第 1 章的概念题（例题答案）

〇、几个基本概念

（一）数列极限定义

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a \Leftrightarrow$ 对于$\forall\varepsilon>0$，均$\exists N\in\boldsymbol{N}^*$，使得当$n>N$时，有$|a_n-A|<\varepsilon$.

注 1：如何理解这个抽象的定义呢？请认真听课！

注 2：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的几何意义是——对于任意的$\varepsilon>0$（无论$\varepsilon$有多小），一定存在$N$，使得当$n>N$（也即第$N$项以后）时，所有的$x_n$均落在区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内，而只有有限个点（最多$N$个）落在该区间之外.

（二）函数极限定义

1. 自变量趋向于定点

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow$ 对$\forall\varepsilon>0$，均$\exists\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. 自变量趋向于无穷

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A \Leftrightarrow$ 对$\forall\varepsilon>0$，均$\exists X>0$，使得当$x>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A \Leftrightarrow$ 对$\forall\varepsilon>0$，均$\exists X>0$，使得当$x<-X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow$ 对$\forall\varepsilon>0$，均$\exists X>0$，使得当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

（三）有界性

若$\exists M\geqslant 0$，使得对于$\forall x\in I$，均有$|f(x)|\leqslant M$恒成立，则称$f(x)$在区间I上有界.

注 1：若$f(x)$在$[a,b]$连续，则一定存在最大、最小值，故而$f(x)$一定有界；

注 2：若$f(x)$在(a,b)连续，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$和$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在，则也能推出$f(x)$有界；

注 3：同理可定义上界和下界——
若$\exists M_1$，使得对于$\forall x\in I$，均有$f(x)\leqslant M_1$恒成立，则称$f(x)$在区间I上有上界；
若$\exists M_2$，使得对于$\forall x\in I$，均有$f(x)\geqslant M_2$恒成立，则称$f(x)$在区间I上有下界.

（四）极限的性质（以函数极限为例，数列极限同理）

1. 唯一性

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 A 具有唯一性.

2. 局部有界性

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的去心邻域内有界.

3. 保号性

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$——

(1) 若 $A > 0$，则 $\exists \delta > 0$，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) > 0$；
(2) 若 $A < 0$，则 $\exists \delta > 0$，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) < 0$.

一、与极限定义相关的概念题

例题 1 (1999 年) “对 $\forall \varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$” 是 “$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$” 的(　　)

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既非充分也非必要条件

解：“对 $\forall \varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$”　　3—5极限中的概念题01:50:43

就是 “$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$” 的定义，显然是充要条件

例题 2 (2014 年) 设 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \neq 0$，则当 n 充分大时，必有 (　　)

A. $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$　　B. $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$　　C. $a_n > a - \dfrac{1}{n}$　　D. $a_n < a + \dfrac{1}{n}$

解： $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} |a_n| = |a| > \dfrac{|a|}{2} > 0$，即当 n 充分大时，$|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$　　3—5极限中的概念题01:56:50

二、与无界与无穷大相关的概念题

例题 3 当 $x \to 0$ 时，$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \sin \dfrac{1}{x}$ 是 (　　)

A. 无穷大　　B. 无穷小　　C. 有界但非无穷小　　D. 无界但非无穷大

解：无界推不出无穷大，但是无穷大能推出无界　　3—5极限中的概念题02:06:43

$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \sin \dfrac{1}{x}$ 无界震荡，不是无穷大

例题 4 下列叙述正确的是（　　）　　3—5极限中的概念题02:15:57

A. 如果$f(x)$在x_0的任意去心邻域内无界，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$

B. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$，则$f(x)$在$x_0$的任意去心邻域内无界

C. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$

D. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}=\infty$

解： A. 无穷能推出无界，但是无界推不出无穷

C. 显然不正确

D. 取 $f(x)\equiv 0$

三、与单调有界准则相关的概念题

例题 5 (2012 年) 设$a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列$\{S_n\}$有界是数列$\{a_n\}$收敛的（　　）

A. 充分必要条件　　B. 充分非必要条件　　C. 必要非充分条件　　D. 既非充分也非必要条件

解： ① 显然S_n单调递增，若$\{S_n\}$有界，得出$\{S_n\}$收敛，　　3—5极限中的概念题00:01:33

而$a_n=S_n-S_{n-1}$，令$n\to\infty$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A-A=0$

② 取$a_n=1\Rightarrow S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=n\to\infty$

例题 6 (2008 年) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界，$\{x_n\}$为数列，下列命题正确的是（　　）

A. 若$\{x_n\}$收敛，则$\{f(x_n)\}$收敛　　B. 若$\{x_n\}$单调，则$\{f(x_n)\}$收敛　　3—5极限中的概念题00:07:35

C. 若$\{f(x_n)\}$收敛，则$\{x_n\}$收敛　　D. 若$\{f(x_n)\}$单调，则$\{x_n\}$收敛

解： A 取 $f(x)=\begin{cases}\arctan x+1, x>0\\ 0, \quad x=0\\ \arctan x-1, x<0\end{cases}$，$x_n=(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n}\to 0$，

当n为偶数时，$f(x_n)\to 1$；当n为奇数时，$f(x_n)\to -1$

B $\{x_n\}$单调$\Rightarrow f(x_n)$也单调，由于$f(x)$有界，由单调有界得$\{f(x_n)\}$收敛

C 取$x_n=n$，$\{x_n\}$发散，但$f(x_n)=f(n)$单调有界，收敛

D 只要x_n单调，取$x_n=n$，$f(x_n)$就单调，不需要$\{x_n\}$收敛

四、与夹逼准则相关的概念题

例题 7 设$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$（　　）　　3—5极限中的概念题00:24:40

A. 存在，且一定为零　　B. 存在，但不一定为零　　C. 不一定存在　　D. 一定不存在

解： 取$c_n=\sqrt{n+1}\geqslant a_n=\sqrt{n}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

但是$b_n \geq a_n = \sqrt{n} \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty$

取$a_n \to A, b_n \to A,$由夹逼准则可得，$\lim_{n\to\infty} b_n = A$

补充题：设$x_n \leq a \leq y_n$，且$\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$.证明：$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$ 3－5极限中的概念题00:29:03

解：$0 \leq a - x_n \leq y_n - x_n \to 0$，由夹逼准则可得，$\lim_{n\to\infty}(a - x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$

$\lim_{n\to\infty} y_n = a$

五、与四则运算有关的概念题

例题 8 设$\lim_{x\to a} f(x) = A$，$\lim_{x\to a} g(x)$不存在，$\lim_{x\to a} h(x)$也不存在，则下列命题正确的个数是（ ）

① $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$不存在 ② $\lim_{x\to a}[f(x)+h(x)]$不存在 3－5极限中的概念题00:34:05

③$\lim_{x\to a} h(x)g(x)$不存在 ④ $\lim_{x\to a}[g(x)+f(x)]$不存在

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解：取$f(x) \equiv 0$，则$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$，故① 错

由于：存在+不存在=不存在，所以②④ 正确

③ 的反例，取$h(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$，$g(x) = \begin{cases} 0, x > 0 \\ 1, x < 0 \end{cases}$

$h(x)g(x) \equiv 0$

或者取$h(x) = D(x) = \begin{cases} 1, x\text{为有理数} \\ 0, x\text{为无理数} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, x\text{为有理数} \\ 1, x\text{为无理数} \end{cases}$

$h(x)g(x) \equiv 0$

例题 9 设数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$满足$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则(D) 3－5极限中的概念题00:46:06

A. 若x_n发散，则y_n必发散 B. 若x_n无界，则y_n必有界

C. 若x_n有界，则y_n必为无穷小 D. 若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小，则y_n必为无穷小

解：$A.$取$y_n \equiv 0$

$B.$ $x_n = 0, 2, 0, 4, 0, 6, 0, 8, \cdots$无界

$y_n = 1, 0, 3, 5, 0, 7, 0, 9, \cdots$无界$\Rightarrow x_n y_n \equiv 0$

$C.$取$x_n = 0$，但是 y_n可以任取

$D.$ $\dfrac{1}{x_n}$为无穷小，那么$x_n \to \infty$，由$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0 \Rightarrow y_n \to 0$

例题 10 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均不存在，则下列选项正确的是（ C ） 3－5极限中的概念题01:00:24

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 也不存在

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 必定存在

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 必不存在

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 也存在

解： $a_n=\dfrac{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)}{2}, b_n=\dfrac{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)}{2}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均不存在

且：存在+存在=存在，存在+不存在=不存在

补充题（复合运算） 3－5极限中的概念题01:08:42

下列命题：

①$g(x)$在$x=x_0$连续，$f(u)$在$u=u_0=g(x_0)$连续，则$f[g(x)]$在$x=x_0$连续

②$g(x)$在$x=x_0$连续，$f(u)$在$u=u_0=g(x_0)$不连续，则$f[g(x)]$在$x=x_0$不连续

③$g(x)$在$x=x_0$不连续，$f(u)$在$u=u_0=g(x_0)$连续，则$f[g(x)]$在$x=x_0$不连续

④$g(x)$在$x=x_0$不连续，$f(u)$在$u=u_0=g(x_0)$不连续，则$f[g(x)]$在$x=x_0$可能连续

中正确的的个数是（ ）

$A.$ 1　　$B.$ 2　　$C.$ 3　　$D.$ 4

解： ② 取 $g(x)\equiv 0 \Rightarrow f[g(x)]\equiv f(0) \Rightarrow f[g(x)]$ 常函数，连续

取 $g(x)=x \Rightarrow f[g(x)]=f(x) \Rightarrow f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 不连续

③ 取 $f(x)\equiv 0$，无论 $g(x)$ 是什么，$f[g(x)]\equiv 0$，连续

取 $f(x)=x$，$f[g(x)]=g(x)$ 不连续

④ 取 $g(x)=\begin{cases}0, x=0\\1, x\neq 0\end{cases} \Rightarrow$ 只需使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 间断，且 $\lim\limits_{x\to 0} f[g(x)]=f(1)=f[g(0)]=f(0)$ 成立即可

或者取 $f(x)=g(x)=D(x)=\begin{cases}1，x\text{为有理数}\\0，x\text{为无理数}\end{cases} \Rightarrow f[g(x)]\equiv 1$