[二元樹]

定理：

假設 $T=(V,E)$ 為一個二元樹，n_0 表示樹葉的個數，

n_2 表示具有 2 個兒子的節點個數，則 $n_0 = n_2 + 1$。

證明：

假設有 $|V|=n$ 點，n_0 為兒子數為 0 的點個數，也就是leaf，

n_1 為兒子數為 1 的點個數，n_2 為兒子數為 2 的點個數，

則

$$n = n_0 + n_1 + n_2$$

$\Rightarrow$ 用它們的兒子數來表示有 n 個點，

樹根不是任何點的兒子，所以個數為 1；

n_1 的兒子有 1 個，所以兒子點個數為 $1 \times n_1$；

n_2 的兒子有 2 個，所以兒子點個數為 $2 \times n_2$；

總和為 $n = 1 + n_1 + 2n_2$

改寫等式：$n_0 + n_1 + n_2 = 1 + n_1 + 2n_2$

$$\Rightarrow n_0 = n_2 + 1 \quad ※$$

二元樹的

路徑長(path length)，內部路徑長(internal path length)，

外部路徑長(external path length)。

定義：

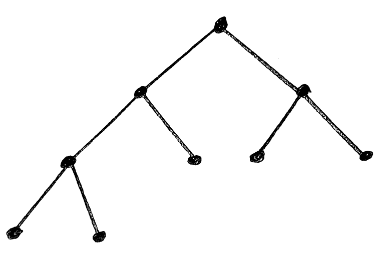
假設 $T=(V,E)$ 為一個有根樹，r 為其樹根

1. $v\in V$，r 到 v 的路徑邊數稱為 v 的路徑長(path length)。

2. T 中所有內部節點路徑長的總和稱為 T 的內部路徑長(internal path length)。

3. T 中所有樹葉路徑長的總和稱為 T 的外部路徑長(external path length)。

例題：



內部路徑長 $I = 2+1+0+1 = 4$

外部路徑長 $E = 3+3+2+2+2 = 12$

內部節點數 $i = 4$

滿足

$$E = I + 2i$$

[二元樹]

定理：

假設 T 為一個滿二元樹，

i 為內部節點個數；

I 為內部路徑長；

E 為外部路徑長。

則

$$E = I + 2i$$

推廣：

假設 T 為一個滿 m-元樹，i 為內部節點個數，

I 為內部路徑長；

E 為外部路徑長，

則

$$E = (m-1)I + mi$$