注意事項 Attention 4-11

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$$

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-x)^i}{i!}$$

$$\Rightarrow e^x+e^{-x}=2\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)$$

$\Rightarrow \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots$，同理 $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots$，下列三個公式為指數生成函數中常用的公式

公式

(1) $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots=\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$

(2) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots=\displaystyle\sum_{i\text{ even}}\frac{x^i}{i!}$

(3) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{x^1}{1!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots=\displaystyle\sum_{i\text{ odd}}\frac{x^i}{i!}$

例 27

求 n 件相異物允許重複取 r 件排列的方法數

解

物品 1 到物品 n 由於允許重複，所以可選 0, 1, 2, …次，對應的指數生成函數皆為 $1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots$，總共情形對應的指數生成函數為

$$A(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^n=(e^x)^n=e^{nx}$$

則 $\frac{x^r}{r!}$ 的係數為所求的方法數, 因為 $e^{nx}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(nx)^r}{r!}=\sum_{r=0}^{\infty}n^r\frac{x^r}{r!}$, 所以 $\frac{x^r}{r!}$ 的係數為 n^r

例 28

In how many ways can four of letters in ENGINE be arranged? (98 東吳資管)

解

因為 E 有二個, 所以 E 出現次數的指數生成函數為 $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}$

因為 N 有二個, 所以 N 出現次數的指數生成函數為 $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}$

因為 G 有一個, 所以 G 出現次數的指數生成函數為 $1+\frac{x}{1!}$

因為 I 有一個, 所以 I 出現次數的指數生成函數為 $1+\frac{x}{1!}$

總共出現情形的指數生成函數為 $A(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}\right)^2$, 因為總共要選 4 個, 所以 $\frac{x^4}{4!}$ 的係數即為所求

$A(x)=(1+2x+2x^2+x^3+\frac{1}{4}x^4)(1+2x+x^2)$, x^4 的係數為 $2+2+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

因此 $\frac{x^4}{4!}$ 的係數為 $\frac{17}{4}(4!)=102$

注意事項 Attention 4-12

另外一類排列組合的問題為物品放到箱子的問題, 在前面我們談到當相同球放到相異箱子時, 我們考慮每個箱子的生成函數。當 r 個相異物放到 n 個相異箱子時, 此時我們必需考慮每個箱子的指數生成函數