Dijkstra's shortest path algorithm:(只能用在非負權圖)

(固定一點,而那點到所有點的最短距離)

定義:最短距離函數

假設 $G=(V,E)$ 為一個加權圖

1. $\forall x, y \in V$, $P=(x, v_1, v_2, \cdots, v_n, y)$ 為一條從 x 到 y 的路徑,定義 P 為個長度 (length),為 $wt(x, v_1) + wt(v_1, v_2) + wt(v_2, v_3) + \cdots + wt(v_{n-1}, v_n) + wt(v_n, y)$。

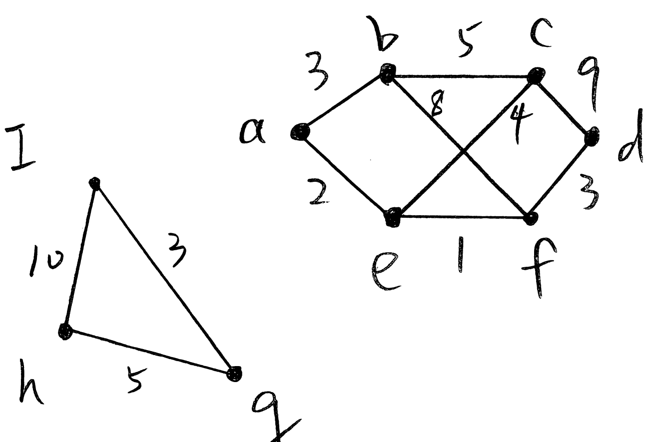
2、定義最短距離函數 (the shortest distance function) d,

$d: V \times V \longrightarrow R^+ \cup \{0, \infty\}$

解釋:1. $V \times V$ 指 2 個點

2. $R^+ \cup \{0, \infty\}$ 指正實數且包含 0 和無限大。

例題



$d(a, a) = 0$

$d(a, g) = \infty$

$d(a, b) = 3$

$d(a, c) = 6$

$d(h, I) = 8$

Pseudo code:

Algorithm: Dijkstra's algorithm

Input: A connected, weighted graph $G=(V,E)$ in which all weights are positive with source vertex a.

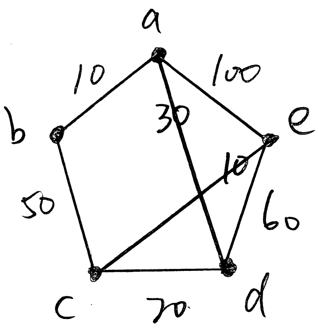
Output: The distance $D[v]$ from a to v.

1. $S := \{a\}$
2. $D[a] = 0$
3. for each $v \in V-\{a\}$ do
4. $D[v] := wt(a,v)$ // 指 a 到 v 的一個邊的距離，
   // 不相鄰為 ∞。
5. while $|S| \neq |V|$ do

   /* Choose a vertex w in V-S such that D[w] is minimum, then add w to S. If not, skip it */
6. for each $v \in V-S$ do
7. $D[v] := \min(D[v], D[w]+wt(w,v))$

例題：

利用 Dijkstra's algorithm 求 a 到各點的最短距離：



Ans.

利用 Dynamic programming 方式表格解，距離右下解標示上個點。
（由左至右，由上而下填表）

S\D	b	c	d	e
{a}	10a	∞a	30a	100a
{a,b}	X	60b	30a	100a
{a,b,d}	X	50d	X	90d
{a,b,d,c}	X	X	X	60c

d(a,b) = 10
d(a,d) = 30
d(a,c) = 50
d(a,e) = 60

得出最小生成樹為：