

87 成大資工

Show that A is row equivalent to B and B is row equivalent to C . Prove that A is row equivalent to C .

Ans.

因 A 列等價 B ，則存在一個可逆矩陣 P ，
使得 $A = PB$ ；

因 B 列等價 C ，則存在一個可逆矩陣 Q ，
使得 $B = QC$ 。

$$\Rightarrow A = PB = P(QC) = (PQ)C$$

因 PQ 為可逆矩陣，所以 A 列等價 C 。

Let A be an $n \times n$ matrix. Prove the following two statements:

(a) If A is invertible and $AB=0$ for some $n \times n$ matrix B , then $B=0$.

(b) If A is not invertible, then there exists an $n \times n$ matrix B such that $AB=0$ but $B \neq 0$.

Ans.

(a) 因 A 可逆, $AB=0 \Rightarrow B=A^{-1} \cdot 0 = 0$, 所以 $B=0$

(b) 因 A 不可逆, 则存在 $x \neq 0$, 使得 $Ax=0$,

$\Rightarrow A[x \ x \ x \ x \dots x] = 0$, 因 $x \neq 0$, 所以 $B \neq 0$.

可逆矩陣分解多個矩陣，而這些矩陣，還是可逆。

95 台科大資工。

Let A and B be $n \times n$ matrices such that AB is invertible. ^{條件}
Prove that both A and B are invertible. ^{結果}

Ans.

利用矛盾法，假設 A 為不可逆，

則 $\exists x \neq 0$ ，使 $x \cdot A = 0$

$\Rightarrow xAB = 0 \cdot B = 0$ ，如果 AB 可逆，又有零解才能得出零矩陣，這樣 $\exists x \neq 0$ 產生矛盾，因此 A 可逆矩陣。

假設 B 為不可逆，

則 $\exists x \neq 0$ ，使 $B \cdot x = 0$

$\Rightarrow ABx = A \cdot 0 = 0$ ，這與 AB 可逆，只有一零解得出零矩陣產生矛盾，因此 B 為可逆矩陣。

Prove or disprove that the following matrix has a
LU-decomposition:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ans.

假設 A 可以 LU 分解,

$$\text{則存在 } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ad = 0 \\ ae = 1 \\ bd = 1 \\ be + cf = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1, \text{ 則 } d = 0, e = 1,$$

因 $d = 0$, 則 $bd = 0$ 矛盾,

所以 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 不能 LU-decomposition.