向量空間的10個公設

假設V為一非空集合，F為一個體，定義二個運算，一個為向量加法(vector addition)，一個為純量積(scalar multiplication)，滿足下列十個公設，則稱V為佈於F的向量空間(vector space over F)。

1. 向量加法封閉性：$\forall u, v \in V$，唯一存在 $u+v \in V$.

2. 純量積封閉性：$\forall \lambda \in F, v \in V$，唯一存在 $\lambda v \in V$.

3. 向量加法交換性(commutativity of addition)：

$$\forall u, v \in V,\ u+v = v+u.$$

4. 向量加法結合性(associativity of addition)：

$$\forall u, v, w \in V,\ (u+v)+w = u+(v+w)$$

5. 向量加法單位元素(identity of addition)：

存在 $0 \in V$ 使得 $\forall v \in V$，$v+0 = 0+v = v$.

6. 向量加法反元素 (inverse property of addition)：

$\forall v \in V$，存在 $-v \in V$ 使得 $v+(-v)=(-v)+v=0$.

7. 純量積對向量加法分配性：

$\forall \alpha \in F, u, v \in V, \alpha\cdot(u+v)=\alpha\cdot u+\alpha\cdot v$

8. 純量積對純量加法分配性：

$\forall \alpha, \beta \in F, v \in V, (\alpha+\beta)\cdot v=\alpha v+\beta v$

9. 純量乘法對純量積結合法：

$\forall \alpha, \beta \in F, v \in V, (\alpha\beta)\cdot v=\alpha\cdot(\beta\cdot v)$

10. 單位純量積之不變性：

$\forall v \in V, 1\cdot v=v$

$v \in V$ 稱為向量 (vector)，記作 $\mathbf{v}$ 或 $\vec{v}$，$\alpha \in F$ 稱為純量 (scalar)，

有時將 V 記作 $(V, +, \cdot)$ 來強調其運算符號。