最小生成樹（minimum spanning tree）

定義：

假設 $G=(V,E)$ 為一個圖，$\forall e\in E$，指定一實數到 e，稱為 e 的權（weight of e），記作 $wt(e)$，此時稱 G 為一個加權圖（weighted graph）。

定義：

假設 $G=(V,E)$ 為一個連通的無向加權圖

1. 若 $T=(V,E')$ 為 G 的一個生成圖，定義 T 的所有邊的權為

$$wt(T)=\sum_{e\in E'} wt(e)$$

稱 $wt(T)$ 為 T 的權（weight of T）。

2. G 所產生的所有生成樹中最小權的，稱為最小生成樹（minimum spanning tree）。

最小生成樹演算法

Kruskal's algorithm:

Input: A connected weighted graph $G=(V,E)$, $|V|=n$

Output: A minimum spanning tree T of G

```
T := empty graph

for i := 1 to n-1
    Choose an edge of minimum weight that does not
        form a cycle when added to T

    T := T with e added
end
```

說明：

每次找圖中權重最小的邊，並檢查加入生成樹是否形成 cycle，如果沒有cycle，就加入T。

定理：

設 $G=(V,E)$ 為一個連通的加權圖，則 Kruskal's 演算法會找出 G 的一個最小生成樹。

Prime's algorithm

Input: A connected weighted weighted graph $G=(V,E)$, $|V|=n$, and

$V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Output: A minimum spanning tree T of G

$T :=$ a minimum-weight edge incident to v_1

for $i := 1$ to $n-2$

Choose an edge of minimum weight incident to a vertex in T and not forming a cycle in T if added to T.

$T := T$ with e added

end

說明:

從圖找一點開始，假設為 v_1，和 v_1 相鄰的邊裡，找最小權重的邊，並檢查是否加入會產生cycle，假設加入最小權重邊的另一端點為 v_2，接著在 v_1 和 v_2 相鄰的邊中，找最小權重邊 檢查加入生成樹是否產生迴圈，直到生成樹邊數目為 $|V|-1$ 為止，即可得到 minimum spanning tree T in G.

定理:

設 $G=(V,E)$ 為一個連通的加權圖，則 Prime's 演算法會找出最小生成樹。

時間複雜度:

1. Kruskal's algorithm

所需時間複雜度為 $O(m\log m)$,

其中 m 為邊數。

2. Prime's algorithm

所需時間複雜度為 $O(n^2)$,

其中 n 為點數。