99 台大資工

Question:

If $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ and $a>1$, find (a,b).

Ans.

Because $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ ab & a+b & 1 \\ 0 & ab & a+b \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=4 & -① \\ ab=1 & -② \end{cases}$$

① $\Rightarrow$ $b=4-a$ 代入第二式

$a(4-a)=1 \Rightarrow -a^2+4a=1 \Rightarrow a^2-4a+1=0$

$\Rightarrow a=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4}}{2} = 2\pm\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ 因 $a>1$，所以

$a=2+\sqrt{3}$，$b=4-2-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$

$\therefore (a,b)=(2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3})$