Hamilton circuits.

1. Prove that a complete graph K_n, where $n \geq 3$ being a prime number, can have its edges partitioned into $\frac{1}{2}(n-1)$ disjoint Hamilton circuits.

Pf. K_n 為完全圖的 n 個 nodes，有 $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ 個 edges。

先講結論： Hamilton circuit 的邊數為 n，

K_n 不具共同邊的 Hamilton circuit 個數 至多為

n條1個 Hamilton

故有 $\frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{n} = \frac{1}{2}(n-1)$ 個 Hamilton circuit。

欲證當 n 為奇質數時，K_n 恰有 $\frac{1}{2}(n-1)$ 個不具共同邊的 Hamilton circuit 只需在 K_n 中造 $\frac{1}{2}(n-1)$ 個不具共同邊的 Hamilton circuit 即可。

(a) 每次位移一格 $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to n \to 0$ 為一個 Hamilton circuit，此為無向圖。

(b) 每次位移兩格 $0 \to 2 \to 4 \to \cdots \to n-1 \to 1 \to 3 \to \cdots \to n$。

(c) 位移三格 $0 \to 3 \to 6 \cdots\cdots$

編號順序為取 mod n 即為目前的編號。

直到取位移量為 $\frac{n-1}{2}$，再取更上面的位移量會有重覆的 Hamilton circuit，因此 K_n 在 n 為奇質數時，會有 $\frac{1}{2}(n-1)$ 個不具共邊的 Hamilton circuit。

example:

有19個學生，每天每個學生左右相鄰的人都不一樣，這種情況至多有幾天？

ans. 19為奇質數，連線當作相鄰的標記，就是找不共邊的 Hamilton circuit。

$\frac{19-1}{2} = 9$ 天 #