圖的基本性質：

定理 1：

假設 $G=(V,E)$ 為一個無向簡單圖或多重圖，則

$$\sum_{v\in V} deg(v) = 2|E|$$

example：

How many edges do the n-cube Q_n have?

Ans. Q_n 的點數為 2^n 個，邊數為 $\frac{2^n \cdot n}{2} = n \cdot 2^{n-1}$

推廣：

對任意無向簡單圖，奇數度數的點數必有偶數個

定理 2：

假設 $G=(V,E)$ 為一個簡單無向圖，若 G 中每個點的度數至少 2，則 G 包含一個環路。

推廣：

假設 $G=(V,E)$ 為一個簡單無向圖，若 G 中每個點的度數至少 k，則 G 包含一個長度至少 $k+1$ 的環路。

定理3：

假設 $G=(V,E)$ 為一個連通無向圖且 $|V|\ge 1$，則

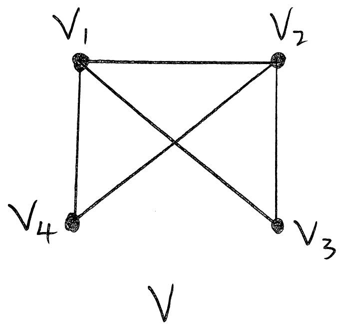
$$|E|\ge |V|-1$$

定理4：

假設 $G=(V,E)$ 為一圖，其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，令 A 為 G 相對於次序 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 的鄰接矩陣，則 A^r 的第 (i,j)-項為 v_i 到 v_j 長度為 r 的路徑有幾種。

example:

(a) Give the adjacency matrix for the following graph.



V 的 adjacency matrix A 為

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) How many walks of length 2 between V_3 and V_4?

$$A^2=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

，∴ 有2條路徑，從 V_3 到 V_4 單位長度為2。

(c) How many walks of length 3 between v_1 and v_2?

$$A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$，有5條單位長度為3的路徑從 v_1 到 v_2。

定理5：

假設 $G=(V,E)$ 為一無向圖且 G 為雙分圖

if and only if

G 中不具奇數長度的環路。

注意事項：

說明一個圖不為雙分圖時，可利用此定理可得知圖中有奇數長度的環路時，它不具雙分圖，例如 K_3, K_5 皆不為雙分圖。

超立方體 Q_n 為一個 bipartite graph（雙分圖）