常見的生成函數

1、 $(1+x)^n = \binom{n}{0}\cdot x^0 + \binom{n}{1}\cdot x^1 + \binom{n}{2}\cdot x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}\cdot x^{(n-1)} + \binom{n}{n}\cdot x^n$

$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\cdot x^i$ $\Rightarrow$ $(1+x)^n$ 為數列 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \cdots, \binom{n}{n}, 0, 0, \cdots$ 的生成函數。

其他 $(1+ax)^n$ 、$(1+x^m)^n$ 和上式推導相似。

2、 $\dfrac{1}{1+x} = (-1)^0 x^0 + (-1)^1 x^1 + (-1)^2 x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i$

3、 $\dfrac{1}{1-x} = x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$

4、 $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{i=0}^{n} x^i$

策略：

想要得出某些數列的生成函數，可以嘗試 $\dfrac{1}{1-x}$，$(1+x)^n$ 的微分，再乘上 x，最後 x 代數字進去，湊成想要的答案。

$\boxed{\text{微分公式}}$

分母分子減分子分母

1. The product rule

$$(fg)' = f'g + fg'$$

2、 The quotient rule

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

微分公式

3. The chain rule:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

ex.

$f(x) = \sin(\cos(\tan x))$

$f'(x) = \left(\sin(\cos(\tan x))\right)'$ ⇒ 利用 the chain rule，將對 x 微分，拆成對 $\cos(\tan x)$ 微分

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{d(\cos(\tan x))} f(x) \cdot \frac{d}{dx}(\cos(\tan x))$$

⇒ 再利用 the chain rule 原本對 $\cos(\tan x)$ 的 x 微分，拆成對 $\tan x$ 微分

$$\Rightarrow \frac{d}{d(\cos(\tan x))} f(x) \cdot \frac{d}{d(\tan x)} \cos(\tan x) \cdot \frac{d}{dx} \tan x$$

※

$(f \circ g)'(x)$

$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$ $\xrightarrow{\text{推廣}}$ $(f \circ g \circ h \circ r)'(x)$

$= f'(g(h(r(x)))) \times g'(h(r(x))) \times h'(r(x)) \times r'(x)$

Trigonometric function

三角函數的微分:

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cot x}$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x}$

數列 1, 2, 3, ... 的 generating function

由 $\frac{1}{1-x} = \underset{x^0}{1} + x^1 + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$

左右微分可得

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{(n-1)} + (n+1)x^n + \cdots$$

$= \sum_{i=1}^{\infty} i x^{(i-1)}$ ⇒ 將它轉換成 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 的形式 ⇒ $j = i-1$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) x^j$$

數列 0, 1, 2, ..., n, ... 的生成函數

由 $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{i=1}^{\infty} i x^{(i-1)}$ ⇒ 左右乘 x

⇒ $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{i=1}^{\infty} i x^i$ ⟶ 此時 i 可以是 0 $\left(\begin{matrix} i=0 \\ ix^i = 0 \cdot x^0 \end{matrix} \right.$

不影響連加

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i x^i$$

$$= 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$$

∴ $\frac{x}{(1-x)^2}$ 為數列 0, 1, 2, 3, ..., n, ...

的 generating function #

Hint:

1. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$

2. $(f\circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ex.

$\frac{d}{dx}(1-x)^2 \Longrightarrow$ 設 $u = 1-x$

$\Longrightarrow$ 經 chain rule $\Longrightarrow \frac{d}{du}u^2 \cdot \frac{d}{dx}(1-x)$

數列 $0^2, 1^2, 2^2, \cdots$ 的生成函數

由 $\frac{x}{(1-x)^2} = 0 + x + 2x^2 + \cdots + nx^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} i x^i$,

$\Rightarrow$ 左右對 x 微分

得

$$\frac{(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 x^{(i-1)} = 1^2 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \cdots + n^2 x^{(n-1)} + \cdots$$

$\Rightarrow$ 左右乘上 x

得

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} i^2 x^i}_{\text{當}\ i=0\ \text{時為}\ 0\cdot x^0=0\text{，不影響連加，所以可以從}\ i=0\ \text{開始}} = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 x^i = 0 + 1^2 x + 2^2 x^2 + \cdots + n^2 x^n + \cdots$$

$\therefore \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ 為數列 $0^2, 1^2, 2^2, \cdots, n^2, \cdots$ 的生成函數

#