

線性方程組定理:

假設 $A \in F^{m \times n}$, 其中 $F = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} 為一個無限體, 則

$Ax=0$ 具非零解 $\iff Ax=0$ 具有無限多個解

證明:

$(\leftarrow) = \text{trivial}$

(\rightarrow) :

因 $Ax=0$ 具非零解, 假設 $x_0 \neq 0$, 使 $Ax_0=0$,

$\forall \alpha \in F, A(\alpha x_0) = \alpha(Ax_0) = \alpha \cdot 0 = 0$ 。

所以 αx_0 為 $Ax=0$ 的一解。

又因為 $\forall \alpha \in F$, F 為無限體, αx_0 有無限個,

所以 $Ax=0$ 具有無限多個解。