导数的几何应用（习题-紧密）

题型一 导数的几何意义（切线与法线）

例题 1 (2010 年) 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切，则 $a=2\mathrm{e}$ 导数的几何应用（习题上）00:03:24

解：
$$\begin{cases} x_0^2=a\ln x_0 \Rightarrow \ln\dfrac{a}{2}=1 \\ 2x_0=\dfrac{a}{x_0}\Rightarrow 2x_0^2=a\Rightarrow x_0=\sqrt{\dfrac{a}{2}} \end{cases}$$

类题 曲线 $y=a^x$ 与直线 $y=x$ 有交点的充要条件是 ( ) 导数的几何应用（习题上）00:09:32

A. $0<a\leqslant 1$　　B. $0<a\leqslant \mathrm{e}$　　C. $0<a\leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$　　D. $0<a\leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}$

解：
$$\begin{cases} a^{x_0}=x_0\Rightarrow a^{\frac{1}{\ln a}}=\dfrac{1}{\ln a}\Rightarrow \dfrac{1}{\ln a}\ln a=-\ln\ln a \\ a^{x_0}\ln a=1\Rightarrow x_0\ln a=1\Rightarrow x_0=\dfrac{1}{\ln a} \end{cases}$$

$$\ln\ln a=-1\Rightarrow \ln a=\frac{1}{\mathrm{e}}\Rightarrow a=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$$

例题 2 (2013 年) 曲线 $\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为_. 导数的几何应用（习题上）00:18:45

解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=t=1$

令 $t=1\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4},y=\dfrac{1}{2}\ln 2$

故法线方程：$y-\dfrac{1}{2}\ln 2=(-1)\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

例题 3 (2002 年) 曲线的极坐标方程 $r=1-\cos\theta$，求该曲线上对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 的切线与法线的直角坐标方程.

解： $\begin{cases} x=r\cos\theta=\cos\theta-\cos^2\theta \\ y=r\sin\theta=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta \end{cases}$ 导数的几何应用（习题上）00:21:10

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}=\frac{\cos\theta-[\cos^2\theta-\sin^2\theta]}{-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}$$

令 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，同理计算出方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 及其法线方程

题型二 具体函数的单调性与极值、凹凸性与拐点

所谓具体函数，指的是给了表达式的函数. 若$y=f(x)$是一个显函数，那么这样的题只需按部就班的进行求导判断即可，属于送分题. 所以本讲义列举的函数均被命题人进行了适当的“包装”，即$f(x)$的表达式要么以变限积分函数给出、要么以参数方程给出、要么以隐函数形式给出、要么以分段形式给出，总之不讲送分题.

例题 4 证明函数$f(x)=(1+2^x)^{\frac{1}{x}}$在$(0,+\infty)$单调递减. 导数的几何应用（习题上）00:27:50

解：$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+2^x)}$，$f'(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+2^x)}\cdot\dfrac{\frac{2^x\ln 2}{1+2^x}\cdot x-\ln(1+2^x)}{x^2}=(1+2^x)^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{2^x\ln 2^x-(2^x+1)\ln(2^x+1)}{x^2(1+2^x)}$

令$g(t)=t\cdot\ln t(t>1),g'(t)=1+\ln t>0\Rightarrow g(t)$单调递增

$\Rightarrow 2^x\ln 2^x-(2^x+1)\ln(2^x+1)<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)$单调递减

例题 5 求函数$f(x)=x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$的极值. 导数的几何应用（习题上）00:36:25

解：$f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-x)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{2}{3}(1-x)^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{3}\dfrac{(1-x)-2x}{x^{\frac{2}{3}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{3}}}$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-3x}{x^{\frac{2}{3}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{3}}}\Rightarrow$ 驻点：$x=\dfrac{1}{3}$，不可导点：$x=0,1$

列表法可得：极大值$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$，极小值$f(1)=0$

注：驻点、不可导点、分段点，这些位置都可能成为极值点.

类题 设函数$f(x)=\begin{cases}x^x, & x>0\\ x+1, & x\leqslant 0\end{cases}$，求$f(x)$的极值. 导数的几何应用（习题上）00:51:36

解：① $x>0,f(x)=x^x=\mathrm{e}^{x\ln x}\Rightarrow f'(x)=\mathrm{e}^{x\ln x}\cdot[\ln x+1]=x^x(1+\ln x)$

$\Rightarrow f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$单调递减，在$\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$单调递增，$\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=1$

② $x\leqslant 0$显然递增$\Rightarrow$ 极大值$f(0)=1$，极小值 $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$

注：如果把题中的函数改为$f(x)=\begin{cases}x^x+3, & x>0\\ x+2, & x\leqslant 0\end{cases}$呢，$x=0$还会是极值点吗？

例题 5 (2017 年) 已知函数$y(x)$由方程$x^3+y^3-3x+3y-2=0$确定，求$y(x)$的极值.

解： 求导：$3x^2+3y^2\cdot y'-3+3y'=0\Rightarrow x^2+y^2\cdot y'+y'-1=0$ 导数的几何应用（习题上）01:04:03

令$y'=0\Rightarrow x=\pm1$，当 $x=1$ 时，$y=1$；当$x=-1$ 时，$y=0$

再求导，$2x+2y(y')^2+y^2\cdot y''+y''=0$

① 令$x=1$，$y=1$，$y'=0\Rightarrow y''(1)=-1<0\Rightarrow$ 极大值$y(1)=1$

② 令$x=-1$，$y=0$，$y'=0\Rightarrow -2+y''=0\Rightarrow y''(-1)=2>0\Rightarrow$ 极小值$y(-1)=0$

例题 6 (2011 年) 设$y=y(x)$由$\begin{cases}x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3}\\ y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3}\end{cases}$确定，求函数$y(x)$的极值和曲线$y=y(x)$的凹凸区间和拐点.

解： $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$，令$y'(x)=0\Rightarrow t=\pm1$，代入得$\begin{cases}x=\frac{5}{3}\\ y=-\frac{1}{3}\end{cases}$和$\begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}$ 导数的几何应用（习题上）01:15:35

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'(x)}{dx}=\frac{d\frac{t^2-1}{t^2+1}}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{2t\cdot(t^2+1)-(t^2-1)2t}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{1}{t^2+1}=\frac{4t}{(t^2+1)^3}$$

① $t=1$时，$x=\frac{5}{3},y=-\frac{1}{3}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}>0$，故极小值为$y_{x=\frac{5}{3}}=-\frac{1}{3}$

② $t=-1$时，$x=-1$，$y=1$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=-1}<0$，故极大值为$y_{x=-1}=1$

$t>0$即$x\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$时，$y=y(x)$为凹函数；$t<0$，即$x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$时，为凸函数

例题 7 (2001 年) 曲线$y=(x-1)^2(x-3)^2$的拐点个数为（　） 导数的几何应用（习题上）01:34:44

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解： y 的零点是 1，3，重数分别是 2，2

y'的零点是 1，$\theta\in(1,3)$，3，重数分别是 1，1，1

y''的零点是$\xi_1\in(1,\theta),\xi_2\in(\theta,3)$，重数分别是 1，1

得出，拐点是 2 个

(2011 年) 曲线$y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$的拐点是（　　） 导数的几何应用（习题上）02:04:32

A. $(1,0)$　　B. $(2,0)$　　C. $(3,0)$　　D. $(4,0)$

解： y的零点是：$1,2,3,4$，重数分别是：$1,2,3,4$

y'的零点是：$\theta_1,2,\theta_2,3,\theta_3,4$，其中$\theta_1\in(1,2),\theta_2\in(2,3),\theta_3\in(3,4)$，重数分别是：1，1，1，2，1，3

y''的零点是：$\xi_1,\xi_2,\xi_3,3,\xi_4,\xi_5,4$，重数分别是：1，1，1，1，1，1，2

有 6 个拐点

题型三 函数的零点与方程的根

本题型是考研的重点内容，但并不是难点，因为它不过只是“题型一”的另一种表现形式而已，我们只需要判断出函数的单调性，并用好“零点定理”，即可确定出该函数的零点个数（或方程根的个数）.

例题 8 求方程$e^x+x^2=2(x+1)$的实根个数. 导数的几何应用（习题中）00:01:28

解法一： 令$f(x)=e^x+x^2-2x-2$,$f'(x)=e^x+2x-2=0,f''(x)=e^x+2>2\Rightarrow f(x)$凹

$\Rightarrow f'(x)$单调递增，而$f'(0)=-1<0$，$f'(1)=e>0\Rightarrow \exists\xi\in(0,1),f'(\xi)=0$、

$\Rightarrow f(x)$在$(-\infty,\xi)$单调递减，在$(\xi,+\infty)$单调递增，$f(0)=-1<0$

$f(-\infty)=+\infty,f(+\infty)=+\infty$，由单调性易得，$f(x)$恰有两个零点

故，方程有两个实根

解法二： $f(x)=e^{-x}\cdot(-x^2+2x+2)$

类题 1 若a是一个正常数，证明：方程$ae^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}$恰有一个实根. 导数的几何应用（习题中）00:12:40

解法一： $f(x)=ae^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$

解法二： $a=e^{-x}\cdot\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)$，令$f(x)=e^{-x}\cdot\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)=\dfrac{1+x+\frac{x^2}{2}}{e^x}$

$f'(x)=(-e^{-x})\cdot\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)+e^{-x}\cdot(1+x)=(-e^{-x})\cdot\dfrac{x^2}{2}<0\Rightarrow f(x)$单调递减

$f(+\infty)=0,f(-\infty)=+\infty$

故显然，由于$a>0$,所以$f(x)=a$ 有且仅有一个根，故$ae^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}$也恰有一根

注： 本题可以直接求导讨论，也可以先分离参数，避开参数对导数的影响（高中常用的思想）.

类题 2 (2011 年) 求方程$k\arctan x-x=0$的不同实根的个数，其中k为参数.

解： ① $x=0$ 时，恒成立（对任意 k 成立） 导数的几何应用（习题中）00:20:05

② $x\neq0$时$\Leftrightarrow k=\dfrac{x}{\arctan x}$，令$f(x)=\dfrac{x}{\arctan x}(x>0)$，$f'(x)=\dfrac{\arctan x-\frac{x}{1+x}}{(\arctan x)^2}=\dfrac{(1+x^2)\arctan x-x}{(\arctan x)^2(1+x^2)}$

$\Rightarrow g(x)=(1+x^2)\arctan x-x,g'(x)=2x\arctan x>0,g(0)=0$

$x>0,g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)\nearrow$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，即，当$k\leq1$时，无交点

$k>1$ 时，有两个交点

综上，$k\leq1$，原方程有一个根；$k>1$，原方程有三个根

注： 一定要注意变形时产生的新的无定义点，这可能会导致你数漏某些根！

例题 9 (1993 年) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 满足 $f'(x)\geq k>0$，$f(0)<0$，证：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有且仅有一个零点.

解： 令 $F(x)=f(x)-[kx+f(0)]$，$F(0)=0$　　导数的几何应用（习题中）00:30:57

$F'(x)=f'(x)-k\geqslant 0\Rightarrow F(x)\nearrow\Rightarrow x\geqslant 0$ 时，$F(x)\geqslant 0$

$\Rightarrow f(x)\geqslant kx+f(0)$，令 $x\to+\infty\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，有 $f(0)<0$，$f(x)$ 单调

得证，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有且仅有一个零点

注： 请思考，是否能将条件中的“$f'(x)\geq k>0$”替换为“$f'(x)>0$”呢？你联想到了哪个定理呢？

类题 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，$f(0)=0$，$f'(0)<0$，$f''(x)\geq M>0$，则方程 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内不同实根的个数为______.　　导数的几何应用（习题中）00:54:03

解： 令 $F(x)=f'(x)-[Mx+f'(0)]$，$F(0)=0$，$F'(x)=f''(x)-M\geqslant 0$

$\Rightarrow F(x)\nearrow\Rightarrow x\geqslant 0$ 时，$F(x)\geqslant 0\Rightarrow f'(x)\geqslant Mx+f'(0)$，令 $x\to+\infty\Rightarrow f'(+\infty)=+\infty$，得出函数 $f(x)$ 的图

例题 10 曲线 $y=a^x$ 与直线 $y=x$ 有交点的充要条件是 $a\in$________________

例题 11 设 $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$（$a_i$ 均为常数），证明方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 至少有一个解.

解： $f(x)=a_0x+\dfrac{a_1}{2}x^2+\dfrac{a_2}{3}x^3+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$　　导数的几何应用（习题中）01:02:46

$f(0)=0,f(1)=a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$

由罗尔定理可得，$\exists\xi\in(0,1)\ s.t.f'(\xi)=0$,

故，$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一根

题型四 抽象函数的单调性与凹凸性

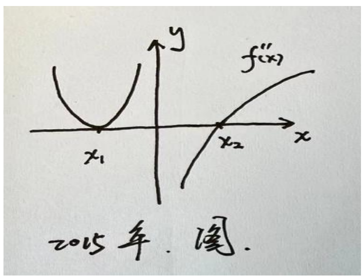
所谓抽象函数，指的是表达式未完全给出的函数. 判断抽象函数的单调性与极值、凹凸性与拐点是考研数学**选择题中的重要考点，且得分率很低**，所以大家一定要彻底掌握这个题型，争取拉开差距.

（一）未给出函数表达式，但给出了导函数的图像

例题 12 (2015 年) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，$f''(x)$ 的图像如图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为(　　)

A. 0　　B. 1　　导数的几何应用（习题下）01:57

C. 2　　D. 3



解： 可能是拐点的点：二阶导不存在的点，二阶导为零的点，这些点中二阶导

正负发生变化的点就是拐点

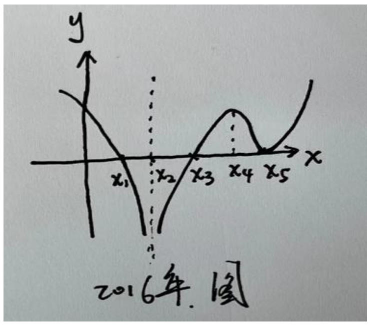
例题 13 (2016 年) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，$f'(x)$ 的图像如图所示，则(　　)

A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点. 导数的几何应用（习题下）05:46

B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点.

C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点.

D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.



解： 对于连续函数，极值点就是一阶导正负发生改变的点

拐点是连续曲线上凹凸性发生改变的点，而凹凸性是由二阶导的正负决定的

而二阶导的正负是由一阶导的单调性决定的

（二）未给出函数表达式，但给出了一个微分方程

例题 14 (1988 年) 设 $y=f(x)$ 是 $y''-2y'+4y=0$ 的解，且 $f(x_0)>0$，$f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处(　　)

A. 取得极大值.　　　　B. 取得极小值.　　　　导数的几何应用（习题下）14:02

C. 某邻域内单调增加.　　　　D. 某邻域内单调减少.

解： $y''(x_0)+4y(x_0)=0 \Rightarrow y''(x_0)=-4y(x_0)<0 \Rightarrow x=x_0$ 为极大值点

类题 1 (2000 年) 设 $f(x)$ 满足 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则（　）导数的几何应用（习题下）26:47

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

C. 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解： 令 $x=0 \Rightarrow f''(0)=0$，对题干方程求导：$f'''(x)+2f'(x)\cdot f''(x)=1$，令 $x=0 \Rightarrow f'''(0)=1\neq 0$

类题 2 设 $f(x)$ 满足 $f''(x)+(1-\cos x)f'(x)+xf(x)=\sin x$，$f(0)=2$，则（　　）

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.　　　　导数的几何应用（第4次）00:00:20

B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

C. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 的左邻域内是凹的，右邻域是凸的.

D. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 的左邻域内是凸的，右邻域是凹的.

解： $x=0 \Rightarrow f''(0)=0$

对题干微分方程求导：$f'''(x)+\sin x f'(x)+(1-\cos x)f''(x)+f(x)+xf'(x)=\cos x$

令 $x=0, f'''(0)+2=1$

$\Rightarrow f'''(0)=-1<0 \Rightarrow f''(x)$ 在 $x=0$ 左高右低，左正右负

例题 15 设$f(x)$在$x=0$的邻域内二阶可导，$f'(0)=0$，且$\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)f''(x)-xf'(x)=\mathrm{e}^{x}-1$，则（　　）

A. $x=0$是$f(x)$的极大值点.　　导数的几何应用（第4次）00:10:53

B. $x=0$是$f(x)$的极小值点.

C. 曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$的左邻域内是凹的，右邻域是凸的.

D. 曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$的左邻域内是凸的，右邻域是凹的.

解： 令$x=0\Rightarrow 0=0$没用

$x\neq 0$时，$f''(x)=\dfrac{xf'(x)+\mathrm{e}^{x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f''(x)=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf'(x)+\mathrm{e}^{x}-1}{x}=3\left[\lim\limits_{x\to 0}f'(x)+1\right]=3$

① 若$f''(0)\neq 3$，则$x=0$是$f''(x)$的可去间断点

但是：导函数无第一类间断点，故矛盾，得出$f''(0)=3>0$

② $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}f''(x)=3$，故$f(0)$是极小值

例题 16 设$f(x)$在$[a,b]$二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，且$f''(x)+[f'(x)]^{2}-2024f(x)=0$，则在$(a,b)$内（　　）

A. $f(x)<0$　　B. $f(x)>0$　　C. $f(x)\equiv 0$　　D. $f(x)$正负无法确定.

解： 请先回顾例 14 题，思考二者的区别　　导数的几何应用（第4次）00:24:08

将例 16 转化成例 14 所给的条件

假设$\exists x_1\in(a,b)\ s.t. f(x_1)>0\Rightarrow f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值，一定为正

且在(a,b)内取到，假设最大值为$f(c)>0$，其中$c\in(a,b)\Rightarrow f(c)>0$且$f'(c)=0$

代入微分方程$\Rightarrow f''(c)-2024f(c)=0\Rightarrow f''(c)>0$

$\Rightarrow f(c)$是极小值，矛盾$\Rightarrow f(x)\leqslant 0$恒成立，同理$f(x)\geqslant 0$，得出$f(x)\equiv 0$

类题 设$f(x)$在$[a,b]$二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，且$f''(x)+\cos[f'(x)]=\mathrm{e}^{f(x)}$，证明：$f(x)\equiv 0$.

解： 反证法　　导数的几何应用（第4次）00:54:41

① 假设$\exists x_1\in(a,b)\ s.t. f(x_1)>0\Rightarrow$最大值$f(c)>0$且$c\in(a,b)$

由费马定理可得$f'(c)=0\Rightarrow f''(c)+\cos[f'(c)]=\mathrm{e}^{f(c)}\Rightarrow f''(c)=\mathrm{e}^{f(c)}-1>0\Rightarrow f(c)$是极小值

矛盾$\Rightarrow f(x)\leqslant 0$

② 同理，$f(x)\geqslant 0\Rightarrow f(x)\equiv 0$

（三）未给出函数表达式，但给出了相关的函数极限（几乎都可以用特值法）

例题 17 (2001 年) 设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，则（　　）

A. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.　　　导数的几何应用（第4次）01:03:37

B. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

C. 点 $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

D. $f(a)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解：法一： 取 $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x-a)^2$

法二： 由于 $x-a\to 0$，故 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=0$，又由于 $f'(x)$ 在 $x=a$ 连续 $\Rightarrow f'(a)=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=-1\Rightarrow f''(a)=-1<0$$

法三： $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1<0\Rightarrow \exists\delta>0 s.t. 0<|x-a|<\delta$ 时，$\dfrac{f'(x)}{x-a}<0$

$\Rightarrow x\in(a,a+\delta)$ 时，$f'(x)<0$,$f(x)\searrow$；$x\in(a-\delta,a)$ 时，$f'(x)>0,f(x)\nearrow$

类题 1 (1987 年) 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在 $x=a$ 处（　　）　　导数的几何应用（第4次）01:13:41

A. $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$.　　B. $f(x)$ 取得极大值.

C. $f(x)$ 取得极小值.　　D. $f(x)$ 的导数不存在.

解： $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1<0,(x-a)^2>0,f(x)-f(a)<0,f(x)<f(a)$，取得极大值，选 B

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\cdot\dfrac{1}{(x-a)}=-1,\ \dfrac{1}{(x-a)}\to\infty,\ \dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\to 0$，排除 A,C,D

类题 2 (1990 年) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$（　　）

A. 不可导.　　B. 可导，且 $f'(0)\neq 0$.

C. 取得极大值.　　D. 取得极小值.　　导数的几何应用（第4次）01:16:11

解：法一： 取 $f(x)=x^2$

法二： 由保号性可得，在 $x=0$ 的去心邻域，$f(x)>0$，又由于 $f(0)=0$，极小值

例题 18 设函数$f(x)$具有四阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^4}=1$，则(　　)　　导数的几何应用（第4次）01:22:49

A. 点$(0,0)$为曲线$y=f'(x)$的拐点，$x=0$是$f''(x)$的极小值点.

B. 点$(0,0)$为曲线$y=f'(x)$的拐点，$x=0$是$f''(x)$的极大值点.

C. 点$(0,0)$为曲线$y=f''(x)$的拐点，$x=0$是$f'(x)$的极小值点.

D. 点$(0,0)$为曲线$y=f''(x)$的拐点，$x=0$是$f'(x)$的极大值点.

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+o(x^4)}{x^4}=1$

$\Rightarrow f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$， $f^{(4)}(0)=4!=24>0$

对于$f'(x)$而言，一阶，二阶为零，三阶不为零，拐点

对于$f''(x)$而言，一阶为零，二阶大于零，极小点

题型五 利用凹凸性的几何意义快速解题

例题 19 (2006 年) 设$y=f(x)$具有二阶导数，且$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx为自变量x在x_0处的增量，Δy和$\mathrm{d}y$分别为$f(x)$在点x_0处对应的增量与微分. 若$\Delta x>0$，则（　　）　　导数的几何应用（第4次）01:35:27

A. $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　　B. $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

C. $\Delta y<\mathrm{d}y<\Delta x$.　　D. $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

解： $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)>0$

$dy=f'(x_0)\Delta x>0$

$\Delta y-dy=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\Delta x=f'(\xi)\Delta x-f'(x_0)\Delta x=f''(\theta)(\xi-x_0)\Delta x>0$

例题 20 设$f(x)$可导，$f''(x)<0$，$f(0)=0$，则当$0<x<1$时，正确的是（　　）（换一个分类）

A. $\dfrac{f(x)}{x}>f'(0)$.　　B. $\dfrac{f(x)}{x}<f(1)$.

C. $f(1)<\dfrac{f(x)}{x}<f'(0)$.　　D. $f'(0)<\dfrac{f(x)}{x}<f(1)$.

导数的几何应用（第4次）01:42:20

解： $f''(0)<0$，为凸函数

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$，$f(1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}$，显然$f(1)<\dfrac{f(x)}{x}<f'(0)$

例题 21 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)$，$f''(x)\neq 0$，则下列正确的是（　　）

A. 至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=0$　　导数的几何应用（第4次）01:47:44

B. 在$(0,1)$内，$f'(x)\neq 0$

C. 存在唯一一点$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$

D. 至少存在不同的两点$\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$

解： $f''(x)\neq 0 \Rightarrow f''(x)>0$ 或者 $f''(x)<0$

对 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内使用罗尔定理可得，$\exists \xi\in(0,1)\, s.t. f'(\xi)=0$

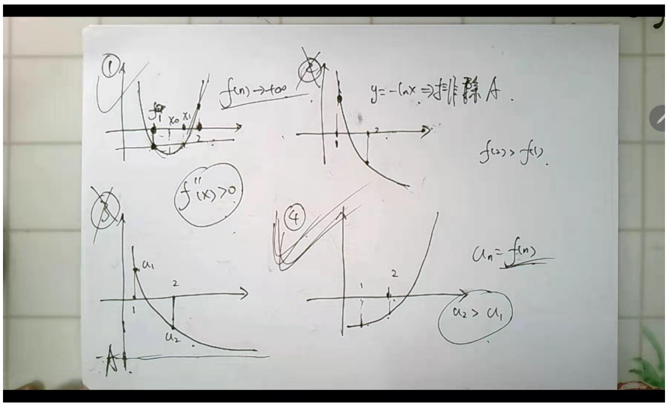
D 对 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 使用罗尔定理可得，$f''(\theta)=0, \theta\in(\xi_1,\xi_2)$ 矛盾

例题 22 (2007 年) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)\,(n=1,2,\cdots)$，则(　　)

A. 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　B. 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散.

C. 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　D. 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散.

解： $f''(x)>0$，$f(x)$ 的图像由四种情况：　　导数的几何应用（第4次）01:58:54



由② 排除 A，由③ 排除 B，由① 排除 C

例题 23 设 $f(x)$ 在 $(1-\delta,1+\delta)$ $(\delta>0)$ 内存在导数，$f'(x)$ 严格单调减少，且 $f(1)=f'(1)=1$，则 (　　)

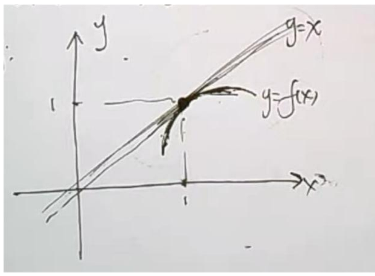
A. 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内，均有 $f(x)<x$

B. 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内，均有 $f(x)>x$

C. 在 $(1-\delta,1)$ 内，$f(x)<x$；在 $(1,1+\delta)$ 内，$f(x)>x$

D. 在 $(1-\delta,1)$ 内，$f(x)>x$；在 $(1,1+\delta)$ 内，$f(x)<x$

导数的几何应用（第4次）01:53:44



解： 将 $y=f(x), y=x$ 画在一个坐标系内，并且满足 $f(1)=1, f'(1)=1$，即 $(1-\delta,1+\delta), f(x)\leq x$