

對稱差的集合是否等於獨立子空間的加總

80 台大資工

sjLin

March 24, 2022

題目

Let V be a n -dim vector space and W_1, W_2, \dots, W_k be subspaces of V . Then $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ iff $V = W_1 + W_2 + \dots + W_k$ and $W_i \cap W_j = \{0\}$ for $i \neq j, 1 \leq i, j \leq k$.

(80 台大資工)(85 中原數學)

解:

V 為 n 維的向量空間，現在有 k 個子空間。

題目問是否所有子空間的對稱差等於所有子空間集合的加總，且子空間共同向量只有零向量。這樣表示每個子空間都不互相干涉，視為獨立子空間。

答案為否，因為並沒有說明 k 是否小於等於 n 。

k 可能大於 n ，子空間個數大於維度必定有子空間可以被其他空間組合出來，舉個例子: $n = 2, k = 3$

$V \in \mathbb{R}^2$, W_1, W_2 , and W_3 為 V 的子空間

$W_1 = \text{span}\{(1, 0)\}$, $W_2 = \text{span}\{(0, 1)\}$, and $W_3 = \text{span}\{(1, 1)\}$

且符合 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, $W_2 \cap W_3 = \{0\}$, $W_1 \cap W_3 = \{0\}$

但是 $W_1 + W_2 = W_3$ 不是獨立的子空間，這和獨立子空間加總等於集合的對稱差產生矛盾。