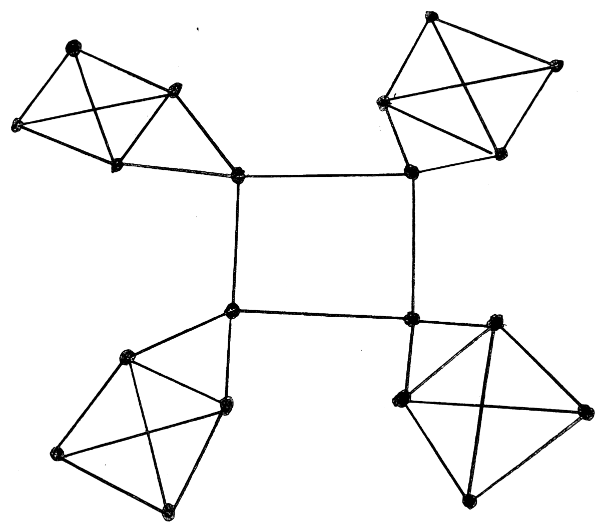
生成樹個數 - Matrix-Tree 題目

1.

(a) Assume that each vertex has a unique id, how many different spanning trees in the following figure?

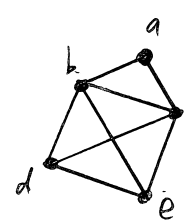


Ans.

思路:

如果將圖的 Matrix-Tree 寫出來算 cofactor，手算繁雜，所以簡化圖形，然後再算 Matrix-Tree 的 cofactor。

觀察圖中有相似的子圖



，

其 Matrix-Tree 為

$$[m_{ij}] = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{array},$$

拿 M_{aa} 來算 cofactor 為

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{生成樹個數。}$$

Determine 計算： Montante 法（Bareiss）降階。

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

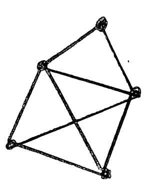
$$+(-1)\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

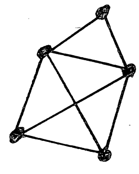
※ 3x3 直接用 萊布尼茲公式（Leibniz formula）

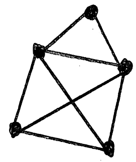
$$= 4(36-1-1-3-4-3) + (-9-1-1-3+1-3) - (3+4-1+1+12+1)$$

$$+(-1-12-1+1-3-4)$$

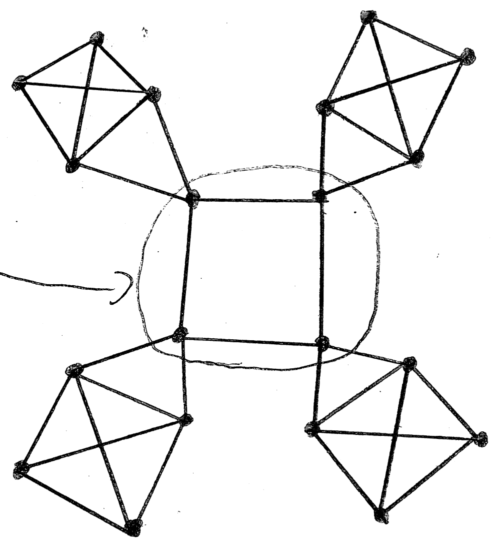
$$= 4\times 24 - 16 - 20 - 20 = 96 - 56 = 40$$

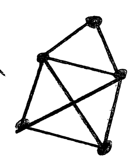
所以  能生成的生成樹有40種，

接著看整體有4個  圖，且點是各不一樣（點有編號），所以有 $40\times 40\times 40\times 40 = 40^4$ 種搭配。

四個  要有連接，才能算是生成樹，所以

看中間



4個邊取3個，才能使  互有連接。

$\Rightarrow \binom{4}{3}\cdot 40^4 = 4\times 40^4$ 種 #