导数的定义与概念（例题答案）

考法一 分段函数的导数

例题 1 设 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+\dfrac{\pi}{2}, & x\leqslant 1\\ \arctan\dfrac{1}{x-1}, & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处的可导性　　　导数的定义（上）00:01:39

解： $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)^2+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{x-1}=0$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\arctan\frac{1}{x-1}-\frac{\pi}{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-\arctan(x-1)}{x-1}=-1$

$\Rightarrow f'_-(1)\neq f'_+(1)\Rightarrow x=1$ 处不可导

例题 2 (2016 年) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n},\ n=1,2,\cdots\end{cases}$，则（　　）　（120 分水平）

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点　　B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导　　D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

解： ① $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=0$，由于 $\dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}$，故"$x\to 0^+$"$\Leftrightarrow$"$n\to\infty$"　　　导数的定义（上）00:09:48

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 连续

② $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-0}{x-0}=1$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{n}}{x}$

$1=\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\leqslant\dfrac{\frac{1}{n}}{x}<\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\dfrac{n+1}{n}=1+\dfrac{1}{n}\to 1$

由夹逼准则可得，$f'_+(0)=1\Rightarrow f'(0)=1$

例题 3 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^a\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处二阶可导，求 a 的取值范围.　　　导数的定义（上）00:26:47

解： ① 连续性：$f(0)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^a\sin\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow a>0$

② 0 处可导性：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x^{a-1}\sin\dfrac{1}{x}\Rightarrow a-1>0\Rightarrow a>1\ (f'(0)=0)$

$x \neq 0$ 时，$f'(x) = ax^{a-1}\sin\frac{1}{x} - x^{a-2}\cos\frac{1}{x}$，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ 存在 $\Rightarrow a > 2$

③ 0 处二阶可导，$f''(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\left(ax^{a-2}\sin\frac{1}{x} - x^{a-3}\cos\frac{1}{x}\right)$存在 $\Rightarrow a > 3$

注 1：通过本题的函数可以构造出很多反例. 如 $a = 2$ 时 $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，这个函数能够说明——

(1) 导函数 $f'(x)$ 不一定是连续函数；

(2) $[o(x^n)]' \neq o(x^{n-1})$.

注 2："函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左（右）导数 $f'_-(x_0)$"和"导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处的左（右）极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$"是两个完全不同的概念，它们可能相等，也可能不等，甚至可能一个存在时另一个不存在！

考法二 导函数本身具有的几个性质

例题 4 若 $f(x)$ 在区间 I 上可导，且导函数为 $f'(x)$，证明：$f'(x)$ 不可能存在第一类间断点和无穷间断点.

解：(1) 假设 $f'(x)$ 有跳跃间断点 $x = x_0$　　导数的定义（上）01:09:12

$f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) = A$，同理，$f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) = B$

由于 $x = x_0$ 跳跃 $\Rightarrow A \neq B \Rightarrow f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0) \Rightarrow x = x_0$ 处不可导，矛盾

(2) 假设 $f'(x)$ 有可去间断点，$x = x_0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = K$

$x = x_0$ 不是 $f'(x)$ 的间断点，矛盾

(3) 假设 $f'(x)$ 有无穷间断点 $x = x_0$

不妨假设 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) = \infty \Rightarrow f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) = \infty$

与 $f'(x_0)$ 存在矛盾

例题 5 证明下列"导数极限定理"——　　导数的定义（上）01:00:00

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 某邻域连续，在 x_0 的去心邻域内可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = A$，则 $f'(x_0)$ 存在，且 $f'(x_0) = A$.

解：$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{1} = A \Rightarrow f'(x_0) = A$

注：类似的，还有"单侧导数极限定理".

例题 6 证明：导函数即使不连续，仍然满足“零点定理”，即—— 导数的定义（上）01:28:19

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 可导，且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

解： 假设 $f'_+(a)>0$ $f'_-(b)<0$

$$f'_+(a)>0\Rightarrow \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow \exists\delta_1>0,s.t.x\in(a,a+\delta_1)\text{有 } f(x)>f(a)$$

$$f'_-(b)<0\Rightarrow \lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0\Rightarrow \exists\delta_2>0,s.t.x\in(b-\delta_2,b)\text{有 } f(x)>f(b)$$

假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的最大值为 $f(x_0)=M$ $\Rightarrow x_0\in(a,b)$，由费马定理可知，$f'(x_0)=0$，取 $\xi=x_0$ 即可

注 1： 该定理称为“导数零点定理”或“导数介值定理”或“达布定理”.

注 2： 该定理有一个重要推论——若 $f(x)$ 在区间 I 上可导，且 $f'(x)\neq0$，则必有 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 一定严格单调！

例题 7 (2004 年) 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得（　　） 导数的定义（上）01:36:00

A. $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.　　B. $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

C. 对任意的 $x\in(0,\delta)$，有 $f(x)>f(0)$.　　D. 对任意的 $x\in(-\delta,0)$，有 $f(x)>f(0)$

解： ① 证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增

解：$\forall x_2>x_1$，$x_2,x_1\in[a,b]\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调递增

② $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}>0$，由局部保号性可得，$\exists\delta>0,s.t.x\in(0,\delta)$ 时，$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}>0\Rightarrow f(x)>f(0)$

$x\in(-\delta,0)$ 时，$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}>0\Rightarrow f(x)<f(0)$

$f'(x_0)>0\Rightarrow f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左低右高，$f'(x_0)<0\Rightarrow f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左高右低

考法三 抽象函数在具体一点处的导数

例题 8 (2006 年) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则（　　） 导数的定义与概念（下）00:01:08

A. $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在　　B. $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在

C. $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在　　D. $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

解： 易得 $f(0)=0$，$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)-f(0)}{h^2-0}=1$，由于 $h\to0$ 时，$h^2\to0^+$，故 $f'_+(0)=1$，故选 C

类题 (2001 年) 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为（　　） 导数的定义与概念（下）00:10:28

A. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在　　B. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

C. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在　　　　D. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在

解： $A.\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{(1-\cos h)-0}\cdot\frac{1-\cos h}{h^2}$ 存在，由于$h\to 0$时，$1-\cos h\to 0^+\Rightarrow f'_+(0)$存在

$B.\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{(1-e^h)-0}\cdot\frac{1-e^h}{h}$ 存在，$\Rightarrow\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{(1-e^h)-0}=f'(0)$

$C.\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)-f(0)}{(h-\sin h)-0}\cdot\frac{h-\sin h}{h^2}$ 存在 $\nrightarrow\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h-0}$ 存在

$D.1.\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，该选项不符合“一静一动”的极限形式

2．$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)-f(h)+f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)}{2h}-\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=2f'(0)-f'(0)=f'(0)$

之所以错，是因为拆开时，就默认了导数存在

3．D的反例：$f(x)=\begin{cases}1,x\neq 0\\0,x=0\end{cases}$

例题 9 (2007 年) 设$f(x)$在$x=0$处连续，则下列命题错误的是（　　）　导数的定义与概念（下）00:45:33

A. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在，则$f(0)=0$

B. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$存在，则$f(0)=0$

C. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在，则$f'(0)$存在

D. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$存在，则$f'(0)$存在

解： $A.\lim\limits_{x\to 0}x=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$

$B.2f(0)=0\Rightarrow f(0)=0$

$C.\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 存在

$D.$错 $f(x)=|x|$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=0$ 存在，但$x=0$不可导

例题 10 (2020 年) 设函数$f(x)$在区间$(-1,1)$有定义，且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，则（　　）

A. 当$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}=0$，$f(x)$在$x=0$处可导.　导数的定义与概念（下）00:56:13

B. 当$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0$，$f(x)$在$x=0$处可导.

C. 当$f(x)$在$x=0$处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}=0$

D. 当$f(x)$在$x=0$处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

解： $A.B$ 极限存在推不出这个函数在一点处的信息

$C.\Rightarrow f(0)=0\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\dfrac{x-0}{\sqrt{x}}=f'(0)\cdot 0=0$

$D.f(x)=o(x^2)\Rightarrow f(x)=o\left(\sqrt{x}\right)$

例题 11 (1996 年) 设$f(x)$在$(-\delta,\delta)$内有定义，若当$x\in(-\delta,\delta)$时，恒有$|f(x)|\leqslant x^2$，则$x=0$必是$f(x)$的(　　)

A. 间断点　B. 连续但不可导的点　C. 可导点，且$f'(0)=0$　D. 可导点，且$f'(0)\neq 0$

解： 解法一：取$f(x)\equiv 0$，排除A,B,D　导数的定义与概念（下）01:09:05

解法二：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$，由$|f(x)|\leqslant x^2$，令$x=0\Rightarrow|f(0)|\leqslant 0^2\Rightarrow f(0)=0$

$|f(x)|\leqslant x^2\Rightarrow\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant|x|\ \Rightarrow 0\leqslant\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\leqslant|x|$ 令$x\to 0$

由夹逼准则可得，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ 即$f'(0)=0$

类题 设$f(x)$在$x=1$的邻域内有定义，$|f(x)-2e^x|\leqslant(x-1)^2$，问$f(x)$在$x=1$处是否连续?是否可导?

解： 令$g(x)=f(x)-2e^x$　导数的定义与概念（下）01:20:46

$|g(x)|\leqslant(x-1)^2\Rightarrow g'(1)=0\Rightarrow[f(x)-2e^x]'_{x=1}=0\Rightarrow f'(1)-2e=0\ \Rightarrow f'(1)=2e\ \Rightarrow f(1)=2e$

考法四 绝对值函数的不可导点个数

例题 12 (1998 年) 函数$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$的不可导点的个数是 (　　)

A. 3　B. 2　C. 1　D. 0　导数的定义与概念（下）01:31:56

解： 1° $x=0$时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}(x-2)(x+1)|(x-1)(x+1)|$不存在

2° $x=1$时，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}\cdot(x-2)(x+1)|x(x+1)|$不存在

3° $x=-1$时，$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x-2)|x(x-1)(x+1)|=0\Rightarrow f'(-1)=0$

注： 绝对值函数，本质上也可以看成是分段函数，其分段点也就是绝对值里的函数的零点.

类题 求 $f(x)=|\sin 2x|\cdot\cos x$ 在 $(0,2\pi)$ 内的不可导点. 导数的定义与概念（下）01:49:35

解： 1° $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin 2x|\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=0$ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

其他点同理

考法五 与导数定义相关的极限

例题 13 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，$f(0)=1$，$f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)]^{\frac{2x}{1-\cos x}}$ 导数的定义与概念（下）01:53:36

解： 错解：$I=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{1-\cos x}\ln f(x)}=e^{4\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}}=e^{4\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{1}}=e^{4\times2}=e^8$

正解：$I=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{1-\cos x}\ln f(x)}=e^{4\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}}=e^{4\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}=e^{4f'(0)}=e^8$

注： 这种题只要没说 $f'(x)$ 连续，就一定不能洛必达！

例题 14 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f(a)>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$ 导数的定义与概念（下）02:00:32

解： $I=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}}=e^{\frac{1}{f(a)}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}}}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$

例题 15 已知 $f(0)=1$，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　） 导数的定义与概念（下）02:13:00

A. 不可导　　B. 可导且 $f'(0)=0$　　C. 可导且 $f'(0)=-2$　　D. 可微且 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=\mathrm{d}x$

解： $0=\lim\limits_{x\to0}\frac{(-2x)-\frac{1}{2}(-2x)^2+o(x^2)+2xf(x)}{x^2}=(-2)+2\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1\Rightarrow f'(0)=1$，选择 D

例题 16 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{f(a+x)-f(a)}{x}-f'(a)}{x}$. 导数的定义与概念（下）02:18:30

解： ① $f(a+x)=f(a)+f'(a)x+\frac{f''(a)}{2!}x^2+o(x^2)$

代入得，$I=\frac{f''(a)}{2}$

② $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a+x)-f(a)-f'(a)x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(a+x)-f'(a)}{2x}=\frac{1}{2}f''(a)$

例题 17 设$f''(a)$存在，$f'(a)\neq 0$，求$\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{f'(a)(x-a)}-\dfrac{1}{f(x)-f(a)}\right]$ 导数的定义与概念（下）02:45:13

解：解法一:$I=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{f'(a)(x-a)[f(x)-f(a)]}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{f'(a)(x-a)^2 f'(\xi)}$

$$=\frac{1}{[f'(a)]^2}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$=\frac{1}{[f'(a)]^2}\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+o(x-a)^2}{(x-a)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{f''(a)}{[f'(a)]^2}$$

解法二：$I=\dfrac{1}{[f'(a)]^2}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\dfrac{1}{[f'(a)]^2}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{f''(a)}{[f'(a)]^2}$