

由行列式判斷矩陣可逆

92 清大資應

If x is a nonzero vector in \mathbb{R}^n and $Ax=0$, then $\det(A)=0$.

Ans.

$\exists x \neq 0, Ax=0 \Rightarrow A$ 不可逆, 存在列基本矩陣 E_1, E_2, \dots, E_k ,

假設 $P = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1$, 使得 $A = PB$, 其中 B 為上三角矩陣。

$$\Rightarrow \det(A) = \det(P) \det(B)$$

$\Rightarrow \det(P)$ 是由 $1, -1, k$ 的乘積而來, 其中 $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$. 假設為 C 。

\Rightarrow 因 A 不可逆, B 的對角元素中, 必有零存在。

$$\text{所以 } \det(B) = 0$$

$$\Rightarrow \det(A) = C \cdot 0 = 0 \quad \#$$