CHAPTER 3

Exponential and Logarithm Function (Fungsi Eksponensial dan Logaritma)

Minggu ke-16

3.4 Equations of The Exponential or Logarith Form (Persamaan Berbentuk Eksponen atau Logaritma)

CONTOH 1

$3^{2x+5} = 1$

Berdasarkan sifat, maka :

$2x + 5 = 0$

$2x = -5$

$x = \frac{-5}{2}$

A. Persamaan Eksponen

1. Bentuk

$$a^{f(x)} = 1 \Rightarrow f(x) = 0, \text{ karena } a^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow a^{f(x)} = a^0$$

2. Bentuk

Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ maka $f(x) = g(x)$

Contoh 2

Tentukan penyelesaian dari $2^{2x-7} = 8^{1-x}$

Jawab :

Langkah pertama, samakan basis pada kedua ruas.

$2^{2x-7} = 8^{1-x}$

$2^{2x-7} = (2^3)^{1-x}$

$2^{2x-7} = 2^{3-3x}$

Karena basisnya sama, berdasarkan sifat   diperoleh

$2x - 7 = 3 - 3x$

$5x = 10$

$x = 2$

Jadi, penyelesaiannya adalah $x = 2$

3. Bentuk

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Longrightarrow \log a^{f(x)} = \log b^{g(x)}$$

Contoh 3

Tentukan penyelesaian dari $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 6^{1-x}$

$\log \left(\frac{2}{3}\right)^x = \log 6^{1-x}$

$x \log \left(\frac{2}{3}\right) = (1 - x) \log 6$ $\quad \log a^n = n \log a$

$x \log \left(\frac{2}{3}\right) = \log 6 - x \log 6$

$x \log \left(\frac{2}{3}\right) + x \log 6 = \log 6$

$x \left(\log \left(\frac{2}{3}\right) + \log 6\right) = \log 6$

$x \log 4 = \log 6$ $\quad \log a + \log b = \log (ab)$

$x = \dfrac{\log 6}{\log 4}$

$x = {}^{4}\log 6$

Jadi, penyelesaiannya adalah $x = {}^{4}\log 6$

4. $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ dengan $a \neq b, a > 0, b > 0$ dan $a \neq 1, b \neq 1$, gunakan sifat:

$$\boxed{a^{f(x)} = b^{f(x)} \Rightarrow f(x) = 0}$$

CONTOH 4

Tentukan penyelesaian dari $3^{2x-2} = 5^{x-1}$

$3^{2x-2} = 5^{x-1}$

$3^{2(x-1)} = 5^{x-1}$

$9^{x-1} = 5^{x-1}$

Berdasarkan sifat maka

$x - 1 = 0$

$x = 1$

Jadi, penyelesaiannya adalah $x = 1$

5. Bentuk

$h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$, terdefinisi dengan tahap penyelesaian

(i) Eksponen disamakan: $f(x) = g(x)$

(ii) Misalkan $h(x) = 1$, karena $1^{f(x)} = 1^{g(x)} = 1$.

(iii) Misalkan $h(x) = -1$, asalkan $f(x)$ dan $g(x)$ sama-sama ganjil atau sama-sama genap.

(iv) Misalkan $h(x) = 0$, asalkan $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

CONTOH 5

Tentukan HP dari $(x - 4)^{4x} = (x - 4)^{1+3x}$

Jawab :

Misalkan : $f(x) = x - 4$, $g(x) = 4x$ dan $h(x) = 1 + 3x$

Solusi 1 : $g(x) = h(x)$

$4x = 1 + 3x$

$x = 1$ ✓

Solusi 2 : $f(x) = 1$

$x - 4 = 1$

$x = 5$ ✓

Solusi 3 : $f(x) = -1$, $g(x)$ dan $h(x)$ keduanya genap/ganjil.

$x - 4 = -1$

$x = 3$ ✓

Periksa : Untuk $x = 3$ maka

$g(x) = 4(3) = 12$ (genap)

$h(x) = 1 + 3(3) = 10$ (genap)

Karena keduanya genap, maka $x = 3$ memenuhi.

Solusi 4 : $f(x) = 0$, $g(x)$ dan $h(x)$ keduanya positif.

$x - 4 = 0$

$x = 4$ ✓

Periksa : Untuk $x = 4$ maka

$g(x) = 4(4) = 16$ (positif)

$h(x) = 1 + 3(4) = 13$ (positif)

Karena keduanya positif, maka $x = 4$ memenuhi.

Catatan : Jika seandainya salah satu atau keduanya bernilai ≤ 0, maka $x = 4$ tidak memenuhi.

$\therefore$ HP = $\{1, 3, 4, 5\}$

6. Bentuk

Jika $f(x)^{h(x)} = g(x)^{h(x)}$ maka

(1) $f(x) = g(x)$

(2) $f(x) = -g(x)$, dengan syarat $h(x)$ genap

(3) $h(x) = 0$, dengan syarat $f(x) \neq 0$ dan $g(x) \neq 0$

Tentukan HP dari $(2x + 1)^{x-6} = (x + 5)^{x-6}$

Jawab :

Misalkan : $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x + 5$ dan $h(x) = x - 6$

Solusi 1 : $f(x) = g(x)$

$2x + 1 = x + 5$

$x = 4$ ✓

Solusi 2 : $f(x) = -g(x)$, dengan syarat $h(x)$ genap

$2x + 1 = -(x + 5)$

$2x + 1 = -x - 5$

$3x = -6$

$x = -2$ ✓

Periksa :

Untuk $x = -2 \longrightarrow h(x) = -2 - 6 = -8$ (genap)

Karena $h(x)$ genap, maka $x = -2$ memenuhi.

Solusi 3 : $h(x) = 0$, dengan syarat $f(x) \neq 0$ dan $g(x) \neq 0$

$x - 6 = 0$

$x = 6$ ✓

<u>Periksa</u> : Untuk $x = 6$ maka

$f(x) = 2(6) + 1 = 13 \neq 0$

$g(x) = 6 + 5 = 11 \neq 0$

Karena keduanya $\neq 0$, maka $x = 6$ memenuhi.

Catatan : Jika seandainya salah satu atau keduanya bernilai nol, maka $x = 6$ tidak memenuhi.

$\therefore$ HP = {-2, 4, 6}

7. Jika $A \cdot a^{f(x)^2} + B \cdot a^{f(x)} + C = 0$, maka penyelesaiannya diarahkan ke bentuk persamaan kuadrat $Ax^2 + Bx + C = 0$, lalu menentukan penyelesaian persamaan kuadratnya.

Sebagai contoh diketahui sebuah persamaan eksponen:

$$(2x+7)^2 - 4(2x+7) + 3 = 0.$$

Maka penyelesaiannya adalah dengan memisalkan persamaan tersebut menjadi:

Misalkan (2x + 7) = y → $y^2 - 4y + 3 = 0$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

sehingga

$$(y-3)(y-1) = 0$$

$y_1 = 3$ dan $y_2 = 1$

diperoleh,

$y_1 = 2x + 7$	$y_2 = 2x + 7$
$3 = 2x + 7$	$1 = 2x + 7$
$x = -2$	$x = -3$

CONTOH

Akar – akar persamaan $3^{2x+1} - 28.3^x + 9 = 0$ adalah x_1 dan x_2. Jika x1 > x2, maka nilai $3x_1 - x_2 = \ldots$

Pembahasan :

$3^{2x}.3^1 - 28.3^x + 9 = 0$

$3.(3^x)^2 - 28.3^x + 9 = 0$

Misal : $3^x = p$

$3p^2 - 28p + 9 = 0$

$(3p - 1)(p - 9) = 0$

$3p - 1 = 0$ atau $p - 9 = 0$

$3p = 1$ atau $p = 9$

$p = \frac{1}{3}$ atau $p = 9$

Substitusikan nilai p pada persamaan $3^x = p$

$3^x = \frac{1}{3}$ atau $3^x = 9$

$3^x = 3^{-1}$ atau $3^x = 3^2$

$x = -1$ atau $x = 2$ (karena x1 > x2, maka x1 = 2 dan x2 = –1)

Substitusikan nilai x1 dan x2, maka akan didapat $3(2) - (-1) = 7$

KUIS

1. Nilai x yang memenuhi persamaan $\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{1}{9^{2-x}}}}{27} = 3^{x+1}$ adalah . . .

2. Akar – akar persamaan $2.3^{4x} - 20.3^{2x} + 18 = 0$ adalah x_1 dan x_2. Nilai $x_1 + x_2$ = ...