判斷向量空間
84 台大

sjLin

March 23, 2022

題目

Let $V = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \boldsymbol{R}\}$, define

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$c \cdot (a_1, a_2) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{if } c = 0 \\ (a_1, a_2) & \text{if } c \neq 0 \end{cases}$$

then $(V, +, \cdot)$ is a vector space.

解:

- 向量空間V必包含零向量。
- $\exists v \in V, v + (-v) = 0$
- 純量加法分配性: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, v \in \mathbb{V}, (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$

取$c_1 = 1, c_2 = -1, (a_1, a_2) = (b_1, b_2)$
$c_1(a_1, a_2) + c_2(a_1, a_2)$
$= 1 \cdot (a_1, a_2) + (-1) \cdot (a_1, a_2)$
由條件判斷兩個純量不爲0, 視爲純量爲1
$= (a_1, a_2) + (a_1, a_2)$
$= (a_1 + a_1, a_2 + a_2) = 2(a_1, a_2)$
但純量加法分配性就不成立了
$\Rightarrow 1 \cdot (a_1, a_2) + (-1) \cdot (b_1, b_2)$
$= (1 + (-1))(a_1, a_2) = 0(a_1, a_2)$
純量爲0, 由判斷條件答案爲
$0(a_1, a_2) = 0$
與$2(a_1, a_2)$產生矛盾。
因此，所以V不爲Vector Space.