中值定理证明题（习题-紧密）

理论部分

题型一 基本定理的证明

例题 1 证明费马引理　　微分中值定理（习题1）00:04:38

费马定理：若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 取得极值且 $f'(x_0)$ 存在，则必有 $f'(x_0)=0$（驻点）

证明：若 $f'(x_0)>0$ 或 $f'(x_0)<0$ 由 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 可知，$x=x_0$ 均不是极值点，得 $f'(x_0)=0$

例题 2 证明罗尔定理　　微分中值定理（习题1）00:13:33

罗尔定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，且 $f(a)=f(b)$，则 $\exists\xi\in(a,b)\,s.t.f'(\xi)=0$

证明：反证：假设 $f'(x)$ 无零点，那么 $f'(x)$ 恒正或恒负，$f(x)$ 严格单调

这与 $f(a)=f(b)$ 矛盾，证毕

例题 3 证明拉格朗日中值定理　　微分中值定理（习题1）00:40:44

(2009 年) **拉格朗日中值定理**：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，则 $\exists\xi\in(a,b)\,s.t.\ f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

证明一：令 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，得 $F(a)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a},F(b)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$

由罗尔定理，$\exists\xi\in(a,b)\,s.t.F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

证明二：令 $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，$F(a)=F(b)=0$

由罗尔定理，$\exists\xi\in(a,b)\,s.t.F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

类题 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，证明：$\exists\xi\in(a,b)\,s.t.2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$

证明：令 $F(x)=[f(b)-f(a)](x^2-a^2)-(b^2-a^2)[f(x)-f(a)]$　　微分中值定理（习题1）01:01:29

$F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理可得，$\exists\xi\in(a,b)\,s.t.F'(\xi)=0$

得证，$\exists\xi\in(a,b)\,s.t.2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$

例题 4 叙述并证明积分中值定理　　微分中值定理（习题1）01:05:27

叙述：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $\exists\xi\in(a,b)\,s.t.\displaystyle\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)$

证明：令 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt,F(a)=0,F(b)=\int_a^b f(x)dx$

故 $\int_a^b f(x)dx = F(b) = F(b) - F(a) = (b-a)F'(\xi) = (b-a)f(\xi)$，其中$\xi \in (a,b)$

类题设$f(x)$在$[0,3]$二阶可导，$2f(0) = \int_0^2 f(x)dx = f(2) + f(3)$，证：$\exists \xi \in (0,3) s.t. f''(\xi) = 0$

证明：由积分中值定理可得，$\exists \xi_1 \in (0,2) s.t. \int_0^2 f(x)dx = (2-0)f(\xi_1)$　　微分中值定理（习题1）01:15:50

$\Rightarrow 2f(0) = 2f(\xi_1) = f(2) + f(3) = 2f(\xi_2)$

由介值可得，$\exists \xi_2 \in [2,3] s.t. 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) = (1+1)f(\xi_2) \quad \xi_2 \in [2,3]$

$\Rightarrow f(0) = f(\xi_1) = f(\xi_2)$，反复使用罗尔定理可得$\exists \xi \in (0,3) s.t. f''(\xi) = 0$

例题 5 证明柯西中值定理　　微分中值定理（习题1）01:41:14

柯西中值定理：$f(x), g(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，$g'(x) \neq 0$，则$\exists \xi \in (a,b) s.t. \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

证明：等价于证明：$[f(b)-f(a)]g'(\xi) - [g(b)-g(a)]f'(\xi) = 0$

令$F(x) = [f(b)-f(a)][g(x)-g(a)] - [g(b)-g(a)][f(x)-f(a)]$

得$F(a) = F(b) = 0$，由罗尔定理，$\exists \xi \in (a,b) s.t. F'(\xi) = 0$即$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

类题设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，$g'(x) \neq 0$，证明：$\exists \xi \in (a,b) s.t. \dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

证明：等价于证明：$f'(\xi)[g(\xi)-g(b)] + [f(\xi)-f(a)]g'(\xi) = 0$　　微分中值定理（习题1）01:51:57

$F(x) = [f(x)-f(a)][g(x)-g(b)]$

$F(a) = 0 \ F(b) = 0 \Rightarrow \exists \xi \in (a,b) s.t. F'(\xi) = 0$，得证

通过对拉格朗日中值定理和柯西中值定理的证明，我们已经初步尝试到“构造辅助函数”的威力.

如果要证明的结论是一个含有$f'(\xi)$的等式时，我们往往需要构造辅助函数$F(x)$，然后对$F(x)$在区间$[a,b]$上使用罗尔定理，得到$F'(\xi) = 0$，最后对$F'(\xi) = 0$化简/变形，即可得到欲证结论.

我们的核心任务之一，就是准确找到每个欲证结论所对应的辅助函数$F(x)$.

而构造辅助函数$F(x)$的关键，在于“去思考你要证的东西是怎么来的”.

例题 6 请思考，如果欲证结论是下面的等式时，我们需要构造怎样的辅助函数.

(1) $f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$；　　微分中值定理（习题1）01:59:09

(2) $f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0$；

(3) $f''(\xi)g(\xi) + 2f'(\xi)g'(\xi) + f(\xi)g''(\xi) = 0$；

(4) $f''(\xi)g(\xi) = f(\xi)g''(\xi)$；

(5) $f''(\xi)f(\xi) + [f'(\xi)]^2 = 0$；

(6) $\dfrac{f'(\xi)}{1+f^2(\xi)} > 1$.

总之，当我们学会构造辅助函数以后，问题已然解决一半！接下来就是如何利用好题干条件了.

解：（1）$F(x)=f(x)g(x)$

（2）$F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

（3）$F(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$或者$F(x)=f(x)g(x)$

（4）$F(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$

（5）$F(x)=f(x)f'(x)=\left(\dfrac{1}{2}f^2(x)\right)'$

（6）$F(x)=\arctan f(x)-x$，只需证明：$F'(\xi)>0$

例题 7 设$f(x)$在$[0,1]$可导，$f(0)=0$，$\forall x\in(0,1]$，$f(x)>0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$, s.t. $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

证明：令$F(x)=f(x)f(1-x)\Rightarrow F(0)=F(1)=0$ 微分中值定理（习题1）02:24:22

由罗尔定理，$\exists\xi\in(0,1)s.t.F'(\xi)=0$

即$f'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)=0$

$\Rightarrow\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$，证毕

注 1：本题在构造辅助函数时，有两种不同的思维方式，第一种是联想到$[\ln f(x)]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$，第二种是先去分母，然后联想到$(uv)'=u'v+uv'$，这两种思维方式构造出的辅助函数其实是相同的.

注 2：请思考，本题有没有秒杀解法？

类题 设$f(x)$在$[0,1]$可导，$f(0)=0$，$\forall x\in(0,1]$，$f(x)>0$，证明：对任意的正数a，$\exists\xi\in(0,1)$，使得

$a\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$成立.

证明：令$F(x)=f^a(x)f(1-x)\Rightarrow F(0)=F(1)=0$

由罗尔定理可得，$\exists\xi\in(0,1)s.t.F'(\xi)=0$

$F'(x)=af^{a-1}(x)f'(x)f(1-x)-f^a(x)f'(1-x)=f^{a-1}(x)\left[af'(x)f(1-x)-f(x)f'(1-x)\right]$

$\Rightarrow f^{a-1}(\xi)\left[af'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)\right]=0$

而$\xi\in(0,1)s.t.f^{a-1}(\xi)>0$，得出$\left[af'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)\right]=0$

即$\dfrac{af'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$，证毕

例题 8 设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$二阶可导，$g''(x)\neq0$，$g(a)=g(b)=f(a)=f(b)=0$

证明：（1）在(a,b)内，$g(x)\neq0$；（2）$\exists\xi\in(a,b)s.t.\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$ 微分中值定理（习题1）02:43:02

证明：（1）反证：假设$\exists x_0\in(a,b)s.t.g(x_0)=0\Rightarrow g(a)=g(x_0)=g(b)=0$

反复罗尔定理可得，$\exists x_1\in(a,b)s.t.g'(x_1)=0$矛盾$\Rightarrow g(x)\neq0$

（2）令$F(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$，$F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理得$\exists\xi\in(a,b)s.t.F'(\xi)=0$

而$g''(x)\neq 0\Rightarrow g''(\xi)\neq 0$且$g(\xi)\neq 0$，假设$g(\xi)=0\Rightarrow g(a)=g(\xi)=g(b)=0$，反复罗尔定理可得，

$g''(\xi)=0$，与题意矛盾

综上，$\exists\xi\in(a,b)s.t.F'(\xi)=0$即$\exists\xi\in(a,b)s.t.\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

例题 9 设$f(x)$二阶可导，$f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，证明：$f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$在$(0,1)$内至少有两个根.

证明：显然$f(0)=0$ $f'(0)<0$ $f(1)>0$，令$F(x)=f(x)f'(x)$ 微分中值定理（习题1）02:52:40

由于$f'(0)<0$，得$\exists\delta>0,s.t.x\in(0,\delta),f(x)<0$，而且$f(1)>0$，由零点存在定理$\Rightarrow\exists x_2\in(0,1)s.t.f(x_2)=0$

又$f(0)=0=f(x_2)=0$，$\exists x_1\in(0,x_2)s.t.f'(x_1)=0$

$\Rightarrow F(0)=F(x_1)=F(x_2)=0$，由罗尔定理可得，$\exists\xi_1\in(0,x_1),\exists\xi_2\in(x_1,x_2)$使得$F(\xi_1)=0,F(\xi_2)=0$

$\Rightarrow f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$在$(0,1)$内至少有两个根

例题 10 设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$二阶可导，$f(a)=f(b)=g(a)=0$， 微分中值定理（习题2）00:00:25

证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)g(\xi)+2f'(\xi)g'(\xi)+f(\xi)g''(\xi)=0$.

证明：令$F(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$，$F(a)=0,F(b)=f'(b)g(b)$

令$G(x)=f(x)g(x)\Rightarrow G(a)=G(b)=0\Rightarrow$ 由罗尔定理可得，$\exists\theta\in(a,b)s.t.G'(\theta)=0\Rightarrow F(\theta)=0$

又由罗尔定理，$\exists\xi\in(a,\theta)\subset(a,b)s.t.F'(\xi)=0$

即，$f''(\xi)g(\xi)+2f'(\xi)g'(\xi)+f(\xi)g''(\xi)=0$，证毕

注：本题若补充条件$g(b)=0$，则满足条件的ξ不止一个，你会证明吗？

题型二 辅助函数的构造及其推广

有一类题，特别受到命题人的青睐，即“证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)=0$”.

可以这么说——拿下了这一类问题，中值定理辅助函数的构造，你就彻底入门了！

例题 11 探索形如“证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)=0$”的问题，应该如何构造辅助函数.

构造：$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{G(x)}$ 微分中值定理（习题2）00:07:58

推导：假设被约去的是$y(x)$，得出$F'(x)=f'(x)y(x)+f(x)g(x)y(x)$

有$y'=g(x)y\Rightarrow F(x)=f(x)y(x)$

已知$y'=g(x)y$，求y

$$\frac{y'}{y}=g(x)\Rightarrow[\ln y(x)]'=g(x)\Rightarrow\ln y(x)=\int g(x)dx\Rightarrow y(x)=\mathrm{e}^{\int g(x)dx}$$

$$\Rightarrow F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int g(x)dx}$$

例题 12 若欲证结论为下列的等式，请利用例题 6 的结果，快速回答出每个问题应该构造什么辅助函数.

(1) $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$	(2) $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$	(3) $\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0$
(4) $\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$	(5) $\xi f'(\xi)-nf(\xi)=0$	(6) $f'(\xi)+f(\xi)=0$
(7) $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$	(8) $\xi f'(\xi)-f(\xi)=k(k\neq 0)$	(9) $f'(\xi)+f(\xi)-1=0$
(10) $f''(\xi)+f'(\xi)=0$	(11) $f''(\xi)-3f'(\xi)+2f(\xi)=0$	(12) $f''(\xi)=f(\xi)$
(13) $f'''(\xi)=f(\xi)$	(14) $f^{(n)}(\xi)=f(\xi)$	(15) $f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

(1) $F(x)=f(x)e^{g(x)}$

微分中值定理（习题2）00:27:35

(2) $f'(\xi)+\frac{1}{\xi}f(\xi)=0\Rightarrow F(x)=f(x)x$

(3) $f'(\xi)+\frac{n}{\xi}f(\xi)=0\Rightarrow F(x)=f(x)e^{n\ln x}=x^n f(x)$

条件 $f(1)=0\Rightarrow F(0)=F(1)=0\Rightarrow \exists\xi\in(0,1)\,s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi)=0$

$\Rightarrow nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，证毕

(4) $f'(\xi)-\frac{1}{\xi}f(\xi)=0\Rightarrow F(x)=f(x)e^{-\ln x}=f(x)\cdot\frac{1}{x}$

(5) $f'(\xi)-\frac{n}{\xi}f(\xi)=0\Rightarrow F(x)=f(x)\cdot e^{(-n)\ln x}=\frac{f(x)}{x^n}$

(6) 见到 $f+f'$，联想 $[e^x f(x)]'=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x[f+f']=0$

$F(x)=f(x)e^x$

(7) $F(x)=f(x)e^{\lambda x}$

(8) ① 微分方程，反解 C

② 整体法 $\Leftrightarrow\xi f'(\xi)-[f(\xi)+k]=0$

令 $F(x)=[f(x)+k]\cdot e^{-\ln x}=\frac{f(x)+k}{x}$

③ $\xi\to x$

(9) $f'(\xi)+[f(\xi)-1]=0$，令 $F(x)=[f(x)-1]e^x$

(10) 令 $F(x)=f'(x)e^x$，$F(x_1)=F(x_2)=0$，若 $f(a)=f(b)=f(c)$，则证毕

(11) $f''-3f'+2f=0\Leftrightarrow(f''-f')-2f'+2f=0\Leftrightarrow(f''-f')-2(f'-f)=0$

令 $F(x)=[f'(x)-f(x)]e^{-2x}$，目的：找到 $F(x_1)=F(x_2)=0$，即 $f'(x)-f(x)=0$ 至少有两个根

为此 $h(x)=e^{-x}f(x)$，若能找到：$f(a)=f(b)=f(c)=0$

(12) ① $f''+f'=f'+f\Rightarrow(f''+f')-(f'+f)=0\Rightarrow$ 令 $F(x)=[f'(x)+f(x)]e^{-x}$

② $f''-f'=f-f'\Rightarrow(f''-f')+(f'-f)=0\Rightarrow F(x)=[f'(x)-f(x)]e^x$

③ $2f''f'=2f'f\Leftrightarrow[(f')^2]'=(f^2)'\Rightarrow F(x)=[f'(x)]^2-f^2(x)$

(13) $F(x)=e^{-x}\cdot[f''(x)+f'(x)+f(x)]$

(14) $F(x)=\mathrm{e}^{-x}\cdot[f+f'+\cdots f^{(n-1)}(x)]$

(15) $f'(\xi)+f(\xi)\cdot g(\xi)=0\Rightarrow F(x)=f(x)\cdot \mathrm{e}^{G(x)}=f(x)\mathrm{e}^{\int_a^x f(t)dt}$

例题 13 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$a>0$，$f(a)=0$. 证明：$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$.

证明： 令 $F(x)=(x-b)^a\cdot f(x)\Rightarrow F(b)=F(a)=0$　　微分中值定理（习题2）01:33:47

由罗尔定理，$\exists\xi\in(a,b)s.t.F'(\xi)=0,F'(\xi)=a(\xi-b)^{a-1}f(\xi)+(\xi-b)^af'(\xi)=0$

即 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$

例题 14 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，$f(0)=f(1)$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，s.t. $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

证明： 令 $F(x)=(1-x)^2\cdot f'(x)\Rightarrow F(1)=0$　　微分中值定理（习题2）01:39:33

又 $f(0)=f(1)\Rightarrow\exists c\in(0,1)s.t.f('c)=0$, 故 $F(c)=0$

$F(1)=0,F(c)=0$，使用罗尔定理，$\exists\xi\in(c,1)\subset(0,1)s.t.F'(\xi)=0$

例题 15 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 二阶可导，$f(1)=1$，证明：　　微分中值定理（习题2）01:55:01

(1) $\exists\xi\in(0,1)s.t.f'(\xi)=1$；(2) $\exists\eta\in(-1,1)s.t.f''(\eta)+f'(\eta)=1$

证明： (1) ① 令 $F(x)=f(x)-x$，罗尔定理

② 由于 $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f(0)=0$，$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(\xi)\Rightarrow$ 即 $f'(\xi)=1,\xi\in(0,1)$

(2) 令 $F(x)=[f'(x)-1]\mathrm{e}^x$，由于 $f(x)$ 奇函数，且 $f(x)$ 可导，得出 $f'(x)$ 是偶函数

由 $f'(\xi)=1$ 可得 $f'(-\xi)=1\Rightarrow F(\xi)=F(-\xi)=0\Rightarrow\exists\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)s.t.F'(\eta)=0$

即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$，证毕

例题 16 设 $f(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 可导，$f(0)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，$f(1)=\dfrac{1}{2}$，证明：对 $\forall a$，均存在 $\xi\in(0,1)$，

使得 $f'(\xi)+a[f(\xi)-\xi]=1$.　　微分中值定理（习题2）02:05:45

证明： 令 $F(x)=[f(x)-x]\mathrm{e}^{-\lambda x}$

令 $h(x)=f(x)-x$，$h(0)=f(0)-0=0$，$h(1)=f(1)-1=-1<0$

$h\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>0$，由零点定理，$\exists c\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)s.t.h(c)=0$

$\Rightarrow F(0)=F(c)=0\Rightarrow$ 由罗尔定理，$\exists\xi\in(0,c)\subset(0,1)s.t.F'(\xi)=0$,

即 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$，证毕

例题 17 $f(x)$在$[a,b]$二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f''(\xi)=f(\xi)$.

证明：令$F(x)=e^{-x}\cdot[f'(x)+f(x)]$，再令$G(x)=e^x f(x)$　　　　微分中值定理（习题2）02:10:55

由于$f'_+(a)f'_-(b)>0$，不妨假设$f_+'(a)>0$ $f_-'(b)>0$

1° $f_+'(a)>0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow\exists\delta_1>0,s.t.x\in(a,a+\delta_1)$时，$f(x)>f(a)=0$

2° $f_-'(b)>0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0\Rightarrow\exists\delta_2>0,s.t.x\in(b-\delta_2,b)$时，$f(x)<f(b)=0$

由$1^\circ,2^\circ$及零点定理知，$\exists c\in(a,b),s.t.f(c)=0$，那么$f(a)=f(b)=f(c)=0$，$G(a)=G(b)=G(c)=0$

连续两次罗尔定理，$F(x)$有两个零点，为$\xi_1\in(a,c),\exists\xi_2\in(c,b)$，那么$F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$，

对$F(x)$使用罗尔定理，得 $\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f''(\xi)=f(\xi)$

题型三 双中值问题

（一）未要求两个中值不同

有一类题，其欲证等式为含有“$a,b,\xi,f(\xi),f'(\xi)$”的混合项(其中a,b通常为区间端点)，这种题的一般做法是——将含有区间端点a,b的项与带有中值ξ的项，分离到等式的左右两端，然后分析带有a,b的项是否可以变形为$f(b)-f(a)$或者$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$的形式，然后用拉格朗日中值定理或者柯西中值定理处理，即得欲证结论；当然，也可以分析带有中值ξ的项，去思考它是否可以看成由某个函数用完拉格朗日中值定理以后或者某一对函数用完柯西中值定理以后的结果，如果可以，将其还原。这种题，是期末考试的常考题型，难度非常小。

例题 18 设$f(x)$在$[a,b]$可导,$f(a)=f(b)=1$，证明:$\exists\xi_1,\xi_2\in(a,b),s.t.\ e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2)+f(\xi_2)]=1$；

证明：令$F(x)=e^x f(x)$，由拉格朗日中值定理可得，　　　　微分中值定理（习题3）00:11:37

$\dfrac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$，由拉格朗日定理，

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi_2)=e^{\xi_2}[f'(\xi_2)+f'(\xi_2)] \qquad ①$$

又由于，

$$f(a)=f(b)=1\Rightarrow\frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\xi_1}\text{（拉格朗日）} \qquad ②$$

联立①②，得$e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2)+f(\xi_2)]=1$

例题 19 设$f(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，且$a>0$，证明：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=(a+b)\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$

证明： 由柯西中值定理得，$\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}$， 微分中值定理（习题3）00:23:13

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{1}{b+a}=f'(\xi)\frac{1}{b+a}$$

证得，$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=(a+b)\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$

例题 20 $f(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，$f'(x)\neq 0$，证明：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$使得$\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}\mathrm{e}^{-\eta}$

证明： $\dfrac{f'(\eta)}{\mathrm{e}^\eta}=\dfrac{f(b)-f(a)}{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\dfrac{b-a}{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}=f'(\xi)\dfrac{b-a}{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}$ 微分中值定理（习题3）00:27:35

例题 21 设$f(x)$在$[1,2]$连续，$(1,2)$可导，$f'(x)\neq 0$， 证明:$\exists\xi$、η、$\gamma\in(1,2)$，*s.t.* $\dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\dfrac{\xi}{\eta}$

微分中值定理（习题3）00:32:53

证明： $\xi f'(\xi)=\dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$，利用柯西中值定理还原，$\dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}=\dfrac{f(2)-f(1)}{\ln 2-\ln 1}=\dfrac{f'(\gamma)}{\frac{1}{\eta}}\Rightarrow\dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\dfrac{\xi}{\eta}$

例题 22 设$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$二阶连续可导，$f'(0)=0$，证:$\exists\xi$、$\eta$、$\omega\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，s.t. $f'(\xi)=\dfrac{\pi}{2}\eta\cdot\sin 2\xi\cdot f''(\omega)$

证明： 由柯西中值定理，$\dfrac{f'(\xi)}{\sin 2\xi}=\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{-\frac{1}{2}\left[\cos 2\cdot\frac{\pi}{2}-\cos 2\cdot 0\right]}=\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{-\frac{1}{2}\cdot(-2)}$ 微分中值定理（习题3）00:48:41

原式$=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-f(0)=\dfrac{\pi}{2}\cdot f'(\eta)=\dfrac{\pi}{2}[f'(\eta)-f'(0)]=\dfrac{\pi}{2}\eta f''(\omega)$

$\Rightarrow f'(\xi)=\dfrac{\pi}{2}\eta\sin 2\xi f''(\omega)$得证

（二）要求两个中值不同

对于含有两个中值ξ和η的题，如果题目中还明确要求了$\xi\neq\eta$，因为两次中值定理的区间都是$[a,b]$，所以你无法保证ξ和η一定不相等!所以，唯一的解决方法就是将区间$[a,b]$拆分成$[a,c]$和$[c,b]$，然后在区间$[a,c]$和$[c,b]$上分别使用一次中值定理，使得$\xi\in(a,c)$，而$\eta\in(c,b)$，由于两个区间没有交集，那么自然就保证了$\xi\neq\eta$。很显然，这种题型中，分段点$x=c$的选取是核心。至于如何选择一个恰当的c，方法有两种——①用待定系数法倒推，推出c需要满足的条件（这是最重要的方法)；②根据题目的提示(一般有第一问作为铺垫，难题变成水题)。该思想完全适用于三个中值甚至n个中值的题目。

例题 23 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，$f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{3}$　　微分中值定理（习题3）01:06:30

证明：$\exists\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)s.t.f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$

证明： $[f'(\xi)-\xi^2]+[f'(\eta)-\eta^2]=0$

令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$

①$F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\left(\frac{1}{2}-0\right)F'(\xi)\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{24}=\frac{1}{2}(f'(\xi)-\xi^2)$

②$F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)F'(\eta)\Rightarrow 0-\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{24}\right]=\frac{1}{2}(f'(\eta)-\eta^2)$

①＋②得，$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$

例题 24 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证:　　微分中值定理（习题3）01:15:27

(1) $\exists c\in(0,1)$，使得 $f(c)=\frac{1}{2}$

(2) $\exists\xi,\eta\in(0,1)$ 且 $\xi\neq\eta$，使得 $\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2$

证明： 由于 $f(x)$ 是连续函数，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\frac{1}{2}\in(0,1)$，所以 $\exists c\in(0,1)$，使得 $f(c)=\frac{1}{2}$

分别在 $[0,c]$ $[c,1]$ 上使用拉格朗日定理，得 $\exists\xi\in(0,c),\eta\in(c,1)$

$f(c)-f(0)=(c-0)f'(\xi)\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c}=\frac{1}{2c}$

$f(1)-f(c)=(1-c)f'(\eta)\Rightarrow f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1}{2(1-c)}$

得证，$\exists\xi,\eta\in(0,1)$ 且 $\xi\neq\eta$，使得 $\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2$

类题 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，$f(0)=0,f(1)=1$，证明：$\exists\xi,\eta\in(0,1)$　微分中值定理（习题3）01:47:59

且 $\xi\neq\eta s.t.\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b(a,b>0)$

证明： 即证 $a\cdot\frac{c-0}{f(c)-f(0)}+b\cdot\frac{1-c}{f(1)-f(c)}=a+b$

$\Leftrightarrow\frac{a}{a+b}\cdot\frac{c}{f(c)}+\frac{b}{a+b}\frac{1-c}{1-f(c)}=1$

①$f(c)=c$ 不一定成立

②$f(c)=\frac{a}{a+b}\in(0,1)$ 介值定理

例题 25 设$f(x)$在$[0,1]$连续，$(0,1)$可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证: 微分中值定理（习题3）01:50:05

(1) $\exists c\in(0,1)$，使得$f(c)=1-c$

(2) $\exists \xi,\eta\in(0,1)$且$\xi\neq\eta$，使得$f'(\xi)f'(\eta)=1$

证明： 令$F(x)=f(x)-1+x,F(0)=-1,F(1)=1$

$\exists c\in(0,1)s.t.F(c)=0\Rightarrow f(c)=1-c$

分别在$[0,c]$ $[c,1]$上使用拉格朗日定理，得$\exists\xi\in(0,c),\eta\in(c,1)$

$$f(c)-f(0)=(c-0)f'(\xi)\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c}=\frac{1-c}{c}$$

$$f(1)-f(c)=(1-c)f'(\eta)\Rightarrow f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{c}{1-c}$$

$\Rightarrow f'(\xi)f'(\eta)=1$证毕

例题 26 设$f(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，$f'(x)\neq 0$，$f(a)=0,f(b)=2$， 微分中值定理（习题3）02:05:17

证：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，且$\xi\neq\eta$ $s.t. f'(\eta)\cdot[f(\xi)+\xi f'(\xi)]=f'(\xi)[bf'(\eta)-1]$

证明： 即证$\dfrac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{f'(\xi)}=\dfrac{bf'(\eta)-1}{f'(\eta)}$

即证：$\dfrac{cf(c)-af(a)}{f(c)-f(a)}=\dfrac{[bf(b)-b]-[bf(c)-c]}{f(b)-f(c)}$

$$\Leftrightarrow c=\frac{b-bf(c)+c}{2-f(c)}\Leftrightarrow c-cf(c)=b-bf(c)\Leftrightarrow c[1-f(c)]=b[1-f(c)]$$

$\Leftrightarrow (c-b)[1-f(c)]=0$

故取$f(c)=1$即可，由于$f(a)=0,f(b)=2$，故这样的c显然存在，证毕

题型四 利用泰勒中值定理证明含有高阶导数的问题

例题 1 请叙述并证明带佩亚诺余项的泰勒中值定理 微分中值定理（习题4）00:12:41

叙述： 设$f(x)$在$x=x_0$处n阶可导，则 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]$

证明： 故只需证：$\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]}{(x-x_0)^n}=0$

洛$n-1$次，$\displaystyle I=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)}=-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)}$

$$=-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)=0 \quad 证毕$$

例题 2 请叙述并证明带拉格朗日余项的泰勒中值定理　　　　微分中值定理（习题4）00:23:50

叙述： $f(x)$在 $x=x_0$ 的邻域内存在直到$n+1$阶的导函数

则 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad \xi\in(x,x_0)$

证明： 反复柯西证明即可

例题 3 设$f(x)$在$[-1,1]$三阶连续可导，$f(-1)=0$，$f'(0)=0$，$f(1)=1$，证: $\exists\xi\in(-1,,1)$，s.t. $f'''(\xi)=3$

证明： $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(\theta)}{6}(x-x_0)^3$　　　微分中值定理（习题4）00:29:08

$$\begin{cases} f(-1)=f(0)+f'(0)(-1-0)+\frac{f''(0)}{2}(-1-0)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{6}(-1-0)^3 \\ f(1)=f(0)+f'(0)(1-0)+\frac{f''(0)}{2}(1-0)^2+\cdots+\frac{f'''(\xi_2)}{6}(1-0)^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=f(0)+\frac{f''(0)}{2}-\frac{f'''(\xi_1)}{6} & ① \\ 1=f(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'''(\xi_2)}{6} & ② \end{cases}$$

$② - ① \Rightarrow 1=\frac{1}{6}[f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)]=\frac{1}{6}(1+1)f'''(\xi),\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-1,1)$

$\Rightarrow f'''(\xi)=3\quad \xi\in(-1,1)$

注： 由达布定理可知，这里的"三阶连续可导"可弱化为"三阶可导"，下面的部分题目也有类似的情况

例题 4 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$[f(x)]_{\min}=-1$，证: $\exists\xi\in(0,1)$，s.t. $f''(\xi)\geqslant 8$

证明： 假设$f(x_0)=-1$，由费马定理，$f'(x_0)=0$　　　微分中值定理（习题4）00:43:33

$$\begin{cases} f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x_0)^2 \\ f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=-1+\frac{{x_0}^2}{2}f''(\xi_1) & ① \\ 0=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2 & ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(\xi_1)=\frac{2}{{x_0}^2} & ① \\ f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-x_0)^2} & ② \end{cases}$$

1° 若$0<x_0\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow f''(\xi_1)=\frac{2}{{x_0}^2}\geqslant 8\Rightarrow$ 取$\xi=\xi_1$

2° 若$\frac{1}{2}<x_0<1\ \frac{1}{2}<x_0<1\Rightarrow f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-x_0)^2}>8\Rightarrow$ 取$\xi=\xi_2$

$\Rightarrow \exists \xi \in (0,1) s.t. f''(\xi) \geqslant 8$

（或者对$g(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}(0<x<1)$求导，判断函数的范围）

注：**极值点蕴含了导数的信息，所以常常将函数在极值点处泰勒展开**

例题 5 设$f(x)$在$x=x_0$的邻域内四阶可导，$|f^{(4)}(x)|\leqslant M(M>0)$，证:对此邻域上任意一个不同于$x_0$的点$a$，有$\left|f''(x_0)-\dfrac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}\right|\leqslant \dfrac{M}{12}(a-x_0)^2$ (其中b是a关于x_0的对称点)微分中值定理（习题4）00:53:45

证明： 泰勒展开得

$$\begin{cases} f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(a-x_0)^2+\dfrac{f'''(x_0)}{6}(a-x_0)^3+\dfrac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}(a-x_0)^4 & ① \\ f(b)=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(b-x_0)^2+\dfrac{f'''(x_0)}{6}(b-x_0)^3+\dfrac{f^{(4)}(\xi_2)}{24}(b-x_0)^4 & ② \end{cases}$$

$$①+②\Rightarrow f(a)+f(b)-2f(x_0)=f''(x_0)(a-x_0)^2+\frac{(a-x_0)^4}{24}[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)]$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}-f''(x_0)\right|=\frac{(a-x_0)^2}{24}|f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)|$$

$$\leqslant \frac{(a-x_0)^2}{24}[|f^{(4)}(\xi_1)|+|f^{(4)}(\xi_2)|]\leqslant \frac{(a-x_0)^2}{24}\cdot 2M=\frac{M}{12}(a-x_0)^2$$

证毕

注： 从这个例子可以看出，如果题干中没有告诉任何具体点的导数信息，那么可以观察欲证结论，同样也能得出展开点和被展开点应该如何选取。这种思想还可以解决下面两道类题，它们的方法一模一样

类题$f(x)$在$[a,b]$三阶连续可导,证: $\exists \xi\in(a,b)$,使$f(b)=f(a)+f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)(b-a)+\dfrac{(b-a)^3}{24}f'''(\xi)$

证明：泰勒展开得 微分中值定理（习题4）01:13:19

$$\begin{cases} f(a)=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\left(\dfrac{a-b}{2}\right)+\dfrac{f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2!}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2+\dfrac{f'''(\xi_1)}{6}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^3 & ① \\ f(b)=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\left(\dfrac{b-a}{2}\right)+\dfrac{f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2!}\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2+\dfrac{f'''(\xi_2)}{6}\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^3 & ② \end{cases}$$

$$②-①, f(b)-f(a)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{(b-a)^3}{48}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$$

$=f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)(b-a)+\dfrac{(b-a)^3}{24}f'''(\xi)$，$\xi\in(a,b)$证毕

例题 6 在一条笔直的道路上，一辆汽车从开始启动到刹车停止用单位时间走完了单位路程，证明：至少有一个时间点，其加速度的绝对值不小于 4 微分中值定理（习题4）01:24:59

证明：由题意得，$S(0)=0,S'(0)=0,S(1)=1,S'(1)=0$

$$\begin{cases} S\left(\frac{1}{2}\right)=S(0)+S'(0)\left(\frac{1}{2}-0\right)+\frac{S''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{1}{2}-0\right)^2 \\ S\left(\frac{1}{2}\right)=S(1)+S'(1)\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{S''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}S''(\xi_1) & ① \\ S\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{8}S''(\xi_2) & ② \end{cases}$$

$② - ①, 0=1+\frac{1}{8}[S''(\xi_2)-S''(\xi_1)]$

$8=|S''(\xi_2)-S''(\xi_1)|\leqslant|S''(\xi_1)|+|S''(\xi_2)|$

$\exists\xi\in(0,1)s.t.|S''(\xi)|\geqslant 4$

得证

例题 7 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，且$|f(x)|\leqslant a$，$|f''(x)|\leqslant b$，证：$|f'(x)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$恒成立

证明：
$$\begin{cases} f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(-x)^2 & ① \\ f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x)^2 & ② \end{cases}$$

$f(1)-f(0)=f'(x)+\frac{(1-x)^2}{2}f''(\xi_2)-\frac{x^2}{2}f''(\xi_1)$ 微分中值定理（习题4）01:45:09

$|f'(x)|=\left|f(1)-f(0)-\frac{(1-x)^2}{2}f''(\xi_2)+\frac{x^2}{2}f''(\xi_1)\right|\leqslant 2a+\frac{(1-x)^2}{2}b+\frac{x^2}{2}b$

$=2a+\frac{b}{2}[x^2+(1-x)^2]\leqslant 2a+\frac{b}{2}=2a+\frac{b}{2}$ 证毕

题型五 计算中值ξ中参数θ的极限

例题 8 设$f(x)=\arctan x$，$x\in[0,a]$，若$f(a)-f(0)=af'(\theta a)$，$\theta\in(0,1)$. 求$\lim\limits_{a\to 0}\theta^2$

证明： $\arctan a=a\cdot\frac{1}{1+\theta^2a^2}\Rightarrow\theta^2=\frac{\frac{a}{\arctan a}-1}{a^2}=\frac{a-\arctan a}{a^2\arctan a}$ 微分中值定理（习题4）02:12:25

$\lim\limits_{a\to 0}\theta^2=\lim\limits_{a\to 0}\frac{a-\left[a-\frac{1}{3}a^3\right]+o(x^3)}{a^3}=\frac{1}{3}$

例题 9 设$y=f(x)$在$(-1,1)$内具有二阶连续导数，$f''(x)\neq 0$ 微分中值定理（习题4）02:16:42

证明：(1) 对于$(-1,1)$内任意$x\neq 0$，存在唯一的$0<\theta(x)<1 s.t. f(x)-f(0)=x\cdot f'[\theta(x)x]$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$

证明： (1) 由拉格朗日中值定理：$\exists\theta(x)\in(0,1)s.t.f(x)-f(0)=xf'(\theta x)$成立

由于$f''(x)\neq 0\Rightarrow f''(x)>0$或$f''(x)<0$恒成立$\Rightarrow f'(x)$单调

又由于$f'[\theta(x)x]=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$，对于$\forall$确定的$x\neq 0$，由于$f'$单调，故 $\theta(x)$是唯一的

(2)$\begin{cases} f(x)=f(0)+xf'(\theta x) \\ f(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-0)^2 \end{cases} \Rightarrow xf'(\theta x)=f'(0)x+\dfrac{x^2}{2}f''(\xi) \Rightarrow f'(\theta x)-f'(0)=\dfrac{x}{2}f''(\xi)$

$\xi\in(0,x)$

$\theta x\cdot f''(\eta)=\dfrac{x}{2}f''(\xi)\Rightarrow \theta=\dfrac{1}{2}\dfrac{f''(\xi)}{f''(\eta)}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(\xi)}{f''(\eta)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{f''(0)}{f''(0)}=\dfrac{1}{2}$，$\eta\in(0,\theta x)$

例题 10 $f(x)$有$n+1$阶连续导数，若$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\dfrac{f''(a)}{2}h^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n$ $(0<\theta<1)$，

且$f^{(n+1)}(a)\neq 0$，证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$　　微分中值定理（习题4）02:41:29

证明：$\begin{cases} f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n & ① \\ f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1} & ② \end{cases}$ $\xi\in(a,a+h)$，$h\to 0,\xi\to a$

联立①②，$\Rightarrow \dfrac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$

$\Rightarrow f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}h$

$\Rightarrow \theta hf^{(n+1)}(\eta)=\dfrac{1}{n+1}f^{(n+1)}(\xi)h$，$\eta\in(a,a+\theta h)$，$h\to 0,\eta\to a$

$h\to 0\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\theta f^{(n+1)}(a)=\dfrac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$，证毕