Question:

1. Prove that e is a bridge in G if and only if e is on no cycles of G.

Ans.

P: e is a bridge in G.

Q: e is on no cycles of G.

pf. $P \leftrightarrow Q$

證 $P \to Q$ 然後證 $Q \to P$

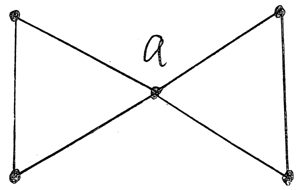
(a) 利用矛盾法證 $P \to Q$，假設 $\neg P \to Q$，證明它是錯的：bridge的定義是少了這個邊會變成不連通圖，如果不是bridge的邊，會形成一個cycle，這與e不是cycle裡的一邊產生矛盾，所以e是bridge，則e不在cycle裡

(b) 利用矛盾法證 $Q \to P$，假設 $\neg Q \to P$，證明它是錯的：e如果是cycle裡的一邊，那少了e，還是連通圖，這與e是bridge矛盾，所以e不是cycle裡的一邊，則e是bridge。

∴ 由(a)，(b)得出 e is a bridge in G if and only if e is on no cycles of G。

Question:

Draw a graph (with at most 5 nodes) that has a cut point but has no bridge.



點 a 為 cut point.

Question

Assume that for any two people x and y, x is a friend of y if and only if y is a friend of x. Show that, in any group of two or more people, there are always two people with exactly the same number of friends inside the group.

Ans. 題目的充要條件為 x是y的朋友，y是x的朋友，才能承認是朋友關係，那看作為2點連線的無向圖，題目問在朋友圈一定有相同朋友數的人嗎？這可以用朋友數當作點的 degree 和鴿籠原理證明：

討論：

1. 假設朋友圈有 n 個人，有個人和所有人都是朋友，所以這個人的 degree 為 n-1，剩下所有人的 degree 一定至少為 1，所以剩下的人的 degree 可以是 1 ~ n-1，

由鴿籠原理可得知，有 n 個人，但每個點可能的 degree 為 $1 \sim n-1$（共 $n-1$ 種），所以一定有 2 個人的 degree 會是一樣，也就是朋友數會是一樣。

2、如果有 n 個人，其中有個人沒有朋友，其 degree 為 0，那剩下 $n-1$ 個人，可選 $1 \sim n-2$ 的 degree，沒有朋友的那個人與 $n-1$ 個人合起來有 n 個人，degree 範圍為 $0 \sim n-2$，共 $n-1$ 個可以選，由鴿籠原理可知，n 個人選 $n-1$ 種，必有 2 人相同，所以至少有 2 人朋友數相同。

Question:

If G is a simple graph with 20 edges and $\overline{G}$ has 16 edges, how many vertices does G have?

Ans.

G 如果有 k 個點，其完全圖的邊數為 $\binom{k}{2}$，也會等於某個圖的邊數和其補圖的邊數的總合：

$$\binom{k}{2} = 20+16 = 36$$

$$\frac{k(k-1)}{2} = 36 \rightarrow k^2-k = 72$$

$$k^2-k-72=0$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+288}}{2} = \frac{1 \pm 17}{2} = 9, -8$$

$\because$ 點數不為負 $\therefore$ 有 9 個點

Question:

n cities are connected by a network of k highway. (A highway is defined to be a road between two cities that does not go through any intermediate cities.) Show that if $k > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, then one can always travel any two cities through connecting highways.

Ans.

題目問現在有n個點，k條邊；如果 $k > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 成立，等價存在一點可與任一兩點連接。

利用矛盾法證明，不存在一點與任兩點連接等價 $k > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，因為不存在一點與任兩點連接，所以為不連通圖，假設圖可分為兩個分量圖，兩個分量圖的點數分別為 V_1，V_2，$V_1 + V_2 = n$，則 V_1 和 V_2 的最多邊數為 $k \le \binom{V_1}{2} + \binom{V_2}{2} = \binom{V_1}{2} + \binom{n-V_1}{2}$

$$= \frac{V_1(V_1-1)}{2} + \frac{(n-V_1)(n-V_1-1)}{2} = \frac{V_1^2 - V_1}{2} + \frac{n^2 - nV_1 - n - nV_1 + V_1^2 + V_1}{2}$$

$$= \frac{2V_1^2 - 2nV_1 + n^2 - n}{2} = \frac{1}{2}(2V_1^2 - 2nV_1 + n^2 - n)$$

一次微分找極值　　　hint: $\frac{d}{dx}fg = f'g + fg'$

$$\frac{d}{dv_1}\frac{1}{2}(2V_1^2 - 2nV_1 + n^2 - n)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dv_1}(2V_1^2 - 2nV_1 + n^2 - n) = \frac{1}{2}(4V_1 - 2n) = 2V_1 - n$$

$\because 2V_1 - n = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{n}{2}$

$\therefore V_1$ 在 $\frac{n}{2}$ 有極值

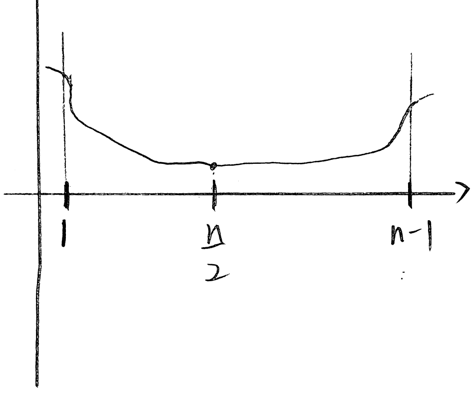
二次微分確認是極大還極小值：

$\frac{d}{dv_1}2V_1 - n = 2 \Rightarrow 2 > 0 \Rightarrow$ 圖形狀為凹型 $\cup$。

$\therefore 2V_1^2 - 2nV_1 + n^2 - n$ 在 $V_1 = \frac{n}{2}$ 有極小值。

而且 $2V_1^2 - 2nV_1 + n^2 - n$ 的定義域為 $[1, n-1]$，也就是

$2V_1^2 - 2nV_1 + n^2 - n$ 的最大值可能在 $V_1 = 1$ 或 $n-1$ 的地方，



示意圖，不為實際數據。

$\frac{1}{2}(2v_1^2-2nv_1+n^2-n)$ 代 $v_1=1$

為 $\frac{1}{2}(2-2n+n^2-n)=\frac{1}{2}(n^2-3n+2)=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$。

$\frac{1}{2}(2v_1^2-2nv_1+n^2-n)$ 代 $v_1=n-1$

$\frac{1}{2}(2(n-1)^2-2n(n-1)+n^2-n)=\frac{1}{2}(2(n^2-2n+1)-2n^2+2n+n^2-n)$

$=\frac{1}{2}(2n^2-4n+2-2n^2+2n+n^2-n)=\frac{1}{2}(n^2-3n+2)=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$

$\because$ $k\le\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$ 與 $k>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 產生矛盾。

$\therefore$ If $k>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, then one can always travel any two cities through connecting highways. 是對的。