漢米爾頓環路(Hamiltonian cycle),

漢米爾頓路徑(Hamiltonian path).

假設 $G=(V,E)$ 為不含孤立點的一個無向簡單或多重圖,其中 $|V|\geq 3$。

1. 若存在一個環路經過 G 中每一點恰一次,除起點(終點)為2次,則稱 G 有漢米爾頓環路(Hamiltonian cycle)。

2. 若存在一個路徑經過 G 中每一點恰一次,則稱 G 有漢米爾頓路徑(Hamiltonian path)。

注意事項:

Hamiltonian cycle 是 NP-Complete 的問題,並無很好的演算法去解決。

但有一些明顯的必要條件來判斷 Hamiltonian cycle。

1. $\forall v\in V$, $deg(v)\geq 2$

2. If $\exists v\in V$, $deg(v)=2$, then v 的二邊必在 cycle 中。

3. 若 $\exists v\in V$, $deg(v)\geq 2$,已知 v 相鄰邊中有二邊在 cycle 中,則其它與 v 相鄰的邊,必不在 cycle 中。

超立方體 Q_n，$n\geq 2$ 有 Hamiltonian cycle。

定理：

n 個點的有向完全圖 K_n^* 必具有有向的漢米爾頓路徑。

定理：

假設 $G=(V,E)$ 為一個無迴圈的無向圖，其中 $|V|=n\geq 3$，

若

$$\deg(x)+\deg(y)\geq n-1,\ \forall x,y\in V,\ x\neq y.$$

則 G 具有漢米爾頓<u>路徑</u>（Hamiltonian path）。

推廣：

假設 $G=(V,E)$ 為一個無迴圈的無向圖，其中 $|V|=n\geq 3$，

若

$$\forall v\in V,\ \deg(v)\geq \frac{n-1}{2}$$

則 G 具有漢米爾頓路徑（Hamiltonian path）

定理：

假設 $G=(V,E)$ 為一個無迴圈的無向圖，其中 $|V|=n\geq 3$，若

$$deg(x)+deg(y)\geq n,\ \forall x,y\in V \text{ 且 } x,y \text{ 不相鄰。}$$

則 G 有漢米爾頓<u>環路</u>(Hamiltonian cycle)。

推廣：

假設 $G=(V,E)$ 為一無迴圈的無向圖，$|V|=n\geq 3$，若

$$\forall v\in V,\ deg(v)\geq \frac{n}{2}$$

則 G 具有漢米爾頓<u>環路</u>(Hamiltonian cycle)。

注意事項：

1、當 $n\geq 3$ 時，K_n 中因任意二點皆有邊相連，所以必具有漢米爾頓環路。

2、假設 $G=(V_1\cup V_2,E)$ 為一連通的雙分圖

(a) 若 G 具 Hamiltonian cycle，則 $|V_1|=|V_2|$。

(b) 若 G 具 Hamiltonian path，則 $\big||V_1|-|V_2|\big|\leq 1$。

3. 改爲第2項：

當 $m, n \geq 2$ 時，

(a) $K_{m,n}$ 具漢米爾頓環路 $\longleftrightarrow$ $m=n$

(b) $K_{m,n}$ 具漢米爾頓路徑 $\longleftrightarrow$ $|m-n| \leq 1$