# Euclidean Algorithm

歐幾里德演算法又稱輾轉相除法，即

$$\begin{cases} \gcd(n,0) = 0, \text{ if } n > 0 \\ \gcd(m,n) = \gcd(n, m \mod n), \text{if } m > n \end{cases}$$

假設$m \geq n$，令$r_0 = m, r_1 = n$，不斷地利用歐幾里德演算法

$$\begin{aligned}
r_0 &= q_1 r_1 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_1 r_2 + r_3, & 0 \leq r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n, & 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_n r_n
\end{aligned}$$

则$\gcd(m,n)=\gcd(r_0,r_1)=\gcd(r_1,r_2)=\cdots=\gcd(r_{n-2},r_{n-1})=\gcd(r_{n-1},r_n)=\gcd(r_n,0)=r_n$

## 例題

### 94 中山資工

題目：

Find all of the possible solutions of $250x + 111y = 7$, where both $x$ and $y$ are integers.

Ans.

$$
\begin{aligned}
250 &= 2 \times 111 + 28 \\
111 &= 3 \times 28 + 27 \\
28 &= 1 \times 27 + 1
\end{aligned}
$$

從最後一個式子代回去。

$$1 = 28 - 27$$

$$1 = 28 - (111 - 3 \times 28)$$

整理

$$1 = (-1) \times 111 + 4 \times 28$$

$$1 = (-1) \times 111 + 4 \times (250 - 2 \times 111)$$

整理

$$1 = (-9) \times 111 + 4 \times 250$$

寫成通式(小的爲負，大的爲正)

$$1 = (-9 + 250k) \times 111 + (4 - 111k) \times 250,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

左右同乘7

$$7 = 7(-9 + 250k) \times 111 + 7(4 - 111k) \times 250,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

所以$x = 7(4 - 111k),\ y = 7(-9 + 250k),\ \forall k \in \mathbb{Z}$