高阶导数的计算（习题-紧密）

方法一 找规律法

所谓找规律法，说白了就是先导几次试试，观察一下，找到其中的规律即可直接写出n阶导数的公式.

例题 1 利用找规律的方法，求出下列简单函数的高阶导数. 高阶导数的计算（习题）00:02:13

(1) 已知$y=\sin x$，求$y^{(n)}$.

解：(1) $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow y''=-\sin x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\times 2\right)\Rightarrow y'''=-\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\times 3\right)$

$\Rightarrow y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\cdot n\right)$

(2) $y=\mathrm{e}^{x}\sin x$，求$y^{(n)}$.

(2) $y'=\mathrm{e}^{x}(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow y''=\left(\sqrt{2}\right)^{2}\mathrm{e}^{x}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\times 2\right)$

$\Rightarrow y^{(n)}=\left(\sqrt{2}\right)^{n}\mathrm{e}^{x}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\times n\right)$

(3) (2007 年) 设函数$y=\frac{1}{2x+3}$，则$y^{(n)}(0)=$__________.

(3) $y=\frac{1}{2x+3}\Rightarrow y'=-\frac{1}{(2x+3)^{2}}\times 2\Rightarrow y''=(-1)(-2)\frac{1}{(2x+3)^{3}}2^{2}\Rightarrow y'''=(-1)(-2)(-3)\frac{1}{(2x+3)^{4}}2^{3}$

$\Rightarrow y^{(n)}(x)=(-1)^{n}n!\frac{1}{(2x+3)^{n+1}}2^{n}$，令$x=0\Rightarrow y^{(n)}(0)=(-1)^{n}n!\frac{2^{n}}{3^{n+1}}$

例题 2 设$f(x)$一阶可导，且$f'(x)=f^{2}(x)$，$f(0)=2$，求$f^{(n)}(0)$. 高阶导数的计算（习题）00:17:53

解： $f''(x)=2f(x)f'(x)=1\times 2f^{3}(x)$

$f'''(x)=2\times 3f^{2}(x)f'(x)=1\times 2\times 3f^{4}(x)$

$f^{4}(x)=2\times 3\times 4f^{3}(x)f'(x)=1\times 2\times 3\times 4f^{5}(x)$

$\Rightarrow f^{(n)}(x)=n!f^{n+1}(x)$ 令$x=0\Rightarrow f^{(n)}(0)=n!f^{n+1}(0)=n!2^{n+1}$

方法二 莱布尼兹求导公式

莱布尼兹求导公式——$(uv)^{(n)}=\mathrm{C}_n^0uv^{(n)}+\mathrm{C}_n^1u'v^{(n-1)}+\cdots+\mathrm{C}_n^nu^{(n)}v$，该公式特别适用于$u$和$v$中至少有一个为多项式函数时（想想为什么?），比如计算$f(x)=x\mathrm{e}^{x}$的n阶导数就非常方便.

例题 3 (2000 年) 设$y=x^{2}\ln(1+x)$，求$y^{(n)}(0)$.（其中$n\geq 3$） 高阶导数的计算（习题）00:32:44

解法一： $y^{(n)}=C_n^0x^{2}[\ln(1+x)]^{(n)}+C_n^1 2x[\ln(1+x)]^{(n-1)}+C_n^2 2[\ln(1+x)]^{(n-2)}$

$(\ln(1+x))'=\frac{1}{1+x}$，$(\ln(1+x))''=-\frac{1}{(1+x)^2}$，$(\ln(1+x))'''=(-1)(-2)\frac{1}{(1+x)^3}$

$\Rightarrow [\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n}\Rightarrow y^{(n)}(0)=n(n-1)(-1)^{n-1}(n-3)!=(-1)^{n-1}\frac{n!}{n-2}$

解法二（泰勒展开）： $f(x)=x^2\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\right]$

$\frac{(-1)^{n-1}}{n-2}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Rightarrow f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n!}{n-2}$

例题 4 设 $f(x)=(x-1)^n x^{2n}\sin\frac{\pi}{2}x$，求 $f^{(n)}(1)$. 高阶导数的计算（习题）00:40:13

解： 令 $g(x)=x^{2n}\cdot\sin\frac{\pi}{2}x\Rightarrow f(x)=(x-1)^n g(x)$

$f^{(n)}(x)=C_n^0(x-1)^n g^{(n)}(x)+C_n^1 n(x-1)^{n-1}g^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n^{n-1}n!\,(x-1)g'(x)+C_n^n n!\,g(x)$

令 $x=1\Rightarrow f^{(n)}(1)=C_n^n n!\,g(1)=n!$

例题 5 设 $f(x)=(x^2-3x+2)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$，求 $f^{(n)}(2)$. 高阶导数的计算（习题）00:46:40

解： $f(x)=[(x-1)(x-2)]^n\cdot\cos\frac{\pi x^2}{16}=(x-2)^n\left[(x-1)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}\right]$

$\Rightarrow f^{(n)}(x)=C_n^0(x-2)^n g^{(n)}(x)+\cdots+C_n^n n!\,g(x)$ 令 $x=2$

$\Rightarrow f^{(n)}(2)=n!\,g(2)=n!\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

注： 例题 4 和例题 5 都选自 1000 题，但其实有更快的方法，也就是下面的例题 12、13.

例题 6 设 $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有 $n-1$ 阶连续导数，求 $f^{(n)}(a)$.

解： $f^{(n-1)}(x)=C_{n-1}^0(x-a)^n\varphi^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^1 n(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots+C_{n-1}^{n-1}n!\,(x-a)\varphi(x)$

令 $x=a, f^{(n-1)}(a)=0$ 高阶导数的计算（习题）00:50:34

$f^{(n)}(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}C_{n-1}^{n-1}n!\,\varphi(x)=n!\,\varphi(a)$

方法三 泰勒展开法

利用泰勒展开的唯一性——只要函数 $f(x)$ 可以被展开成 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ 的样子，那么其系数 a_0, a_1, $\cdots$, a_n, $\cdots$ 一定是被唯一确定的（想想为什么?）；又因为 $f(x)$ 的泰勒展开（麦克劳林展开）为 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$，所以根据泰勒展开的唯一性可知，必有 $a_0=f(0)$，

$a_1=f'(0)$，$a_2=\dfrac{f''(0)}{2}$，$\cdots$，$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$，$\cdots$，总之，可以解出 $f^{(n)}(0)=n!a_n$，这样就求出了 $f(x)$ 在 0 处的高阶导数.

（一句话总结：**具体展开、抽象展开、对比系数、得出答案!**）

例题 7 设 $y=\arctan x$，求 $y^{(8)}(0)$ 和 $y^{(9)}(0)$.　　高阶导数的计算（习题）01:07:46

解： $y=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{7}x^7+\dfrac{1}{9}x^9-\cdots$

$\Rightarrow 0=\dfrac{y^{(8)}(0)}{8!}\Rightarrow y^{(8)}(0)=0;\ \dfrac{1}{9}=\dfrac{y^{(9)}(0)}{9!}\Rightarrow y^{(9)}(0)=8!$

例题 8 (2007 年) 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$__________.　　高阶导数的计算（习题）01:12:23

解： $y=\dfrac{1}{3+2x}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{2}{3}x}=\dfrac{1}{3}\cdot\left[1-\dfrac{2}{3}x+\left(\dfrac{2}{3}x\right)^2-\cdots+(-1)^n\left(\dfrac{2}{3}x\right)^n+\cdots\right]$

$\dfrac{1}{3}(-1)^n\dfrac{2^n}{3^n}=\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}\Rightarrow y^{(n)}(0)=(-1)^n n!\dfrac{2^n}{3^{n+1}}$

例题 9 (2016 年) 设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$__________.

解： $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{3}x^3\right)-x[1-ax^2]+o(x^3)=\left(a-\dfrac{1}{3}\right)x^3+o(x^3)$　　高阶导数的计算（习题）01:23:33

$a-\dfrac{1}{3}=\dfrac{f'''(0)}{3!}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow a=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$

例题 10 设 $y=e^{\sqrt{2}x}\cdot\sin x$，求 $y^{(3)}(0)$.　　高阶导数的计算（习题）01:27:58

解： $y=\left[1+\sqrt{2}x+\dfrac{1}{2!}\left(\sqrt{2}x\right)^2\right]\cdot\left[x-\dfrac{1}{6}x^3\right]+o(x^3)$

x^3 前的系数：$-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2!}\left(\sqrt{2}\right)^2=-\dfrac{1}{6}+1=\dfrac{5}{6}$

$\dfrac{5}{6}=\dfrac{y^{(3)}(0)}{3!}\Rightarrow y^{(3)}(0)=5$

例题 11 设 $f(x)=\sqrt[3]{\sin(x^3)}+\ln\cos x$，求 $f^{(4)}(0)$ 和 $f^{(7)}(0)$.　　高阶导数的计算（习题）01:35:25

解： 令 $g(x)=\sqrt[3]{\sin x^3}$　$h(x)=\ln\cos x$，$g(x)$ 是奇函数，$h(x)$ 是偶函数

$\Rightarrow f^{(4)}(0)=h^{(4)}(0)$ 且 $f^{(7)}(0)=g^{(7)}(0)$

(1) $h(x)=\ln\cos x=\ln[1+(\cos x-1)]=(\cos x-1)-\dfrac{1}{2}(\cos x-1)^2+o(x^4)$

$=\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{24}x^4\right)-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}x^4+o(x^4)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$

$\Rightarrow -\frac{1}{12}=\frac{h^{(4)}(0)}{4!}\Rightarrow h^{(4)}(0)=-2\Rightarrow f^{(4)}(0)=-2$

(2) $g(x)=\sqrt[3]{\sin x^3}=\sqrt[3]{x^3-\frac{1}{6}(x^3)^3+\frac{1}{5!}(x^3)^5+\cdots}=x\cdot\left[1-\frac{1}{6}x^6\right]^{\frac{1}{3}}=x\left[1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\right)x^6\right]+o(x^7)$

$\Rightarrow -\frac{1}{18}=\frac{g^{(7)}(0)}{7!}$

$f^{(7)}(0)=g^{(7)}(0)=-280$

例题 12 设$f(x)=(x-1)^n x^{2n}\sin\frac{\pi}{2}x$，求$f^{(n)}(1)$. 高阶导数的计算（习题）01:52:35

解： $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^n}=\lim\limits_{x\to 1}x^{2n}\cdot\sin\frac{\pi}{2}x=1$

$\Rightarrow 1=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+o(x-1)^n}{(x-1)^n}$

$\Rightarrow f(1)=f'(1)=\cdots=f^{(n-1)}(1)\equiv 0\quad \frac{f^{(n)}(1)}{n!}=1\Rightarrow f^{(n)}(1)=n!$

例题 13 设$f(x)=(x^2-3x+2)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$，求$f^{(n)}(2)$. 高阶导数的计算（习题）02:04:08

解： $\frac{f(x)}{(x-2)^n}=(x-1)^n\cos\frac{\pi}{16}x^2\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)^n}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow f(2)=f'(2)=\cdots=f^{(n-1)}(2)\equiv 0$

$\frac{f^{(n)}(2)}{n!}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow f^{(n)}(2)=\frac{\sqrt{2}}{2}n!$

例题 14 设n为正整数，$f(x)=g'(x)$，$g(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，求$f^{(n)}(0)$. 高阶导数的计算（习题）02:10:34

解： $f^{(n)}(x)=g^{(n+1)}(x)$，$f^{(n)}(0)=g^{(n+1)}(0)$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$

$g(x)=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{(n+2)!}+\cdots$

$\Rightarrow\frac{1}{(n+2)!}=\frac{g^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}\Rightarrow g^{(n+1)}(0)=\frac{1}{n+2}\Rightarrow f^{(n)}(0)=\frac{1}{n+2}$

方法四 数学归纳法

本方法主要适用于高阶导数的**证明题**，下面是一道最为典型的例题——

例题 15 证明：$\left[x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$ 高阶导数的计算（习题）02:18:44

解： 1° $n=0$ 时，左边 $=\frac{1}{x}\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$，右边 $=\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$ ，初值成立

2° 假设 $\left[x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$ 成立

3° 目的是证明：$\left[x^{n}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n+1)}=\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\left[x^{n}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n+1)}=\left(\left[x\cdot x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)}\right)'=\left[C_n^0x\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}+C_n^1\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n-1)}\right]'$$

$$=\left[\frac{(-1)^n}{x^n}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right]'+n\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^n\left[(-n)\frac{1}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right]+n\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$=\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)$，综上，命题成立，证毕

方法五 最难的考法

利用莱布尼兹求导公式，构造线性递推！这种题，在**真题里从来没考过**，但是 660 题里有一道天花板难度的高阶导数题，用的就是这个方法，即——“已知 $f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，求 $f^{(n)}(0)$”.

这个题的方法我曾经在 B 站系统介绍过，时间是 2022 年 3 月 30 日，大家可以前去观看，我们在正课上就不再花时间讲解了，毕竟从来没有考过.

本次课的方法比较固定，题目基本也就这些，所以不再配置作业题了，希望同学们把例题彻底吃透！