

鴿籠原理題目:

Question:

Please check if the following statement is true and explain the reason. "During the first 49 days after John graduates from NCKU, he sends his resume out to different companies. If he sends out at least one resume every day, but no more than 110 resumes in total. Then, there is a period of consecutive days during which he sends out exactly 27 resumes."

Ans. 題目問 49 天, 每天至少投一封履歷, 共不超過 110 封, 問是否存在一段天數內投了 27 封。

假設 a_i 為那個第 i 天投的信數目, 則 $1 \leq a_i$, $\sum_{i=1}^{49} a_i \leq 110$

假設 b_i 為從第 1 天到第 i 天所投的信累加數目。

$$\text{則 } b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_1 + a_2$$

\vdots

$$b_{49} = a_1 + a_2 + \dots + a_{49}$$

\Rightarrow 因每天都會投 1 封, 所以

$$1 \leq b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_{49} \leq 110$$

現在假設存在從第 i 天到第 j 天共投了 27 封，

$$\text{即 } b_j - b_i = 27 \Rightarrow b_j = b_i + 27,$$

因 i 有 49 種，所以編號 j 有 49 種可能，即 b_{j_1}, b_{j_2}, \dots 等。

因 b_i 的範圍為

$$1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{49} \leq 70$$

\Rightarrow 同時加 27 後的範圍：

$$28 \leq b_1 + 27 < b_2 + 27 < \dots < b_{49} + 27 \leq 97$$

$$\text{即 } 28 \leq b_{j_1} < b_{j_2} < \dots < b_{j_{49}} \leq 97$$

將 $\{b_1, b_2, \dots, b_{49}\}$ 和 $\{b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_{49}}\}$ 混在一起

排序，因為每天至少投一封信，所以 $b_1 \sim b_{49}$ 互不相同，

然後各加 27 之後的 $b_{j_1} \sim b_{j_{49}}$ 也不同，混合起來的範圍

為 要排序大小，然後看有沒有相等的

$$1 \leq \{b_i \mid i=1, 2, \dots, 49\}, \{b_{j_i} \mid i=1, 2, \dots, 49\} \leq 97$$

總共投信有 $1 \sim 97$ ，97 種，但 b_i 有 49 種，對應的 b_j 有 49 種

共 $49 + 49 = 98$ ，由鴿籠原理知 b_i 和 b_j 有相同值，

也就存在第 i 天到第 j 天共投了 27 封信。