Extended binomial coefficient

(廣義二項式係數)

假設 $n \in R$, $r \in N$. 定義

$$\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-r+1)}{r!}$$

Notice:

1. $$\binom{-n}{r} = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2) \cdot \cdots (-n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{(-1)^r \left[(n)(n+1)(n+2) \cdot \cdots \cdot (n+r-1) \right]}{r!}$$

$$= (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$$

2. $$(1+x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} x^r = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} x^r$$

3. $$(1-x)^{-n} = (1+(-x))^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$$

ex.

Find the coefficient of x^5 in $(1-2x)^{-7}$.

Ans. $(1-2x)^{-7} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{7+r-1}{r} \cdot (2x)^r$

when $r=5 \longrightarrow$ the coefficient of x^5

$= \binom{7+5-1}{5} \cdot 2^5 = \binom{11}{5} \cdot 2^5$ #

---

ex. Find the coefficient of x^{80} in $(x^5+x^8+x^{11}+x^{14}+x^{17})^{10}$.

Ans. $(x^5+x^8+x^{11}+x^{14}+x^{17})^{10} = \left[x^5(1+x^3+x^6+x^9+x^{12})\right]^{10} = x^{50}(1+x^3+x^6+x^9+x^{12})^{10}$

Hint:

$(x^n-a^n) = (x-a)(a^0x^{n-1}+a^1x^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x^1+a^{n-1}x^0)$

$\Rightarrow$ 左右乘負號 $\Rightarrow (a^n-x^n) = (a-x)(a^0x^{n-1}+a^1x^{n-2}+\cdots+a^{n-1})$

單獨先看 $1+x^3+x^6+x^9+x^{12}$，先設 $y=x^3$，重寫變成 $1+y+y^2+y^3+y^4$，

由上面 Hint 可取 $a=1$，$n=5$，變數由 y 替代，得

$(1^5-y^5) = (1-y)(y^4+y^3+y^2+y^1+y^0)$

$\Rightarrow y^4+y^3+y^2+y^1+1 = \dfrac{(1-y^5)}{(1-y)}$，將 $y=x^3$ 代回此式

$\Rightarrow x^{12}+x^9+x^6+x^3+1 = \dfrac{(1-x^{15})}{(1-x^3)}$

回到 $x^{50}(1+x^3+x^6+x^9+x^{12})^{10}$ 問題

改寫成

$$x^{50}\left(\frac{(1-x^{15})}{(1-x^3)}\right)^{10}$$

$$= x^{50}(1-x^{15})^{10}(1-x^3)^{-10}$$

$$= x^{50}\cdot\left(\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(-x^{15})^i\right)\cdot\left(\sum_{r=0}^{\infty}\binom{10+r-1}{r}(x^3)^r\right)$$

討論:

分3部分 x^{50}，$\left(\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(-x^{15})^i\right)$，$\left(\sum_{r=0}^{\infty}\binom{10+r-1}{r}(x^3)^r\right)$，

湊成 x^{80} 的可能

1. x^{50} 和 $\left(\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(-x^{15})^i\right)$ 的 x^{30} 湊。

2. x^{50} 和 $\left(\sum_{r=0}^{\infty}\binom{10+r-1}{r}(x^3)^r\right)$ 的 x^{30} 湊。

3. x^{50} 和 $\left(\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(-x^{15})^i\right)$ 的 x^{15} 和

$\left(\sum_{r=0}^{\infty}\binom{10+r-1}{r}(x^3)^r\right)$ 的 x^{15} 湊。

4. 上面3個部分的 x^{80} 的係數，相加即為最終 x^{80} 的係數。

計算：

1、因 x^{50} 的係數為 1，所以 $\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(-x^{15})^i$ 的 x^{30} 係數，即為這部分 x^{80} 的係數。

當 $i=2$ 時，這部分 x^{80} 的係數為 $\binom{10}{2}\cdot(-1)^2=\binom{10}{2}$。

2、一樣 x^{50} 的係數為 1，討論 $\sum_{r=0}^{\infty}\binom{10+r-1}{r}(x^3)^r$ 的 x^{30} 係數即可。

當 $r=10$ 時，這部分 x^{80} 的係數為 $\binom{19}{10}$。

3、x^{50} 係數為 1，討論 $\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(-x^{15})^i$ 的 x^{15} 係數和 $\sum_{r=0}^{\infty}\binom{10+r-1}{r}(x^3)^r$ 的 x^{15} 係數相乘的結果即為這部分 x^{80} 的答案：

當 $i=1$，$r=5$ 時，可得這部分 x^{80} 係數為

$$\binom{10}{1}(-1)^1\cdot\binom{10+5-1}{5}=-\binom{10}{1}\binom{14}{5}。$$

4、整合 3 部分 x^{80} 係數為 $\binom{10}{2}+\binom{19}{10}-\binom{10}{1}\binom{14}{5}$ #