m-元樹、滿 m-元樹

定義：

假設 $T=(V,E)$ 為一個有根樹

1. 若每個內部節點至多有 m 個兒子，則稱 T 為一個 m-元樹 (m-ary tree)。當 $m=2$ 時，稱 T 為二元樹 (binary tree)。

2. 若每個內部節點皆恰有 m 個兒子，則稱 T 為一個滿 m-元樹 (full m-ary tree)。當 $m=2$ 時，稱 T 為滿二元樹 (full binary tree)。

定理：

假設 $T=(V,E)$ 為一個 m-元樹，其中 $|V|=n$，

i 為內部節點數，

l 為樹葉節點的個數。

1. $n \le mi+1$

2. $n = i + l \le mi+1 \Rightarrow l \le (m-1)i+1$

3.
$$\left\{\begin{array}{lll} (a)\ n \le mi+1 & & (b)\ l \le (m-1)i+1 \\ \Rightarrow n-1 \le mi & & \Rightarrow l-1 \le (m-1)i \\ \Rightarrow \frac{n-1}{m} \le i & , & \Rightarrow \frac{l-1}{m-1} \le i \end{array}\right\} \Rightarrow (a) 且 (b)$$

推廣：

假設 $T=(V,E)$ 為一個滿 m-元樹，其中 $|V|=n$，

i 為內部節點數目，

l 為樹葉節點數目。

$\boxed{\text{內部節點包含樹根}}$

則

$$n = \underbrace{mi}_{\text{所有兒子的數目}} + \underbrace{1}_{\text{樹根}}$$

注意事項：

假設 $T=(V,E)$ 為一個滿 m-元樹，其中 $|V|=n$，

i 為內部節點數，

l 為樹葉數。

1. 當 n 為已知時，因為 $n=mi+1$ 且 $n=l+i$，

所以 $i=\dfrac{n-1}{m}$ 且 $l=n-i=n-\dfrac{n-1}{m}=\dfrac{mn-n+1}{m}=\dfrac{n(m-1)+1}{m}$ #

2. 當 i 為已知時，

$n=mi+1$ 且 $l=n-i=mi+1-i=(m-1)i+1$ #