3-2 向量组（例题和作业的答案）

向量组是考研线性代数学习中的第一个难点，而这份习题讲义，基本覆盖了考研的向量组中的所有题型，只要大家吃透这个讲义（包括作业），这章基本就过关了！

套路一 向量组相关性的判定

向量组相关性的判定，其核心是研究向量组的秩和向量个数之间的关系——因为秩表示了向量组中独立向量的个数，如果秩小于总向量个数，就代表有多余向量，那么整个向量组就相关；如果秩等于总向量个数，就代表没有多余向量，故向量组无关.

接下来，我把这部分的题目分为“具体型”和“抽象型”，难点是研究抽象型向量组的相关性.

（一）具体向量组的相关性

例题 1 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,t)^{\mathrm{T}}$，则$t=$_______.

解： 本题是最简单的类型，只需要将向量拼成矩阵，然后利用初等变换求秩即可. 答案为 6.

例题 2 下列向量组中，线性无关的是(　　)

A. $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$，$(0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$

B. $(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$(2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$(9,8,7)^{\mathrm{T}}$，$(0,\pi,\mathrm{e})^{\mathrm{T}}$

C. $(a,1,2,5)^{\mathrm{T}}$，$(b,1,2,5)^{\mathrm{T}}$，$(c,4,5,6)^{\mathrm{T}}$，$(d,0,0,0)^{\mathrm{T}}$

D. $(a,1,b,0,0)^{\mathrm{T}}$，$(c,0,d,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(e,0,f,0,1)^{\mathrm{T}}$

解： 选 D.

A 选项中有零向量，必然线性相关；

B 选项中有 4 个 3 维向量，由于个数>维数，必然线性相关；

C 选项中有 4 个 4 维向量，故线性相关性可以通过行列式是否为零来判断，而$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}=0$，故相关；

D 选项，因为“本身无关，则延长必无关”，所以由$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$无关，可得$\begin{pmatrix}a\\1\\b\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\0\\d\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}e\\0\\f\\0\\1\end{pmatrix}$也无关.

注： 个数=维数，求行列式；个数＞维数，必相关；个数＜维数，拼矩阵，用初等变换求秩.

例题 3 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,t_1,\cdots,t_1^{n-1}),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,t_2,\cdots,t_2^{n-1}),\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r=(1,t_r,\cdots,t_r^{n-1})$，其中$t_1,t_2,\cdots t_r$互不相同，请讨论$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的相关性.

解：这是r个n维向量，讨论相关性前需要先讨论r和n的大小关系.

(1) 若$r>n$，则个数>维数，必然相关；

(2) 若$r=n$，则
$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\t_1&t_2&\cdots&t_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\t_1^{n-1}&t_2^{n-1}&\cdots&t_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(t_j-t_i),$$

由于$t_1,t_2,\cdots t_r$互不相同，所以$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r|\neq 0$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关；

(3) 若$r<n$，则个数<维数，此时令$\boldsymbol{\alpha}_1'=(1,t_1,\cdots,t_1^{r-1}),\boldsymbol{\alpha}_2'=(1,t_2,\cdots,t_2^{r-1}),\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r'=(1,t_r,\cdots,t_r^{r-1})$，

显然$\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r'$是$r$个$r$维向量，仿照(2)中的解法，可得$|\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r'|=\prod\limits_{1\le i<j\le r}(t_j-t_i)\neq 0$，

故$\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r'$线性无关. 由于“本身无关，则延长必无关”，所以此时$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关.

综上，若$r>n$，相关；若$r\le n$，无关.

注 1：范德蒙行列式可不只是在第一章中有作用；在后面的学习中我们可以看到，在向量组，方程组，甚至二次型的正定型中，范德蒙行列式的身影仍然频频出现，希望大家引起重视！

注 2：具体型向量的相关性很简单，属于期末考试难度，所以不再多耗时间，接下来请看抽象型的例题.

（二）抽象向量组的相关性

抽象向量的相关性是难点题型，主要考察对“定义”和“性质”的理解. 但其实只要定义用得“溜”、性质背得熟，这类题不过只是纸老虎而已，希望大家能够好好研究以下的这些题目.

例题 4 (1994 年,改编) 已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$，$2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$也无关.

分析：本题的解法非常多，可以利用初等列变换求秩，也可以利用线性无关的定义，还可以“逆用矩阵乘法”.

法 1：利用初等列变换求秩.

$$\begin{aligned}&r(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\ 2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\ 3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)\\=&r(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\ 3\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\ 4\boldsymbol{\alpha}_2+8\boldsymbol{\alpha}_3)\\=&r(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)\\=&r(\boldsymbol{\alpha}_1,\ -\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)\\=&r(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3).\end{aligned}$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，所以$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$，$2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$也无关，证毕.

法 2：利用线性无关的定义

假设存在常数k_1,k_2,k_3，使得$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$，

故只需证明k_1,k_2,k_3必须全为零即可.

将括号打开，重新组合，得到$(k_1+2k_2+3k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(-k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-2k_1-k_2+2k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，由线性无关的定义可知，$\begin{cases} k_1+2k_2+3k_3=0 \\ -k_1+k_2+k_3=0 \\ -2k_1-k_2+2k_3=0 \end{cases}$，

由于系数行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \end{vmatrix}=3\times 8-5\times 4=4\neq 0$，

故该方程组只有零解，即$k_1=k_2=k_3=0$.

由线性无关的定义可知，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$，$2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，证毕.

法 3：逆用矩阵乘法

令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\ 2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\ 3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)$，

易得$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\ 2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\ 3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，即$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$，

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，故$\boldsymbol{P}$为列满秩矩阵，所以$r(\boldsymbol{PA})=r(\boldsymbol{A})$，即$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=3$，

所以$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$，$2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，证毕.

注：在使用法 3 时，在将矩阵$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\ 2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\ 3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)$分解为$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$乘系数矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$以后，很多同学会这么去思考：

“因为系数矩阵$\boldsymbol{A}$是可逆矩阵，而可逆矩阵乘以任何其它矩阵，都不会改变那个矩阵的秩，所以由$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$可知，$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{P})$，再根据$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关可知$r(\boldsymbol{P})=3$，所以$r(\boldsymbol{B})=3$，故线性无关.”

上述这个想法，在应对这道题时，是没有问题的，但该方法本身有严重漏洞.

因为对于一般的题目而言，我们无法保证系数矩阵$\boldsymbol{A}$一定是方阵！如果不是方阵，就谈不上是否可逆，也就推不出后面的一系列结论了.（本题的$\boldsymbol{A}$之所以恰好是方阵，是因为$\boldsymbol{\alpha}$的个数和$\boldsymbol{B}$的列数刚好都是 3）.

比如，一旦将本题的欲证结论改为“证明$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$，$2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关”，那么逆用矩阵乘法可以得到$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\ 2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$，但由于系数矩阵并不是方阵，那么就无法利用上面的逻辑来解题了.但根据“整体无关$\rightarrow$部分无关”的性质可知，这两个向量确实是无关的，所以我们肯定要寻找其它的方法来进行解题；

再比如，就算系数矩阵$\boldsymbol{A}$是方阵，它也不一定是可逆的方阵——众所周知，可逆矩阵$\boldsymbol{A}$乘以其它矩阵$\boldsymbol{P}$，不会改变$\boldsymbol{P}$的秩，即：若$\boldsymbol{A}$为可逆矩阵，则$r(\boldsymbol{AP})=r(\boldsymbol{PA})=r(\boldsymbol{P})$；但是如果$\boldsymbol{A}$不可逆，那么$r(\boldsymbol{AP})$和$r(\boldsymbol{PA})$就一定不等于$r(\boldsymbol{P})$吗？答案是否定的，比如直接取$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{P}$都是零矩阵即可.

所以，无论从哪个角度来看，这种解题思路都不对，我们无法保证系数矩阵$\boldsymbol{A}$可逆，甚至连$\boldsymbol{A}$是方阵都无法保证.

那么，正确的思路应该是什么呢？

答：根据《向量组（理论）》第 7 页的公式(9)可知——列满秩矩阵 $\boldsymbol{P}$，乘在任何矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边，都不会改变 $\boldsymbol{A}$ 本身的秩，即“若 $\boldsymbol{P}$ 列满秩，则 $r(\boldsymbol{PA})=r(\boldsymbol{A})$”. 由于本题已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 无关，所以 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 列满秩！所以将 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\ 2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\ 3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)$ 分解为 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 乘以一个系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}$ 以后，应该是根据 $\boldsymbol{P}$ 列满秩，推出 $r(\boldsymbol{PA})=r(\boldsymbol{A})$，所以，向量组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的秩就是系数矩阵的秩，问题迎刃而解！

有的同学可能会问——如果题目条件改为“假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关”呢，那 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 就不是列满秩了啊，这种题该怎么做呢？

其实，考试不可能这么考的.因为如果出题人假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关的话，那我可以直接假设所有的 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 全都是零向量，那么这题就没什么意义了；所以，如果要考，前提肯定是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关！

类题 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\,(s\geq 3)$ 线性无关，且 $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s\\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{s-1}\end{cases}$，证明：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关.

解：本题采用“逆用矩阵乘法”的解法. $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\1&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)\neq 0$，故 $r(\boldsymbol{A})=n$.

又由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，故 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 是列满秩矩阵，故 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=r(\boldsymbol{A})=n$.

所以，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关，证毕.

从例 5 开始，我们集中训练一些“**利用线性无关的定义去证明线性无关**”的题，这类题目非常重要.

例题 5 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 n 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}_3\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 无关.

解：(要证明抽象向量组线性无关，最根本的方法是使用线性无关的定义)

假设存在常数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，故只需证明 k_1,k_2,k_3 必须全为零即可.

在上式两边左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$；再次左乘 $\boldsymbol{A}$，得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，

由于 $\boldsymbol{\alpha}_3\neq\boldsymbol{0}$，所以只能 $k_1=0$；

将 $k_1=0$ 代入 $k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$ 中，可得 $k_2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，

由于 $\boldsymbol{\alpha}_3\neq\boldsymbol{0}$，所以只能 $k_2=0$；

最后，将 $k_1=k_2=0$ 代入 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$ 中，可得 $k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，

由于 $\boldsymbol{\alpha}_3\neq\boldsymbol{0}$，所以只能 $k_3=0$.

综上，$k_1=k_2=k_3=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证毕！

注：学完相似理论以后，本题可以再加一个问，考察$\boldsymbol{A}$的行列式、特征值、是否可相似对角化等一系列问题. 在新考纲下，考研线代只有一个大题了，很可能考察这种横跨两条主线的大题.

类题 已知$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$n$维列向量组，且$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

解：通过上题的解题过程可以发现，这种题最关键的就是“观察哪一个向量不为零”！比如本题，注意到$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以我们可以猜测最后很可能是通过“$k\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$”来得到系数$k\neq 0$.

假设存在常数k_1,k_2,k_3，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，故只需证明$k_1,k_2,k_3$必须全为零即可.

由于$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，故$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1$，$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2$.

在$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$的两边同时左乘$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$，得$k_2\boldsymbol{\alpha}_1+k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$；再次左乘$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$，得$k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$.

由于$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以只能$k_3=0$，以此类推可以得到$k_1=k_2=k_3=0$.

故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，证毕！

例题 6 (1998 年) $\boldsymbol{A}$为n阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}$为n维列向量，$\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，证明：$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$线性无关.

解：假设存在常数$k_0,k_1,\cdots,k_{n-1}$，使得$k_0\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，故只需证明$k_0,\cdots,k_{n-1}$全为零即可.

由于$\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，故$\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$、$\boldsymbol{A}^{k+2}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$、$\cdots$

在$k_0\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$两边同时左乘矩阵$\boldsymbol{A}^{k-1}$，则有$k_0\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，

由于$\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，故只能$k_0=0$；

将$k_0=0$代入$k_0\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$中，得$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，

两边同时左乘矩阵$\boldsymbol{A}^{k-2}$，则有$k_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，可推得$k_1=0$；

以此类推，最终可得到$k_0=k_1=\cdots=k_{n-1}=0$. 故$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$线性无关.

注：本题的解法很精彩，其结论也很重要——我们在下一个专题里，证明结论“对于任意的n阶方阵$\boldsymbol{A}$，均有$r(\boldsymbol{A}^n)=r(\boldsymbol{A}^{n+1})$”时，需要考察方程组$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$和$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$是否同解，其中的某一步就用了这个结论.

例题 7 已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是两两正交的非零向量，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关.

解：假设存在常数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$，故只需证明$k_1,k_2,\cdots,k_n$必须全为零即可.

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是两两正交的非零向量，故对于任意的$i\neq j$，均有$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=0$（这里表示内积！）.

所以，在$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$两边同时与$\boldsymbol{\alpha}_1$做内积，得$k_1\|\boldsymbol{\alpha}_1\|^2=0$.

由于$\boldsymbol{\alpha}_1$是非零向量，故$\|\boldsymbol{\alpha}_1\|^2\neq 0$，故只能$k_1=0$.

同理，若与$\boldsymbol{\alpha}_2$做内积，可推得$k_2=0$.

以此类推，可以得出$k_1=k_2=\cdots=k_n$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，证毕.

注：本题的结论非常重要，它揭示了“线性无关”和“两两正交”之间的关系. 请体会下面几道题目中“正交”这个条件在证明线性无关时的作用.

例题 8 设n维列向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$也无关，且对$\forall i,j$，均有$\boldsymbol{\alpha}_i$和$\boldsymbol{\beta}_j$正交. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关.

解： 采用线性无关的定义进行证明.

假设存在常数k_1,k_2,l_1,l_2，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$，故只需证明$k_1=k_2=l_1=l_2=0$即可.

由于“对$\forall i,j$，均有$\boldsymbol{\alpha}_i$和$\boldsymbol{\beta}_j$正交”，故$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$和$l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2$也正交！（做一做内积就知道啦~）

所以，在$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$的两边同时与$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$做内积，得$\|k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2\|^2=0$，

故$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$，又由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，所以$k_1=k_2=0$；

将$k_1=k_2=0$代入可得，$l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$，又由于$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关，所以$l_1=l_2=0$.

综上，$k_1=k_2=l_1=l_2=0$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关，证毕.

注： 充分利用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，从而**一次性**得出$k_1$和$k_2$均为 0；同理，利用$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$无关，得出$l_1$和$l_2$也为 0；这种整体的思想在证明线性无关时非常有用！（尤其是已知某一部分已经无关时！）

例题 9 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为$n$个$n$维线性无关的列向量，且向量$\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_n$均正交. 证明：$\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

法 1 由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为$n$个$n$维无关向量，故任何一个$n$维向量均可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示.

不妨假设$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$，在等式两边同时与$\boldsymbol{\beta}$做内积，得$\|\boldsymbol{\beta}\|^2=0$，即$\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

法 2 将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$拼成矩阵，令$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

由于$\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_n$均正交，故$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$，即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为$n$个$n$维线性无关的列向量，故$\boldsymbol{A}$可逆，所以由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$可得出$\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，证毕.

注： 如果有多个向量同时和一个向量正交，那么我们可以构造一个齐次线性方程组！

类题 设n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$线性无关，且与两个不同的非零向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$正交，证明：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_1$线性无关； (2) $\boldsymbol{\beta}_1$与$\boldsymbol{\beta}_2$线性相关.

解： (1) **反证法.**

假设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_1$线性相关，则由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$线性无关可知，$\boldsymbol{\beta}_1$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$唯一线性表示，

不妨假设$\boldsymbol{\beta}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$，在等式两边同时与$\boldsymbol{\beta}_1$做内积，得$\|\boldsymbol{\beta}_1\|^2=0$，即$\boldsymbol{\beta}_1=\mathbf{0}$.

这与$\boldsymbol{\beta}_1$为非零向量矛盾，故假设不成立，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_1$线性无关，证毕.

(2) 本题我们采用两种解法.

（法 1） 采用反证法.

假设$\boldsymbol{\beta}_1$与$\boldsymbol{\beta}_2$线性无关.

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$是$n+1$个$n$维向量，个数>维数，故必定相关.

所以存在不全为零的系数$k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},l_1,l_2$，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$.

做到这儿，不就变成例题 8 了吗？我们接下来借鉴例题 8 的解法——

在等式两边与$l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2$做内积，由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$正交，故结果为$\|l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2\|^2=0$，

故$l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$. 根据假设，$\boldsymbol{\beta}_1$与$\boldsymbol{\beta}_2$线性无关，故$l_1=l_2=0$.

将$l_1=l_2=0$代入得，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\mathbf{0}$.

又由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$也线性无关，故$k_1=k_2=\cdots=k_{n-1}=0$，这样就推出了$k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},l_1,l_2$全为零！

显然矛盾，这说明假设错误，所以$\boldsymbol{\beta}_1$与$\boldsymbol{\beta}_2$只能线性无关，证毕！

（法 2） 利用方程组和基础解系的思想.

将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$拼成矩阵，令$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，易得$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$.

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$线性无关，故$r(\boldsymbol{A})=n-1$，故齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系中只有 1 个向量.

而由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$可知，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$均是$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的解，故$\boldsymbol{\beta}_1$与$\boldsymbol{\beta}_2$必须线性相关，证毕.

（法 3） 对方法 2 进行改进.

将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$拼成矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，再将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$拼成矩阵$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$，由向量的正交性可知$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

故$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$，又由于$r(\boldsymbol{A})=n-1$，故$r(\boldsymbol{B})\leqslant 1$. 由于$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$是非零向量，故$r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$，故$r(\boldsymbol{B})=1$.

这说明$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性相关，证毕.

接下来，看几道**利用秩来判断相关性**的题目.

例题 10 已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$表示，$\boldsymbol{\beta}_2$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$表示，则对任意的$k$，均有(　　)

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$无关　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$相关

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$无关　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$相关

解： 选 A.

对于 A，B 选项，由于$\boldsymbol{\beta}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$表示，所以一定可以通过恰当的初等列变换，

将$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)$变为$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)$，故$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)$.

又由于“$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，$\boldsymbol{\beta}_2$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$表示”，可推出$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关（可用反证法证出）.

故$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)=4$，也即$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=4$，故选 A，同时 B 选项自然就错误了；

对于 C，D 选项，分析方法同时，可推出$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_2)$，

当$k=0$时，显然相关；$k\neq 0$时，显然无关. 所以 C，D 选项均错误.

注： 本题可以直接看出答案，无需动笔！我们需要记住：能被别人表示的向量，是多余向量；将多余向量添加到整个向量组中，不会改变该向量组本身的秩，所以在求秩时可以直接将其扔掉.

例题 11 设n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m(m<n)$线性无关，且$\boldsymbol{\alpha}_{m+1}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots k_m\boldsymbol{\alpha}_m$，$k_i\neq 0(i=1,\cdots,m)$，

证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$中任意$m$个向量都线性无关.

解： 由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m$已经线性无关，故只需证明其余的情况也线性无关即可.

不失一般性，我们只需证明$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$线性无关即可.

$$\begin{aligned}
&r(\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1})\\
=&r(\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots k_m\boldsymbol{\alpha}_m)\\
=&r(\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,k_1\boldsymbol{\alpha}_1)\\
=&r(\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_1)\\
=&r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=m
\end{aligned}$$

故$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$线性无关. 同理可证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$也线性无关.

总之，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$中任意$m$个向量都线性无关，证毕！

注： 对于本题而言，灵活使用秩的性质，比用定义法快得多.

例题 12 (2004 年) $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，请判断：(1)$\boldsymbol{A}$的列向量组的相关性；(2)$\boldsymbol{B}$的行向量组的相关性.

解： 设$\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}_{n\times s}$，由于$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，故$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$. 又由于$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$、$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，故$r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$、$r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$.

所以$r(\boldsymbol{A})\leqslant n-1$、$r(\boldsymbol{B})\leqslant n-1$，故$\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$的行向量组也线性无关.

注： 考研高频考点：若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$，其中$n$是$\boldsymbol{A}$的列数（或$\boldsymbol{B}$的行数）.

类题 已知 4 维列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，如果 4 维非零列向量$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$与$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$均正交，则向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$的秩为________.

例题 13 (2006 年) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$均为$n$维列向量，$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，则下列说法正确的是(　　)

A. 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性相关.

B. 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性无关.

C. 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性相关.

D. 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性无关.

解： 选择题，需要的就是“快、准、狠”，所以特殊值法非常好用！

(1) 取$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，排除选项 B，D.

(2) 不妨假设$m=n=s$，且$\boldsymbol{A}$为单位矩阵$\boldsymbol{E}$，显然排除 C. 故选 A.

(3) 对于 A 选项，可直接由线性相关的定义推出——

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，故存在不全为零的系数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$，

在两边同时左乘$\boldsymbol{A}$，即得$k_1\boldsymbol{A\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A\alpha}_s=\boldsymbol{0}$，故$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性相关，证毕.

题型二 向量的线性表示

讨论$\boldsymbol{\beta}$能否被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，一般有两种思路——

(1) 看$r(\boldsymbol{A})\overset{?}{=}r\left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)$，即$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta})\overset{?}{=}r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$

(2) 先证明出$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots k_n\boldsymbol{\alpha}_n+k_0\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，然后再证明$k_0\neq 0$

当$\boldsymbol{\beta}$能被表示时，如果还要求出具体的表示方式(表示系数)，则可能涉及到解线性方程组的求解.

（一）具体向量

方法为：拼矩阵，行变换，求秩，很简单.

例题 14 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}5\\-3\\-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\11\\5\end{pmatrix}$，问$\boldsymbol{\beta}$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示；若能，求出表示系数.

解：研究$\boldsymbol{\beta}$被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示的问题，其实就是研究线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$解的问题.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&-3&5&0\\2&-1&-3&11\\2&1&-3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&5&0\\0&5&-13&11\\0&2&0&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&5&0\\0&5&-13&11\\0&1&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&5&0\\0&1&0&-3\\0&0&-13&26\end{pmatrix},$$

由该阶梯型矩阵可知，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=3$，故$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$唯一线性表示.

若想求出具体的表示系数，可以继续化为行最简形矩阵，则最后一列必定是表示系数，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\to\begin{pmatrix}1&-3&5&0\\0&1&0&-3\\0&0&-13&26\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&5&0\\0&1&0&-3\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-3\\0&0&1&-2\end{pmatrix}，故\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

注 1：一定要牢记——初等行变换不会改变列向量组的相关性和表示系数；

注 2：若某向量能被一个线性无关的向量组线性表示，那么表示方式一定唯一（即表示系数被唯一确定）.

例题 15 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\a\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}4\\1\\6\\b\end{pmatrix}$，讨论$\boldsymbol{\beta}$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

解：方法与上题相同，只是本题增加了 2 个参数，所以需要分类讨论.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&1&1\\1&a&1&6\\0&2&1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&1&1\\0&a-2&-2&2\\0&0&0&b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&1&1\\0&a&-1&3\\0&0&0&b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&1&1\\0&0&-1-\dfrac{a}{2}&3-\dfrac{a}{2}\\0&0&0&b-1\end{pmatrix},$$

(1) 若$b=1$且$a=-2$，则$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&1&1\\0&0&0&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，此时$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\neq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$，故$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示；

(2) 若$b=1$且$a\neq-2$，则此时$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=3$，故$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$唯一线性表示；

(3) 若$b\neq1$，则$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\to\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&2&1&0\\0&0&-1-\dfrac{a}{2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，故无论$a$如何取值，均有$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\neq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$，

所以$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

例题 16 若任意的三维列向量均可由$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}a\\1\\2\end{pmatrix}$线性表示，求$a$的取值范围.

解： 任意的三维列向量均可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，这说明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$一定线性无关！

故$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq0$，即$\begin{vmatrix}1&1&a\\0&-2&1\\1&3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&a\\0&-2&1\\0&2&2-a\end{vmatrix}=-2(2-a)-2=2a-6\neq0$，故$a\neq3$.

注： n个n维无关向量，能够表示任何一个n维向量；反之，若任何一个n维向量都能被$\boldsymbol{\alpha}_1.\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，则$\boldsymbol{\alpha}_1.\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$一定线性无关.

例题 17 向量组(I)为：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$；向量组(II)为：$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-2\\a\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-2\\a\\a\end{pmatrix}$，

若(I)可以被(II)表示，但是(II)不可以由(I)表示，求a的值.

解： 先用必要性进行"探路"，求出a的初步取值，然后再讨论这个取值是否满足题意.

由于(I)可以被(II)表示，但是(II)不可以由(I)表示，所以$r(\mathrm{I})<r(\mathrm{II})\ (\leqslant3)$，故$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=0$，

即$\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\0&0&a-1\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$，故$a=-2$或$a=1$.

但是，这样得到的a的值只满足必要条件，还需进一步验证.

事实上，"(I)可以被(II)表示，但是(II)不可以由(I)表示"的充要条件是"$r(\mathrm{II})=r(\mathrm{II},\mathrm{I})$且$r(\mathrm{I})<r(\mathrm{II})$"

(1) 若$a=-2$，此时需要验证三个秩，分别是$r(\mathrm{I})$、$r(\mathrm{II})$、$r(\mathrm{II},\mathrm{I})$.

$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，故$r(\mathrm{I})=2$；

$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\1&-2&-2\\-2&4&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，故$r(\mathrm{II})=2$.

不满足$r(\mathrm{I})<r(\mathrm{II})$，故$a=-2$不符合题意，舍去.

(2) 若$a=1$，此时需要验证三个秩，分别是$r(\mathrm{I})$、$r(\mathrm{II})$、$r(\mathrm{II},\mathrm{I})$.

$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，故$r(\mathrm{I})=1$；

$(\mathrm{II}|\mathrm{I})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&4&1&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{array}\right)$，故$r(\mathrm{II})=r(\mathrm{II},\mathrm{I})=3$，满足条件！

综上，$a=1$.

注：我们一定要分清楚什么是充分条件，什么是必要条件，什么是充要条件；在理论部分的讲义中我们提到过，如果(I)可以被(II)表示，但(II)不能被(I)表示，则必有$r(\mathrm{I})<r(\mathrm{II})$——但是很明显，该命题的逆命题并不成立，也就是说，我们无法仅从“$r(\mathrm{I})<r(\mathrm{II})$”推出“(I)可以被(II)表示，但(II)不能被(I)表示”. 事实上，“$r(\mathrm{I})<r(\mathrm{II})$”只是“(I)可以被(II)表示，但(II)不能被(I)表示”的必要条件而已，更何况$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=0$甚至连$r(\mathrm{I})<r(\mathrm{II})$都无法保证！**总之，当我们用$r(\mathrm{I})<r(\mathrm{II})$求出$a$的值后，必须将$a$的值回代到题干条件，检验是否满足“(I)可以被(II)表示，但(II)不能被(I)表示”**.

（二）抽象向量

对于抽象向量的线性表示问题，我们主要利用定义、性质、结论来解决.所以理论部分的那几页讲义，希望大家熟读、熟背、灵活使用！

例题 18 (1992 年,1998 年) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$能否由$\boldsymbol{\alpha}_2$和$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示；　　(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

解：(1) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，所以$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，故$\boldsymbol{\alpha}_1$能被$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$唯一线性表示.

(2) 由于$\boldsymbol{\alpha}_1$能被$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$唯一线性表示，所以问“$\boldsymbol{\alpha}_4$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示”就等价于问“$\boldsymbol{\alpha}_4$能否由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示”. 由于$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，所以显然$\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，即$\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

注：本题用秩也能轻松解决——

(1) 只需判断$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$和$r(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$的大小即可.

由题意可知，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\leqslant 2$且$r(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$.

由$r(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$可知$r(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，又由于$r(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\leqslant 2$，所以$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，故$\boldsymbol{\alpha}_1$能被$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$唯一线性表示.

(2) 只需判断$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$和$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$的大小即可.

由(1)可知，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$；

由于$\boldsymbol{\alpha}_1$能被$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，故$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，故$\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

例题 19 (1999 年) 设$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$表示，但不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$表示，问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_n$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$线性表示.　　(2) $\boldsymbol{\alpha}_n$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}$线性表示.

解：(1) 显然$\boldsymbol{\alpha}_n$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$线性表示，可以采用反证法进行证明.

假设$\boldsymbol{\alpha}_n$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$线性表示，则存在一组系数$k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$，使得$\boldsymbol{\alpha}_n=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$.

由于$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$表示，故存在一组系数$l_1,l_2,\cdots,l_n$，使得$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\alpha}_n$.

若将$\boldsymbol{\alpha}_n=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$代入$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\alpha}_n$，则可推出$\boldsymbol{\beta}$由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$表示.

这与题干条件矛盾，故假设错误，即$\boldsymbol{\alpha}_n$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$线性表示.

(2) 利用秩进行分析，故只需判断$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta})$和$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta})$的大小即可.

由于$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$表示，故$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\alpha}_n)$.

又由于$\boldsymbol{\alpha}_n$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$线性表示，故$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\alpha}_n)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1})+1$.

又由于$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$线性表示，故$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1})+1$.

综上，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1})+1$，故$\boldsymbol{\alpha}_n$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}$表示.

例题 20 (1995 年) 已知向量组(I):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$; (II): $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$; (III):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$，若$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=3$，$r(\mathrm{III})=4$，证明向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.

解：由于$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=3$，所以$\boldsymbol{\alpha}_4$能被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$唯一线性表示.

故$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)=r(\mathrm{III})=4$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，证毕.（这么快？）

例题 21 设$m\times n$的矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为$m(m<n)$，$\boldsymbol{E}_m$表示m阶单位矩阵，则下列说法正确的是(　　)

A. $\boldsymbol{A}$的任意m个列向量都线性无关

B. $\boldsymbol{A}$的任意一个m阶子式都不为零

C. 若矩阵$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

D. $\boldsymbol{A}$可以仅通过初等行变换，化为$(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{O})$的形式

解：选 C.

取$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，满足题干条件，但由于$\boldsymbol{A}$的 3 列元素全为零，故显然选项 A、B 均错误；

取$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，满足题干条件，但无论如何初等变换，都无法让最后一列全变成 0，故选项 D 错误；

对于 C 选项，由于$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，推得$r(\boldsymbol{B})+r(\boldsymbol{A})\leqslant m$，又由于$r(\boldsymbol{A})=m$，故$r(\boldsymbol{B})\leqslant 0$，即$r(\boldsymbol{B})=0$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

套路三 求极大无关组，并将其余向量用其表示

[**理论依据**]：初等行变换，不会改变列向量组的相关性与表示系数；同理，初等列变换，也不会改变行向量组的相关性与表示系数.

[**方法总结**]：拼矩阵，行变换，化为行最简，主元所在的列即为一个极大无关组，其余向量均可由其表示，且表示系数就是该向量自己的坐标.

[**特别提醒**]：一个向量组的极大无关组不一定唯一，所以上面的“方法总结”只是给出了一种寻找极大无关组的方法；但是无论如何，不同极大无关组中所含向量个数必定相同，它们都等于向量组的秩.

例题 22 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\3\\7\\14\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}1\\2\\5\\10\end{pmatrix}$，求该向量组的一个极大无关组，并将其余向量用极大无关组表示.

解： 将向量组拼成矩阵，然后做初等变换即可.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}-1&3&0&-2&1\\1&0&3&1&2\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

化成行最简以后，主元所在的列即为一个极大无关组，故取$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$为一个极大无关组，

且$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_5=2\boldsymbol{\alpha}_1+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3$.

套路四 向量组等价与矩阵等价

例题 23 向量组$(\mathrm{I}):\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$；$(\mathrm{II}):\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\6\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\0\\b\\2\end{pmatrix}$. 若$(\mathrm{I})$与$(\mathrm{II})$等价，求$a,b$.

解： (I)与(II)等价的充要条件是$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})$.

对(I,II)做初等行变换，可同时得出$r(\mathrm{I})$和$r(\mathrm{I},\mathrm{II})$，故需要再单独考察$r(\mathrm{II})$.

$$(\mathrm{I},\mathrm{II})=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&1&1&a\\3&2&1&-3&0\\0&1&2&6&b\\5&4&3&-1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&1&1&a\\0&-1&-2&-6&-3a\\0&1&2&6&b\\0&-1&-2&-6&2-5a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&1&1&a\\0&1&2&6&3a\\0&0&0&0&b-3a\\0&0&0&0&a-1\end{array}\right),$$

显然$r(\mathrm{I})=2$，所以，(I)与(II)等价，必须保证$b-3a=a-1=0$，即$a=1$，$b=3$.

将$a=1$，$b=3$代入(II)中，得$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\6\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\2\end{pmatrix}$，显然$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$线性无关，即$r(\mathrm{II})=2$.

所以，当$a=1$，$b=3$时，$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})=2$，即$(\mathrm{I})$与$(\mathrm{II})$等价.

例题 24 (2013 年) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$为$n$阶矩阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$且$\boldsymbol{B}$可逆，则（ ）

A. $\boldsymbol{C}$的行向量组与$\boldsymbol{A}$的行向量组等价

B. $\boldsymbol{C}$的列向量组与$\boldsymbol{A}$的列向量组等价

C. $\boldsymbol{C}$的行向量组与$\boldsymbol{B}$的行向量组等价

D. $\boldsymbol{C}$的列向量组与$\boldsymbol{B}$的列向量组等价

解： 显然选 B，**请记住结论（以列向量为例）：若向量组(I)经初等列变换变成向量组(II)，则(I) (II)等价.**

（法 1） 由于$\boldsymbol{B}$可逆，故显然$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{C})$，而向量组等价需要三秩相等，即$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$.

接下来证明$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$. 由于$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$且$\boldsymbol{B}$可逆，故$\boldsymbol{A}$的列向量组可以经过列变换变成$\boldsymbol{C}$的列向量组，

故$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})\overset{\text{列变换}}{=}r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{O})=r(\boldsymbol{A})$. 综上，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$，故$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{C}$的列向量组等价.

（法 2）将矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{C}$分别进行列分块，令$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_n)$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$，

故$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$即为$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_n)$，

由矩阵的乘法可知，$\begin{cases} \boldsymbol{c}_1=b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{c}_2=b_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \cdots\quad\cdots \\ \boldsymbol{c}_n=b_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n \end{cases}$，

这说明$\boldsymbol{C}$的列向量组可由$\boldsymbol{A}$的列向量组表示；

再将$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$变形为$\boldsymbol{CB}^{-1}=\boldsymbol{A}$，重复上述操作，即可推出$\boldsymbol{A}$的列向量组也可由$\boldsymbol{C}$的列向量组表示.

综上，$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{C}$的列向量组可以相互表示，故$\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$的列向量组等价，选 B.

注：如果将条件$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$改为$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{C}$，则结论应该如何变化？请证明你的猜想.

类题 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，则与该向量组等价的向量组是（　　）

A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$

B. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

D. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

解：对每个选项逆用矩阵乘法，然后套用上题的结论即可.

对于 A 选项，考查行列式$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$，故排除 A；

对于 B 选项，考查行列式$\begin{vmatrix} 1 & & & -1 \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{vmatrix}\overset{\text{都加到第 1 列}}{=}\begin{vmatrix} 0 & & & -1 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -1 & 1 & \\ 0 & & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$，故排除 B；

对于 C 选项，考查行列式$\begin{vmatrix} 1 & & & -1 \\ -1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{vmatrix}=0$，故排除 C；

对于 D 选项，考查行列式$\begin{vmatrix} 1 & & & -1 \\ 1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ & -1 & 1 \end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{vmatrix}=2\neq0$，故 D 对.

例题 25 (2000 年) 设n维列向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m\ (m<n)$无关，则$n$维列向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_m$也无关的充要条件是(　)

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$表示　　B. $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m$表示

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$等价　　D. $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m)$与$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$等价

解： 选 D.

由于“$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_m$线性无关$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_m)=m$”，而恰好又有$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m)=m$，

故对于本题而言，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_m$线性无关$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_m)$

所以，只需要在 ABCD 四个选项中，找出那个与“$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_m)$”等价的选项即可.

选项 A，“$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性表示”，等价于$r(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，排除；

选项 B，“$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示”，等价于$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$，排除；

选项 C，“$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$等价”，等价于$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$，排除；

选项 D，“矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m)$与矩阵$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$等价”，等价于$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，故 D 正确.

注： 本题也可以采用特殊值法对错误选项进行排除. 比如取$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

显然$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关，即“谁也不能表示谁”，一次性排除 A、B、C，故选 D.

例题 26 已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\2&2&1&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，请验证$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价，并求一个 3 阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$与一个 4 阶可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

解： 本题主要考查初等变换和初等矩阵的相互转化.

将$\boldsymbol{A}$通过初等行变换和列变换变成$\boldsymbol{B}$，记录下每一次变换对应的初等矩阵，

然后按照左行右列定理，将行变换对应的初等矩阵乘在$\boldsymbol{A}$左边，列变换对应的乘在右边，即可得到$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$.

注： 本题答案不唯一，所以不给出具体的结果，大家自己算即可.

配套作业

作业 1 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,4,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3,t)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$，若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，求$t$.

解： 将$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$拼成矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，由于$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，所以$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3$.

对矩阵进行初等行变换，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&-1\\4&3&2\\-2&t&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-5&-10\\0&-5&-10\\0&t+4&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&t+4&6\\0&0&0\end{pmatrix}$

观察前 2 行可知，矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$的秩至少为 2，又由于$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3$，故$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$.

所以，向量$(0,1,2)$与向量$(0,t+4,6)$成比例，故$t=-1$.

作业 2 已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，问$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$的线性相关性.

解： $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\ \boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1&&&-1\\1&1&&\\&-1&1&\\&&-1&1\end{pmatrix}$，

记$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\ \boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&&&-1\\1&1&&\\&-1&1&\\&&-1&1\end{pmatrix}$，故$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$.

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，故$\boldsymbol{A}$为列满秩矩阵，故$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})$.

又$\begin{vmatrix}1&&&-1\\1&1&&\\&-1&1&\\&&-1&1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&&\\-1&1&\\&-1&1\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&1&\\&-1&1\\&&-1\end{vmatrix}=2\neq0$，故$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})=4$.

故$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$的线性无关.

作业 3 (2014 年) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为 3 维列向量，则“对$\forall k$和$l$，$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$和$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$无关”是“$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$无关”的(　　)

A. 充要条件　　B.充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D.既不充分也不必要条件

解： 选 C. 令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$，

逆用矩阵乘法，得$(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$，即$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$.

(1) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$无关，则$\boldsymbol{P}$为列满秩矩阵，故$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=2$，故$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$和$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$无关；

(2) 若$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$和$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$无关，则可假设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$无关且$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，

此时，显然满足“对任意的k和l，$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$和$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$无关”，但$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$相关.

综上，“对任意的k和l，$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$和$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$无关”是“$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$无关”的必要不充分条件.

作业 3 已知$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$为三阶非零矩阵，且满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则下列说法正确的是(　　)

A. $t=6$时，$\boldsymbol{A}$的秩必为1　　B. $t=6$时，$\boldsymbol{A}$的秩必为2

C. $t\neq 6$时，$\boldsymbol{A}$的秩必为1　　D. $t\neq 6$时，$\boldsymbol{A}$的秩必为2

解：由于$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，故$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leq 3$．由于$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，故$r(\boldsymbol{A})\geq 1$.

当$t=6$时，$r(\boldsymbol{B})=1$，此时$r(\boldsymbol{A})$可以取 1，也可以取 2；

当$t\neq 6$时，$r(\boldsymbol{B})=2$，此时$r(\boldsymbol{A})$只能取 1，故选 C.

作业 4 (1993 年) 设$\boldsymbol{A}_{n\times m}$，$\boldsymbol{B}_{m\times n}$，$n\leq m$，若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$（$\boldsymbol{E}$为$n$阶单位矩阵），证明：$\boldsymbol{B}$的列向量组线性无关.

法 1 （利用秩）

假设$\boldsymbol{B}$的列向量组线性相关，则$r(\boldsymbol{B})<n$.

由于$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，所以$r(\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{AB})\leq r(\boldsymbol{B})<n$，这与$\boldsymbol{E}$为$n$阶单位矩阵矛盾，

故假设错误，所以$\boldsymbol{B}$的列向量组线性无关.

法 2 （定义法）

将矩阵$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{E}$进行列分块，令$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$，

则$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$变为$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$，故对任意的$i$，均有$\boldsymbol{A\beta}_i=\boldsymbol{e}_i$.

假设存在常数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{0}$，在等式两边同时左乘矩阵$\boldsymbol{A}$，

由$\boldsymbol{A\beta}_i=\boldsymbol{e}_i$可得，$k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{0}$，即$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，故$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$.

由线性无关定义可知，$\boldsymbol{B}$的列向量组线性无关.

注：$\boldsymbol{A}$的行向量组也无关. 我们可以在$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$两边求转置，得到$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$. 所以，如果通过$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$能推出$\boldsymbol{B}$的列向量线性无关，那么通过$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$也一定能推出$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的列向量组线性无关，即$\boldsymbol{A}$的行向量组无关.

作业 5 设“$\boldsymbol{\alpha}_1$和$\boldsymbol{\alpha}_2$”与“$\boldsymbol{\beta}_1$和$\boldsymbol{\beta}_2$”分别为两个线性无关的 3 维向量组. 证明：存在一个非零列向量$\boldsymbol{\delta}\neq\boldsymbol{0}$，使得$\boldsymbol{\delta}$既可以被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，也可以被$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表示.

解：由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$是 4 个 3 维向量，必相关，故存在不全为零的$k_1,k_2,l_1,l_2$使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$，

移项，可得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2$，

令$\boldsymbol{\delta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2$，则$\boldsymbol{\delta}$可以被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$表示，也可以由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$表示.

若$\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{0}$，则意味着$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$.

又由于“$\boldsymbol{\alpha}_1$和$\boldsymbol{\alpha}_2$”与“$\boldsymbol{\beta}_1$和$\boldsymbol{\beta}_2$”均线性无关，所以$k_1=k_2=0$且$l_1=l_2=0$，

这与k_1,k_2,l_1,l_2不全为零矛盾. 综上，存在非零向量$\boldsymbol{\delta}$，它既可以被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$表示，也可以被$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$表示.

作业 6 (2006 年) 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1+a\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\2+a\\2\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\3\\3+a\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\4+a\end{pmatrix}$，问：

(1) 当a为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关；

(2) 当$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关时，求一个极大无关组，并将其余向量用极大无关组表示.

解：(1) 令$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=0$，即$\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=0$. 由于“行和相等”，故将其余列加到第 1 列，

得$\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=(10+a)\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=(10+a)\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{vmatrix}=(10+a)a^3$.

故当$a=0$或$a=-10$时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关.

(2) 若$a=0$，则$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\4\end{pmatrix}$，取$\boldsymbol{\alpha}_1$为极大无关组，则$\boldsymbol{\alpha}_k=k\boldsymbol{\alpha}_1(k=2、3、4)$.

若$a=-10$，则$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-9\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-8\\2\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\3\\-7\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\-6\end{pmatrix}$，将其拼成矩阵，做初等行变换.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\10&-10&0&0\\10&0&-10&0\\10&0&0&-10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

由于主元在第 1、2、3 列，故取$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为极大无关组，此时$\boldsymbol{\alpha}_4=(-1)\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+(-1)\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+(-1)\cdot\boldsymbol{\alpha}_3$.

作业 7 (2011 年) 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm T}$不能由$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm T},\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm T}$ $\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm T}$线性表示. (1) 求$a$的值； (2) 将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

解：(1) 先用必要性进行“探路”，求出a的初步取值，然后再证明这个取值就是正确答案.

若$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关，则可表示任意的 3 维向量，故$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$只能线性相关，故$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=0$.

$\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&2&a-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&0&a-5\end{vmatrix}=a-5$，故$a=5$.

接下来需要证明$a=5$这个必要条件，的确满足“$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$不能被$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示”.

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$不能由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示，这等价于$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)<r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，故

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&3&1&0&1\\1&2&4&0&1&3\\1&3&5&1&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&2&2&0&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&0&2&-1&0\end{pmatrix},$$

显然，此时$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$，但$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，故$a=5$符合题意.

(2) $$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}$$，最后三列的系数，恰好就是表示系数，即——

$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$.