對角化 產生 相似矩陣

$A = PDP^{-1}$，稱 A 和 D 為相似矩陣。

A、D有相同eigenvalue
trace也一樣、
determine一樣、
rank一樣。

對角化的作法為計算出 A 的 eigenvalues 和 eigenvectors.

假設為 2x2 的矩陣A，計算出來的eigenvalues 為兩相異的實數，那這兩個相異eigenvalues 會產生對應相異的 eigenvectors，這裡簡單想會有 2 個 eigenvectors.

因為一個eigenvalue 可能產出 2個以上不同 basis 的 eigenvectors.

然後也有可能計算出 eigenvalues 會有重疊。

這裡先撇除重疊eigenvalue 和多的 eigenvector.

計算出來有兩個 eigenvalue λ_1 和 λ_2，

λ_1 對應的 eigenvector 用 x_1 代稱，

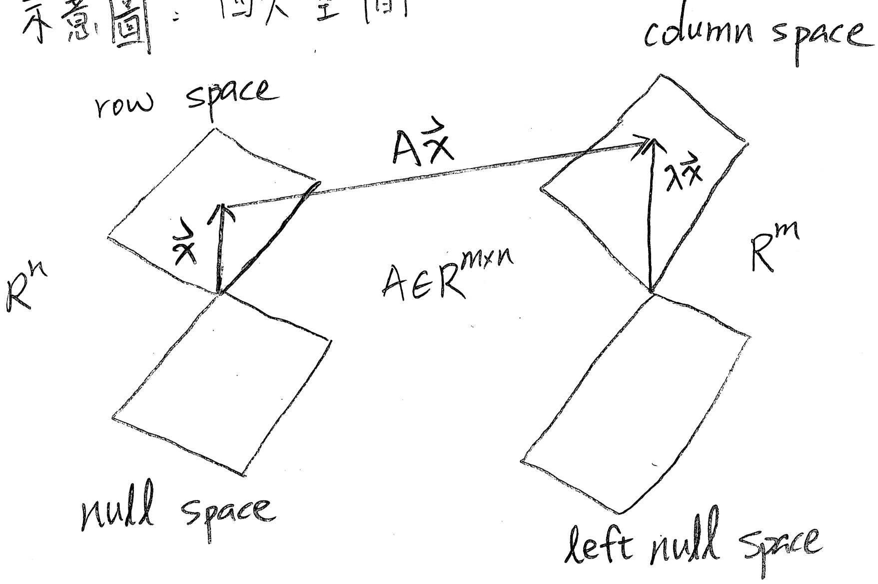
λ_2 對應的 eigenvector 用 x_2 代稱。

x_1 和 x_2 都屬於 Row space，經 A 轉換後，會到 column space，會和原本在 row space 時，僅有 eigenvalue 的倍數關係。

ex. $A \in R^{n\times n}$，$\lambda \in R$，$x \in R^{n\times 1}$

$\Rightarrow$ A為 n×n 的 matrix，其某個 eigenvalue 為實數，這個 eigenvalue 所對應的 eigenvector 為 n×1 的 matrix，而這個 eigenvector 存在於 row space.

示意圖：四大空間



說明：Row space 和 Null space：
row space 和 null space 垂直，所以任意 row space 的 basis 和任意 null space 的 basis 內積為 0，但這兩 space 創建出 n 維的空間。

說明：column space 和 left null space：
column space 和 left null space 共同創建 m 維的空間，column space 的任意 basis 和 lef null space 的任意 basis 垂直，所以內積為 0。

以下是自行理解，不一定是對的。

在n維下的特性要在另一個n維的空間下，要有相同特性，那轉換的矩陣A就起了轉換不同維度的工作，當然A也可以在同一個維度轉換，例如，投影，旋轉，拉長，縮短…等。

這裡要求某個n維向量$\vec{x}$，經A轉換之後，僅是某個λ倍數的n維向量$\vec{x}$，再一次經A轉換是λ^2倍數的n維向量$\vec{x}$，這也就說明row space和column space是在同個維度。

寫出公式為

$$A\vec{x}=\lambda\vec{x} \xrightarrow{\text{再次轉換}} A^2\vec{x}=\lambda^2\vec{x}$$

$$\longrightarrow A^3\vec{x}=\lambda^3\vec{x} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow A^n\vec{x}=\lambda^n\vec{x}$$

A：是個矩陣

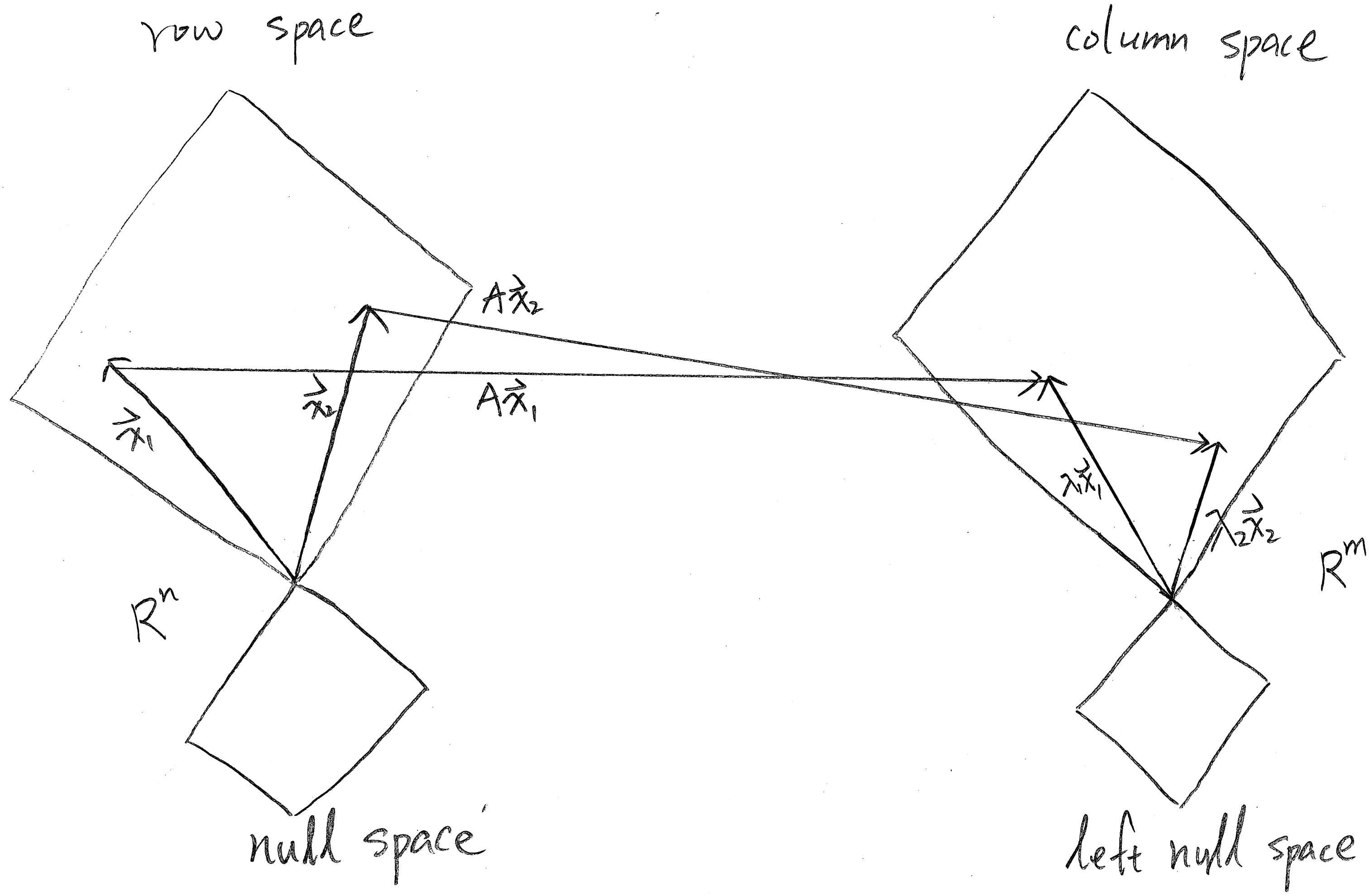
$\vec{x}$：row space的某個basis向量

λ：存在n維裡的純量

這裡的λ也就是A的特徵值(eigenvalue)，

$\vec{x}$為λ對應的特徵向量(eigenvector)；

$\vec{x}$只需滿足存在row space的basis即可。



假設A為n×n，計算出n個相異的eigenvalue，對應也有n個不同eigenvector，而這n個eigenvector的每個向量皆為row space的basis，且n個eigenvector能組成row space，所以其eigenvector的matrix必定能找到反矩陣。

單一向量轉換：

$$A\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1 \rightarrow A^n\vec{x}_1 = \lambda_1^n\vec{x}_1$$

$$A\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2 \rightarrow A^n\vec{x}_2 = \lambda_2^n\vec{x}_2$$

$$\vdots$$

將這些向量寫成矩陣

$$\Rightarrow A[\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3 \cdots \vec{x}_n] = [\lambda_1\vec{x}_1\ \lambda_2\vec{x}_2 \cdots \lambda_n\vec{x}_n]$$

$$= [\vec{x}_1\ \vec{x}_2 \cdots \vec{x}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

因為 $[\vec{x}_1\ \vec{x}_2 \cdots \vec{x}_n]$ 為組成 row space 的 basis 且能創構 n 維度，所以 null space 並無需要補到 n 維，即 $[\vec{x}_1\ \vec{x}_2 \cdots \vec{x}_n]$ 可找到反矩陣(也就可逆)。

這裡用 P 代表 $[\vec{x}_1\ \vec{x}_2 \cdots \vec{x}_n]$，$D$ 代表 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$，

D 為一個僅斜對角有元素的矩陣，其餘元素為零。

(Gilbert 那本用 X 代表 $[\vec{x}_1\ \vec{x}_2 \cdots \vec{x}_n]$，$\Lambda$ 代表 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$)

(D 也就為一個對角矩陣)

$$\therefore AP = PD \Rightarrow A = PDP^{-1}$$

$$\Rightarrow A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PDIDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^3 = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} = PDIDIDP^{-1} = PD^3P^{-1}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$$

相似矩陣特性：假設A與B相似

1、$rank(A) = rank(B)$

2、$det(A) = det(B)$

3、$tr(A) = tr(B)$

$*\ P$ = eigenvector matrix

$\Rightarrow tr(AP) = tr(PB)$

4、

A^T 與 B^T 相似，因為 eigenvalue 不變。

A^k 與 B^k 相似，因為A的eigenvalues變k倍，
那B的eigenvalues也變k倍，
A^k和B^k的eigenvalues還是相同。

5、若B、C相似，A，B相似，
則A、C相似。

推廣

如果矩陣A不是n×n的矩陣，那就無法轉換n維到自己的n維，也就無法找到eigenvalue和eigenvector。

假設A為m×n的矩陣，

那A^T為n×m矩陣，

⇒ A^TA會形成n×n的矩陣，且為對稱矩陣。

* 矩陣的轉置矩陣eigenvalue不變，但eigenvector會變，除非它是對稱矩陣，對稱矩陣的eigenvector不變。

$$\Rightarrow \quad A^TA = PDP^{-1} = PD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}P^{-1} = PD^{\frac{1}{2}}P^{-1}PD^{\frac{1}{2}}P^{-1}$$

所以可以利用和自己的轉置矩陣相乘，找到特性值(eigenvalue)和特性向量(eigenvector)。

例題：

遊戲A勝率0.8，遊戲B勝率0.4，遊戲A和遊戲B需同時進行，當玩了n次之後，總體勝率為多少？（假設n很大）。

Ans.

Markov matrix：$M=\begin{bmatrix}0.8 & 0.4\\0.2 & 0.6\end{bmatrix}$

找M的eigenvalue：

$$\begin{vmatrix}0.8-\lambda & 0.4\\0.2 & 0.6-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1.4\lambda+0.4=0$$

$\lambda=1$, 0.4

當$\lambda=1$時，eigenvector $x_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

當$\lambda=0.4$時，eigenvector $x_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A=PDP^{-1}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.4\\0.2 & 0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}^{-1}$$

$\Rightarrow$ 玩n次 $\Rightarrow \begin{bmatrix}0.8 & 0.4\\0.2 & 0.6\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0.4\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^n & \\ & \underbrace{0.4^n}_{\text{n很大時，趨近0}}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -2\end{bmatrix}\cong\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}0.66 & 0.66\\0.33 & 0.33\end{bmatrix}$$

∴ 總體勝率約66% #

相似矩陣題目：

Let $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$ and t be a scalar. Compute e^{At}.

找A的 eigenvalue

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -8 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -6\lambda+\lambda^2+8 = (\lambda-4)(\lambda-2),\ \lambda=2,4$$

當 $\lambda_1=2$ 時，eigenvector $x_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

當 $\lambda_2=4$ 時，eigenvector $x_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

即 $A=PDP^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

由 eigenvalue 的特性：

$$\Rightarrow e^{At}=Pe^{Dt}P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ 2e^{2t} & 4e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4e^{2t}-2e^{4t} & -e^{2t}+e^{4t} \\ 8e^{2t}-8e^{4t} & -2e^{2t}+4e^{4t} \end{bmatrix}$$

#