88 淡江數學

假設 A 為 $n\times n$ 矩陣且 $A^n=0$，證明 $I-A$ 為可逆矩陣

並求 $(I-A)^{-1}$.

Ans、

令 B 為 $I-A$ 的反矩陣，使 $B(I-A)=I$，$(I-A)B=I$，

因 $(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1})=I-A^n$，又 $A^n=0$，

所以 $I-A^n=I$。

則 $(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1})$ 為 $(I-A)$ 的右反矩陣。

$$(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1})(I-A)=(I+A+\cdots+A^{n-1})-(A+A^2+\cdots+A^n)$$

$$=I-A^n \Rightarrow A^n=0 \Rightarrow I-A^n=I.$$

所以 $(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1})$ 為 $(I-A)$ 的左反矩陣.

因此，$(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1})$ 為 $(I-A)$ 的反矩陣，

$(I-A)$ 為可逆矩陣.

※

90 師大 數學

假設 $A\in F^{n\times n}$ 為可逆矩陣，則

證明

(1) A^T 為可逆矩陣 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$。

(2) A^H 為可逆矩陣 $(A^H)^{-1}=(A^{-1})^H$

Ans.

策略：找左、右反矩陣來證明可逆。

(1) 令 B 為 $(A^T)^{-1}$ 的反矩陣，$B=A^T$

找左反矩陣

$$\Rightarrow A^T(A^T)^{-1}=I=A^T(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=I^T=I$$

找右反矩陣

$$\Rightarrow (A^T)^{-1}A^T=I=(A^{-1})^TA^T=(AA^{-1})^T=I^T=I$$

$$\therefore (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T \quad \#$$

(2)

$$A^H(A^H)^{-1}=I=A^H(A^{-1})^H=(A^{-1}A)^H=I^H=I$$

$$(A^H)^{-1}A^H=I=(A^{-1})^HA^H=(AA^{-1})^H=I^H=I$$

$$\therefore (A^H)^{-1}=(A^{-1})^H \quad \#$$

91 成大 統計

(1). Let J_n be the $n\times n$ matrix each of whose entries is 1. Show that

$$(I-J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1} J_n .$$

(2). Similarly, find the inverse of $I-M_n$, where M_n is the $n\times n$ matrix each of whose entries is k.

Ans.

(1).

$$(I-J_n)\left(I-\frac{1}{n-1}J_n\right) = I - \frac{1}{n-1}J_n - J_n + \frac{1}{n-1}J_n^2$$

$$\left(I-\frac{1}{n-1}J_n\right)(I-J_n) = I - J_n - \frac{1}{n-1}J_n + \frac{1}{n-1}J_n^2$$

因 $J_n^2 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & n \end{bmatrix} = n\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = nJ_n$

$$\Rightarrow I - \frac{1}{n-1}J_n - J_n + \frac{n}{n-1}J_n = I$$

$$\therefore (I-J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1}J_n$$

(2).

令 $I+\alpha M_n$，$\alpha \in F$，使得 $(I-M_n)(I+\alpha M_n)=I$

$$(I-M_n)(I+\alpha M_n) = I+\alpha M_n - M_n - \alpha M_n^2$$

$$M_n^2 = \begin{bmatrix} k & \cdots & k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k & \cdots & k \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} nk^2 & \cdots & nk^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ nk^2 & \cdots & nk^2 \end{bmatrix} = nk \begin{bmatrix} k & \cdots & k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k & \cdots & k \end{bmatrix} = nkM_n$$

$\Rightarrow I+\alpha M_n - M_n - \alpha nk M_n = I$

$\Rightarrow \alpha M_n - M_n - \alpha nk M_n = 0$

$\Rightarrow \alpha - 1 - \alpha nk = 0$

$\Rightarrow \alpha - \alpha nk = 1$

$\Rightarrow \alpha(1-nk) = 1$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{1-nk}$

則. $(I+\alpha M_n) = \left(I + \dfrac{1}{1-nk} M_n\right)$

$\therefore (I-M_n)$ 的反矩陣為 $I+\dfrac{1}{1-nk}M_n$