台大 109 資工

Question:

The nullities of the matrices $BB^T-\lambda I$ for $\lambda=0,1,2,3,4$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

are _, _, _, _, _, respectively.

Ans.

題目問在 eigenvalue λ 代 λ 0, 1, 2, 3. 4 時，各個 null space 的 basis 個數。(也就是問 null space rank)

$$BB^T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BB^T-\lambda I=\begin{bmatrix} 1-\lambda & & & & -1 \\ & 4-\lambda & & & \\ & & -\lambda & & \\ & & & 1-\lambda & \\ -1 & & & & 1-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(BB^T-\lambda I)=0 \overset{\text{降階}}{\Rightarrow} (-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & & & -1 \\ & 4-\lambda & & \\ & & 1-\lambda & \\ -1 & & & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

降階

$$\Longrightarrow (-\lambda)\left((4-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & & -1 \\ & 1-\lambda & \\ -1 & & 1-\lambda \end{vmatrix}\right)$$

降階

$$\Longrightarrow (-\lambda)(4-\lambda)\left((1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}\right)$$

$$= (-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-1\right] = (-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda)(-2\lambda+\lambda^2)$$

$$= -(\lambda)\cdot(\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda)(\lambda-2) = 0$$

$\lambda = 0, 1, 2, 4$

$\lambda=0$ 為重根，那 eigenvector 為重根的數目

因為 eigenvector 可以是相同方向，除 0 以外的倍數，
又因 eigenvalue 有 2 個重根，eigenvector 也就有 2
個，所以取單位向量 $\vec{x}_1$，又有 C_1 和 C_2 純量，使兩
eigenvector $\vec{X}_1$ 和 $\vec{X}_2$ 為單位向量

$$\Rightarrow \vec{x}_1 = C_1\vec{X}_1 + C_2\vec{X}_2 \Rightarrow (BB^T-\lambda I)\vec{x}_1 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \text{nullity}(BB^T-\lambda I) = 2$$

$\lambda=1$ 時，有一個 eigenvector $\vec{x}_3$ 有個純量 c_3 使其為

$\vec{x}_3 \Rightarrow (BB^T-\lambda I)\vec{x}_3=\vec{0} \Rightarrow nullity(BB^T-\lambda I)=1$

$\lambda=2$ 時，有一個 eigenvector $\vec{x}_4$，有個純量 c_4 使其為

$\vec{x}_4 \Rightarrow (BB^T-\lambda I)\vec{x}_4=\vec{0} \Rightarrow nullity(BB^T-\lambda I)=1$

$\lambda=3$ 並不是 eigenvalue，所以 $nullity(BB^T-\lambda I)=0$

$\lambda=4$ 時，有個 eigenvector $\vec{x}_5$，有個純量 c_5 使其為

$\vec{x}_5 \Rightarrow (BB^T-\lambda I)\vec{x}_5=\vec{0} \Rightarrow nullity(BB^T-\lambda I)=1$

$\therefore \lambda=0,1,2,3,4$ 時，其 nullity 為

$2,1,1,0,1$, respectively.