换元法与分部积分相关的综合题（紧密）

主讲人：凯哥

一、在 d 后加上恰当的常数，简化分部积分的计算

例题 1 $\int x \cdot \arctan x \, dx$ 换元法与分部积分法的综合题 00:06:09

解： $I=\frac{1}{2}\int \arctan x d(x^2+1)=\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{1}{2}x+C$

类题 $\int x \cdot \ln(1+x^2) \cdot \arctan x \, dx$ 换元法与分部积分法的综合题 00:07:48

解： 令 $f(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)\ln(1+x^2)\arctan x$

$$I=\frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\arctan x d(x^2+1)$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+1)\ln(1+x^2)\arctan x-\frac{1}{2}\int (x^2+1)\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\arctan x+\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\right)dx$$

$$=f(x)-\int x\arctan x dx-\frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)dx$$

$$=f(x)-\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\int \frac{2x^2}{1+x^2}dx$$

$$=f(x)-\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+x-\arctan x+C$$

二、换元法与分部积分同时使用（考研重点）

换元以后，紧接着一步分部积分，是考研中比较常见的出题风格，大家一定要对这种题目特别熟练！

当我们预判出某个题既要换元又要分部的时候，我个人建议是先换元，因为**换元法可以打开局面**，换元以后，会让你的整个被积表达式看起来更加的“清爽”，有利于后续的操作.

例题 2 (2018 年) $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\, dx$ 换元法与分部积分法的综合题 00:18:08

解： 令 $\sqrt{e^x-1}=t\Rightarrow x=\ln(1+t^2)$,$dx=\frac{2t}{1+t^2}dt\Rightarrow I=\int (1+t^2)^2\arctan t\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt$

$$=\frac{1}{2}\int \arctan t d(1+t^2)^2=\frac{1}{2}\arctan t\cdot(1+t^2)^2-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{3}t^3\right)+C$$

回代

类题 $\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}dx$ 换元法与分部积分法的综合题 00:25:24

解： 令 $\sqrt{x-1}=t\Rightarrow x=1+t^2\Rightarrow dx=2tdt$

$$I=2\int \frac{t^2\arctan t}{1+t^2}dt=2\int \arctan t dt-2\int \frac{\arctan t}{1+t^2}dt$$

$$=-(\arctan t)^2+2t\arctan t-2\int \frac{t}{1+t^2}dt=-(\arctan t)^2+2t\arctan t-\ln(1+t^2)+C$$，回代

B站昵称：考研竞赛凯哥

例题 3 $\int \ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x$ 换元法与分部积分法的综合题 00:32:07

解： 令$\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=t\Rightarrow x=\dfrac{1}{t^2-1}\Rightarrow I=\int \ln(1+t)d\dfrac{1}{t^2-1}=\dfrac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\dfrac{1}{(t+1)^2(t-1)}dt$

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{C}{t-1}=\frac{A(t^2-1)+B(t-1)+C(t+1)^2}{(t+1)^2(t-1)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+C=0\\B+2C=0\\-A-B+C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{1}{4}\\B=-\dfrac{1}{2}\\C=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\left[\left(-\frac{1}{4}\right)\ln|t+1|+\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}+\frac{1}{4}\ln|t-1|\right]+C$$

注： 若按照平时的做题习惯，解出$x=\dfrac{1}{t^2-1}$后，将$\mathrm{d}x$具体计算出来，再代入积分中，那么接下来的计算，就反而更加繁琐了．类似的题目还有以下几道——

类题 $\int \arctan(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$ 换元法与分部积分法的综合题 00:46:12

解： 令$1+\sqrt{x}=t\Rightarrow x=(t-1)^2\Rightarrow I=\int \arctan t\,d(t-1)^2=(t-1)^2\arctan t-\int\dfrac{(t-1)^2}{t^2+1}dt$

$=(t-1)^2\arctan t-t+\ln(1+t^2)+C$，回代

例题 4 $\int \ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x$ 换元法与分部积分法的综合题 00:49:47

解： $I=x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int x\cdot 2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$=x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-2\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)d\sqrt{1+x^2}$

$=x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2x+C$

三、利用分部积分，对分母进行降阶

如果分母的次数太高，我们除了可以利用倒代换进行降阶以外，还可以利用分部积分进行降阶．在具体操作时，最核心的步骤就是“想办法将分母凑到d后面，然后分部积分”．

比如我们之前讲过的$\int\dfrac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$，就是利用这个了这个思想．下面请看一些类似的典型例题．

例题 5 $\int\dfrac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ 换元法与分部积分法的综合题 01:00:21

解： $I=-\int x\mathrm{e}^x d\dfrac{1}{x+1}=-\dfrac{x\mathrm{e}^x}{1+x}+\int\dfrac{1}{1+x}(1+x)\mathrm{e}^x dx=-\dfrac{x\mathrm{e}^x}{1+x}+\mathrm{e}^x+C$

B站昵称：考研竞赛凯哥

$$=\mathrm{e}^x\left(1-\frac{x}{1+x}\right)+C=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}+C$$

类题 $\displaystyle\int\frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$ 换元法与分部积分法的综合题 01:05:54

解： $\displaystyle I=-\int x^2\mathrm{e}^x d\frac{1}{x+2}=-\frac{x^2\mathrm{e}^x}{x+2}+\int\frac{1}{x+2}\mathrm{e}^x(x^2+2x)dx$

$$=-\frac{x^2\mathrm{e}^x}{x+2}+\int x\mathrm{e}^x dx=-\frac{x^2\mathrm{e}^x}{x+2}+\mathrm{e}^x(x-1)+C$$

以上 2 个题目，将分母凑到d后面去是非常容易的．下面，我们再来看一个难一点的例题，它需要用到“强制凑微分”的技巧，但是其核心思想仍然是“利用分部积分，对分母进行降阶”．

例题 6 $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$ 换元法与分部积分法的综合题 01:09:56

解： $\displaystyle I=\int\frac{\frac{x}{\cos x}x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx=-\int\frac{x}{\cos x}d\frac{1}{x\sin x+\cos x}$

$$=-\frac{x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x\sin x+\cos x}+\int\frac{1}{x\sin x+\cos x}\cdot\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}dx=-\frac{x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x\sin x\cos x}+\tan x+C$$

四、利用分部积分，实现“积分抵消”

有些题目，需要把一个积分拆成两个积分，其中一个积分I_1暂时不动，另一个积分I_2使用分部积分，而分部积分后得到的新积分，刚好和I_1相互抵消．这种题，被积函数中“一般”都含有指数函数．

例题 7 已知$f''(x)$连续，$f'(x)\neq 0$，求$\displaystyle\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3}\right]\mathrm{d}x$．

解： $\displaystyle I=\int\frac{f}{f'}dx-\int\frac{f^2}{(f')^3}df'$ 换元法与分部积分法的综合题 01:21:46

$$=\int\frac{f}{f'}dx+\frac{1}{2}\int f^2 d\frac{1}{(f')^2}=\int\frac{f}{f'}dx+\frac{1}{2}\frac{f^2}{(f')^2}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(f')^2}2ff'dx=\frac{1}{2}\frac{f^2(x)}{[f'(x)]^2}+C$$

例题 8 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ 换元法与分部积分法的综合题 01:26:34

解法一： $\displaystyle I=\int\mathrm{e}^x\cdot\left[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\right]dx=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}dx-\int\frac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}dx$

$$=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}dx+\int\mathrm{e}^x d\frac{1}{1+x}=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}dx+\left[\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}-\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}dx\right]=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}+C$$

解法二： $\displaystyle I=\int\mathrm{e}^x\cdot\frac{x}{(1+x)^2}dx=\int\mathrm{e}^x\left[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\right]dx=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}+C$

注： 本题的背景是$\displaystyle\int\mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]\mathrm{d}x$．根据乘积的求导公式，显然结果等于$\mathrm{e}^x f(x)+C$．

当然，由于分部积分公式本就是由乘积的求导公式推出来的，所以也可用分部积分——

$$\int\mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]\mathrm{d}x$$

B站昵称：考研竞赛凯哥

$$
\begin{aligned}
&=\int \mathrm{e}^{x} f(x)\mathrm{d}x+\int \mathrm{e}^{x} f'(x)\mathrm{d}x \\
&=\int \mathrm{e}^{x} f(x)\mathrm{d}x+\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}f(x) \\
&=\int \mathrm{e}^{x} f(x)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{x} f(x)-\int f(x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{x} \\
&=\mathrm{e}^{x} f(x)+C
\end{aligned}
$$

类题 1 $\int \frac{x^{2}\mathrm{e}^{x}}{(x+2)^{2}}\mathrm{d}x$ 换元法与分部积分法的综合题 01:38:45

解： $I=\int \mathrm{e}^{x}\cdot\left(1-4\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{4}{(x+2)^{2}}\right)dx=\mathrm{e}^{x}-4\int \mathrm{e}^{x}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^{2}}\right)dx=\mathrm{e}^{x}-4\cdot\frac{\mathrm{e}^{x}}{x+2}+C$

类题 2 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$ 换元法与分部积分法的综合题 01:42:15

解法一： $I=\int \mathrm{e}^{x}\left(\frac{1}{1+\cos x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)dx$，由于$\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)'=\frac{1}{1+\cos x}\Rightarrow I=\mathrm{e}^{x}\frac{\sin x}{1+\cos x}+C$

解法二： $I=\int \frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^{2}\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{x}dx=\int\left(\frac{1}{2}\sec^{2}\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}\right)\cdot\mathrm{e}^{x}dx=\mathrm{e}^{x}\tan\frac{x}{2}+C$

注： 前面3个题目，被积函数中全都含有e^{x}，不禁让人联想——难道“部积分+积分抵消”的思想，只能用在被积函数出现e^{x}的情形吗？

其实也不尽然，有的题目，被积函数中出现的是$\mathrm{e}^{f(x)}$，甚至都没有指数函数出现，也可尝试该方法.

但是对于这种题，就无法利用$[\mathrm{e}^{x}f(x)]'=\mathrm{e}^{x}[f(x)+f'(x)]$的公式了，必须使用分部积分.

例题 9 $\int \mathrm{e}^{\sin x}\frac{x\cos^{3}x-\sin x}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x$ 换元法与分部积分法的综合题 01:53:44

解： $I=\int \mathrm{e}^{\sin x}x\cos xdx-\int \mathrm{e}^{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{2}x}dx=\int xd\mathrm{e}^{\sin x}-\int \mathrm{e}^{\sin x}d\frac{1}{\cos x}$

$=\left[x\mathrm{e}^{\sin x}-\int \mathrm{e}^{\sin x}dx\right]-\left[\frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{\cos x}-\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\,dx\right]$

$=x\mathrm{e}^{\sin x}-\frac{1}{\cos x}\mathrm{e}^{\sin x}+C$

注： 有时候需要对两个积分同时使用分部积分，使得分部积分以后的两个新的积分相互抵消.

类题 2 $\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$ 换元法与分部积分法的综合题 02:00:41

解： $I=\int \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}dx+\int\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}dx=x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}-\int x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x^{2}}\right)dx+\int\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}dx=x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}+C$

例题 10 $\int\left(\ln\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x$ 换元法与分部积分法的综合题 02:10:53

解： $I=\int \ln\ln xdx+\int\frac{1}{\ln x}dx=x\ln\ln x-\int x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{\ln x}dx=x\ln\ln x+C$

B站昵称：考研竞赛凯哥

例题 11 $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$ 换元法与分部积分法的综合题 02:13:51

解： $I=\int \frac{(x-\ln x)+(1-x)}{(x-\ln x)^2}dx=\int \frac{1}{(x-\ln x)}dx+\int \frac{1-x}{(x-\ln x)^2}dx$

$=\frac{x}{x-\ln x}+\int x(-1)\frac{1}{(x-\ln x)^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)dx+\int \frac{1-x}{(x-\ln x)^2}dx$

$=\frac{x}{x-\ln x}+C$

例题 12 $\int \frac{e^{-\sin x}\cdot \sin 2x}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}dx$ 换元法与分部积分法的综合题 02:23:47

解： $I=\int \frac{e^{-\sin x}\cdot 2\sin x\cos x}{\left(\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}\right)^2}dx \xlongequal{\sin x=t} 8\int \frac{e^{-t}(-t)}{(1-t)^2}d(-t)$

$=8\int e^u\cdot\frac{u}{(1+u)^2}du=8\int e^u\left[\frac{1}{1+u}-\frac{1}{(1+u)^2}\right]du$

$=8e^u\frac{1}{1+u}+C=8e^{-\sin x}\cdot\frac{1}{1-\sin x}+C$

注： 本题十分综合，如果是几天前，可能这题我们难以下手；但是，经过两三次课的洗礼，以我们现在的功力来看，本题不过是一道送分题.

所以，把我的不定积分讲义和视频吃透，**足够你应付任何一本辅导书中的不定积分计算题**.

五、对复杂部分求导，期待出现奇迹（刚好是分子就好了）

有时候，当被积函数中的某一部分，出现了一个比较复杂的“整体”时(这个整体一般来说是一个复合函数或者两个函数的乘积)，那么我们可以尝试对这个整体求求导，看一下它的导函数有什么特点(比如这个整体求导以后的函数，会不会刚好是被积函数的分子呢?)，这便于我们后续的凑微分等操作.

例题 13 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+[x(\ln x-1)]^2}}dx$ 换元法与分部积分法的综合题 02:35:52

解： $I=\ln\left(\square+\sqrt{1+\square^2}\right)+C$，$\square=x(\ln x-1)$

$[x(\ln x-1)]'=(\ln x-1)+x\frac{1}{x}=\ln x$

例题 14 $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$ 换元法与分部积分法的综合题 02:37:56

解： $I=\int \frac{e^x(1+x)}{xe^x(1+xe^x)}dx=\int \frac{1}{xe^x(1+xe^x)}dxe^x=\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|+C$

类题 $\int \frac{1+x\cos x}{x(1+xe^{\sin x})}dx$ 换元法与分部积分法的综合题 02:43:33

解： $I=\int \frac{e^{\sin x}(1+x\cos x)}{xe^{\sin x}(1+xe^{\sin x})}dx=\ln\left|\frac{xe^{\sin x}}{1+xe^{\sin x}}\right|+C$

考研竞赛凯哥 B站昵称：

注： 其实通过上面的例题 14 和类题，我们甚至可以自己总结出一个**出题模板**，如下——

$$\int \frac{1+xf'(x)}{x(1+xe^{f(x)})}\mathrm{d}x=\int \frac{[1+xf'(x)]e^{f(x)}}{xe^{f(x)}(1+xe^{f(x)})}\mathrm{d}x=\int \frac{[xe^{f(x)}]'}{xe^{f(x)}(1+xe^{f(x)})}\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{xe^{f(x)}}{1+xe^{f(x)}}\right|+C$$

如果取 $f(x)=\arctan x$，代入出题模板，稍作变形，即可原创一道题目 $\displaystyle\int \frac{1+x+x^2}{(1+x^2)(x+x^2e^{\arctan x})}\mathrm{d}x$，要不，拿去考考你的研友?

例题 15 $\displaystyle\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$　　换元法与分部积分法的综合题 02:51:18

解： $I=\displaystyle\int \frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}dx=\int \frac{1}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}d\frac{\ln x}{x}=-\frac{x}{\ln x-x}+C$

注： 其实，如果稍微敏感一点的话，我们看到$1-\ln x$的时候，就应该想到$\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'$了，就如同看到$1+\ln x$就可以联想$(x\ln x)'$一样.

类题 1 $\displaystyle\int \frac{e^x(x-1)}{(x-e^x)^2}\mathrm{d}x$　　换元法与分部积分法的综合题 02:55:34

解： $I=\displaystyle\int \frac{1}{\left(1-\frac{e^x}{x}\right)^2}d\frac{e^x}{x}=-\frac{1}{t-1}+C=-\frac{1}{\frac{e^x}{x}-1}+C=-\frac{x}{e^x-x}+C$

类题 2 $\displaystyle\int \frac{x+\sin x\cdot\cos x}{(\cos x-x\cdot\sin x)^2}\mathrm{d}x$　　换元法与分部积分法的综合题 03:00:06

解： $I=\displaystyle\int \frac{x\sec^2x+\tan x}{(1-x\tan x)^2}dx=\int \frac{1}{(x\tan x-1)^2}dx\tan x=-\frac{1}{x\tan x-1}+C=-\frac{\cos x}{x\sin x-\cos x}+C$

B站昵称：考研竞赛凯哥