同構（isomorphic）

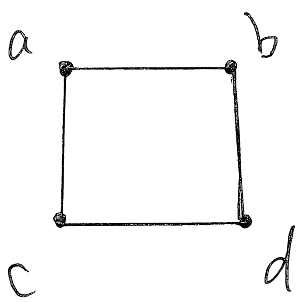
假設 $G_1=(V_1, E_1)$，$G_2=(V_2, E_2)$ 為二個簡單圖，若存在一個函數 $f: V_1 \to V_2$ 滿足

1、f 為$\overset{\text{(one-to-one)}}{一對一}$且$\overset{\text{(onto)}}{映成}$函數

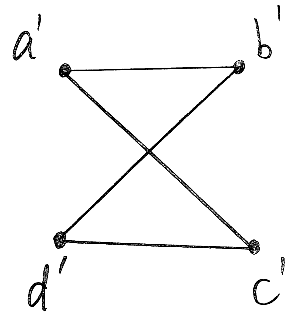
2、$\forall a, b \in V_1$，$(a,b) \in E_1 \longleftrightarrow (f(a), f(b)) \in E_2$

則稱 f 為一個同構函數（isomorphism）且稱 G_1 與 G_2 同構（isomorphic），記作 $G_1 \cong G_2$。

例題：



$G_1=(V_1, E_1)$



$G_2=(V_2, E_2)$

取 $f: V_1 \to V_2$

定義為 $f(a)=a'$

$f(b)=b'$

$f(c)=c'$

$f(d)=d'$，

因為 f 為 bijection，所以保留邊的連結性，

$\{a, b\} \in E_1$，則 $\{f(a), f(b)\} \in E_2$，

$\{b, d\} \in E_1 \longrightarrow \{f(b), f(d)\} \in E_2$，

$\{c, d\} \in E_1 \longrightarrow \{f(c), f(d)\} \in E_2$，

$\{a, c\} \in E_1 \longrightarrow \{f(a), f(c)\} \in E_2$，

$\{a, d\} \notin E_1 \longrightarrow \{f(a), f(d)\} \notin E_2$，

$\{b, c\} \notin E_1 \longrightarrow \{f(b), f(c)\} \notin E_2$。

Therefore, $G_1 \cong G_2$ #

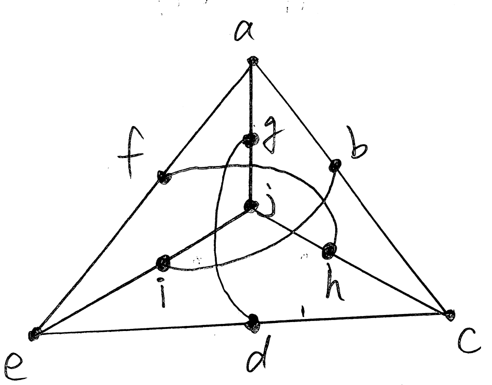
同構的注意事項：

1. 若為多重圖，同構的充要條件還需每個邊的重數相同。

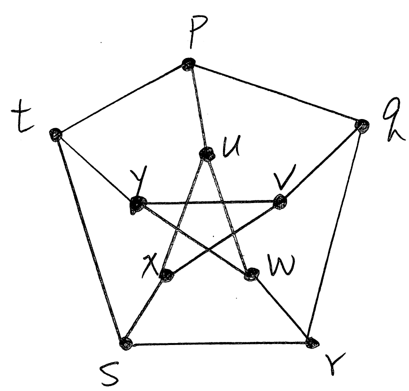
2. 同構的觀念即為重新畫過，若 G_1 的點可重新拉成 G_2，則 G_1 和 G_2 同構。

例題：

Determine whether the following pairs of graphs are isomorphic.



G



H

思路：

在 G 中找 1 個 Hamiton path，在 H 中也找 1 個 Hamiton path，如果 G, H 同構，定義會有一個 $f: G \to H$，f 為 one-to-one 且 onto，G 中邊的保留性經 f 轉成 H，也會是一樣的，一一比對邊的保留性，如果都一致，即 $G \cong H$。