

分枝(branch), 弦(chord)

假設 $G=(V, E)$ 為一個無向連通圖,

T 為 G 的 spanning tree, 則 T 的任一邊
稱 T 的分枝(branch)。

是 G 的邊但不為 T 的邊, 稱為 T 的一個
弦(chord)。

注意事項:

假設 $G=(V, E)$ 為無向連通圖, T 為 G 的生成樹,
其中 $|V|=v, |E|=e$ 。

1. G 的任一 spanning tree, 必含有 $v-1$ 個 branch,
 $e-(v-1)=e-v+1$ 個弦(chord)。
2. 若 e_i 為 T 的一個弦, 加入 e_i 到 T 形成 T' , 則 T' 必含
一個環路 C 且環路 C 必包含 e_i , 稱
 C 相對於 e_i 的基本環路
(fundamental cycle corresponding to e_i)

3. 因為 T 包含 $e - v + 1$ 個弦，所以有 $e - v + 1$ 個基本環路，稱這些環路為相對於 T 的基本環路系統
(fundamental system of cycle corresponding to T)。

4. 因為 T 中去掉任一分枝 e_i 變成不連通且形成 $=$ 顆樹，所以存在 G 的一個包含 e_i 的切集，
這個切集稱為相對於 e_i 的基本切集
(fundamental cut set corresponding to e_i)

5. 因為 T 包含 $v - 1$ 個 branch，也就是有 $v - 1$ 個基本切集，
稱這些切集為相對於 T 的基本切集系統
(fundamental system of cut set corresponding to T)。

定理：

假設 G 為一個無向連通圖，對 G 的任意環路 C ，
及任意 spanning tree T ， C 與 T 的補圖 \bar{T} 至少有一
邊共邊。

證明：

利用矛盾法證，環路 C 與 \bar{T} 沒有共邊，那環路
的所有邊會在 T 上，但是 T 是生成樹，不會有環路
產生，所以矛盾，得出任意環路 C 與 \bar{T} 至少有一條
共邊。

定理：

假設 G 為一個無向連通圖，對 G 的任意切集 X
及任意生成樹 T ，切集 X 內的一條邊必與 T 有一條
共同邊。

Hint:

去掉切集內的邊，圖會變成不連通圖。

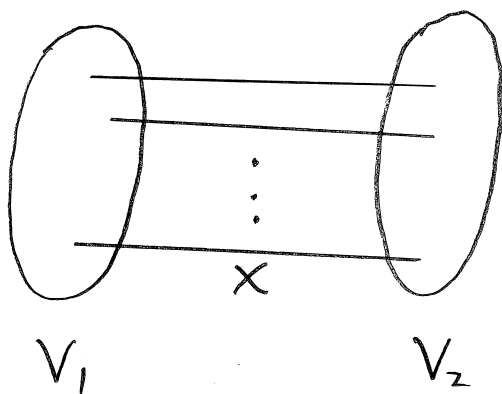
定理:

假設 G 為一個無向連通圖，對 G 的任意切集 X 及任意環路 C ， X 與 C 必包含偶數個共同邊。

證明:

切集 X 的邊會使圖形成類似 bipartite 的樣子

將 V 分割成 V_1 和 V_2 ， V_1 內的點不互連， V_2 內的點不互連。



顯然環路必經過 X 內偶數次。