生成樹(spanning tree)

定義:

假設 $G=(V,E)$ 為一個無向連通圖,若 H 為 G 的一個生成子圖且 H 為樹,則稱 H 為 G 的一個生成樹(spanning tree)。

定理:

假設 $G=(V,E)$ 為一個無向圖,

則

$$G \text{ 為連通圖} \longleftrightarrow G \text{ 有生成樹}.$$

注意事項:

1. $G=(V,E)$ 為一個無向連通圖,$|V|=n$,則 G 的生成樹的邊數為 $n-1$。

2. 一個圖的生成樹未必唯一。

Matrix-Tree Theorem

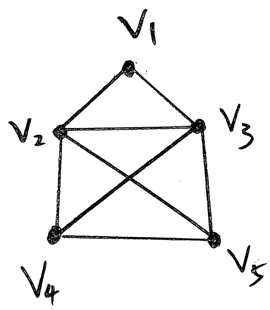
假設 $G=(V,E)$ 為一個無向簡單連通圖，其中 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，

令 $M=[m_{ij}]$ 為一個 $n\times n$ 矩陣，定義為

$$m_{ij}=\begin{cases} \deg(v_i) & , \text{if } i=j \\ 0 & , \text{if } i\neq j \text{ and } \{v_i, v_j\}\notin E \\ -1 & , \text{if } i\neq j \text{ and } \{v_i, v_j\}\in E \end{cases}$$

則 M 的所有餘因子(cofactor)皆相同且其值即為 G 的相異生成樹個數。

例題：



求相異生成樹個數。

Matrix-Tree：

$$M=[m_{ij}]=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

取 m_{11} 的 cofactor $=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=40$

$\therefore$ 40 種

推廣

K_n的相異生成樹的個數為n^{n-2}

證明：

由 Matrix-Tree theorem 可知

K_n的 Matrix-Tree 為

$$M=[m_{ij}]=\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

m_{ij}的 cofactor 為$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \\ -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$

determine 特性為不交換 row，經高斯消去法得出來新的矩陣，其 determine 不變。

$$\begin{bmatrix} n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \\ -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \xrightarrow{E_{12}^{-1}E_{13}^{-1}\cdots E_{1\,n-1}^{-1}} \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -n & n & 0 & 0 \cdots 0 \\ -n & 0 & n & 0 \cdots 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots \ \vdots \\ -n & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

矩陣不交換 column，一個 column 的倍數加到另一個 column，得出新的 matrix，其 determine 不變。

$$\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -n & n & 0 & \cdots 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ -n & 0 & \cdots 0 & n \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{coulum}]{\text{2到 }n-1\text{ 的column 乘1，加到第1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & n & 0 & \cdots 0 \\ & & n & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$$

如果為三角形的矩陣，其determine為對角線的元素相乘。

$$\therefore 1 \cdot n \cdot n \cdot n = n^{n-2}$$

$$(-1)^2 \cdot n^{n-2} = n^{n-2}$$

由 Matrix-Tree theorem 可得知

K_n 有 n^{n-2} 個相異生成樹。