等價關係

假設 $\sim$ 為 A 上的一個二元關係滿足

1. $\forall x \in A$, $x \sim x$ (反身性, reflexive)

2. $\forall x, y \in A$, 若 $x \sim y$, 則 $y \sim x$ (對稱性, symmetric)

3. $\forall x, y, z \in A$, 若 $x \sim y$ 且 $y \sim z$, 則 $x \sim z$ (遞移性, transitive)

則稱 $\sim$ 為 A 上的一個等價關係 (equivalence relation)

---

ex.

假設 $n \in \mathbb{Z}^+$, $A = \mathbb{Z}$, R 為 A 上的二元關係定義為 $(x, y) \in R \longleftrightarrow n \mid (x-y)$, 其中 $n \mid (x-y)$ 表示 n 整除 $x-y$, 證明 R 為 A 上的一個等價關係。

Ans.

1. $\forall x \in \mathbb{Z}$, 因為 $n \mid (x-x) = n \mid 0$, 所以 xRx, 因此 R 具反身性。

2. $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, 假設 xRy, 則 $n \mid (x-y)$
$\Rightarrow n \mid y-x = n \mid -(x-y)$, 所以 yRx, 因此 R 具對稱性。

3. $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}$，假設 xRy 且 yRz，則 $n\mid(x-y)$ 且 $n\mid(y-z)$

$\Rightarrow n\mid (x-y)+(y-z)$

$\Rightarrow n\mid (x-z)$，所以 xRz，因此 R 具遞移性。

函數

假設 $f: A\rightarrow B$ 為一函數

1. A 稱為 f 的定義域 (domain)

2. B 稱為 f 的對應域 (codomain)

3. 若 $S\subseteq A$，定義 $f(S)=\{f(x)\mid x\in S\}$

4. 若 $S'\subseteq B$，定義 $f^{-1}(S')=\{x\in A\mid f(x)\in S'\}$

5. $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ 稱為 f 的值域 (range)。

ex.

假設 $f: [-5,5] \to R$ 定義為 $f(x)=x^2$

Ans.

1. f 的值域(range)為 $[0,25]$。

2. 若 $S=[1,3]$，則 $f(S)=[1,9]$。

3. 若 $S'=[4,9]$，則 $f^{-1}(S')=[-3,-2]\cup[2,3]$

可逆函數

假設 $f: A\to B$ 為一函數，若存在一個函數 $g: B\to A$ 使得

$$g\circ f = I_A \text{ 且 } f\circ g = I_B$$

則稱 f 為一個可逆函數(invertible function)。

* g 必定唯一，稱 f 的反函數(inverse function)，記作 f^{-1}

* f 為可逆函數 $\leftrightarrow$ f 為一對一且映成函數。