

平面圖 (planar graph) :

假設 G 為一個無向簡單或多重圖，若 G 可被繪於平面上使得所有邊的交點只在 G 的點上，即所有邊皆不產生交叉，則稱 G 為一個平面圖 (planar graph)，否則稱 G 為非平面圖 (nonplanar graph)。

定理：

Kuratowski's theorem

假設 G 為一個圖，則 G 為平面圖 $\leftrightarrow G$ 不含子圖與 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚。

定理：

Euler formula

假設 $G=(V, E)$ 為一連通平面圖， $|V|=v$ ， $|E|=e$ ， r 表示區域的個數，則

$$\underline{v - e + r = 2}$$

推廣：

假設 $G=(V, E)$ 為一平面圖且 G 含 M 個分量圖， $|V|=v$ ， $|E|=e$ ， r 表示區域數，則

$$v - e + r = M + 1$$

推廣:

假設 $G=(V,E)$ 為一個無迴圈的簡單連通平面圖,

其中 $|V|=v$, $|E|=e \geq 2$, r 表示區域的個數, 則

1. $\frac{3}{2}r \leq e \leq 3v-6$

2. 若 G 不含任何三角形, 則 $e \leq 2v-4$

Attention:

1. 當 $e > 3v-6$ 時, G 不為平面圖, 這可用來否定一張圖是否為平面圖的方法。

2. 在不含三角形的簡單連通圖中, 當 $e > 2v-4$ 時, G 不為平面圖。

$K_5, K_{3,3}$ 不為平面圖

3. 雙分圖為不含三角形的圖。

例題:

證明 K_5 不為平面圖。

Ans.

$$K_5 \Rightarrow \begin{cases} \text{number of nodes} : 5 \\ \text{number of edges} : \binom{5}{2} = 10 \end{cases}$$

檢查 $e > 3v-6 \rightarrow$ 如果符合 \rightarrow 圖不為平面圖

$$10 > 3 \times 5 - 6 = 9 \quad \therefore K_5 \text{ 不為平面圖。}$$

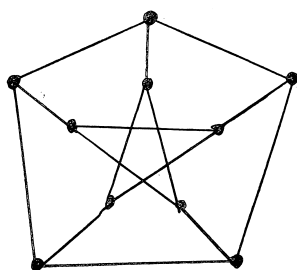
推廣

假設 $G=(V, E)$ 為一個無迴圈的簡單連通平面圖，
其中 $|V|=v$, $|E|=e \geq 2$, r 表示區域的個數，若每個環路至少由 k 個邊所圍成，其中 $k \geq 3$ ，則

$$e \leq \left(\frac{k}{k-2}\right)(v-2)$$

例題：

證明 Petersen graph 不為平面圖



$$v = 10$$

$$e = 15$$

環路邊數 ≥ 5

檢查 $e > \left(\frac{k}{k-2}\right)(v-2) \Rightarrow$ 如果成立 \rightarrow 不為平面圖

$$\therefore 15 > \frac{5}{3} \cdot 8 = \frac{40}{3} = 13.3\ldots$$

\therefore Petersen graph 不為平面圖。

