

證明的題目:

Question:

Assume N is a positive integer, please show that the statement "if $2^N - 1$ is prime, then N is prime" is true using proof by contrapositive.

Ans. contrapositive: 反證法

即證

"If N is not prime, then $2^N - 1$ is not prime."

Hint:

$$(a^n - x^n) = (a - x)(a^{n-1}x^0 + a^{n-2}x^1 + a^{n-3}x^2 + \dots + a^1x^{n-2} + a^0x^{n-1})$$

(質數的因數只有1和自己)

如果 N 不是質數，那會有兩個數(除了1和 N 自己)相乘會等於 N ，這裡設 p 和 q ， $1 < p < N$ ， $1 < q < N$ ， $N = pq$ ，

接著要證 $2^N - 1$ 不是質數是成立的，將 $N = pq$ 代入 $2^N - 1$

$$\Rightarrow 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1^q \xrightarrow{\text{Hint 裡公式}} (2^p - 1) \left((2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \dots + 1 \right)$$

所以 $2^N - 1 = 2^{pq} - 1$ 是可以被拆成 $(2^p - 1)$ 和 $((2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \dots + 1)$ 兩

數的，且 p 不等於1， $2^p - 1$ 不可能為1，即 $2^N - 1$ 不是質數成立，得證 \star

數學歸納法題目:

$5n + 7m = N$, where n, m, N are integers and $n \geq 0, m \geq 0$,

$N \geq 24$. Please show that we can always find n, m to satisfy the equality. For example, $(n, m) = (2, 2)$ corresponds

to $5 \times 2 + 7 \times 2 = 24$ and $(n, m) = (5, 0)$ corresponds to

$$5 \times 5 + 7 \times 0 = 25$$

Ans.

當 $N = 24$ 時, $(n, m) = (2, 2)$; 當 $N = 31$ 時, $(n, m) = (2, 3)$

當 $N = 25$ 時, $(n, m) = (5, 0)$; 當 $N = 32$ 時, $(n, m) = (5, 1)$

當 $N = 26$ 時, $(n, m) = (1, 3)$;

當 $N = 27$ 時, $(n, m) = (4, 1)$;

...

由數學歸納法得知在 $N = 24$ 時成立, 那在 $N = k$ 時, 也有 5 的非負倍數和 7 的非負倍數和的 n, m 配對, 欲證在 $N = k+1$ 時, 是否成立, 如果成立即得證。

$N = k+1$ 時, 可以由 $N = (k+1) - 5$ 的 n, m 配對, n 加 1, 增加一個 5 的倍數, 或者由 $N = (k+1) - 7$ 的 n, m 配對, m 加 1, 增加一個 7 的倍數, 所以 $N = k+1$ 成立,

即 $24 \leq N$ 的數皆存在 5 和 7 的非負倍數組合。

Q.E.D.