圖的相關定義

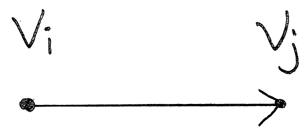
1. 一個圖(graph) G 定義為 $G=(V,E)$。

其中 $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ 是頂點的集合；

E是邊的集合，其中 V_i 和 V_j 有邊相連

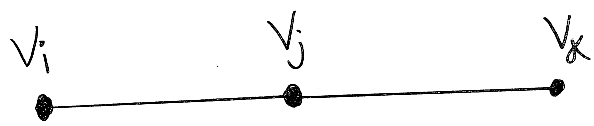
則表示成 (V_i,V_j)。

or



2、若圖中邊集合E中元素為無序對，則G為無向圖(undirected graph)。

ex.



考慮一無向圖之某一頂點V，與頂點V的邊數為此頂點之degree，記作 $deg(V)$。

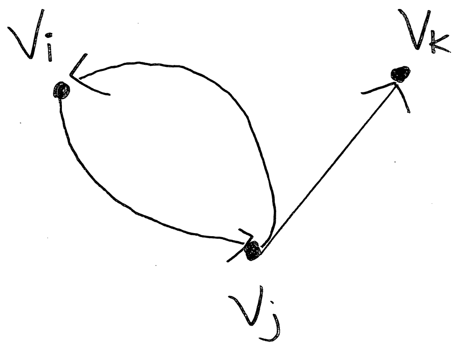
ex.

$deg(V_i)=1$

$deg(V_j)=2$

$deg(V_k)=1$

3. 若圖中邊集合E中元素為有序對，則G為有向圖(directed graph)。



考慮一有向圖之某一頂點 V。
自頂點 V 出發與其他頂點相連的邊數和為此頂點之 out-degree；
自其他頂點出發與頂點 V 相連的邊數和為此頂點之 in-degree。

ex.

out-deg$(V_i) = 1$　　in-deg$(V_i) = 1$

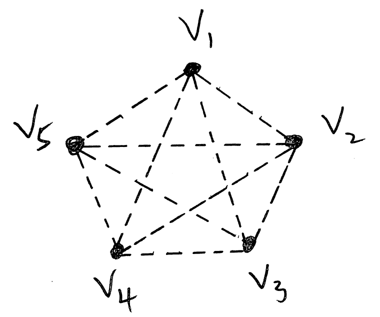
out-deg$(V_j) = 2$　　in-deg$(V_j) = 1$

out-deg$(V_k) = 0$　　in-deg$(V_k) = 1$

4. 一條自 V_1 到 V_k 之 path 為一序列 $V_1, V_2, \ldots, V_k$。
在此序列中相鄰的兩個頂點 V_i 到 V_j 之均有邊 (V_i, V_j) 相連。

假設有五個點 V_1, V_2, V_3, V_4, V_5，
實線是實際走的路；
虛線是可以走的路。這裡用無向圖解釋。

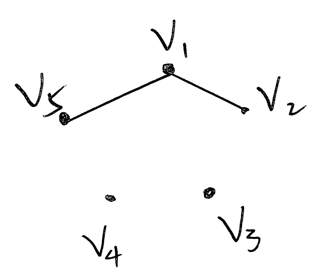
一開始的圖 G：



(此圖為完全圖)
(完全圖：任兩點均有相連)

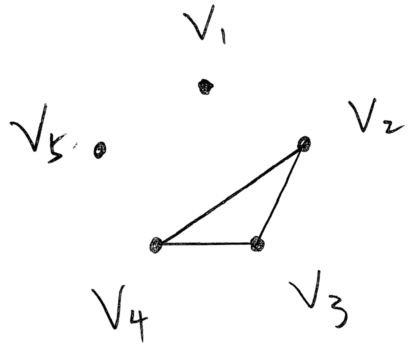
simple path 定義：
起點到終點所經過的點不重覆。
注意是不包含起點、終點。
所以 simple path 可以是

ex. (a) $V_5 \to V_1 \to V_2$ 是G中其中一simple path。



(b) $V_4 \to V_2 \to V_3 \to V_4$

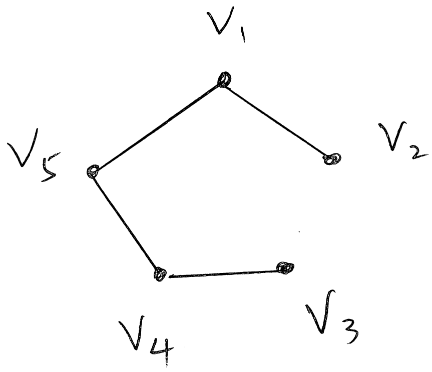
是G中其中一simple path，
也是一個 cycle。
(起點、終點相同。)



5. 若圖中任兩點均為 reachable，則此圖為連通的（connected）。

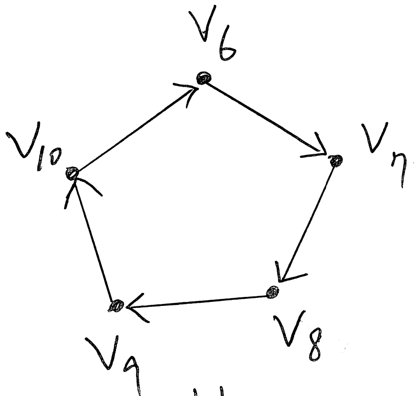
假設有有向圖、無向圖的例子

無向圖：



G

有向圖：



H

在 G 中任兩點均可 reachable：

ex. V_3 到 V_2 ： $V_3 \to V_4 \to V_5 \to V_1 \to V_2$

V_1 到 V_4 ： $V_1 \to V_5 \to V_4$

⋮

在 H 中任兩點均可 reachable：

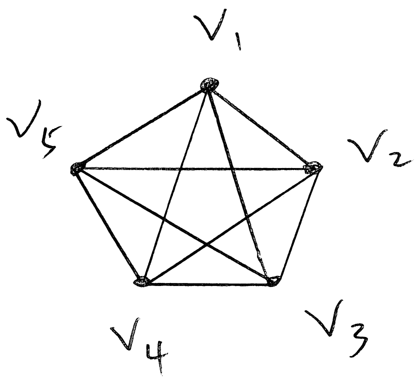
ex. V_{10} 到 V_9 ： $V_{10} \to V_6 \to V_7 \to V_8 \to V_9$

V_6 到 V_8 ： $V_6 \to V_7 \to V_8$

⋮

若一個圖中的任意兩點均有兩條以上互斥(不能有共同邊)的path可到達，則此圖為雙連通(biconnected

完全圖可為雙連通



⇓

ex.

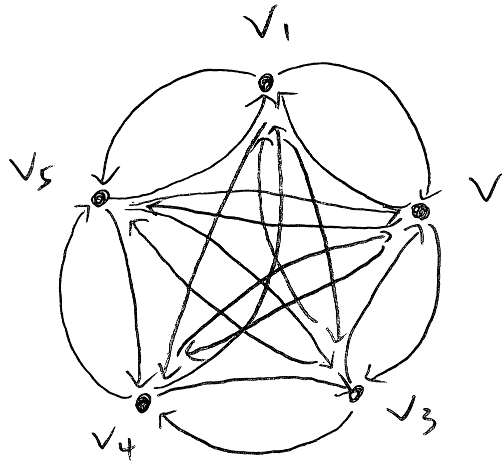
V_5到V_1： 1. $V_5 \to V_1$

2. $V_5 \to V_2 \to V_1$

V_4到V_2： 1. $V_4 \to V_2$

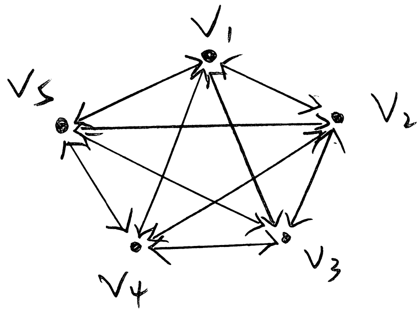
2. $V_4 \to V_3 \to V_2$

⋮



⇓

簡化



⇓

ex.

V_5到V_1： 1. $V_5 \to V_1$

2. $V_5 \to V_4 \to V_1$

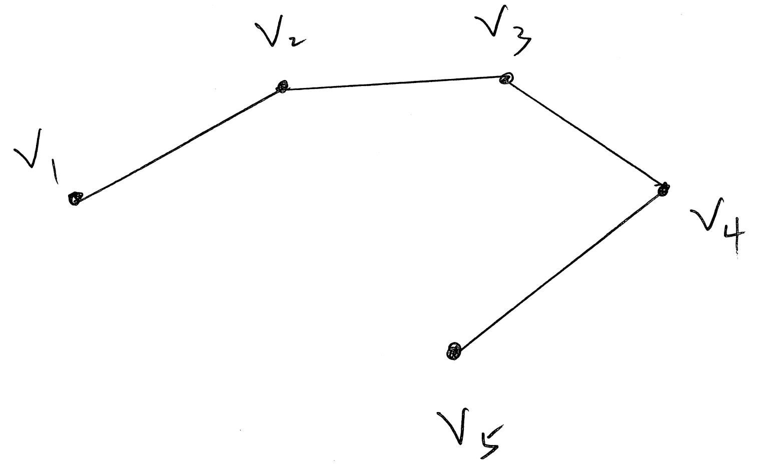
V_2到V_4： 1. $V_2 \to V_4$

2. $V_2 \to V_5 \to V_4$

⋮

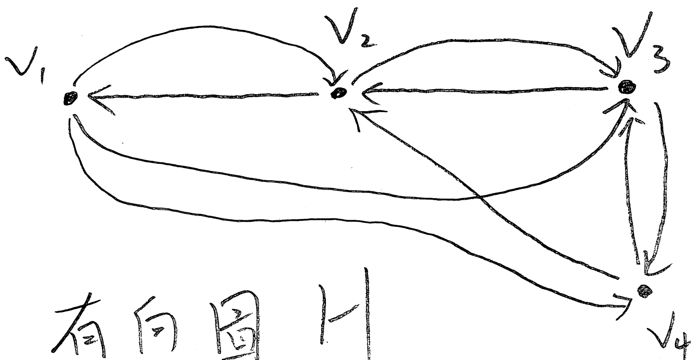
若去掉圖中某點，使得圖任兩點不為連通，則稱去掉的那點為切點(cut point)。

ex.



無向圖 G.

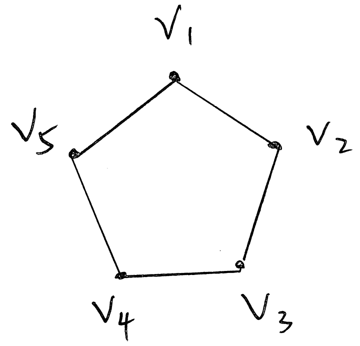
在 G 中 V_2, V_3, V_4 均為切點。



有向圖 H

在 H 中 V_2 為切點，因為沒了 V_2，其它點不能到 V_1。

6、一個圖 $G=(V,E)$ 的子圖 $H=(U,F)$ 亦為一圖，滿足 $U \subseteq V$ 且 $F \subseteq E$。



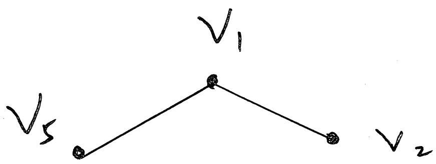
G

$$G=(V,E)$$

$$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_5),(v_5,v_1)\}$$

G的子圖H



$$H=(U,F)$$

$$U=\{v_1, v_2, v_5\}$$

$$F=\{(v_1,v_2),(v_5,v_1)\}$$

符合：$U \subseteq V$ 且 $F \subseteq E$

$$\{v_1, v_2, v_5\} \subseteq \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$\{(v_1,v_2),(v_5,v_1)\} \subseteq \{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_5),(v_5,v_1)\}$$

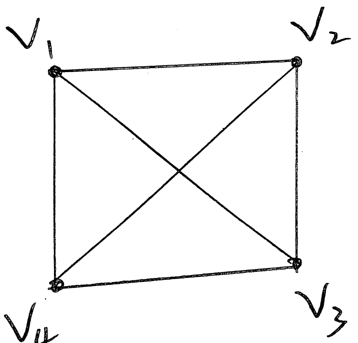
7. 樹(Tree) $T=(V,E)$ 為一圖滿足以下兩個條件：

(i) T 為連通(任兩點均可到達)，

(ii) T 的邊數為 $|V|-1$。(點數減一)

圖的生成樹(spanning tree)為包含 G 中所有點頂點的樹。(spanning tree 不唯一，minimun spanning tree 也可能不唯一)。

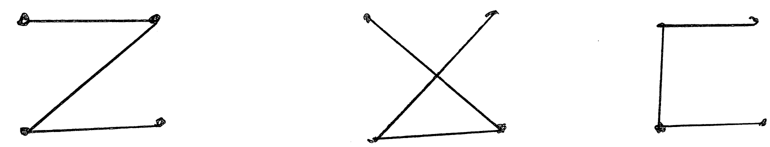
ex.



G

圖 G 中的 spanning tree 可以是

(a) (b) (c)



. . .

因為 G 為完全圖，任兩點均有邊，現在有4點，只需3條邊，就可得到一個 spanning tree，所以有 $\binom{\binom{4}{2}}{3}=\binom{6}{3}$ 種生成樹。