

递推数列的极限

这份讲义主要研究递推型数列 $a_{n+1} = f(a_n)$ 的收敛性证明. 数列极限存在性的证明是考研数学的重难点, 经常以压轴题的形式出现, 希望大家引起足够的重视.

在讲具体题目之前, 先理清一个问题: 对于递推型数列 $a_{n+1} = f(a_n)$, 证明其收敛性是必要的, 不可省略!

很多同学认为, 既然都能直接通过 $A = f(A)$ 求出具体的极限值 A , 为何还要花时间去证明它收敛呢?

那是因为, 若不证明该数列真的收敛, 那么即使通过方程 $A = f(A)$ 解出了 A , 那也只能说明“如果这个数列收敛, 那么它只能收敛于 A ”. 但万一数列 $\{a_n\}$ 根本就不收敛呢?

比如, 假设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$, 我们可以发现这个数列所有的奇数项均为 2, 所有的偶数项均为 $\frac{1}{2}$, 显然不收敛! 但是, 如果令 $A = \frac{1}{A}$, 并注意到 $A \geq 0$, 我们将会解出 $A = 1$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, 这显然是荒谬的. 所以, 对于递推型的数列 $a_{n+1} = f(a_n)$, 先证明它的极限存在, 是必不可少的步骤.

证明极限存在有两个方法, 分别是“单调有界准则”和“夹逼准则”, 它们刚好对应了本讲义的两种题型.

定理 1 单调有界准则 若 $\{a_n\}$ 单调递增, 且有上界, 则 $\{a_n\}$ 收敛; 若 $\{a_n\}$ 单调递减, 且有下界, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

定理 2 夹逼准则 若 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$.

套路一 单调有界准则

单调有界准则能解决考研真题中几乎所有的递推数列极限, 希望大家不要学习过多其它的方法.

例题 1 (1996 年) 设 $x_1 = 10$, $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限值. 3-1 递推数列的极限(上)00:08:45

解: (1) 有界性: ① $x_1 = 10 \geq 3$ 成立; ② 假设 $x_n \geq 3$ 成立; ③ $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} \geq \sqrt{6 + 3} = 3$

由数学归纳法可得, $x_n \geq 3$ 恒成立

(2) 单调性: $x_{n+1} - x_n = \sqrt{6 + x_n} - x_n = \frac{6 + x_n - x_n^2}{\sqrt{6 + x_n} + x_n} = -\frac{(x_n - 3)(x_n + 2)}{\sqrt{6 + x_n} + x_n} \leq 0$

$\Rightarrow x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow \{x_n\}$ 单调递减

由单调有界准则, $\{x_n\}$ 收敛, 假设 $x_n \rightarrow A \Rightarrow A = \sqrt{6 + A} \Rightarrow A = 3$ 或 -2 (舍)

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$

注 1: 我们主要通过本题来回顾“数学归纳法”, 并且梳理一下证明数列“单调有界”时的最基本的思路.

注 2: 在使用单调有界准则处理递推数列的极限时, 先证明有界性还是先证明单调性都可以, 但一般来说先从有界性下手. 因为很多时候, 单调性往往“依赖于”有界性的那个“界”到底是几.

注 3: 通过这两道题的讲解, 我们学到了证明递推数列 $a_{n+1} = f(a_n)$ 收敛的几个思想——

(1) 在草稿纸上令 $n \rightarrow \infty$, 解方程 $A = f(A)$, 先求出极限值 A , 做到“心中有数”;

(2) 若题干告诉了首项 a_1 的具体值, 则可以比较 a_1 和 A 大小 (以下假定 $a_1 < A$), 从而猜测出 $\{a_n\}$ 的单调性, 并根据单调性推测出有界性和具体的界 (界的值, 往往就是极限 A)——比如, $a_1 < A$, 那么我们有理由猜测 $\{a_n\}$ 单调递增, 且上界就是极限值 A , 接下来就可以开始正式的证明了;

(3) 证明有界性: 利用数学归纳法, 证明 $a_n \leq A$ 恒成立 (也可以用其他方法, 比如直接放缩);

(4) 证明单调性: $a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n$, 再根据 $a_1 \leq a_n \leq A$ 可知, 只需要构造函数 $g(x) = f(x) - x$, 然后证明 $g(x) \geq 0$ 在 $x \in [a_1, A]$ 时恒成立即可.

注 4: 对于递推数列 $a_{n+1} = f(a_n)$ 而言, 还可以通过 $f(x)$ 本身的单调性, 推出数列 $\{a_n\}$ 的单调性——

① 若 $f(x)$ 递增, 且 $a_2 > a_1$, 则 $f(a_2) > f(a_1)$, 即 $a_3 > a_2$; 继续套一个 f , 则 $f(a_3) > f(a_2)$, 即 $a_4 > a_3$, 如此重复下去, 可推出 $a_{n+1} > a_n$ 恒成立, 即 $\{a_n\}$ 递增;

② 若 $f(x)$ 递增, 且 $a_2 < a_1$, 则 $f(a_2) < f(a_1)$, 即 $a_3 < a_2$; 继续套一个 f , 则 $f(a_3) < f(a_2)$, 即 $a_4 < a_3$, 如此重复下去, 可推出 $a_{n+1} < a_n$ 恒成立, 即 $\{a_n\}$ 递减;

③ 若 $f(x)$ 递减, 则 $\{a_n\}$ 一定不单调, 但 $\{a_n\}$ 的奇子列 $\{a_{2n+1}\}$ 和偶子列 $\{a_{2n}\}$ 一定各自单调, 且单调性相反. 其中, 结论③的证明如下——

假设 $a_3 > a_1$, 两边套上 f , 由于 $f(x)$ 递减, 故 $a_4 < a_2$;

在 $a_3 > a_1$ 两边不断套上 $f[f(\cdot)]$, 可以推出 $a_5 > a_3$ 、 $a_7 > a_5$ 、..., 故 $\{a_{2n+1}\}$ 单调递增;

在 $a_4 < a_2$ 两边不断套上 $f[f(\cdot)]$, 可以推出 $a_6 < a_4$ 、 $a_8 < a_6$ 、..., 故 $\{a_{2n}\}$ 单调递减.

故 $\{a_n\}$ 一定不单调, 但 $\{a_{2n+1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 一定各自单调, 且单调性相反.

有了以上这些思想和结论, 做题自然就更加得心应手了. 当然, 上面的内容并不是金科玉律, 数学的解题也并不是一成不变的, 比如下面的例题 2, 直接利用均值不等式便可以求出数列的界.

当然, 这样得到的界, 不一定是精确的界, 最精确的界一定是极限值.

注 5: 通过“注 4”中的结论我们可以发现, 如果修改题目中首项的取值, 则可能影响整个数列的单调性, 比如在类题中, 如果将初值改为 $x_1 = 1$, 则 $x_2 = \sqrt{7} > 1$, 故 $\{x_n\}$ 单调递增 (原题是单调递减).

例题 2 设 $x_1 = 2, x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} \right)$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限值.

3-1 递推数列的极限(上)00:51:48

(1) 有界性: $x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{x_{n-1} \cdot \frac{2}{x_{n-1}}} = \sqrt{2}$

(2) 单调性: $x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} \right) - x_{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{x_{n-1}} - x_{n-1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 - x_{n-1}^2}{x_{n-1}} \leq 0$

$\Rightarrow \{x_n\}$ 单调递减, 得出 $\{x_n\}$ 收敛, 假设 $x_n \rightarrow A$

$A = \frac{1}{2} \left(A + \frac{2}{A} \right) \Rightarrow A = \sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$, 得出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$

例题 3 设 $0 < c < 1$, $x_1 = \frac{c}{2}$, 且 $x_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{x_n^2}{2}$ ($n=1, 2, \dots$). 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限值.

解: ① 令 $f(x) = \frac{c}{2} + \frac{x^2}{2}$ ($x \geq 0$) $\Rightarrow f'(x) = x \geq 0 \Rightarrow f(x)$ 单调递增 $\Rightarrow x_n$ 单调递增 3-1 递推数列的极限(上)01:03:48

又由于 $x_2 = \frac{c}{2} + \frac{x_1^2}{2} > x_1 \Rightarrow \{x_n\}$ 单调递增

② 有界性: 1°. $x_1 = \frac{c}{2} < 1 - \sqrt{1-c}$

2°. 假设 $x_n < 1 - \sqrt{1-c}$ 成立

$$3°. x_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{x_n^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{(1-\sqrt{1-c})^2}{2} = 1 - \sqrt{1-c}$$

有数学归纳法可得, $x_n < 1 - \sqrt{1-c}$

综上, $\{x_n\}$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 - \sqrt{1-c}$

下面, 我们再来看两道初值影响单调性的题——

例题 4 (1) 证明: 方程 $x = 1 + 2\ln x$ 在 $(e, +\infty)$ 内有唯一实根 $x = \zeta$; 3-1 递推数列的极限(上)02:02:55

(2) 取 $x_0 \in (e, +\infty)$, 令 $x_{n+1} = 1 + 2\ln x_n$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛于 ζ . (120 分水平)

解: (1) 令 $g(x) = 1 + 2\ln x - x$ ($x > 0$), $g(1) = 0, g(e) = 3 - e > 0, g'(x) = \frac{2}{x} - 1 \Rightarrow g(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递增

在 $(2, +\infty)$ 单调递减, $g(0+0) = -\infty, g(+\infty) = -\infty, \Rightarrow x = \zeta$ 是 $g(x) = 1 + 2\ln x - x$ 在 $(e, +\infty)$ 的唯一零点, 也是 $x = 1 + 2\ln x$ 的唯一根

(2) ① 若 $e < x_0 < \zeta$

1° 有界性: $x_0 < \zeta$, 假设 $x_n < \zeta$, 则 $x_{n+1} = 1 + 2\ln x_n < 1 + 2\ln \zeta = \zeta \Rightarrow x_n < \zeta$ 恒成立

2° 单调性: $x_{n+1} - x_n = 1 + 2\ln x_n - x_n > 0 \Rightarrow x_n$ 单调递增 $\Rightarrow \{x_n\}$ 收敛于 ζ

② 若 $x_0 > \zeta$, 同理

例题 5 (2006 年) 设 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi$, $x_{n+1} = \sin x_n$. (1) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求极限值; (2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解: (1) ① 有界性 由于 $0 < x_1 < \pi \Rightarrow x_2 \in (0, 1] \subseteq (0, \pi) \Rightarrow x_3 \in (0, \pi) \Rightarrow \dots x_n \in (0, \pi)$

② 单调性 $x_{n+1} = \sin x_n \leq x_n \Rightarrow \{x_n\}$ 单调递减 3-1 递推数列的极限(上)02:21:10

故 $\{x_n\}$ 收敛, 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Rightarrow A = \sin A$, 显然 $A = 0$ 为唯一的解

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{\frac{1}{t^2}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \cdot \ln \frac{\sin t}{t}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{\sin t - t}{t}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

注 1: 本题中, 先证明有界性是必须的. 很多人一上来就使用 $\sin x < x$ 这个不等式, 从而得出 $\{x_n\}$ 递减, 但

其实这是错误的——因为 $\sin x < x$ 成立的前提是 $x > 0$ ；而当 $x < 0$ 时，应该是 $\sin x > x$ ——这提示我们在记公式、定理、结论时，一定要注意其成立的前提条件；

注 2： 本题的第(1)问是数列极限，但是第(2)问的本质是函数极限，这种题非常多。

例题 6 设 $0 < x_1 < \frac{\pi}{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{\pi}{2} x_n \sin x_n}$ ($n=1, 2, \dots$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sec x_n - \tan x_n}{\frac{\pi}{2} - x_n}$. (120 分水平)

解： (1) 有界性：① $0 < x_1 < \frac{\pi}{2}$ ② 假设 $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$ ③ $x_{n+1} = \sqrt{\frac{\pi}{2} x_n \sin x_n} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

故 $x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立

3-1 递推数列的极限(上) 02:34:40

(2) 单调性： $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\sin x_n}{x_n}}$, 下只需证明 $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} > 1$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 成立

即证： $\sin x > \frac{2}{\pi} x$ ($x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$), 令 $f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi} x$, $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$f''(x) = -\sin x < 0 \Rightarrow f(x)$ 为凸函数，得出 $f(x) > 0$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立，故 $x_{n+1} > x_n$

即 $\{x_n\}$ 单调递增， $\{x_n\}$ 收敛，假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $A = \sqrt{\frac{\pi}{2} A \sin A}$, 得 $\Rightarrow A = 0, A = \frac{\pi}{2}$ 是该方程的唯一二解

由于 x_n 单调递增且 $x_1 > 0$, 故 $A \neq 0$, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sec x_n - \tan x_n}{\frac{\pi}{2} - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sin x_n}{\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right) \cdot \cos x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x_n\right)^2}{\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right)^2} = \frac{1}{2}$$

例题 7 $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n}{1+x_n}}$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛并求极限值. (易错)

3-1 递推数列的极限(上) 01:30:05

解： (1) 单调性： $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x}} = \sqrt{1 - \frac{1}{1+x}} \Rightarrow f(x)$ 单调递增， $\Rightarrow \{x_n\}$ 单调

(2) 有界性：① $x_1 = 1 > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

② 假设 $x_n > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

③ 则 $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n}{1+x_n}} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

综上， $\{x_n\}$ 收敛， $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

注 1： 此题对于极限值的取舍才是关键点，为此，我们先回顾一下本题的解题过程，可以总结如下——

(1) 在草稿纸上，令 $n \rightarrow \infty$, 解 $A = \sqrt{\frac{A}{1+A}}$, 但是发现有两个解，分别是 $A_1 = 0$ 和 $A_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$;

(2) 不论哪一个是极限值，均比 $x_1 = 1$ 要小，故猜测 $\{x_n\}$ 单调递减 (或者根据 $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ 来猜测 $\{x_n\}$ 单调递减);

(3) 根据 $f(x)$ 递增，再结合 $x_2 < x_1$, 证明出了 $\{x_n\}$ 的确单调递减;

(4) 利用数学归纳法证明有界性时，发现 $x_n > A_1$ 和 $x_n > A_2$ 都能证明出来 (这是必然的，不是偶然);

(5) 由于 $A_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} > A_1 = 0$, 这说明 $A_1 = 0$ 不可能是 $\{x_n\}$ 的极限 (否则就与 $x_n > A_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 矛盾), 故极限只能是 $A_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

注 2: 当方程 $A = f(A)$ 不止一个根时, 我们必须判断哪一个根才是真正的极限值.

通过本题的分析, 我们可以得出如下结论——当 $\{x_n\}$ 单调递减时, 极限为方程 $A = f(A)$ 的最大的根; 当 $\{x_n\}$ 单调递增时, 极限为方程 $A = f(A)$ 的最小的根.

例题 8 (2018 年) 设 $x_1 > 0$, $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限. (120 分水平)

解: (1) 有界性: ① 验证初值 $x_1 > 0$ ② $x_n > 0$ ③ $x_{n+1} = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n}$ 3-2 递推数列的极限 (中) 00:00:41

$$\Rightarrow x_{n+1} = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} > \ln \frac{x_n}{x_n} = 0 \Rightarrow x_n > 0 \text{ 恒成立}$$

$$(2) \text{ 单调性: } x_{n+1} - x_n = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} - x_n = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n \cdot e^{x_n}}$$

$$\text{即证: } e^{x_n} - 1 < x_n e^{x_n} (x_n > 0)$$

令 $f(x) = x e^x - e^x + 1$, $f(0) = 0, f'(x) = x e^x \Rightarrow f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, $f(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立

$$\Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow x_n \text{ 单调递减, 由单调有界准则, } \{x_n\} \text{ 收敛, 假设 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$$

$A e^A = e^A - 1$, 显然 $A = 0$ 是一个解, 又由于 $f(x)$ 只有唯一零点 $x = 0$, 故 $A = 0$ 为唯一解

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

注: 本题的价值非常高, 是递推数列极限的考研真题里最难的一道, 希望大家重点复习.

下面是一道与之完全相似的类题——

类题 $x_1 > 1$, $x_{n+1} = 1 + \ln \left(\frac{x_n^2}{1 + \ln x_n} \right)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. (120 分水平) 3-2 递推数列的极限 (中) 00:25:46

解: (1) 有界性: ① $x_1 > 1$ ② 假设 $x_n > 1$ ③ 只需证明: $x_n^2 > 1 + \ln x_n (x_n > 1)$

$$\Rightarrow 1 + \ln x_n < 1 + (x_n - 1) = x_n < x_n^2 \Rightarrow x_{n+1} > 1 \Rightarrow x_n > 1 \text{ 恒成立}$$

$$(2) \text{ 单调性: } x_{n+1} - x_n = 1 + \ln \left(\frac{x_n^2}{1 + \ln x_n} \right) - x_n = 1 + 2 \ln x_n - \ln [1 + \ln x_n] - x_n (x_n > 1)$$

$$\text{令 } f(x) = 1 + 2 \ln x - \ln (1 + \ln x) - x, f(1) = 0, f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{1 + \ln x} \cdot \frac{1}{x} - 1, f'(1) = 0$$

$$\text{而 } f'(x) = \frac{2(1 + \ln x) - 1 - x(1 + \ln x)}{x \cdot (1 + \ln x)}, g(x) = 1 + 2 \ln x - x - x \ln x, g(1) = 0, g'(x) = \frac{2}{x} - (2 - \ln x) < 0$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ 单调递减, } g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ 单调递减, 得出 } f(x) < 0 (x > 1)$$

$$x_{n+1} < x_n \Rightarrow x_n \text{ 单调递减, 由单调有界定理, } \{x_n\} \text{ 收敛, 假设 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Rightarrow A = 1 + \ln \frac{A^2}{1 + \ln A}$$

显然 $A = 1$ 是一个解, 由 $f(x)$ 单调性可知, $x = 1$ 是 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 的唯一零点, 得 $A = 1$ 是

$$A = f(A) \text{ 的唯一解, 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

接下来, 我们来看一道稍微不常规的题目.

例题 9 (2013 年) (1) 求 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ 的最小值;

3-2 递推数列的极限(中)00:57:18

(2) 设 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限. (120 分水平)

解: (1) $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}, f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} \Rightarrow f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增

得出 $f_{\min}(x) = f(1) = 1$

(2) 由 (1) 可得, $f(x) \geq 1$ 即 $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1 \Rightarrow \ln x_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}} \geq 1$, 再结合题干不等式 $\Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow \{x_n\}$ 单调递增

假设 $\{x_n\}$ 无上界, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 在 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ 里, 令 $n \rightarrow \infty \Rightarrow +\infty < 1$ 矛盾, 得出 $\{x_n\}$ 有上界,

假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 在两个不等式中, 均令 $n \rightarrow \infty$,
$$\begin{cases} \ln A + \frac{1}{A} \leq 1 \\ \ln A + \frac{1}{A} \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \ln A + \frac{1}{A} = 1 \Rightarrow A = 1 \text{ 是一个解}$$

由于 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, $(1, +\infty)$ 单调递增, 且 $f(1) = 1$, 得出 $A = 1$ 是 $\ln A + \frac{1}{A} = 1$ 的唯一解

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

注: 本题说明, 即使某些数列的递推关系由不等式给出, 也能使用单调有界准则, 只是最后求极限时, 还要用到夹逼准则.

类题 设 $x_n > 0$, $x_{n+1} + \frac{1}{x_n} < 2$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限.

3-2 递推数列的极限(中)01:13:52

解:
$$\begin{cases} x_n + \frac{1}{x_n} \geq 2 \\ x_{n+1} + \frac{1}{x_n} < 2 \end{cases} \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow \{x_n\} \text{ 单调递减, 又 } x_n > 0, \text{ 得出 } \{x_n\} \text{ 收敛}$$

假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 令 $n \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} A + \frac{1}{A} \geq 2 \\ A + \frac{1}{A} \leq 2 \end{cases} \Rightarrow A + \frac{1}{A} = 2 \Rightarrow A = 1$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

例题 10 (2011 年)

3-2 递推数列的极限(中)01:22:36

(1) 证明: 对于任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

(2) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛

解: (1) 先证: $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, 令 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$, $f(0) = 0$

$f'(x) = \ln(1+x) + 1 - 1 = \ln(1+x) \Rightarrow x > 0$ 时, $f(x)$ 单调递增, $\Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow \ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$

证毕

$$(2) \textcircled{1} a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln n] = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$$

故 $\{a_n\}$ 单调递减

$$\textcircled{2} \begin{cases} \frac{1}{2} < \ln \frac{2}{1} < 1 \\ \frac{1}{3} < \ln \frac{3}{2} < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} < \ln \frac{4}{3} < \frac{1}{3} \\ \vdots \\ \frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} \end{cases}$$

将这 n 个式子相加, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln(n+1) - \ln n > 0$$

由单调有界准则, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在

套路二 非单调的递推数列

例题 1 设 $x_{n+1} = 3 + \frac{4}{x_n}$, $x_1 = 1$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限值.

3-3 递推数列的极限(下) 00:05:26

$$\text{解: } 0 \leq |x_{n+1} - 4| = \left| 3 + \frac{4}{x_n} - 4 \right| = \frac{|x_n - 4|}{x_n} \leq \frac{1}{3} \cdot |x_n - 4| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2 |x_{n-1} - 4| \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} |x_2 - 4|$$

$$\text{令 } n \rightarrow \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} |x_2 - 4| = 0, \text{ 由夹逼准则可得, } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$$

注 1: 对付这种不单调的数列, 我们可以采取“先求后证”的办法——即先把极限值 A 找出来, 然后再用递推放缩的方法, 证明这个数字 A 就是该数列的极限. 可是, 既然已经不单调了, 那我们该怎么证明收敛呢? 不要忘了, 证明极限存在的方法, 除了“单调有界准则”以外, 还有“夹逼准则”, 而“先求后证”的本质, 其实就是“夹逼准则”.

注 2: 使用该方法的核心, 是凑出表达式 “ $|x_{n+1} - A| < k|x_n - A|$ ”, 其中 $k \in (0, 1)$ 是常数.

以下还有几道类似的题——

类题 1 设 $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$, $x_1 = 2$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限值.

3-3 递推数列的极限(下) 00:22:48

$$\begin{aligned} \text{解: } 0 \leq |x_{n+1} - (\sqrt{2} + 1)| &= \left| 2 + \frac{1}{x_n} - (\sqrt{2} + 1) \right| = \left| \frac{1}{x_n} - (\sqrt{2} - 1) \right| = \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right| = \frac{|x_n - (\sqrt{2} + 1)|}{x_n(\sqrt{2} + 1)} \\ &\leq \frac{1}{2(\sqrt{2} + 1)} |x_n - (\sqrt{2} + 1)| \leq \frac{1}{4} |x_n - (\sqrt{2} + 1)| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 |x_{n-1} - (\sqrt{2} + 1)| \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |x_2 - (\sqrt{2} + 1)| \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |x_2 - (\sqrt{2} + 1)| &= 0, \text{ 由夹逼准则可得, } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

类题 2 设 $a_0=1, a_1=1, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n (n=0,1,2,\cdots)$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. (120 分水平)

解: 令 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow b_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{b_n}$ 3-3 递推数列的极限(下)00:43:26

$$0 \leq \left| b_{n+1} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right| = \left| \left(1 + \frac{1}{b_n} \right) - \left(1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \right) \right| = \frac{\left| b_n - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right|}{b_n \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}} < \frac{2}{\sqrt{5}+1} \cdot \left| b_n - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right|$$

$$< \frac{2}{3} \left| b_n - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right| < \left(\frac{2}{3} \right)^2 \cdot \left| b_n - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right| < \cdots < \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \cdot \left| b_2 - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right| \rightarrow 0$$

由夹逼准则可得, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

注: 本方法并不只适用于“非单调数列”, 比如下面这道曾经做过的题, 也可以用该方法证明.

例题 2 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{C(1+x_n)}{C+x_n} (n=1,2,\cdots)$, 其中 $C > 1$ 为常数. 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限.

解: $A = \sqrt{C}$ 3-3 递推数列的极限(下)00:53:40

$$0 \leq |x_{n+1} - \sqrt{C}| = \left| \frac{C(1+x_n)}{C+x_n} - \sqrt{C} \right| = \frac{|C + C \cdot x_n - C\sqrt{C} - \sqrt{C} \cdot x_n|}{C+x_n} = \frac{|(C-\sqrt{C})x_n - C(\sqrt{C}-1)|}{C+x_n}$$

$$= \frac{(C-\sqrt{C})|x_n - \sqrt{C}|}{C+x_n} < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{C}} \right) \cdot |x_n - \sqrt{C}| < \cdots < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{C}} \right)^{n-1} |x_2 - \sqrt{C}| \rightarrow 0$$

例题 2 压缩映像原理

设当 $a \leq x \leq b$ 时, $a \leq f(x) \leq b$, 并设存在常数 $k \in [0,1)$, 满足——对于 $[a,b]$ 上任意两点 x_1 和 x_2 , 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$, 试证明—— 3-3 递推数列的极限(下)01:05:49

(1) 存在唯一的 $\xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = \xi$.

(2) 对于任意给定的 $x_1 \in [a,b]$, 定义 $x_{n+1} = f(x_n)$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$. (135 分水平)

解: (1) 1° 连续性: $0 \leq |f(x+\Delta x) - f(x)| \leq k \cdot |\Delta x| \rightarrow 0$, 由夹逼准则, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x+\Delta x) = f(x)$ 故连续

2° 存在性: 令 $F(x) = f(x) - x \Rightarrow F(a) = f(a) - a \geq 0, F(b) = f(b) - b \leq 0$

① 若 $f(a) > a$ 且 $f(b) < b \Rightarrow F(a) > 0, F(b) < 0$, 由零点定理可得, $\exists \xi \in [a,b] s.t. f(\xi) = \xi$

② 若 $f(a) = a$, 取 $\xi = a$

③ 若 $f(b) = b$, 取 $\xi = b$, 综上 $\exists \xi \in [a,b] s.t. f(\xi) = \xi$

3° 唯一性: 反证法, 假设 $\exists \eta \neq \xi$, 但满足 $f(\eta) = \eta$, $0 \leq |f(\eta) - f(\xi)| \leq k \cdot |\eta - \xi|$

$\Rightarrow 0 < |\eta - \xi| \leq k \cdot |\eta - \xi| \Rightarrow k \geq 1$ 与 $k < 1$ 矛盾, 故这样的 η 不存在, 即 ξ 唯一

$$(2) 0 \leq |x_{n+1} - \zeta| = |f(x_n) - f(\zeta)| \leq k \cdot |x_n - \zeta| \leq k^2 |x_{n-1} - \zeta| \leq \cdots \leq k^{n-1} |x_2 - \zeta| \rightarrow 0$$

由夹逼准则可得, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \zeta$

注 1: 压缩映像原理根本就不要求数列 $\{x_n\}$ 是单调的——只要函数 $f(x)$ 是一个压缩映射, 那么 $\{x_n\}$ 就一定收敛, 这给我们证明递推型数列 $x_{n+1} = f(x_n)$ 的收敛性提供了一个非常有力的武器.

注 2: 若题目还告知了 $f(x)$ 可导 (其实大多数题的 $f(x)$ 都是可导的), 那么在使用压缩映像原理时, 更加常用的是下面这个推论:

推论: 设 $x_{n+1} = f(x_n)$, 若存在 $0 < k < 1$, 使得 $|f'(x)| \leq k < 1$ 成立, 则 $\{x_n\}$ 一定收敛.

$$\text{解: } 0 \leq |x_{n+1} - A| = |f(x_n) - f(A)| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - A| \leq k \cdot |x_n - A| \leq k^2 |x_{n-1} - A| \leq \cdots \leq k^{n-1} |x_2 - A| \rightarrow 0$$

由夹逼准则可得, $\{x_n\}$ 收敛

3-3 递推数列的极限(下)01:48:36

注: 在利用压缩映像原理解题时, 最常见的错误就是忽略了 $k \in (0, 1)$ 的条件. 从压缩映像原理的证明过程中可以发现, $k \in (0, 1)$ 是非常重要的——正是因为 $k \in (0, 1)$, 所以才推出了 $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$, 也才能保证 $\{x_n\}$ 收敛. 这里的 k 相当于是一个“压缩比例”或“压缩因子”.

所以, 如果只是证明出来了 $|f'(x)| < 1$, 是证明不出数列 $\{x_n\}$ 收敛的; 只有证明出 $|f'(x)| \leq k < 1$, 才能说明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 也就是说, 这个 k 是不可缺少的, 在解题时一定要找到这个具体的 k , 切记!)

例题 3 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = 3 + \frac{4}{x_n}$, $x_1 = 1$ 证明: $\{x_n\}$ 收敛.

3-3 递推数列的极限(下)02:03:08

$$\text{解: } 0 \leq |x_{n+1} - 4| = |f(x_n) - f(4)| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - 4| \leq \frac{4}{9} \cdot |x_n - 4| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^2 |x_{n-1} - 4| \leq \cdots \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |x_2 - 4| \rightarrow 0$$

由夹逼准则可得, $\{x_n\}$ 收敛

类题 1 $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$, $x_1 = 2$, 利用压缩映像原理, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛. 3-3 递推数列的极限(下)02:09:10

$$\text{解: } x_n \geq 2 \Rightarrow f(x) = 2 + \frac{1}{x} (x \geq 2) \Rightarrow |f'(x)| = \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow |x_{n+1} - A| = |f(x_n) - f(A)| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - A|$$

与上题同理可得, 利用夹逼准则可得, 数列 $\{x_n\}$ 收敛

类题 2 $0 < q < 1, x_{n+1} = p + q \sin x_n$, 利用压缩映像原理, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

$$\text{解: } f(x) = p + q \sin x \Rightarrow |f'(x)| = q |\cos x| \leq q < 1 \Rightarrow |x_{n+1} - A| \leq q |x_n - A|$$

与上题同理可得, 利用夹逼准则可得, 数列 $\{x_n\}$ 收敛

类题 3 $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{x_n^3 + 4}$, 利用压缩映像原理, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛. 3-3 递推数列的极限(下)02:15:48

$$\text{解: } f(x) = \frac{1}{x^3 + 4} \Rightarrow |f'(x)| = \frac{3x^2}{(x^3 + 4)^2} \leq \frac{3 \times \frac{1}{16}}{4^2} = \frac{3}{256} < 1$$

与上题同理可得, 利用夹逼准则可得, 数列 $\{x_n\}$ 收敛

类题 4 $x_n = \underbrace{\cos \cos \cdots \cos}_n x$, 利用压缩映像原理, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛. 3-3 递推数列的极限(下) 02:32:09

解: 显然 $x_{n+1} = \cos x_n \Rightarrow f(x) = \cos x$

$$|f'(x)| = |\sin x| \leq \sin 1 < 1$$

设 $x = \cos x$ 的根为 A

$$0 \leq |x_{n+1} - A| \leq |f(x_n) - f(A)| \leq \sin 1 \cdot |x_n - A| \leq \cdots \leq (\sin 1)^{n-1} \cdot |x_2 - A| \rightarrow 0$$

由夹逼准则可得, 数列 $\{x_n\}$ 收敛

例题 4 (1) 证明: 方程 $x = 1 + 2 \ln x$ 在 $(e, +\infty)$ 内有唯一实根 $x = \xi$; 3-3 递推数列的极限(下) 02:25:13

(2) 取 $x_0 \in (e, +\infty)$, 令 $x_{n+1} = 1 + 2 \ln x_n$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛于 ξ . (120 分水平)

解: (1) 令 $g(x) = 1 + 2 \ln x - x (x > 0)$, $g(1) = 0, g(e) = 3 - e > 0, g'(x) = \frac{2}{x} - 1 \Rightarrow g(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递增

在 $(2, +\infty)$ 单调递减, $g(0+0) = -\infty, g(+\infty) = -\infty, \Rightarrow x = \xi$ 是 $g(x) = 1 + 2 \ln x - x$ 在 $(e, +\infty)$ 的唯一零点, 也是 $x = 1 + 2 \ln x$ 的唯一根

(2) $x_0 > e \Rightarrow x_1 = 1 + 2 \ln x_0 > 3 > e \Rightarrow x_2 = 1 + 2 \ln x_1 > 3$

$$f(x) = 1 + 2 \ln x \Rightarrow |f'(x)| = \frac{2}{x} < \frac{2}{3} < 1$$

$$0 \leq |x_{n+1} - \xi| = |f(x_n) - f(\xi)| < \frac{2}{3} |x_n - \xi| < \left(\frac{2}{3}\right)^2 |x_{n-1} - \xi| < \cdots < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} |x_2 - \xi| \rightarrow 0$$

由夹逼准则可得, $\{x_n\}$ 收敛于 ξ