不等式证明（习题-紧密）

本讲义题量巨大，选取了市面上主流考研辅导书中几乎所有的经典不等式，争取一次性彻底解决这个专题！

当然，函数不等式的证明，说到底也无非是构造函数求导，之所以选这么多题目，这也是我们课程的特色，也就是“凯哥带你刷题”．我们的课程绝对不是点到为止，而是带你从入门到精通．

从三道考研真题讲起

例题 1 (2004 年) 设 $e<a<b<e^2$，证明：$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$．　　不等式证明（习题1）00:01:10

法 1：直接构造函数，判断单调性

令 $F(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\dfrac{4}{e^2}(x-a)$　$F(a)=0$（目的：证 $F(a)>F(b)$，即证：$F(x)\nearrow$）

$F'(x)=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{e^2}\cdot 1=2\cdot\left[\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{2}{e^2}\right]$，$F''(x)=2\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0(x>e)\Rightarrow F'(x)\searrow$

而 $F'(e^2)=0\Rightarrow x\in(e,e^2)$ $F'(x)>0\Rightarrow F(x)\nearrow\Rightarrow F(b)>F(a)=0$，证毕

法 2：使用拉格朗日中值定理，转化研究对象

即证：$\dfrac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\dfrac{4}{e^2}$

即证：$\ln\xi\cdot\dfrac{1}{\xi}>\dfrac{2}{e^2}$　令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0(x>e)\Rightarrow g(x)\searrow$

$\Rightarrow x\in(e,e^2),g(x)>g(e^2)=\dfrac{2}{e^2}\Rightarrow\dfrac{\ln\xi}{\xi}>\dfrac{2}{e^2}$

例题 2 (1995 年) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，证明：$f(x)\geqslant x$．　　不等式证明（习题1）00:15:00

法 1：直接构造函数，判断单调性

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，又由于 $f(x)$ 连续，$\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$

$\Rightarrow f'(0)=1$ 令 $F(x)=f(x)-x$，$F(0)=0$，$F'(x)=f'(x)-1,F'(0)=0$

$F''(x)=f''(x)>0\Rightarrow F''(x)\nearrow\Rightarrow F'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 为负，在 $(0,+\infty)$ 为正

$\Rightarrow F(x)$ 在 $(-\infty,0)\searrow$，在 $(0,+\infty)\nearrow\Rightarrow F(x)\geqslant F(0)=0\Rightarrow f(x)\geqslant x$ 证毕

法 2：使用带拉格朗日余项的泰勒中值定理，一步到位

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2\geqslant f(0)+f'(0)x=x$ 证毕

例题 3 (2002 年) 设$0<a<b$，证明：$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.　　不等式证明（习题1）00:29:40

分析：对中间的项使用拉格朗日，相当于证明$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$，其中$0<a<\xi<b$.

要证明$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{1}{\xi}$，只需证明$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{1}{b}$即可，由均值不等式$a^2+b^2\geq 2ab$即可，所以左边是显然的；

但是，$\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$却证不出来. 因为要证明$\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$，需要证明$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$，即证$a>b$，这显然不可能.

这道题表明——**利用中值定理证明函数不等式，虽然偶尔会事半功倍，但也可能会失效，证不出来！**.

所以，对于函数不等式的证明，学会“构造函数，求导判断单调性”，才是我们的复习重心！

题型一 利用单调性证明不等式

（一） 直接构造函数

这种题目非常直接，无需对欲证结论过多变形，只需直接构造函数求导即可，这是最基本的考法.

例题 4 证明：当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$\sin x+\tan x>2x$.　　不等式证明（习题1）00:38:35

证明：令$f(x)=\sin x+\tan x-2x,f(0)=0$

$$\Rightarrow f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-2>\cos x+\frac{1}{\cos x}-2\geq 2\sqrt{\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}}-2=0$$

$$\Rightarrow f(x)\nearrow\Rightarrow 0<x<\frac{\pi}{2},f(x)>0\text{ 证毕}$$

注：很多同学看到题目给的范围是$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以构造的函数$f(x)=\sin x+\tan x-2x$的定义域也是$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

这样做虽然也不是不行，但是由于这个函数在$x=0$没有定义，导致判断出$f(x)$递增以后，我们无法直接写出$f(x)>f(0)=0$，所以只能写成$f(x)>\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$.

例题 5 (2012 年) 证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\dfrac{1}{2}x^2$，其中$-1\leq x\leq 1$.　　不等式证明（习题1）00:43:40

证明：令$f(x)=x\cdot\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}$，由于$f(x)$是偶函数

故只证$x\in[0,1]$时，　$f(x)\geq 0$

$$\Rightarrow f'(x)=1\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}+x\cdot\frac{2}{1-x^2}-(\sin x+x)>0\Rightarrow f(x)\text{ 在 }[0,1]\text{ 单调递增}$$

又$f(0)=0\ \Rightarrow f(x)\geq 0\ x\in[0,1]$，由于$f(x)$是偶函数，故 $f(x)\geq 0$，对$x\in[-1,1]$成立，证毕

（二） 变形后构造函数

有些不等式被出题人故意“复杂化”，目的是麻痹考生，使我们构造出来的函数不便于求导，增大计算量！所以，我们需要先对欲证不等式恒等变形，简化结论以后再构造函数！

例题 6 证明：$(1+x)^{1+\frac{1}{x}}<e^{1+\frac{x}{2}}$，其中 $x>0$. 不等式证明（习题1）00:58:13

证明： 即证 $\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\ln(1+x)<1+\frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow (x+1)\ln(x+1)<x+\frac{x^2}{2}\,(x>0)$

令 $f(x)=(x+1)\cdot\ln(x+1)-x-\frac{x^2}{2}$， $f(0)=0$

$f'(x)=\ln(1+x)-x\leqslant 0$ 等号仅在 $x=0$ 取到 $\Rightarrow f(x)\searrow$

$\Rightarrow x>0,\ f(x)<f(0)=0$ 证毕

类题 证明：$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}<\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$，其中 $0<x<1$. 不等式证明（习题1）01:06:55

证明： 等价于证明：$\sqrt{1-x}\cdot\arcsin x<\sqrt{1+x}\cdot\ln(1+x)$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x<(1+x)\cdot\ln(1+x)$

令 $f(x)=\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x-(1+x)\ln(1+x)$， $f(0)=0$

$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\arcsin x-\ln(1+x)=-\left(\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln(1+x)\right)<0$

$\Rightarrow f(x)\searrow\Rightarrow$ 当 $0<x<1$ 时， $f(x)<f(0)=0$ 证毕

例题 7 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，比较 $(\sin x)^{\cos x}$ 与 $(\cos x)^{\sin x}$ 的大小. 不等式证明（习题1）01:18:39

证明： 令 $f(x)=\cos x\cdot\ln\sin x-\sin x\ln\cos x, f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$

$f'(x)=(-\sin x)\ln\sin x+\cos x\frac{\cos x}{\sin x}-\cos x\ln\cos x+\sin x\frac{\sin x}{\cos x}>0\Rightarrow f(x)\nearrow$

$\Rightarrow x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时， $f(x)<0\Rightarrow(\sin x)^{\cos x}<(\cos x)^{\sin x}$

$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时， ,$f(x)>0\Rightarrow(\sin x)^{\cos x}>(\cos x)^{\sin x}$

例题 8 (1996 年) 证明：$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$，其中 $x>0$. 不等式证明（习题1）01:32:04

证明： 即证 $x>1$ 时，$(x+1)\ln x\geqslant x-1$；$0<x<1$ 时，$(x+1)\ln x\leqslant x-1$

令 $f(x)=(x+1)\ln x-x+1$ ，只需证：$x>1$ 时， $f(x)>0$；$0<x<1$ 时， $f(x)<0$

$f'(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}-1=\ln x+\frac{1}{x},f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$

$\Rightarrow 0<x<1,f''(x)<0,f(x)\searrow$

$x>1$时，$f''(x)>0,f'(x)\nearrow$

又由于$f'(1)=1\Rightarrow f'(x)>1>0\Rightarrow f(x)\nearrow$ 证毕

类题 (2018 年) 已知常数$k>\ln 2-1$，证明：$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\geqslant 0$． 不等式证明（习题1）01:41:46

证明： 令 $f(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1$ ，故只需证：$x>1,f(x)\geqslant 0;0<x<1,f(x)\leqslant 0$

$f'(x)=1-2\ln x\cdot\frac{1}{x}+2k\cdot\frac{1}{x}$，$f'(x)=\frac{x-2\ln x+2k}{x}$

令$g(x)=x-2\ln x+2k,g'(x)=1-\frac{2}{x}$，$\Rightarrow x\in(0,2)$时，$g'(x)<0,g(x)\searrow$

$x\in(2,+\infty)$时，$g'(x)>0,g(x)\nearrow$

$\Rightarrow g(x)\geqslant g(2)=2-2\ln 2+2k=2\cdot[1-\ln 2+k]>0\Rightarrow g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0$

$\Rightarrow f(x)\nearrow$ 又由于$f(1)=0$ $\Rightarrow f(x)$在$(0,1)$为负，在$(1,+\infty)$为正 ，证毕

例题 9 设$x>0$，$x\neq 1$，证明：$\frac{\ln x}{x-1}<\frac{1}{\sqrt{x}}$． 不等式证明（习题1）01:53:45

证明: 即证：$x>1,\sqrt{x}\ln x<x-1;0<x<1,\sqrt{x}\ln x>x-1$，换元$\sqrt{x}=t$

即证：$x>1,2x\ln x<x^2-1;0<x<1,2x\ln x>x^2-1$

令$f(x)=2x\ln x-x^2+1,f(1)=0$

$f'(x)=2\cdot(1+\ln x)-2x=2\cdot[\ln x-(x-1)]\leqslant 0$（等号仅在$x=1$取到）

$\Rightarrow f(x)\searrow$ **证毕**

例题 10 证明：$\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x(1+x)}$，其中$x>0$． 不等式证明（习题1）02:02:15

证明： 用$\frac{1}{x}$去替换x

即证：$\ln^2(1+x)<\frac{1}{\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{x^2}{x+1}$

令$f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$，$f(0)=0$

$f'(x)=\ln^2(1+x)+(1+x)2\ln(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}-2x\Rightarrow f'(0)=0$

$f''(x)=2\ln(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}+2\cdot\frac{1}{1+x}-2=\frac{2}{1+x}\cdot[\ln(1+x)+1-(1+x)]\leqslant 0$

$\Rightarrow f'(x)\searrow\Rightarrow x>0$时，$f'(x)<0\Rightarrow f(x)\searrow$ 又由于$f(0)=0\Rightarrow f(x)<0$证毕

（三） 观察式子结构后，巧妙构造函数

有些不等式中字母较多，这给我们构造函数带来了困难. 但是，只要认真分析不等式的结构，分清楚到底谁是“变量”、谁是“参数”，就能够构造出一个合适的函数，请看下面的例题——

例题 11 证明：$(x^a+y^a)^{\frac{1}{a}}>(x^b+y^b)^{\frac{1}{b}}$，其中$x,y>0$且$0<a<b$. 不等式证明（习题1）02:13:22

证明： 即证$x\cdot\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^a\right]^{\frac{1}{a}}>x\cdot\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^b\right]^{\frac{1}{b}}$

即证：$(1+x^a)^{\frac{1}{a}}>(1+x^b)^{\frac{1}{b}}(x>0,b>a>0)$

令$f(t)=(1+x^t)^{\frac{1}{t}}(x>0,t>0)$

$f'(t)=\dfrac{x^t\ln x\cdot t-(1+x^t)\ln(1+x^t)}{t^2}$，可得出$f(t)$单调递减

例题 12 证明：$\left(\frac{ax+y}{x+y}\right)^{x+y}>a^x$，其中$x,y>0$且$a>1$. 不等式证明（习题1）02:26:15

证明： 令$f(y)=\left(\frac{ax+y}{x+y}\right)^{x+y}$（$a,x$为参数，$a>1$，$x>0$，$y>0$）

$$f'(y)=\left(\frac{ax+y}{x+y}\right)^{x+y}\cdot\left[\ln\frac{ax+y}{x+y}+\frac{1}{ax+y}\cdot\frac{(x+y)-(ax+y)}{(x+y)^2}\right]$$

$$=\left(\frac{ax+y}{x+y}\right)^{x+y}\cdot\left[\ln\frac{ax+y}{x+y}+\frac{(1-a)x}{ax+y}\right]>\left(\frac{ax+y}{x+y}\right)^{x+y}\cdot\left[\frac{\frac{ax+y}{x+y}-1}{\frac{ax+y}{x+y}}+\frac{(1-a)x}{ax+y}\right]$$

$$=\left(\frac{ax+y}{x+y}\right)^{x+y}\cdot\left[\frac{(a-1)x}{ax+y}+\frac{(1-a)x}{ax+y}\right]=0\Rightarrow f(y)\nearrow\Rightarrow y>0\text{时，}f(y)>f(0)=a^x\text{ 证毕}$$

（四） 形如$A\leq f(x)\leq B$的不等式

有些题目的不等式形如“$A\leq f(x)\leq B$”,其中A,B均是常数. 这种题目,我们的首要问题就是分析常数A,B与函数$f(x)$的关系——根据经验，“一般而言”，这类题中的函数$f(x)$都是单调函数，而常数A,B恰好是$f(x)$在定义域端点处的函数值（当然，若要证的结论为$A<f(x)<B$，那么A,B一般都是$f(x)$在端点处的极限值).

例题 14 (1998 年) 证明：$\frac{1}{\ln 2}-1<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$，其中$0<x<1$. 不等式证明（习题2）00:00:53

证明： $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\ln 2}-1$

猜测$f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$ 单调递减，$f'(x)=-\frac{1}{\ln^2(1+x)}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x^2}$

只需证：$f'(x)<0$即可，等价于$x^2>(1+x)\ln^2(1+x)$

由例 10 可得，上述不等式成立，故原不等式成立　证毕

类题 证明：$\dfrac{4}{\pi^2}<\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}<\dfrac{2}{3}$，其中$0<x<\dfrac{\pi}{2}$.（本题较复杂，对应的视频，我单独录制以后上传）

例题 15 证明：$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x$，其中$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$；并利用上述不等式比较$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$、$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\sin x}\mathrm{d}x$、1的大小.

证明：(1)即证：$\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}<1\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 不等式证明（习题2）00:17:38

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}\cdot[x-\tan x]<0\Rightarrow f(x)\searrow$$

而$f(0+0)=1, f\left(\dfrac{\pi}{2}-0\right)=\dfrac{2}{\pi}\Rightarrow\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}<1\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2)由(1)得，$\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2}{\pi}$，积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2}{\pi}dx=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{2}{\pi}=1$

又由于$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$\sin x<x\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\sin x}dx$

题型二 利用泰勒展开证明不等式（利用凹凸性）

有一些题目告诉了二阶导函数$f''(x)$恒正或者恒负，然后让你证明某个不等式. 这个时候可以尝试将函数泰勒展开，然后利用二阶导函数不变号的特点扔掉拉格朗日余项，从而得到一个不等式.

这是一个极其重要的手法，与函数凹凸性有关的很多性质都可以利用这个方法进行证明；并且，该方法中的“二阶导”可以改为“偶数阶导”，操作方式仍然不变.

比如，已知$f^{(4)}(x)>0$恒成立，那么泰勒展开以后，扔掉拉格朗日余项$\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4$，那么就将泰勒展开的等式变成不等式了.

比如，证明$\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$、$\mathrm{e}^x\geqslant 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$、$\cos x\geqslant 1-\dfrac{x^2}{2}$、$\cos x\leqslant 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}$，都可以采用这种方法.

例题 16 证明：$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\geqslant 2x^2+2\cos x$恒成立. 不等式证明（习题2）00:43:33

证明：$f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2\cos x-2x^2, f(0)=0$

$f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+2\sin x-4x, f'(0)=0$

$f''(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2\cos x-4, f''(0)=0$

$f'''(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2\sin x, f'''(0)=0$

$$f^{(4)}(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2\cos x=\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)-2\cos x\geqslant 2\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^x}}-2\cos x\geqslant 0$$

$f(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4\geqslant 0$，$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\geqslant 2x^2+2\cos x$证毕

例题 17 (1995 年) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，证明：$f(x)\geqslant x$. 不等式证明（习题2）00:50:55

证明： 见例题 2

例题 18 设 $f''(x)>0$，证明：(1) $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$；(2) $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

证明： (1) $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$ 不等式证明（习题2）00:53:41

$\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2\geqslant 0, f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

(2) $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$$\begin{cases} f(x_1)\geqslant f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\cdot\dfrac{x_1-x_2}{2} \text{ ①} \\ f(x_2)\geqslant f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\cdot\dfrac{x_2-x_1}{2} \text{ ②} \end{cases}$$

①+②$\Rightarrow f(x_1)+f(x_2)\geqslant 2f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 证毕

注： 这两个不等式，非常重要！

类题 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，$f''(x)>0$，$x_i\in[a,b]$，$\sum\limits_{i=1}^{n}k_i=1$ 且 $k_i>0$，证明：$f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}k_ix_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}k_if(x_i)$.

证明： $f''(x)>0\Rightarrow f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 不等式证明（习题2）00:09:56

$$\begin{cases} f(x_1)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0) \ (1) \\ f(x_2)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0) \ (2) \\ \vdots \\ f(x_n)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_n-x_0) \ (n) \end{cases}\Rightarrow (1)\times k_1+(2)\times k_2+\cdots+(n)\times k_n$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}k_if(x_i)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)\cdot[k_1(x_1-x_0)+k_2(x_2-x_0)+\cdots+k_n(x_n-x_0)]$$

$=f(x_0)+f'(x_0)\cdot[(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)-x_0]=f(x_0)$ 证毕

例题 19 设 $a>0,b>0$，请利用例题 18 的结论证明下列不等式： 不等式证明（习题2）00:23:45

(1) $a^p+b^p\geqslant 2^{1-p}(a+b)^p \ (p>1)$；　　(2) $a^p+b^p\leqslant 2^{1-p}(a+b)^p \ (0<p<1)$；

证明： (1) 即证：$\dfrac{a^p+b^p}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^p$

只需研究 $f(x)=x^p(p>1,x>1)$ 得凹凸性即可

$f'(x)=px^{p-1},f''(x)=p(p-1)x^{p-2}>0$

$\Rightarrow f(x)$ 为凹函数 $\Rightarrow f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(a)+f(b)}{2}\Rightarrow\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^p\leqslant\dfrac{a^p+b^p}{2}$ 证毕

(2) 和 (1) 同理

(2) $f''(x)=p(p-1)x^{p-2}<0 \Rightarrow f(x)$是凸函数

例题 20 (2018 年) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，则（ D ）　　不等式证明（习题2）01:31:47

A. 当$f'(x)<0$时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　B. 当$f''(x)<0$时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

C. 当$f'(x)>0$时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　D. 当$f''(x)>0$时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

证明： 当 $f''(x)>0 \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，令 $x_0=\frac{1}{2}$

两边积分 $\Rightarrow 0=\int_0^1 f(x)dx \geqslant f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow 0=\int_0^1 f(x)dx \geqslant f\left(\frac{1}{2}\right)+0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant 0$

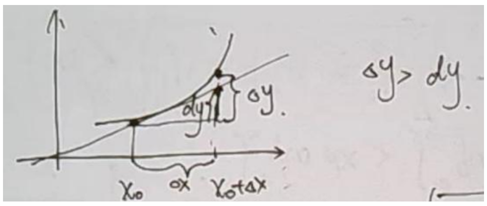
而 $f(x) \geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 等号只在 $x=x_0$ 处取到

令 $x_0=\frac{1}{2}$，那么 $\int_0^1 f(x)dx \geqslant \int_0^1 f\left(\frac{1}{2}\right)dx+\int_0^1 f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$

$0=\int_0^1 f(x)dx > f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\times 0=f\left(\frac{1}{2}\right)$

例题 21 已知 $f''(x)>0$，取 $x=x_0$，$\Delta x>0$，比较 $\Delta y\big|_{x_0}$ 和 $\mathrm{d}y\big|_{x_0}$ 的大小.（之前讲过其他解法）

证明：解法一：　　不等式证明（习题2）01:52:59



解法二： $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2 \geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$\Delta y=f(x)-f(x_0) \geqslant f'(x_0)(x-x_0)=dy$

例题 22 证明不等式：$\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}-\cos y\right| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$，其中 $x,y \in(-\infty,+\infty)$.　　不等式证明（习题2）01:57:10

证明： 泰勒展开（带拉格朗日型余项）

$\sin x=\sin y+\cos y \cdot(x-y)+\frac{-\sin \xi}{2!}\cdot(x-y)^2$

$\Rightarrow\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}-\cos y\right|=\left|\frac{\sin \xi}{2}(x-y)\right| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$

注： 第一反应肯定是拉格朗日，但发现证不出来，所以尝试更为精确的“带拉格朗日余项的泰勒中值定理”.

题型三 利用中值定理证明不等式

此处的中值定理特指“拉格朗日”和“柯西”中值定理；至于泰勒中值定理，其实在题型二中已经讲过了.

例题 23 设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$. 证明：对 $\forall x_1,x_2>0$，均有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

证明： (1) 若 $x_2<x_1$ 不等式证明（习题2）02:12:16

即证：$f(x_1+x_2)-f(x_1)<f(x_2)=f(x_2)-f(0)$

$\Leftrightarrow x_2 f'(\xi_1)<x_2 f'(\xi_2) \Leftrightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$

又由于 $f''(x)<0$，故 $f'(x)\searrow$

故只需证：$\xi_1>\xi_2$

(2) 若 $x_2>x_1$，即证：$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0) \Leftrightarrow f'(\theta_1)<f(\theta_2)$

类题 证明：$(1+a)\ln(1+a)+(1+b)\ln(1+b)<(1+a+b)\ln(1+a+b)$，其中 $a,b>0$.

证明： 令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$，即证：$f(a)+f(b)<f(a+b)$，$f(0)=0$ 不等式证明（习题2）02:22:45

由于 $f'(x)=\ln(1+x)+1, f''(x)=\dfrac{1}{1+x}>0$

与例题 23 同理可证得结论

例题 24 设 $a>1$，$n\geqslant 1$，证明：$\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$. 不等式证明（习题2）02:26:35

证明： $\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}=\dfrac{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)a^{\xi}\ln a}{\ln a}=\dfrac{1}{n(n+1)}\cdot a^{\xi}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

同理，$\dfrac{a^{\xi}}{n(n+1)}>\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}$ 证毕

例题 25 设 $a>\mathrm{e}$，$0<x<y<\dfrac{\pi}{2}$，证明：$a^y-a^x>(\cos x-\cos y)a^x\ln a$. 不等式证明（习题2）02:26:35

证明： 即证：$\dfrac{a^y-a^x}{\cos x-\cos y}>a^x\ln a \Leftrightarrow \dfrac{a^y-a^x}{\cos y-\cos x}<-a^x\ln a$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^{\xi}\ln a}{-\sin\xi}<-a^x\ln a \Leftrightarrow \dfrac{a^{\xi}}{\sin\xi}>a^x$

由于 $0<\sin\xi<1$，$\dfrac{a^{\xi}}{\sin\xi}>a^{\xi}>a^x$ 得证

例题 26 证明：$\dfrac{\arctan x}{\ln(1+x)}\leqslant\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$，其中 $x>0$. 不等式证明（习题2）02:38:10

证明： 即证：$\dfrac{\arctan x-\arctan 0}{\ln(1+x)-\ln(1+0)}=\dfrac{\frac{1}{1+\xi^2}}{\frac{1}{1+\xi}}=\dfrac{1+\xi}{1+\xi^2}\leqslant\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$，$0<\xi<x<+\infty$

令 $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x^2}$ $f'(x)=\dfrac{(1+x^2)-(1+x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{-x^2+2x-1}{(1+x^2)^2}=-\dfrac{(x+1)^2-2}{(1+x^2)^2}$

$\Rightarrow x > \sqrt{2}-1, f(x) \searrow ; 0 < x < \sqrt{2}-1, f(x) \nearrow \Rightarrow [f(x)]_{\max} = f\left(\sqrt{2}-1\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

类题 证明：$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} < \dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$，其中$0 < x < 1$. 不等式证明（习题2）02:48:56

证明：即证：$\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x} = \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{\arcsin x - \arcsin 0} = \dfrac{\frac{1}{1+\xi}}{\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}} = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{1+\xi} = \sqrt{\dfrac{1-\xi}{1+\xi}} > \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

由于$0 < \xi < x$，故只需证$f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$单调递减

而$f(x) = \sqrt{-1+\dfrac{2}{1+x}}$单调递减显然成立 ，证毕