

第 1 章的概念题（例题答案）

〇、几个基本概念

（一）数列极限定义

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow$ 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 均 $\exists N \in \mathbf{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - A| < \varepsilon$.

注 1: 如何理解这个抽象的定义呢? 请认真听课!

注 2: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的几何意义是——对于任意的 $\varepsilon > 0$ (无论 ε 有多小), 一定存在 N , 使得当 $n > N$ (也即第 N 项以后) 时, 所有的 x_n 均落在区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内, 而只有有限个点 (最多 N 个) 落在该区间之外.

（二）函数极限定义

1. 自变量趋向于定点

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0$, 均 $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

2. 自变量趋向于无穷

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0$, 均 $\exists X > 0$, 使得当 $x > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0$, 均 $\exists X > 0$, 使得当 $x < -X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0$, 均 $\exists X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

（三）有界性

若 $\exists M \geq 0$, 使得对于 $\forall x \in I$, 均有 $|f(x)| \leq M$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界.

注 1: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则一定存在最大、最小值, 故而 $f(x)$ 一定有界;

注 2: 若 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 则也能推出 $f(x)$ 有界;

注 3: 同理可定义上界和下界——

若 $\exists M_1$, 使得对于 $\forall x \in I$, 均有 $f(x) \leq M_1$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上有上界;

若 $\exists M_2$, 使得对于 $\forall x \in I$, 均有 $f(x) \geq M_2$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上有下界.

(四) 极限的性质 (以函数极限为例, 数列极限同理)

1. 唯一性

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 A 具有唯一性.

2. 局部有界性

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的去心邻域内有界.

3. 保号性

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ——

(1) 若 $A > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$;

(2) 若 $A < 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) < 0$.

一、与极限定义相关的概念题

例题 1 (1999 年) “对 $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ” 是 “ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ” 的 ()

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充分必要条件 D. 既非充分也非必要条件

解: “对 $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ”

3-5 极限中的概念题 01:50:43

就是 “ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ” 的定义, 显然是充要条件

例题 2 (2014 年) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$, 则当 n 充分大时, 必有 ()

- A. $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ B. $|a_n| < \frac{|a|}{2}$ C. $a_n > a - \frac{1}{n}$ D. $a_n < a + \frac{1}{n}$

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a| > \frac{|a|}{2} > 0$, 即当 n 充分大时, $|a_n| > \frac{|a|}{2}$

3-5 极限中的概念题 01:56:50

二、与无界与无穷大相关的概念题

例题 3 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是 ()

- A. 无穷大 B. 无穷小 C. 有界但非无穷小 D. 无界但非无穷大

解: 无界推不出无穷大, 但是无穷大能推出无界

3-5 极限中的概念题 02:06:43

$f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 无界震荡, 不是无穷大

例题4 下列叙述正确的是 ()

3-5 极限中的概念题02:15:57

A. 如果 $f(x)$ 在 x_0 的任意去心邻域内无界, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

B. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则 $f(x)$ 在 x_0 的任意去心邻域内无界

C. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

D. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$

解: A. 无穷能推出无界, 但是无界推不出无穷

C. 显然不正确

D. 取 $f(x) \equiv 0$

三、与单调有界准则相关的概念题

例题5 (2012 年) 设 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的 ()

A. 充分必要条件

B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件

D. 既非充分也非必要条件

解: ① 显然 S_n 单调递增, 若 $\{S_n\}$ 有界, 得出 $\{S_n\}$ 收敛,

3-5 极限中的概念题00:01:33

而 $a_n = S_n - S_{n-1}$, 令 $n \rightarrow \infty$ 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A - A = 0$

② 取 $a_n = 1 \Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = n \rightarrow \infty$

例题6 (2008 年) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是 ()

A. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

B. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛

D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

3-5 极限中的概念题00:07:35

解: A 取 $f(x) = \begin{cases} \arctan x + 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \arctan x - 1, & x < 0 \end{cases}$, $x_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$,

当 n 为偶数时, $f(x_n) \rightarrow 1$; 当 n 为奇数时, $f(x_n) \rightarrow -1$

B $\{x_n\}$ 单调 $\Rightarrow f(x_n)$ 也单调, 由于 $f(x)$ 有界, 由单调有界得 $\{f(x_n)\}$ 收敛

C 取 $x_n = n$, $\{x_n\}$ 发散, 但 $f(x_n) = f(n)$ 单调有界, 收敛

D 只要 x_n 单调, 取 $x_n = n$, $f(x_n)$ 就单调, 不需要 $\{x_n\}$ 收敛

四、与夹逼准则相关的概念题

例题7 设 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - a_n) = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ()

3-5 极限中的概念题00:24:40

A. 存在, 且一定为零

B. 存在, 但不一定为零

C. 不一定存在

D. 一定不存在

解: 取 $c_n = \sqrt{n+1} \geq a_n = \sqrt{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$

但是 $b_n \geq a_n = \sqrt{n} \rightarrow +\infty \Rightarrow b_n \rightarrow +\infty$

取 $a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow A$, 由夹逼准则可得, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$

补充题: 设 $x_n \leq a \leq y_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$

3-5 极限中的概念题 00:29:03

解: $0 \leq a - x_n \leq y_n - x_n \rightarrow 0$, 由夹逼准则可得, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a - x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$

五、与四则运算有关的概念题

例题 8 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ 也不存在, 则下列命题正确的个数是 ()

① $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ 不存在

② $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + h(x)]$ 不存在 3-5 极限中的概念题 00:34:05

③ $\lim_{x \rightarrow a} h(x)g(x)$ 不存在

④ $\lim_{x \rightarrow a} [g(x) + f(x)]$ 不存在

存在 + 存在 = 存在
存在 + 不存在 = 不存在
不存在 + 不存在 = 不确定

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

解: 取 $f(x) \equiv 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$, 故 ① 错

由于: 存在 + 不存在 = 不存在, 所以 ②④ 正确

③ 的反例, 取 $h(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$

$h(x)g(x) \equiv 0$ 迪利克雷函数

或者取 $h(x) = D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为有理数} \\ 1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$

$h(x)g(x) \equiv 0$

例题 9 设数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则 (D)

3-5 极限中的概念题 00:46:06

A. 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散

B. 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界

C. 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小

D. 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小

解: A. 取 $y_n \equiv 0$

B. $x_n = 0, 2, 0, 4, 0, 6, 0, 8, \dots$ 无界

$y_n = 1, 0, 3, 5, 0, 7, 0, 9, \dots$ 无界 $\Rightarrow x_n y_n \equiv 0$

有界的意思是既有上界也有下界 $|x| \leq M$

C. 取 $x_n = 0$, 但是 y_n 可以任取

D. $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 那么 $x_n \rightarrow \infty$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0 \Rightarrow y_n \rightarrow 0$

例 10 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 均不存在, 则下列选项正确的是 (C)

3-5 极限中的概念题 01:00:24

A. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 不存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 也不存在

B. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 不存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 必定存在

C. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 必不存在

D. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 也存在

解: $a_n = \frac{(a_n + b_n) + (a_n - b_n)}{2}, b_n = \frac{(a_n + b_n) - (a_n - b_n)}{2}$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 均不存在

且: 存在+存在=存在, 存在+不存在=不存在

补充题 (复合运算)

3-5 极限中的概念题 01:08:42

下列命题:

① $g(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, $f(u)$ 在 $u = u_0 = g(x_0)$ 连续, 则 $f[g(x)]$ 在 $x = x_0$ 连续 **连续和连续复合起来一定也是连续函数**

② $g(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, $f(u)$ 在 $u = u_0 = g(x_0)$ 不连续, 则 $f[g(x)]$ 在 $x = x_0$ 不连续

连续和不连续复合结果连续性不确定

③ $g(x)$ 在 $x = x_0$ 不连续, $f(u)$ 在 $u = u_0 = g(x_0)$ 连续, 则 $f[g(x)]$ 在 $x = x_0$ 不连续

④ $g(x)$ 在 $x = x_0$ 不连续, $f(u)$ 在 $u = u_0 = g(x_0)$ 不连续, 则 $f[g(x)]$ 在 $x = x_0$ 可能连续

中正确的个数是 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解: ② 取 $g(x) \equiv 0 \Rightarrow f[g(x)] \equiv f(0) \Rightarrow f[g(x)]$ 常函数, 连续

取 $g(x) = x \Rightarrow f[g(x)] = f(x) \Rightarrow f[g(x)]$ 在 $x = x_0$ 不连续

③ 取 $f(x) \equiv 0$, 无论 $g(x)$ 是什么, $f[g(x)] \equiv 0$, 连续

取 $f(x) = x, f[g(x)] = g(x)$ 不连续

④ 取 $g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ 只需使得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 间断, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f[g(x)] = f(1) = f[g(0)] = f(0)$ 成立即可

或者取 $f(x) = g(x) = D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases} \Rightarrow f[g(x)] \equiv 1$