行列式判斷矩陣可逆

97中央統計

Show that $\det\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D-BA^{-1}C)$, where A and D are square matrices and A is nonsingular.

Ans.

$\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$ 列等價 $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & D-BA^{-1}C \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & D-BA^{-1}C \end{vmatrix} = \det(A)\cdot\det(D-BA^{-1}C)$

$\Rightarrow$ 假設 X, Y, 使得

$$\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ XA & XC+Y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = XA \\ D = XC+Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = BA^{-1} \\ Y = D-XC = D-BA^{-1}C \end{cases}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ BA^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & D-BA^{-1}C \end{bmatrix}\right) = \det(I)\det(I)\cdot\det(A)\cdot\det(D-BA^{-1}C)$$

$$= \det(A)\cdot\det(D-BA^{-1}C) \quad \#$$