

子圖、誘導子圖、生成子圖

假設 $G=(V, E)$ 為一個有向或無向圖。

1. 子圖 (subgraph) 定義:

若 $G'=(V', E')$ 為一圖滿足

$$(a). \phi \neq V' \subseteq V$$

$$(b). E' \subseteq E \cap (V' \times V'),$$

↓
子點所產生的邊與原圖的邊相交，不必所有邊都有。

則稱 G' 為 G 的一個子圖。

2. 誘導子圖 (induced subgraph) 定義:

若 $G'=(V', E')$ 為 G 的子圖滿足 $E'=E \cap (V' \times V')$ ，則

稱 G' 為 G 中以 V' 為引導的誘導子圖

(induced subgraph on V')。

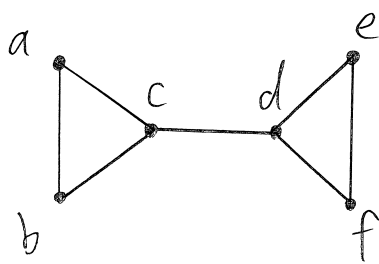
↓
 $V' \times V'$ 的邊要和 G 的 V' 內的邊一樣。

3. 生成子圖 (spanning subgraph) 定義:

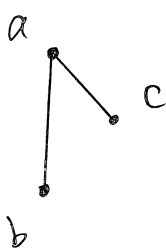
若 $G'=(V', E')$ 為 G 的子圖 滿足 $V'=V$ ，則稱為 G 的生成子圖 (spanning subgraph)。

↓
要包含所有點。

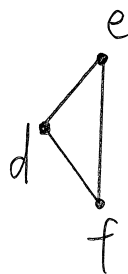
圖例：



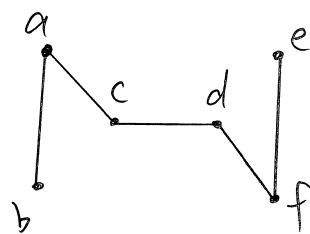
G



G_1



G_2



G_3

說明：

G_1, G_2, G_3 為 G 的子圖

1. G_3 為 G 的生成子圖

2. G_2 為 G 的誘導子圖

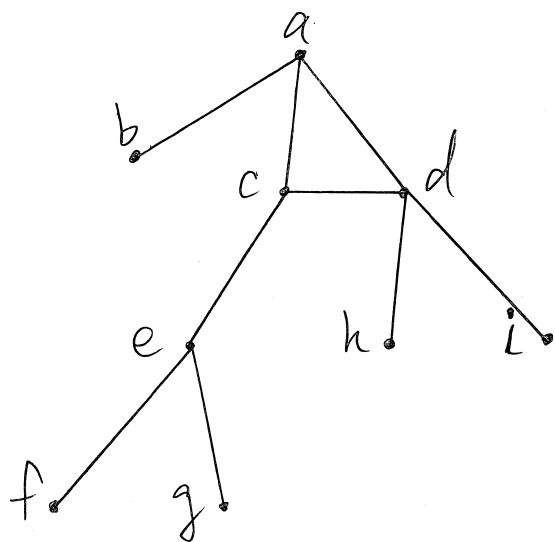
3. G_1 沒有 $\{b, c\}$ 的邊，所以不為 G 的誘導子圖。

4. $G_1 \cup G_2$ 為 G 的生成子圖。

例題：

(a) How many spanning subgraphs are there for the graph G ?

(b) How many connected spanning subgraphs are there in part (a)?



$$G = (V, E), \quad |V| = 9, \quad |E| = 9$$

Ans.

(a), spanning tree 是要包含 9 點， G 圖裡 9 點有 9 條邊，每條邊可有、可無 2 種可能，由乘法原理得， $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^9$ 種生成子圖。

(b) 找 G 圖中有 cycle 的地方，得 $\{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}$ 這三條。

討論：

1. 三條中取二條得出的 connected spanning tree，有 $\binom{3}{2} = 3$ 種

2. 包含三條的 connected spanning tree 有 $\binom{3}{3} = 1$ 種。

由加法原理得出 $3 + 1 = 4$ 種 \star

