + m_2) a$

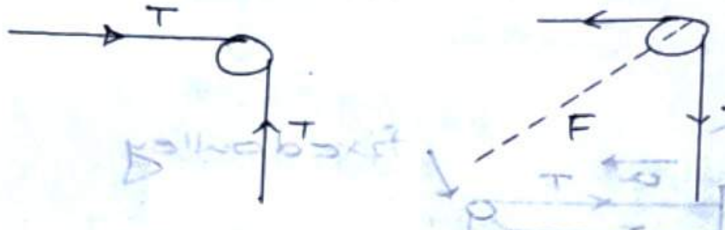
$$\Rightarrow \boxed{a = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) g}$$

$a = \frac{m_1}{m_1+m_2} g$, (ii) নং এ বসাই,

$T = m_2 \left(\frac{m_1}{m_1+m_2} \right) g$

$$\boxed{T = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \right) g}$$

কপিকলের উপর প্রযুক্ত বল:

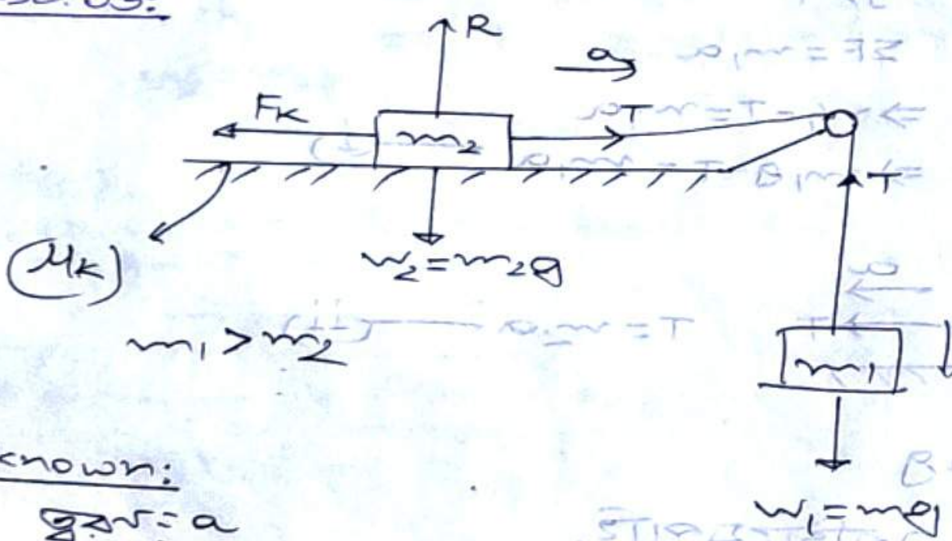


$F = \sqrt{T^2 + T^2}$

$F = \sqrt{2}\, T$

$$\therefore \boxed{F = \left(\frac{\sqrt{2}\, m_1 m_2}{m_1+m_2} \right) g}$$

Case: 03:



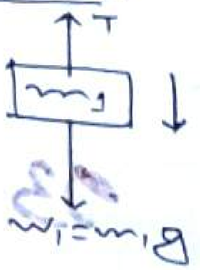
unknown:

ত্বরণ = a

সুতার টান = T

92

For m_1:



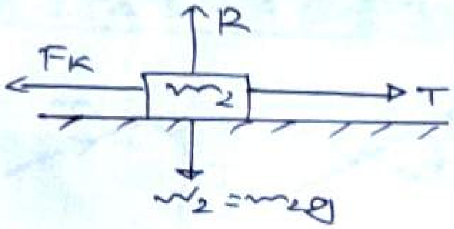
$$w_1 > T$$

$$\Sigma F = m_1 a$$

$$\Rightarrow w_1 - T = m_1 a$$

$$\Rightarrow m_1 g - T = m_1 a \quad \text{——— (i)}$$

For m_2:



$$T > F_K$$

$$\Sigma F = m_2 a$$

$$\Rightarrow T - F_K = m_2 a$$

$$\Rightarrow T - \mu_K m_2 g = m_2 a \quad \text{——— (ii)}$$

$F_K = \mu_K R$
$F_K = \mu_K m_2 g$

(i) + (ii) করে, $\boxed{a = \left(\dfrac{m_1 - \mu_K m_2}{m_1 + m_2}\right) g}$

a এর মান (ii) নং এ বসাই,

$$T - \mu_K m_2 g = m_2 a$$

$$\Rightarrow T = \mu_K m_2 g + m_2 a$$

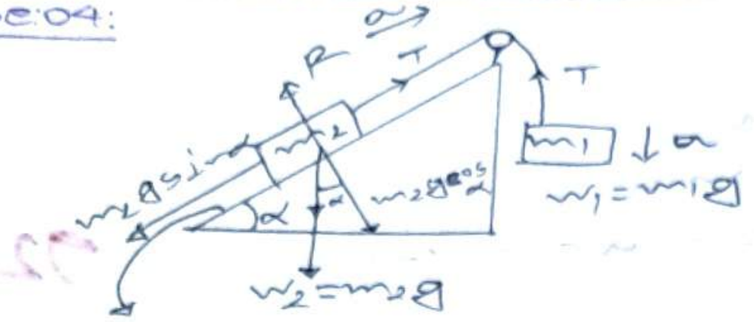
$$\Rightarrow T = \mu_K m_2 g + m_2 \left(\frac{m_1 - \mu_K m_2}{m_1 + m_2}\right) g$$

$$\Rightarrow T = m_2 g \left[\mu_K + \frac{m_1 - \mu_K m_2}{m_1 + m_2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \left[\frac{(1+\mu_K) m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}\right] g}$$

কপিকলের উপর প্রযুক্ত বল, $\sqrt{2}\, T = F$

Case:04:



Frictionless

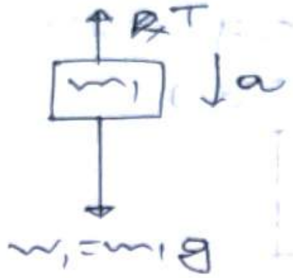
$w_1 > w_2$

Unknown:

ত্বরণ = a

সুতার টান = T

For m_1:



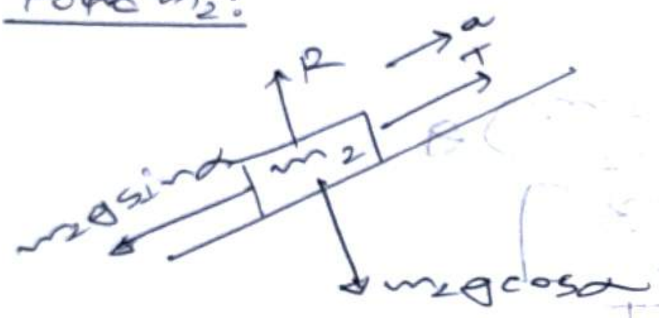
$w_1 > T$

$\Sigma F = m_1 a$

$\Rightarrow w_1 - T = m_1 a$

$\Rightarrow m_1 g - T = m_1 a$ —— (i)

For m_2:



$T > m_2 g \sin\alpha$

$\Sigma F = m_2 a$

$\Rightarrow T - m_2 g \sin\alpha = m_2 a$ —— (ii)

(i)+(ii), $(m_1 - m_2 \sin\alpha) g = (m_1 + m_2) a$

$$\therefore \boxed{a = \left(\frac{m_1 - m_2 \sin\alpha}{m_1 + m_2}\right) g}$$

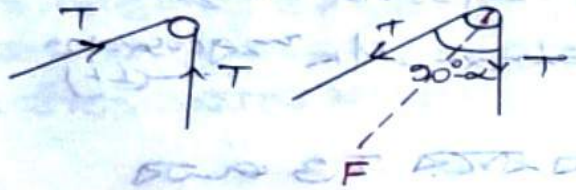
a এর মান (ii) নং এ বসাই,

$$T - m_2 g\sin\alpha = m_2 a$$

$$\Rightarrow T = m_2 g\sin\alpha + m_2\left(\frac{m_1 - m_2\sin\alpha}{m_1+m_2}\right)g$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \left[\frac{(1+\sin\alpha)m_1 m_2}{m_1+m_2}\right]g}$$

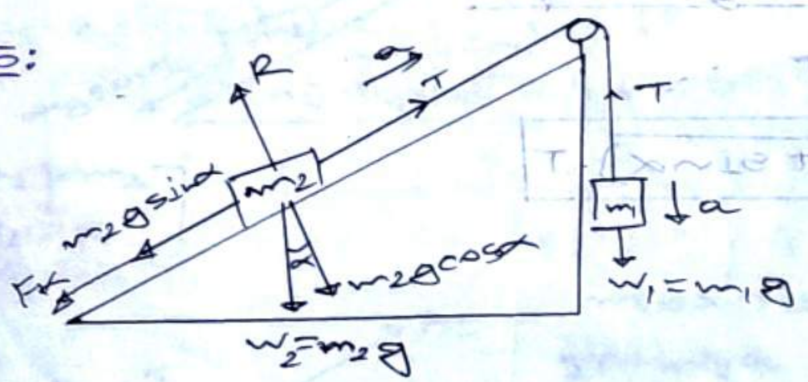
কপিকলের উপর প্রযুক্ত বল:



$$F = \sqrt{T^2+T^2+2T^2\cos(90°-\alpha)}$$

$$\boxed{F = \sqrt{2(1+\sin\alpha)}\,.\,T}$$

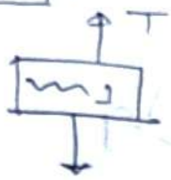
case:05:



$m_1 > m_2$

unknown: ত্বরণ = a
সুতার টান = T

For m_1:



$w_1 = m_1 g$

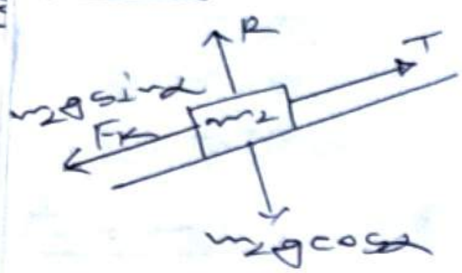
$w_1 > T$

$\Sigma F = m_1 a$

$\Rightarrow w_1 - T = m_1 a$

$\Rightarrow \boxed{m_1 g - T = m_1 a \text{ ——— (i)}}$

For m_2:



$T > (F_k + m_2 g \sin\alpha)$

$\therefore \Sigma F = ma$

$\Rightarrow T - F_k - m_2 g \sin\alpha = m_2 a$

$\Rightarrow T - m_2 g \sin\alpha - \mu_k m_2 g\cos\alpha = m_2 a$ ——— (ii)

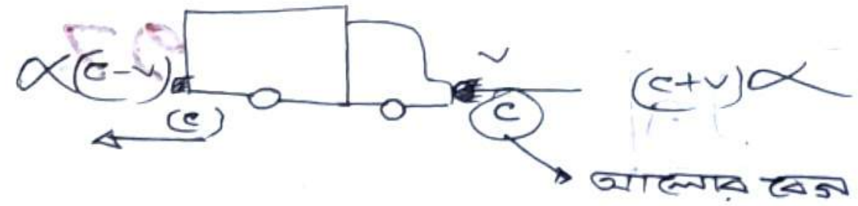
(i) ও (ii) নং সমীকরণ সমাধান করে T ও a এর মান নির্ণয় করতে হবে।

কপিকলের উপর প্রযুক্ত বল:

~~$F = \sqrt{2}\,T$~~

$$\boxed{F = \sqrt{2(1+\sin\alpha)}\,.\,T}$$

*



একই সাথে দুই বেগ থাকতে পারে না।

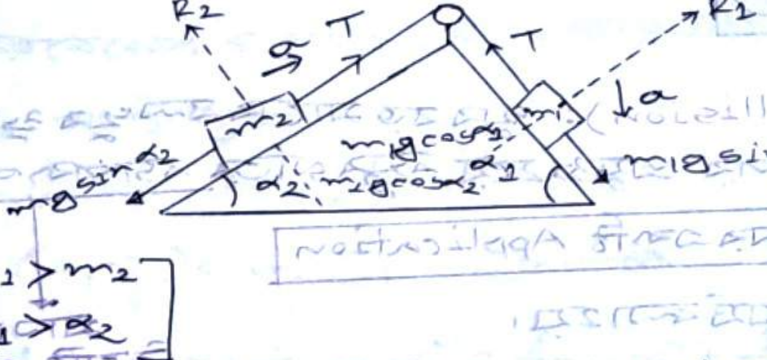
মনেকরি, একটা বাস আমার কাছে আসতেছে। যত কাছে আসবে ত তত ই ইঞ্জিন এর শব্দ বাড়বে, যখন সামনে চলে আসবে তখন ইঞ্জিন এর শব্দ সর্বোচ্চ আবার যখন আমাকে ছাড়িয়ে যায় তখন শব্দ কমতে থাকে।

অর্থাৎ, তরঙ্গের frequency এর উপর নির্ভর করে। আলোও তাড়িত চৌম্বকীয় তরঙ্গ। ফলে গাড়ি যত কাছে আসে আলোর পরিমাণ বাড়ে এবং যখন আমাকে পাশ কাটিয়ে যায় তখন ধীরে ধীরে কমতে থাকে।

———— × ————

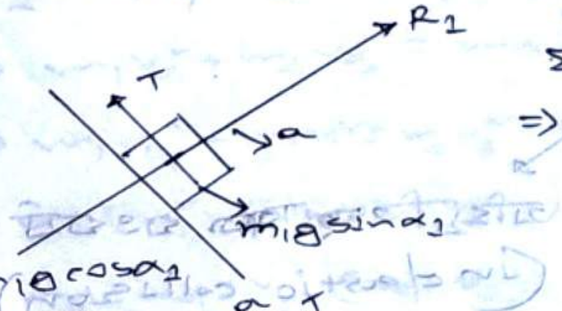
96

case: 06:



$$\boxed{\begin{matrix} m_1 > m_2 \\ \alpha_1 > \alpha_2 \end{matrix}}$$

For m_1:

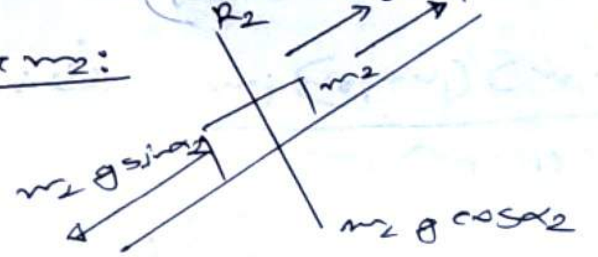


$m_1 g\sin\alpha_1 > T$

$\Sigma F = m_1 a$

$\Rightarrow m_1 g\sin\alpha_1 - T = m_1 a$ —— (i)

For m_2:



$T > m_2 g\sin\alpha$

$\Sigma F = ma$

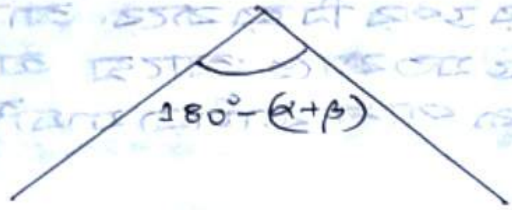
$\Rightarrow T - m_2 g\sin\alpha = ma$ —— (ii)

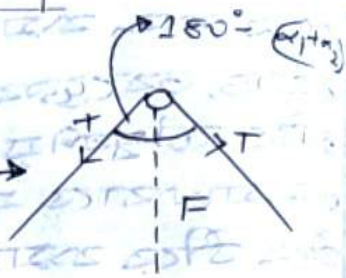
(i) + (ii) হতে,

$$\boxed{a = \left(\frac{m_1 \sin\alpha_1 - m_2 \sin\alpha_2}{m_1 + m_2}\right) g}$$

a এর মান (ii) নং এ বসাই,

$$\boxed{T = \left[\frac{m_1 m_2 (\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)}{m_1 + m_2}\right] g}$$





১৫

$$\boxed{F = 2T \sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)}$$

Topic: 13: সংঘর্ষ (Collision): খুব বড় মানের বল খুব ক্ষুদ্র সময়ের জন্য কোনো বস্তুর উপর প্রযুক্ত হয়ে বস্তুর গতির বেগের পরিবর্তন করার ঘটনাকে সংঘর্ষ বলা হয়।

ঘাতবলের একটি Application

মান ও দিক উভয়ই পরিবর্তন হয়

সংঘর্ষ

- স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ (Elastic collision)
- অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ (Inelastic collision)

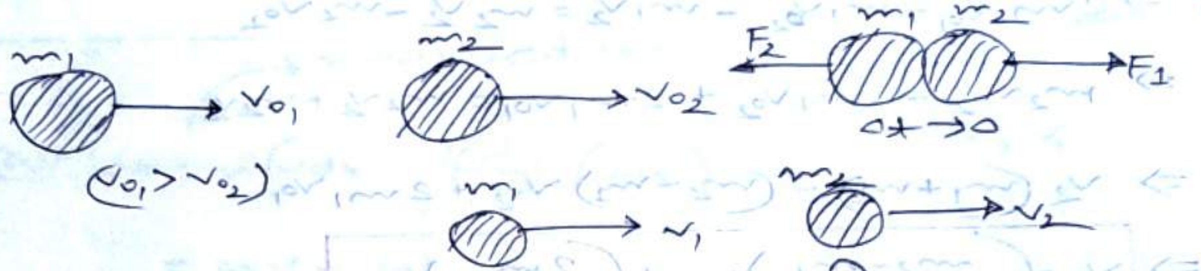
স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ (elastic collision):

যে সংঘর্ষের ফলে বস্তু সমূহের গতিশক্তি সংরক্ষিত হয়, অর্থাৎ সংঘর্ষের আগে ও পরে গতিশক্তির সমষ্টি সমান থাকে এবং সংঘর্ষের আগে ও পরে বস্তু সমূহের আপেক্ষিক বেগের মান সমান থাকে সেই সংঘর্ষকে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলা হয়।

★ বাস্তবে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ সম্ভব নয়। → সংঘর্ষে তাপশক্তি উৎপন্ন হয় তাই।

* আদর্শ গ্যাসের অণুসমূহের সংঘর্ষকে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ হিসেবে বিবেচনা করা হয়।

98



এখানে, ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী,

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\Rightarrow m_1 v_{01} - m_1 v_1 = m_2 v_2 - m_2 v_{02}$$

$$\Rightarrow m_1 (v_{01} - v_1) = m_2 (v_2 - v_{02}) \text{ --- (i)}$$

আবার, $\frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

$$\Rightarrow m_1 v_{01}^2 + m_2 v_{02}^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

$$\Rightarrow m_1 v_{01}^2 - m_1 v_1^2 = m_2 v_2^2 - m_2 v_{02}^2$$

$$\Rightarrow m_1 (v_{01}^2 - v_1^2) = m_2 (v_2^2 - v_{02}^2)$$

$$\Rightarrow m_1 (v_{01} + v_1)(v_{01} - v_1) = m_2 (v_2 + v_{02})(v_2 - v_{02}) \text{ --- (ii)}$$

(ii) ÷ (i), $\frac{m_1 (v_{01} + v_1)(v_{01} - v_1)}{m_1 (v_{01} - v_1)} = \frac{m_2 (v_2 + v_{02})(v_2 - v_{02})}{m_2 (v_2 - v_{02})}$

$$\Rightarrow \boxed{v_{01} - v_{02} = v_2 - v_1}$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} v_1 &= v_2 - v_{01} + v_{02} \\ v_1 &= v_{02} - v_{01} + v_2 \end{aligned}} \leftarrow (iii)$$

আবার, $\boxed{v_2 = v_1 + v_{01} - v_{02}} \leftarrow (iv)$

99

$v_1 = v_{02} - v_{01} + v_2$, (i) এ বসাই,

$$m_1(v_{01} - v_1) = m_2(v_2 - v_{02})$$

$$\Rightarrow m_1(v_{01} - v_{02} + v_{01} - v_2) = m_2v_2 - m_2v_{02}$$

$$\Rightarrow m_1(2v_{01} - v_{02} - v_2) = m_2v_2 - m_2v_{02}$$

$$\Rightarrow 2m_1v_{01} - m_1v_{02} - m_1v_2 = m_2v_2 - m_2v_{02}$$

$$\Rightarrow m_2v_{02} - m_1v_{02} + 2m_1v_{01} = m_2v_2 + m_1v_2$$

$$\Rightarrow v_2(m_1 + m_2) = (m_2 - m_1)v_{02} + 2m_1v_{01}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_2 = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{02} + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{01}}$$

$v_2 = v_1 + v_{01} - v_{02}$, (i) নং এ বসাই,

$$m_1(v_{01} - v_1) = m_2(v_2 - v_{02})$$

$$\Rightarrow m_1(v_{01} - v_1) = m_2(v_1 + v_{01} - v_{02} - v_{02})$$

$$\Rightarrow m_1v_{01} - m_1v_1 = m_2(v_1 + v_{01} - 2v_{02})$$

$$\Rightarrow m_1v_{01} - m_1v_1 = m_2v_1 + m_2v_{01} - 2m_2v_{02}$$

$$\Rightarrow m_1v_{01} - m_2v_{01} + 2m_2v_{02} = m_2v_1 + m_1v_1$$

$$\Rightarrow (m_1 - m_2)v_{01} + 2m_2v_{02} = v_1(m_1 + m_2)$$

$$\Rightarrow v_1(m_1 + m_2) = (m_1 - m_2)v_{01} + 2m_2v_{02}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{01} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{02}}$$

case:01: বস্তুদ্বয়ের ভর সমান হলে:-

$\boxed{m_1 = m_2}$; $\boxed{m_1 - m_2 = 0}$; $\boxed{m_2 - m_1 = 0}$; $\boxed{m_1 + m_2 = 2m_1 \text{ or } 2m_2}$

$$v_1 = \cancel{\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)}^{0} v_{o1} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{o2}$$

$$= \frac{2m_2}{2m_2} \times v_{o2} \Rightarrow \boxed{v_1 = v_{o2}}$$

$$v_2 = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{o2} + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{o1}$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{2m_1} \times v_{o1}$$

$$\boxed{v_2 = v_{o1}}$$

সুতরাং, বস্তুদ্বয়ের ভর সমান হলে সংঘর্ষের পরে বস্তুদ্বয় বেগ বিনিময় করে।

100

$\to$ modified uv

$$\int (uv)\,dx = u\int v\,dx - \int\left(\frac{du}{dx}\int v\,dx\right)dx \qquad u', v_1$$

$$= uv_1 - u'v_1\,dx$$

$$= uv_1 - \left[u'\int v_1\,dx - \int\left\{\frac{du'}{dx}\int v_1\,dx\right\}dx\right]$$

$$= uv_1 - u'v_2 + \int u''v_2\,dx$$

$$= uv_1 - u'v_2 + u''v_3 - u'''v_4 + \dots\dots \pm \int u^n v_n\,dx$$

$*\ \int \underset{u}{x^4} \cdot \underset{v}{\sin x}\,dx$

$$= x^4\boxed{(-\cos x)} - 4x^3(-\sin x) + 12x^2(\cos x) - 24x(\sin x) + 24(-\cos x)$$

$$= -x^4\cos x + 4x^3\sin x + 12x^2\cos x - 24x\sin x - 24\cos x$$

$*\ \int \underset{u}{x^6}\,\underset{v}{e^x}\,dx$

$$= x^6e^x - 6x^5e^x + 30x^4e^x - 120x^3e^x \dots\dots$$

101

* $\int x^3 e^{x^2} dx$

Let, $x^2 = z$

$\Rightarrow 2x\,dx = dz$

$\Rightarrow x\,dz = \frac{dz}{2}$

$= \int x^2 x\, e^{x^2} dx$

$= \int z\, e^{z} \frac{dz}{2}$

$= \frac{1}{2} \int z\, e^{z} dz$

* $\int x^7 e^{x^2} dx$ ★★★

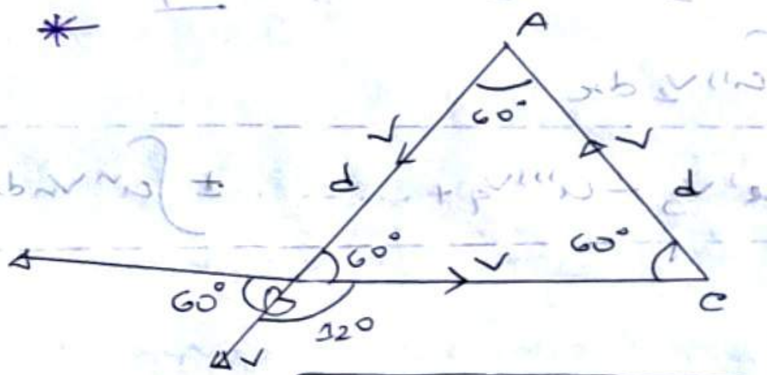
100

$= \int (x^2)^3 x\, e^{x^2} dx$

$= \frac{1}{2} \int z^3 e^{z} dz$

$= \frac{1}{2}\left[z^3e^{z} - 3z^2e^{z} + 6z\,e^{z} - 6e^{z}\right]$

*



তারা কখন মিলিত হবে?

$v_{BA} = \sqrt{v^2 + v^2 + 2v^2 \cos 60^\circ}$

$= \sqrt{2v^2 + 2v^2 \cdot \frac{1}{2}}$

$= \sqrt{3v^2}$

$v_{AB} = \sqrt{3}v$

$\left(v + \frac{v}{2}\right) = \frac{3v}{2}$

$t = \frac{d}{\frac{3v}{2}} = \frac{2d}{3v}$

case:02: প্রথম বস্তুটি অত্যন্ত ভারী ও গতিশীল কিন্তু ২য় বস্তুটি অত্যন্ত হালকা ও স্থির।

১০২

102

obj:1:- m_1, v_{01}

obj:2:- m_2; $v_{02} = 0\,m/s$

1000>>0.1
1000-0.1=999.9
≈ 1000

1000+0.1=1000.1
≈ 1000

$m_1 >> m_2$ হলে,

$\therefore m_1 - m_2 \approx m_1$

$\therefore m_1 + m_2 \approx m_1$

$\therefore m_2 - m_1 \approx -m_1$

$$\therefore v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{01} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)\cancel{v_{02}}^{0}$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{m_1}{m_1} \cdot v_{01}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1 = v_{01}}$$

অর্থাৎ ১ম বস্তুটি সংঘর্ষের পরও একই বেগে চলতে থাকে।

$$\therefore v_2 = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{01}$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{2m_1}{m_1} \cdot v_{01}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_2 = 2v_{01}}$$

★২য় বস্তুটি প্রথম বস্তুর আদিবেগের 2 গুণ বেগে গতিশীল হবে।

case:03: প্রথম বস্তুটি অত্যন্ত হালকা ও গতিশীল এবং ২য় বস্তুটি অত্যন্ত ভারী ও স্থির। (উদা: দেয়ালে বল নিক্ষেপ)

obj:-1: m_1; v_{01}

obj-2: m_2; $v_{02} = 0\,m/s$

$m_2 >> m_1$

$\therefore m_1 - m_2 \approx -m_2$

$\therefore m_2 - m_1 \approx m_2$

$\therefore m_2 + m_1 \approx m_2$

$$\therefore \frac{2m_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1}{m_2} \approx 0$$

$$\therefore v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{01} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) \cancel{v_{02}}^{\to 0}$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{-m_2}{m_2} \cdot v_{01}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1 = -v_{01}}$$

* প্রথম বস্তু সংঘর্ষের পর স্ব আদিবেগের বিপরীত দিকে ফিরে আসবে।

$$\therefore v_2 = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \cancel{v_{02}}^{\to 0} + \cancel{\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)}^{\to 0} v_{01}$$

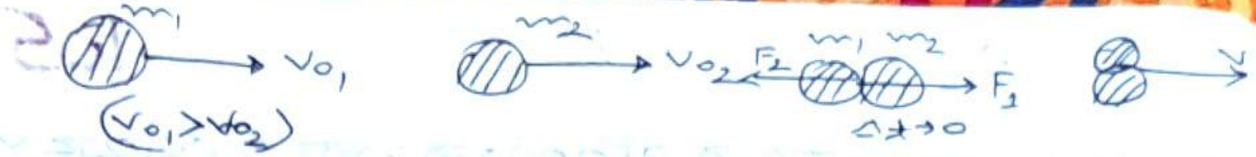
$$\Rightarrow \boxed{v_2 = 0}$$

* সুতরাং সংঘর্ষের পর ২য় বস্তুটি স্থির থাকবে।

* 

$$\left[\begin{array}{l} v_1 = 0 \\ v_2 = v_{01} \end{array}\right.$$

⊕ <u>অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ (Inelastic collision)</u>: যে সংঘর্ষের ফলে বস্তুসমূহের গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় না অর্থাৎ গতিশক্তি হ্রাস পায় এবং সংঘর্ষের পর বস্তুদ্বয় মিলিত হয়ে একই বেগে চলতে থাকে অর্থাৎ সংঘর্ষের পর বস্তুসমূহের আপেক্ষিক বেগের মান শূন্য হয় সেই সংঘর্ষকে অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলা হয়।



$(v_{01} > v_{02})$

109

ভরবেগের সংরক্ষণশীলতা সূত্র অনুসারে,

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = (m_1 + m_2) v$$

$$\Rightarrow v = \frac{m_1 v_{01} + m_2 v_{02}}{m_1 + m_2} \quad \text{--- (i)}$$

সংঘর্ষের আগে গতিশক্তির সমষ্টি,

$$E_{K_0} = \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2$$

সংঘর্ষের পর গতিশক্তির সমষ্টি

$$E_K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2$$

$$(E_{K_0} > E_K)$$

∴ গতিশক্তি ক্ষয়,

$$\Delta E_K = E_{K_0} - E_K$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_{01} + m_2 v_{02}}{m_1 + m_2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 - \frac{1}{2}\cancel{(m_1 + m_2)}\left(\frac{m_1^2 v_{01}^2 + 2 m_1 v_{01} m_2 v_{02} + m_2^2 v_{02}^2}{\cancel{(m_1 + m_2)}(m_1 + m_2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2 v_{01}^2 + 2 m_1 m_2 v_{01} v_{02} + m_2^2 v_{02}^2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[m_1 v_{01}^2 + m_2 v_{02}^2 - \frac{(m_1^2 v_{01}^2 + 2 m_1 m_2 v_{01} v_{02} + m_2^2 v_{02}^2)}{m_1 + m_2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cancel{m_1^2 v_{01}^2} + m_1 m_2 v_{01}^2 + m_1 m_2 v_{02}^2 + \cancel{m_2^2 v_{02}^2} - \cancel{m_1^2 v_{01}^2} - 2 m_1 m_2 v_{01} v_{02} - \cancel{m_2^2 v_{02}^2}}{m_1 + m_2}\right]$$

$$\Rightarrow \Delta E_K = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_{01}^2 - 2 v_{01} v_{02} + v_{02}^2)$$

$$\boxed{\Delta E_K = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_{01} - v_{02})^2}$$

const

$(v_{01} - v_{02})$ → সংঘর্ষের পূর্বে বস্তুদ্বয়ের আপেক্ষিক বেগের মান

$\boxed{\Delta E_K \propto (v_{01}-v_{02})^2}$

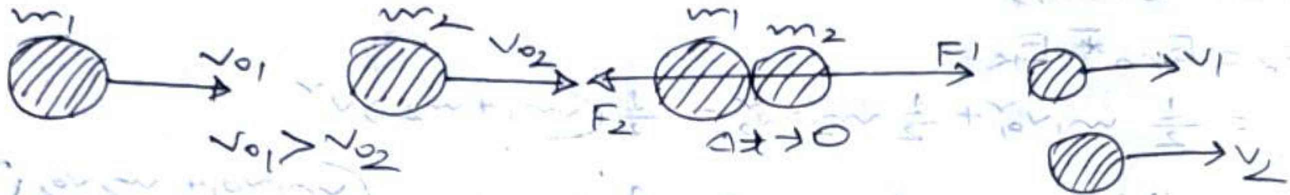
* অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের গতিশক্তির ক্ষয় সংঘর্ষের পূর্বে বস্তুদ্বয়ের আপেক্ষিক বেগের মানের বর্গের সমানুপাতিক

Topic: 14: প্রতিস্থাপন গুণাঙ্ক (co-efficient of Restitution)

→ Material এর elastic property.

* সংঘর্ষের ক্ষেত্রে 2টি বস্তুর জন্য সংঘর্ষের পর বস্তুদ্বয়ের আপেক্ষিক বেগের মান এবং সংঘর্ষের আগে বস্তুদ্বয়ের আপেক্ষিক বেগের মানের অনুপাতকে প্রতিস্থাপন গুণাঙ্ক বলে।

→ এখানে, বেগের প্রতিস্থাপন হয়।



$|v_{01}-v_{02}|$ $\qquad$ $|v_2-v_1|$

∴ co-efficient of restitution, $\boxed{e = \frac{|v_2-v_1|}{|v_{01}-v_{02}|}}$

$[0<e<1]$

স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে, $(v_{01}-v_{02}) = (v_2-v_1)$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{v_{01}-v_{02}}{v_2-v_1}} = 1 = e = \frac{v_2-v_1}{v_{01}-v_{02}}$$

* স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে, $\boxed{e = \frac{v_2-v_1}{v_{01}-v_{02}} = 1}$

অর্থাৎ, যে বেগে মাটিতে পড়বে সে বেগেই ফিরে আসবে। বাস্তবে যা দুষ্কর

* পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ, $e = \frac{v_2 - v_1}{v_{o_1} - v_{o_2}}$ $\left[v_1 = v_2 \right.$

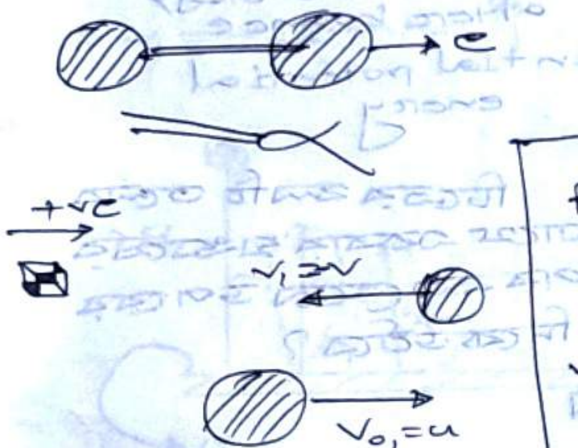
$\boxed{e = 0}$ *

মানে মাটিতে Bounce খাবে না মাধ্যাকর্ষণে সম্পূর্ণ যায়

* বাস্তবিক অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ : $e = \frac{v_2 - v_1}{v_{o_1} - v_{o_2}}$ $\left[0 < e < 1 \right]$

Approch velocity — Seperation velocity

$e \longrightarrow$ Always applicable for along the line of impact (সংঘর্ষ রেখা)



স্থির

$v_2 = 0$

$V_{o_2} = 0.$

+ve

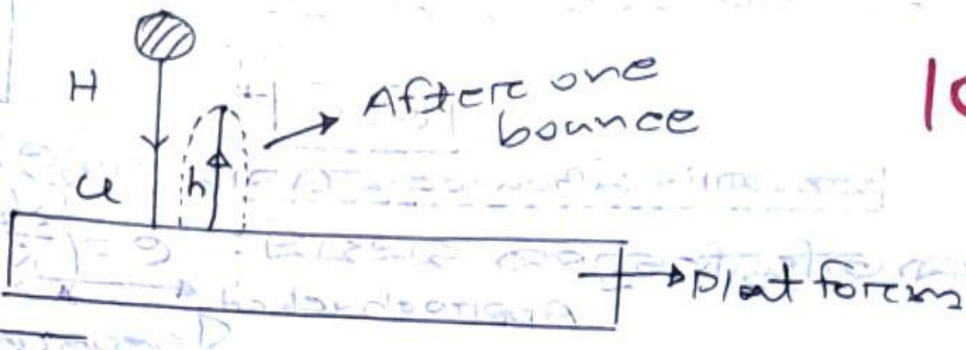
$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{o_1} + v_{o_2}} = \frac{0 - (-v)}{u}$$

$$\boxed{\therefore e = \frac{v}{u}}$$

One object is in stationary condition (স্থির)

$$e = \frac{v}{u} = \sqrt{\frac{v^2}{u^2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} m v^2}{\frac{1}{2} m u^2}} = \sqrt{\frac{E_K \text{ (After collision)}}{E_K \text{ (Before collision)}}}$$

$$\boxed{e = \sqrt{\frac{E_K}{E_o}}}$$



$$e = \frac{v}{u} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}}$$

$$\boxed{e = \sqrt{\frac{h}{H}}}$$

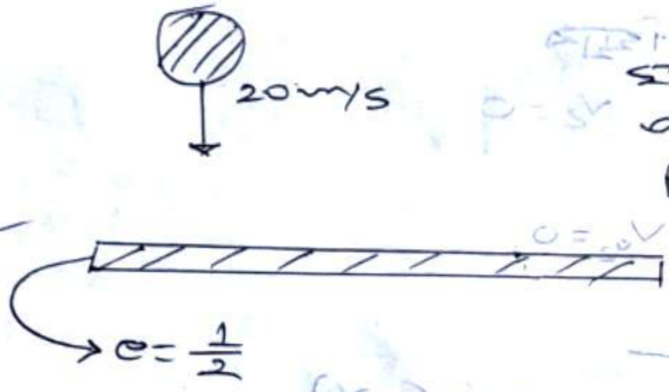
$$\boxed{e = \sqrt{\frac{\text{height after bounce}}{\text{initial height}}}}$$

$$\Rightarrow e = \sqrt{\frac{mgh}{mgH}} \Rightarrow \boxed{e = \sqrt{\frac{E_p}{E_{p_0}}}}$$

E_p → Potential energy after bounce

E_{p_0} → intial potential energy

* চিত্রের বলটি তলের সাথে একবার সংঘর্ষের পর কত বেগে উপরের দিকে উঠবে?



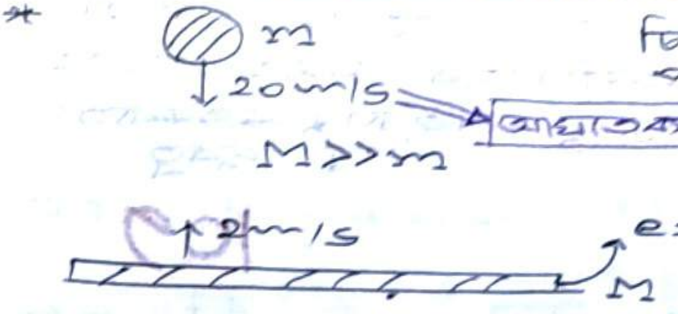
→ আগের বেগের মাত্র 50% প্রতিক্ষিপ্ত হয়।

উ: $e = \frac{v}{u}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{v}{20}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = 10 \text{ m/s}}$$

*



চিত্রে, বলটি তলের সাথে একবার সংঘর্ষের পর কত বেগে লাফাবে?

আঘাতের পরের সমান বেগ

↓ (+ve)

উঃ $e = \frac{v_2 - v_1}{v_{0_1} - v_{0_2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-2 - v_1}{20 - (-2)}$

$\Rightarrow v_1 = -13 \text{ m/s}$ ↑

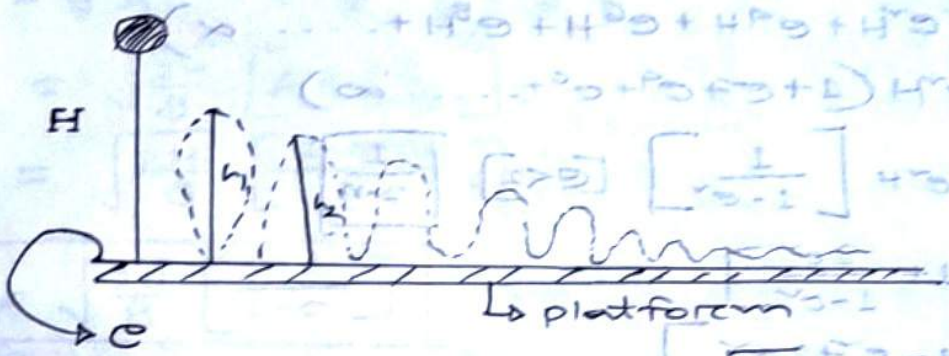
$v_{0_1} = 20 \text{ m/s}$

$v_{0_2} = -2 \text{ m/s}$

$v_2 = -2 \text{ m/s}$ [M>>m]

$v_1 = ?$

*



After one bounce: h_1, $e = \sqrt{\frac{h_1}{H}}$

$\Rightarrow \boxed{h_1 = e^2 H}$

After two bounce: h_2, $h_2 = e^2 h_1$

$\Rightarrow h_2 = e^2 e^2 H$

$\Rightarrow h_2 = e^4 H$

After third bounce $h_3 = e^2 h_2$

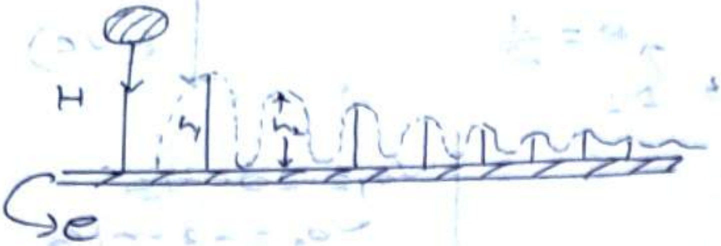
$\Rightarrow h_3 = e^6 H$

After n^{th} bounce, $\boxed{h_n = e^{2n} H}$

* H উচ্চতা হতে একটি বল কে স্থির তলে পড়তে দিলে বলটি অসংখ্যবার bounce করে। বলটি স্থির অবস্থায় আসার আগ মুহূর্ত পর্যন্ত মোট অতিক্রান্ত ~~অতিক্রান্ত দূরত্ব~~ উচ্চতা নির্ণয় কর।

109

উ:



মোট উচ্চতা,

$$H_T = H + 2h_1 + 2h_2 + 2h_3 + 2h_4 + 2h_5 + \ldots + 2h_n + \ldots + \infty$$

$$= H + 2(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + \ldots + h_n + \ldots + \infty)$$

$$= H + 2(e^2H + e^4H + e^6H + e^8H + \ldots \infty)$$

$$= H + 2e^2H(1 + e^2 + e^4 + e^6 + \ldots \infty)$$

$$= H + 2e^2H\left[\frac{1}{1-e^2}\right] \quad [e<1] \quad \boxed{\frac{1}{1-r}}$$

$$= H\left[1 + \frac{2e^2}{1-e^2}\right]$$

$$= H\left[\frac{1-e^2+2e^2}{1-e^2}\right]$$

$$\boxed{H_T = H\left[\frac{1+e^2}{1-e^2}\right]}$$

* বস্তু বলটি স্থির অবস্থায় আসতে প্রয়োজনীয় সময়:-

[1700...]

Total time taken to come in rest

$$T=\sqrt{\frac{2H}{g}}+2\sqrt{\frac{2h_1}{g}}+2\sqrt{\frac{2h_2}{g}}+2\sqrt{\frac{2h_3}{g}}+\cdots\cdots\infty$$

$$\Rightarrow T=\sqrt{\frac{2}{g}}\left[\cancel{\sqrt{H}+2\sqrt{h_1}+2\sqrt{h_2}+2\sqrt{h_3}+\cdots\cdots\infty}\right]$$

$$\Rightarrow T=\sqrt{\frac{2}{g}}\left[\cancel{\sqrt{H}+2\sqrt{e^2H}+2\sqrt{e^4H}+2\sqrt{e^6H}+\cdots}\right]$$

$$\Rightarrow T=\sqrt{\frac{2H}{g}}+2\sqrt{\frac{2e^2H}{g}}+2\sqrt{\frac{2e^4H}{g}}+2\sqrt{\frac{2e^6H}{g}}+\cdots\cdots\infty$$

$$\Rightarrow T=\sqrt{\frac{2H}{g}}+2\sqrt{\frac{2e^2H}{g}}\left[1+e+e^2+e^3+\cdots\cdots\right]$$

$$\Rightarrow T=\sqrt{\frac{2H}{g}}+2\sqrt{\frac{2e^2H}{g}}\left[\frac{1*}{1-e}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2H}{g}}\left[1+\frac{2e}{1-e}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2H}{g}}\left[\frac{1-e+2e}{1-e}\right]$$

$$\boxed{T=\sqrt{\frac{2H}{g}}\left[\frac{1+e}{1-e}\right]}$$