三、习题

（一）连续性与间断点

例题 1 设 $f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{(1-x)\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)^2}$, $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$，如何定义 $f(1)$ 的值，可使 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 连续.

解： 故只需求 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 即可，由于 $\sin(\pi-\pi x)=\sin\pi x\sim\pi(1-x)\ (x\to1)$　　2－1连续性间断点渐近线01:12:25

$$\lim_{x\to1}f(x)=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)^2\sin\pi x}=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi(1-x)}{\pi^2(1-x)^3}、$$

$$=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{6}\pi^3(1-x)^3}{\pi^2(1-x)^3}=\frac{1}{\pi}+\frac{\pi}{6}，\text{故取 } f(1)=\frac{1}{\pi}+\frac{\pi}{6}$$

例题 2 (2003 年) 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6\ , & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$，问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；a 为何值时，

$x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点?　　2－1连续性间断点渐近线01:20:32

解： $f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax^3}{-\frac{1}{6}x^3}=-6a$

$f(0)=6$

$$f(0+0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\left[1+ax+\frac{1}{2}(ax)^2\right]+x^2-ax-1+o(x^2)}{\frac{1}{4}x^2}=\frac{\frac{1}{2}a^2+1}{\frac{1}{4}}=2a^2+4$$

① 若 $a=-1$, 则 $f(0-0)=f(0)=6=f(0+0)\Rightarrow a=-1$ 时，$x=0$ 处连续

② 令 $-6a=2a^2+4\Rightarrow a^2+3a+2=0\Rightarrow(a+1)(a+2)=0\Rightarrow a=-1$ 或 $a=-2$

故 $a=-2$ 时，$x=0$ 为可去间断点

例题 3 设 $f(x)=\begin{cases}6\ , & x\le0\\ \dfrac{e^{ax^3}-1}{x-\arcsin x}, & x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sin(x-1)}{x-1}, & x<1\\ e^{bx}+1\ , & x\ge1\end{cases}$，若 $f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，求 a,b.

解： ① 对 $f(x)$，$f(0-0)=f(0)=6$，$f(0+0)=\dfrac{a}{-\frac{1}{6}}=-6a\Rightarrow a=-1$ 2－1连续性间断点渐近线01:29:30

② 对 $g(x)$，$g(1)=g(1+0)=e^b+1$，$g(1-0)=3\Rightarrow b=\ln2$

由于 $f+g$ 连续，$\Rightarrow a=-1$ 且 $b=\ln2$

例题 4 (2001 年) 求 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$ 的间断点，并指出其类型. 2－1连续性间断点渐近线01:37:10

解： $f(x)=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\cdot\ln\frac{\sin t}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$

故 $f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$

故 $x=0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots$ 均是 $f(x)$ 的间断点

① $\lim\limits_{x\to0}f(x)=e\Rightarrow x=0$ 是可去间断点

② $\lim\limits_{x\to\pi^+}f(x)=e^{-\infty}=0\quad\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)=e^{+\infty}=+\infty\Rightarrow x=\pi$ 为无穷间断点

同理，$x=\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\cdots$ 均是 $f(x)$ 的无穷间断点

例题 5 (2007 年，改编) 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}e^{\frac{1}{x-2}}$ 的间断点，并指出其类型.

解： 间断点为 $x=0,\pm1,2$ 2－1连续性间断点渐近线01:50:37

① $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{|x|}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=e^{-\frac{1}{2}},\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-e^{-\frac{1}{2}}$，$x=0$ 是跳跃间断点

② $x=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$，$x=-1$ 是无穷间断点

③ $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\cdot(x-1)}{|x|(x-1)(x+1)}e^{\frac{1}{x-2}}=\dfrac{1}{2}e^{-1}\Rightarrow x=1$ 是可去间断点

④ $x=2$ 时，$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\infty\Rightarrow x=2$ 是无穷间断点

类题 确定 a,b 的值，使得 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 和可去间断点 $x=1$.

解： 易得 $a=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{e^x-b}{x(x-1)}$，由于 $x=0$ 是无穷间断点，得 $b\neq1$ 2－1连续性间断点渐近线02:07:39

又由于 $x=1$ 为可去间断点，得 $b=e$

（二）渐近线

例题 1 判断曲线 $y=f(x)$ 是否有斜渐近线时，若已求出 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=a(\neq0)$，问是否可以断言其一定存在斜渐近线？ 2－1连续性间断点渐近线02:02:19

解： 不一定

例如：$y=x+\sin x\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)$ 不存在

例题 2 (2007 年，改编) 曲线 $y=\dfrac{1}{x(x-1)}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线条数为____4____.

解： 显然 $x=0,x=1$ 为竖直渐近线 2－1连续性间断点渐近线02:12:32

① $x\to+\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=1$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{1+e^x}{e^x}=\ln1=0$

$\Rightarrow y=x$ 是一条斜渐近线

②$x\to-\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}y(x)=0\Rightarrow y=0$ 是一条水平渐近线

例题 3 (2020 年) 求函数 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x>0)$ 的非铅直渐近线. （本题为 120 分水平）

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\dfrac{x^x}{(1+x)^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}}=+\infty$ 2－1连续性间断点渐近线02:25:00

故无水平渐近线

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\frac{1}{\mathrm{e}}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left[y(x)-\frac{x}{\mathrm{e}}\right]=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}-(1+t)^{\frac{1}{t}}}{t}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}}}{t}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\cdot\mathrm{e}\cdot\lim_{t\to0^+}\frac{1-\frac{1}{t}\ln(1+t)}{t}=\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\frac{1}{2\mathrm{e}}$$

$\Rightarrow y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ 有斜渐近线 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x+\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$

例题 4 求曲线 $y=x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}(x>0)$ 的斜渐近线. （本题为 120 分水平）

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}=\mathrm{e}^0\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$ 2－1连续性间断点渐近线02:41:11

$$\lim_{x\to+\infty}\left(y-\frac{\pi}{4}x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}-\arctan1\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left[\arctan\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}\cdot\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]+\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left[\arctan\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}-\arctan1\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{x\to+\infty}x\cdot\arctan\frac{\frac{-2x-3}{(x+1)(x+2)}}{1+\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}}=\frac{\pi}{4}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x^2-3x}{(x+1)(x+2)}=\frac{\pi}{4}-1$$

斜渐近线为：$y=\dfrac{\pi}{4}x+\left(\dfrac{\pi}{4}-1\right)$

配套作业

作业 1 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^a\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ \mathrm{e}^x+b, & x\leqslant0\end{cases}$ 在 $x=0$ 的连续性. 函数极限作业00:53:55

解： $f(0)=1+b$

1° $a\leqslant0$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}x^a\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

2° $a>0$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}x^a\sin\dfrac{1}{x}=0$

此时，若 $b=-1$，即 $f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

若 $b\neq-1$，即 $f(0)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

作业 2 求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}, & x\leq 0\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x>0\end{cases}$ 的间断点并判断类型. 函数极限作业01:00:08

解: 1° $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\dfrac{1}{x^2-1}=-\sin 1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}=0$ $x=0$ 为跳跃间断点

2° $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x^2-1}$ 不存在

3° $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}\pi}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}=\infty$，因此 $x=-\dfrac{3}{2}\pi$ 为无穷间断点，同理 $x=-\dfrac{5\pi}{2},-\dfrac{7\pi}{2},\cdots$ 也为无穷间断点

4° $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}\pi}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}=-\dfrac{\pi}{2}\cdot\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}\pi}\dfrac{2x+\pi}{2\cos x}=-\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}\pi}\dfrac{2}{-2\sin x}=-\dfrac{\pi}{2}$

因此 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 为可去间断点

作业 3 (2013 年) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为______. (Ans：2 个，分别是 $x=0,1$)

解: 1° $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln|x|}-1}{x\ln|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln|x|}{x\ln|x|}=1$, $x=0$ 为可去间断点 函数极限作业01:09:50

2° $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x\ln|x|}-1}{2\ln|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln|x|}{2x\ln|x|}=\dfrac{1}{2}$, $x=1$ 为可去间断点

3° $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{x\ln|x|}-1}{-(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln|x|}{-(x+1)\ln|x|}=\infty$

作业 4 求函数 $f(x)=\lim\limits_{u\to x}\left(\dfrac{\tan u}{\tan x}\right)^{\frac{x}{\ln(1+\tan u-\tan x)}}$ 的间断点，并指出其类型. 函数极限作业01:14:50

解: $f(x)=e^{\lim\limits_{u\to x}\frac{x}{\ln(1+\tan u-\tan x)}\cdot\frac{\tan u-\tan x}{\tan x}}=e^{\frac{x}{\tan x}}$

1° $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}}=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，同理 $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 也是

2° $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}}=e$, $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点

3° $\lim\limits_{x\to\pi^+}f(x)=e^{\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{x}{\tan x}}=\infty$，$x=\pi$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，同理 $x=\pm k\pi(k=1,2,3\cdots)$ 也是

作业 5 (2014 年) 下列曲线中有渐近线的是 (C) 函数极限作业01:26:03

A. $y=x+\sin x$ B. $y=x^2+\sin x$ C. $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ D. $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

解: *A.B* 显然没有竖直渐近线，水平渐近线

对 B $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sin x}{x}$ 不存在，无斜渐近线

对 A，虽然 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$，但是 $b=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x-x)$ 不存在，无斜渐近线

对C，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sin\dfrac{1}{x}\right)=\infty$，无水平渐近线，$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sin\dfrac{1}{x}-x\right)=0$有斜渐近线

对D，显然无水平渐近线，因为$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sin\frac{1}{x}}{x}=\infty$，所以无斜渐近线，又$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$不存在，无竖直渐近线