不定积分（理论与入门习题）

一、原函数与不定积分

设$f(x)$和$F(x)$都是定义在区间I上的函数，若$F'(x)=f(x)$恒成立，则称$F(x)$为$f(x)$在区间I上的一个原函数. 很显然，$f(x)$的不同原函数之间只相差不同常数（常函数求导为 0）.

将$f(x)$的全体原函数称为$f(x)$的不定积分，记为$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，其中$C$为任意常数.

注：从定义可以看出，求不定积分和求导互为逆运算.（所以我们经常说，导出来、积回去…嗯）

二、不定积分基本公式（背，和求导公式差不多）

1. $\int k\mathrm{d}x=kx+C$ （k 为常数）

2. (1) $\int x^a\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a+1}x^{a+1}+C\ (a\neq -1)$ (2) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

3. (1) $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C\ (a>0,\ a\neq 1)$ (2) $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$

4. (1) $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$ (2) $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

(3) $\int \tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$ (4) $\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$

(5) $\int \sec x\mathrm{d}x=\ln|\tan x+\sec x|+C$ (6) $\int \csc x\mathrm{d}x=\ln|\cot x-\csc x|+C$

(7) $\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$ (8) $\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$

(9) $\int \tan x\cdot\sec x\mathrm{d}x=\sec x+C$ (10) $\int \cot x\cdot\csc x\mathrm{d}x=-\csc x+C$

5. (1) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$ (2) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)+C\ (a>0)$

(3) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C$ (4) $\int \dfrac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)+C\ (a>0)$

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$ (6) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x=\ln\left(\dfrac{x}{a}+\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\right)+C\ (a>0)$

(7) $\int \dfrac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C\ (a>0)$

6. 线性性质：$\int [k_1f(x)+k_2g(x)]\mathrm{d}x=k_1\int f(x)\mathrm{d}x+k_2\int g(x)\mathrm{d}x$.

注：以上公式必须牢牢记住，也建议大家推导一遍.

三、四大核心计算方法——凑微分、换元法、分部积分、有理函数积分

（一）凑微分法

该方法几乎随时都在用，十分重要，它是“复合函数求导法则”的逆用，主要涉及的公式是$y'\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$.

比如，$\int\cos(x^2)\cdot 2x\mathrm{d}x=\int\cos(x^2)\mathrm{d}(x^2)=\sin(x^2)+C$.

再比如，$\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(x^2+1)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

将这两道题的方法抽象出来，即——

$\int f[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x=\int f[g(x)]\mathrm{d}g(x)=F[g(x)]+C$，其中$F(x)$是$f(x)$的一个原函数.

可以看出，凑微分的作用是“将凑进去的部分当成一个整体，以简化计算”.

注：以下是一些简单且常用的凑微分（不用背，但需要熟悉）——

(1) $\int f(ax^n+b)\cdot x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(x^n)=\frac{1}{an}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b)$

(2) $\int\frac{1}{2\sqrt{x}}f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x}\right)$

(3) $\int\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=-\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$

(4) $\int\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$　推广：$\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{f(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$

(5) $\int\frac{1}{x}f(\ln x)\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$

(6) $\int(1+\ln x)f(x\ln x)\mathrm{d}x=\int f(x\ln x)\mathrm{d}(x\ln x)$

(7) $\int\cos x\cdot f(\sin x)\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$

(8) $\int\sin x\cdot f(\cos x)\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$

(9) $\int\sec^2x\cdot f(\tan x)dx=\int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$

(10) $\int(\tan x\cdot\sec x)\cdot f(\sec x)\mathrm{d}x=\int f(\sec x)\mathrm{d}(\sec x)$

(11) $\int\frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$

(12) $\int\frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$

(13) 类似的凑微分，非常多…

（二）换元法

换元法（也叫变量替换）是一种应用范围非常广泛的数学思想方法.

在不定积分中，换元法的目的是将那些不便于直接积分的东西，通过变量替换给消去，以达到简化被积函数的作用.

比如，被积函数中出现了$\sqrt{x}$，如$\int\sqrt{x}\,f(x)\mathrm{d}x$的计算，我们可以令$\sqrt{x}=t$，就将根号去掉了，反解出$x=t^2$，两边微分，得$\mathrm{d}x=\mathrm{d}(t^2)=2t\mathrm{d}t$，故$\int\sqrt{x}\,f(x)\mathrm{d}x=\int 2t^2 f(t^2)\mathrm{d}t$，这样就没有根号了.

再比如，在二重积分中，若被积函数里出现了$\sqrt{x^2+y^2}$，那么就可以用极坐标换元，令$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，则$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=r$，这样也就去掉了根号，大大简化了被积函数.

在总结一般性的结论之前，我们先通过两个简单的例子直观感受一下换元法的威力——

示例 1 求$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$

解：令$\sqrt{x}=t$，故$x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，$I=\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=\int\frac{2t\mathrm{d}t}{t(1+t^2)}=\int\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\arctan t+C$.

最后不要忘了将变量换回去，即$I=2\arctan\sqrt{x}+C$.

示例 2 求$\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$

解：如果仍然令$\sqrt{4-x^2}=t$，表面上是消去了根号，但是我们计算$\mathrm{d}x$时，需要反解x，这仍然很复杂！

令$x=2\sin t$，故$\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$，故$\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{2\cos t\mathrm{d}t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}=\int\frac{2\cos t}{2\cos t}\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}t=t+C$.

最后不要忘了将变量换回去，即$t=\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$，故$I=\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+C$.

总结：见到被积函数中出现以下标志，就可选择相对应的换元，从而简化被积函数——

(1) 出现$\sqrt{\text{一次函数}}$、$\sqrt{\frac{\text{一次函数}}{\text{一次函数}}}$、$\sqrt{a\cdot\mathrm{e}^x+b}\Rightarrow$ 令整个根号等于t；

(2) 出现$\sqrt{a^2-x^2}\Rightarrow$ 令$x=a\cdot\sin t$或$x=a\cdot\cos t$；

(3) 出现$\sqrt{a^2+x^2}\Rightarrow$ 令$x=a\cdot\tan t$；

(4) 出现$\sqrt{x^2-a^2}\Rightarrow$ 令$x=a\cdot\sec t$.

示例 1 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

解： 令 $\sqrt{x}=t, x=t^2, dx=2tdt \Rightarrow I=2\int \frac{t+1-1}{1+t}dt=2[t-\ln|1+t|]+C=2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$

示例 2 $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

解法一： 令 $x=\sin t \Rightarrow dx=\cos tdt, I=\int \frac{\cos tdt}{\sin t\ \cos t}=\int \csc tdt=\ln|\csc t-\cot t|+C=\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$

解法二： $I=\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}dx=-\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}}d\frac{1}{x}$

$=-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right|+C=-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$

$=\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+C=\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$

示例 3 $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x\ \ (a>0)$

解法一： $I=\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx=\frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\frac{x}{a}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

解法二： 令 $x=a\tan t, dx=a\sec^2 tdt$

$I=\int \frac{1}{a^2+a^2\tan^2 t}a\sec^2 tdt=\frac{1}{a}\int dt=\frac{1}{a}t+C=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

（三）分部积分法 $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$

分部积分的证明很简单，只需在 $(uv)'=u'v+uv'$ 的两边同时积分，得 $\int (uv)'\mathrm{d}x=\int u'v\mathrm{d}x+\int uv'\mathrm{d}x$，利用凑微分，得 $uv=\int v\mathrm{d}u+\int u\mathrm{d}v$，再移项即可得到 $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$.

可以看到，当我们要计算积分 $\int u\mathrm{d}v$ 时，可以通过分部积分，转化为计算 $\int v\mathrm{d}u$. 如果后者比前者好算，那么分部积分的目的就达到了！

先通过两个最简单的例子，来感受分部积分法的威力，并感受两道题的区别！

示例 1 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

解： $I=\int xd\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x dx=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$

示例 2 $\int x\ln x\mathrm{d}x$

解： $I=\int \ln x d\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int \frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$

总结：首先要明确，在初等函数的分类中，共有五种不同类型的函数，分别是“**对反幂三指**”，在使用分部积分时，要掌握以下两个重要原则——

(1) 如果被积函数是“不同种类的函数相乘”，那么优先考虑分部积分（什么时候用）；

(2) 按照“对反幂三指”的口诀，谁排在后面，就把谁凑到 d 后面，然后分部积分（怎么用）.

这也就解释了上面的“$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x$”是把$\mathrm{e}^x$往 d 后面凑，但是“$\int x\ln x\mathrm{d}x=\int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)$”却是把$x$往 d 后面凑.

注 1：该如何理解“对反幂三指”这个口诀呢？（谁怕求导，就要对谁求导，就要把除了它之外的其余函数凑到 d 后面去，然后分部积分，这样就对它求导了）

注 2：当被积函数是三角函数与指数函数相乘时，无论把谁凑到d后面，分部积分以后的式子都不会得到简化，这是因为三角函数和指数函数都“不怕求导”，三角函数求导仍然是三角函数，指数函数求导仍然是指数函数,所以只用一次分部积分是无法解出这类题的,所以这种题需要连续两次分部积分，并且需要满足以下条件——

① 第一次分部积分时，把谁凑到 d 后面可以；

② 第二次分部积分时，凑到 d 后面去的函数，必须和第一次的函数是相同类型.

也就是说，要么两次都把三角函数往 d 后面凑，要么两次都把指数函数往 d 后面凑.

通过这样的操作，我们在第二次分部积分以后，会出现“积分循环”，也叫“积分重现”.

示例 $\int \sin x\cdot \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

解： $I=\int \sin x d\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\sin x-\int \mathrm{e}^x\cos x dx=\mathrm{e}^x\sin x-\int \cos x d\mathrm{e}^x$

$=\mathrm{e}^x\sin x-\mathrm{e}^x\cos x-\int \mathrm{e}^x\sin x dx\Rightarrow I=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+C$

（四）有理函数的积分

1. 何为有理函数

我们将形如“$f(x)=\frac{\text{多项式}}{\text{多项式}}$”的函数称为有理函数.

当分子的最高次数低于分母的最高次数时，称其为“真分式”;

当分子的最高次数等于或高于分母的最高次数时，称其为“假分式”.

一个假分式，一定可以通过多项式除法，拆成多项式和真分式之和.

2. 真分式的积分方法

对于真分式的积分，首先需要对真分式进行裂项，我们先看几个具体的裂项结果——

(1) $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

(2) $\dfrac{1}{x^2(x+1)}=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x+1}$

(3) $\dfrac{x^2}{1-x^4}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{x+1}$

(4) $\dfrac{x^4+x^3+3x^2-1}{(1+x^2)^2(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{2x+1}{(x^2+1)^2}$

等号右边的每一项都非常简单，它们的积分是容易的. 但问题是，这些裂项是如何操作的？

其实，在裂项时，最重要的一步，就是“先预判出裂项以后的项会出现那些基本项”.

具体而言，在进行真分式的积分时，我们有如下**固定套路**——

Step1 将该真分式的分母进行因式分解(一直分解到无法再分解为止)；

Step2 然后进行裂项，裂项的原则为——

① 只要分母中含有$(x-a)^k$，则裂项后的式子中一定含有$\dfrac{A_1}{x-a}+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\dfrac{A_k}{(x-a)^k}$；

② 只要分母中含有$(x^2+px+q)^k$（注：因为分解到不能再分解了，所以这里的$p^2-4q<0$）

则裂项后的式子中一定含有$\dfrac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^1}+\dfrac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\dfrac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}$.

Step3 将裂项以后所得的所有项进行通分，根据“通分后的分子与原被积函数的分子的对应系数相等”的原则，列出待定系数满足的方程，然后解出待定系数.

这样，我们就将真分式分解成了各个最简分式之和.

Step4 对于① 中所得到的$\dfrac{1}{(x-a)^k}$，它们的积分十分容易；

对于② 中所得到的$\displaystyle\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x$，虽然其计算稍微复杂一点，但也有通用的求解方法，所以一切有理函数的积分便都可以求解了. 尤其在考研范围，分母的k要么为 1，要么为 2，不至于太高，所以我们只需要把$\displaystyle\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$和$\displaystyle\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$的计算学会就基本够用了.

我们在下面的示例 1 和示例 2 中，会详细介绍这两个积分的计算方法.

至此，整个有理函数的积分便已找到了一个完善的方法.

总之，列项以后，基本都归结于$\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x$、$\displaystyle\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$和$\displaystyle\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$三类积分.

现在，我们再回过头来看到前面的 4 个裂项的题目，自然也就有头绪了——

(1) $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}$

(2) $\dfrac{1}{x^2(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+1}$

(3) $\dfrac{x^2}{1-x^4}=\dfrac{x^2}{(1-x)(1+x)(1+x^2)}=\dfrac{Ax+B}{1+x^2}+\dfrac{C}{x-1}+\dfrac{D}{x+1}$

(4) $\dfrac{x^4+x^3+3x^2-1}{(1+x^2)^2(x-1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}+\dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

至于这些系数A,B,C怎么算，方法在前面已经说过了，就是“对右边通分，然后和左边对比，列出等式，解出系数A,B,C的值”.

可能有同学会觉得，计算量会不会大了点，于是去学各种裂项的新方法，比如所谓的“留数法”.

但其实是没有必要学这些超纲方法的，因为真题里不至于出现过于难算的题目，所以即使是用常规的待定系数法，也不会花多少时间.

注：对于某些特定的有理函数积分，可能会有更加巧妙的解法，尤其是灵活的使用凑微分，但我们应当先掌握基本方法.

示例 1 $\displaystyle\int\frac{x+3}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$

解：$I=\displaystyle\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)+2}{x^2+2x+4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx+2\int\frac{1}{x^2+2x+4}dx$

$=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+4)+2\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}d(x+1)$

$=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+4)+2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}+C$

注：通过该题，可以总结出一切$\displaystyle\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$的积分，其套路为“改造分子，拆分为两个积分，其中第一个积分直接凑微分，第二个积分配方后套公式即可.

示例 2 $\displaystyle\int\frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$

解：$I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{x}{(a^2+x^2)^2}d(x^2+a^2)=\left(-\frac{1}{2}\right)\int xd\frac{1}{x^2+a^2}=-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{x^2+a^2}-\int\frac{1}{x^2+a^2}dx\right]$

$=-\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{x^2+a^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+C$

提示：三角换元当然可行，下面的类题也是如此，大家可以尝试一下. 但是，本题是否有其它方法？

再提示：分母次数太高了，有没有什么办法可以降低分母的次数呢？（答：分部积分!）

类题 $\displaystyle\int\frac{1}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$

解：$I=\dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int\frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx=\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+a^2}\right]+C$

注：通过上面的 2 道题，我们可以推出所有形如$\displaystyle\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$的积分的计算方法.

其方法可总结为：改造分子、拆分为两个积分→对分母配方、换元→归结于计算$\displaystyle\int\frac{1}{(a^2+t^2)^2}\mathrm{d}t$；

至此，$\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x$、$\displaystyle\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$、$\displaystyle\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$这三类积分的求解方法我们都已经学会，所以，对于一切有理函数积分，我们都已经找到了完整的解题套路.

示例 3 (2019 年) $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$.

解： $\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$

$=\frac{A(x^3-1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+C=0\\B-2C+D=0\\B+C-2D=3\\-A+B+D=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B-2C+D=0\\B+C-2D=3\\B+C+D=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=3\\C=2\\D=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=(-2)\ln|x-1|+3\left(-\frac{1}{x-1}\right)+\ln(x^2+x+1)+C$$

四、入门训练

下面的 27 道题目，涵盖了本讲义中的所有方法，是学习难度更大的不定积分的前提.

并且，我对这些题目不进行任何分类和提示，目的是希望大家自己判断出是什么类型，见招拆招.

(1) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$ (2) $\int \frac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$ (3) $\int \frac{x+4}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x$

(4) $\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$ (5) $\int \frac{1+\ln x}{x\ln x(1+x\ln x)}\mathrm{d}x$ (6) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\mathrm{d}x$ (8) $\int \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (9) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\mathrm{d}x$

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x$ (11) $\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\mathrm{d}x$ (12) $\int \frac{1}{x^4}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$

(13) $\int x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$ (14) $\int x\cdot e^{-2x}\mathrm{d}x$ (15) $\int x^2e^x\mathrm{d}x$

(16) $\int \ln x\mathrm{d}x$ (17) $\int \arctan x\mathrm{d}x$ (18) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\mathrm{d}x$

(19) $\int \cos^2 x\mathrm{d}x$ (20) $\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$ (21) $\int e^x\sin^2 x\mathrm{d}x$

(22) $\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (23) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ (24) $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

(25) $\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$ (26) $\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$ (27) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

(1) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$ 不定积分（习题1） 00:00:45

解： $I=\int\frac{1}{(x-2)(x-3)}dx=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$

(2) $\int \frac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$ 不定积分（习题1） 00:02:02

解： $I=\int \frac{1}{(x+1)^2+2}d(x+1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$

(3) $\int \frac{x+4}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x$ 不定积分（习题1） 00:04:25

解： $I=\int \frac{x+4}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x=\int \frac{x+4}{(x+2)(x+3)}dx\Rightarrow \frac{x+4}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}$

$=\frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\3A+2B=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}\Rightarrow I=2\ln|x+2|-\ln|x+3|+C$

(4) $\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$ 不定积分（习题1） 00:07:20

解： $I=\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+2}{x^2+2x+2}dx$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+2\cdot\int \frac{1}{(x+1)^2+1}d(x+1)=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+2\arctan(x+1)+C$

(5) $\int \frac{1+\ln x}{x\ln x(1+x\ln x)}\mathrm{d}x$ 不定积分（习题1） 00:12:10

解： $I=\int \frac{1}{x\ln x(x\ln x+1)}d(x\ln x)=\ln\left|\frac{x\ln x}{x\ln x+1}\right|+C$

(6) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$ 不定积分（习题1） 00:13:50

解： 令 $\sqrt{x}=t,x=t^2,dx=2tdt,I=\int \frac{\arctan t}{t(1+t^2)}\cdot 2tdt=(\arctan t)^2+C=\left(\arctan\sqrt{x}\right)^2+C$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\mathrm{d}x$ 不定积分（习题1） 00:17:15

解法一： $I=\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}=\int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}d(x-2)=\arcsin\frac{x-2}{2}+C$

解法二： $I=\int \frac{2}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{4-x}}dx=\int \frac{2}{\sqrt{2^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}}d\sqrt{x}=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C$

(8) $\int \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}dx$ 不定积分（习题1） 00:29:02

解： 令 $x=t^6,dx=6t^5dt\Rightarrow I=\int \frac{6t^2}{(1+t^2)}dt=6\int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt=6[t-\arctan t]+C$

$=6\left[\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right]+C$

(9) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\mathrm{d}x$ 不定积分（习题1） 00:32:27

解： 令 $\sqrt{\frac{x+1}{x}}=t\Rightarrow 1+\frac{1}{x}=t^2\Rightarrow x=\frac{1}{t^2-1}\Rightarrow dx=-\frac{1}{(t^2-1)^2}2tdt$ 代入得

$I=\int (t^2-1)t(-2)\frac{t}{(t^2-1)^2}dt=(-2)\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=(-2)\int dt+(-2)\int \frac{1}{t^2-1}dt=\cdots$

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx$ 不定积分（习题1） 00:35:40

解： 令 $\sqrt{e^x-1}=t \Rightarrow x=\ln(1+t^2), dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$

代入得，$I=\int \frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt=2\arctan\sqrt{e^x-1}+C$

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$ 不定积分（习题1） 00:40:45

解： $x=\tan t \Rightarrow dx=\sec^2 tdt$

$I=\int \frac{1}{\sec^3 t}\sec^2 tdt=\int \cos tdt=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$

(12) $\int \frac{1}{x^4}\sqrt{4-x^2}dx$ 不定积分（习题1） 00:45:44

解： 令 $x=2\sin t \Rightarrow dx=2\cos tdt \Rightarrow I=\int \frac{1}{16\sin^4 t}\cdot 4\cos^2 t=\frac{1}{4}\int \cot^2 t\cdot\csc^2 tdt$

$=\left(-\frac{1}{4}\right)\int \cot^2 td\cot t=-\frac{1}{12}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right)^3+C$

(13) $\int x\sqrt{2x-x^2}dx$ 不定积分（习题1） 00:52:44

解： 令 $x-1=\sin t, dx=\cos tdt$

$I=\int x\cdot\sqrt{1-(x-1)^2}dx=\int (1+\sin t)\cos^2 tdt=\int \sin t\cos^2 tdt+\int \cos^2 tdt$

$=-\frac{1}{3}\cos^3 t+\frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt=-\frac{1}{3}\cos^3 t+\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t\cos t+C$

其中 $t=\arcsin(x-1)$

(14) $\int x\cdot e^{-2x}dx$ 不定积分（习题1） 01:01:28

解： $I=\left(-\frac{1}{2}\right)\int xde^{-2x}=-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$

(15) $\int x^2e^x dx$ 不定积分（习题1） 01:03:14

解： $I=\int x^2de^x=x^2e^x-2\int xe^xdx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C=(x^2-2x+2)e^x+C$

(16) $\int \ln x dx$ 不定积分（习题1） 01:05:06

解： $I=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C$

(17) $\int \arctan x dx$ 不定积分（习题1） 01:06:38

解： $I=x\arctan x-\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

(18) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x dx$ 不定积分（习题1） 01:10:00

解： $I=\int \arctan x dx-\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$

(20) $\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$　　不定积分（习题1） 01:11:42

解： $I=\int x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\int xdx-\int x\cos 2xdx\right]$

对 $\int x\cos 2xdx$ 使用分部积分即可

(21) $\int \mathrm{e}^x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$　　不定积分（习题1） 01:14:31

解： $I=\int \mathrm{e}^x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x\cos 2xdx$

令 $J=\int \mathrm{e}^x\cdot\cos 2xdx$

$J=\int \mathrm{e}^x\cdot\cos 2xdx=\int \cos 2xd\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\cos 2x+2\int \mathrm{e}^x\sin 2xdx=\mathrm{e}^x\cos 2x+2\int \sin 2xd\mathrm{e}^x$

$=\mathrm{e}^x\cos 2x+2\mathrm{e}^x\sin 2x-4\int \mathrm{e}^x\cos 2xdx\Rightarrow J=\frac{\mathrm{e}^x}{5}(\cos 2x+2\sin 2x)+C'$

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{10}\mathrm{e}^x(\cos 2x+2\sin 2x)+C$

(22) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　不定积分（习题1） 01:26:40

解： 令 $\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2,dx=2tdt\Rightarrow I=2\int t^2\mathrm{e}^t dt$，与 15 题相同

(23) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$　　不定积分（习题1） 01:29:26

解： 令 $x=\sin t,dx=\cos tdt\Rightarrow I=\int \frac{\sin t\cdot t}{\cos t}\cos tdt=\int t\sin tdt$

分部积分即可

① $I=\int x\arcsin xd(\arcsin x)$

② $I=-\int \arcsin xd\sqrt{1-x^2}$

(24) $\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$　　不定积分（习题1） 01:42:28

解： $x=\tan t,dx=\sec^2 tdt\Rightarrow I=\int \frac{\mathrm{e}^t}{\sec t}dt=\int \cos t\cdot\mathrm{e}^t dt$

换元以后，变成 21 的那一类题

(25) $\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$　　不定积分（习题1） 01:45:57

解： $I=x\ln(1+x^2)-\int x\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx=x\ln(1+x^2)-2\int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx$

$=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$

(26) $\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$ 不定积分（习题1） 01:47:47

解： $I=\frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)d(x^2+1)=\frac{1}{2}(x^2+1)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2+C$

(27) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$ 不定积分（习题1） 01:55:41

解法一： 令 $x=\tan t, dx=\sec^2 dt \Rightarrow I=\int \frac{\ln\tan t}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t dt=\int \cos t\cdot\ln\tan t dt$

$=\int \ln\tan t d\sin t=\sin t\ln\tan t-\int \sin t\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\frac{1}{\cos^2 t}dt=\sin t\ln\tan t-\ln|\tan t+\sec t|+C$

根据$x=\tan t$，将t回代成x即可

解法二： $I=\int \ln x d\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$