Extended binomial coefficient

(廣義二項式係數)

假設 $n \in R, r \in N$. 定義

$$\binom{n}{r} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)}{r!}$$

Notice:

1. $$\binom{-n}{r} = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdot\cdots(-n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{(-1)^r\left[(n)(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+r-1)\right]}{r!}$$

$$= (-1)^r\binom{n+r-1}{r}$$

2. $$(1+x)^{-n} = \sum_{r=0}^{n}\binom{-n}{r}x^r = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n+r-1}{r}x^r$$

3. $$(1-x)^{-n} = (1+(-x))^{-n} = \sum_{r=0}^{n}\binom{-n}{r}(-x)^r = \sum_{r=0}^{n}\binom{n+r-1}{r}x^r$$

ex.

Find the coefficient of x^5 in $(1-2x)^{-7}$.

Ans. $(1-2x)^{-7} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{7+r-1}{r} \cdot (2x)^r$

when $r=5 \longrightarrow$ the coefficient of x^5

$$= \binom{7+5-1}{5} \cdot 2^5 = \binom{11}{5} \cdot 2^5 \quad \#$$

---

ex. Find the coefficient of x^{80} in $(x^5+x^8+x^{11}+x^{14}+x^{17})^{10}$.

Ans. $(x^5+x^8+x^{11}+x^{14}+x^{17})^{10} = [x^5(1+x^3+x^6+x^9+x^{12})]^{10} = x^{50}(1+x^3+x^6+x^9+x^{12})^{10}$

Hint:

$(x^n-a^n) = (x-a)(a^0x^{n-1}+a^1x^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x^1+a^{n-1}x^0)$

$\Rightarrow$ 左右乘負號 $\Rightarrow (a^n-x^n) = (a-x)(a^0x^{n-1}+a^1x^{n-2}+\cdots+a^{n-1})$

單獨先看 $1+x^3+x^6+x^9+x^{12}$，先設 $y=x^3$，重寫變成 $1+y+y^2+y^3+y^4$，

由上面 Hint 可取 $a=1$，$n=5$，變數由 y 替代，得

$(1^5-y^5) = (1-y)(y^4+y^3+y^2+y^1+y^0)$

$\Rightarrow y^4+y^3+y^2+y^1+1 = \dfrac{(1-y^5)}{(1-y)}$，將 $y=x^3$ 代回此式

$\Rightarrow x^{12}+x^9+x^6+x^3+1 = \dfrac{(1-x^{15})}{(1-x^3)}$

回到 $x^{50}(1+x^3+x^6+x^9+x^{12})^{10}$ 問題

改寫成

$$x^{50}\left(\frac{(1-x^{15})}{(1-x^3)}\right)^{10}$$

$$= x^{50}(1-x^{15})^{10}(1-x^3)^{-10}$$

$$= x^{50}\cdot\left(\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(-x^{15})^i\right)\cdot\left(\sum_{r=0}^{10}\binom{10+r-1}{r}(x^3)^r\right)$$

討論:

分3部分 x^{50}, $\left(\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(-x^{15})^i\right)$, $\left(\sum_{r=0}^{10}\binom{10+r-1}{r}(x^3)^r\right)$,

湊成 x^{80} 的可能

1. x^{50} 和 $\left(\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(-x^{15})^i\right)$ 的 x^{30} 湊。

2. x^{50} 和 $\left(\sum_{r=0}^{10}\binom{10+r-1}{r}(x^3)^r\right)$ 的 x^{30} 湊。

3. x^{50} 和 $\left(\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(-x^{15})^i\right)$ 的 x^{15} 和

$\left(\sum_{r=0}^{10}\binom{10+r-1}{r}(x^3)^r\right)$ 的 x^{15} 湊。

4. 上面3個部分的 x^{80} 的係數,相加即為最終 x^{80} 的係數。

計算：

1、因x^{50}的係數為1，所以$\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(-x^{15})^i$的$x^{30}$係數，即為這部分$x^{80}$的係數。

當$i=2$時，這部分x^{80}的係數為$\binom{10}{2}\cdot(-1)^2=\binom{10}{2}$。

2、一樣x^{50}的係數為1，討論$\sum_{r=0}^{10}\binom{10+r-1}{r}(x^3)^r$的$x^{30}$係數即可。

當$r=10$時，這部分x^{80}的係數為$\binom{19}{10}$。

3、x^{50}係數為1，討論$\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(-x^{15})^i$的$x^{15}$係數和$\sum_{r=0}^{10}\binom{10+r-1}{r}(x^3)^r$的$x^{15}$係數相乘的結果即為這部分$x^{80}$的答案：

當$i=1$，$r=5$時，可得這部分x^{80}係數為

$$\binom{10}{1}(-1)^1\cdot\binom{10+5-1}{5}=-\binom{10}{1}\binom{14}{5}。$$

4、整合3部分x^{80}係數為$\binom{10}{2}+\binom{19}{10}-\binom{10}{1}\binom{14}{5}$ #