

湊反矩陣的題目. 84 淡江資工

Let A and B denote $n \times n$ invertible matrices. If $A+B$ is invertible, show that $A^{-1} + B^{-1}$ is invertible and find a formula for $(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$.

Ans. hint: 可逆矩陣相乘還是可逆矩陣
策略用 $A, B, (A+B), A^{-1}, B^{-1}, (A+B)^{-1}$ 湊答案

因 $A, B, (A+B)$ 為可逆, 所以能湊成 $A^{-1} + B^{-1}$, 那說明 $A^{-1} + B^{-1}$ 可逆.

$$\begin{aligned} (A(A+B)^{-1}B)^{-1} &= B^{-1}(A+B)A^{-1} \\ &= B^{-1}AA^{-1} + B^{-1}BA^{-1} = B^{-1} + A^{-1} \quad \# \end{aligned}$$

$$\text{因 } B^{-1} + A^{-1} = (A(A+B)^{-1}B)^{-1}$$

$$\text{所以 } (B^{-1} + A^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B \quad \#$$