分割矩陣的行列式特性　90 清大應數

1. $\det\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det(A)\cdot\det(B)$

2. $\det\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} = \det(A)\cdot\det(B)$

---

99 台大數學

Let A and B be two $n\times n$ matrices

(a) Prove or disprove: $\det\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$.

(b) Prove or disprove: $\det\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A^2-B^2)$

Ans.

(a) True.

$\det\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det(I)\det(I) = 1\cdot 1 = 1$

$\det\begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det(I)\det(I) = 1\cdot 1 = 1$

$\Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix}\right)$

$= \det\begin{bmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{bmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$

(b) False

由 (a) 可知 $\det\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$

判斷 $\det(A+B)\det(A-B) = \det(A^2-B^2)$

$\Rightarrow \det(A+B)\det(A-B) = \det\big((A+B)(A-B)\big)$

$= \det(A^2-AB+BA-B^2)$

所以只要證明 $BA=AB$ 即 $\det\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A^2-B^2)$

成立：

取 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 則 $AB=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

因此 BA 不恒等 AB。

所以 $\det\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \neq \det(A^2-B^2)$