證明兩三角矩陣相乘。

Show that the product of lower triangular matrices is lower triangular.

Ans.

假設 $[a_{ij}]=A$，$[b_{ij}]=B \in F^{n\times n}$ 為下三角矩陣，

即 $a_{ij}=0, \forall i<j$；$b_{ij}=0, \forall i<j$。$C=AB$。

欲證 C 為下三角矩陣，即證明 $c_{ij}=0, \forall i<j$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ii}b_{ij} + a_{i(i+1)}b_{(i+1)j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

因 $a_{ij}=0, \forall i<j$，所以 $a_{i(i+1)} = a_{i(i+2)} = \cdots = a_{in} = 0$

$$\Rightarrow c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ii}b_{ij}$$

因 $b_{ij}=0, \forall i<j$，所以 $b_{1j} = b_{2j} = \cdots = b_{ij} = 0$

$$\Rightarrow c_{ij} = 0$$

因此 C 為下三角矩陣。

85 交大電子

Let A be an upper triangular matrix and let $p(x)$ be a polynomial.

Is $p(A)$ necessarily upper triangular? Explain.

Ans. True.

欲證 $p(A)$ 為上三角矩陣，相當於證明上三角矩陣相加為上三角矩陣且上三角矩陣相乘為上三角矩陣。

假設 $A, B \in F^{n\times n}$ 為上三角矩陣，$C = A + B$

$[a_{ij}] = A$，$a_{ij} = 0, \forall i > j$；$[b_{ij}] = B$，$b_{ij} = 0, \forall i > j$.

$\Rightarrow [C_{ij}] = C$，欲證 $C_{ij} = 0, \forall i > j$.

$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$，因 $a_{ij} = 0, b_{ij} = 0, \forall i > j$

因此 $C_{ij} = 0 + 0 = 0, \forall i > j$，上三角矩陣相加為上三角矩陣

假設 $D, E \in F^{n\times n}$ 為上三角矩陣，$X = DE$

因 $[d_{ij}] = D$，$[e_{ij}] = E$ 為上三角矩陣，

$\Rightarrow d_{ij} = 0, \forall i > j$；$e_{ij} = 0, \forall i > j$

欲證 X 為上三角矩陣，相當於證明 $X_{ij} = 0, \forall i > j$.

$x_{ij} = d_{i1}e_{1j} + d_{i2}e_{2j} + \cdots + d_{ii}e_{ij} + d_{i(i+1)}e_{(i+1)j} + \cdots + d_{in}e_{nj}$

因 $d_{ij}=0, \forall i>j$，所以 $d_{i1}=d_{i2}=\cdots=d_{i(i-1)}=0$

$\Rightarrow x_{ij} = d_{ii}e_{ij} + d_{i(i+1)}e_{(i+1)j} + \cdots + d_{in}e_{nj}$

因 $e_{ij}=0, \forall i>j$，所以 $e_{ij}=e_{(i+1)j}=\cdots=e_{nj}=0$

$\Rightarrow x_{ij}=0, \forall i>j$

因此 X 為上三角矩陣。

因為兩上角矩陣相加和相乘都為上三角矩陣。

矩陣多項式為矩陣的係數和次方的相加，所以代入上三角矩陣，結果還是上三角矩陣。