Trace 證明題 90 台大電機

Prove that

(a) If A is an $m\times n$ matrix such that $AA^T=0$ or $A^TA=0$, then $A=0$.

(b) If A is an $n\times n$ matrix such that $A=A^T$ and $A^2=0$, then $A=0$.

Ans.

$A\in F^{m\times n}$, $A^T\in F^{n\times m}$, $AA^T\in F^{m\times m}$, $A^TA\in F^{n\times n}$

若 $AA^T=0$,

$$tr(AA^T)=\sum_{i=1}^{m}(AA^T)_{ii}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}A_{ik}(A^T)_{ki}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ik}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2=0$$

$\Rightarrow a_{ik}^2=0,\ \forall 1\le i\le m,\ \forall 1\le k\le n$

$\Rightarrow a_{ik}=0,\ \forall 1\le i\le m,\ \forall 1\le k\le n$

因此 $A=0$

同理,若 $A^TA=0$

$$tr(A^TA)=\sum_{i=1}^{n}(A^TA)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(A^T)_{ik}(A)_{ki}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{ki}\cdot a_{ki}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{ki}^2$$

$\Rightarrow a_{ki}^2=0,\ \forall 1\le i\le n,\ \forall 1\le k\le m$

$\Rightarrow a_{ki}=0,\ \forall 1\le i\le n,\ \forall 1\le k\le m$

因此 $A=0$，$\therefore$ $tr(AA^T)=tr(A^TA)=0$，$A=0$

(b)

因為 $A=A^T$，所以 $AA^T=A^2$，

$A^2=0$，

因由 (a) 證明 $AA^T=0$ or $A^TA=0$，則 $A=0$ 可知

$A=A^T$ 且 $A^2=0$，則 $A=0$。