判斷有理數

說例 1 下列何者為有理數？何者為實數？ (1) 2 (2) -3 (3) 0 (4) $\frac{1}{5}$ (5) $-\frac{2}{3}$ (6) $\sqrt{5}$ (7) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ (8) $\frac{4+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$。

【解】:

- 有理數: 可以分成兩整數形式的分數。
  所以有2, -3, 0, $\frac{1}{5}$, $-\frac{2}{5}$,
  $\frac{4+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{8-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}-4}{4-2} = 2$
- 實數爲不含虛數之值, 以上皆爲實數。

有理數+無理數

說例2 (1) 設 a, b, c, d, e 為有理數，$\sqrt{e}$ 不為有理數，
若 $a+b\sqrt{e}=c+d\sqrt{e}$，求證：$a=c$ 且 $b=d$。
(2) a, b 為有理數，c, d 不為有理數，
若 $a+c=b+d$，是否便知 $a=b$ 且 $c=d$？

【解】:

1. $a-c=(d-b)\sqrt{e}$, 假設$(d-b)$不為零,
   則$\sqrt{e}=\frac{a-c}{d-b}$為有理數矛盾。

   假設$(d-b)$為零, 即$b=d$, $a-c=0\cdot\sqrt{e}\Rightarrow a=c$
2. 策略: 找一反例, 有反例則答案為否。
   $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 2,\ 1+\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

說例 3 設 x, y 為有理數，若 $(2+\sqrt{5})x+(1-\sqrt{5})y=8-2\sqrt{5}$，則 $x+y=$ ______ 。

【解】:

$2x+\sqrt{5}x+y-\sqrt{5}y=8-2\sqrt{5}$

等式整理 $\Rightarrow (2x+y-8)+(x-y+2)\sqrt{5}=0$

$\Rightarrow (x-y+2)=0$, 否則 $\sqrt{5}=\frac{(2x+y-8)}{(x-y+2)}$ 爲有理數矛盾。

$$\begin{cases} 2x+y & =8 \\ x-y & =-2 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x,\ y)=(2,\ 4)$

有理數- 直接證法

說例 4 由有理數之四則運算之結果仍為有理數，依此，若 $3a+2b$，$2a-b$ 為有理數，求證 a、$b\in Q$。

【證明】：

$$\begin{cases} 3a+2b &= p \\ 2a-b &= q \end{cases} \Rightarrow p,q\in\mathbb{Q}$$

計算(a,b), 形式要是p,q組成

計算b

$a+3b=(p-q)\Rightarrow a=(p-q)-3b$代入第二式

$2p-2q-6b-b=q\Rightarrow 2p-3q=7b\Rightarrow b=\frac{2p-3q}{7}$

計算a, 由第二式變換

$a=\frac{q+b}{2}$代剛得出來的b

$a=\frac{1}{2}\cdot\frac{2p+4q}{7}=\frac{p+2q}{7}$

- $\because p \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Q}, 2q \in \mathbb{Q} \Rightarrow p + 2q \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{p+2q}{7} \in \mathbb{Q}$
  $\therefore a \in \mathbb{Q}$

  $\because 2p \in \mathbb{Q}, 3q \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2p - 3q \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{2p-3q}{7} \in \mathbb{Q}$
  $\therefore b \in \mathbb{Q}$
- $3a + 2b$, $2a - b \in \mathbb{Q}$
  Pf. $(3a + 2b) + (2a - b) \in \mathbb{Q}$
  $\because a, b \in \mathbb{Q}$
  $\therefore 5a + b \in \mathbb{Q}$