夹逼准则求数列极限（例题答案）

若$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = M$，则$\{b_n\}$必收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$.

a_n与c_n如何选取，是夹逼准则的重点，也是难点. 放缩是比较灵活的技巧，但有两个基本原则——

(1) 放缩的度不能太大，否则放缩后的极限与原极限不相等，导致夹逼失败；

(2) 放缩后的极限一定要**容易计算出来**，否则放缩就没有意义了.

注：在考研中偶尔会出现比较复杂的放缩，此时命题人一般会设置两个问，第一问让你证明某个不等式，而这个不等式，往往就是第二问求极限时，放缩的关键步骤.

例题 1 (1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$. 　　3－4夹逼准则求数列极限 02:00:04

解：$0<\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2\cdots n}{n\cdots n}<\dfrac{1}{n}\to 0$

由夹逼准则可得，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$

(2) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\ (a>0)$.

解：1° 若$0<a\leqslant 1$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$

2° 若$a>1$，$\exists N, s.t. N\leqslant a<N+1$

$$\Rightarrow 0<\frac{a^n}{n!}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdots a}{1\times 2\times 3\cdots N}\cdot\frac{a\cdot a\cdot a\cdots a}{(N+1)\cdots(n-1)}\cdot\frac{a}{n}<\frac{a\cdot a\cdot a\cdots a}{1\times 2\times 3\cdots N}\times 1\times\frac{a}{n}\to 0$$

例题 2 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}=1$. 　　3－4夹逼准则求数列极限 02:14:34

解：即证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+(n-1)!}{n!}=0$

即证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+(n-2)!}{n!}=0$

$$0<\frac{1+2!+\cdots+(n-2)!}{n!}<\frac{(n-2)\,(n-2)!}{n!}=\frac{n-2}{n(n-1)}\to 0$$

例题 3 (1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}=0$. 　　3－4夹逼准则求数列极限 02:22:53

解：
$$\begin{cases} 2=\dfrac{1+3}{2}\geqslant\sqrt{1\times 3} \\ 4=\dfrac{3+5}{2}\geqslant\sqrt{3\times 5} \\ 6=\dfrac{5+7}{2}\geqslant\sqrt{5\times 7} \\ \vdots \\ 2n=\dfrac{(2n-1)\,(2n+1)}{2}\geqslant\sqrt{(2n-1)\,(2n+1)} \end{cases}$$

累乘得，$\dfrac{1\times3\times5\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\cdots\times2n}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\to0$

由夹逼准则可得，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}=0$

(2) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}}=1$.

解：显然$x_n<1\Rightarrow\sqrt[n]{x_n}<1$

$x_n=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n-2}\cdot\dfrac{1}{2n}>\dfrac{1}{2n}\Rightarrow\sqrt[n]{x_n}>\dfrac{1}{\sqrt[n]{2n}}\to1(n\to\infty)$

由夹逼准则可得，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}}=1$

例题 4 (1) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$ 3－4夹逼准则求数列极限 00:49:08

解：$4^n<2^n+3^n+4^n<3\times4^n\Rightarrow4<\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}<3^{\frac{1}{n}}\cdot4\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}=4$

(2) 若$a_i>0(i=1,2,\cdots,m)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$.

解：假设$a_k=\max\{a_1,a_2,\cdots a_m\}\Rightarrow\sqrt[n]{a_k^n}<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}<\sqrt[n]{m\cdot a_k^n}=m^{\frac{1}{n}}\cdot a_k$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}m^{\frac{1}{n}}=1$，得出$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,\cdots,a_m\}$

注：建议大家直接把该题当成结论背下来.

类题 设$x>0$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\dfrac{x^{2n}}{2^n}}$，将其结果记为$f(x)$，讨论函数$f(x)$的连续性与可导性.

解：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}=\max\left\{1,x,\dfrac{x^2}{2}\right\}(x>0)$ 3－4夹逼准则求数列极限 00:55:31

即$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x\leqslant1\\ x & 1\leqslant x\leqslant2\\ \dfrac{x^2}{2} & x>2\end{cases}$

显然，$f(x)$连续，且只在$x=1,x=2$处不可导

例题 5 利用夹逼准则求下列n项和的极限（重要） 3－4夹逼准则求数列极限 01:03:50

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\ln1}+\dfrac{1}{n+\ln2}+\cdots+\dfrac{1}{n+\ln n}\right)$

解：$n\cdot\dfrac{1}{n+\ln n}<\dfrac{1}{n+\ln1}+\dfrac{1}{n+\ln2}+\cdots+\dfrac{1}{n+\ln n}<n\cdot\dfrac{1}{n+\ln1}=1$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{\ln n}{n}}=1$

得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\ln1}+\dfrac{1}{n+\ln2}+\cdots+\dfrac{1}{n+\ln n}\right)=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解： $1\leftarrow\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\to 1$

得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

解： $\frac{1}{2}\leftarrow\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}<\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots\frac{n}{n^2+n+n}<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}\to\frac{1}{2}$

由夹逼准则可得，

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^n+1^2}+\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^n+2^2}+\cdots+\frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n+n^2}\right)$

解： $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\leftarrow\frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^2+\cdots+\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n+n^2}<\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^n+1^2}+\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^n+2^2}+\cdots+\frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n+n^2}<\frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^2+\cdots+\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^n-1}{\mathrm{e}^n}\to\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$

由夹逼准则可得，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^n+1^2}+\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^n+2^2}+\cdots+\frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n+n^2}\right)=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$

例题 6 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\cdots-\frac{1}{n+k}\right)=\frac{k(k+1)}{2}$. 3－4夹逼准则求数列极限 01:32:44

解： $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\left[\frac{1}{n(n+1)}+\frac{2}{n(n+2)}+\cdots+\frac{k}{n(n+k)}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{k}{n+k}\right]$

由于 $\frac{1}{2}k(k+1)\leftarrow k(k+1)\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+k}<n\left[\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{k}{n+k}\right]<\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2}k(k+1)\to\frac{1}{2}k(k+1)$

据夹逼准则可得，$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)\right]=\frac{1}{2}k(k+1)$

例题 7 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots\sqrt{n(n+1)}}{n^2}$ 3－4夹逼准则求数列极限 01:41:43

解： $\frac{1}{2}\leftarrow\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}<\frac{\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots\sqrt{n(n+1)}}{n^2}<\frac{2+3+\cdots+(n+1)}{n^2}=\frac{\frac{1}{2}n(n+3)}{n^2}\to\frac{1}{2}$

由夹逼准则可得，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots\sqrt{n(n+1)}}{n^2}=\frac{1}{2}$

注： 此题虽然也是n项和的极限，但是其放缩方式与之前的题目不同，这说明大家不要死记硬背解题方法，而是应该牢记夹逼的两个基本原则，具体问题具体分析. 类似的题目还有下面这道——

类题 设数列 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 3－4夹逼准则求数列极限 01:50:20

解：由于$n^k < n^k+1 < (n+1)^k$

$$1 \leftarrow n\times\frac{1}{n+1} < \sum_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}} < \frac{1}{n}\times n \to 1$$

由夹逼准则可得，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

例题 8 (1) 证明：$x>0$时，有$x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$； 3－4夹逼准则求数列极限 00:02:53

解：$x>0$时，$\sin x - x<0$显然

令$f(x)=x-\dfrac{1}{6}x^3-\sin x, f(0)=0, f'(x)=1-\dfrac{1}{2}x^2-\cos x, f'(0)=0$

$f''(x)=-x+\sin x<0 \Rightarrow f'(x)$单调递减$\Rightarrow x>0$时，$f'(x)<0, f(x)$单调递减，得$f(x)<0$

证毕，即$x>0, x-\dfrac{1}{6}x^3<\sin x<x$

(2) 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n^2}+\sin\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\sin\dfrac{n}{n^2}\right)$.

解：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3<x_n<\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}\to\frac{1}{2}\,(n\to\infty)$

而$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^6}\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2=0$，由夹逼准则得，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$

注：这种题目，第一问的不等式，往往是第二问夹逼放缩时的关键.

类题 (1) 证明：当$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$；（证明$x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$收敛时，证过该结论）

(2) 设$x_n=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$； 3－4夹逼准则求数列极限 00:19:42

解：$\displaystyle\ln x_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}\to\frac{1}{2}$

$$\ln x_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)>\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k}{n^2}}>\frac{n}{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\to\frac{1}{2}$$

由夹逼准则可得，$\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$

(3) 设$y_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

解：$$\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}\\ \dfrac{1}{n+2}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)<\dfrac{1}{n+1}\\ \vdots\\ \dfrac{1}{n+n}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n+n-1}\right)<\dfrac{1}{n+n-1}\\ \dfrac{1}{n+n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n+n}\right)<\dfrac{1}{n+n}\end{cases}$$

不等式左边累加：$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}<\ln\frac{2n}{n}=\ln 2$

不等式右边累加：$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\ln\frac{2n+1}{n+1}=\ln 2$

由夹逼准则可得，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\ln 2$