Question:

Show that if G is a bipartite simple graph with v vertices and e edges, then $e \le \frac{v^2}{4}$.

Ans.

完全二分圖 $K_{m,n}$ 的總邊數為 mn，點數為 $m+n$，

現在有 v 個點，則分 m 點和 $v-m$ 點，為

$$e = m(v-m),$$
$$= mv - m^2$$

對 $mv-m^2$ 微分找極值，

$\frac{d}{dm} mv - m^2 = v - 2m \Rightarrow v-2m=0$，$m = \frac{v}{2}$ 時，有極值。

$\frac{d}{dm} v - 2m = -2 < 0 \Rightarrow$ 為凸型 $\cap$，$m=\frac{v}{2}$ 時，有極大值，

將 $m=\frac{v}{2}$ 代入 $mv-m^2 = \frac{v}{2}v - \frac{v^2}{4} = \frac{v^2}{4}$ $\therefore e \le \frac{v^2}{4}$ 成立，但這是建立在 v 為偶數時，是對的。

$\Rightarrow$ 再討論 v 為奇數，則 m 代 $\frac{v-1}{2}$ 或 $\frac{v+1}{2}$，

$\Rightarrow \left(\frac{v-1}{2}\right)v - \left(\frac{v-1}{2}\right)^2 = \frac{v^2-1}{4} < \frac{v^2}{4}$

且 $\left(\frac{v+1}{2}\right)v - \left(\frac{v+1}{2}\right)^2 = \frac{v^2-1}{4} < \frac{v^2}{4}$ $\therefore e \le \frac{v^2}{4}$ 成立 #

Question:

In an undirected complete graph with n distinct vertices,

(a) How many complete subgraphs are contained in the graph?

Ans. 求有幾種完全子圖，假設子圖有k點，其中k有可能為 1, 2, ⋯, n，n個點取k個形成子圖的方法數為

$\binom{n}{k}$ ⇒ 討論k的可能為

1. $k=1$，$\binom{n}{1}$ 種子圖

2. $k=2$，$\binom{n}{2}$ 種子圖

⋮

n. $k=n$，$\binom{n}{n}$ 種子圖

$$\boxed{\text{hint: } (x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}}$$

總結為 $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n} = \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k}\right] - \binom{n}{0}$

$= (1+1)^n - 1 = 2^n - 1$

(b) How many ways can undirected complete graph be oriented (面向) into a directed complete graph? (i.e. Orient each edge in chosen direction for all edges.)

Ans. 題目問將一個 K_n 的完全圖變成有向圖有幾種可能。

K_n 的邊數為 $\binom{n}{2}$ 條，每條有 2 種方向可以選，

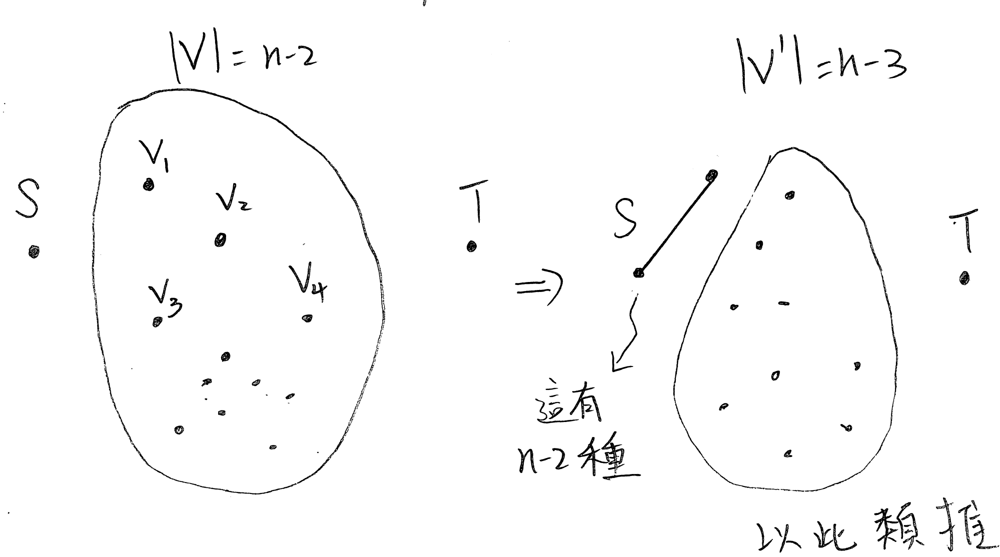
所以有 $\overbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdots\cdots 2}^{\binom{n}{2}} = 2^{\binom{n}{2}}$ 種有向圖可能。

(c) Given two selected vertices S and T, how many paths of length n-1 with distinct vertices from S to vertex T are contained in the graph?

Ans. 題目的圖為完全圖，也就代表每個點之間是互相連接的。

題目問從 S 點走到 T 點，走的路徑長為 n-1 條且不重覆點，即為走 n 點的 Hamiton path，去掉 S 點和 T 點，剩 n-2 個點。

示意圖：



以此類推

一開始S點可選$n-2$種點連接，選完之後，在可選點中，去掉選中的點，現在可選的點有$n-3$個，直到可選點剩一個，而剩最後的那個點會去連接T點，形成不重覆點且路徑為$n-1$的路徑圖。

共有$(n-2)(n-3)(n-4)\cdots 1=(n-2)!$種路徑圖。