古典伴隨矩陣題目

90 台大數學

Hint:

$$A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = det(A) \cdot I$$

假設 $A \in F^{n\times n}$ 為可逆矩陣

(a) 求 $det(adj(A))$

(b) 求 $adj(adj(A))$

Ans.

(a)

$$A \cdot adj(A) = det(A) \cdot I$$

$$\Rightarrow det(A \cdot adj(A)) = det(det(A) \cdot I)$$

$$\Rightarrow det(A) \cdot det(adj(A)) = det\begin{bmatrix} det(A) & & & 0 \\ & det(A) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & det(A) \end{bmatrix} = (det(A))^n$$

因 A 可逆，所以 $det(A) \neq 0$，

則 $det(adj(A)) = det(A)^{n-1}$

(b)

A 可逆，其古典伴隨矩陣可逆

$$\Rightarrow A \cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot I$$

$$\Rightarrow (\operatorname{adj}(A))^{-1} = \frac{A}{\det(A)}$$

由(a)得知

解題：

$$\operatorname{adj}(A) \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = \det(\operatorname{adj}(A)) \cdot I$$

$$= \det(A)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-1} \cdot \operatorname{adj}(A)^{-1}$$

$$= \det(A)^{n-1} \cdot \frac{A}{\det(A)} = \det(A)^{n-2} \cdot A \quad \#$$