證明的題目:

Question:

Assume N is a positive integer, please show that the statement "if 2^N-1 is prime, then N is prime" is true using proof by contrapositive.

Ans. contrapositive:反證法

即證

"If N is not prime, then 2^N-1 is not prime."

$$\boxed{\text{Hint: } (a^n-x^n) = (a-x)(a^0x^{n-1}+a^1x^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1}x^0)}$$

(質數的因數只有1和自己)

如果N不是質數,那會有兩個數(除了1和N自己)相乘會等於N,這裡設p和q,$1<p<N$,$1<q<N$,$N=pq$,

接著要設2^N-1不是質數是成立的,將$N=pq$代入2^N-1

$$\Rightarrow 2^{pq}-1 = (2^p)^q-1^q \xrightarrow{\text{Hint裡公式}} (2^p-1)(2^0\cdot 1^{q-1}+2^1\cdot 1^{q-2}+\cdots)$$

所以 $2^N-1=2^{pq}-1$ 是可以被拆成(2^p-1)和$(2^0+2^1+\cdots+2^{q-1})$兩數的,且p不等於1,2^p-1不可能為1,即2^N-1不是質數成立,得證 ※

數學歸納法題目:

$5n+7m=N$, where n, m, N are integers and $n \geq 0$, $m \geq 0$, $N \geq 24$。Please show that we can always find n, m to satisfy the equality. For example, $(n,m)=(2,2)$ corresponds to $5\times2+7\times2=24$ and $(n,m)=(5,0)$ corresponds to $5\times5+7\times0=25$

Ans.

當 $N=24$ 時,$(n,m)=(2,2)$; 當 $N=31$ 時,$(n,m)=(2,3)$

當 $N=25$ 時,$(n,m)=(5,0)$; 當 $N=32$ 時,$(n,m)=(5,1)$

當 $N=26$ 時,$(n,m)=(1,3)$;

當 $N=27$ 時,$(n,m)=(4,1)$;

⋮

由數學歸納法得知在 $N=24$ 時成立,那在 $N=k$ 時,也有5的非負倍數和7的非負倍數和的 n, m 配對,欲證在 $N=k+1$ 時,是否成立,如果成立即得證。

$N=k+1$ 時,可以由 $N=(k+1)-5$ 的 n, m 配對,n 加1,增加一個5的倍數,或者由 $N=(k+1)-7$ 的 n, m 配對,m 加1,增加一個7的倍數,所以 $N=k+1$ 成立,

即 $24 \leq N$ 的數皆存在5和7的非負倍數組合。

Q.E.D.