

平面圖題目

Hint: 平面圖必要條件: $\frac{3}{2}r \leq e \leq 3v-6$

r : 區域數, e : 邊數, v : 點數

Hint:

Euler formula:

$$v - e + r = 2$$

Question:

If G and \bar{G} are two complementary graphs with the number of vertices greater than or equal to X , then either G or \bar{G} is nonplanar.

(a) Please find the value of X .

(b) Please explain the reason.

Ans.

(b) 問計算過程, (a) 問答案.

當 $e > 3v-6$ 成立時, 圖為不平面圖, n 個點完全圖為

K_n , 其邊數為 $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, 這些邊由 G 和 \bar{G} 分, 最差

的情況為 $G = (V, E), \bar{G} = (V, E') \Rightarrow ||E| - |E'|| \leq 1$,

討論:

1. 點數為偶數時

$$|E| = |E'|, \text{ 則 } |E| = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{2} > 3n-6$$

$$\Rightarrow \frac{n^2-n}{4} > 3n-6 \Rightarrow 12n-24 < n^2-n$$

$$\Rightarrow 0 < n^2-13n+24 \Rightarrow n = \frac{13 \pm \sqrt{169-96}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{73}}{2} = 10. \dots, 2. \dots$$

n 可能為 $10. \dots$ 和 $2. \dots$, 因要是點數為偶數

$\therefore n$ 可能為 12 or 4 , 4 不符合 $e > 3n-6$

$$\Rightarrow \frac{4 \times 3}{4} < 4 \times 3 - 6$$

\therefore 可能為 12 。

2. 點數為奇數時,

$$\text{則 } |E| = |E'| - 1, \quad 2e - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow 2e = \frac{n^2-n+2}{2} \Rightarrow e = \frac{n^2-n+2}{4}$$

看 $e > 3n-6$ 成不成立.

$$\frac{n^2-n+2}{4} > 3n-6 \Rightarrow n^2-n+2 > 12n-24$$

$$\Rightarrow n^2-13n+26 > 0, \text{ 代 } 11 \text{ or } 13, \text{ try it}$$

$$\Rightarrow \text{代 } 11 \Rightarrow 121-143+26=4 > 0 \text{ 成立, } \therefore \min(12, 11)=11 \text{ 在 } 11 \text{ 點成立。}$$