有理函数与三角有理函数的积分（例题-紧密）

主讲人：凯哥

一、再探有理函数积分

（一）常规解法（待定系数法裂项）

例题 1 $\int \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$ 有理函数与三角有理函数的积分（上）00:19:15

解： $\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\-A+B+C=0\\A+C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\B=-\frac{1}{3}\\C=\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}d\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C$$

（二）一些有理函数积分的巧妙解法

1. 根据分母的形式，改造分子，从而快速裂项

例题 2 $\int\frac{1}{1-x^4}\mathrm{d}x$ 有理函数与三角有理函数的积分（上）00:34:22

解： $I=\int\frac{1}{(1-x^2)(1+x^2)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(1-x^2)+(1+x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}dx=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)(1+x)}dx$

$$=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln|1+x|-\frac{1}{4}\ln|1-x|+C$$

类题 1 $\int\frac{1}{x^8(1+x^2)}\mathrm{d}x$ 有理函数与三角有理函数的积分（上）00:30:24

解： $I=\int\frac{1}{x^8}dx-\int\frac{1+x^2-x^2}{x^6(1+x^2)}dx=\int\frac{1}{x^8}dx-\int\frac{1}{x^6}dx+\int\frac{1+x^2-x^2}{x^4(1+x^2)}$

$$=\int\frac{1}{x^8}dx-\int\frac{1}{x^6}dx+\int\frac{1}{x^4}dx-\int\frac{1}{x^2(x^2+1)}dx=\cdots$$

类题 2 $\int \frac{1}{x(x^3+27)}\mathrm{d}x$ 有理函数与三角有理函数的积分（上）00:38:15

解法一： $I=\int \frac{1}{x(x+3)(x^2-3x+9)}dx$（慢）

解法二： $I=\frac{1}{3}\int \frac{1}{x^3(x^3+27)}dx^3=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^3+27}\right)\cdot\frac{1}{27}dx^3=\frac{1}{81}\ln\left|\frac{x^3}{x^3+27}\right|+C$

解法三： $I=\frac{1}{27}\int \frac{27+x^3-x^3}{x(x^3+27)}dx=\frac{1}{27}\ln|x|-\frac{1}{27}\times\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^3+27}dx^3=\frac{1}{27}\ln|x|-\frac{1}{81}\ln|x^3+27|+C$

注： 能否模仿类题 1 的解法，给出本题的其他解法呢？

类题 3 $\int \frac{1+x^4}{1+x^6}\mathrm{d}x$（最后一步侮辱智商） 有理函数与三角有理函数的积分（上）00:46:43

解： $I=\int \frac{(1+x^4-x^2)+x^2}{(1+x^2)(1-x^2+x^4)}dx=\int\frac{1}{1+x^2}dx+\int\frac{x^2}{(1+x^2)(1-x^2+x^4)}dx$

$=\arctan x+\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+x^6}dx^3=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan x^3+C$

2. 倒代换，简化运算

例题 3 $\int \frac{1}{x^8(1+x^2)}\mathrm{d}x$ 有理函数与三角有理函数的积分（上）00:54:13

解： 令 $x=\frac{1}{t},dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$$I=\int\frac{t^8}{1+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int\frac{t^8-1+1}{t^2+1}dt=-\int(t^2-1)(t^4+1)dt-\arctan t=\cdots$$

将 $x=\frac{1}{t}$ 代回

注： 对于分母的次数远高于分子的有理函数积分，用倒代换 $x=\frac{1}{t}$ 可以大大化简.

类题 $\int \frac{1}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}}\mathrm{d}x$ 有理函数与三角有理函数的积分（上）00:59:24

解： 令 $x=\frac{1}{t}$，$dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$$I=\int\frac{t^2}{\left(2+\frac{1}{t^3}\right)^{\frac{5}{3}}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int\frac{1}{\left(\frac{2t^3+1}{t^3}\right)^{\frac{5}{3}}}dt=-\int\frac{t^3\cdot t^2}{(2t^3+1)^{\frac{5}{3}}}dt=-\frac{1}{3}\int\frac{t^3}{(2t^3+1)^{\frac{5}{3}}}dt^3$$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{2}(2u+1)-\frac{1}{2}}{(2u+1)^{\frac{5}{3}}}du=-\frac{1}{12}\int\frac{1}{(2u+1)^{\frac{2}{3}}}d2u+\frac{1}{12}\int\frac{1}{(2u+1)^{\frac{5}{3}}}d2u$$

利用 $\int x^a dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C(a\neq-1)$，并把变量代为 x

3. 与 $\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 相关的积分

例题 4 $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 有理函数与三角有理函数的积分（上）01:10:30

解： $I=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}d\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C$

注 1： 本题非常经典，通过这个题目，我们可以解决所有形如 $\int \frac{1\pm x^2}{1+kx^2+x^4}\mathrm{d}x$ 的积分；

注 2： 本题可以强行因式分解，$1+x^4=(1+x^2)^2-2x^2=\left(1+x^2+\sqrt{2}x\right)\left(1+x^2-\sqrt{2}x\right)$，但是该解法计算量较大.

类似的题目还有以下几道——

类题 1 $\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 有理函数与三角有理函数的积分（上）01:13:10

解： $I=\int \frac{\frac{1}{x^2}-1}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=-\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}d\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C$

$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C$

注： 利用以上两题，我们可求出积分 $\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x+\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x\right]=\cdots$

类题 2 $\int \frac{1}{1+x^6}\mathrm{d}x$ 有理函数与三角有理函数的积分（上）01:28:58

解： 记 $I=\int \frac{1}{1+x^6}dx$，$J=\int \frac{1+x^4}{1+x^6}dx$

$\arctan x+\frac{1}{3}\arctan(x^3)=J=\int \frac{(1+x^4-x^2)+x^2}{(1+x^2)(1-x^2+x^4)}dx=\arctan x+\int \frac{(x^2+1)-1}{(1+x^2)(1-x^2+x^4)}dx$

$=\arctan x+\int \frac{1}{1-x^2+x^4}dx-I$

$\int \frac{1}{1-x^2+x^4}dx=\frac{1}{2}\left[\int \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}+\int \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\right]$

对于 $\int \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}$，$\int \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}$，分子分母同时除以 x^2 凑微分即可

特别声明：对于 $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 这种题，在恒等变形时我们分子分母同时除以 x^2，制造出了无定义点，导致积分出来的函数并不连续. 我在 2020 年 12 月 9 日发布了一个 B 站视频，指出了这种解法的漏洞.

该视频一出，引起了非常大的争议，很多人觉得这个视频是哗众取宠. 其实，从严谨性上来说，确实需要通过视频里的方法补充定义，使得积分出来的函数连续才行——这是原函数的定义所要求的.

但是，我调研的大量文献、教材、辅导书发现，很多时候书中用的都是这个有点“瑕疵”的解法.

所以，依我拙见，很多时候，我们会为了“简便性”而牺牲一些“严谨性”，这是一种让步和妥协，而不是一种完全的错误.

当然，从最严谨的角度来看，确实是需要补充定义，使积出来的函数连续才行，但是如果每个题都考虑这个问题的话，工作量就太大了，尤其是后面的三角有理函数积分，分子分母同除某个函数是常态.

毕竟，很多时候，不定积分只是为定积分服务的——如果是在定积分的积分区间内部存在无定义点，那么则需要分段使用 N-L 公式，然后将这些积分加起来；如果是不定积分以后的结果存在无定义点，就睁一只眼闭一只眼吧.

例题 5 $\int \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$ 有理函数与三角有理函数的积分（上）01:39:27

解： 令 $\sqrt{\tan x}=t \Rightarrow x=\arctan(t^2), dx=\dfrac{2t}{1+t^4}dt \Rightarrow I=\int \dfrac{2t^2}{1+t^4}dt=\int \dfrac{(t^2+1)+(t^2-1)}{t^4+1}dt$

$$=\int \frac{t^2+1}{t^4+1}dt+\int \frac{t^2-1}{t^4+1}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x-1}\right|+C$$

代入 $\sqrt{\tan x}=t$

4. 一个比较有意思的换元

例题 6 $\int \dfrac{1}{(x-1)^2(x+1)^3}\mathrm{d}x$ 有理函数与三角有理函数的积分（上）01:58:05

解： $I=\int \dfrac{1}{(x+1)^5\left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right]}dx$

令 $\dfrac{x-1}{x+1}=t$, $x=\dfrac{2}{1-t}-1$, $dx=\dfrac{2}{(1-t)^2}dt$

$$I=\int \frac{(1-t)^5}{2^5}\cdot\frac{1}{t^2}\cdot\frac{2}{(1-t)^2}dt=\frac{1}{16}\int\frac{(1-t)^3}{t^2}dt=\frac{1}{16}\int\frac{1+3t^2-3t-t^3}{t^2}dt=\cdots$$

代回 $\dfrac{x-1}{x+1}=t$

注 1： 形如 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(x+a)^m(x+b)^n}$ $(m,n\in N^*)$ 的积分，均可通过 $t=\dfrac{x+a}{x+b}$ 进行化简，避开待定系数.

注 2： 醉翁之意不在酒，讲这种换元法的目的不是为了解决这个题本身，而是为下面的某个题铺垫.

二、一些无理函数积分的通用方法和巧妙解法

例题 7 $\int \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x$ $(a>0)$ 有理函数与三角有理函数的积分（上）00:01:55

解法一： $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}=t \Rightarrow x=$ $\quad$ $,dx=$

解法二： $I=\int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx+\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a\cdot\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$

例题 8 $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$ 有理函数与三角有理函数的积分（上）00:07:28

解法一： 令 $\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}=t$

解法二： $I=\int \frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{(e^x)^2-1}}de^x-\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx$

$=\ln\left|e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right|-\int \frac{1}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}dx$

$=\ln\left|e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right|+\int \frac{1}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}de^{-x}$

$=\ln\left|e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right|+\arcsin e^{-x}+C$

例题 9 $\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$ 有理函数与三角有理函数的积分（上）00:14:54

解法一： 令 $\sqrt{1+e^x}=t$

解法二： $I=\int \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}\sqrt{1+e^{-x}}}dx=(-2)\int \frac{1}{\sqrt{1+\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}}de^{-\frac{x}{2}}=(-2)\ln\left(e^{-\frac{x}{2}}+\sqrt{1+e^{-x}}\right)+C$

例题 10 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}dx$ 有理函数与三角有理函数的积分（上）02:06:09

解： $I=\int \frac{1}{(x-1)^2\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}}dx$

令 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}=t^3\Rightarrow x=\frac{2}{t^3-1}+1$

$dx=-\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}dt\Rightarrow I=\int \frac{(t^3-1)^2}{4}\cdot\frac{1}{t^2}\cdot(-6)\frac{t^2}{(t^3-1)^2}dt=\left(-\frac{3}{2}\right)\int dt=-\frac{3}{2}t+C$

$=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$

三、三角有理函数的积分

（一） 利用万能公式将三角有理函数化为有理函数

所谓三角有理函数，可以通俗的理解为“三角函数经过加减乘除运算得到的函数”.

从理论上来说，一切三角有理函数的积分，只需利用万能公式进行换元，令 $\tan\frac{x}{2}=t$，则总能将三角有理函数的积分化为有理函数的积分.

由于$\tan\frac{x}{2}=t$，故反解得$x=2\arctan t$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$，且——

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2t}{1-t^2}.$$

将这些代入原积分，显然就将三角有理函数的积分化成了有理函数的积分.

而一切有理函数的积分方法我们都已经学会，所以，三角有理函数的积分本身并没有本质上的困难；但是，万能解法并不一定是最快解法，针对一些具体的题目，我们也要有更巧妙的解法.

例题 11 $\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x$　　有理函数与三角有理函数的积分（上）02:25:02

解： $I=2\int\frac{1}{2+\cos x}dx+\int\frac{1}{2+\cos x}d(\cos x+2)=\ln(2+\cos x)+2\int\frac{1}{2+\cos x}dx$

记$\int\frac{1}{2+\cos x}dx=J$，令$\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow x=2\arctan t,dx=\frac{2}{1+t^2}dt,\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\Rightarrow J=\int\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2}{2(1+t^2)+(1-t^2)}dt=\int\frac{2}{3+t^2}dt$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C'\Rightarrow I=\ln(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C(C=2C')$$

类题 $\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$　　有理函数与三角有理函数的积分（上）02:31:00

解： 令$\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow x=2\arctan t,dx=\frac{2}{1+t^2}dt,\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

$$I=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{t^2-1}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2}{(1+t^2)+2t-t^2+1}dt$$

$$=\int\frac{2}{(1+t^2)+2t-t^2+1}dt=\int\frac{1}{t+1}dt=\ln|t+1|+C=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

（二）三角有理函数积分的特殊解法

1. 形如$\int\frac{A\sin x+B\cos x}{C\sin x+D\cos x}\mathrm{d}x$的积分，我们一般假设“分子$=p\cdot$分母$+q\cdot$(分母)$'$”，解出$p,q$即可；

例题 12 $\int\frac{7\cos x-3\sin x}{5\cos x+2\sin x}\mathrm{d}x$　　有理函数与三角有理函数的积分（上）02:40:10

解： $7\cos x-3\sin x=(5\cos x+2\sin x)+(5\cos x+2\sin x)'$

$\Rightarrow I=x+\ln|5\cos x+2\sin x|+C$

2. 对于形如$\int \sin ax\cdot \sin bx\,\mathrm{d}x\,(a\neq b)$之类的题，我们可以直接采用积化和差公式，一步秒杀.

例题 13 $\int \sin 3x\cdot\cos 4x\mathrm{d}x$ 有理函数与三角有理函数的积分（上）02:53:17

解： $I=\int\frac{1}{2}[\sin(3x+4x)+\sin(3x-4x)]dx=\frac{1}{2}\int(\sin 7x-\sin x)dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}\cos 7x+\cos x\right]+C$

3. 对于$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，若$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则将$\cos x$凑到d后面，变出$\mathrm{d}\sin x$.

例题 14 $\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos x}\mathrm{d}x$ 有理函数与三角有理函数的积分（下）00:04:27

解法一： $I=\int\frac{\cos x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}d(\sin x)$

$$\xlongequal{\sin x=t}\int\frac{t^2+(1-t^2)}{t^2(1-t^2)}dt=-\int\frac{1}{t^2-1}dt+\int\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{t}+C$$

代回$\sin x=t$

解法二： $I=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos x}dx=\ln|\sec x+\tan x|+\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=\ln|\tan x+\sec x|-\frac{1}{\sin x}+C$

类题 1 $\int\sec x\mathrm{d}x$ （你没看错，就是让你推公式！） 有理函数与三角有理函数的积分（下）00:12:54

解： $I=\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=-\int\frac{1}{\sin^2 x-1}d\sin x=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C$

类题 2 $\int\frac{1}{\cos x\sqrt{1+\sin x}}\mathrm{d}x$ 有理函数与三角有理函数的积分（下）00:18:58

解： $I=\int\frac{1}{(1-\sin^2 x)\sqrt{1+\sin x}}d\sin x$

令$\sqrt{1+\sin x}=t\Rightarrow\sin x=t^2-1\Rightarrow d\sin x=2tdt$

$$\Rightarrow I=\int\frac{1}{[1-(t^2-1)^2]t}\cdot 2tdt=\int\frac{(2-t^2)+t^2}{(2-t^2)t^2}dt=-\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C$$

回代

例题 15 $\int\sec^3 x\mathrm{d}x$ 有理函数与三角有理函数的积分（下）00:27:38

解： $I=\int\frac{1}{\cos^3 x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{1}{(1-\sin^2 x)^2}d\sin x=\int\frac{1-t^2+t^2}{(1-t^2)^2}dt=\int\frac{1}{(t-1)^2(t+1)^2}dt$

① $\frac{A}{t-1}+\frac{B}{(t-1)^2}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{(t+1)^2}$

② $\left[\frac{1}{(t+1)(t-1)}\right]^2=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right]^2=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{(t+1)^2}-2\frac{1}{t^2-1}\right]$

③ $\int\frac{1}{1-t^2}dt+\int\frac{t^2}{(t^2-1)^2}dt=\square+\frac{1}{2}\int\frac{t}{(t^2-1)^2}d(t^2-1)$

$I=\int \sec^3 xdx=\int \sec xd\tan x=\sec x\tan x-\int \tan^2 x\sec xdx=\sec x\tan x-[I-\ln|\tan x+\sec x|]$

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\tan x+\sec x|+C$

注： 本题除了利用$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$外，还可以使用分部积分，然后出现积分重现，即可解出我们需要的$\int \sec^3 xdx$了. 利用这个思想，我们解决下面两个类题——

类题 1 $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$　　有理函数与三角有理函数的积分（下）00:40:21

解法一： $\int \sqrt{1+x^2}\,dx \xlongequal{x=\tan t} \int \sqrt{\sec^2 t}\cdot \sec^2 tdt=\int \sec^3 tdt$

解法二： $I=x\sqrt{1+x^2}-\int x\cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$=x\sqrt{1+x^2}-I+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

类题 2 请思考如何计算积分$I_n=\int \sec^n x\,dx\,(n\geq 3)$　　有理函数与三角有理函数的积分（下）00:43:26

解： $I_4=\int \sec^4 xdx$，$I_5=\int \sec^5 xdx$

$I_4=\int \sec^2 xd\tan x=\int (1+\tan^2 x)d\tan x=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C$

$I_5=\int \sec^5 xdx=\int \sec^3 xd\tan x=\tan x\sec^3 x-\int \tan^2 x\cdot 3\sec^3 xdx$

$=\tan x\sec^3 x-3[I_5-I_3]\Rightarrow I_5=\frac{1}{4}\tan x\cdot \sec^3 x+\frac{3}{4}I_3$

提示：分奇偶，$I_{2n}=\int \sec^{2n}x\,dx$ 凑$d\tan x$；$I_{2n+1}=\int \sec^{2n+1}x\,dx$的计算方法和$\int \sec^3 xdx$类似，也是“分部积分+积分重现”，然后得到$I_{2n+1}$和$I_{2n-1}$之间的递推关系.

大家可以利用这个思想去计算一下$\int \sec^4 xdx$和$\int \sec^5 xdx$.

4. 对于$\int R(\sin x,\cos x)dx$，若$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可将$\sin x$凑到d后面，变出$d\cos x$.

注： 这种情况和上面的情形类似，不再过多举例.

例题 16 $\int \frac{\tan^5 x}{\cos x}dx$　　有理函数与三角有理函数的积分（下）00:52:50

解法一： $I=\int \frac{\sin^5 x}{\cos^6 x}dx=-\int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^6 x}d\cos x=-\int \frac{(t^2-1)^2}{t^6}dt=-\int \frac{t^4-2t^2+1}{t^6}dt$

$=-\int \frac{1}{t^2}dt+2\int \frac{1}{t^4}dt-\int \frac{1}{t^6}dt=\cdots$，回代

解法二： $I=\int \tan^5 x\sec xdx=\int (\sec^2 x-1)^2 d\sec x=\int (\sec^4-2\sec^2 x+1)d\sec x$

$=\frac{1}{5}\sec^5 x-\frac{2}{3}\sec^3 x+\sec x+C$

类题 $\int \frac{1}{\sin x + \tan x} dx$ 有理函数与三角有理函数的积分（下）00:58:30

解：$I=\int \frac{\cos x}{\sin x\cos x+\sin x}dx=-\int \frac{\cos x}{\sin^2 x(1+\cos x)}d\cos x \xlongequal{\cos x = t} \int \frac{t}{(1+t)^2(t-1)}dt$

$$\frac{t}{(1+t)^2(t-1)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{(t+1)}+\frac{C}{(t+1)^2}=\frac{A(t+1)^2+B(t^2-1)+C(t-1)}{(t+1)^2(t-1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+C=1 \\ A-B-C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}$$

5. 对于 $\int R(\sin x,\cos x)dx$，若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，则可制造出 $\sec^2 x dx$，然后凑成 $d\tan x$.

例题 17 $\int \frac{1}{1+\cos^2 x}dx$ 有理函数与三角有理函数的积分（下）01:14:44

解：$\int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x+1}dx=\int \frac{1}{2+\tan^2 x}d\tan x=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C$

类题 1 $\int \frac{1}{(3\sin x+2\cos x)^2}dx$ 有理函数与三角有理函数的积分（下）01:16:56

解：$I=\frac{1}{3}\int \frac{1}{(3\tan x+2)^2}d(3\tan x+2)=\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{3\tan x+2}+C=\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{\cos x}{3\sin+2\cos x}+C$

类题 2 (1998 年，改编) $\int \frac{\tan x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx$ 有理函数与三角有理函数的积分（下）01:20:46

解：① $a\neq 0$ 时，

$$I=\int \frac{\tan x}{a^2\tan^2 x+b^2}d\tan x=\frac{1}{2a^2}\int \frac{1}{a^2\tan^2 x+b^2}d(a^2\tan^2 x+b^2)$$

$$=\frac{1}{2a^2}\cdot \ln|a^2\tan^2 x+b^2|+C$$

② $a=0,b\neq 0$

$$I=\int \frac{\tan x}{b^2\cos^2 x}dx=\frac{1}{b^2}\int \tan x\cdot \sec^2 x dx=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{2}\tan^2 x+C$$

类题 3 $\int \frac{\ln\tan x}{\sin 2x}dx$ 有理函数与三角有理函数的积分（下）01:27:14

解：$I=\int \frac{\ln\tan x}{2\sin x\cos x}dx=\frac{1}{2}\int \frac{\ln\tan x}{\tan x}d\tan x=\frac{1}{2}\int \ln\tan x d(\ln\tan x)=\frac{1}{4}(\ln\tan x)^2+C$

例题 18 $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1+\cos^2 x}dx$ 有理函数与三角有理函数的积分（下）01:30:15

解： $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = I_1 + I_2 + I_3$

$$I_1 = \int \frac{1}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{\sec^2 x}{1+\sec^2 x}dx = \int \frac{1}{2+\tan^2 x}d\tan x = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C_1$$

$$I_2 = \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int \frac{1}{1+\cos^2 x}d\cos x = -\arctan(\cos x) + C_2$$

$$I_3 = \int \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{2-\sin^2 x}d\sin x = -\int \frac{1}{\sin^2 x-(\sqrt{2})^2}d\sin x$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sin x-\sqrt{2}}{\sin x+\sqrt{2}}\right| + C_3$$

6. 擅于使用“**缩分母**”技巧

如果分母为$1+\cos x$或者$1+\sin x$，那么可以尝试分子分母乘以共轭表达式，使分母从两项变为一项，达到“缩分母”的效果. 因为，对于一个不定积分而言，如果分母项数太多，是非常难于处理的；但是若分母只有一项，分子就算有很多项相加，我们也可以将整个积分拆分成若干个小积分，分别计算即可. 所以，“缩分母”是一个很重要的思想. 当然，除了乘以共轭表达式以外，还可以利用$1+\cos x$的二倍角公式，也能达到缩分母的效果.

例题 19 $\int \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x$ 有理函数与三角有理函数的积分（下）01:36:58

解法一： $I = \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int \sec^2\frac{x}{2}d\frac{x}{2} = \tan\frac{x}{2} + C$

解法二： $I = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \csc^2 x dx - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = -\cot x + \frac{1}{\sin x} + C$

类题 1 用至少 4 种方法，计算$\int \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$. 有理函数与三角有理函数的积分（下）01:41:28

解法一二： $I = \int \frac{1}{1+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}dx$，接着用例题 19 的方法

解法三： $I = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \cdots$

解法四： $I = \int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{1}{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}dx$

$$= 2\int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2}d\frac{x}{2} = 2\int \frac{1}{\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2}d\left(\tan\frac{x}{2}+1\right) = (-2)\frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}} + C$$

类题 2 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$　　有理函数与三角有理函数的积分（下）01:49:16

解： $\displaystyle I=\int \frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$

注： 辅助角公式$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$虽然用的频率不高，但是也需要记住，偶尔会有奇效.

7. 当被积函数中出现不同角度的三角函数时，我们一般先用倍角公式统一角度；

例题 20 (1994 年) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(2x)+2\sin x}\mathrm{d}x$　　有理函数与三角有理函数的积分（下）01:51:35

解： $\displaystyle I=\int \frac{1}{2\sin x\cos x+2\sin x}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x(1+\cos x)}dx$

① $\displaystyle I=\left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{1}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}d\cos x\xlongequal{\cos x=t}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\int \frac{1}{(1+t^2)(1-t)}dt$

② $\displaystyle I=\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin x\cdot\cos^2\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}=\frac{1}{4}\cdot\int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}d\tan\frac{x}{2}$

$\displaystyle =\frac{1}{4}\cdot\left[\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{2}\tan^2\frac{x}{2}\right]+C$

例题 21 $\displaystyle\int \frac{\cos 2x-\sin 2x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$　　有理函数与三角有理函数的积分（下）02:01:40

解： $I=I_1-I_2$

$\displaystyle I_1=\int \frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx=\int(\cos x-\sin x)dx=\sin x+\cos x+C_1$

$\displaystyle I_2=2\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int \frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x+\cos x}dx=\int(\sin x+\cos x)dx-\int \frac{1}{\sin x+\cos x}dx$

$\displaystyle =-\cos x+\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_2$

8. 有些题不好分类，非要说的话，主要考的是恒等变形和灵活变通吧，需要具体问题具体分析.

例题 22 $\displaystyle\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$ (120 分水平)　　有理函数与三角有理函数的积分（下）02:13:49

解： 见例题 21 I_2 的计算

例题 23 $\displaystyle\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$ (120 分水平)　　有理函数与三角有理函数的积分（下）02:14:32

解： $\displaystyle I=\int \frac{\cos^2 x\tan x}{\cos^4 x(\tan^4 x+1)}dx=\int \frac{\tan x}{\tan^4 x+1}d\tan x=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(\tan^2 x)^2}d\tan^2 x=\frac{1}{2}\arctan(\tan^2 x)+C$

例题 24 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^6 x+\cos^6 x}\mathrm{d}x$ (120 分水平)　　有理函数与三角有理函数的积分（下）02:20:53

解： $\displaystyle I=\int \frac{1}{\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x}dx=\int \frac{\sec^2 x\sec^2 x}{\tan^4 x-\tan^2 x+1}dx$

$$=\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^4 x-\tan^2 x+1} d\tan x=\int \frac{1+t^2}{t^4-t^2+1} dt=\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2-1+\frac{1}{t^2}} dt$$

$$=\int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+1} d\left(t-\frac{1}{t}\right)=\arctan\left(t-\frac{1}{t}\right)+C=\arctan(\tan x-\cot x)+C$$

例题 25 $\int \frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x} \mathrm{d}x$ (135 分水平)