

反矩陣, 古典伴隨矩陣, 和行列式關係 題目

89 交大 II

If the entries of matrix A are integers, and $\det(A)$ is 1 or -1, then the entries of A^{-1} are integers.

Ans.

假設 $\text{adj}(A) = [b_{ij}]$, $A = [a_{ij}]$.

$$b_{ij} = \text{cof}(a_{ji}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji})$$

因 A 的元素都為整數, 所以 $\det(A_{ji})$ 為整數.

因此, $\text{adj}(A) = [b_{ij}]$ 的元素皆為整數.

$$\Rightarrow A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A), \det(A) = \pm 1$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \pm \text{adj}(A)$$

所以 A^{-1} 的元素皆為整數。