第 1 讲　函数极限的计算（习题）

题型一、几个基本的技巧和手法（上一份讲义的 40 道题）

题型二、等价无穷小的两种灵活使用

例题 1 请证明：$x \to 0$ 时，$1-\cos^k x \sim k \cdot \dfrac{x^2}{2}$.　　1—5函数极限的计算 00:04:46

解： $1-\cos^k x \sim -\ln\cos^k x = (-k)\ln\cos x \sim (-k)(\cos x - 1) \sim \dfrac{k}{2}x^2 (x \to 0)$

注： 本题的证明手法非常典型——将“$\ln\square \sim \square - 1(\square \to 1)$”进行逆用，有时会收到奇效.

类题 1 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$　　1—5函数极限的计算 00:07:11

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}} \cdot (1+\beta x)^{\frac{1}{n}}}{x} = \frac{1}{m}\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x} + \frac{1}{n}\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+\beta x)}{x} = \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}$$

类题 2 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{x^2}$ (2013 年，数二改编)　　1—5函数极限的计算 00:09:35

$$I = -\lim_{x \to 0}\frac{\ln\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{x^2} = -\lim_{x \to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} - \lim_{x \to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2} - \lim_{x \to 0}\frac{\ln\cos 3x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2} + \frac{1-\cos 2x}{x^2} + \frac{1-\cos 3x}{x^2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 3^2 = 7$$

推广 1 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1-\cos x \cdot \cos 2x \cdots \cos nx}{x^2} = \dfrac{1}{2} \cdot (1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1—5函数极限的计算 00:13:41

推广 2 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1-\cos x \cdot \sqrt{\cos 2x} \cdots \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$　　1—5函数极限的计算 00:15:49

$$I = -\lim_{x \to 0}\frac{\ln\cos x \cdot \sqrt{\cos 2x} \cdots \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2} = -\lim_{x \to 0}\left[\frac{\ln\cos x}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{\ln\cos 2x}{x^2} + \cdots \frac{1}{n}\frac{\ln\cos nx}{x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \cdot k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{2}(1+2+\cdots+n) = \frac{n(n+1)}{4}$$

例题 2 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{x-\sin x \cdot \cos x}{x^3}$　　1—5函数极限的计算 00:23:00

解： $I = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3} + \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x - \sin x\cos x}{x^3} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3}$

注： 通过“添项减项”，凑出想要的等价无穷小，是求极限的基本操作.

类题 1 设 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$，求 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ (2000 年，数二)　　1—5函数极限的计算 00:24:36

解：$0 = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin 6x - 6x}{x^3} + \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{6x+xf(x)}{x^3} = \left(-\dfrac{1}{6}\right) \cdot 6^3 + I \Rightarrow I = 36$

类题 2 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$　　1—5函数极限的计算 00:29:19

解：$I = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} + \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\sqrt[n]{1+\beta x}\cdot\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$$

注：$f_1(x)f_2(x)f_3(x)-1=[f_1(x)f_2(x)f_3(x)-f_1(x)]+[f_1(x)-1]$

类题 3 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x}{x^2}$ (2013 年，数二改编)　　1—5函数极限的计算 00:34:45

解：$I=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x}{x^2}=\frac{1}{2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos2x\cdot\cos3x}{x^2}$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\cos2x-\cos2x\cdot\cos3x}{x^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot2^2+\frac{1}{2}\cdot3^2$$

题型三、泰勒展开的各种考法

（一）直接求某个函数的泰勒展开

例题 3 将下列函数在 $x=0$ 处泰勒展开到指定阶数.　　1—5函数极限的计算 00:43:32

(1) 将 $\ln(1+x)\ln(1-x)$ 展开到 x^4 项；

解：$f(x)=-\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]\cdot\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]$

$$=-\left[x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)x^3+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)x^4\right]+o(x^4)$$

(2) 将 $\cos(\sin x)$ 展开到 x^4 项

解：$\cos(\sin x)=1-\frac{1}{2}\cdot(\sin x)^2+\frac{1}{4!}(\sin x)^4+o(x^4)$

$$=1-\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)$$

(3) 将 $\sin(e^x-1)$ 展开到 x^3 项；

解：$f(x)=\sin(e^x-1)=(e^x-1)-\frac{1}{6}(e^x-1)^3+o(x^3)$

$$=\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)=x+\frac{x^2}{2}+0\cdot x^3+o(x^3)$$

(4) 将 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 展开到 x^2 项；

解：$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e\cdot e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}$，又由于 $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$

$$\Rightarrow\frac{\ln(1+x)}{x}-1=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\cdots\sim\left(-\frac{1}{2}x\right)$$

$$\Rightarrow(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\cdot\left[1+\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)^2\right]+o(x^2)$$

$$=e\cdot\left[1+\left(-\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}x\right)^2\right]+o(x^2)$$

$$=e\cdot\left[1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2\right]+o(x^2)$$

例题 4 求下列函数在$x\to+\infty$时的泰勒展开　　1－5函数极限的计算 01:28:45

(1) $f(x)=\sqrt{1+x}$

$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots(x\to 0)$

解：$f(x)=\sqrt{1+x}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=\sqrt{x}\left[1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\dfrac{1}{x^2}+\cdots\right]$

$=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}+\cdots$

(2) $f(x)=\sqrt[6]{x^6+x^5}$

解：$f(x)=\sqrt[6]{x^6+x^5}=x\cdot\sqrt[6]{1+\dfrac{1}{x}}=x\cdot\left[1+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{\frac{1}{6}\left(-\frac{5}{6}\right)}{2!}\cdot\dfrac{1}{x^2}+\cdots\right]$

（二）求某个复杂函数的等价无穷小

例题 5 求$x\to 0$时，$f(x)=2\arctan x+\ln\dfrac{1-x}{1+x}$的等价无穷小　　1－6函数极限的计算 00:00:51

解： $2\arctan x=2x-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{2}{5}x^5-\cdots$

$-\ln(1+x)=-x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3+\cdots$

$\ln(1-x)=-x-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3-\cdots$

三式相加，得$2\arctan x+\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-\dfrac{4}{3}x^3+o(x^3)\sim-\dfrac{4}{3}x^3$

（三）求参数的值，使得无穷小的阶数尽可能高

对于无穷小而言，“低阶+高阶~低阶”，所以要让阶数尽可能高的话，则需要消去尽可能多的低阶无穷小！至于具体展开到多少阶，我们只有采取“尝试法”，具体问题具体分析，不能一概而论.

例题 6 设$f(x)=x-(ax+b\sin x)\cos x$，求$a,b$的值，使得$x\to 0$时，$f(x)$是尽可能高阶的无穷小.

解： $f(x)=x-\left[(a+b)x+b\left(-\dfrac{1}{6}x^3+\cdots\right)\right]\cdot\left(1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4-\cdots\right)$　　1－6函数极限的计算 00:08:06

$=[1-(a+b)]x+\left[\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b}{6}\right]x^3+(\ )\cdot x^5+\cdots$

$\Rightarrow\begin{cases}a+b=1\\ \dfrac{3a+4b}{6}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=-3\end{cases}$

故$a=4,b=-3$时，$f(x)$的阶数最高$(x\to 0)$

（四）已知极限，反求参数

例题 7 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，求 a,b 的值.(1994 年，数二)　　1—6函数极限的计算 00:17:22

解： $2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x-\frac{x^2}{2}\right)-(ax+bx^2)+o(x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-a)x+\left(-\frac{1}{2}-b\right)x^2+o(x^2)}{x^2}$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

例题 8 求常数 a,b 的值，使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax-bx^2}{x^2}=4$ 成立.　　1—6函数极限的计算 00:23:43

解： $4=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(-2x+3x^2)-\frac{1}{2}(-2x+3x^2)^2+ax-bx^2+o(x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a-2)x+(1-b)x^2+o(x^2)}{x^2}$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-3\end{cases}$$

注： 已知极限反求参数的题，除了“无脑”展开以外，有时还需要一定的“推理能力”，如下：

例题 9 问极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos^3 x-b)\,(x+\ln(1-x))}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)(x-a\cdot\sin x)}$ 是否存在，若存在，求其值.

解： $x-\ln(1+x)\sim\dfrac{x^2}{2}\Rightarrow -x-\ln(1-x)\sim\dfrac{x^2}{2}\Rightarrow x+\ln(1-x)\sim\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$　　1—6函数极限的计算 00:28:25

$I=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos^3 x-b)\cdot x}{x-\mathrm{a}\cdot\sin x}$

1° $a=b=1,I=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{3}{4}\times 6=\dfrac{9}{2}$

2° $a=1,b\neq 1,I=\infty$

3° $a\neq 1,b=1,I=0$

4° $a\neq 1,b\neq 1,I=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot(1-b)\dfrac{1}{1-a}$

例题 10 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^n+7x^4+1)^m-x]=b$，其中 $n\geqslant 5$，$n\in\boldsymbol{N}^*$，且 $b\neq 0$. 求 m,n,b 的值.

解： 易得，$m=\dfrac{1}{n}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{x^n+7x^4+1}-x\right)=b$　　1—6函数极限的计算 00:38:00

$\Rightarrow b=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\left(\sqrt[n]{1+7\cdot\dfrac{1}{x^{n-4}}+\dfrac{1}{x^n}}-1\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\dfrac{1}{n}\left(7\cdot\dfrac{1}{x^{n-4}}+\dfrac{1}{x^n}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7}{n}\cdot\dfrac{1}{x^{n-5}}=b\neq 0$

故，$n=5\Rightarrow m=\dfrac{1}{5}\Rightarrow b=\dfrac{7}{n}=\dfrac{7}{5}$

（五）直接利用泰勒展开求函数极限

例题 11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\mathrm{e}^{-x^2}-1}{\sin^4 x}$ 　　1－6函数极限的计算 00:53:15

解：$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^2+(-x^2)+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

例题 12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[x-\ln(1+x)]\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2\right)}{[\ln(1-x)+\ln(1+x)]\cdot\sin\frac{x^2}{1+x^3}}$ 　　1－6函数极限的计算 01:09:58

解：$x-\ln(1+x)\sim\dfrac{1}{2}x^2$ 　 $\ln(1-x)+\ln(1+x)=\ln(1-x^2)\sim(-x^2)$ 　 $\sin\dfrac{x^2}{1+x^3}\sim\dfrac{x^2}{1+x^3}\sim x^2$

$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2=-\dfrac{1}{4}x^2+o(x^2)\sim-\dfrac{1}{4}x^2$

$\Rightarrow I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2\left(-\frac{1}{4}x^2\right)}{(-x^2)\cdot x^2}=\dfrac{1}{8}$

例题 13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}+\frac{\mathrm{e}}{2}x}{x^2}$ 　　1－6函数极限的计算 01:19:15

解：$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\cdot\left[1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{11}{24}x^2\right]+o(x^2)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}+\frac{\mathrm{e}}{2}x}{x^2}=\dfrac{11}{24}\mathrm{e}$

例题 14 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}}{x^2}$ 　　1－6函数极限的计算 01:21:36

解：$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}}{x^2}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\frac{\mathrm{e}}{x}\ln(1+x)}-1}{x^2}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\frac{\mathrm{e}}{x}\ln(1+x)}{x^2}$

$=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}\cdot\left[1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2\right]-\mathrm{e}\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2\right)+o(x^2)}{x^2}$

$=\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}\cdot\left(\dfrac{11}{24}-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}}{8}$

例题 15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}\left[\ln(1+\sin^2 x)-6\left(\sqrt[3]{2-\cos x}-1\right)\right]$ 　　1－6函数极限的计算 01:32:52

解：①$\ln(1+\sin^2 x)=(\sin^2 x)-\dfrac{1}{2}\sin^4 x+o(x^4)=\left(x-\dfrac{1}{6}x^3\right)^2-\dfrac{1}{2}x^4+o(x^4)=x^2-\dfrac{5}{6}x^4+o(x^4)$

②$\sqrt[3]{2-\cos x}=[1+(1-\cos x)]^{\frac{1}{3}}=1+\dfrac{1}{3}(1-\cos x)+\dfrac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}(1-\cos x)^2+o(x^4)$

$$=1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4\right)-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}x^4+o(x^4)=1+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2-\frac{5}{6}x^4\right)-6\left(1+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{24}x^4\right)+6+o(x^4)}{x^4}=-\frac{5}{6}+\frac{1}{4}=-\frac{7}{12}$$

（六）告知抽象函数在具体一点处的函数值和各阶导数值，求相关极限

例题 16 $f(x)$二阶可导，$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=6$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}$.(大学生数学竞赛，第 9 届初赛)

解： $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=3x^2+o(x^2)\sim 3x^2(x\to 0)$ 1—6函数极限的计算 01:53:18

$$\Rightarrow I=\lim_{x\to 0}\frac{3(\sin^2 x)^2}{x^4}=3$$

例题 17 设$f(x)$二阶可导，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=0$，求$f(0),f'(0),f''(0)$和$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3+f(x)}{x^2}$.

解： $0=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left[3x-\frac{1}{6}(3x)^3\right]+x\left[f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2\right]}{x^3}$ 1—6函数极限的计算 01:55:45

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[3+f(0)]x+f'(0)x^2+\left[\left(-\frac{1}{6}\right)\times 27+\frac{f''(0)}{2}\right]x^3}{x^3}$$

$$\Rightarrow f(0)=-3,f'(0)=0,f''(0)=9$$

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{3+f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{9}{2}$$