第 1 讲　函数极限的计算（理论部分）

一、函数极限的通俗理解

对于函数 $f(x)$，若自变量 x 无限趋近 x_0 时，$f(x)$ 的值无限趋近于常数 A，则称 A 是 $f(x)$ 在 x 趋近于 x_0 的极限，并记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

我们的重要任务之一，就是用各种方法计算出 A 的值.

注 1：同理，对 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$、$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$、$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$、$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$、$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 等式子，相信同学们能够理解它们的含义；

注 2：在“$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$”中，$x \to x_0$ 暗含了 $x \neq x_0$，也就是 x 取不到 x_0，这一点特别容易被忽略. 当然，至于在 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 能否取到极限值 A，则并不确定. 例如 $f(x) = x^2$，$g(x) \equiv 0$，则有 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$，但在 $x \to 0$ 的过程中，$f(x) = x^2$ 永远无法取到 0，而 $g(x) \equiv 0$ 则能取到 0.

注 3：由于 $x \to x_0$ 时，x 本身取不到 x_0（即 $x \neq x_0$），故 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 和“$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处是否有定义”无关，并且二者的取值是否相等还决定了函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处是否连续.

注 4：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

注 5：以下几种情况一般要讨论左右两侧极限——

(1) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 两侧的函数表达式不同（分段函数）；

(2) $f(x)$ 的表达式中含有 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x-a}}$，且计算 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 时；

(3) $f(x)$ 的表达式中含有 $\arctan x$，且计算 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 时.（或 $f(x)$ 含有 $\arctan \dfrac{1}{x}$，且计算 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 时）

二、无穷小和无穷大

（一）无穷小以及无穷小的阶

1. 无穷小

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则称 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

注：当我们说某个函数是无穷小时，必须指明自变量 x 的趋向. 比如，“$f(x) = (x-1)^3$ 是无穷小”就是错的，但“$f(x) = (x-1)^3$ 是 $x \to 1$ 时的无穷小”就是对的.

2. 无穷小的阶

就如同两个实数可以比较大小一样，两个无穷小也可以比较大小（一般而言），我们称其为“比阶”.

设$\lim\alpha=\lim\beta=0$，则——

(1) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称$\beta$是$\alpha$的高阶无穷小，记为$\beta=o(\alpha)$；

(2) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=k(k\neq0,\infty)$，则称$\beta$是$\alpha$的同阶无穷小，记为$\beta=O(\alpha)$；

(3) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称$\beta$是$\alpha$的等价无穷小，记为$\beta\sim\alpha$（或$\alpha\sim\beta$）.

(4) 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^k}=C(C\neq0,\infty)$，则称$f(x)$是$x$的$k$阶无穷小.

注 1：准确的判断出无穷小的阶，是极其重要的一项技能——它贯穿了极限、反常积分、无穷级数！

注 2：并非任何两个无穷小都可以比阶，毕竟数字 0 不能做分母，而$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$中出现了分母；

注 3：数字 0 是唯一的常数型无穷小.

（二）无穷大以及无穷大的阶

同理，我们可以定义无穷大以及无穷大的阶，方法与上面类似，略.

（三）无穷小与无穷大的关系

如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$，即“无穷大的倒数，一定是无穷小”；

如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，且$f(x)\neq0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$（请注意二者之间的区别！）

三、极限的四则运算法则

设$\lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B$，则——

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；

(2) $\lim f(x)g(x)=AB$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$（分母不能为 0）. ‘’

注 1：在极限的四则运算中，“$\lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B$”是大前提，不可忽视！

只有在拆开以后的极限都存在时，才能拆开计算，才有“和差积商的极限等于极限的和差积商”！故“$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$”就是错误的，“$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$”之类的写法，就是错误的.

注 2：接下来的口诀，会贯穿整个高等数学概念题，**非常好用——**

存在+存在=存在；存在+不存在=不存在；不存在+不存在=不确定.

这里的“存在”，指的是广义上的存在，并不单指“极限存在”，还可以表示“连续性”、“可导性”、“可积性”、“反常积分敛散性”、“无穷级数敛散性”等等.

比如：可导+可导=可导、可导+不可导=不可导、不可导+不可导=不确定、收敛+发散=发散、不可积+不可积=不确定，等等. 这几乎是一个万能的结论，希望大家能够灵活使用！

注 3：事实上，在计算极限$\lim[f(x)+g(x)]$时，只要$\lim f(x)$和$\lim g(x)$中至少有一个存在，就能拆开，变成$\lim[f(x)+g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)$，并不需要两个都存在（想想为什么？）

注 4：事实上，在计算极限$\lim f(x)g(x)$时，若$\lim f(x)$的结果为非零常数，就能先将$\lim f(x)$代入（无论$\lim g(x)$是否存在）. 比如：若$\lim f(x)=A(A\neq 0)$，则$\lim f(x)g(x)=A\cdot\lim g(x)$.

这也就是我们常说的“**非零因子可以先算出来**”.

四、两个重要极限

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，可推广为$\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$；

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，可推广为$\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$.

五、求函数极限的三大方法

（一）等价无穷小

1. 最常用的三组等价无穷小

(1) 当$x\to 0$时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim\mathrm{e}^x-1\sim\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$；

(2) 当$x\to 0$时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$1-\cos^k x\sim\dfrac{k}{2}x^2$.

(3) 当$x\to 0$时，$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$.

注 1：上述等价无穷小，都只能在$x\to 0$的时候使用，比如$x\to\pi$时$\sin x\sim x$就是错的！

注 2：等价无穷小的使用原则——“如果想对某个部分使用等价无穷小，必须保证‘**该部分与其余部分的全体构成乘除关系**’，一定不能在加减中使用等价无穷小，也不能局部使用等价无穷小”.

比如，在$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$中，$\sin x$不能直接替换为$x$；在$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x\cdot\cos x}{x^3}$中，$\sin x$也不能替换为$x$；而在$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\ln(1+x)}{1-\cos x}$中，$\sin x$和$\ln(1+x)$都可以替换为$x$，$1-\cos x$也可以替换为$\dfrac{1}{2}x^2$.

注 3：在使用等价无穷小时，一定要学会“整体的思想”，比如——

$x\to 0$ 时，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，此时我们把x^2视为了一个整体；

$x\to 0$ 时，$\cos^k x-1=[1+(\cos x-1)]^k-1\sim k(\cos x-1)\sim -k\cdot\dfrac{x^2}{2}$，此时我们把$\cos x-1$视为整体；

示例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\ln(1+x)}{1-\cos x}$

（二）洛必达法则

1. $\dfrac{0}{0}$型的洛必达法则

在计算形如$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$的极限时，若满足以下三个条件——

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$；

(2) $f(x)$和$g(x)$在$x=x_0$的去心邻域内可导，且$g(x)\neq 0$、$g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

则必有$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

2. $\dfrac{*}{\infty}$型的洛必达法则

$\dfrac{*}{\infty}$和$\dfrac{0}{0}$型的洛必达法则类似，不再赘述.

注 1：自变量x不一定非要趋向于定点x_0，也可以趋向于无穷，比如$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$也能洛必达；

注 2：一些教材和参考书中写的是$\dfrac{\infty}{\infty}$，但其实只要发现分母是∞以后，就可以直接洛必达了，即$\dfrac{*}{\infty}$；

注 3：洛必达法则中的A，可以是具体的数字，也可以是∞，结论均成立；

注 4：若$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$是震荡形式的不存在，则$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$本身可能存在，也可能不存在，此时应属于“洛必达法则失效”的情况，必须更换计算方法.

比如，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$是显然的，但如果强行使用洛必达，则发现$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$在 0 到 2 震荡，此时洛必达法则失效.

所以，洛必达法则是一个“后验”的方法，必须要洛完以后才知道洛必达法则是否成立/失效.

示例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x}{x^2}$

（三）泰勒展开

1. 泰勒展开的基本思想

泰勒展开的基本思想，是在某个点附近，尝试用多项式函数$p(x)$去拟合其它种类的函数$f(x)$.

（所谓拟合，其实就是“近似代替”）

之所以要选择“多项式函数”，是因为它足够简单——易代值、易求导、易积分.

比如，在$x=0$附近，我们想用二次函数$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$去近似代替三角函数$f(x)=\cos x$，应该如何确定系数a_0、a_1、a_2呢?

很自然的，我们想到让$p(x)$和$f(x)$在$x=0$处的函数值和各阶导数值都相同，这样得到的$p(x)$将和$f(x)$最为接近.

由于$f(x)=\cos x,\ f'(x)=-\sin x,\ f''(x)=-\cos x$，故$f(0)=1$，$f'(0)=0$，$f''(0)=-1$，

故令$p(0)=f(0)=1$，$p'(0)=f'(0)=0$，$p''(0)=f''(0)=-1$，即$\begin{cases}a_0=1\\a_1=0\\2a_2=-1\end{cases}$，故$\begin{cases}a_0=1\\a_1=0\\a_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

故$p(x)=1-\dfrac{1}{2}x^2$.

也就是说——在$x=0$附近，在所有的二次多项式$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$中，函数$p(x)=1-\dfrac{1}{2}x^2$与$f(x)=\cos x$是最“接近”的!

仿造上面的方法，我们还可以使用三次函数$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$去拟合$f(x)=\mathrm{e}^x$.

三次函数有 4 个系数，故至少需要 4 个方程，令$\begin{cases}p(0)=f(0)\\p'(0)=f'(0)\\p''(0)=f''(0)\\p'''(0)=f'''(0)\end{cases}$，即$\begin{cases}a_0=1\\a_1=1\\2a_2=1\\3!a_3=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_0=1\\a_1=1\\a_2=\dfrac{1}{2}\\a_3=\dfrac{1}{3!}\end{cases}$.

故$p(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3!}$. 故在$x=0$附近，在所有的三次多项式$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$中，$p(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3!}$与$f(x)=\mathrm{e}^x$是最“接近”的.

这种用多项式函数去近似其他种类函数的手段，我们称为泰勒展开，$p(x)$也被称为泰勒多项式.

从上面的两个例子可以总结出——

对于n阶可导函数$f(x)$，它在$x=0$对应的n次泰勒多项式$p_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$需要满足

$n+1$个独立方程，即$\begin{cases} p(0)=f(0) \\ p'(0)=f'(0) \\ p''(0)=f''(0) \\ \cdots \\ p^{(n)}(0)=f^{(n)}(0) \end{cases}$，即$\begin{cases} a_0=f(0) \\ a_1=f'(0) \\ 2a_2=f''(0) \\ \cdots \\ n!a_n=f^{(n)}(0) \end{cases}$，故$\begin{cases} a_0=f(0) \\ a_1=f'(0) \\ a_2=\dfrac{f''(0)}{2!} \\ \cdots \\ a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \end{cases}$.

故$p_n(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，这就是$f(x)$在$x=0$对应的$n$次泰勒多项式.

即$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. 当然，既然是“近似”，那就有误差，误差即$f(x)-p(x)$.

我们将这个误差称为“余项”，并用$R_n(x)$来表示，那么就可以得到如下完整的泰勒展开——

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$.

泰勒展开的余项有很多种，在函数极限的计算中，我们一般用“佩亚诺余项”，即$R_n(x)=o(x^n)$.

最终，我们得到了这样的表达式——$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$.

2. 常见的泰勒展开（必背）

计算$x\to 0$时的极限时，我们常常使用以下几个泰勒展开——

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

注 1：使用泰勒展开求极限时，关键在于确定出需要展开到几阶；

注 2：利用泰勒展开，我们可以轻松发现为什么在学习等价无穷小时，不能在加减或局部乘除中使用等价无穷小替换——

对于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$，如果强行对$\sin x$使用等价无穷小，替换为$x$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$.

但如果使用泰勒展开$\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

注意对比可以发现，等价无穷小的答案之所以错误，就是因为丢失了泰勒展开中$-\dfrac{1}{6}x^3$这一项！

所以，我们可以**粗略的理解**为——所谓等价，只不过是泰勒展开的第一项而已，所以泰勒更加精确！

并且，一般而言，泰勒展开的项数越多，等号右边的幂函数就和等号左边的函数的拟合程度越高，也就越精确！（这就有点类似于我们小学学过的“保留n位小数”的题，保留的位数越多，自然越精确！）

示例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x\cdot\cos x}{x^3}$

从下一页起，我们学习几个函数极限计算中最常见的处理手法，这是基本功，任何同学都必须掌握.

六、函数极限计算中最基本的技巧与手法

（一）对于零因子可以使用等价无穷小替换，对于非零因子可以先算出来

例题 1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\left(e^{x^2}-1\right)(e^x+1)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\arctan x\cdot\tan x}$ 1—3函数极限的计算 00:11:14

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2\cdot 2}{x\cdot x\cdot x}=0$$

例题 2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ 1—3函数极限的计算 00:12:22

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

或原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{2}$（洛必达法则）

例题 3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}(a,b\neq 0)$ 1—3函数极限的计算 00:16:58

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(ax)^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)(bx)^2}=\frac{a^2}{b^2}$$

例题 4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ 1—3函数极限的计算 00:19:03

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\frac{1}{6}$$

例题 5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$ (2008 年，数一) 1—3函数极限的计算 00:21:50

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}(\sin x)^3\cdot x}{x^4}=\frac{1}{6}$$

例题 6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$ (2009 年，数二) 1—3函数极限的计算 00:23:51

解： $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\ln(1+\tan x)}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[0+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\tan^2 x}{x^2}\right]=\frac{1}{4}$$

注：这种“添项减项”的手法，在求极限时很常用，下一次课我们会专门进行讲解.

例题 7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}$ 1—3 函数极限的计算 00:34:31

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(-2)\sin\frac{\sin x+x}{2}\cdot\sin\frac{\sin x-x}{2}}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(-2)x\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}x^3\right)}{x^4}=\frac{1}{6}$$

例题 8 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\left(1-\sqrt{\sin x}\right)\left(1-\sqrt[3]{\sin x}\right)\cdots\left(1-\sqrt[n]{\sin x}\right)}{(1-\sin x)^{n-1}}$ 1—3 函数极限的计算 00:44:38

解： $x\to\frac{\pi}{2}$ 时，$1-(\sin x)^{\frac{1}{k}}=1-\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^{\frac{1}{k}}\sim\frac{1}{2}\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2$

$$I=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\right]^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}}{\left[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\right]^{n-1}}=\frac{1}{n!}$$

例题 9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}\right)}$ (第十一届数竞初赛) 1—3 函数极限的计算 00:51:38

解： $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\frac{\sqrt[3]{1-\cos x}}{e^{\sin x}}\right]}{\arctan\left(4\cdot\sqrt[3]{1-\cos x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sqrt[3]{1-\cos x}}{e^{\sin x}}}{4\cdot\sqrt[3]{1-\cos x}}=\dfrac{1}{4}$

（二）见到指数函数相减，可以提公因式，构造等价无穷小

例题 10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$ 1—3 函数极限的计算 00:56:30

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\cos x}-1}{\frac{1}{3}x^2}\cdot e^{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}e=\frac{3}{2}e$$

例题 11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{\sin^2 x}}{x^4}$ 1—3 函数极限的计算 01:00:51

$$=\lim_{x\to 0}e^{\sin^2 x}\cdot\frac{e^{x^2-\sin^2 x}-1}{x^4}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3\cdot 2x}{x^4}=\frac{1}{3}$$

注 1：见到同名函数相减，当然也可以使用拉格朗日中值定理，但此处主要介绍等价无穷小的方法.

注 2：该方法的本质，是遇到“1—1”型的极限时，可以将后面的“1”提出来，请看下面这道题.

类题 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[m]{\cos x}-\sqrt[n]{\cos x}}\ (m\neq n)$ 1—3 函数极限的计算 01:03:30

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{(\cos x)^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)x^2}=\frac{1}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}$$

（三）见到根号差，就用有理化

例题 12 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$ (1999 年)　　1—3函数极限的计算 01:09:35

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x\cdot[\ln(1+x)-x]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

例题 13 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$　　1—3函数极限的计算 01:13:39

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+2\sin x)-(1+x)^2}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+2\sin x}+(x+1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{(2\sin x-2x)-x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

例题 14 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$ (1998 年，数一)　　1—3函数极限的计算 01:18:05

解： $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)+(1-x)+2\sqrt{1-x^2}-4}{x^2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{2x^2}=-\dfrac{1}{4}$

或 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{4}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{4}$ （对 $\sqrt{1+x}$ 和 $\sqrt{1-x}$ 泰勒展开）

例题 15 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+4x+2}\right)$　　1—3函数极限的计算 01:25:51

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-(4x^2+4x+2)}{2x+\sqrt{4x^2+4x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x-2}{2x+\sqrt{4x^2+4x+2}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4-\frac{2}{x}}{2+\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\frac{-4}{4}=-1$$

例题 16 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1+\sqrt{4x^2+x-1}}{\sqrt{x^2+\arctan x}}\right)$　　1—3函数极限的计算 01:40:43

解： $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1+\sqrt{4x^2+x-1}}{-x}=(-1)+0+\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{4x^2+x-1}{x^2}}=-1+0+2=1$

（四）见到幂指函数，一般都要取指对数

例题 17 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$ (2011 年，数一)　　1—4函数极限的计算 00:02:14

解： $I=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{e^x-1}\cdot\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

例题 18 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\dots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$ (第一届数竞初赛)　　1—4函数极限的计算 00:08:52

解： $I=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e}{x}\cdot\ln\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e}{x}\cdot\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)}{n}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e}{n}\cdot\left[\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{2x}-1}{x}+\cdots+\frac{e^{nx}-1}{x}\right]}=e^{\frac{e}{n}\cdot[1+2+\cdots n]}=e^{\frac{e(n+1)}{2}}$$

例题 19 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$ (2004 年，数二)　　1—4函数极限的计算 00:14:37

解： $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)$

$$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{2+\cos x}{3}-1\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2}(\cos x-1)=-\frac{1}{6}$$

例题 20 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$ (2010 年，数一)　　1—4函数极限的计算 00:19:08

解： $I=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{x^2-(x-a)(x+b)}{(x-a)(x+b)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(a-b)x+ab}{x}}=e^{(a-b)}$

例题 21 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ (易错题)　　1—4函数极限的计算 00:24:17

解：（错解一） $I=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{e}{e}\right)^x=1$ （×）

（错解二） $I=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\cdot e^{x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}e^{x^2\cdot\frac{1}{x}}=1$ （×）

（正解） $I=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\cdot e^{x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]}$ （令 $x=\frac{1}{t}$）

$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\left[\frac{1}{t^2}\ln(1+t)-\frac{1}{t}\right]}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

例题 22 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2[1-\ln(1+x)]}{x}$ (第三届数竞初赛)　　1—4函数极限的计算 00:33:23

解： $I=e^2+\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2}{x}=e^2+\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}=e^2+\lim\limits_{x\to0}e^2\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}$

$$=e^2+2e^2\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=e^2-e^2=0$$

例题 23 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$　　1—4函数极限的计算 00:39:08

解： $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e^{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}}{x}=\lim\limits_{x\to0}e\cdot\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{\ln(1+2x)}{2x}}-1}{x}=e\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{2\ln(1+x)-\ln(1+2x)}{2x^2}$

$$=e\cdot\left[\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-\ln(1+2x)}{2x^2}\right]=e\cdot\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}\right]=\frac{e}{2}$$

（五）对于“∞-∞”的极限，若有分母，可以先通分

例题 24 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2x\right)$ (大学生数学竞赛，第 3 届决赛)　　1—4函数极限的计算 00:46:43

解： $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x-x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan x-x)(\tan x+x)}{x^4}=\dfrac{2}{3}$

例题 25 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$ 1—4函数极限的计算 00:49:08

解： $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{1+x}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

例题 26 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$ 1—4函数极限的计算 00:53:05

解： $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1+\mathrm{e}^{-x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}=\dfrac{1}{2}$

（六）利用阶的吸收律，简化运算

例题 27 证明：$x\to 0$ 时，$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sim x$ 1—4函数极限的计算 00:57:13

证明： $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sim\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-1=x+\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\sim x$

例题 28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$ (1997 年，数一) 1—4函数极限的计算 00:58:55

解： 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{3\sin x}=0$，即 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$

例题 29 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+2\tan x)^x-3^x}{3\sin^2 x+x^3\cos\frac{1}{x}}$ 1—4函数极限的计算 01:02:25

解： $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+\frac{2}{3}\tan x\right)^x-1}{3x^2}\cdot 3^x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{2}{3}\tan x}{3x^2}=\dfrac{2}{9}$

（七）一个简单而常用的等价无穷大

例题 30 请证明：若 $\alpha\sim\beta\to 0^+$，则 $\ln\alpha\sim\ln\beta\to-\infty$ 1—4函数极限的计算 01:19:17

证明： $\dfrac{\ln\alpha}{\ln\beta}=\dfrac{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\right)}{\ln\beta}=\dfrac{\ln\frac{\alpha}{\beta}}{\ln\beta}+\dfrac{\ln\beta}{\ln\beta}\to 0+1=1$

例题 31 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ (2010 年，数一) 1—4函数极限的计算 01:27:48

解： $I=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left[\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{\ln x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x-\ln x}{\ln x}}=\mathrm{e}^{-1}$

（八）洛必达法则可以帮助我们“降阶”

所谓降阶，也就是“降低次数”、“降低幂次”，从而化简表达式（这得益于洛必达法需要求导）.

但是洛必达法则一般不会单独使用，在洛之前最好把能等价的都等价了，能先算出来的非零因子都先计算了，然后再洛必达；并且，洛完一次以后，虽然能够继续洛必达，但是最好先对洛必达后的式子进行整理，然后再考虑第二次的洛必达.

例题 32 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$　　1－4函数极限的计算 01:36:20

解： $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x+3\sin 3x}{2x}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\times 3=4$

例题 33 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$　　1－4函数极限的计算 01:37:46

解： $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}}{x}=\dfrac{1}{4}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$

$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(-2x)}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=-\dfrac{1}{4}$

例题 34 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$（推广：只要$a>0$，则$\lim\limits_{x\to 0^+}x^a(\ln x)^b=0$）　　1－4函数极限的计算 01:41:58

解： $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$

例题 35 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^x}(k>0)$（$k\leqslant 0$时，显然为零）　　1－4函数极限的计算 01:42:50

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^x}=0$

例题 36 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{x+1}\right)$　　1－4函数极限的计算 01:47:55

解法一： $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

解法二： $I=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\left[\arctan 1-\arctan\dfrac{x}{1+x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\arctan\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

例题 37 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$　　1－4函数极限的计算 01:58:35

解： $I=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\ln\left(\frac{2}{\pi}\cdot\arctan x\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\left(\frac{2}{\pi}\cdot\arctan x-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\pi}x\cdot\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\pi}x\cdot\left(-\arctan\frac{1}{x}\right)}=e^{-\frac{2}{\pi}}$

（九）泰勒展开，是求函数极限的杀手锏

例题 38 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+\sin^2 x)}$（大学生数学竞赛，第 9 届决赛） 1—4函数极限的计算 02:03:35

解：$I=\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x\cdot x^2}=\dfrac{1}{2}$

例题 39 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$ 1—4函数极限的计算 02:03:55

解：$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-2+o(x^2)}{x^2}=-\dfrac{1}{4}$

例题 40 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}+\cos x-2}{x^4}$ 1—4函数极限的计算 02:04:52

解：$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{x^2}{2}+\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!}+1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-2+o(x^4)}{x^4}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{6}$

泰勒展开非常重要，而且考法较多，我们在下一次课会对泰勒展开进行专门的讲解.