递推数列的极限

这份讲义主要研究递推型数列$a_{n+1}=f(a_n)$的收敛性证明. 数列极限存在性的证明是考研数学的重难点，经常以压轴题的形式出现，希望大家引起足够的重视.

在讲具体题目之前，先理清一个问题：**对于递推型数列$a_{n+1}=f(a_n)$，证明其收敛性是必要的，不可省略！**

很多同学认为，既然都能直接通过$A=f(A)$求出具体的极限值A，为何还要花时间去证明它收敛呢？

那是因为，若不证明该数列真的收敛，那么即使通过方程$A=f(A)$解出了A，那也只能说明“如果这个数列收敛，那么它只能收敛于A”. 但万一数列$\{a_n\}$根本就不收敛呢？

比如，假设数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n}$，我们可以发现这个数列所有的奇数项均为 2，所有的偶数项均为$\dfrac{1}{2}$，显然不收敛！但是，如果令$A=\dfrac{1}{A}$，并注意到$A\geqslant 0$，我们将会解出$A=1$，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，这显然是荒谬的. 所以，对于递推型的数列$a_{n+1}=f(a_n)$，先证明它的极限存在，是必不可少的步骤.

证明极限存在有两个方法，分别是“单调有界准则”和“夹逼准则”，它们刚好对应了本讲义的两种题型.

定理 1 单调有界准则 若$\{a_n\}$单调递增，且有上界，则$\{a_n\}$收敛；若$\{a_n\}$单调递减，且有下界，则$\{a_n\}$收敛.

定理 2 夹逼准则 若$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$.

套路一 单调有界准则

单调有界准则能解决考研真题中几乎所有的递推数列极限，希望大家不要学习过多其它的方法.

例题 1 (1996 年) 设$x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，证明$\{x_n\}$收敛并求极限值. 3－1递推数列的极限(上)00:08:45

解：(1) 有界性：①$x_1=10\geqslant 3$成立；② 假设$x_n\geqslant 3$成立；③$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\geqslant\sqrt{6+3}=3$

由数学归纳法可得，$x_n\geqslant 3$恒成立

(2) 单调性：$x_{n+1}-x_n=\sqrt{6+x_n}-x_n=\dfrac{6+x_n-x_n^2}{\sqrt{6+x_n}+x_n}=-\dfrac{(x_n-3)(x_n+2)}{\sqrt{6+x_n}+x_n}\leqslant 0$

$\Rightarrow x_{n+1}\leqslant x_n\Rightarrow\{x_n\}$单调递减

由单调有界准则，$\{x_n\}$收敛，假设$x_n\to A\Rightarrow A=\sqrt{6+A}\Rightarrow A=3$或$-2$（舍）

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$

注 1：我们主要通过本题来**回顾“数学归纳法”**，并且**梳理一下证明数列“单调有界”时的最基本的思路**.

注 2：在使用单调有界准则处理递推数列的极限时，先证明有界性还是先证明单调性都可以，但一般来说先从有界性下手. 因为很多时候，单调性往往“依赖于”有界性的那个“界”到底是几.

注 3：通过这两道题的讲解，我们学到了证明递推数列$a_{n+1}=f(a_n)$收敛的几个思想——

(1) 在草稿纸上令$n\to\infty$，解方程$A=f(A)$，先求出极限值A，做到“心中有数”;

(2) 若题干告诉了首项a_1的具体值，则可以比较a_1和A大小（以下假定$a_1<A$），从而猜测出$\{a_n\}$的单调性，并根据单调性推测出有界性和具体的界（界的值，往往就是极限A）——比如，$a_1<A$，那么我们有理由猜测$\{a_n\}$单调递增，且上界就是极限值A，接下来就可以开始正式的证明了；

(3) 证明有界性：利用数学归纳法，证明$a_n\leqslant A$恒成立（也可以用其他方法，比如直接放缩）；

(4) 证明单调性：$a_{n+1}-a_n=f(a_n)-a_n$，再根据$a_1\leqslant a_n\leqslant A$可知，只需要构造函数$g(x)=f(x)-x$，然后证明$g(x)\geqslant 0$在$x\in[a_1,A]$时恒成立即可.

注 4：对于递推数列$a_{n+1}=f(a_n)$而言，还可以通过$f(x)$本身的单调性，推出数列$\{a_n\}$的单调性——

① 若$f(x)$递增，且$a_2>a_1$，则$f(a_2)>f(a_1)$，即$a_3>a_2$；继续套一个f，则$f(a_3)>f(a_2)$，即$a_4>a_3$，如此重复下去，可推出$a_{n+1}>a_n$恒成立，即$\{a_n\}$递增；

② 若$f(x)$递增，且$a_2<a_1$，则$f(a_2)<f(a_1)$，即$a_3<a_2$；继续套一个f，则$f(a_3)<f(a_2)$，即$a_4<a_3$，如此重复下去，可推出$a_{n+1}<a_n$恒成立，即$\{a_n\}$递减；

③ 若$f(x)$递减，则$\{a_n\}$一定不单调，但$\{a_n\}$的奇子列$\{a_{2n+1}\}$和偶子列$\{a_{2n}\}$一定各自单调，且单调性相反.

其中，结论③的证明如下——

假设$a_3>a_1$，两边套上f，由于$f(x)$递减，故$a_4<a_2$；

在$a_3>a_1$两边不断套上$f[f(\ )]$，可以推出$a_5>a_3$、$a_7>a_5$、…，故$\{a_{2n+1}\}$单调递增；

在$a_4<a_2$两边不断套上$f[f(\ )]$，可以推出$a_6<a_4$、$a_8<a_6$、…，故$\{a_{2n}\}$单调递减.

故$\{a_n\}$一定不单调，但$\{a_{2n+1}\}$和$\{a_{2n}\}$一定各自单调，且单调性相反.

有了以上这些思想和结论，做题自然就更加得心应手了. 当然，上面的内容并不是金科玉律，数学的解题也并不是一成不变的，比如下面的例题 2，直接利用均值不等式便可以求出数列的界.

当然，这样得到的界，不一定是最精确的界，最精确的界一定是极限值.

注 5：通过“注 4”中的结论我们可以发现，如果修改题目中首项的取值，则可能影响整个数列的单调性，比如在类题中，如果将初值改为$x_1=1$，则$x_2=\sqrt{7}>1$，故$\{x_n\}$单调递增（原题是单调递减）.

例题 2 设$x_1=2,x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_{n-1}+\dfrac{2}{x_{n-1}}\right)$，证明$\{x_n\}$收敛并求极限值. 3－1递推数列的极限(上)00:51:48

(1)有界性：$x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_{n-1}+\dfrac{2}{x_{n-1}}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_{n-1}\cdot\dfrac{2}{x_{n-1}}}=\sqrt{2}$

(2)单调性：$x_n-x_{n-1}=\dfrac{1}{2}\left(x_{n-1}+\dfrac{2}{x_{n-1}}\right)-x_{n-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{x_{n-1}}-x_{n-1}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2-x^2_{n-1}}{x_{n-1}}\leqslant 0$

$\Rightarrow\{x_n\}$单调递减，得出$\{x_n\}$收敛，假设$x_n\to A$

$A=\dfrac{1}{2}\left(A+\dfrac{2}{A}\right)\Rightarrow A=\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$，得出$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$

例题 3 设$0<c<1$，$x_1=\dfrac{c}{2}$，且$x_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{x_n^2}{2}(n=1,2,\cdots)$. 证明$\{x_n\}$收敛，并求极限值.

解： ① 令$f(x)=\dfrac{c}{2}+\dfrac{x^2}{2}(x\geqslant 0)\Rightarrow f'(x)=x\geqslant 0\Rightarrow f(x)$单调递增$\Rightarrow x_n$单调 3—1递推数列的极限(上)01:03:48

又由于$x_2=\dfrac{c}{2}+\dfrac{x_1^2}{2}>x_1\Rightarrow\{x_n\}$单调递增

② 有界性：1°. $x_1=\dfrac{c}{2}<1-\sqrt{1-c}$

2°. 假设$x_n<1-\sqrt{1-c}$成立

3°. $x_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{x_n^2}{2}<\dfrac{c}{2}+\dfrac{\left(1-\sqrt{1-c}\right)^2}{2}=1-\sqrt{1-c}$

有数学归纳法可得，$x_n<1-\sqrt{1-c}$

综上，$\{x_n\}$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1-\sqrt{1-c}$

下面，我们再来看两道初值影响单调性的题——

例题 4 (1) 证明：方程$x=1+2\ln x$在$(\mathrm{e},+\infty)$内有唯一实根$x=\xi$； 3—1递推数列的极限(上)02:02:55

(2) 取$x_0\in(\mathrm{e},+\infty)$，令$x_{n+1}=1+2\ln x_n$，证明：$\{x_n\}$收敛于$\xi$. (120 分水平)

解： (1) 令$g(x)=1+2\ln x-x(x>0)$，$g(1)=0,g(\mathrm{e})=3-\mathrm{e}>0,g'(x)=\dfrac{2}{x}-1\Rightarrow g(x)$在$(0,2)$单调递增

在$(2,+\infty)$单调递减，$g(0+0)=-\infty,g(+\infty)=-\infty$，$\Rightarrow x=\xi$是$g(x)=1+2\ln x-x$在$(\mathrm{e},+\infty)$
的唯一零点，也是$x=1+2\ln x$的唯一根

(2) ① 若$\mathrm{e}<x_0<\xi$

1° 有界性：$x_0<\xi$, 假设$x_n<\xi$，则$x_{n+1}=1+2\ln x_n<1+2\ln\xi=\xi\Rightarrow x_n<\xi$恒成立
2° 单调性：$x_{n+1}-x_n=1+2\ln x_n-x_n>0\Rightarrow x_n$单调递增$\Rightarrow\{x_n\}$收敛于$\xi$

② 若$x_0>\xi$，同理

例题 5 (2006 年) 设$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi$, $x_{n+1}=\sin x_n$. (1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求极限值； (2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解： (1) ① 有界性 由于$0<x_1<\pi\Rightarrow x_2\in(0,1]\subseteq(0,\pi)\Rightarrow x_3\in(0,\pi)\Rightarrow\cdots x_n\in(0,\pi)$

② 单调性 $x_{n+1}=\sin x_n\leqslant x_n\Rightarrow\{x_n\}$单调递减 3—1递推数列的极限(上)02:21:10

故$\{x_n\}$收敛，假设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Rightarrow A=\sin A$，显然$A=0$为唯一的解

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\cdot\ln\frac{\sin t}{t}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\cdot\frac{\sin t-t}{t}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$

注 1： 本题中，先证明有界性是必须的. 很多人一上来就使用$\sin x<x$这个不等式，从而得出$\{x_n\}$递减，但

其实这是错误的——因为$\sin x < x$成立的前提是$x>0$；而当$x<0$时，应该是$\sin x > x$——这提示我们在记公式、定理、结论时，一定要注意其成立的前提条件；

注 2：本题的第(1)问是数列极限，但是第(2)问的本质是函数极限，这种题非常多.

例题 6 设$0<x_1<\frac{\pi}{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{\frac{\pi}{2}x_n\sin x_n}\,(n=1,2,\cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sec x_n-\tan x_n}{\frac{\pi}{2}-x_n}$. (120 分水平)

解：(1)有界性：① $0<x_1<\frac{\pi}{2}$ ② 假设$0<x_n<\frac{\pi}{2}$ ③$x_{n+1}=\sqrt{\frac{\pi}{2}x_n\sin x_n}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

故$x_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$恒成立　　　　3—1递推数列的极限(上)02:34:40

(2)单调性：$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{\sin x_n}{x_n}}$，下只需证明$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}>1$在$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$成立

即证：$\sin x>\frac{2}{\pi}x\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$，令$f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x,\ f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$f''(x)=-\sin x<0\Rightarrow f(x)$为凸函数，得出$f(x)>0$在$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$恒成立，故$x_{n+1}>x_n$

即$\{x_n\}$单调递增，$\{x_n\}$收敛，假设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$A=\sqrt{\frac{\pi}{2}A\sin A}$，得$\Rightarrow A=0,A=\frac{\pi}{2}$是该方程的唯二解

由于x_n单调递增且$x_1>0$，故$A\neq0$，得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sec x_n-\tan x_n}{\frac{\pi}{2}-x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sin x_n}{\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)\cdot\cos x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)^2}{\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)^2}=\frac{1}{2}$$

例题 7 $x_1=1,x_{n+1}=\sqrt{\frac{x_n}{1+x_n}}$，证明$\{a_n\}$收敛并求极限值. (易错)　　　　3—1递推数列的极限(上)01:30:05

解：(1)单调性：$f(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x}}=\sqrt{1-\frac{1}{1+x}}\Rightarrow f(x)$单调递增，$\Rightarrow\{x_n\}$单调

(2)有界性：① $x_1=1>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

② 假设$x_n>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

③ 则$x_{n+1}=\sqrt{\frac{x_n}{1+x_n}}>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

综上，$\{x_n\}$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

注 1：此题对于极限值的取舍才是关键点，为此，我们先回顾一下本题的解题过程，可以总结如下——

(1) 在草稿纸上，令$n\to\infty$，解$A=\sqrt{\frac{A}{1+A}}$，但是发现有两个解，分别是$A_1=0$和$A_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$；

(2) 不论哪一个是极限值，均比$x_1=1$要小，故猜测$\{x_n\}$单调递减(或者根据$x_2=\sqrt{\frac{1}{2}}$来猜测$\{x_n\}$单调递减)；

(3) 根据$f(x)$递增，再结合$x_2<x_1$，证明出了$\{x_n\}$的确单调递减；

(4) 利用数学归纳法证明有界性时，发现$x_n>A_1$和$x_n>A_2$都能证明出来（这是必然的，不是偶然）；

(5) 由于 $A_2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}>A_1=0$，这说明 $A_1=0$ 不可能是 $\{x_n\}$ 的极限（否则就与 $x_n>A_2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 矛盾），故极限只能是 $A_2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

注 2：当方程 $A=f(A)$ 不止一个根时，我们必须判断哪一个根才是真正的极限值.

通过本题的分析，我们可以得出如下结论——当 $\{x_n\}$ 单调递减时，极限为方程 $A=f(A)$ 的最大的根；当 $\{x_n\}$ 单调递增时，极限为方程 $A=f(A)$ 的最小的根.

例题 8 (2018 年) 设 $x_1>0$，$x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$，证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限. (120 分水平)

解：(1) 有界性：① 验证初值 $x_1>0$ ② $x_n>0$ ③ $x_{n+1}=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}$ 3—2递推数列的极限(中)00:00:41

$\Rightarrow x_{n+1}=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}>\ln\dfrac{x_n}{x_n}=0\Rightarrow x_n>0$ 恒成立

(2) 单调性：$x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}-x_n=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n\cdot e^{x_n}}$

即证：$e^{x_n}-1<x_n e^{x_n}\,(x_n>0)$

令 $f(x)=xe^x-e^x+1$，$f(0)=0, f'(x)=xe^x\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$f(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立

$\Rightarrow x_{n+1}<x_n\Rightarrow x_n$ 单调递减，由单调有界准则，$\{x_n\}$ 收敛，假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$

$Ae^A=e^A-1$，显然 $A=0$ 是一个解，又由于 $f(x)$ 只有唯一零点 $x=0$，故 $A=0$ 为唯一解

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

注：本题的价值非常高，是递推数列极限的考研真题里最难的一道，希望大家重点复习.

下面是一道与之完全相似的类题——

类题 $x_1>1$，$x_{n+1}=1+\ln\left(\dfrac{x_n^2}{1+\ln x_n}\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. (120 分水平) 3—2递推数列的极限(中)00:25:46

解：(1) 有界性：① $x_1>1$ ② 假设 $x_n>1$ ③ 只需证明：$x_n^2>1+\ln x_n\,(x_n>1)$

$\Rightarrow 1+\ln x_n<1+(x_n-1)=x_n<x_n^2\Rightarrow x_{n+1}>1\Rightarrow x_n>1$ 恒成立

(2) 单调性：$x_{n+1}-x_n=1+\ln\left(\dfrac{x_n^2}{1+\ln x_n}\right)-x_n=1+2\ln x_n-\ln[1+\ln x_n]-x_n\,(x_n>1)$

令 $f(x)=1+2\ln x-\ln(1+\ln x)-x$，$f(1)=0, f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{1+\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}-1, f'(1)=0$

而 $f'(x)=\dfrac{2(1+\ln x)-1-x(1+\ln x)}{x\cdot(1+\ln x)}$，$g(x)=1+2\ln x-x-x\ln x, g(1)=0, g'(x)=\dfrac{2}{x}-(2-\ln x)<0$

$\Rightarrow g(x)$ 单调递减，$g(x)<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ 单调递减，得出 $f(x)<0\,(x>1)$

$x_{n+1}<x_n\Rightarrow x_n$ 单调递减，由单调有界定理，$\{x_n\}$ 收敛，假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Rightarrow A=1+\ln\dfrac{A^2}{1+\ln A}$

显然 $A=1$ 是一个解，由 $f(x)$ 单调性可知，$x=1$ 是 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 的唯一零点，得 $A=1$ 是 $A=f(A)$ 的唯一解，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

接下来，我们来看一道稍微不常规的题目.

例题 9 (2013 年) (1) 求 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$ 的最小值； 3—2递推数列的极限(中)00:57:18

(2) 设 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限. (120 分水平)

解： (1) $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}, f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增

得出 $f_{\min}(x)=f(1)=1$

(2) 由（1）可得，$f(x)\geqslant 1$ 即 $\ln x+\dfrac{1}{x}\geqslant 1\Rightarrow \ln x_{n+1}+\dfrac{1}{x_{n+1}}\geqslant 1$，再结合题干不等式 $\Rightarrow x_{n+1}>x_n\Rightarrow \{x_n\}$ 单调递增

假设 $\{x_n\}$ 无上界，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，在 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$ 里，令 $n\to\infty\Rightarrow +\infty<1$ 矛盾，得出 $\{x_n\}$ 有上界，

假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，在两个不等式中，均令 $n\to\infty$，$\begin{cases}\ln A+\dfrac{1}{A}\leqslant 1\\ \ln A+\dfrac{1}{A}\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow \ln A+\dfrac{1}{A}=1\Rightarrow A=1$ 是一个解

由于 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$(1,+\infty)$ 单调递增，且 $f(1)=1$，得出 $A=1$ 是 $\ln A+\dfrac{1}{A}=1$ 的唯一解

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

注： 本题说明，即使某些数列的递推关系由不等式给出，也能使用单调有界准则，只是最后求极限时，还要用到夹逼准则.

类题 设 $x_n>0$，$x_{n+1}+\dfrac{1}{x_n}<2$，证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限. 3—2递推数列的极限(中)01:13:52

解： $\begin{cases}x_n+\dfrac{1}{x_n}\geqslant 2\\ x_{n+1}+\dfrac{1}{x_n}<2\end{cases}\Rightarrow x_{n+1}\leqslant x_n\Rightarrow \{x_n\}$ 单调递减，又 $x_n>0$，得出 $\{x_n\}$ 收敛

假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，令 $n\to\infty\Rightarrow\begin{cases}A+\dfrac{1}{A}\geqslant 2\\ A+\dfrac{1}{A}\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow A+\dfrac{1}{A}=2\Rightarrow A=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

例题 10 (2011 年) 3—2递推数列的极限(中)01:22:36

(1) 证明：对于任意的正整数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$

(2) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$，证明：$\{a_n\}$ 收敛

解： (1) 先证：$x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$，令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x$，$f(0)=0$

$f'(x)=\ln(1+x)+1-1=\ln(1+x)\Rightarrow x>0$ 时，$f(x)$ 单调递增，$\Rightarrow f(x)>0\Rightarrow \ln(1+x)>\dfrac{x}{1+x}$

证毕

(2) ①$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}+\ln n-\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}-[\ln(n+1)-\ln n]=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$

故$\{a_n\}$单调递减

② $\begin{cases}\frac{1}{2}<\ln\frac{2}{1}<1\\ \frac{1}{3}<\ln\frac{3}{2}<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}<\ln\frac{4}{3}<\frac{1}{3}\\ \vdots\\ \frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}\end{cases}$

将这n个式子相加，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

$\Rightarrow a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(n+1)-\ln n>0$

由单调有界准则，得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在

套路二 非单调的递推数列

例题 1 设$x_{n+1}=3+\frac{4}{x_n}$, $x_1=1$，证明$\{x_n\}$收敛并求极限值. 3－3递推数列的极限(下)00:05:26

解： $0\leqslant|x_{n+1}-4|=\left|3+\frac{4}{x_n}-4\right|=\frac{|x_n-4|}{x_n}\leqslant\frac{1}{3}\cdot|x_n-4|\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^2|x_{n-1}-4|\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}|x_2-4|$

令$n\to\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}|x_2-4|=0$，由夹逼准则可得，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=4$

注 1：对付这种不单调的数列，我们可以采取“先求后证”的办法——即先把极限值A找出来，然后再用递推放缩的方法，证明这个数字A就是该数列的极限. 可是，既然已经不单调了，那我们该怎么证明收敛呢？不要忘了，证明极限存在的方法，除了“单调有界准则”以外，还有“夹逼准则”，而“先求后证”的本质，其实就是“夹逼准则”.

注 2：使用该方法的核心，是凑出表达式“$|x_{n+1}-A|<k|x_n-A|$”，其中$k\in(0,1)$是常数.

以下还有几道类似的题——

类题 1 设$x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}$, $x_1=2$，证明$\{x_n\}$收敛并求极限值. 3－3递推数列的极限(下)00:22:48

解：$0\leqslant\left|x_{n+1}-(\sqrt{2}+1)\right|=\left|2+\frac{1}{x_n}-(\sqrt{2}+1)\right|=\left|\frac{1}{x_n}-(\sqrt{2}-1)\right|=\left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right|=\frac{\left|x_n-(\sqrt{2}+1)\right|}{x_n(\sqrt{2}+1)}$

$\leqslant\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}\left|x_n-(\sqrt{2}+1)\right|\leqslant\frac{1}{4}\left|x_n-(\sqrt{2}+1)\right|\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^2\left|x_{n-1}-(\sqrt{2}+1)\right|\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left|x_2-(\sqrt{2}+1)\right|$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left|x_2-(\sqrt{2}+1)\right|=0$，由夹逼准则可得，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}+1$

类题 2 设$a_0=1$，$a_1=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n=0,1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. (120 分水平)

解： 令$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}\Rightarrow b_{n+1}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{b_n}$ 3—3递推数列的极限(下)00:43:26

$$0\leqslant\left|b_{n+1}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right|=\left|\left(1+\frac{1}{b_n}\right)-\left(1+\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)\right|=\frac{\left|b_n-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right|}{b_n\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}}<\frac{2}{\sqrt{5}+1}\cdot\left|b_n-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right|$$

$$<\frac{2}{3}\left|b_n-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right|<\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left|b_n-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right|<\cdots<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\left|b_2-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right|\to 0$$

由夹逼准则可得，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

注： 本方法并不只适用于“非单调数列”，比如下面这道曾经做过的题，也可以用该方法证明.

例题 2 设$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{C(1+x_n)}{C+x_n}(n=1,2,\cdots)$，其中$C>1$为常数. 证明$\{x_n\}$收敛并求极限.

解： $A=\sqrt{c}$ 3—3递推数列的极限(下)00:53:40

$$0\leqslant\left|x_{n+1}-\sqrt{c}\right|=\left|\frac{c(1+x_n)}{c+x_n}-\sqrt{c}\right|=\frac{\left|c+c\cdot x_n-c\sqrt{c}-\sqrt{c}\cdot x_n\right|}{c+x_n}=\frac{\left|\left(c-\sqrt{c}\right)x_n-c\left(\sqrt{c}-1\right)\right|}{c+x_n}$$

$$=\frac{\left(c-\sqrt{c}\right)\left|x_n-\sqrt{c}\right|}{c+x_n}<\left(1-\frac{1}{\sqrt{c}}\right)\cdot\left|x_n-\sqrt{c}\right|<\cdots<\left(1-\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^{n-1}\left|x_2-\sqrt{c}\right|\to 0$$

例题 2 压缩映像原理

设当$a\leqslant x\leqslant b$时，$a\leqslant f(x)\leqslant b$，并设存在常数$k\in[0,1)$，满足——对于$[a,b]$上任意两点$x_1$和$x_2$，都有$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\leqslant k\left|x_1-x_2\right|$，试证明—— 3—3递推数列的极限(下)01:05:49

(1) 存在唯一的$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\xi$.

(2) 对于任意给定的$x_1\in[a,b]$，定义$x_{n+1}=f(x_n)$，证明$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$. (135 分水平)

解： (1) 1°连续性：$0\leqslant\left|f(x+\triangle x)-f(x)\right|\leqslant k\cdot\left|\triangle x\right|\to 0$，由夹逼准则，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x+\triangle x)=f(x)$故连续

2°存在性：令$F(x)=f(x)-x\Rightarrow F(a)=f(a)-a\geqslant 0,F(b)=f(b)-b\leqslant 0$

① 若$f(a)>a$且$f(b)<b\Rightarrow F(a)>0,F(b)<0$，由零点定理可得，$\exists\xi\in[a,b]s.t.f(\xi)=\xi$

② 若$f(a)=a$，取$\xi=a$

③ 若$f(b)=b$,取$\xi=b$，综上$\exists\xi\in[a,b]s.t.f(\xi)=\xi$

3°唯一性：反证法，假设$\exists\eta\neq\xi$，但满足$f(\eta)=\eta$，$0\leqslant\left|f(\eta)-f(\xi)\right|\leqslant k\cdot\left|\eta-\xi\right|$

$\Rightarrow 0<\left|\eta-\xi\right|\leqslant k\cdot\left|\eta-\xi\right|\Rightarrow k\geqslant 1$与$k<1$矛盾，故这样的$\eta$不存在，即$\xi$唯一

(2) $0\leqslant|x_{n+1}-\xi|=|f(x_n)-f(\xi)|\leqslant k\cdot|x_n-\xi|\leqslant k^2|x_{n-1}-\xi|\leqslant\cdots\leqslant k^{n-1}|x_2-\xi|\to 0$

由夹逼准则可得，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$

注 1：压缩映像原理根本就不要求数列$\{x_n\}$是单调的——只要函数$f(x)$是一个压缩映射，那么$\{x_n\}$就一定收敛，这给我们证明递推型数列$x_{n+1}=f(x_n)$的收敛性提供了一个非常有力的武器.

注 2：若题目还告知了$f(x)$可导（其实大多数题的$f(x)$都是可导的），那么在使用压缩映像原理时，更加常用的是下面这个推论：

推论：设$x_{n+1}=f(x_n)$，若存在$0<k<1$，使得$|f'(x)|\leqslant k<1$成立，则$\{x_n\}$一定收敛.

解：$0\leqslant|x_{n+1}-A|=|f(x_n)-f(A)|=|f'(\xi)|\cdot|x_n-A|\leqslant k\cdot|x_n-A|\leqslant k^2|x_{n-1}-A|\leqslant\cdots\leqslant k^{n-1}|x_2-A|\to 0$

由夹逼准则可得，$\{x_n\}$收敛　　3－3递推数列的极限(下)01:48:36

注：在利用压缩映像原理解题时，最常见的错误就是忽略了$k\in(0,1)$的条件. 从压缩映像原理的证明过程中可以发现，$k\in(0,1)$是非常重要的——正是因为$k\in(0,1)$，所以才推出了$\lim\limits_{n\to\infty}k^n=0$，也才能保证$\{x_n\}$收敛. 这里的$k$相当于是一个“压缩比例”或“压缩因子”.

所以，如果只是证明出来了$|f'(x)|<1$，是证明不出数列$\{x_n\}$收敛的；只有证明出$|f'(x)|\leqslant k<1$，才能说明数列$\{x_n\}$收敛，也就是说，这个k是不可缺少的，**在解题时一定要找到这个具体的k，切记！**)

例题 3 已知数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=3+\dfrac{4}{x_n}$, $x_1=1$证明：$\{x_n\}$收敛.　　3－3递推数列的极限(下)02:03:08

解：$0\leqslant|x_{n+1}-4|=|f(x_n)-f(4)|=|f'(\xi)|\cdot|x_n-4|\leqslant\dfrac{4}{9}\cdot|x_n-4|\leqslant\left(\dfrac{4}{9}\right)^2|x_{n-1}-4|\leqslant\cdots\leqslant\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}|x_2-4|\to 0$

由夹逼准则可得，$\{x_n\}$收敛

类题 1 $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$, $x_1=2$，利用压缩映像原理，证明数列$\{x_n\}$收敛.　　3－3递推数列的极限(下)02:09:10

解：$x_n\geqslant 2\Rightarrow f(x)=2+\dfrac{1}{x}\,(x\geqslant 2)\Rightarrow|f'(x)|=\dfrac{1}{x^2}\leqslant\dfrac{1}{4}\Rightarrow|x_{n+1}-A|=|f(x_n)-f(A)|=|f'(\xi)|\cdot|x_n-A|$

与上题同理可得，利用夹逼准则可得，数列$\{x_n\}$收敛

类题 2 $0<q<1, x_{n+1}=p+q\sin x_n$，利用压缩映像原理，证明数列$\{x_n\}$收敛.

解：$f(x)=p+q\sin x\Rightarrow|f'(x)|=q|\cos x|\leqslant q<1\Rightarrow|x_{n+1}-A|\leqslant q|x_n-A|$　　3－3递推数列的极限(下)02:13:07

与上题同理可得，利用夹逼准则可得，数列$\{x_n\}$收敛

类题 3 $x_0=1, x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n^3+4}$，利用压缩映像原理，证明数列$\{x_n\}$收敛.　　3－3递推数列的极限(下)02:15:48

解：$f(x)=\dfrac{1}{x^3+4}\Rightarrow|f'(x)|=\dfrac{3x^2}{(x^3+4)^2}\leqslant\dfrac{3\times\frac{1}{16}}{4^2}=\dfrac{3}{256}<1$

与上题同理可得，利用夹逼准则可得，数列$\{x_n\}$收敛

类题 4 $x_n=\underbrace{\cos\cos\cdots\cos}_{n个\cos}x$，利用压缩映像原理，证明数列$\{x_n\}$收敛．　3—3递推数列的极限(下)02:32:09

解： 显然$x_{n+1}=\cos x_n\Rightarrow f(x)=\cos x$

$|f'(x)|=|\sin x|\leqslant\sin 1<1$

设$x=\cos x$的根为 A

$0\leqslant|x_{n+1}-A|\leqslant|f(x_n)-f(A)|\leqslant\sin 1\cdot|x_n-A|\leqslant\cdots\leqslant(\sin 1)^{n-1}\cdot|x_2-A|\to 0$

由夹逼准则可得，数列$\{x_n\}$收敛

例题 4 (1) 证明：方程$x=1+2\ln x$在$(e,+\infty)$内有唯一实根$x=\xi$；　3—3递推数列的极限(下)02:25:13

(2) 取$x_0\in(e,+\infty)$，令$x_{n+1}=1+2\ln x_n$，证明：$\{x_n\}$收敛于ξ. (120 分水平)

解： (1)令$g(x)=1+2\ln x-x(x>0)$，$g(1)=0,g(e)=3-e>0,g'(x)=\frac{2}{x}-1\Rightarrow g(x)$在$(0,2)$单调递增

在$(2,+\infty)$单调递减，$g(0+0)=-\infty,g(+\infty)=-\infty$，$\Rightarrow x=\xi$是$g(x)=1+2\ln x-x$在$(e,+\infty)$的唯一零点，也是$x=1+2\ln x$的唯一根

(2) $x_0>e\Rightarrow x_1=1+2\ln x_0>3>e\Rightarrow x_2=1+2\ln x_1>3$

$f(x)=1+2\ln x\Rightarrow|f'(x)|=\frac{2}{x}<\frac{2}{3}<1$

$0\leqslant|x_{n+1}-\xi|=|f(x_n)-f(\xi)|<\frac{2}{3}|x_n-\xi|<\left(\frac{2}{3}\right)^2|x_{n-1}-\xi|<\cdots<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}|x_2-\xi|\to 0$

由夹逼准则可得，$\{x_n\}$收敛于ξ