樹的介紹

定義：

假設 $G=(V,E)$ 為一個無向圖

1、若 G 為一個無環路 (acyclic) 的連通圖，則稱 G 為一個樹 (tree)。

2、一個只含一個點的樹稱為退化樹 (degenerate tree 或 trivial tree)

注意：

1、因為樹不含環路，因此它不含奇數長度的環路，所以樹必為雙分圖，此外，因為樹為雙分圖，所以樹必為 2-著色。

2、在連通圖中去掉環路的一邊必定保持連通，因為樹為無環路的連通圖，即樹為邊數最少的連通圖。

樹的四個等價條件： 假設 $G=(V,E)$ 為一個無迴圈的簡單無向圖，其中 $|V|\geq 2$。

1. G 為非退化樹。

2. G 中任意二點恰有唯一路徑相連

3. G 為連通圖且 G 中去掉任一邊後為不連通圖。

4. G 不含環路且若 $x,y\in V$, $\{x,y\}\notin E$，則 G 中加入一邊 $\{x,y\}$ 必含有唯一一個環路。

定理：

假設 $G=(V,E)$ 為一個無迴圈的簡單無向圖，則下列三個條件等價：

1. G 為樹。

2. G 中不含環路且 $|E|=|V|-1$

3. G 為連通圖且 $|E|=|V|-1$

定理：

假設 $T=(V,E)$ 為一個非退化樹，則 T 中至少含有 2 個懸吊點。

證明：

假設 $|V|=n$ 且 T 中的懸吊點有 k 個，

k 個點的 degree 為 1，剩下 $n-k$ 點的 degree 至少為 2。

因為 $\sum_{v\in V} deg(v) = 2|E|$ ，$|E| = n-1$

$\Rightarrow 2(n-1) \geq k\times 1 + (n-k)\times 2$

$\Rightarrow 2n-2 \geq k+2n-2k$

$\Rightarrow -2 \geq -k$

$\Rightarrow 2 \leq k$

$\therefore$ 懸吊點 k 至少有 2 個。