公式

(1) $(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$

(2) $(1+ax)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}ax+\binom{n}{2}a^2x^2+\cdots+\binom{n}{n}a^nx^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ix^i$

(3) $(1+x^m)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x^m+\binom{n}{2}x^{2m}+\cdots+\binom{n}{n}x^{nm}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{im}$

(4) $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n=\sum_{i=0}^{n}x^i$

(5) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}x^i$

例 1

Find a generating function for the sequence $3+4^n$. (88 成大工科)

解

假設 $a_n=3+4n$, 則 a_n 的生成函數為

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(3+4^n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}3x^n+\sum_{n=0}^{\infty}4^nx^n=3\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n$$

$$=\frac{3}{1-x}+\frac{1}{1-4x}=\frac{4-13x}{(1-x)(1-4x)}$$

例 2

(1) $(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$

所以 $(1+x)^n$ 為數列 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}, 0, 0, 0, \ldots$ 的生成函數

(2) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots=\sum\limits_{i=0}^{\infty}x^i$

所以 $\dfrac{1}{1-x}$ 為數列 1, 1, 1, ...的生成函數

(3) 將 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum\limits_{i=0}^{\infty}x^i$ 兩邊對 x 微分得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}ix^{i-1}=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)x^j$$ (90 中山電機)

所以 $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ 為數列 1, 2, 3, ...的生成函數 (94 台大資工)

兩邊同乘 x 得 $\dfrac{x}{(1-x)^2}=0+x+2x+\cdots+nx^n+\cdots=\sum\limits_{i=0}^{\infty}ix^i$

所以 $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ 為數列 0, 1, 2, ...的生成函數

(4) 重複(3)的步驟

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{d}{dx}(0+x+2x^2+\cdots+nx^n+\cdots)=\frac{d}{dx}\sum_{i=0}^{\infty}ix^i$$

$$\Rightarrow\frac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{i=1}^{\infty}i^2x^{i-1}$$

$$\Rightarrow\frac{(1+x)x}{(1-x)^3}=\sum_{i=1}^{\infty}i^2x^i=\sum_{i=0}^{\infty}i^2x^i$$

所以 $\dfrac{(1+x)x}{(1-x)^3}$ 為數列 $0^2, 1^2, 2^2, \ldots$的生成函數