Markovketten

geschrieben von Arne Huckemann

September 2023

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Markovprozesse mit diskreten Zustandsraum

1.1 Stochastische Prozesse und ihre Verteilung

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ eine W-Raum, (E, ϵ) ein messbarer Raum und $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge. Dabei kann

$$E = \begin{cases} \text{endlich oder abzählbar} \\ \mathbb{R}^d \\ \text{Funktionenraum} \end{cases} \qquad I = \begin{cases} \text{diskret } (\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \\ \text{Kontinuierlich } (\mathbb{R}^d, [0,\infty)^d) \end{cases}$$

Wir interpretieren E als den Zustandsraum ('Ort') und I als die 'Zeit'.

Definition 1.1.1. (stochstischer Prozess)

- Ein stochastischer Prozess auf auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten im Zustandsraum (E, ϵ) ist eine Familie $(X_t)_{t\in I}$ von ZV, die Werte in E annehmen.
- Für festes $\omega \in \Omega$ heißt die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ eine Trajektorie (Pfad, Realisierung) von $(X_t)_{t\in I}$
- Falls $I = \mathbb{N}_0$ oder $I = [0, \infty)$, so heißt die Verteilung von X_0 die Startverteilung des stochastischen Prozesses.

Bemerkung 1.1.2. Falls E diskret ist, so bezeichnet man eine Verteilung als Wahrscheinlichkeitsvektor.

Erinnerung:

- Eine Abbildung $X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (E, \epsilon)$ heißt messbar, falls

$$\forall B \in \epsilon : \; X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

- Die Verteilung $\mathbb{P}_X := \mathbb{P} \circ X^{-1}$ ist das Bildmaß auf (E, ϵ) von $\mathbb{P}$ unter X, d.h.
  Für $B \in \epsilon: \quad \mathbb{P}_X(B) := (\mathbb{P} \circ X^{-1})(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid x(\omega) \in B\})$

- Der Produktraum E^I kann als Menge aller Abbildungen von $I \longrightarrow E$ interpretiert werden:
  $\{x : I \longrightarrow E, \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ e_{i_2} \\ \vdots \end{pmatrix}\}$

Ziel des Kapitels: Charakterisierung der Verteilung des stochastischen Prozesses $(X_t)_{t \in I}$. Da für eine Zufallsvariable X auf einer Menge E und σ-Algebra ϵ das Bildmaß die Verteilung auf diesem Raum ist, sind wir an der σ-Algebra des Produktraumes E^I interessiert wegen, $(X_t)_{t \in I} \in E^I$

Frage: Wie lässt sich die zugehörige Produkt-σ-Algebra $\epsilon^{\otimes I}$ charakterisieren?

Aufgabe 1: Sei $E \neq \emptyset$ und $\mathcal{C}$ eine Familie von Teilmengen der $\mathcal{P}(E)$. Zeige, dass es eine kleinste σ-Algebra ϵ über E gibt, die $\mathcal{C}$ enthält.

Definition 1.1.3. (Produkt σ Algebra und Erzeuger) Die Produkt-σ-Algebra $\epsilon^{\otimes I}$ ist die kleinste σ-Algebra über E^I, die die Menge $\mathcal{Z}$ aller endlich dimensionalen Rechtecke (Zylindermengen) der Form

$$\{x \in E^I \mid x_{t_1} \in B_1, ..., x_{t_n} \in B_n\}$$

mit $n \in \mathbb{N}, t_1, ..., t_n \in I$ und $B_1, ..., B_n \in \epsilon$ enthält.

Aufgabe 2: Zeige, dass die Menge $\mathcal{Z}$ aller endlich-dimensionalen Rechtecke $\cap$-stabil ist.

Lemma 1.1.4. Sei $(X_t)_{t \in I}$ ein stochastischer Prozess mit Zustandsraum (E, ϵ) und sei

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (E^I, \epsilon^{\otimes I}), \omega \mapsto X(\omega) := (X_t(\omega))_{t \in I}$$

$\Rightarrow$ X ist messbar

Beweis. Übung □

Definition 1.1.5. (Verteilung eines stochastischen Prozesses)
Die Verteilung eines stochastischen Prozesse $(X_t)_{t \in I}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum (E, ϵ) ist das Bildmaß von $\mathbb{P}$ unter der vom vorherigen Lemma definierten Abbildung X: $(\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (E^I, \epsilon^{\otimes I})$.
D.h. für alle B $\in \epsilon^{\otimes I}$:

$$\mathbb{P}_X[B] = (\mathbb{P} \circ X^{-1})(B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\})$$

Frage: Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Verteilung eines stochastischen Prozesses und der Verteilung des Prozesses an endlich vielen Zeitpunkten?

Antwort: Betrachten wir nun zwei nichtleere und endliche Teilmengen einer Indexmenge $K \subseteq J \subseteq I$ und wir definieren die Abbildungen (endliche Projektionen):

$$\pi_J : E^I \longrightarrow E^J, (X_t)_{t\in I} \mapsto \pi_J((X_t)_{t\in I}) := X_{t\in J}$$

$$\pi_K^J : E^J \longrightarrow E^K, (X_t)_{t\in J} \mapsto \pi_K^J((X_t)_{t\in J}) := X_{t\in K}$$

Der Index oben steht für die Indexmenge wo wir starten und der unten für die Indexmenge wo wir hin abbilden. Nun zeigen wir zunächst die Messbarkeit von π_J:
Da $\epsilon^{\otimes J}$ von den Mengen $(\pi_{\{t\}}^J)^{-1}(A)$ mit $t \in J, A \in \epsilon$ erzeugt wird und da:

$$(\pi_J)^{-1}((\pi_{\{t\}}^J)^{-1}(A)) = (\pi_{\{t\}}^J \circ \pi_J)^{-1}(A) = (\pi_{\{t\}})^{-1}(A) \in \epsilon^{\otimes I}$$

ist π_J $(\epsilon^{\otimes I}, \epsilon^{\otimes J})$-messbar.
Aufgabe 3: Zeige, dass π_K^J $(\epsilon^{\otimes J}, \epsilon^{\otimes K})$ messbar ist.

Definition 1.1.6. (endlich dimensionale Verteilungen eines stochastischen Prozesses)
Sei $X_I = (X_t)_{t\in I}$ ein stochastischer Prozess mit dem Bildmaß P_{X_I} als Verteilung auf $(E^I, \epsilon^{\otimes I})$ und $J \subseteq I$ eine nicht-leere und endliche Teilmenge.
Wir definieren $X_J := (X_t)_{t\in J} = \pi_J((X_t)_{t\in J}) = \pi_J(X_I)$.
Dann nennen wir $\mathbb{P}_{X_J}$ die endlich-dimensionale Verteilung des stochastischen Prozesses X_I.

Notation: Für $B \in \epsilon^{\otimes J}$ ist $\mathbb{P}_{X_J}[B] = \mathbb{P} \circ ((X_t)_{t\in J})^{-1}[B] = \mathbb{P}[(X_t)_{t\in J} \in B]$

Lemma 1.1.7. Sei $X = (X_t)_{t\in I}$ ein stochastischer Prozess mit Zustandsraum (E, ϵ)

i) Für jede nicht-leere und endliche Teilmenge $J \subseteq I$ ist die Verteilung von X_J eindeutig bestimmt durch: $\mathbb{P}_{X_J} = \mathbb{P}_X \circ (\pi_J)^{-1}$

ii) Für zwei beliebige nicht-leere und endliche Teilmengen $J_1 \subseteq J_2 \subseteq I$ ist die Verteilung von X_{J_2} eindeutig bestimmt durch: $\mathbb{P}_{X_{J_1}} = \mathbb{P}_{X_{J_2}} \circ (\pi_{J_1}^{J_2})^{-1}$

Beweis.

i) Wegen $X_J = \pi_J((X_t)_{t\in I}) = \pi_J(X)$ gilt:
$\mathbb{P}_{X_J} = \mathbb{P} \circ (X_J)^{-1} = \mathbb{P} \circ (\pi_J(X))^{-1} = \mathbb{P} \circ (\pi_J \circ X)^{-1} = \mathbb{P} \circ X^{-1} \circ (\pi_J)^{-1} = \mathbb{P}_X \circ (\pi_J)^{-1}$

i) Wegen $X_{J_1} = \pi_{J_1}^{J_2}((X_t)_{t\in J_2}) = \pi_{J_1}^{J_2} \circ X_{J_2}$ mit $X_{J_2} = (X_t)_{t\in J_2}$. Die Aussage folgt dann mit dem analogen Vorgehen.

□

Bemerkung 1.1.8. Im vorherigen Satz wurde also gezeigt, dass jede endlich-dimensionale Verteilung eindeutig durch eine unendlich-dimensionale Verteilung bestimmt wird.

Frage: Ist es auch anders herum möglich, d.h. das die endlich-dimensionalen Verteilungen die unendlich-dimensionalen Verteilungen eindeutig bestimmen?
Antwort: JA! Wird in den folgenden Aussagen gezeigt.

Lemma 1.1.9. Sei $\emptyset \neq J \subseteq I$ eine beliebige endliche Teilmenge und $\mathbb{Q}_J$ das für J entsprechende W-Maß auf $(E^J, \epsilon^{\otimes J})$. Dann existiert höchstens ein W-Maß $\mathbb{Q}$ auf $(E^I, \epsilon^{\otimes I})$ mit:

$$\forall\, \emptyset \neq J \subseteq I \text{ endlich} : \mathbb{Q}_J = \mathbb{Q} \circ (\pi_J)^{-1}$$

Beweis. Da nach Aufgabe 2 die Menge $\mathcal{Z}$, welche die Menge der endlich-dimensionalen Rechtecke ist, schnittstabil ist, und nach der Definition der Produkt-σ-Algebra $\epsilon^{\otimes I}$ diese Menge ein Erzeuger von $\epsilon^{\otimes I}$ ist gilt:
$\forall\, \emptyset \neq J \subseteq I$ endlich und $\forall\, j \in J$ ist $A_j \in \epsilon$:

$$\mathbb{Q}[\{x \in E^I \mid \forall j \in J : x_j \in A_j\}] = \mathbb{Q}[(\pi_J)^{-1}(\underset{j\in J}{\times} A_j)] = (\mathbb{Q} \circ (\pi_J)^{-1})[\underset{j\in J}{\times} A_j] \overset{\text{Bildmaß}}{=} \mathbb{Q}_J[\underset{j\in J}{\times} A_j]$$

Nun folgt die Aussage mit dem Eindeutigkeitssatz von Maßen. □

Die Eindimenstionalen Verteilungen legen $\mathbb{Q}$ im Allgemeinen nicht eindeutig fest!!

Beispiel 1.1.10. Betrachte $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen und eine Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $Y_n = X_0$.

Definition 1.1.11. (Konsistente Familie von W-Maßen)
Sei für jedes $\emptyset \neq J \subseteq I$ endlich das Maß $\mathbb{Q}_J$ ein W-Maß auf $(E^J, \epsilon^{\otimes J})$. Die Familie von W-Maßen $\{\mathbb{Q}_J \mid J \subseteq I \text{ endlich}\}$ heißt konsistent falls,
$\forall\, J_1 \subseteq J_2 \subseteq I$ endlich: $\mathbb{Q}_{J_1} = \mathbb{Q}_{J_2} \circ (\pi^{J_2}_{J_1})^{-1}$ mit $\emptyset \neq J_1, J_2$

Bemerkung 1.1.12.

i) Die endlich-dimensionalen Verteilungen eines stochastischen Prozesses bilden nach definition eine Konsistente Familie

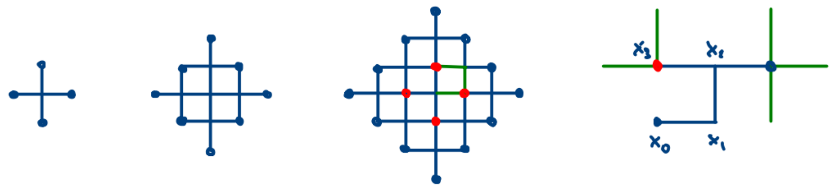
ii) Falls $I = \mathbb{N}_0$ so genügt es $J \subseteq I$ endlich so zu wählen, dass $J = \{0, ..., n\}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$

Beispiel 1.1.13. Sei $I = \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \{0, ..., n\}$ und der Zustandsraum $E = \mathbb{Z}^2$. Außerdem sei das W-Maß $\mathbb{Q}_{J_n}$ die Gleichverteilung auf der Menge:

$$A_n = \{(x_0, ..., x_n) \in E^{n+1} \mid x_0 = 0, \forall\, i = 1, .., n : \|x_{i-1} - x_i\| = 1, \forall i, j \in \{0, ..., n\} : x_i \neq x_j\}$$

Dann ist die die Familie $\{\mathbb{Q}_{J_n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht konsistent, wegen

Definition 1.1.14. (Polnischer Raum) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt polnischer Raum, falls er vollständig metrisierbar und separabel ist.



$|A_1| = 4$ $\quad$ $|A_2| = 4 \cdot 3 = 12$ $\quad$ $|A_3| = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ $\quad$ $|A_4| = 28 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 100$

Dann gilt

$$\mathbb{Q}_{\{0,\dots,3\}}\left[\{x_0,x_1,x_2,x_3\}\right] = \frac{1}{36} \neq \frac{2}{100} = \mathbb{Q}_{\{0,\dots,4\}}\left[\left(\pi^{\{0,\dots,4\}}_{\{0,\dots,3\}}\right)^{-1}\left(\{x_0,x_1,x_2,x_3\}\right)\right]$$

Bemerkung 1.1.15.

i) $(X, \mathcal{O})$ heißt vollständig metrisierbar, falls die Topologie durch eine Metrik d induziert/erzeugt wird und (X,d) ein vollständiger metrischer Raum ist.

ii) Ein metrischer Raum (X,d) heißt separabel, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge $A \subseteq X$ besitzt, d.h. $\overline{A} = X$.

Bemerkung 1.1.16. Praktisch alle Räume in der W-Theorie sind polnische Räume:

- Diskrete, abzählbare und euklidische Räume $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$)
- Raum der stetigen Funktionen $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

Satz 1.1.17. (Eindeutigkeitssatz mittel Konsistenz)
Sei (E, ϵ) ein polnischer Raum und eine konsistente Familie von W-Maßen $\{\mathbb{Q}_J \mid \emptyset \neq J \subseteq I \text{ endlich}\}$.
Dann gibt es genau ein W-Maß $\mathbb{Q}$ auf $(E^I, \epsilon^{\otimes I})$ mit der Eigenschaft:

$$\forall\, \emptyset \neq J \subseteq I \text{ endlich} : \mathbb{Q}_J = \mathbb{Q} \circ (\pi_J)^{-1} \tag{1.1}$$

Beweis. Siehe Klenke, Satz 14.36 $\square$

Bemerkung 1.1.18. Die Konstruktion von $\mathbb{Q}$ beruht auf dem Satz von Caratheodory

- Da $\mathcal{Z}$ die σ-Algebra $\epsilon^{\otimes I}$ erzeugt, ist $\sigma(\mathcal{Z})$ eine σ-Algebra und damit insbesondere auch ein Semiring.
- Der Nachweis das die Mengenfunktion $\mathbb{Q}$, die durch (1.1) definiert ist, addditiv ist, ist einfach.
- Um die σ-Subadditivität von $\mathbb{Q}$ zu zeigen, benutzt man ein Kompaktheitsargument (man benutzt die Eigenshaft, dass es sich um einen polnischen Raum handelt).

Korollar 1.1.19. Sei (E, ϵ) ein polnischer Raum und der stochastische Prozess $X = (X_t)_{t \in I}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum (E, ϵ).
Dann existiert genau ein W-Maß $\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$, dessen endlich-dimensionale Verteilung mit der Familie $\{\mathbb{P}_J \mid J \subseteq I \text{ endlich}\}$ übereinstimmt.

Beweis. Nach Bemerkung 1.1.12 i) bilden die endlich dimensionalen Verteilungen eines stochsatischen Prozesses eine konsistente Familie von W-Maßen. Damit sind die Voraussetzungen aus Satz 1.1.17 gegeben. Damit gilt die Aussage. □

1.2 Markovketten auf abzählbaren Zustandsräumen

Im folgenden sei E endlich/abzählbar, $\epsilon = \mathcal{P}(E)$ und $I = \mathbb{N}_0$

Definition 1.2.1. (Markoveigenschaft)
Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit dem Zustandsraum E. Der stochastische Prozess besitzt die (elementare) Markoveigenschaft, falls $\forall\ n \in \mathbb{N}_0$ und alle Realisierungen des Prozesses $x_1, ..., x_n \in E$ und falls $\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n]$$

Wenn die zusätzlich die folgende Eigenschaft auch gilt, so ist der stochastische Prozess invariant bezüglich der Zeit und man spricht von der zeithomogenen Markoveigenschaft:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } x, y \in E : \mathbb{P}[X_{n+1} = y \mid X_n = x] = \mathbb{P}[X_1 = y \mid X_0 = x]$$

Beispiel 1.2.2. Hier zeigen wir kurz, dass jede unabhängige Folge von Zufallsvariablen die Markoveigenschaft besitzt und falls diese zusätzlich identisch verteilt sind, dann sogar die Zeithomogene Markoveigenschaft:
Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine unabhängige Folge von Zufallsvariablen, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle Zustände $x_0, ..., x_{n+1} \in E$ mit $\mathbb{P}[x_0, ..., x_n] > 0$:

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] \stackrel{unabh.}{=} \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1}] \stackrel{\cdot 1}{=} \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n]$$

Falls die Folge von Zufallsvariablen u.i.v., dann gilt $\forall\ n \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{P}[X_n = x_n] = \mathbb{P}[X_1 = x_1]$. Daraus folgt dann die Zeithomogene Markoveigenschaft.

Beispiel 1.2.3. Das Maximum über eine unabhängige Folge von Zufallsvariable erfüllt auch die Markoveigenschaft:
Sei $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine unabhängige Folge von Zufallsvariablen mit Werten in E. Wir definieren $\forall\ n \in \mathbb{N}_0$ $X_n := max\{Y_1, ..., Y_n\}$. Dann ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Zufallsvariablen, die die Markoveigenschaft erfüllt:

$\forall\ n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0, ..., x_{n+1} \in E$ mit $\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] &\overset{Def.}{=} \mathbb{P}[max\{Y_0, ..., Y_{n+1}\} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] \\ &= \mathbb{P}[max\{x_n, Y_{n+1}\} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] \\ &\overset{unabh.}{=} \mathbb{P}[max\{x_n, Y_{n+1}\} = x_{n+1}] \\ &\overset{\cdot 1}{=} \mathbb{P}[max\{x_n, Y_{n+1}\} = x_{n+1} \mid X_n = x_n] \\ &\overset{Def.}{=} \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n]\end{aligned}$$

Aufgabe 4:...

Definition 1.2.4. (Stochastische Matrix)
Eine Matrix $P = (p(x, y))_{x,y \in E}$ heißt stochastische/Übergangsmatrix falls

- $\forall\ x, y \in E : p(x, y) \geq 0$
- $\forall\ x \in E : \sum_{y \in E} p(x, y) = 1$

Aufgabe 5: Seien $P, Q : E \times E \longrightarrow [0, 1]$ zwei stochastische Matrixen, zeige folgende Aussagen:

i) $P \cdot Q$ ist eine stochastische Matrix.

ii) $\forall\ \lambda \in [0, 1]$ ist $\lambda P + (1 - \lambda)Q$ wieder eine stochastische Matrix.

iii) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ ist P^n eine stochastische Matrix.

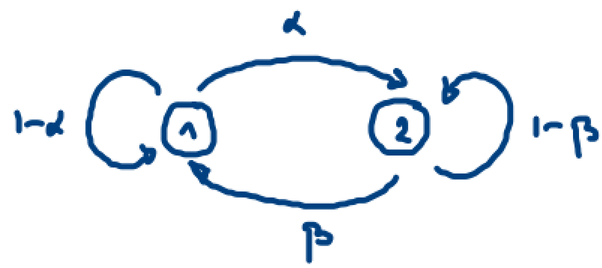
Satz 1.2.5. (Chapman-Kolmogorov Gleichung) Für jede stochastische Matrix $P = (p(x, y))_{x,y \in E}$ definieren wir $P^n =: (p_n(x, y))_{x,y \in E}$ und dann gilt $\forall\ n, m \in \mathbb{N}_0$ und $\forall\ x, y \in E$:

$$p_{m+n} = \sum_{z \in E} p_m(x, z)\ p_n(z, y)$$

Beweis. Folgt direkt aus der Eigenschaft das $P^{m+n} = P^m P^n$. Jeder Eintrag von P^{m+n} ist dann das standard Skalar-Produkt. □

Beispiel 1.2.6. (Veranschaulichung einer stochastischen Matrix mittels Übergangsgraphen) Sei $E = \{1, 2\}$ und $\alpha, \beta \in [0, 1]$:

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix}$$



Aufgabe 6:

Definition 1.2.7. (Zeithomogene Markoveigenschaft) Sei $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ eine stochastische Matrix und $\nu : E \longrightarrow [0,1]$ ein Wahrscheinlichkeitsvektor. Wir nennen einen stochastischen Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ auf dem Zustandsraum E eine (zeithomogene) Markovkette mit Übergangsmatrix P und Startverteilung ν (bzw. (ν, P)-Markovkette), falls:

i) $\forall\ n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0, ..., x_{n+1} \in E : \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] = p(x_n, x_{n+1})$ mit $\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] > 0$

ii) $\forall\ x_0 \in E : \mathbb{P}[X_0 = x_0] = \nu(x_0)$

Notation: Um die Startverteilung zu betonen schreibt man $\mathbb{P}_\nu$ oder falls $\nu = \mathbf{1}_x$ schreibt man $\mathbb{P}_x$.

Bemerkung 1.2.8. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess auf E, der die Zeithomogene Markoveigenschaft besitzt.
Dann gilt: Der stochastische Prozess ist eine Markovkette auf E mit Startverteilung $\nu = \mathbb{P} \circ (X_0)^{-1}$ und es gilt für die Übergangsmatrix $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$:

$$p(x,y) := \mathbb{P}_\nu[X_1 = y \mid X_0 = x]$$

Beispiel 1.2.9. Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine u.i.v. Folge von Zufallsvariablen mit der Eigenschaft $\mathbb{P}[Y_1 = 1] = \mathbb{P}[Y_1 = -1] = 1/2$. Wir setzten $X_0 = 1$ und $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $X_n = Y_n$. Nach Beispiel 1.2.2 erfüllt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die zeithomogene Markoveigenschaft und ist damit nach der vorherigen Bemerkung eine Markovkette auf dem Zustandsraum $\{-1, 1\}$ mit Startverteilung $\nu = \mathbf{1}_{\{1\}}$ und Übergangsmatrix:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7:
(Jede Markovkette abgebildet auf den Übergangsgraphen ist eine Irrfahrt)

Beispiel 1.2.10. (Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$) Sei μ ein W-Maß auf $\mathbb{Z}^d$ und wir definieren die Einträge Matrix P als:

$$\forall\ x, y \in \mathbb{Z}^d : \ p(x,y) = \mu(y - x).$$

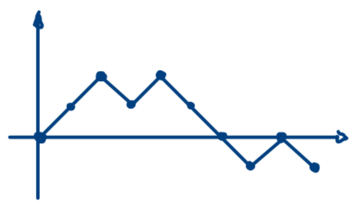
Dann ist $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$ eine stochastische Matrix wegen ....

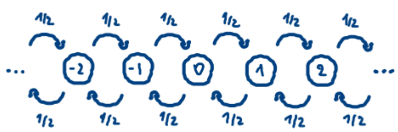
Man nennt die $(\mathbf{1}_x, P)$-Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ mit Start in $x \in \mathbb{Z}^d$.

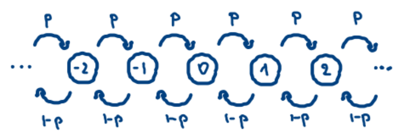
Wir betrachten nun den Spezialfall eines symmetrischen Random-Walks, d.h. das die Wahrscheinlichkeit in die nächst möglichen Zustände zu kommen gleichverteilt ist. Im Spezialfall ist dann unser Maß der Form:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1/2d & , \mid x \mid = 1 \text{ (Damit meint man das der Abstand von } z, y \in \mathbb{R}^d), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

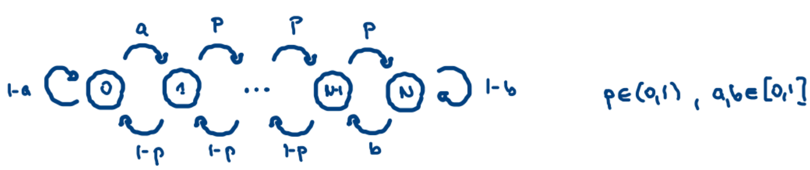
Dann nennen wir $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine einfache symmetrische Irrfahrt.







Beispiel 1.2.11. (Irrfahrt auf $\{0, ..., N\}$) Eine (ν, P)-Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Irrfahrt auf $\{0, ..., N\}$ mit Startverteilung ν, wenn die Übergangsmatrix P gegeben ist durch den Übergangsgraphen: Einen Zustand nennt man absorbierend, falls die Wahrscheinlichkeit, dass man darin bleibt gleich 1 ist (in dem Fall $p(0,0) = 1$ also $a = 0$) und reflektierend, falls die Wahrscheinlichkeit, dass man im Zustand bleibt gleich 0 ist (in dem Fall $p(0,0) = 0$ also $a = 1$).



Beispiel 1.2.12. (Irrfahrt auf dem Torus $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$) Sei der Zustandsraum $E = (\mathbb{Z} mod N)^d = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ mit $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $d \geq 1$. Außerdem sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf E mit der Eigenschaft:

$$p(x,y) = \mu(y-x) = \begin{cases} p & , y - x = 1 \\ 1-p & , y-x = -1 \end{cases}$$

Folglich ist $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$ eine stochastische Matrix und dann ist die (ν, P)-Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt mit Startverteilung ν.

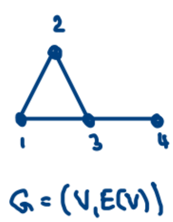
Beispiel 1.2.13. (Einfache Irrfahrt auf einem Graphen) Sei der Graph G=(V,E(V)) gegeben, wobei V die Knotenmenge beschreibt und E(V) die Kantenmenge von V ist. Wenn zwei Knoten durch eine Kante verbunden sind, gibt es eine Übergangswahrscheinlichkeit. Wir schreiben dies formell als:

$$x \sim y :\iff \quad \text{x,y} \in V \text{ sind durch eine Kante in E(V) verbunden}$$

Dann ist die Matrix $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$ eine stochastische Matrix falls:

$$p(x,y) = \begin{cases} 1/deg(x) & , x \sim y \\ 0 & , sonst \end{cases}$$

Dabei ist deg(x) die Anzahl an Kanten, die von x aus ausgehen.
Die (ν, P)-Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Irrfahrt auf dem Graphen G mit Startverteilung ν



Beispiel 1.2.14. (Verzeigungsprozesse) Sei X_n die Anzahl der Individuen in der n-ten Generation. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Individuum durch y viele Individuen ersetzt wird, sei unabhängig verteilt von den anderen Individuen in gleichen Generation. Dann ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $E = \mathbb{N}_0$ und mit Übergangsmatrix P definiert als:

$$p(x,y) = \overbrace{\mu^{*x}(y)}^{\text{x-fache Faltung}} := \sum_{y_1 + \ldots + y_x = y} \mu(y_1) \cdot \ldots \cdot \mu(y_x)$$

Dabei ist y_i für alle $i \in 1, ..., x$ die Anzahl an Individuen, durch die das i-te Individuum in der nächsten Generation durch ersetzt wird.
Frage: Woher kommt die Faltung im Matrixeintrag?

Antwort: Sei $(X_n^{(i)})_{n,i\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge (von Folgen) von u.i.v. Zufallsvariablen mit der Eigenschaft $\mathbb{P}[X_n^{(i)} = k] = \mu(k)$. Die Interpretation der Zufallsvariable ist, dass der Index n die Generation beschreibt und i das Individuum in einer festen Generation.

$$\text{Wir setzen } X_0 = x \text{ und } X_n = \sum_{i=1}^{x_{n-1}} X_{n-1}^{(i)}, \text{ D.h.: } \begin{pmatrix} X_0^{(1)} \\ \dots \\ X_0^{(x)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ \dots \\ X_1^{(x_1)} \end{pmatrix} \cdots$$

Für jedes $i \in \{1, ..., x_{n-1}\}$ ist $X_{n-1}^{(i)}$ die Zufallsvariable die beschreibt, wie viele Individuen das i-te Individuum in der n-1 Generation ersetzen.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] &\overset{u.i.v.}{=} \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1}] \overset{Einsetzen}{=} \mathbb{P}[X_n^{(1)} + \cdots + X_n^{(x_n)} = x_{n+1}] \\ &\overset{Faltung}{=} \mu^{*X_n}(x_{n+1}) \overset{Def.}{=} p(x_{n-1}, x_n)\end{aligned}$$

Frage: Besitzen Markovketten die Markoveigenschaft?

Satz 1.2.15. Wir haben eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ auf dem Zustandsraum E, eine Verteilung $\nu : E \longrightarrow [0, 1]$ und eine stochastische Matrix $P = (p(x, y))_{x,y\in E}$, dann gelten die folgenden Aussagen:

i) Die Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine (ν, P)-Markovkette $\Longleftrightarrow$
$\forall\ n \in \mathbb{N}_0,\ x_0, ..., x_n \in E$: $\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] = \nu(x_0)\ p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x_n)$

ii) Wenn die Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette ist $\Rightarrow$
$\forall\ n \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in E$ mit $\mathbb{P}[X_n = x] > 0$: $\mathbb{P}[X_{n+1} = y \mid X_n = x] = p(x, y)$

Beweis.

i) "$\Leftarrow$"
Wir zeigen beide Eigenschaften die Notwendig sind damit ein stochastischer Prozess eine Markovkette ist.

· Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0, ..., x_{n+1} \in E$ mit $\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] > 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] &\overset{Def.}{=} \frac{\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}]}{\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n]} \\ &\overset{VSS}{=} \frac{\nu(x_0)\ p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_n, x_{n+1})}{\nu(x_0)\ p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x_n)} \\ &= p(x_n, x_{n+1})\end{aligned}$$

· $\mathbb{P}[X_0 = x_0] = \nu(x_0)$ gilt nach VSS.

"$\Rightarrow$"

Da wir das zu zeigende für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zeigen müssen, nutzen wir Induktion:

(Mit i) und ii) meinen wir im folgenden die erste und zweite Eigenschaft, die eine Markovkette erfüllt)

IA: $n = 0 : \mathbb{P}[X_0 = x_0] \overset{ii)}{=} \nu(x_0)$

$n = 1 : \mathbb{P}[X_0 = x_0, X_1 = x_1] = \mathbb{P}[X_0 = x_0]\ \mathbb{P}[X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0] \overset{i),ii)}{=} \nu(x_0)p(x_0, x_1)$

IV: Gelte die VSS für alle $n \in \mathbb{N}_0$

IS: $n \to n+1$: Sei $\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] > 0$ (anderenfalls gilt 0=0) dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_{n+1} = x_{n+1}] &= \mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n]\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] \\
&\overset{IV}{=} \nu(x_0)\ p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x_n)\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] \\
&\overset{i)}{=} \nu(x_0)\ p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x_n)p(x_n, x_{n+1})
\end{aligned}$$

ii) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in E$ mit $\mathbb{P}[X_n = x] > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_{n+1} = y \mid X_n = x] &= \mathbb{P}[X_{n+1} = y \mid X_0 \in E, ..., X_{n-1} \in E, X_n = x] \\
&= \frac{\mathbb{P}[X_0 \in E, ..., X_{n-1} \in E, X_n = x, X_{n+1} = y]}{\mathbb{P}[X_0 \in E, ..., X_{n-1} \in E, X_n = x]} \\
&\overset{\sigma-add}{=} \frac{\sum_{x_0,...,x_{n-1} \in E} \nu(x_0)\ p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x)p(x, y)}{\sum_{x_0,...,x_{n-1} \in E} \nu(x_0)\ p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x)} \\
&= p(x, y)
\end{aligned}$$

□

Satz 1.2.16. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf dem Zustandsraum E.

- $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ x \in E$: $\mathbb{P}[X_n = x] = \sum_{x_0,...,x_{n-1} \in E} \nu(x_0)\ p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x) = (\nu P^n)(x)$
- $\forall\ m, n \in \mathbb{N}_0\ \forall\ x, y \in E$ mit $\mathbb{P}[X_m = x] > 0$: $\mathbb{P}[X_{m+n} = y \mid X_m = x] = (P^n)(x, y) = p_n(x, y)$

Beweis. Übungsaufgabe □

Beispiel 1.2.17. Betrachten wir nun wieder das Beispiel mit $E = \{0, 1\}$ und Übergangsmatrix P= $\begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$.

Durch unser neues Resultat können wir bestimmen: $\mathbb{P}[X_n = 1 \mid X_0 = 1]$. Mit dem Vorherigen Satz können wir diesen Ausdruck schreiben als:

$$
\begin{aligned}
P^n(1,1) &\overset{LA1}{=} (P^{n-1}P)(1,1) \\
&\overset{Chapman}{=} \sum_{z\in E} p_{n-1}(1,z)p(z,1) \\
&\overset{VSS}{=} p_{n-1}(1,1)p(1,1) + p_{n-1}(1,2)p(2,1) \\
&\overset{Einsetzen}{=} p_{n-1}(1,1)(1-\alpha) + p_{n-1}(1,2)\beta \\
&= p_{n-1}(1,1)(1-\alpha) + (1-p_{n-1}(1,1))\beta \\
&= (1-\alpha-\beta)p_{n-1}(1,1) + \beta
\end{aligned}
$$

Wegen $P^0(1,1) = 1$ besitzt die obige Rekursionsformel eine eindeutige Lösung $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$
p_n(1,1) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n & \text{, falls } \alpha+\beta > 0 \\ 1 & \text{, falls } \alpha+\beta = 0 \end{cases}
$$

Aufgabe 8:...

Korollar 1.2.18. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf dem Zustandsraum E.
Dann gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $f \in l^\infty$ und jedem Zustand $x \in E$:

$$
\mathbb{E}[f(X_{m+n}) \mid X_m = x] = (P^n f)(x) \text{ und es gilt auch: } \mathbb{E}[f(X_n)] = \nu P^n f
$$

Beweis. Aus dem vorherigen Satz (1.2.16) folgt:

$$
\mathbb{E}[f(X_{m+n}) \mid X_m = x] \overset{\text{E diskret}}{=} \sum_{y\in E} f(y)\mathbb{P}[X_{m+n} = y \mid X_m = x] \overset{1.2.16}{=} \sum_{y\in E} f(y)(P^n)(x,y) = (P^n f)(x)
$$

$$
\mathbb{E}[f(X_n)] = \sum_{x\in E} f(x)\mathbb{P}[X_n = x] \overset{1.2.16}{=} \sum_{x\in E} f(x)(\nu P^n)(x) = (\nu P^n f)
$$

Die Erwartungswerte existieren, da $f \in l^\infty(E)$ die absolute konvergenz der beiden Reihen impliziert, wegen $\mathbb{E}[\mid f(X_{m+n}) \mid] \leq sup_{x\in E} \mid f(x) \mid < \infty$

□

Satz 1.2.19. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette.
Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $A \in \epsilon^{\otimes\mathbb{N}_0}$, $B \subseteq E^n$ und $x \in E$ mit $\mathbb{P}_\nu[(x_0, ..., x_n) \in B, X_n = x] > 0$:

$$
\mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, ...) \in A \mid (X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x] = \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in A]
$$

Beweis.
Schritt 1: Wir betrachten zunächst die Markovkette bis zu einem Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$ und zeigen die Aussage

für beliebige Mengen aus dem Schnitt-stablien Erzeuger (die endlich-dimensionalen Rechtecksmengen) der Produkt-σ-Algebra $\epsilon^{\otimes \mathbb{N}_0}$.
Sei $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig und für $x_0, .., x_k \in E$ betrachten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\nu[(X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x, \forall i = 0, .., k : X_{n+i} = x_i] \\
&= \mathbb{P}_\nu[\bigsqcup_{(y_0,..,y_{n-1}) \in B} (X_0, ..., X_{n-1}) = (y_0, ..., y_{n-1}), X_n = x, \forall i = 0, .., k : X_{n+i} = x_i] \\
&\overset{\sigma-Add}{=} \sum_{(y_0,...,y_{n-1}) \in B} \mathbb{P}_\nu[(X_0, ..., X_{n-1}) = (y_0, ..., y_{n-1}), X_n = x, \forall i = 0, .., k : X_{n+i} = x_i] \\
&\overset{\text{Satz 1.2.15 i)}}{=} \sum_{(y_0,...,y_{n-1}) \in B} \nu(y_0) p(y_0, y_1) \cdot ... \cdot p(y_{n-1}, x) \mathbf{1}_{\{X_0 = x\}} p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{k-1}, x_k) \\
&= \mathbf{1}_{\{X_0 = x\}} p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{k-1}, x_k) \sum_{(y_0,...,y_{n-1}) \in B} \nu(y_0) p(y_0, y_1) \cdot ... \cdot p(y_{n-1}, x) \\
&= \mathbb{P}_\nu[(X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x] \cdot \mathbb{P}_x[\forall i = 0, .., k : X_i = x_i]
\end{aligned}$$

Da E diskret ist folgt die Behauptung für alle endlich-dimensionalen Rechtecksmengen.
<u>Schritt 2:</u> Nun benutzen wir den Trick der guten Mengen, d.h. wir definieren das Mengensystem, dessen elemente/Ereignisse aus unserer Produkt-σ-Algebra die zu zeigende Bedinungen erfüllen und zeigen, dass es ein Dynkinsystem ist und mittels dem Hauptsatz über Dynkinsysteme zeigen wir, dass es eine σ-Algebra ist (nämlich unsrer Produkt-σ-Algebra

$$D = \{A \in \epsilon^{\otimes \mathbb{N}_0} \mid \mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, ...) \in A \mid (X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x] = \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in A]\}$$

Wir zeigen D ist ein Dynkinsystem:

1. Da $\mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, ...) \in E^{\mathbb{N}_0} \mid (X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x] = 1 = \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in E^{\mathbb{N}_0}]$
   Damit gilt das $E^{\mathbb{N}_0} \in D$

2. Sei $Q \in D$. Wir zeigen $Q^C \in D$:
   $\mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, ...) \in Q^C \mid (X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x]$
   $= 1 - \mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, ...) \in Q \mid (X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x]$
   $\overset{Q \in D}{=} 1 - \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in Q]$
   $= \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in Q^C]$

3. Seien die disjunkten Mengen $Q_1, Q_2, ... \in D$. Wir wollen zeigen, dass die disjunkte Vereinigung auch in D ist.
   $\mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, ...) \in \bigsqcup_{i=1}^\infty Q_i \mid (X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x]$
   $= \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, ...) \in Q_i \mid (X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x]$
   $= \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in Q_i]$
   $= \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in \bigsqcup_{i=1}^\infty Q_i]$

Schritt 3: Mittels Schritt 1 haben wir gezeigt, dass die endlich-dimensionalen Rechtseckmengen ($\mathcal{Z}$) in D enthalten sind. Da $\mathcal{Z}$ schnitt stabil ist und weil $\mathcal{Z} \subseteq D$:

$$\epsilon^{\otimes \mathbb{N}_0} \overset{\text{Def. Produktsigma Algebra}}{=} \sigma(\mathcal{Z}) \overset{\text{Hauptsatz Dy.}}{=} d(\mathcal{Z}) \overset{Schritt1}{\subseteq} D \overset{\text{Def. von D}}{\subseteq} \epsilon^{\otimes \mathbb{N}_0}$$

Damit gilt Gleichhheit. □

Korollar 1.2.20. (Unahbhängigkeit von Zukunft und Vergangenheit bei gegebener Gegenwart) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette dann gilt folgende Aussage $\forall\ n \in \mathbb{N}_0,\ A \in \epsilon^{\otimes \mathbb{N}_0},\ B \subseteq E^n$ und $x_n \in E$ falls $\mathbb{P}[X_n = x_n] > 0$.

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[(X_0, ..., X_{n-1}) \in B, (X_{n+1}, X_{n+2}, ...) \in A \mid X_n = x_n]\\ &\qquad = \mathbb{P}[(X_0, ..., X_{n-1}) \in B \mid X_n = x_n] \cdot \mathbb{P}[(X_{n+1}, X_{n+2}, ...) \in A \mid X_n = x_n]\end{aligned}$$

Die Faktorisierung der Wahrscheinlichkeit ist equivalent mit Unabhängigkeit mittels Stochastik 1.

Beweis. Sei $\mathbb{P}[(X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x_n] > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[(X_0, ..., X_{n-1}) \in B, (X_{n+1}, X_{n+2}, ...) \in A \mid X_n = x_n]\\ &\overset{Multiplikationsregel}{=} \mathbb{P}[(X_0, ..., X_{n-1}) \in B \mid X_n = x_n] \cdot \mathbb{P}_\nu[(X_{n+1}, X_{n+2}, ...) \in A \mid (X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x_n]\\ &\overset{1.2.19}{=} \mathbb{P}[(X_0, ..., X_{n-1}) \in B \mid X_n = x_n] \cdot \mathbb{P}_x[(X_1, X_2, ...) \in A]\\ &\overset{\text{Zeithomogenität}}{=} \mathbb{P}[(X_0, ..., X_{n-1}) \in B \mid X_n = x_n] \cdot \mathbb{P}[(X_{n+1}, X_{n+2}, ...) \in A \mid X_n = x_n]\end{aligned}$$

□

Satz 1.2.21. (Existenz von Markovketten) Zu jeder stochastischen Matrix $P = (p(x, y))_{x,y\in E}$ und jedem Wahrscheinlichkeitsvektor $\nu : E \longrightarrow [0, 1]$ existiert eine bezüglich Verteilung eindeutige (ν, P)-Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Beweis. Ziel: Wir wollen den existenz Satz von Daniell-Kolmogorov anwenden. Dazu werden wir zeigen, das

$$\{\mathbb{Q}_{\{0,..,n\}}[\{x_0, ..., x_n\}] := \nu(x_0)p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x_n) \mid x_0, ..., x_n \in E, \forall n \in \mathbb{N}_0\}\ (*)$$

Eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist und insbesondere eine konsistente Famile. Dann folgt mit dem existenz Satz von Daniell-Kolmogorov die Existenz eines eindeutigen Maßes $\mathbb{Q}$ auf $(E^{\mathbb{N}_0}, \epsilon^{\otimes \mathbb{N}_0})$. Wir werden zeigen, dass dieses Maß das Bildmaß der Markovkette ist.

Schritt 1: Wir definieren die Mengenfunktion für alle $x_0, ..., x_n \in E$:

$$\mathbb{Q}_{\{0,..,n\}} : \epsilon^{\otimes(n+1)} \longrightarrow [0, \infty], \{x_0, ..., x_n\} \mapsto \mathbb{Q}_{\{0,..,n\}}(\{x_0, ..., x_n\}) := \nu(x_0)p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x_n)$$

z.z. $\mathbb{Q}_{\{0,..,n\}}$ ist ein Maß.

i) $\mathbb{Q}_{\{0,..,n\}}[\emptyset] = 0$ offensichtlich

ii) Seien $A_1, A_2, ... \in \epsilon^{\otimes(n+1)}$ disjunkt:

$\mathbb{Q}_{\{0,..,n\}}[\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i]$
$\overset{KA}{=} \sum_{x_0,...,x_n \in E} \mathbf{1}_{\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i}(x_0, ..., x_n)\nu(x_0)p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x_n)$
$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{x_0,...,x_n \in E} \mathbf{1}_{A_i}(x_0, ..., x_n)\nu(x_0)p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x_n)$
$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}_{\{0,..,n\}}[A_i]$

z.z. $\mathbb{Q}_{\{0,..,n\}}$ ist ein W-Maß:

$\mathbb{Q}_{\{0,..,n\}}[E^{(n+1)}] = \mathbb{Q}_{\{0,..,n\}}[\bigsqcup_{x_0,...,x_n \in E}\{x_0, ..., x_n\}]$
$= \sum_{x_0,...,x_n \in E} \mathbb{Q}_{\{0,..,n\}}[\{x_0, ..., x_n\}]$
$= \sum_{x_0,...,x_n \in E} \nu(x_0)p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x_n)$
$= \sum_{x_0 \in E} \nu(x_0) \sum_{x_1 \in E} p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot \sum_{x_n \in E} p(x_{n-1}, x_n) = 1$ da P eine stochastische Matrix und ν ein Wahrscheinlichkeitsvektor

z.z. Die Familie von W-Maßen definiert in * ist eine konsistente Familie,

d.h. $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{Q}_{\{0,...,n\}} = \mathbb{Q}_{\{0,...,n+1\}} \circ (\pi^{\{0,...,n+1\}}_{\{0,...,n\}})^{-1}$

Wir zeigen dies wieder auf dem Erzeuger der Produkt-σ-Algebra.

Für ein $A \in \epsilon^{\otimes(n+1)}$ gilt:

$\mathbb{Q}_{\{0,...,n+1\}}[(\pi^{\{0,...,n+1\}}_{\{0,...,n\}})^{-1}(A)]$
$= \sum_{x_0,...,x_n \in A} \nu(x_0) \cdot p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x_n) \cdot \underbrace{\sum_{x_{n+1} \in E} p_(x_n, x_{n+1})}_{=1} = \mathbb{Q}_{\{0,...,n\}}[A]$

Damit ist die Familie $\{\mathbb{Q}_{\{0,...,n\}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ konsistent. Dann folgt somit aus dem Satz von Daniell-Kolmogorov die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q}$ auf $(E^{\mathbb{N}_0}, \epsilon^{\otimes \mathbb{N}_0})$ mit der Eigenschaft

$$\mathbb{Q}_{\{0,...,n\}} = \mathbb{Q} \circ \pi^{-1}_{\{0,...,n\}}$$

Schritt 1: Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum E. Wir definieren $\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1} =: \mathbb{Q}$

z.z. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine (ν, P)-Markovkette.

Wir zeigen dies Mittels Faktorisierung der Wahrscheinlichkeit:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] &= \mathbb{P}_{X_{\{0,...,n\}}}[\{x_0, ..., x_n\}] \\
&\overset{Def}{=} (\mathbb{P}_X \circ \pi^{-1}_{\{0,...,n\}})[\{x_0, ..., x_n\}] \\
&\overset{Eindeutigkeit}{=} (\mathbb{Q} \circ \pi^{-1}_{\{0,...,n\}})[\{x_0, ..., x_n\}] \\
&= (\mathbb{Q}_{\{0,...,n\}})[\{x_0, ..., x_n\}] \\
&\overset{Def}{=} \nu(x_0)p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x_n)
\end{aligned}
$$

Damit ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette und das Bildmaß dieser Markovkette ist eindeutig. □

Satz 1.2.22. Sei $P = (p(x, y))_{x,y\in E}$ eine stochastische Matrix, ν eine Verteilung auf E und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen mit $U_0 \sim \mathcal{U}([0, 1])$.
Dann existieren Funktionen $f : [0, 1] \longrightarrow E$ und $F : E \times [0, 1] \longrightarrow E$ sodass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$
X_n := \begin{cases} f(U_0) & , n = 0 \\ F(X_{n-1}, U_n) & , n > 0 \end{cases}
$$

eine (ν, P)-Markovkette ist.

Beweis. Schritt 1: Sei $E = \mathbb{N}$. Wir definieren:

- $\alpha(0) := 0, \alpha(i) := \sum_{k=1}^{i} \nu[\{k\}], i \in \mathbb{N}$.
  α ist also eine monoton steigende Funktion, die um die Wahrscheinlichkeit dass die Startverteilung im Zustand $k \in E$ ist, steigt, falls i um 1 steigt.

- $\beta(i, 0) := 0, \beta(i, j) := \sum_{k=1}^{j} p(i, k), i \in \mathbb{N}$.
  Dabei ist β wieder eine monoton steigende Funktion, die bei einer festen Zeile der Übergangsmatrix um die Wahrscheinlichkeit steigt, dass man von dem Zustand, der durch die Zeile festgelegt ist, in den Zustand gelangt, der durch die Spalte definiert ist, wenn j um 1 steigt. D.h. wir summieren über die Spalten bei einer festen Zeile $\Rightarrow \beta(i, j) = 1, j \to \infty$

Nun definieren wir die Funktionen $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{N}$ und $F : \mathbb{N} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{N}$:

- $f(u) := \sum_{i=1}^{\infty} i\mathbf{1}_{\{\alpha(i-1)\leq u\leq\alpha(i)\}}$
  Eine monoton steigende unbeschränkte Funktion, die den Wert $i \in E$ animmt, falls die uniform verteilte Zufallsvariable einen Wert zwischen den Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[X_0 \leq i - 1]$ und $\mathbb{P}[X_0 \leq i] = (\sum_{k=1}^{i} \nu[\{k\}])$

- $F(i, u) := \sum_{j=1}^{\infty} j\mathbf{1}_{\{\beta(i,j-1)\leq u\leq\beta(i,j)\}}$
  Eine monoton steigende unbeschränkte Funktion, die den Wert $j \in E$ animmt, falls die uniform verteilte

Zufallsvariable einen Wert zwischen den Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[X \in \{1, .., j-1\} \mid Y = i]$ und $\mathbb{P}[X \in \{1, .., j\} \mid Y = i] = (\sum_{k=1}^{j} p(i,k))$

Für die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die wir im Satz definiert haben und für alle $i_0, ..., i_n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_0 = i_0, ..., X_n = i_n] \\
&= \mathbb{P}[f(U_0) = i_0, F(X_0, U_1) = i_1, ..., F(X_{n-1}, U_n) = i_n] \\
&= \mathbb{P}[U_0 \in [\alpha(i_0 - 1), \alpha(i_0)], U_1 \in [\beta(i_0, i_1 - 1), \beta(i_0, i_1)], ..., U_n \in [\beta(i_{n-1}, i_n - 1), \beta(i_{n-1}, i_n)]] \\
&\overset{\text{unabhängig}}{=} \mathbb{P}[U_0 \in [\alpha(i_0 - 1), \alpha(i_0)]]\mathbb{P}[U_1 \in [\beta(i_0, i_1 - 1), \beta(i_0, i_1)] \cdot ... \cdot \mathbb{P}[U_n \in [\beta(i_{n-1}, i_n - 1), \beta(i_{n-1}, i_n)]] \\
&= \nu(i_0) p(i_0, i_1) \cdot ... \cdot p(i_{n-1}, i_n)
\end{aligned}
$$

Mittels Satz 1.2.15 i) folgt, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette ist.

Schritt 2: Da E abzählbar ist, existiert eine bijektive Funktion $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow E$.

Mittels Schritt 1 folgt die Aussage. □

Bemerkung 1.2.23. Im Schritt 2 wurde verwendet das $f \circ (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette wieder ist, falls $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf E ist und $f : E \longrightarrow E'$ eine bijektive Funktion ist.

Funktionen von Markovketten sind im Allgemeinen nicht markovsch

Beispiel 1.2.24. Sei $E = \{1, 2, 3\}$ und $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$ mit $p(1,2) = p(2,3) = p(3,1) = 1$ und $\nu(x) = 1/3$. Sei $E' = \{a, b\}$ und betrachte $f : E \longrightarrow E', f(1) = f(2) = a$ und $f(3) = b$.

Wir setzen $Y_n = f(X_n)$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}[Y_2 = a \mid Y_1 = a, Y_0 = a] = 0 \neq 1/2 = \mathbb{P}[Y_2 = a \mid Y_1 = a]$$

Aufgabe 9: ...

1.3 Stoppzeiten und starke Markoveigenschaft

Frage: Wie lassen sich zufällige Zeitpunkte beschreiben?

Definition 1.3.1. (erzeugte σ-Algebra)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dessen Werte auf dem Zustandsraum (E, ϵ) sind. Wir definieren:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: \ \mathcal{F}_n^X := \sigma(X_k : k = 0, ..., n) := \{(X_0, ..., X_n)^{-1}(B) \mid B \in \epsilon^{\otimes(n+1)}\}$$

Wir nennen dann $(\mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die durch X erzeugte σ-Algebra.

Erinnerung: Wir erinnern uns an Stochastik 1 wo wir definiert haben, dass für ein $\Omega \neq \emptyset$, $(\Omega', \mathcal{F}')$ ein messbarer Raum und einer Abbildung $X : \Omega \longrightarrow \Omega'$ gilt:

$$X^{-1}(\mathcal{F}) := \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{F}'\}$$

Dann ist $X^{-1}(\mathcal{F})$ eine σ-Algebra und die kleinste σ-Algebra auf Ω, sodass die Abbildungen f $(X^{-1}(\mathcal{F}), \mathcal{F}')$-messbar sind.

Außerdem gilt für jede Unterσ-Algebra $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{F}'$:

$$\sigma(X^{-1}(\mathcal{A}')) = X^{-1}(\sigma(\mathcal{A}'))$$

Bemerkung 1.3.2.

a) Offensichtlich gilt $\forall\ n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$: $\mathcal{F}_m^X \subseteq \mathcal{F}_n^X \subseteq \mathcal{F}$

b) Da $\mathcal{F}_n^X$ die Menge alle Ereignisse umfasst, die der stochastische Prozess bis zum Zeitpunkt n annement kann, umfasst es auch alle Informationen, die ein Beobachter vom stochastischen Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bis zum Zeitpunkt n hat.

Definition 1.3.3. (Stoppzeit)
Sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in E. Wir nennen die Zufallsvariable $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ eine Stoppzeit bezüglich X, falls:

$$\forall B \in \epsilon^{\otimes(n+1)}: \ \{T = n\} := (X_0, ..., X_n)^{-1}(B) \in \sigma(X_k : k = 0, ..., n) = \mathcal{F}_n^X$$

Bemerkung 1.3.4. Das Ereignis $\{T = \infty\}$ wird so interpretiert, dass die Stoppzeit nie eintritt.

Beispiel 1.3.5. Sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in E. Sei $A \subseteq E$.

a) Wir definieren S_A als die erste Rückkehr/Treffzeit und T_A als die Eintrittszeit wie folgt:

  – $S_A := inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n(\omega) \in A\}$

  – $T_A := inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid X_n(\omega) \in A\}$

(Wir definieren $inf\emptyset := \infty$.) Diese Abbildungen sind Stoppzeiten, da

  – $\{S_A = n\} = \{X_1 \notin A, ..., X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n^X$

- $\{T_A = n\} = \{X_0 \notin A, ..., X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n^X$

Außerdem gilt $\forall x \notin A : \mathbb{P}[S_A = T_A \mid X_0 = x] = 1$

b) Wir definieren die k-te Treffzeit der Menge A als:
$S_A^k(\omega) := inf\{n > S_A^{k-1}(\omega) \mid X_n \in A\}$ mit $S_A^0(\omega) := 0$ und $k \in \mathbb{N}$

c) Jede deterministische Zeit $T(\omega) = t \in \mathbb{N}_0$ ist eine Stoppzeit, da
$\{T = n\} \in \{\emptyset, \Omega\} \in \mathcal{F}_n^X$
Wenn $n \neq t$ dann ist $\{T = n\} = \emptyset$ und wenn $n = t$ dann ist $\{T = n\} = \Omega$

d) Die letzte Austrittszeit aus der Menge A definiert durch:
$L_A(\omega) := sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid X_n \in A\}$
Ist keine Stoppzeit, da $\{L_A = n\}$ davon abhängt ob, es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $X_{n+m} \in A$. D.h. für festes $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine Folge $(X_{n+m})_{m\in\mathbb{N}}$, die die Menge A trifft.

Frage: Wie kann man die Eintrittswahrscheinlichkeit einer Markovkette in eine Menge A berechnen?

Definition 1.3.6. (Generator)
Sei P eine stochastische Matrix dann nennen wir die Matrix $L := P - I$ den zugehörigen diskreten Generator, falls I die Einheitsmatrix ist.

Definition 1.3.7. (Dirichletproblem)
Sei $\emptyset \neq A \subset E$ und $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, dann bezeichnet man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} (Lf)(x) = 0 & \text{, für alle } x \in A^C \\ f(x) = g(x) & \text{, für alle } x \in A \end{cases}$$

das zu L gehörige Dirichlet Problem auf A^C mit Randwerten g auf A.

Satz 1.3.8. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Werten in E. Für $A \subset E$ definieren wir $h_A(x) := \mathbb{P}_x[T_A < \infty] = \mathbb{P}[T_A < \infty \mid X_0 = x], x \in E$, wobei T_A die erste Eintrittszeit in die Menge A beschreibt. Dann ist h_A die kleinste und nicht-negative Lösung des Dirichletproblems:

$$\begin{cases} (L\ h_A)(x) = 0 & ,\forall x \in A^C \\ h_A(x) = 1 & ,\forall x \in A \end{cases} \quad (*)$$

Beweis. z.z. h_A ist die Lösung des Dirchletproblems (*).
Fall 1: Sei $x \in A \Rightarrow \{X_0 \in A\} = \{T_A = 0\} \Rightarrow h_A = 1$
Fall 2: Sei $x \in A^C$: (Dieses Vorgehen nennt man Eisnchrittanalyse)
$\mathbb{P}_x[T_A < \infty] = \mathbb{P}_x[T_A \in \mathbb{N}] \overset{\cap\Omega}{=} \sum_{y\in E} \mathbb{P}_x[T_A \in \mathbb{N}, X_1 = y] = \sum_{y\in E} \mathbb{P}[T_A \in \mathbb{N}, X_1 = y \mid X_0 = x]$
$\overset{Multiplikationsregel}{=} \sum_{y\in E} \mathbb{P}[X_1 = y \mid X_0 = x] \cdot \mathbb{P}_\nu[T_A \in \mathbb{N} \mid X_0 = x, X_1 = y]$

$\overset{\text{Satz 1.10}}{=} \sum_{y \in E} \mathbb{P}[X_1 = y \mid X_0 = x] \cdot \mathbb{P}_y[T_A \in \mathbb{N}_0]$

$= \sum_{y \in E} p(x,y) \cdot \mathbb{P}_y[T_A \in \mathbb{N}_0]$

Damit gilt dann:

$h_A(x) = \mathbb{P}_x[T_A < \infty] = \sum_{y \in E} p(x,y) \cdot \mathbb{P}_y[T_A \in \mathbb{N}_0] = \sum_{y \in E} p(x,y) \cdot h_A(y)$

$\iff \sum_{y \in E}(p(x,y) \cdot h_A(y)) - h_A(x) = 0$

$\iff (P \circ h_A)(x) - (I \circ h_A)(x) = 0$

$(L \circ h_A)(x) = 0$

Damit ist h_A die Lösung des Dirchletproblems.

z.z. h_A ist die kleinste nicht-negative Lösung von (*)

Wäre $h : E \longrightarrow [0, \infty)$ eine Weitere Lösung von (*).

Wir müssen nun zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $\mathbb{P}_x[T_A \leq N] \leq h(x)$ mit $x \in E$

Fall 1: $x \in A \Rightarrow \mathbb{P}_x[T_A \leq N] = 1 = h(x)$

Fall 2: $x \in A^C$ Via Induktion:

IA: $N = 0 : \mathbb{P}_x[T_A = 0] \overset{x \notin A}{=} 0 \leq h(x)$, da nicht negativ.

IV: Gelte die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}_0$

IS: $N \to N+1$

$\mathbb{P}_x[T_A \leq N+1] = \mathbb{P}_x[1 \leq T_A \leq N+1]$

$= \sum_{y \in E} \mathbb{P}_x[1 \leq T_A \leq N+1, X_1 = y]$

$\overset{\text{Wie Oben}}{=} \sum_{y \in E} \mathbb{P}[X_1 = y \mid X_0 = x] \cdot \mathbb{P}_\nu[1 \leq T_A \leq N+1 \in \mathbb{N} \mid X_0 = x, X_1 = y]$

$\overset{\text{Satz 1.10}}{=} \sum_{y \in E} p(x,y) \cdot \mathbb{P}_y[T_A \leq N]$

$\overset{\text{IV}}{\leq} \sum_{y \in E} p(x,y) \cdot h(y)$

$= (P \circ h)(x)$

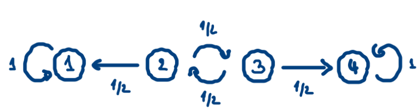
$\overset{(L \circ h)(x) = 0}{=} h(x)$

Wegen $\{T_A \leq N\} \nearrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{T_A \leq k\} = \{T_A < \infty\}$, $n \to \infty$, folgt mit Stetigkeit von Maßen:

$\forall x \in E : h_A(x) = \mathbb{P}_x[T_A < \infty] = lim_{N \to \infty} \mathbb{P}_x[T_A \leq N] \leq h(x)$

$\square$

Beispiel 1.3.9. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf $E = \{1, 2, 3, 4\}$ und die stochastische Matrix sei gegeben durch den Übergangsgraphen:



Wir wollen nun die Eintrittswahrscheinlichkeit in den Zustand $\{4\}$ bestimmen. Mittels des vorherigen Satzes ist die eindeutige Lösung des Dirichletproblems: $h_{\{4\}}(x) := \mathbb{P}_x[T_{\{4\}} < \infty]$ mit $x \in E$.

Wir betrachten nun das Gleichungssystem $\forall x \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$(P-I) \cdot h_{\{4\}}(x) = (\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - I) \cdot h_{\{4\}}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot h_{\{4\}}(x) = 0$$

Lösen des Linearen Gleichunssystem ergibt:

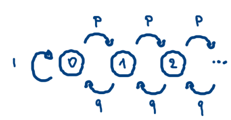
$$\text{Sei } c \in [0,1] \text{ beliebig: } h_{\{4\}} = \begin{bmatrix} c & \frac{2}{3}c + \frac{1}{3} & \frac{1}{3}c + \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}^T$$

Weil c beliebig ist gibt es keine eindeutige Lösung, jedoch durch die Minimalitätsbedinung existiert eine eindeutige Lösung. Wir wählen nämlich $c = 0$, dann gilt:

$$h_{\{4\}}(2) = \mathbb{P}_2[T_{\{4\}} < \infty] = \frac{1}{3} \text{ und } h_{\{4\}}(3) = \mathbb{P}_3[T_{\{4\}} < \infty] = \frac{2}{3}$$

Beispiel 1.3.10. (Ruinwahrscheinlichkeit)

Hier betrachten wir eine einfache, asymmetrische (falls $p \neq q$) Irrfahrt auf $E = \mathbb{N}_0$ mit dem absorbierenden Zustand 0: Wir sind an der Eintrittswahrscheinlichkeit in $\{0\}$ interessiert (=Absorbtionswahrscheinlichkeit).



$0 < p = 1-q < 1$ $\quad$ $A = \{0\}$

Wieder mittels Satz 1.3.8 ist $h_0(x) := \mathbb{P}_x[T_{\{0\}} < \infty], x \in E$ die minimale, nicht-negative Lösung des Dirichletproblems:

$$\begin{cases} (Lh_{\{0\}})(x) = p(h_{\{0\}}(x+1) - h_{\{0\}}(x)) + q(h_{\{0\}}(x-1) - h_{\{0\}}(x)) = 0 & \text{, für alle} x \neq 0 \\ h_{\{0\}}(0) = 1 \end{cases}$$

Die obere Gleichung folgt aus dem Folgenden und aus der Darstellung $q \cdot h_0(x) + p \cdot h_0(x) = h_0(x)$:

$$(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} - I) \cdot \begin{bmatrix} h_0(0) \\ h_0(1) \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q \cdot h_0(0) - h_0(1) + p \cdot h_0(2) \\ q \cdot h_0(1) - h_0(2) + p \cdot h_0(3) \\ \dots \end{bmatrix}$$

<u>Behauptung 1</u>: Für $p \neq q$ ist die Lösung von $(Lh)(x) = 0, \forall x \in E$ gegeben durch $h(x) = a + b(\frac{q}{p})^x$

Es gilt für $x \in \mathbb{N}$:

$$(Lh)(x) = pb(\frac{q}{p})^x(\frac{q}{p} - 1) + qb(\frac{q}{p})^x(\frac{p}{q} - 1) = b(\frac{q}{p})^x(q - p + p - q) = 0$$

Fall 1: Falls $p < q$, wollen wir a und b bestimmen, sodass es die Bedingunen des Dirchletproblems erfüllt.

Zunächst gilt $\forall x \in \mathbb{N}_0 : h_{\{0\}}(x) \in [0, 1]$, da es ein W-Maß ist. Weil $p < q$ ist die Bedingung nur für alle x erfüllt, falls $b = 0$.

Wegen der Bedingung: $h_{\{0\}}(0) = 1$ folgt $a = 1$.

Damit ist die Eintrittswahrscheinlichkeit für alle $x \in \mathbb{N}_0$: $\mathbb{P}_x[T_{\{0\}} < \infty] = h_{\{0\}}(x) = 1$

Fall 2: $p > q$

Wegen $h_{\{0\}}(0) = 1$ gilt $b = 1 - a$.

Da $\forall x \in \mathbb{N}_0$ gilt $h_{\{0\}}(x) \in [0, 1] \Rightarrow h_{\{0\}}(x) = (\frac{q}{p})^x + a(1 - (\frac{q}{p})^x)$

Es muss $a \geq 0$ gelten. $\overset{\text{Minimalitätsbedingung}}{\Rightarrow} a = 0$

$\Rightarrow x \in \mathbb{N}_0$: $\mathbb{P}_x[T_{\{0\}} < \infty] = h_{\{0\}}(x) = (\frac{q}{p})^x$

<u>Behauptung 2:</u> Falls $p = q$ ist die Lösung des Dirichletproblems gegeben durch: $h(x) = a + bx$, denn

$$(Lh)(x) = 1/2 \cdot b(x + 1 - x) + 1/2 \cdot b(x - 1 - x) = 0$$

Da $\forall x \in \mathbb{N}_0 : h_{\{0\}}(x) \in [0, 1]$ folgt b=0.

Wegen $h_{\{0\}}(0) = 1$ folgt $a = 1$

Damit ist die Eintrittswahrscheinlichkeit für alle $x \in \mathbb{N}_0$: $\mathbb{P}_x[T_{\{0\}} < \infty] = h_{\{0\}}(x) = 1$

Egal wo man startet man landet für alle x im Zustand 0.

Beispiel 1.3.11. (Austerbewahrscheinlichkeit von Verzeigungsprozessen) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Verzweigungsprozess wie in Beispiel ..., d.h. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum $E = \mathbb{N}_0$ und für die Matrixeinträge gilt:

$$p(x, y) = \mu^{*x}(y) \text{ und mit } \mu^{*0}(y) := \mathbf{1}_{\{0\}}(y)$$

Dabei ist μ die gegebene Wahrscheinlichkeitverteilung auf E.

<u>Ziel:</u> Wir wollen die Aussterbewahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_x[T_{\{0\}} < \infty], x \in E$ bestimmen. Bevor wir die diese bestimmen können, müssen wir zunächst folgende Behauptung zeigen:

<u>Beh.:</u> Für $x \in E$ und $\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\mathbb{P}_x[X_n = 0] = \mathbb{P}_1[X_n = 0]^x$

IA: n=0: $\mathbb{P}_x[X_0 = 0] = \mathbb{P}[X_0 = 0 \mid X_0 = x] = \mathbf{1}_{\{x=0\}} = \mathbb{P}_1[X_0 = 0]^x$ wegen $0^0 =: 1$

IV: Gelte die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_0$

IS: $n \to$ n+1:

$\mathbb{P}_x[X_{n+1} = 0] = \sum_{y\in E} \mathbb{P}[X_{n+1} = 0, X_1 = y \mid X_0 = x]$

$= \sum_{y \in E} \mathbb{P}[X_1 = y \mid X_0 = x] \mathbb{P}[X_{n+1} = 0 \mid X_0 = x, X_1 = y]$
$\overset{1.10}{=} \sum_{y \in E} p(x,y) \mathbb{P}_y[X_n = 0]$
$= \sum_{y \in E} \mu^{*x}(y) \mathbb{P}_y[X_n = 0]$
$\overset{IV}{=} \sum_{y \in E} \mu^{*x}(y) \mathbb{P}_1[X_n = 0]^y$
$\overset{Def}{=} \sum_{y \in E} \sum_{y_1 + \ldots + y_x = y} \mu(y_1) \cdot \ldots \cdot \mu(y_x) (\mathbb{P}_1[X_n = 0])^{y_1 + \ldots + y_x}$
$\overset{\{y_1+\ldots+y_x=y\} \cup \{y \in E\} = \{y_1,..,y_x \geq 0\}}{=} \sum_{y_1,..,y_x \geq 0} \mu(y_1) \mathbb{P}_1[X_n = 0]^{y_1} \cdot \ldots \cdot \mu(y_x) \mathbb{P}_1[X_n = 0]^{y_x}$
$= (\sum_{z \geq 0} p(1,z) \mathbb{P}_1[X_n = 0]^z)^x$
$\overset{IV}{=} (\sum_{z \geq 0} p(1,z) \mathbb{P}_z[X_n = 0])^x$
$\overset{1.10}{=} (\sum_{z \geq 0} p(1,z) \mathbb{P}[X_{n+1} = 0 \mid X_0 = 1, X_1 = z])^x$
$\overset{Def}{=} (\sum_{z \geq 0} \mathbb{P}[X_1 = z \mid X_0 = 1] \mathbb{P}[X_{n+1} = 0 \mid X_0 = 1, X_1 = z])^x$
$= \mathbb{P}_1[X_{n+1} = 0]^x$

Weil $\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\{T_{\{0\}} \leq n\} = \{X_n = 0\}$ und
mittels: $\{T_{\{0\}} \leq n\} \nearrow \bigcup_{k=0}^{\infty} \{T_{\{0\}} \leq k\} = \{T_{\{0\}} < \infty\}$
folgt mit Stetigkeit von Maßen:

$$\mathbb{P}_x[T_{\{0\}} < \infty] = lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_x[X_n = 0] = lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_1[X_n = 0]^x = \mathbb{P}_1[T_{\{0\}} < \infty]^x$$

Damit gilt die Behauptung.
Wir haben gezeigt: $h_{\{0\}}(x) = h_{\{0\}}(1)^x =: q^x$
Im folgenden wollen wir $q \in [0,1]$ bestimmen. Da $h_{\{0\}}$ die kleine, nicht-negative Lösung des Dirichletproblems ist, gilt

$$(Lh_{\{0\}})(1) = 0 \iff q = h_{\{0\}}(1) = \sum_{y \in E} \mu(y) h_{\{y\}}(1)^y = G_y(q)$$

wobei wir die erzeugende Funktion von μ"definieren: $G_\mu(s) := \sum_{y \in E} \mu(y) s^y$, $s \in [0,1]$
Dann ist q also ein Fixpunkt der Gleichung $s = G_\mu(s)$.
Wir wollen nun zeigen, dass q der kleinste, nicht-negative Fixpunkt der Gelichung ist und das ist dann äquivalent dazu, dass q die kleine, nicht-negative Lösung des Dirichletproblems ist.
Sei $\overline{q}$ ein weiterer Fixpunkt, dann löst die Funktion $h(x) := \overline{q}^x$ ebenfalls das Dirichletproblem. Da aber mittels dem Satz 1.3.8. $h_{\{0\}}$ die kleinste, nicht-negative Lösung des Dirichletproblems ist gilt:

$$\overline{q} = h(1) \overset{1.3.8.}{\geq} h_{\{0\}}(1) = q$$

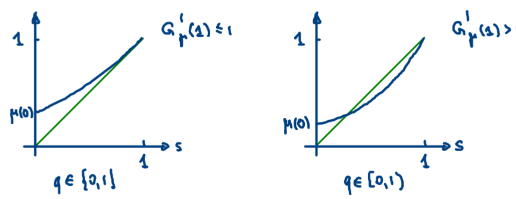
Damit haben wir gezeigt, das q die kleinste, nicht-negative Lösung der Gelichung $s = G_\mu(s)$ ist.
Jetzt wollen wir kurz den kleinsten negativen Fixpunkt nochmal genauer analysieren. Da μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf E ist, gilt

$$G_\mu(1) = \sum_{y \in E} \mu(y) = 1$$

Falls μ entweder linear (d.h. bei linearität würde dann gelten $\mu(0) + \mu(1) = \mu(1+0) = 1$) oder strikt konvex:

$$G'_\mu(1) = lim_{s \nearrow 1} G'_\mu(s) = lim_{s \nearrow 1} \sum_{k \geq 1} k \cdot \mu(k) s^{k-1} = \sum_{k \geq 0} k \cdot \mu(k) < \infty$$

Damit gilt dann schließlich:



Aufgabe 10: ...

Aufgabe 11:...

Definition 1.3.12. (harmonische Funktion)

Sei $A \subset E$. Eine Funktion $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt harmonisch auf A^C, falls

$$\forall x \in A^C : \textbf{ i) } (Lf)(x) \text{ existiert und } \textbf{ ii) } (Lf)(x) = 0$$

Aufgabe 12:...

Frage : Gilt die Markoveigenschaft auch an Stoppzeiten?

Definition 1.3.13. (T-Vergangenheit)

Sei $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ eine Stoppzeit bezüglich eines stochastischen Prozesses $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.Wir nennen

$$\mathcal{F}_T^X := \{A \in \mathcal{F} \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 : A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n^X\}$$

die Menge aller Ereignisse der T-Vergangenheit

Bemerkung 1.3.14. Hier zeigen wir kurz, dass $\mathcal{F}_T^X$ eine σ-Algebra ist:

- Da T eine Stoppzeit ist bzgl. X, ist $\Omega \in \mathcal{F}_T^X$
- Sei $n \in \mathbb{N}_0$: $A \in \mathcal{F}_T^X$ dann ist:
  $A^C \cap \{T = n\} = \underbrace{(A \cap \{T = n\})^C}_{\in \mathcal{F}_T^X} \cap \underbrace{\{T = n\}}_{\mathcal{F}_T^X} \in \mathcal{F}_T^X$
- Seien $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}_T^X$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$
  $(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \cap \{T = n\} = \bigcup_{i=1}^\infty \underbrace{(A_i \cap \{T = n\})}_{\in \mathcal{F}_T^X} \in \mathcal{F}_T^X$

Satz 1.3.15. (Starke Markoveigenschaft)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf dem Zustandsraum E und sei T eine Stoppzeit, dann gilt für ein $A \in \epsilon^{\otimes \mathbb{N}_0}$, $F \in \mathcal{F}_T^X$ und $x \in E$ mit $\mathbb{P}_\nu[F, X_T = x, T < \infty] > 0$

$$\mathbb{P}_\nu[(X_T, X_{T+1}, ...) \in A \mid F, X_T = x, T < \infty] = \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in A]$$

Dabei ist X_T auf $\{T < \infty\}$ definiert durch $X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$

Beweis.
Gelten die Voraussetzungen des Satzes, dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ ein $B \subseteq E^n$ mit

$$F \cap \{T = n\} \cap \{X_T = x\} = \{(X_0, .., X_{n-1}) \in B, X_n = x\}$$

Falls außerdem $\mathbb{P}_\nu[(X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x] > 0$ dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\nu[(X_T, X_{T+1}, ...) \in A \mid F, X_T = x, T = n] \\
&= \mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, ...) \in A \mid (X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x] \\
&\overset{1.2.19}{=} \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in A]
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\nu[(X_T, X_{T+1}, ...) \in A \mid F, X_T = x, T < \infty] \\
&= \frac{\mathbb{P}_\nu[(X_T, X_{T+1}, ...) \in A, F, X_T = x, T < \infty]}{\mathbb{P}_\nu[F, X_T = x, T < \infty]} \\
&= \frac{\mathbb{P}_\nu[(X_T, X_{T+1}, ...) \in A, F, X_T = x, \bigcup_{n=0}^{\infty}\{T = n\}]}{\mathbb{P}_\nu[F, X_T = x, T < \infty]} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}_\nu[(X_T, X_{T+1}, ...) \in A, F, X_T = x, \{T = n\}]}{\mathbb{P}_\nu[F, X_T = x, T < \infty]} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}_\nu[(X_T, X_{T+1}, ...) \in A \mid F, X_T = x, \{T = n\}] \cdot \mathbb{P}_\nu[F, X_T = x, \{T = n\}]}{\mathbb{P}_\nu[F, X_T = x, T < \infty]} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in A] \cdot \mathbb{P}_\nu[F, X_T = x, \{T = n\}]}{\mathbb{P}_\nu[F, X_T = x, T < \infty]} \\
&= \frac{\mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in A] \cdot \mathbb{P}_\nu[F, X_T = x, \bigcup_{n=0}^{\infty}\{T = n\}]}{\mathbb{P}_\nu[F, X_T = x, T < \infty]} \\
&= \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in A]
\end{aligned}$$

□

Korollar 1.3.16. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf dem Zustandraum E und $S_{\{x\}}$ eine Treffzeit.

Wir definieren die Funktion, welche zählt, wie häufig der Punkt x getroffen wird, als

$$V_x := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbf{1}_{X_n = x}, \text{ mit } x \in E$$

Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbb{P}_x[V_x > k] = (1 - \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty])^k \text{ (Geometrisch Verteilt)}$$

Falls zusätzlich $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty] > 0$ dann gilt:

$$\mathbb{E}_x[V_x] = \frac{1}{\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty]}$$

Beweis. Wir definieren die k-te Treffzeit

$$S^0_{\{x\}} := 0 \text{ und } S^k_{\{x\}} := inf\{n > S^{k-1}_{\{x\}} \mid X_n = x\}, \ ,k \in \mathbb{N}$$

Dann gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \{V_x > k\} \cap \{X_0 = x\} = \{S^k_x < \infty\} \cap \{X_0 = x\}$$

Mittels der starken Markoveigenschaft können wir nun zeigen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x[V_x > k+1 \mid V_x > k] &= \mathbb{P}_x[S^{k+1}_{\{x\}} < \infty \mid S^k_{\{x\}} < \infty] \\
&= \mathbb{P}_x[S^{k+1}_{\{x\}} < \infty \mid S^k_{\{x\}} < \infty, X_{S^k_{\{x\}}} = x] \\
&= \mathbb{P}_\nu[\underbrace{inf\{n > 0 \mid X_{S^k_{\{x\}}+n} = x\}}_{\text{erste Treffzeit nachdem man k-Mal getroffen hat}} + S^k_{\{x\}} < \infty \mid S^k_{\{x\}} < \infty, X_{S^k_{\{x\}}} = x, X_0 = x] \\
&\overset{\text{Starke Markoveig.}}{=} \mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} < \infty]
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x[V_x > k] &= \mathbb{P}_x[V_x > 1] \cdot \mathbb{P}_x[V_x > 2 \mid V_x > 1] \cdot \mathbb{P}_x[V_x > 3 \mid V_x > 2] \cdot ... \cdot \mathbb{P}_x[V_x > k \mid V_x > k-1] \\
&= \prod_{l=1}^{k-1} \mathbb{P}_x[V_x > l+1 \mid V_x > l] \cdot \mathbb{P}_x[V_x > 1] \overset{Oben}{=} \mathbb{P}_x[V_x > 1] \cdot \prod_{l=1}^{k-1} \mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} < \infty] = \mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} < \infty]^k
\end{aligned}$$

Wegen $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] = 1 - \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty]$ gilt die Aussage.
Nun zum Erwartungswert:

Falls $\mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} < \infty] < 1$ dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[V_x] = \mathbb{E}_x[\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbf{1}_{X_n=x}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_x[V_x > k] &= \mathbb{P}_x[V_x > 0] + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[V_x > k] \\
&\overset{\text{Teil 1}}{=} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} < \infty]^k \\
&\overset{\text{Geo.Reih.}}{=} \frac{1}{1 - \mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} < \infty]} = \frac{1}{\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty]}
\end{aligned}$$

$\square$

Kapitel 2

Struktureigenschaften der Übergangsmatrix

Im folgenden ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einem höchstens abzählbaren Zustandsraum E.

2.1 Klassifikation von Zuständen

Definition 2.1.1. (absorbierende, rekurrente, transiente Zustände)
Ein Zustand $x \in E$ heißt:

- absorbierend, falls $p(x, x) = 1$
- rekurrent, falls $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] = 1$
- transient, falls $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] < 1$

Dabei ist $S_{\{x\}} := inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = x\}$ die Treffzeit.
Ein Zustand kann entweder rekurrent oder transient sein.

Bemerkung 2.1.2. x ist absorbierend $\Rightarrow$ x ist rekurrent

Frage: Wie kann man rekurrente und transiente Zustände alternativ charakterisieren?

Satz 2.1.3. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit dem Zustandsraum E, dann gilt:

a) $x \in E$ ist rekurrent $\iff$ $\mathbb{P}_x[X_n = x,$ u.o (unendlich oft) $] = 1$ $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x, x) = \infty$

b) $x \in E$ ist transient $\iff$ $\mathbb{P}_x[X_n = x,$ u.o (unendlich oft) $] = 0$ $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x, x) < \infty$

Beweis. Wir definieren wieder die Zufallsvariable, welche die Besuche eines Zustands x zählt.

$$\forall x \in E : V_x := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n = x\}}$$

Außerdem gilt: $\mathbb{E}_x[V_x] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x[X_n = x] = \mathbb{P}_x[X_0 = x] + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[X_n = x] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x, x)$

Wir zeigen die Aussagen mittels Ringschluss.

a)
- z.z. $x \in E$ ist rekurrent $\Rightarrow \mathbb{P}_x[X_n = x, \text{ u.o }] = 1$

  Da x rekurrent gilt per Def. $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] = 1$.

  $\mathbb{P}_x[X_n = x, \text{ u.o }] = \mathbb{P}_x[V_x = \infty] \overset{\text{st. v. Maßen}}{=} lim_{k\to\infty}\mathbb{P}_x[V_x > k]$

  $\overset{\text{Korollar 1.3.16}}{=} lim_{k\to\infty}(1 - \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty])^k$

  $= lim_{k\to\infty}\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty]^k$

  $\overset{VSS}{=} lim_{k\to\infty}(1)^k = 1$

- z.z. $\mathbb{P}_x[X_n = x, \text{ u.o }] = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x, x) = \infty$

  Zunächst gilt: $\mathbb{P}_x[X_n = x, \text{ u.o }] = \mathbb{P}_x[V_x = \infty] = 1$, weil dann $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty] = 0$ folgt:

  $\mathbb{E}_x[V_x] = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x, x) \overset{oben}{=} \mathbb{E}_x[V_x] - 1 = \infty$

- z.z. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x, x) = \infty \Rightarrow x \in E$ ist rekurrent, also $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] = 1$

  Angenommen $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] < 1$, dann würde gelten:

  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x, x) = \mathbb{E}_x[V_x] - 1 \overset{\text{Korollar 1.3.16}}{=} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty]^{-1} - 1$

  $\leq \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty]^{-1}$, da $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] < 1$ per Annahme gilt $\Rightarrow \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty] > 0$

  Also gilt $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x, x) \leq \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty]^{-1} < \infty$

  Widerspruch! Damit folgt die Aussage.

b)
- z.z. $x \in E$ ist transient $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x, x) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}_x[X_n = x, \text{ u.o }] = 0$

  Sei x transient, also gilt $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] < 1$, dann gilt mittels der analogen Argumentation wie eben:

  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x, x) = \mathbb{E}_x[V_x] - 1 \overset{\text{Korollar 1.3.16}}{\leq} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty]^{-1} < \infty$, da $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty]^{-1} > 0$.

  Weil $\mathbb{E}_x[V_x] < \infty$ folgt $\mathbb{P}_x[X_n = x, \text{ u.o }] = 0$ (klar Intuitiv, wenn die man erwartet den Zustand x endlich oft zu treffen, dann ist die WK, dass man den Zustand unendlich oft trifft, gleich 0.)

- z.z. $\mathbb{P}_x[X_n = x, \text{ u.o }] = 0 \Rightarrow x \in E$ ist transient, also $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] < 1$

  Angenommen $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] = 1$, dann würde gelten:

  $\mathbb{P}_x[X_n = x, \text{ u.o }] = \mathbb{P}_x[V_{\{x\}} = \infty] \overset{\text{st. v. Maßen}}{=} lim_{k\to\infty}\mathbb{P}_x[V_x > k]$

  $\overset{\text{Korollar 1.3.16}}{=} lim_{k\to\infty}\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty]^k = 1$, Widerspurch!

  Damit gilt die Aussage.

□

Definition 2.1.4. (Greenfunktion von X)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf dem Zustandsraum E und wir definieren $V_x := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n = x\}}$,

$x \in E$. Dann ist die Greenfunktion von $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert als:

$$G(x,y) = \mathbb{E}_x[V_y] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,y) \in [0,\infty]$$

Korollar 2.1.5. Ist $y \in E$ ein transienter Zustand, dann gilt:

$$\forall x \in E : lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = 0$$

Beweis. Sei $y \in E$ ein transienter Zustand, dann gilt mit Satz 2.1.3: $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(y,y) < \infty$
Daraus folgt: $lim_{n\to\infty} p_n(y,y) = 0$ ist Nullfolge.
Sei $x \in E$ beliebig und $x \neq y$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
p_n(x,y) = \mathbb{P}_x[X_n = y] &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[X_n = y, S_{\{y\}} = k] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k] \cdot \mathbb{P}_x[X_n = y \mid S_{\{y\}} = k] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k] \cdot \mathbb{P}_x[X_n = y \mid X_k = y, S_{\{y\}} = k] \\
&\overset{\text{Satz 1.2.19}}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k] \cdot \mathbb{P}_y[X_{n-k} = y] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k] \cdot p_{n-k}(y,y)
\end{aligned}$$

Aufgrund der Eigenschaft

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_n &= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2) + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3) + ... \\
&= a_1 \cdot (b_1 + b_2 + ...) + a_2 \cdot (b_2 + b_3 + ...) + ... \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{n=k}^{\infty} b_n
\end{aligned}$$

gilt dann:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k] \cdot p_{n-k}(y,y) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k] \sum_{n=k}^{\infty} p_{n-k}(y,y) \\
&= \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_n(y,y) \\
&= \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] \cdot (1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} p_n(y,y)}_{<\infty,\text{ da tranient}}\ ) < \infty
\end{aligned}$$

Also muss auch $p_n(x,y)$ für alle $x \neq y$ eine Nullfolge sein, d.h. $lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = 0$. $\square$

Aufgabe 13:...

Beispiel 2.1.6. (Kartenhausprozess)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf dem Zustandsraum $E = \mathbb{N}_0$, dessen Übergangsmatrix $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ mittels dem Übergangsgraphen wie folgt definiert ist

Frage: Für welche Bedingungen an $(p_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ ist der Zustand $x = 0$ rekurrent? Durch die Konstruktion des Übergangsgraphen gibt es genau einen Pfad, der in 0 startet und nach n-Schritten wieder in 0 endet für jedes $n \in \mathbb{N}$ (nämlich $(x_o, .., x_n) = (0, 1, .., n-1, 0)$. Deswegen können wir die folgende Wahrscheinlich eindeutig schreiben als:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}_0[S_{\{0\}} = n] = (1-p_0) \cdot ... \cdot (1-p_{n-2}) \cdot p_{n-1}$$

Wir setzen $u_0 := 1$ und $u_n = (1-p_0) \cdot ... \cdot (1-p_{n-1})$ mit $n \in \mathbb{N}$, durch Ausklammern gilt dann:

$$\mathbb{P}_0[S_{\{0\}} = n] = u_{n-1} - u_n$$

Dadurch kommen wir auf die Darstellung:

$$\mathbb{P}_0[S_{\{0\}} < \infty] = lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{P}_0[S_{\{0\}} = n] = lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}u_{n-1} - u_n = lim_{N\to\infty}(u_0 - u_N)$$
$$= u_0 - lim_{N\to\infty}u_N = 1 - lim_{N\to\infty}u_N$$
$$= 1 - lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}(1-p_n)$$

Nun können wir unsere Behauptung aufstellen, dazu erinnern wir uns dass ein Zustand $x \in E$ rekurrent ist, falls $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] = 1$. Dies ist auch der Fall, falls $lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}(1-p_n) = 0$. Dadurch kommen wir auf folgende Behauptung, die die Bedinung an die $(p_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ enthält:

<u>Beh.:</u> Falls $\forall i \in \mathbb{N}_0 : p_i \in (0,1)$, dann gilt

$$lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}(1-p_n) = 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty}p_n = \infty$$

<u>Bew:</u>

- "$\Leftarrow$"Wegen der Eigenschaft: $\forall x \geq 0 : e^{-x} \geq 1 - x$ gilt:
  $0 \leq lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}(1-p_n) \leq lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}e^{-p_n} = lim_{N\to\infty}e^{-\sum_{n=0}^{N-1}p_n} = 0$, aufgrund der Eigenschaft $\sum_{n=0}^{\infty}p_n = \infty$, da $p_n > 0$.
  Damit folgt Gleichheit

- " $\Rightarrow$ " Jetzt zeigen wir via Induktion die Aussage: $\forall N \in \mathbb{N}_0 : \prod_{n=m}^{m+N}(1-p_n) \geq 1 - \sum_{n=m}^{m+N}p_n$. Im Widerspruchsbeweis der danach folgt, wo wir Annehemn das die Reihe der p_n endlich wäre, nutzen wir diese Aussage.

  IA N=0: Gleichheit gilt sofort.

  IV Gelte die Aussage $\forall N \in \mathbb{N}$

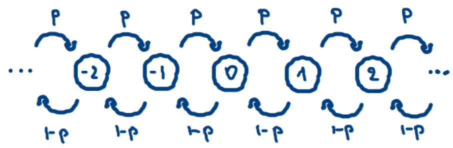
  IS $N \to N+1$:
  $\prod_{n=m}^{m+N+1}(1-p_n) = (\prod_{n=m}^{m+N}(1-p_n))\cdot(1-p_{m+N+1}) \overset{IV}{\geq} (1-\sum_{n=m}^{m+N}p_n)\cdot(1-p_{m+N+1})$
  $= (1-p_{m+N+1}) - \underbrace{(1-p_{m+N+1})}_{\leq 1}\cdot\sum_{n=m}^{m+N}p_n) \geq (1-p_{m+N+1}) - \sum_{n=m}^{m+N}p_n)$
  $= 1 - \sum_{n=m}^{m+N+1}p_n$

  Nun kommen wir zum Widerspruchsbeweis: Angenommen $\sum_{n=0}^{\infty}p_n < \infty$
  Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $0 < \sum_{n=m}^{\infty}p_n < 1$. Damit gilt:
  $0 \overset{VSS}{=} lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}(1-p_n) = \prod_{n=0}^{m-1}(1-p_n)lim_{N\to\infty}\prod_{n=m}^{N-1}(1-p_n)$
  $\geq \prod_{n=0}^{m-1}(1-p_n)lim_{N\to\infty}(1-\sum_{n=m}^{N-1}p_n) = \prod_{n=0}^{m-1}(1-p_n)\cdot(1-\underbrace{\sum_{n=m}^{\infty}p_n}_{<1}) > 0$, Widerspruch!

  Damit ist $\sum_{n=0}^{\infty}p_n = \infty$

Beispiel 2.1.7. (einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf $E = \mathbb{Z}$ mit folgendem Übergangsgraphen



$p \in (0,1)$

Frage: Wenn wir im Zustand x=0 starten, ist dann x=0 rekurrent oder transient?

Zunächst beobachten wir, dass $p_{2n+1}(0,0) = 0$, da wir in x=0 starten.Außerdem gilt

$\forall n \in \mathbb{N} : p_{2n}(0,0) = \binom{2n}{n} p^n \cdot (1-p)^{2n-n}$(mittels kombinatorik, wie viele Möglickeiten gibt es)

Da wir gleich über die $p_{2n}(0,0)$ eine Reihe bilden, schauen wir uns zunächst an, wie man diesen Ausdruck asympotisch schreiben kann

Dazu definieren wir die Relation: $a_n \sim b_n :\iff lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

Die Stirlingformel ist: $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$. Damit gilt:

$$p_{2n}(0,0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} p^n (1-p)^n \sim \frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} \frac{(2n)^{2n}}{n^{2n}} p^n (1-p)^n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n$$

Fall 1: $p = \frac{1}{2} \Rightarrow p_{2n}(0,0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$ Die asymptotische Eigenschaft kann man auch mittels Quantoren schreiben als: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : p_{2n}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \geq \frac{1}{2\cdot\sqrt{n}}$. Daraus folgt

$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(0,0) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} p_{2n}(0,0) \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$

Damit ist x=0 rekurrent nach Satz 2.1.3

Fall 2: $p \neq \frac{1}{2} \Rightarrow 4p(1-p) =: r < 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : p_{2n}(0,0) \leq r^n$

Nach oben Abschätzen ergibt:

$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(0,0) \overset{\text{Abzählbarkeit von } \mathbb{N}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n}(0,0)$

$\overset{p_n<1}{\leq} n_0 + \sum_{n=n_0}^{\infty} p_{2n}(0,0) \leq n_0 + \sum_{n=n_0}^{\infty} r^n < \infty$, da $r < 1$

Damit ist x=0 nach Satz 2.1.3 transient.

Beispiel 2.1.8. (einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^2$) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf $E = \mathbb{Z}^2$ mit $p(x,y) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\|x-y\|=1}$. Wenn wir wieder in 0 starten gilt erneut: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : p_{2n+1}(0,0) = 0$.

Damit man nach 2n Schritten wieder nach x=0 zurückkehrt, muss der Prozess k-Mal nach rechts bzw. links und dann wieder zurück und (n-k)-Mal nach oben/ unten und dann wieder zurück $(2 \cdot k + 2 \cdot (n-k)) = 2n$.

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
p_{2n}(0,0) &= \underbrace{4^{-2n}}_{\text{ÜbergangsWK}} \underbrace{\sum_{k=0}^{n}}_{\text{Wie oft man in welche Richtung}} \underbrace{\frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2}}_{MultibinomialKoeff.} \\
&= 4^{-2n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} \frac{(n!)^2}{(n!)^2} \\
&= 4^{-2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n} \frac{(n!)^2}{(k!)^2((n-k)!)^2}, \\
&= 4^{-2n} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k!)((n-k)!)} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\
&= 4^{-2n} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k!)((n-k)!)} \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-n+k)!} \\
&= 4^{-2n} \binom{2n}{n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}}_{=\binom{2n}{n}} = (\binom{2n}{n} 4^{-n})^2 \sim \frac{1}{\pi n}
\end{aligned}
$$

Wir haben also gezeigt: $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$: $p_{2n}(0,0) \geq \frac{1}{4n}$. Dann gilt:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} p_n(0,0) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} p_{2n}(0,0) \geq 1/4 \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty
$$

Damit ist x=0 rekurrent.

Definition 2.1.9. (positiv- und nullrekurrent)
Ein rekurrenter Zustand $x \in E$ heißt

- postiv rekurrent, falls $\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] < \infty$
- nullrekurrent, falls $\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] = \infty$

Satz 2.1.10. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf dem Zustandsraum E.

$$
\text{Ein rekurrenter Zustand ist nullrekurrent} \iff lim_{n\to\infty} p_n(x,x) = 0
$$

Beweis. Siehe Kapitel 4 □

Korollar 2.1.11. Ist $y \in E$ ein nullrekurrenter Zustand $\Rightarrow \forall x \in E : lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = 0$

Beweis. Da y nullrekurrent folgt mit dem vorherigen Satz, dass $lim_{n\to\infty} p_n(y,y) = 0$. Außerdem gilt:

$$
p_n(x,y) \overset{Bew-2.1.5}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k] p_{n-k}(y,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k] p_{n-k}(y,y) \mathbf{1}_{k\leq n}
$$

Wir definieren $f_n(k) := p_{n-k}(y,y)\mathbf{1}_{k\le n}$ mit $k \in \mathbb{N}$.
Aufgrund vom vorherigen Satz konvergiert $p_{n-k}(y,y)$ punktweise gegen 0, d.h. $\forall k \in \mathbb{N} : f_n(k) \to 0, n \to \infty$.
Außerdem gilt offensichtlicherweise $\forall n \in \mathbb{N}\ \|f_n\|_\infty \le 1$.
Da $\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k]$ auch beschränkt ist, folgt die Aussage aus dem Satz von Lebesgue mittels dominierter Konvergenz.
Also gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k] p_{n-k}(y,y)\mathbf{1}_{k\le n} \overset{DCT}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k] \lim_{n\to\infty} p_{n-k}(y,y)\mathbf{1}_{k\le n} = 0$$

□

Definition 2.1.12. (Periode)
Für jedes $x \in E$ definieren wir $d(x) := ggT\{n \in \mathbb{N}_0 \mid p_n(x,x) > 0\}$ die Periode des Zustands x. Dabei steht "ggT"für "größter gemeinsame Teiler". Falls d(x) =1, dann nennen wir den Zustand aperiodisch. Dieser Zustand hat keine feste Periode.

Bemerkung 2.1.13. Sei $D \subseteq \mathbb{Z}$, dann nennen wir $d \in \mathbb{N}$ einen gemeinsamen Teiler von D (schreibweise: $d \mid D$), falls $\forall x \in D$: $\frac{x}{d} \in \mathbb{Z}$.
Falls $D = \{0\}$, dann ist jedes $d \in \mathbb{N}$ ein gemeinsamer Teiler, damit ist $ggT(D) = \infty$
Deswegen sei $D \neq \{0\}$, dann gilt die Eigenschaft:

$$d \mid D \Rightarrow d \le min\{|x| \mid x \in D \setminus \{0\}\}$$

Außerdem gilt

$$ggT(D) = min\{|x| \mid x \in D \setminus \{0\}\} \iff \{ggT(D), -ggT(D)\} \cap D \neq \emptyset$$

Beispiel 2.1.14. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine einfache Irrfahrt auf dem Torus $E = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ mit $N \ge 2$, dann gilt:

$$\forall x \in E : d(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls N ungerade} \\ 2 & \text{, falls N gerade} \end{cases}$$

Satz 2.1.15. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{Z}$ mit $D \neq \{0\}$ dann gilt

a) $\exists k \in \mathbb{N}$, $a_1, .., a_k \in \mathbb{Z}$, $d_1, ..., d_k \in D$ sodass $ggT(D) = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot d_i$

b) Falls zusätzlich $D \subseteq \mathbb{N}_0$ und die Eigenschaft, $d_1, d_2 \in D \Rightarrow d_1 + d_2 \in D$ erfüllt ist, dann gilt

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ sodass: } \{n \cdot ggT(D) \mid n \ge N\} = \{d \in D \mid d \ge N \cdot ggT(D)\}$$

Beweis. a) Sei $\hat{D}$ die kleinste Teilmenge von $\mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft:

$$D \subseteq \hat{D} \text{ und } \forall d_1, d_2 \in \hat{D} \Rightarrow d_1 + d_2 \in \hat{D} \text{ und } d_1 - d_2 \in \hat{D}$$

Wir betrachten die Menge:

$$\mathcal{D} = \{\hat{d} \in \hat{D} \mid \exists k \in \mathbb{N}, a_1, ..., a_k \in \mathbb{Z}, d_1, ..., d_k \in D, \hat{d} = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot d_i\} \subseteq \hat{D}$$

z.z. $\mathcal{D} = \hat{D}$

Nach VSS gilt bereits $\mathcal{D} \subseteq \hat{D}$

Seien $x, y \in \mathcal{D}$, dann ist $x + y \in \mathcal{D}$ und $x - y \in \mathcal{D}$, dafür wählt man $a_1 = a_2 = 1$ oder $a_1 = a_2 = -1$ für Substraktion und $k = 2$. Weil $\hat{D}$ die kleinste Menge ist mit diesen Eigenschaften muss gelten $\hat{D} \subseteq \mathcal{D}$.Damit gilt Gleichheit.

z.z. $ggT(D) = ggT(\hat{D})$

Es gilt: $\forall k \in \mathbb{N}, a_1, ..., a_k \in \mathbb{Z}, d_1, ..., d_k \in D : ggT(D) \mid \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot d_i$, da

$ggT(D) \mid D \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot d_i}{ggT(D)} = \sum_{i=1}^{k} \overbrace{a_i \cdot \underbrace{\frac{d_i}{ggT(D)}}_{\in \mathbb{Z}}}^{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$

Damit gilt $ggT(D) \mid \mathcal{D}$. Wegen der eben gezeigten Gleichheit, gilt $ggT(D) \mid \hat{D}$

Es folgt $ggT(D) \leq ggT(\hat{D})$, da $ggT(D)$ ein Teiler ist von $\hat{D}$ aber es könnte einen größeren geben in $\hat{D}$.

Andererseits ist nach Definition von $\hat{D}$, $D \subseteq \hat{D}$. Deshalb ist der $ggT(\hat{D})$ auch ein Teiler von D. Dadurch folgt wieder $ggT(\hat{D}) \leq ggT(D)$.

z.z. $ggT(\hat{D}) \in \hat{D}$

Wir definieren $m := min\{x \in \mathbb{N} \mid x \in \hat{D}\}$. Wegen Bemerkung 2.1.13 folgt, $ggT(\hat{D}) \leq m$.

Nun zeigen wir die andere Richtung: Durch Anwendung des euklidischen Algorithmus (nicht eingeführt) kann man jedes $\hat{d} \in \hat{D}$ darstellen als:

$\hat{d} = a \cdot m + r$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $r \in \{0, ..., m-1\}$. Umformen ergibt:

$r = \overbrace{\hat{d}}^{\in \hat{D}} - \overbrace{a \cdot m}^{\in \hat{D}} \in \hat{D}$

Falls $r \neq 0$ dann gilt: $r < m$. Widerspruch zur Definition von m!

Damit ist $m := max\{x \in \mathbb{N} \mid x \in \hat{D}\}$ und ein Teiler von $\hat{D}$. Daraus folgt dann, dass $m \leq ggT(\hat{D})$ (es kann ja einen größeren geben).

Nun haben wir Gleichheit gezeigt: $m = ggT(\hat{D})$ und da m per Definition in $\hat{D}$ ist haben wir die Aussage gezeigt.

Jetzt gilt $ggT(D) = ggT(\hat{D}) \in \hat{D} = \mathcal{D}$, damit kann man es als endliche Linearkombination darstellen.

b) z.z. $\exists N \in \mathbb{N} : \{n \cdot ggT(D) \mid n \geq N\} \subseteq D$

Da D bereits abgeschlossen ist unter Addition, können wir die zugehörige Menge $\hat{D}$ (Wie wir sie in Teil a) eingeführt haben) definieren als

$\hat{D} = \{d_2 - d_1 \mid d_1, d_2 \in D \cup \{0\}\}$ (ist bereits abgeschlossen bzgl Add.).

Über Beweisteil a) gilt: $ggT(D) = ggT(\hat{D}) = min\{x \in \mathbb{N} \mid x \in \hat{D}\}(= m)$

Damit existieren $d_1 \in D \cup \{0\}$ und $d_2 \in D$ mit $d_2 > d_1$ sodass $ggT(D) = d_2 - d_1$

- Fall 1: $d_1 = 0$

  $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : n \cdot ggT(D) = nd_2 \in D$

  $\Rightarrow$ N=1

- $d_1 \neq 0$ wähle ein $a \in \mathbb{N}$ mit $d_1 = a \cdot ggT(D)$.

  Dann gilt: $\forall m, r \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq r < m$ (mittels $a^2 + ma + r$ können wir jede natürliche Zahl, die größer ist als a^2 darstellen):

$$\begin{aligned}(a^2 + ma + r)ggT(D) = (a+m)a \cdot ggT(D) + r \cdot ggT(D) &= (a+m)d_1 + r(d_2 - d_1) \\ &= \underbrace{(a+m-r)d_1}_{\in D} + \underbrace{rd_2}_{\in D} \in D\end{aligned}$$

  Wir haben also gezeigt, dass jede Zahl die größer ist als a^2 multipliziert mit ggT(D) in D ist. Wir wählen also $N = a^2$ und dann gilt die Aussage.

Dann gilt $\{n \cdot ggT(D) \mid n \geq N\} \subseteq D \Rightarrow \{n \cdot ggT(D) \mid n \geq N\} \subseteq \{d \in D \mid d \geq N \cdot ggT(D)\}$.

Es muss auch gelten: $\{d \in D \mid d \geq N \cdot ggT(D)\} \subseteq \{n \cdot ggT(D) \mid n \geq N\}$, da

$N \leq \frac{d}{ggT(D)} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{d}{ggT(D)} \in \{n \cdot ggT(D) \mid n \geq N\}$

□

Korollar 2.1.16. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf dem Zustandsraum E. Dann gilt $\forall x \in E$:

a) Die Periode ist endlich, d.h. $d(x) < \infty \Rightarrow \exists N(x) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N(x) : p_{d(x) \cdot n}(x, x) > 0$

   Interpretation:

a) x ist aperiodisch $\iff \exists N(x) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N(x) : p_n(x, x) > 0$

   Interpretation:

Beweis. Für jedes $x \in E$ definieren wir $D(x) := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid p_n(x, x) > 0\}$.

Falls $D(x) \neq \{0\}$, dann gilt

$$\forall n_1, n_2 \in D(x) : p_{n_1+n_2}(x, x) \overset{Chapman}{=} \sum_{z \in E} p_{n_1}(x, z) \cdot p_{n_2}(z, x) \geq p_{n_1}(x, x) \cdot p_{n_2}(x, x) > 0$$

Damit ist $n_1+n_2 \in D(x)$, also ist D(x) abgeschlossen bzgl. Addition und wir können Satz 2.1.15 b) verwenden:

a) $d(x) < \infty \Rightarrow D(x) \neq \{0\} \overset{2.1.15b)}{\Rightarrow} \exists N(x) \in \mathbb{N} \forall n \geq N(x) : p_{nd(x)}(x,x) > 0$

b) " $\Rightarrow$ " folgt direkt aus a)

" $\Leftarrow$ " Gelte $\forall n \geq N(x) \in \mathbb{N} : p_n(x,x) > 0$, dann enthält D(x) unendlich viele Primzahlen

$\Rightarrow d(x) = ggT(D(x)) = 1$

□

Beispiel 2.1.17. (Träge (lazy) Markovkette) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf dem Zustandsraum E. Angenommen der Zustand $X \in E$ ist periodisch, d.h. $d(x) \geq 2$.
Wir definieren $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P')-Markovkette auf dem Zustandsraum E, wobei $P' = \lambda \cdot Id + (1-\lambda)P$ mit $\lambda \in [0,1]$. Dann gilt

$$\forall x \in E : \{1\} \in \{n \in \mathbb{N} \mid p'_n(x,x) > 0\}$$

$$\Rightarrow \forall x \in E : \ d(x) = 1$$

Damit ist der Zustand x aperiodisch bezüglich $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Man nennt sie auch die träge Markovkette, d.h. wir haben eine Markovkette konstruiert, die stehen bleibt. D.h. wir haben sie aperiodisch gemacht.

Geht das auch anders herum? Ja:
Aufgabe 14:...

2.2 Klassifikation von Markovketten

Definition 2.2.1. (erreichbar,kommunizieren, wesentlich)

i) Ein Zustand $y \in E$ heißt erreichbar von einem Zustand $x \in E$ $(x \to y)$, falls
$\exists n \in \mathbb{N}_0$: $p_n(x,y) > 0$

ii) Zwei Zustände $x, y \in E$ heißen kommunizierend $(x \leftrightarrow y)$, falls
$(x \to y)$ und $(y \to x)$.

iii) Eine Teilmenge $\emptyset \neq K \subseteq E$ heißt kommunizierende Klasse, falls

- $\forall x, y \in K : (x \leftrightarrow y)$
- Abgeschlossenheit: Falls $y \in E$ und $x \in K$ mit $(x \to y) \Rightarrow y \in K$

iv) Ein Zustand $x \in E$ nennen wir wesentlich falls $x \in K$ bzw. unwesentlich, falls $x \notin K$.

Bemerkung 2.2.2. Jedes $x \in E$ liegt **höchstens** in einer kommunizierenden Klasse $(\{y \in E \mid x \to y\})$

Beispiel 2.2.3.

kommunizierende Klassen : $\{1,2,3\}$, $\{5\}$

unwesentliche Zustände : $\{4,6,7\}$

Aufgabe 15:...

Satz 2.2.4. Die Relation $\leftrightarrow$ ist eine Äquivalenzrelation. Dabei sind auf der Menge der wesentlichen Zustände die zugehörigen Äquivalenzklassen die kommunizierenden Klassen.

Beweis. Offensichtlich ist $\leftrightarrow$ symmetrisch und reflexiv.
Nun zur Transitivität: Sei $x, y, z \in E$ mit $x \leftrightarrow y$ und $y \leftrightarrow z$.
$\Rightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $p_{n_1}(x,y) > 0$ und $p_{n_2}(y,z) > 0$. Mittels Chapman folgt direkt:
$p_{n_1+n_2}(x,z) \geq p_{n_1}(x,y)p_{n_2}(y,z) > 0 \Rightarrow x \to z$.
Die andere Richtung ist analog.
Mittel der Definition der kommunizierenden Klasse folgt direkt die zweite Aussage. □

Satz 2.2.5. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P) Markovkette mit Zustandsraum E mit $x, y \in E$.

$$x \text{ ist rekurrent und } (x \to y) \Rightarrow (y \to x) \text{ und } y \text{ ist rekurrent}$$

Beweis.

- z.z. $y \to x$

  Angenommen x sei von y nicht erreichbar, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : p_n(y,x) = 0$.

  Wir wählen ein $n_0 \in \mathbb{N} : p_{n_0}(x,y) > 0$, da $x \to y$

  Zunächst gilt die folgende Eigenschaft:

$$\{X_{n_0} = y, X_{n_0+1} \neq x, X_{n_0+2} \neq x, ...\} \subseteq \{X_n \neq x, n > n_0 \in \mathbb{N}\} \subseteq \{X_n = x, \text{endlich oft}\}$$

  Weil x rekurrent ist gilt:

  $0 \overset{\text{Satz 2.1.3}}{=} \mathbb{P}_x[X_n = x, \text{endlich oft}]$
  $\geq \mathbb{P}_x[X_{n_0} = y, X_{n_0+1} \neq x, X_{n_0+2} \neq x, ...]$
  $= \mathbb{P}_x[X_{n_0} = y] \cdot \mathbb{P}_x[X_{n_0} = y, X_{n_0+1} \neq x, X_{n_0+2} \neq x, ... \mid X_{n_0} = y]$
  $\overset{\text{Satz 1.2.19}}{=} \mathbb{P}[X_{n_0} = y \mid X_0 = x] \cdot \mathbb{P}_y[X_1 \neq x, X_2 \neq x, ...]$

$= p_{n_0}(x,y) \cdot \mathbb{P}_y[X_1 \neq x, X_2 \neq x, ...]$

Wir definieren $A_n = \{X_1 \neq x, ..., X_n \neq x\}$, dann gilt $A_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x_1 \neq x, X_2 \neq x, ...\}$ und

$\mathbb{P}_y[X_1 \neq x, ..., X_n \neq x] = 1 - \mathbb{P}_y[\{X_1 \neq x, ..., X_n \neq x\}^C] = 1 - \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}_y[X_k = x]}_{\overset{VSS}{=} p_k(x,y)=0} = 1$

Dabei ist $\{X_1 \neq x, ..., X_n \neq x\}^C = \{\exists k \leq n : X_k = x\} = \bigcup_{k=1}^{n}\{X_k = x\}$

Mittels der Stetigkeit von Maßen erhalten wir

$\mathbb{P}_y[X_1 \neq x, X_2 \neq x, ...] = lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_y[X_1 \neq x, ..., X_n \neq x] = 1$

Schließlich gilt:

$0 \geq p_{n_0}(x,y) \cdot \mathbb{P}_y[X_1 \neq x, X_2 \neq x, ...] = p_{n_0}(x,y) \overset{VSS}{>} 0$, Widerspruch!

Damit gilt die Aussage.

- z.z. y ist rekurrent

  Seien $k, l \in \mathbb{N}$ so gewählt, sodass $p_k(x,y) > 0$ und $p_l(y,x) > 0$. Dann gilt mittels Chapman:

$$\forall n \in \mathbb{N} : p_{k+l+n}(y,y) \geq p_l(y,x) \cdot p_n(x,x) \cdot p_k(x,y)$$

  Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{k+l+n}(y,y) \geq \underbrace{p_l(y,x)}_{>0} \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x)) \cdot \underbrace{p_k(x,y)}_{>0} \overset{\text{Satz 2.1.3}}{=} \infty$$

  da x rekurrent ist.

□

Korollar 2.2.6. Rekurrente Zustände sind wesentlich, d.h. sie sind in einer kommunizierenden Klasse.

Beweis. Sei $x \in E$ rekurrent. Wir definieren $K(x) := \{y \in E \mid x \to y\}$.

Mit Satz 2.2.5 gilt dann $\forall y \in K(x) : y \to x$. Damit ist K(x) eine kommunizierende Klasse $\Rightarrow$ x ist wesentlich.

□

Bemerkung 2.2.7. Unwesentliche Zustände sind transient.

Satz 2.2.8. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P) Markovkette mit Zustandsraum E mit $x, y \in E$. Falls $(x \leftrightarrow y)$ dann gilt

a) x und y haben die selbe Periode, d.h. $d(x) = d(y)$

b) x transient $\iff$ y transient

c) x nullrekurrent $\iff$ y nullrekurrent

Beweis.

a) z.z. $x \leftrightarrow y \Rightarrow d(x) = d(y)$

Wir definieren $D(x) := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid p_n(x,x) > 0\}, x \in E$.

Seien $x, y \in E$ mit $x \leftrightarrow y$ und wähle $m, n \in \mathbb{N}_0$, sodass $p_m(x,y) > 0$ und $p_n(y,x) > 0$.

Mit Chapman gilt $\forall k \in D(y)$:

$$p_{m+k+n}(x,x) \geq p_m(x,y) \cdot p_k(y,y) \cdot p_n(y,x) > 0$$

Damit folgt $\forall k \in D(y) : m + k + n \in D(x)$.

Sei d ein Teiler von D(x), also $d \mid \{m + k + n \mid k \in D(y)\}$.

Man kann einfach analog zeigen, dass $m + n \in D(x)$ und deshalb gilt $d \mid m + n$. Weil also d ein Teiler ist von m+n, muss für jedes k, d ein Teiler von k sein,d.h. $\forall k \in D(y) : d \mid k$. Also gilt $d \mid D(y)$.

Weil jeder gemeinsame Teiler von D(x) ein Teiler von D(y) ist, folgt dass auch $ggT(D(x)) \mid D(y)$, aber natürlich nicht der größte von D(y). Dann gilt

$d(x) = ggT(D(x)) \leq ggT(D(y)) = d(y)$

Um " $\geq$ " zu zeigen, vertauscht man nur die Rollen x und y.

b) " $\Rightarrow$ " Sei x transient. Da $x \leftrightarrow y$, existieren $k, l \in \mathbb{N}$ mit $p_k(x,y) > 0$ und $p_l(y,x) > 0$.

Mittel Chapman folgt erneut $\forall n\mathbb{N} : p_{k+l+n}(x,x) \geq p_k(x,y) \cdot p_n(y,y) \cdot p_l(y,x)$

Mit Satz 2.1.3 gilt

$\infty \overset{\text{x transient}}{>} \sum_{n=1}^{\infty} p_{k+l+n}(x,x) \geq \underbrace{p_k(x,y)}_{>0} \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} p_n(y,y)) \cdot \underbrace{p_l(y,x)}_{>0}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n(y,y) < \infty$, also y transient

" $\Leftarrow$ " analog.

c) " $\Rightarrow$ " Sei x nullrekurrent. Da x und y kommunizierend, d.h. $x \leftrightarrow y$ existieren wieder $k, l \in \mathbb{N}$ mit $p_k(x,y) > 0$ und $p_l(y,x) > 0$

Wieder mit Chapman können wir nach unten abschätzen:

$\forall n \in \mathbb{N} : p_{k+l+n}(x,x) \geq p_k(x,y) \cdot p_n(y,y) \cdot p_l(y,x)$

Erinnerung: Satz 2.1.10 sagt:

Ein rekurrenter Zustand $x \in E$ ist nullrekurrent $\iff lim_{n\to\infty} p_n(x,x) = 0$.

Also gilt:

$0 \overset{\text{x Nullrekurrent}}{=} lim_{n\to\infty} p_{k+l+n}(x,x) \geq lim_{n\to\infty} \underbrace{p_k(x,y)}_{>0} \cdot p_n(y,y) \cdot \underbrace{p_l(y,x)}_{>0}$

$\iff lim_{n\to\infty} p_n(y,y) = 0$.

Da jede WK ≥ 0 sein muss, gilt Gleichheit.

Damit ist y nach Satz 2.1.10 nullrekurrent.

" $\Leftarrow$ " analog.

$\square$

Bemerkung 2.2.9. Falls $x \in E$ positiv rekurrent und $(x \to y) \Rightarrow$ y ist positiv rekurrent

Definition 2.2.10. (Irreduzibel)
Eine stochastische Matrix P auf dem Zustandsraum E heißt irreduzibel, falls E nur aus einer kommunizierenden Klasse besteht, d.h. $\exists n \in \mathbb{N} \forall x, y \in E : p_n(x, y) > 0$.
Eine (ν, P)-Markovkette heißt irreduzibel, falls P irreduzibel ist.

Satz 2.2.11. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible (ν, P)-Markovkette auf einem endlichen Zustandsraum E.
$\Rightarrow \forall x \in E$ ist positiv rekurrent.

Beweis. Zunächst betrachten wir die Summe über alle Greenfunktionen die in $x \in E$ starten und in irgend einem $y \in E$ enden, d.h.

$$\forall x \in E : \sum_{y\in E} G(x,y) = \sum_{y\in E}\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\sum_{y\in E} p_n(x,y)}_{\text{stoch. Matrix}} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$$

Da E endlich ist, gibt es mindestens ein $y \in E$ mit $G(x, y) = \infty$.
Wegen der Irreduzibilität von P besteht E nur aus einer kommunizierenden Klasse, d.h. es gilt auch $y \to x$.
Folglich existiert wegen der Erreichbarkeit von x wenn man in y startet ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $p_m(y, x) > 0$.
Mittels Chapman folgt erneut:

$$G(x,x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+m}(x,x) \geq \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,y)\cdot p_m(y,x) = p_m(y,x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,y) = \underbrace{p_m(y,x)}_{>0}\cdot\underbrace{G(x,y)}_{\text{wie oben}} = \infty$$

Damit gilt $G(x,x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+m}(x,x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,x) = \infty$, also ist x rekurrent. Wegen der Irreduzibilität besteht E nur aus einer kommunizierenden Klasse und es gilt $y \to x$. Da x rekurrent folgt dann mit Satz 2.2.5 das jeder Zustand in E rekurrent ist.
Angenommen $x \in E$ wäre Nullrekurrent, dann folgt mit Satz 2.2.8 das jeder Zustand in E nullrekurrent ist.
Aber mittels Korollar 2.1.11

$$1 \overset{\text{stoch. Matrix}}{=} lim_{n\to\infty}\sum_{y\in E} p_n(x,y) = \sum_{y\in E} lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = 0, \text{Widerspruch!}$$

Damit ist x positiv rekurrent und mittels Satz 2.2.8 sind alle Zustände positiv rekurrent. □

Satz 2.2.12. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E, dann gilt:

- $y \in E$ ist rekurrent $\Rightarrow \forall x, y \in E : \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] = 1$

- $y \in E$ ist transient $\Rightarrow \forall x, y \in E : \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] < 1$

Beweis. Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist, besteht E nur aus einer kommunizierenden Klasse, d.h. $\forall x, y \in E$: $x \leftrightarrow y$.

Mittels 2.2.8 und 2.2.5 sind alle Zustände entweder rekurrent oder transient, d.h. entweder gilt

- $\forall y \in E : \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty] = 1$ oder
- $\forall y \in E : \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty] < 1$

Seien nun $x, y \in E$ mit $x \neq y$. Weil diese kommunizierend sind, d.h. $x \leftrightarrow y$ gilt:

$$\exists n \in \mathbb{N} : n := min\{k \in \mathbb{N} \mid p_k(y,x) > 0\}$$

Dann gilt $\forall N > n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} \leq N, X_n = x] &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = k, X_n = x] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = k, X_n = x] + \underbrace{\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = n, X_n = x]}_{\text{=0, kann nicht in x und y gleichzeitig sein}} + \sum_{k=n+1}^{N} \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = k, X_n = x] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = k] \cdot \mathbb{P}_y[X_n = x \mid S_{\{y\}} = k] + \sum_{k=n+1}^{N} \mathbb{P}_y[X_n = x] \cdot \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = k \mid X_n = x] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = k] \cdot \mathbb{P}_y[X_n = x \mid S_{\{y\}} = k, X_{S_{\{k\}}} = y] + \sum_{k=n+1}^{N} \mathbb{P}_y[X_n = x] \cdot \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = k \mid X_n = x] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = k] \cdot \underbrace{\mathbb{P}_y[X_{n-k} = x]}_{\text{Allg. Mark. Eig.}} + \sum_{k=n+1}^{N} \mathbb{P}_y[X_n = x] \cdot \underbrace{\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k - n]}_{\text{starke Mark. Eig.}}
\end{aligned}$$

Da wir n so gewählt haben, sodass es das kleinste $n \in \mathbb{N}$ ist wo $p_n(y,x) > 0$ ist gilt für alle kleineren

$$\forall k \in \{1, ..., n-1\} : \mathbb{P}_y[X_{n-k} = x] = 0$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty, X_n = x] =& lim_{N\to\infty}\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < N, X_n = x] \\
=& lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \mathbb{P}_y[X_n = x] \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k-n] \\
=& \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}_y[X_n = x] \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k-n] \\
=& \sum_{k=n+1}^{\infty} p_n(y,x) \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k-n] \\
=& p_n(y,x) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k-n] \\
=& p_n(y,x) \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty]
\end{aligned}
$$

Nun können wir beide Aussagen schnell zeigen:

a) y ist rekurrent, d.h. $\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty] = 1$, dann gilt:
$p_n(y,x) = \mathbb{P}_y[X_n = x] \overset{\text{y rekurrent}}{=} \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty, X_n = x] \overset{oben}{=} p_n(y,x) \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty]$
$\iff \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] = 1$

b) y ist transient, d.h. $\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty] < 1$, dann gilt:
$p_n(y,x) = \mathbb{P}_y[X_n = x] \overset{\text{y transient}}{>} \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty, X_n = x] \overset{oben}{=} p_n(y,x) \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty]$
$\iff \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] < 1$

□

Definition 2.2.13. (Rekurrenz/Transienz einer Markovkette)
Eine irreduzible (ν, P)-Markovkette heißt rekurrent/transient, falls es einen Zustand $x \in E$ gibt, der rekurrent/transient ist.
Der vorherige Satz besagt: Falls es einen Zustand gibt, der rekurrent/transient ist bei einer irreduziblen (ν, P)-Markovkette, dann ist jeder andere Zustand auch rekurrent/transient.

Aufgabe 16:...
Aufgabe 17: (Murphy's Law: Anwendung in der Physik: Alles was passieren kann, wird passieren)

2.3 Kriterium für Rekurrenz und Transienz

Satz 2.3.1. Sei $h : E \longrightarrow [0, \infty)$ eine Funktion die folgende Eigenschaft erfüllt

$$\forall x \in E : (Lh)(x) \leq 0.$$

Falls nun gilt: $\exists y \in E$ mit der Eigenschaft $(Lh)(y) < 0$, dann ist dieses y transient

Beweis. Wir wollen zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} p_k(y,y) < \infty$, dazu konstruieren wir eine geeignete Abschätzung: Zunächst gilt für jede beschränkte Funktion $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$: $((P^n f)(x) < \infty$, da f beschränkt und P eine stoch. Matrix):

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in E : (P^n f)(x) - f(x) &\overset{Teleskopsumme}{=} \sum_{k=0}^{n-1} [(P^{k+1} f)(x) - (P^k f)(x)] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [P^k \cdot ((Pf)(x) - (If)(x))] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [(P^k \underbrace{(P-I)}_{=L} f)(x)]\end{aligned}$$

Wir definieren $g := -Lh \geq 0$. Dann gilt nach nach VSS, dass $g(y) > 0$. Wir können zeigen:

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} : h(y) \geq liminf_{m\to\infty}((h(y) \wedge m) - \underbrace{((P^n h)(y) \wedge m)}_{\geq 0}) &\overset{oben}{=} liminf_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} [(P^k(-L)h)(y) \wedge m \\ &\overset{Fatou}{=} \sum_{k=0}^{n-1} [(P^k(-L)h)(y) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [(P^k g)(y) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{z\in E} p_k(y,z) \cdot g(z) \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} p_k(y,y) \cdot g(y) = g(y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} p_k(y,y)\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt: $\sum_{k=0}^{n-1} p_k(y,y) \leq \frac{h(y)}{g(y)} < \infty$, da h per definition kleiner unendlich und g positiv. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k(y,y) \geq lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} p_k(y,y) = lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} p_k(y,y) \leq \frac{h(y)}{g(y)} < \infty$$

Damit ist y transient. □

Bemerkung 2.3.2. Eine solche Funktion h nennt man auch Lyapunovfunktion

Satz 2.3.3. (Dynkin-Formel)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine (ν, P)-Markovkette auf dem Zustandsraum E und sei T eine Stoppzeit mit der Eigenschaft: $\forall x \in E : \mathbb{E}_x[T] < \infty$.
Außerdem definieren wir die beschränkte Funktion $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, d.h. $\exists C \in \mathbb{R}$ sodass $\forall x \in E : f(x) \leq C$.

Dann gilt

$$\forall x \in E : \mathbb{E}_x[f(X_T)] - f(x) = \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{T-1} (Lf)(X_k)]$$

Beweis. Zunächst beobachten wir dass die Dynkin-Formel eine Verallgemeinerung ist vom Satz 2.3.2.

Dank Korollar 1.2.18 gilt:

$$\mathbb{E}_x[f(X_T)] = \mathbb{E}[f(X_T) \mid X_0 = x] = (P^T f)(x)$$

und es gilt:

$$\mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{T-1} (Lf)(x_k)] = \sum_{k=0}^{T-1} \mathbb{E}_x[(Lf)(x_k)] = \sum_{k=0}^{T-1} (P^k Lf)(x)$$

Aufgrund der definition der Stoppzeit ist $\forall n \in \mathbb{N} : \{T \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}^X$.

Für das folgende definieren wir $T \wedge n := min\{T, n\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x[X_{T\wedge n} = y] &= \mathbb{P}_x[X_{T\wedge n} = y, T \leq n-1] + \mathbb{P}_x[X_{T\wedge n} = y, T > n-1] \\
&= \mathbb{P}_x[X_T = y, T \leq n-1] + \mathbb{P}_x[X_n = y, T > n-1] \\
&= \mathbb{P}_x[X_T = y, T \leq n-1] + \mathbb{P}_x[X_n = y, T > n-1, \bigsqcup_{z\in\mathbb{Z}} \{X_{n-1} = z\}] \\
&= \mathbb{P}_x[X_T = y, T \leq n-1] + \sum_{z\in E} \mathbb{P}_x[X_n = y, T > n-1, X_{n-1} = z] \\
&= \mathbb{P}_x[X_T = y, T \leq n-1] + \sum_{z\in E} \mathbb{P}_x[T > n-1, X_{n-1} = z] \cdot \mathbb{P}_x[X_n = y \mid \underbrace{T > n-1}_{\in\mathcal{F}_{n-1}^X, abg. bzgl. Komplemente}, X_{n-1} = z] \\
&\overset{\text{Allg. Mark. Eig.}}{=} \mathbb{P}_x[X_T = y, T \leq n-1] + \sum_{z\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}_x[T > n-1, X_{n-1} = z] \cdot p(z, y)
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge n})] &\overset{\text{Diskreter E-Wert}}{=} \sum_{y\in E} f(y) \cdot \mathbb{P}_x[X_{T\wedge n} = y] \\
&\overset{\text{oben Einsetzen}}{=} \sum_{y\in E} f(y) \cdot \mathbb{P}_x[X_T = y, T \leq n-1] + \sum_{z\in E} \underbrace{\sum_{y\in E} f(y) \cdot p(z, y)}_{=(Pf)(z)} \cdot \mathbb{P}_x[T > n-1, X_{n-1} = z] \\
&= \sum_{y\in E} f(y) \cdot \mathbb{P}_x[X_T = y, T \leq n-1] + \sum_{z\in\mathbb{Z}} (Pf)(z) \cdot \mathbb{P}_x[T > n-1, X_{n-1} = z] \\
&= \mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge(n-1)})\mathbf{1}_{\{T\leq n-1\}}] + \mathbb{E}_x[(Pf)(X_{n-1})\mathbf{1}_{\{T>n-1\}}]
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge n})] \\
&= \underbrace{\mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge(n-1)})\mathbf{1}_{\{T\leq n-1\}}] + \mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge(n-1)})\mathbf{1}_{\{T>n-1\}}]}_{=\mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge(n-1)})]} \underbrace{-\mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge(n-1)})\mathbf{1}_{\{T>n-1\}}] + \mathbb{E}_x[(Pf)(X_{n-1})\mathbf{1}_{\{T>n-1\}}]}_{=\mathbb{E}_x[(Lf)(X_{n-1})\mathbf{1}_{\{T>n-1\}}]}
\end{aligned}
$$

Wir können also induktiv zeigen:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge n})] &= \mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge(n-1)})] + \mathbb{E}_x[(Lf)(X_{n-1})\mathbf{1}_{\{T>n-1\}}] \\
&= \mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge 0})] + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_x[(Lf)(X_{k-1})\mathbf{1}_{\{T>k-1\}}]
\end{aligned}
$$

Weil $\mathbb{E}_x[f(X_0)] = f(x)$ gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge n})] - f(x) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_x[(Lf)(X_{k-1})\mathbf{1}_{\{T>k-1\}}] \\
&= \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{n-1}(Lf)(X_k)\mathbf{1}_{\{T>k\}}] \\
&= \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{(T\wedge n)-1} (Lf)(X_k)]
\end{aligned}
$$

Da nach VSS f beschränkt ist und $\mathbb{E}_x[T] < \infty$ ist, gilt mit dem Satz von Lebesgue:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[f(X_T)] - f(x) &= lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge n})] - f(x) \\
&= lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{(T\wedge n)-1} (Lf)(X_k)] = \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{T-1}(Lf)(X_k)]
\end{aligned}
$$

□

Lemma 2.3.4. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine irreduzible (ν, P)-Markovkette auf dem Zustandsraum E und $\emptyset \neq A \subset E$:

- Falls $\exists x \in E : \mathbb{P}_x[S_A < \infty] < 1 \Rightarrow \forall y \in E$: y ist transient
- Falls A endlich und $\forall x \in A : \mathbb{P}_x[S_A < \infty] = 1 \Rightarrow \forall y \in E$: y ist rekurrent

Beweis. Zunächst halten wir fest, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irreduzible ist und deswegen E nur aus einer kommunizierenden Klasse besteht.

a) Sei $x \in E$ mit der Eigenschaft $\mathbb{P}_x[S_A < \infty] < 1$

   Natürlich gilt für ein $z \in A$, dass die Treffzeit für jede Trajektorie größer ist für z als für die ganze

Menge A (da die Menge A größer ist), d.h. $\forall \omega \in \Omega : S_{\{z\}}(\omega) \geq S_A(\omega)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}0 < \mathbb{P}_x[S_A = \infty] = \mathbb{P}_x[S_A = \infty, S_{\{z\}} \geq S_A] &= \mathbb{P}_x[S_A = \infty, S_{\{z\}} \geq \infty] \\ &= \mathbb{P}_x[S_A = \infty, S_{\{z\}} = \infty] \\ &\leq \mathbb{P}_x[S_{\{z\}} = \infty] \\ &\iff \mathbb{P}_x[S_{\{z\}} < \infty] < 1\end{aligned}$$

Angenommen z wäre rekurrent, d.h. $\mathbb{P}_z[S_{\{z\}} < \infty] = 1$ (beachte hier starten wir in z und nicht in x), dann folgt aus Satz 2.2.12

$$\forall x, z \in E : \mathbb{P}_x[S_{\{z\}} < \infty] = 1, \text{ Widerspruch!}$$

Also gilt $\mathbb{P}_z[S_{\{z\}} < \infty] < 1$, d.h. z ist transient. Da E nur aus einer kommunizierenden Klasse besteht, ist nach Satz 2.2.8 jeder Zustand $y \in E$ transient

b) Wir bezeichnen wieder mit S_A^k die k-te Treffzeit der Menge A, siehe Bsp. 1.3.5.
Da nach VSS gilt $\forall x \in A : \mathbb{P}_x[S_A < \infty] = 1$ dann folgt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x[S_A^n < \infty] &= \mathbb{P}_x[S_A^n < \infty, S_A^{n-1} < \infty, \bigsqcup_{y \in A} \{X_{S_A^{n-1}} = y\}] \\ &= \sum_{y \in A} \mathbb{P}_x[S_A^n < \infty \mid S_A^{n-1} < \infty, X_{S_A^{n-1}} = y] \cdot \mathbb{P}_x[S_A^{n-1} < \infty, X_{S_A^{n-1}} = y] \\ &\overset{\text{starke MK Eig.}}{=} \sum_{y \in A} \underbrace{\mathbb{P}_y[S_A < \infty]}_{=1, \text{ VSS}} \cdot \mathbb{P}_x[S_A^{n-1} < \infty, X_{S_A^{n-1}} = y] \\ &= \sum_{y \in A} \mathbb{P}_x[S_A^{n-1} < \infty, X_{S_A^{n-1}} = y] \\ &= \mathbb{P}_x[S_A^{n-1} < \infty]\end{aligned}$$

Induktiv gilt dann $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\forall x \in A : \mathbb{P}_x[S_A^n < \infty] = 1$.
Da dieses Ereignis eine Masse von 1 hat, können wir dann am Ende diese Aussage künstlich in eine Wahrscheinlichkeit einfügen. Wir wollen nun zeigen das $\forall x \in A$ und $\forall y \in E \setminus A$: $\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] = 1$. Diese Aussage werden wir dann ganz am Ende brauchen, wenn wir die Annahme die wir später treffen, dass y transient wäre, auf einen Widerspruch führen. Um diese Aussage z.z. zeigen wir zunächst, dass die WK des Kompliments gleich 0 ist:
z.z. $\forall x \in A$ und $\forall y \in E \setminus A \; \exists \epsilon > 0 : \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = \infty] \leq limsup_{k \to \infty}(1 - \epsilon)^k = 0$
Zunächst gilt aufgrund der Irreduzibilität, dass $\forall x \in A$ und $\forall y \in E \setminus A$ folgt, dass $x \leftrightarrow y$, d.h.

$$\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = \infty] < 1, \text{ das ist:}(x \to y)$$

Daraus folgt: $\forall x \in A \; \exists N_x \in \mathbb{N}$ und $\exists \epsilon_x > 0 \; \forall n \geq N_x : \mathbb{P}_x[n < S_{\{y\}}] \leq 1 - \epsilon_x (< 1)$

Nun bringen wir die vorausgesetzte Endlichkeit der Menge A ins spiel:

Wir definieren

- $N := max\{N_x \mid x \in A\}$
- $\epsilon := min\{\epsilon_x \mid x \in A\}$

Da A endlich ist gilt $N < \infty$ und $\epsilon > 0$ und sie erfüllen:

$$\forall x \in A \forall n \geq N : \mathbb{P}_x[n < S_{\{y\}}] \leq 1 - \epsilon$$

Da offensichtlich $S_A^n \geq n$, gilt auch (da $n \geq N$ beliebig)

$$\forall x \in A \forall n \geq N : \underbrace{\mathbb{P}_x[S_A^n < S_{\{y\}}]}_{\leq \mathbb{P}_x[n < S_{\{y\}}]} \leq 1 - \epsilon$$

Diese Aussage werden wir im folgenden Nutzen: Weil $\{S_A^{kN} < \infty\} \searrow \{S_A^n < \infty, \forall n \in \mathbb{N}\}$ (das gilt, weil $S_A^{kN} < \infty$ vorraussetzt, dass $S_A^{(k-1)N} < \infty$, damit ist $\{S_A^{(k-1)N} < \infty\} \subseteq \{S_A^{kN} < \infty\}$) betrachten wir:

$\forall k \in \mathbb{N}:$

$$\mathbb{P}_x[S_A^{kN} < S_{\{y\}}] \overset{\text{wie oben}}{=} \sum_{z \in A} \mathbb{P}_x[S_A^{kN} < S_{\{y\}} \mid S_A^{(k-1)N} < S_{\{y\}}, X_{S_A^{(k-1)N}} = z] \cdot \mathbb{P}_x[S_A^{(k-1)N} < S_{\{y\}}, X_{S_A^{(k-1)N}} = z]$$

$$\overset{starkeMKEig.}{=} \sum_{z \in A} \underbrace{\mathbb{P}_z[S_A^N < S_{\{y\}}]}_{\leq 1-\epsilon} \cdot \mathbb{P}_x[S_A^{(k-1)N} < S_{\{y\}}, X_{S_A^{(k-1)N}} = z]$$

$$\leq (1 - \epsilon) \cdot \mathbb{P}_x[S_A^{(k-1)N} < S_{\{y\}}]$$

Induktiv bzw. iterativ erhalten wir wieder

$\forall k \in \mathbb{N}$ und $\forall x \in A : \mathbb{P}_x[S_A^{kN} < S_{\{y\}}] \leq (1 - \epsilon)^k$

Jetzt können wir das z.z. zeigen:

$$\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = \infty] = \mathbb{P}_x[\{S_A^n < \infty, \forall n \in \mathbb{N}\}, S_{\{y\}} = \infty]$$

$$\overset{\text{st. v. Maßen}}{=} limsup_{k \to \infty} \mathbb{P}_x[\underbrace{S_A^{kN} < \infty, S_{\{y\}} = \infty}_{S_A^{kN} < S_{\{y\}}}]$$

$$\leq limsup_{k \to \infty} (1 - \epsilon)^k = 0$$

Damit gilt dann $\forall x \in A$ und $\forall y \in E \setminus A$: $\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] = 1$.

Angenommen y wäre transient, dann würde gelten:

$$\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] < 1, \text{ Widerspruch!}$$

Damit ist y rekurrent. Wegen der Irreduzibilität ist jeder Zustand $y \in E$ damit rekurrent wegen Satz 2.2.5

□

Satz 2.3.5. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine irreduzible (ν, P)-Markovkette auf dem Zustandsraum E.

a) Sei $\emptyset \neq A \subset E$ und $\exists\ h : E \longrightarrow [0, \infty)$, sodass

   – $\forall x \in A^C : (Lh)(x) \leq 0$

$$\text{(LT)}$$

   – $\exists y \in E : h(y) < inf_{z\in A} h(z)$

   $\Rightarrow \mathbb{P}_y[S_A < \infty] \leq \frac{h(y)}{inf_{z\in A} h(z)} < 1$
   Außerdem sind dann mit dem Satz 2.3.4 alle $y \in E$ transient.

- Sei $\emptyset \neq A \subset E$ endlich und $\exists\ h : E \longrightarrow [0, \infty)$, sodass

   – $\forall x \in A^C : (Lh)(x) \leq 0$

$$\text{(LR)}$$

   – $\forall c \geq 0 : \mid \{x \in E \mid h(x) \leq c\} \mid < \infty$ (Niveaumengen)

   $\Rightarrow \forall x \in E$: $\mathbb{P}_x[S_A < \infty] = 1$.
   Außerdem ist dann mit dem Satz 2.3.4 alle $y \in E$ rekurrent.

Beweis.

a) Offensichtlich gilt für die Stoppzeit $S_A \wedge n$ das Folgende
   Wegen der Bedingung $\forall x \in A^C : (Lh)(x) \leq 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x[h(X_T)] - h(x) = \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{T-1} \underbrace{(Lh)(X_k)}_{\leq 0, X_k \in A^C}] \leq 0$

   $\iff \mathbb{E}_x[h(X_T)] \leq h(x)$
   Und weil das folgende gilt: $\forall x \in E$ und $n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}_x[S_A \wedge n] \leq n$
   folgt nun mittels der Dynkin-Formel mit $T = S_A \wedge n$ (ist Stoppzeit und gewährleistet die Integrabilität, da wir es durch n nach oben abschätzen können) und $f = h \wedge m$ (für die Dynkin-Formel benötigen wir

eine beschränkte Funktion, die wir uns durch das Minimum von h und $m \in \mathbb{N}$ konstruieren):

$$\begin{aligned}
h(y) &= liminf_{m\to\infty} h(y) \wedge m \\
&\overset{Dyn.Formel}{\geq} liminf_{m\to\infty} liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}_y[h(X_{S_A \wedge n}) \wedge m] \\
&\geq liminf_{m\to\infty} liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}_y[(h(X_{S_A \wedge n}) \wedge m) \cdot \mathbf{1}_{\{S_A<\infty\}}] \\
&\overset{\geq 0, Fatou}{\geq} \mathbb{E}_y[liminf_{m\to\infty} liminf_{n\to\infty} (h(X_{S_A \wedge n}) \wedge m) \cdot \mathbf{1}_{\{S_A<\infty\}}] \\
&= \mathbb{E}_y[h(X_{S_A}) \cdot \mathbf{1}_{\{S_A<\infty\}}] \\
&\geq \mathbb{E}_y[inf_{z\in A}(h(z)) \cdot \mathbf{1}_{\{S_A<\infty\}}] \\
&= inf_{z\in A}(h(z)) \mathbb{P}_y[S_A < \infty]
\end{aligned}$$

Nun gilt also

$$\mathbb{P}_y[S_A < \infty] \leq \frac{h(y)}{inf_{z\in A} h(z)} \overset{VSS}{<} 1$$

b) <u>Schritt 1:</u> z.z. $\forall c \geq 0$ und $\forall x \in \{h \leq c\}$: $\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} < \infty] = 1$, dabei ist $\{h \leq c\} := \{x \mid h(x) \leq c\}$

Aufgrund der Irreduzibilität folgt zunächst $\forall c \geq 0$

$$\forall x \in \{h \leq c\} : \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} < \infty] > 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} = \infty] < 1$$

Jetzt gehen wir ähnlich vor wie im Beweis von Lemma 2.3.4 b):

Die "Divergenz"der Stoppzeit können wir wie folgt formulieren:

$$\forall x \in \{h \leq c\} \exists N_x \in \mathbb{N} \text{ und } \exists \epsilon > 0 \forall n \geq N_x : \ \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > n] \leq 1 - \epsilon_x$$

Wir definieren $N := max\{N_x \mid x \in \{h \leq c\}\}$ und $\epsilon := min\{\epsilon_x \mid x \in \{h \leq c\}\}$

Da nach VSS $\forall c \geq 0$ die Menge $\{h \leq c\}$ endlich ist, folgt dass $N < \infty$ und $\epsilon > 0$ und sie erfüllen die Eigenschaft:

$$\forall x \in \{h \leq c\} \text{ und } \forall n \geq N : \ \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > n] \leq 1 - \epsilon$$

Wir zeigen erneut:

$$\begin{aligned}
&\forall k \in \mathbb{N} : \\
&\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > kN] \\
&= \sum_{y\in\{h\leq c\}} \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > kN \mid S_{\{h>c\}} > (k-1)N, X_{(k-1)N} = y] \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > (k-1)N, X_{(k-1)N} = y] \\
&\overset{st.MKEig.}{=} \sum_{y\in\{h\leq c\}} \underbrace{\mathbb{P}_y[S_{\{h>c\}} > N]}_{\leq 1-\epsilon} \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > (k-1)N, X_{(k-1)N} = y] \\
&\leq (1-\epsilon) \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > (k-1)N]
\end{aligned}$$

Induktiv/Iterativ erhalten wir: $\forall k \in \mathbb{N}$ und $\forall x \in \{h \leq c\} : \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > kN] \leq (1-\epsilon)^k$ Damit gilt:

$$\begin{aligned} \forall x \in \{h \leq c\} : \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} = \infty] &= limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > kN] \\ &\leq limsup_{k\to\infty}(1-\epsilon)^k = 0 \end{aligned}$$

Damit gilt $\forall c \geq 0$ und $\forall x \in \{h \leq c\}$: $\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} < \infty] = 1$

<u>Schritt 2:</u> z.z. $\forall x \in A : \mathbb{P}_x[S_A < \infty] = 1$

$\forall c \geq 0$ gilt das die Stoppzeit $S_A \wedge n \wedge S_{\{h>c\}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\forall x \in E$ erfüllt, dass $\mathbb{E}_x[S_A \wedge n \wedge S_{\{h>c\}}] \leq n < \infty$.

Mittels der Dynkin-Formel, wo wir $T = S_A \wedge n \wedge S_{\{h>c\}}$ und $f = h \wedge m$ setzen folgt:

$$\begin{aligned} h(x) &= liminf_{m\to\infty} h(x) \wedge m \\ &\geq liminf_{m\to\infty} liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[h(X_{S_A \wedge n \wedge S_{\{h>c\}}}) \wedge m] \\ &\overset{Fatou}{\geq} \mathbb{E}_x[liminf_{m\to\infty} liminf_{n\to\infty} h(X_{S_A \wedge n \wedge S_{\{h>c\}}}) \wedge m] \\ &= \mathbb{E}_x[h(X_{S_A \wedge S_{\{h>c\}}})] \end{aligned}$$

h(x) weiter nach unten abschätzen ergibt:

$$\begin{aligned} h(x) \geq \mathbb{E}_x[h(X_{S_A \wedge S_{\{h>c\}}})] &\geq \mathbb{E}_x[h(X_{S_A \wedge S_{\{h>c\}}}) \cdot \mathbf{1}_{S_{\{h>c\}}<\infty} \cdot \mathbf{1}_{S_A=\infty}] \\ &= \mathbb{E}_x[h(X_{S_{\{h>c\}}}) \cdot \mathbf{1}_{S_{\{h>c\}}<\infty} \cdot \mathbf{1}_{S_A=\infty}] \\ &\overset{\forall x: h(x)\geq c}{\geq} c \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} < \infty, S_A = \infty] \\ &\overset{\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}}<\infty]=1}{=} c \cdot \mathbb{P}_x[S_A = \infty] \end{aligned}$$

Da diese Aussage für jedes $c \geq 0$ gilt, folgt

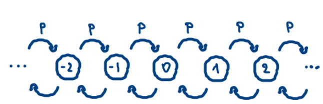
$$\forall x \in E: \; \mathbb{P}_x[S_A = \infty] \leq \frac{h(x)}{c} \leq limsup_{c\to\infty} \frac{h(x)}{c} = 0 \iff \mathbb{P}_x[S_A < \infty] = 1$$

Damit ist nach Lemma 2.3.4 jeder Zustand $y \in E$ rekurrent.

$\square$

<u>Aufgabe 18:</u>...

Beispiel 2.3.6. (einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$)



$p \in (0,1)$

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf $E = \mathbb{Z}$.:

<u>Fall 1:</u> $p \neq 1/2$

Wir wollen eine Funktion h finden und ein $y \in E$, die die VSS in Satz 2.3.5 erfüllen.

Sei $h(x) = (\frac{1-p}{p})^x, x \in E$. Mittels dem Beispiel, wo wir schon einmal diese Irrfahrt betrachtet haben gilt

$$(Lh)(x) = p(h(x+1) - h(x)) + (1-p)(h(x-1) - h(x)) = h(x)(1 - 2p + (2p-1)) = 0, \forall x \in E$$

Wir wählen nun $A = \{0\}$ und

$$y = \begin{cases} 1 & , p > \frac{1}{2} \\ -1 & , p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dann gilt

- $\forall x \in A^C : (Lh)(x) = 0$
- $h(y) = \begin{cases} \frac{1-p}{p} < 1 = h(0) & , p > \frac{1}{2} \\ \frac{p}{1-p} < 1 = h(0) & , p < \frac{1}{2} \end{cases}$

Damit gelten die VSS (LT) und da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irreduzibel ist, sind alle Zustände transient.

<u>Fall 2:</u> $p = 1/2$

Wir betrachten die Funktion $h(x) = |x|$, dann gilt:

$$(Lh)(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x|) + \frac{1}{2}(|x-1| - |x|) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

Wähle nun $A = \{0\}$, dann gilt:

- $\forall x \in A^C : (Lh)(x) = 0$
- $\forall c \geq 0 : |\{h \leq c\}| < \infty$

Damit gelten die VSS (LR) und da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irreduzibel ist, sind alle Zustände rekurrent.

Beispiel 2.3.7. (einfache, symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d, d \geq 3$)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $E = \mathbb{Z}^d$ mit $d \geq 3$ und wir haben folgende Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & , \|y - x\| = 1 \\ 0 & , sonst \end{cases}$$

Wir betrachten die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} \|x\|_2^{-2\alpha} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

Wir wollen nun die VSS von Satz 2.3.5 a) zeigen. Dazu betrachten wir nur den Fall, dass $x \in \mathbb{Z}^d$ die Eigenschaft $\|x\|_2 > 1$ erfüllt.
Außerdem definieren wir $e \in \mathbb{Z}^d$ mit $\|e\|_2 = 1$
Dann gelten die drei Eigenschaften:

- $\sum_{\|e\|_2=1} 1 = 2d$
- $\sum_{\|e\|_2=1} \langle x, e\rangle = 0$
- $\sum_{\|e\|_2=1} \langle x, e\rangle^2 = 2\|x\|_2^2$

Dann ist:

$$\begin{aligned} Lh(x) = ((P-I)\cdot h)(x) = (Ph)(x) - h(x) &= (\sum_{\|e\|_2=1} \frac{1}{2d} \cdot h(x+e)) - \frac{1}{2d} \cdot h(x) \sum_{\|e\|_2=1} 1 \\ &= \sum_{\|e\|_2=1} \frac{1}{2d} \cdot (h(x+e) - h(x)) \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst nur den Term innerhalb der Summe:

$$\begin{aligned} h(x+e) - h(x) = h(x) \cdot (\frac{h(x+e)}{h(x)} - 1) &= h(x) \cdot ((\frac{\|x+e\|_2^2}{\|x\|_2^2})^{-\alpha} - 1) \\ &= h(x) \cdot ((\frac{\langle x+e, x+e\rangle_2^2}{\|x\|_2^2})^{-\alpha} - 1) \\ &= h(x) \cdot ((\frac{\|x\|_2^2 + 2\cdot\langle x, e\rangle + 1}{\|x\|_2^2})^{-\alpha} - 1) \\ &= h(x) \cdot ((1 + \frac{2\cdot\langle x, e\rangle + 1}{\|x\|_2^2})^{-\alpha} - 1) \\ &= h(x) \cdot (1 - \alpha\frac{2\cdot\langle x, e\rangle + 1}{\|x\|_2^2} + 2\cdot\alpha(\alpha+1)\frac{\langle x, e\rangle^2}{\|x\|_2^4} + \mathcal{O}(\|x\|_2^{-3}) - 1) \end{aligned}$$

Wobei wir im letzten Schritt die Taylor-Entwichlung der Funktion

$$f(z) = (1+z)^{\alpha} = 1 - \alpha z + \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)z^2 + \mathcal{O}(|z|^3)$$

verwendet haben.

Nun können wir dieses Ergebnis Einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
(Lh)(x) &= \sum_{\|e\|_2=1} \frac{1}{2d} \cdot (h(x+2) - h(x)) \\
&= \sum_{\|e\|_2=1} \frac{1}{2d} \cdot h(x) \cdot [1 - \alpha \frac{2 \cdot \langle x, e\rangle + 1}{\|x\|_2^2} + 2 \cdot \alpha(\alpha+1) \frac{\langle x, e\rangle^2}{\|x\|_2^4} + \mathcal{O}(\|x\|_2^{-3}) - 1] \\
&= \frac{1}{2d} \cdot h(x) \cdot [-\frac{\alpha}{\|x\|_2^2}(2 \cdot \sum_{\|e\|_2=1} \langle x, e\rangle + \sum_{\|e\|_2=1} 1) + \frac{2 \cdot \alpha(\alpha+1)}{\|x\|_2^4} \sum_{\|e\|_2=1} \langle x, e\rangle^2 + \mathcal{O}(\|x\|_2^{-3}) \sum_{\|e\|_2=1} 1] \\
&= \frac{1}{2d} \cdot h(x) \cdot [-\frac{\alpha}{\|x\|_2^2} 2d + \frac{2 \cdot \alpha(\alpha+1)}{\|x\|_2^4} 2 \cdot \|x\|_2^2 + \mathcal{O}(\|x\|_2^{-3})] \\
&= \frac{1}{2d} \cdot h(x) \cdot [-\frac{2d \cdot \alpha}{\|x\|_2^2} + \frac{4 \cdot \alpha(\alpha+1)}{\|x\|_2^2} + \mathcal{O}(\|x\|_2^{-3})] \\
&= \frac{\alpha}{d} \cdot \frac{h(x)}{\|x\|_2^2} \cdot [-d + 2 \cdot (\alpha+1) + \mathcal{O}(\|x\|_2^{-1})] \\
&= \frac{\alpha}{d} \cdot \|x\|_2^{-2\alpha-2} \cdot [-d + 2 \cdot (\alpha+1) + \mathcal{O}(\|x\|_2^{-1})]
\end{aligned}$$

Wir merken, dass für $d \geq 3$ und $\alpha \in (0, \frac{d-2}{2})$ und $A := \{x \mid \|x\|_2 \leq r\}$ und ein hinreichend großes $r > 0$ gilt

$$\forall x \in A^C : (Lh)(x) \leq 0 \text{ und } h(y) < inf_{z \in A} h(z) \text{ für ein y mit } \|y\|_2 > 2r$$

Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist und wir die VSS gezeigt haben, ist jeder Zustand $x \in \mathbb{Z}^d$ transient.

Aufgabe 19:...

Satz 2.3.8. (Chung-Fuchs) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible Irrfahrt auf $E = \mathbb{Z}^d$ und mit $p(x,y) := \mu(y-x)$, dabei ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf E.
Mit ϕ bezeichnen wir die Charakteristische Funktion von μ, d.h.

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i \cdot \langle t, x\rangle} \mu(dx) = \sum_{x \in E} e^{i\langle t, x\rangle} \underbrace{p(0,x)}_{\mu(x)}, \; t \in [-\pi, \pi)^d$$

Die Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist rekurrent

$$\iff lim_{\lambda \nearrow 1} \int_{[-\pi,\pi)^d} Re(\frac{1}{1 - \lambda \cdot \phi(t)}) dt = \infty$$

Bemerkung 2.3.9. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ mit Start in $x \in \mathbb{Z}^d$ und $p(x,y) = \mu(y-x), d.h.$

$$X_n = x + \sum_{k=1}^n Z_k \text{ mit } (Z_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ u.i.v. mit } \mathbb{P}[Z_1 = y] = \mu(y)$$

a) $\phi(0) = 1$ und $|\phi(t)| \underbrace{\leq}_{Jensen} \mathbb{E}[|e^{i\langle t, Z_1\rangle}|] = 1$

b) Es gilt

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{i\langle t,x\rangle} \underbrace{p_n(0,x)}_{=\mu(x)^n} \overset{\text{im n-ten Schritt}}{=} \mathbb{E}_0[e^{i\langle t,X_n\rangle}], \text{start in } x=0$$

$$= \mathbb{E}_0[e^{i\sum_{k=1}^n \langle t,Z_k\rangle}]$$

$$= \mathbb{E}_0[\prod_{k=1}^n e^{i\langle t,Z_k\rangle}]$$

$$\overset{u.i.v}{=} \mathbb{E}_0[e^{i\langle t,Z_1\rangle}]^n = \phi(t)^n$$

Außerdem folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$(\frac{1}{2\pi})^d \cdot \int_{[-\pi,\pi)^d} e^{-i\cdot\langle t,x\rangle}\phi(t)^n dt = (\frac{1}{2\pi})^d \cdot \int_{[-\pi,\pi)^d} e^{-i\cdot\langle t,x\rangle} \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} e^{i\langle t,z\rangle} p_n(0,z)dt$$

$$= (\frac{1}{2\pi})^d \cdot \int_{[-\pi,\pi)^d} e^{-i\cdot\langle t,x\rangle} lim_{r\to\infty} \sum_{\substack{z\in\mathbb{Z}^d \\ \|z\|<r}} e^{i\langle t,z\rangle} p_n(0,z)dt$$

$$= lim_{r\to\infty} \sum_{\substack{z\in\mathbb{Z}^d \\ \|z\|<r}} p_n(0,z)(\frac{1}{2\pi})^d \cdot \underbrace{\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{i\cdot\langle t,x-z\rangle} dt}_{=(2\pi)^d \mathbf{1}_{x=z}}$$

$$= p_n(0,x)$$

Beweis. Wir definieren für $\lambda \in (0,1)$ die Reihe $R(\lambda) < \infty$, wegen der Wahl von λ.

$$R(\lambda) := \sum_{n=0}^\infty \lambda^n \cdot p_n(0,0) \overset{Lebesgue}{=} \sum_{n=0}^\infty \lambda^n \cdot (\frac{1}{2\pi})^d \cdot \int_{[-\pi,\pi)^d} e^{-i\cdot\langle t,0\rangle}\phi(t)^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \lambda^n \cdot (\frac{1}{2\pi})^d \cdot \int_{[-\pi,\pi)^d} \phi(t)^n dt$$

$$\overset{\text{Linarität}}{=} (\frac{1}{2\pi})^d \cdot \int_{[-\pi,\pi)^d} \sum_{n=0}^\infty (\lambda\phi(t))^n dt$$

$$\overset{\text{Geo. Reihe}}{=} (\frac{1}{2\pi})^d \cdot \int_{[-\pi,\pi)^d} \frac{1}{1-\lambda\phi(t)} dt$$

$$\overset{R(\lambda)\in\mathbb{R}}{=} (\frac{1}{2\pi})^d \cdot \int_{[-\pi,\pi)^d} Re(\frac{1}{1-\lambda\phi(t)})dt$$

Nun gilt die Eigenschaft für die Greenfunktion:

$$G(0,0) := \sum_{n=0}^\infty p_n(0,0) = lim_{\lambda\nearrow 1} \sum_{n=0}^\infty \lambda^n p_n(0,0) = lim_{\lambda\nearrow 1} R(\lambda)$$

0 ist ein rekurrenter Zustand $\iff$ $G(0,0) = \sum_{n=0}^\infty p_n(0,0) = \infty$

Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist gilt:

0 ist ein rekurrenter Zustand $\iff$ jedes $y \in E$ ist rekurrent.

Damit gilt die Behauptung. $\square$

Beispiel 2.3.10. (Einfache, symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $E = \mathbb{Z}^d$ und Übergangsmatrix

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & , \|x-y\| = 1 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Dann ist die charakteristische Funktion vom Maß μ mit $\mu(x) := p(0,x)$ wie folgt

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{x\in E} e^{i\langle t,x\rangle} p(0,x) \\ &= \frac{2}{2} \sum_{x\in E} e^{i\langle t,x\rangle} \frac{1}{2d} \\ &= \frac{1}{2d} \frac{\sum_{x\in E} e^{i\langle t,x\rangle} + \sum_{x\in E} e^{i\langle t,x\rangle}}{2} \\ &= \frac{1}{2d} \frac{\sum_{x\in E} e^{i\langle t,x\rangle} + \sum_{x\in E} e^{i\langle t,-x\rangle}}{2}, \text{ da } \sum_{x\in\mathbb{Z}} x = \sum_{x\in\mathbb{Z}} -x \\ &= \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} cos(t_j) \end{aligned}$$

Aufgrund der Eigenschaft

$$\forall s \in [-\pi,\pi] : \frac{s^2}{6} \le 1 - cos(s) \le \frac{s^2}{2}$$

Also gilt

$$1 - \phi(t) = 1 - \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} cos(t_j) = \frac{d}{d} - \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} cos(t_j) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} 1 - cos(t_j) \le \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} \frac{(t_j)^2}{2} = \|t\|_2^2$$

Damit können wir Mittels dem Satz von Chung-Fuchs nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned} lim_{\lambda\nearrow 1} \int_{[-\pi,\pi]^d} Re(\frac{1}{1-\lambda\cdot\phi(t)})dt &\ge \int_{[-\pi,\pi]^d} Re(\frac{1}{\|t\|_2^2})dt \\ &\overset{\forall\epsilon>0}{\ge} \int_{\|t\|_2<\epsilon} \frac{1}{\|t\|_2^2} dt \\ &= c_d \int_0^{\epsilon} r^{d-1} r^{-2} dr = \infty \iff d \le 2 \end{aligned}$$

D.h. diese Irrfahrt ist rekurrent, falls $d \le 2$ und für $d > 2$ transient.

Beispiel 2.3.11. (Symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit 2. Moment)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible Markovkette mit Zustandsraum $E = \mathbb{Z}$ und Übergangsmatrix $p(x,y) = \mu(y-x)$.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß erfüllt folgende Eigenschaften:

- $\mu(x) = \mu(-x)$ (symmetrisch)
- $\sum_{x\in\mathbb{Z}} x^2\mu(x) =: c_1 < \infty$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\phi(t) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} e^{itx}\mu(x) &= \frac{\sum_{x\in\mathbb{Z}} e^{itx}\mu(x) + \sum_{x\in\mathbb{Z}} e^{itx}\mu(x)}{2} \\
&= \frac{\sum_{x\in\mathbb{Z}} e^{itx}\mu(x) + \sum_{x\in\mathbb{Z}} e^{-itx}\mu(-x)}{2}, \text{ da } \sum_{x\in\mathbb{Z}} x = \sum_{x\in\mathbb{Z}} -x \\
&\overset{\mu(x)=\mu(-x)}{=} \frac{\sum_{x\in\mathbb{Z}} \mu(x)(e^{itx} + e^{-itx})}{2} \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}} \mu(x)cos(tx)
\end{aligned}$$

Mittels der Taylorentwicklung des Cosinus können wir ihn nach unten abschätzen: $cos(s) \geq 1 - \frac{1}{2}s^2$. Einsetzen ergibt

$$\phi(t) \geq \sum_{x\in\mathbb{Z}} \mu(x)(1 - \frac{1}{2}(tx)^2) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \mu(x) - \frac{t^2}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} \mu(x)x^2) = 1 - \frac{c_1}{2}t^2$$

Schließlich gilt:

$$\begin{aligned}
lim_{\lambda\nearrow 1}\int_{-\pi}^{\pi} Re(\frac{1}{1-\lambda\cdot\phi(t)})dt &\overset{Fatou}{\geq} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1-\phi(t)}dt \\
&\overset{\frac{c_1}{2}t^2 \geq 1-\phi(t)}{\geq} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\frac{c_1}{2}t^2}dt \\
&= 2\int_0^{\pi} \frac{2}{c_1 t^2}dt = \infty
\end{aligned}$$

Damit haben wir die VSS von Chung-Fuchs gezeigt und somit ist diese Irrfahrt rekurrent.

Aufgabe 20:...

Kapitel 3

Gleichgewichtsverteilung und invariante Maße

3.1 Eigenschaft von invarianten und reversiblen Maßen

Definition 3.1.1. (invariantes Maß, Gleichgewichtsverteilung)
Sei $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$ eine stochastische Matrix.
Wir nennen ein Maß π auf E ein invariantes Maß bezüglich P, falls folgende Bedinung gilt

$$\forall x \in E: \ \pi(x) = (\pi \cdot P)(x) = \sum_{y \in E} \pi(y) \cdot p(y,x)$$

Falls π zusätzlich eine Verteilung ist, d.h. $\pi(E) = 1$, dann nennen wir π eine invariante Verteilung bzw. eine Gleichgewichtsverteilung. Dabei bezeichnen wir die Menge der Gleichgwichtsverteilungen der Übergangsmatrix P wie folgt

$$inv(P) := \{\pi : E \longrightarrow [0,1] \mid \pi P = \pi, \pi(E) = 1\}$$

Bemerkung 3.1.2.

- Ein invariantes Maß $\pi \in [0,\infty]^E$, d.h. $\pi : E \longrightarrow [0,\infty]$ ist ein Zeilenvektor, der ein nicht negativer Linkseigenvektor von P ist mit Eigenwert 1.
- Falls $|E| < \infty$ so können wir jedes invariantes Maß π zu einer Gleichgewichtsverteilung normieren, indem wir durch die Kardinalität von E teilen.
- Wenn π ein invariantes Maß bzgl. P ist, dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \pi = \pi P^n$
  Falls P zusätzlich irreduzibel ist und $\pi \neq 0$, dann gilt

$$\forall x \in E: \ \pi(x) > 0$$

Wir zeigen nun diese Behauptung: Da $\pi \not\equiv 0$ und π ein Maß ist, exisistiert ein $z \in E$ mit $\pi(z) > 0$. Da P irreduzibel folgt außerdem

$$\forall x \in E \setminus \{z\} \exists n \in \mathbb{N} : p_n(z, x) > 0$$

Dies impliziert dann:

$$\forall x \in E \setminus \{z\} : \pi(x) = (\pi \cdot P^n)(x) = \sum_{y \in E} \pi(y) p_n(y, x) \geq \underbrace{\pi(z)}_{>0} \underbrace{p_n(z, x)}_{>0} > 0$$

- Ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf Zustandsraum E, P die Übergangsmatrix und π eine Gleichgewichtsverteilung, dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ \mathbb{P}_\pi[X_n = x] = \sum_{y \in E} \pi(y) \mathbb{P}_y[X_n = x] = \sum_{y \in E} \pi(y) p_n(y, x) \overset{Def.}{=} \pi(x)$$

  Insbesondere gilt zusätzlich für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\pi[X_{k+1} = x_1, ..., X_{k+n} = x_n] &= \mathbb{P}_\pi[\bigsqcup_{y \in E} \{X_k = y\}, X_{k+1} = x_1, ..., X_{k+n} = x_n] \\ &= \sum_{y \in E} \mathbb{P}_\pi[X_k = y] \mathbb{P}_\pi[X_{k+1} = x_1, ..., X_{k+n} = x_n \mid X_k = y] \\ &\overset{\text{Allg. MK. Eig.}}{=} \sum_{y \in E} \mathbb{P}_\pi[X_k = y] \mathbb{P}_y[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n] \\ &\overset{\text{oben}}{=} \sum_{y \in E} \pi(y) \mathbb{P}_y[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n] \\ &= \mathbb{P}_\pi[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n] \end{aligned}$$

- Seien $\pi_1, \pi_2 \in Inv(P)$ und $\lambda \in [0, 1]$ beliebig, dann gilt

  · $(\lambda \pi_1 + (1 - \lambda) \pi_2)[E] = \lambda + 1 - \lambda = 1$

  · $(\lambda \pi_1 + (1 - \lambda) \pi_2) P = (\lambda \pi_1 P + (1 - \lambda) \pi_2 P) = (\lambda \pi_1 + (1 - \lambda) \pi_2)$

  Damit ist ist die Menge der Gleichgewichtsverteilungen konvex.

Beispiel 3.1.3. Sei $E = \{1, 2\}$ und $P = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in [0, 1]$, dann ist für $\alpha + \beta \neq 0$ die Gleichverteilung π gegen durch

$$\pi(1) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \text{ und } \pi(2) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Für $\alpha = \beta = 0$ gilt:

$$Inv(P) = \{\lambda \cdot \mathbf{1}_{\{1\}} + (1 - \lambda) \cdot \mathbf{1}_{\{2\}} \mid \lambda \in [0, 1]\}$$

Beispiel 3.1.4. (Irrfahrt auf dem Torus)

Sei $E = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ für $N \geq 2$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf E mit Übergangsmatrix $p(x,y) = \mu(y-x)$, dabei ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf E.
Dann ist für $x \in E$: $\pi(x) = \frac{1}{N^d}$ eine Gleichegewichtsverteilung, da

$$\forall x \in E: \ \sum_{y\in E} \pi(y)p(y,x) = \frac{1}{N^d}\sum_{y\in E}\mu(y-x) = \frac{1}{N^d}\sum_{z+x\in E}\mu(z) = \frac{1}{N^d}\sum_{z\in E}\mu(z) = \frac{1}{N^d} = \pi(x)$$

Beispiel 3.1.5. Sei $E = (\mathbb{Z}/(2N)\mathbb{Z})$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Irrfahr auf E mit Übergangsmatrix

$$p(x,y) = \begin{cases} p & , y = (x+2) mod\ 2N \\ 1-p & , y = (x-2) mod\ 2N \end{cases}, \ p \in (0,1)$$

D.h. man kann auf dem Torus entweder zwei Schritte nach vorne oder nach hinten machen. Damit gibt es zwei kommunzierende Klassen auf E

- $G := \{2k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cap E$
- $U := \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cap E$

Für $\lambda \in [0,1]$ definieren wir

$$\forall x \in E: \ \pi_\lambda(x) := \frac{\lambda}{N}\mathbf{1}_G(x) + \frac{1-\lambda}{N}\mathbf{1}_U(x)$$

Dann gilt $\forall \lambda \in [0,1]: \pi_\lambda \in Inv(P)$, wegen $\forall x \in E$:

$$\begin{aligned}\sum_{y\in E}\pi_\lambda(y)p(y,x) &= \frac{\lambda}{N}\sum_{y\in G}p(y,x) + \frac{1-\lambda}{N}\sum_{y\in U}p(y,x) \\ &= \frac{\lambda}{N}\mathbf{1}_G(x)(1-p+p) + \frac{1-\lambda}{N}\mathbf{1}_U(x)(1-p+p) \\ &= \pi_\lambda(x)\end{aligned}$$

Damit gilt $|Inv(P)| = \infty$

Außerdem gilt: Wenn es zwei Gleichgewichtsverteilungen gibt, dann folgt direkt, dass es unendlich viele Gleichgewichtsverteilungen gibt, da jede Konvexkombination eine Gleichgewichtsverteilung ist.

Satz 3.1.6. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E.

- Falls $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist, dann gilt

  $$|Inv(P)| \in \{0,1\}$$

  D.h. es existiert höchstens eine Gleichgewichtsverteilung.

- Falls $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irreduzibel und transient, dann gilt

$$Inv(P) = \emptyset$$

D.h. es gibt keine Gleichgewichtsverteilung

Beweis.

a) Wir definieren $\bar{P} = (\bar{p}(x,y))_{x,y\in E}$ mit $\bar{p}(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} p_n(x,y)$ mit $x,y \in E$. Dann ist $\bar{P}$ eine stochastische Matrix, da für alle $x \in E$ gilt:

$$\sum_{y\in E} \bar{p}(x,y) \overset{Fubini}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sum_{y\in E} p_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$

Da P nach VSS irreduzibel ist, folgt direkt $\forall x,y \in E : \bar{p}(x,y) > 0$, damit ist $\bar{P}$ auch irreduzibel.
Nun nehmen wir an, es gäbe zwei Gleichgewichtsverteilungen $\pi_1, \pi_2 \in Inv(P)$ mit $\pi_1 \neq \pi_2$.
Wir sehen auch dass diese auch Gleichgewichtsverteilungen von $\bar{P}$ sind, da $\forall x \in E$ und $\forall i \in \{1,2\}$:

$$(\pi_i \bar{P})(x) = \sum_{y\in E} \pi_i(y)\bar{p}(y,x) \overset{Fubini}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sum_{y\in E} \pi_i(y)p(y,x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\pi_i(x) = \pi_i(x) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \pi_i(x)$$

Als nächstes defineren wir ein Maß (das sog. signierte Maß) als $\bar{\pi} := \pi_1 - \pi_2$
Dann ist es auch eine Gleichgewichtsverteilung bzgl. $\bar{P}$, da

$$\bar{\pi}\bar{P} = \pi_1\bar{P} - \pi_2\bar{P} = \pi_1 - \pi_2 = \bar{\pi}$$

Weil $\pi_1 \neq \pi_2$ gilt $\bar{\pi} \not\equiv 0$ aber da $\bar{\pi}[E] = 0$ existieren $x,y \in E$ mit $\bar{\pi}(x) > 0$ und $\bar{\pi}(y) < 0$. Nun führen wir dies auf einen Widerspruch:

$$\begin{aligned}
\sum_{z\in E}|\bar{\pi}(z)| &= \sum_{z\in E}|(\bar{\pi}\bar{P})(z)| \\
&= \sum_{z\in E}|\sum_{z'\in E}\bar{\pi}(z')\bar{p}(z',z)| \\
&= \sum_{z\in E}|\underbrace{\bar{\pi}(x)\bar{p}(x,z)}_{>0}+\underbrace{\bar{\pi}(y)\bar{p}(y,z)}_{<0}+\sum_{\substack{z'\in E\\ z'\neq x,y}}\bar{\pi}(z')\bar{p}(z',z)| \\
&< \sum_{z\in E}|\bar{\pi}(x)\bar{p}(x,z)|+|\bar{\pi}(y)\bar{p}(y,z)|+|\sum_{\substack{z'\in E\\ z'\neq x,y}}\bar{\pi}(z')\bar{p}(z',z)| \\
&= \sum_{z\in E}\sum_{z'\in E}|\bar{\pi}(z')|\bar{p}(z',z) \\
&= \sum_{z'\in E}|\bar{\pi}(z')|\sum_{z\in E}\bar{p}(z',z) \\
&= \sum_{z'\in E}|\bar{\pi}(z')|, \text{ Widerspruch!}
\end{aligned}$$

Damit gilt $\bar{\pi}=0$ und damit sind $\pi_1=\pi_2$

b) Angenommen $Inv(P)\neq\emptyset$, d.h. es gibt eine Gleichgewichtsvertelung. Da nach VSS jeder Zustand $y\in E$ transient ist, folgt $\forall y\in E$:

$$0 \overset{Korr.2.1.5}{=} \sum_{y\in E}\pi(x)\underbrace{lim_{n\to\infty}p_n(x,y)}_{=0} \overset{Lebesgue}{=} lim_{n\to\infty}\sum_{y\in E}\pi(x)p_n(x,y)=\pi(y)$$

Dann folgt $\sum_{y\in E}\pi(y)=0\neq 1$, Widerspruch! Damit gibt es keine Gleichgewichtsverteilung.

□

Beispiel 3.1.7. (Doppelte stochastische Übergangsmatrix)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E und die Übergangsmatrix P besitzt folgende Eigenschaft

$$\forall x\in E:\ \sum_{y\in E}p(y,x)=1$$

D.h. P ist eine doppelt stochastisch. Ein Beispiel einer doppelt stochastischen Matrix ist

$$\forall x,y\in E: p(x,y)=\mu(y-x)$$

wobei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf E ist.

Dann ist $\forall x \in E$: $\pi(x) = 1$ ein invariantes Maß, da

$$\forall x \in E: \sum_{y \in E} \pi(y)p(y,x) = \sum_{y \in E} p(y,x) = 1 = \pi(x)$$

Beispiel 3.1.8. (Einfache, asymmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$)
Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $E = \mathbb{Z}$ mit Übergangsmatrix

$$p(x,y) = \begin{cases} p & , y = x+1 \\ 1-p & , y = x-1 \end{cases}, p \in (0,1)$$

Nach dem Beispiel von davor ist $\pi(x) = 1$,$x \in E$ ein invariantes Maß.
Außerdem ist für $p \neq \frac{1}{2}$ $\pi(x) = (\frac{p}{1-p})^x$,$x \in E$ ein invariantes Maß, da

$$\begin{aligned} \sum_{y \in E} \pi(y)p(y,x) = \pi(x-1)p(x-1,x) + \pi(x+1)p(x+1,x) &= (\frac{p}{1-p})^{x-1}p + (\frac{p}{1-p})^{x+1}(1-p) \\ &= (\frac{p}{1-p})^{x-1}p + (\frac{p}{1-p})^{x+1}1 - (\frac{p}{1-p})^{x+1}p \\ &= (\frac{p}{1-p})^{x} \cdot (\frac{1-p}{p}p + \frac{p}{1-p} - \frac{p}{1-p}p) \\ &= (\frac{p}{1-p})^{x} \cdot (1-p+\frac{p-p^2}{1-p}) \\ &= (\frac{p}{1-p})^{x} \cdot (1-p+p) \\ &= \pi(x) \end{aligned}$$

Satz 3.1.9. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine irreduzible (π, P)-Markovkette auf E, falls π invariant bzgl. P ist, dann folgt: $\forall N \in \mathbb{N}_0$ ist der stochastische Prozess $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ mit $Y_n := X_{N-n}$ eine (π, P^*)-Markovkette mit

$$\forall x, y \in E: p^*(x,y) = \frac{\pi(y)p(y,x)}{\pi(x)}$$

Man nennt die stochastische Übergangsmatrix P^* auch duale Übergangsmatrix.

Beweis. Sei P irreduzibel, dann ist nach Bemerkung 3.1.2. c) $\pi(x) > 0$ für alle $x \in E$. Damit sind die Matrixeinträge von P^* wohldefiniert. Außerdem ist P^* eine stochastische Matrix, da

$$\sum_{y \in E} p^*(x,y) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y \in E} \pi(y)p(y,x) = \frac{\pi(x)}{\pi(x)} = 1$$

Jetzt wollen wir zeigen, dass $(Y_n)_{0 \leq n \leq N} := (X_{N-n})_{0 \leq n \leq N}$ eine (π, P^*)-Markovkette ist. Mittels Satz 1.2.15 i) müssen wir nur zeigen:
z.z. $\forall n \in \{0, ..., N\}$ und $y_0, ... y_n \in E$ gilt $\mathbb{P}_\pi[Y_0 = y_0, ..., Y_n = y_n] = \pi(y_0)p^*(y_0, y_1) \cdot ... \cdot p^*(y_{n-1}, y_n)$

Sei nun $n \in \{0, ..., N\}$ beliebig und $y_0, ..., y_n \in E$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\pi[Y_0 = y_0, ..., Y_n = y_n] &= \mathbb{P}_\pi[X_N = y_0, ..., X_{N-n} = y_n] \\
&= \mathbb{P}_\pi[X_{N-n} = y_n]\mathbb{P}_\pi[X_N = y_0, ..., X_{N-n+1} = y_{n-1} \mid X_{N-n} = y_n] \\
&\overset{\text{Allg. MK. Eig.}}{=} \mathbb{P}_\pi[X_{N-n} = y_n]\mathbb{P}_{y_n}[X_n = y_0, ..., X_1 = y_{n-1}] \\
&\overset{1.2.16}{=} (\pi P^{N-n})(y_n)\mathbb{P}_{y_n}[X_n = y_0, ..., X_1 = y_{n-1}] \\
&= \pi(y_n)\mathbb{P}_{y_n}[X_n = y_0, ..., X_1 = y_{n-1}] \\
&= \pi(y_n)p(y_n, y_{n-1}) \cdot ... \cdot p(y_1, y_0) \\
&= \pi(y_n)\frac{1}{\pi(y_{n-1})}p(y_n, y_{n-1}) \cdot \frac{\pi(y_{n-1})}{\pi(y_{n-2})}p(y_{n-1}, y_{n-2}) \cdot ... \cdot \frac{\pi(y_1)}{\pi(y_0)}p(y_1, y_0) \cdot \pi(y_0) \\
&= \pi(y_0) \cdot p^*(y_0, y_1) \cdot ... \cdot p^*(y_{n-1}, y_n)
\end{aligned}$$

Damit ist $(Y_n)_{0 \leq n \leq N} := (X_{N-n})_{0 \leq n \leq N}$ eine (π, P^*)-Markovkette □

Definition 3.1.10. (reversibel)
Ein Maß π heißt reversivel bzgl. einer stochastischen Matrix $P = (p(x, y)_{x,y \in E}$, falls die sogenannte "detailed Balance"Bedingung gilt, d.h.

$$\forall x, y \in E : \pi(x)p(x, y) = \pi(y)p(y, x)$$

Eine stochastische Matrix nennen wir auch reversibel, falls es ein bzgl. P reversibeles Maß existiert.

Bemerkung 3.1.11.

- Falls π reversibel ist bzgl. P $\Rightarrow$ π invariant bzgl. P
- Falls P reversibel und irreduzibel $\Rightarrow P = P^*$

Beispiel 3.1.12. (Ehrenfest's Urnenmodell) In zwei Urnen liegen N Kugeln. Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ wird eine Kugel zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt, die die Urne wechselt. Dann können wir die Anzahl der Kugeln in der ersten Urne durch eine Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $E = \{0, ..., N\}$ und Übergangsmatrix

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{N} & , y = x - 1 \text{ und } x \geq 1 \\ 1 - \frac{x}{N} & , y = x + 1 \text{ und } x \leq N - 1 \end{cases}$$

beschreiben. Diese Konstruktion ergibt Sinn, da mit WK $\frac{1}{N}$ eine beliebige Kugel der N vielen Kugeln ausgewählt wird und zu diesem Zeitpunkt x viele Kugeln in der ersten Urne sind.

Wir definieren das Maß $\pi(x) := 2^{-N}\binom{N}{x}$. Dann gilt $\forall x \in \{0, ..., N-1\}$

$$\begin{aligned}
\pi(x)p(x,x+1) &= 2^{-N}\binom{N}{x} \cdot (1 - \frac{x}{N}) = 2^{-N}\frac{N!}{x!(N-x)!} \cdot \frac{N-x}{N} \\
&= 2^{-N}\frac{(N-1)!}{x!(N-x-1)!} = 2^{-N}\frac{N!}{(x+1)!(N-(x+1))!}\frac{x+1}{N} \\
&= 2^{-N}\binom{N}{x+1} \cdot p(x+1,x) \\
&= \pi(x+1) \cdot p(x+1,x)
\end{aligned}$$

Damit ist π ein reversibeles Maß.

Satz 3.1.13. (Kolmogorov's Zykelbedingung)
Sei $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$ eine irreduzibele stochastische Matrix, dann gilt

$$\begin{aligned}
&\text{Ein Maß } \pi \text{ auf E ist reversibel bzgl. P} \\
\iff &\, i)\ \forall x,y \in E:\ p(x,y) > 0 \Rightarrow p(y,x) > 0 \\
&\, ii)\ \text{Für jeden Zykel } x_0, ..., x_n \text{ mit } x_n = x_0 \text{ und } \prod_{i=0}^{n} p(x_i, x_{i-1}) > 0: \quad \prod_{i=1}^{n}\frac{p(x_{i-1},x_i)}{p(x_i,x_{i-1})} = 1
\end{aligned}$$

Beweis. " $\Rightarrow$ " Da π ein reversibeles Maß ist bzgl. P, folgt das π ein invariantes Maß ist. Da P zusätzlich irreduzibel ist folgt aus Bem. 3.1.2 c), dass $\forall x \in E: \pi(x) > 0$.

- z.z. $p(x,y) > 0 \Rightarrow p(y,x) > 0$
  Sei $p(x,y) > 0$, dann gilt mittels der "detailed balance"Bedingung:

$$p(y,x) = \frac{\pi(y)}{\pi(y)}p(y,x) = \frac{\pi(x) \cdot p(x,y)}{\pi(y)} > 0, \text{ da } \forall x \in E: \pi(x) > 0$$

- z.z. $\prod_{i=1}^{n}\frac{p(x_{i-1},x_i)}{p(x_i,x_{i-1})} = 1$
  Betrachte nun $x_0, ..., x_n \in E$ mit $x_n = x_0$ und $\prod_{i=1}^{\infty} p(x_i, x_{i+1}) > 0$.
  Wir zeigen wieder mittels der "detailed balance"Bedinung

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}\frac{p(x_{i-1},x_i)}{p(x_i,x_{i-1})} = \prod_{i=1}^{n}\frac{\pi(x_{i-1})}{\pi(x_{i-1})}\frac{p(x_{i-1},x_i)}{p(x_i,x_{i-1})} \overset{det.bal.}{=} \prod_{i=1}^{n}\frac{\pi(x_i)}{\pi(x_{i-1})}\frac{p(x_i,x_{i-1})}{p(x_i,x_{i-1})} &= \prod_{i=1}^{n}\frac{\pi(x_i)}{\pi(x_{i-1})} \\
&= \frac{\pi(x_1)}{\pi(x_0)} \cdot \frac{\pi(x_2)}{\pi(x_1)} \cdot ... \cdot \frac{\pi(x_n)}{\pi(x_{n-1})} \\
&= \frac{\pi(x_n)}{\pi(x_0)} \\
&\overset{x_0 = x_n}{=} 1
\end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ " Da unsere beiden Bedingungen i) und ii) keine Eigenschaften für π enthalten, können wir π selber wie folgt konstruieren:

Für ein festes $z \in E$ setzen wir $\pi(z) = 1$. Aufgrund der Irreduzibilität von P gilt, dass $\forall x \in E \; \exists n \in \mathbb{N}$ mit $p_n(z,x) > 0$.

Folglich existiert ein Pfad $x_0, ..., x_n \in E$ mit $x_0 = z$ und $x_n = x$ und es gilt $\prod_{i=1}^n p(x_i, x_{i-1}) > 0$.

Die letze Eigenschaft gilt, da $p_n(z,x) > 0$ ist und weil dieser Pfad existiert, für den gilt, dass für jedes $i \leq n$: $p(x_{i-1}, x_i) > 0$. Aus i) folgt dann jedes $i \leq n$: $p(x_i, x_{i-1}) > 0$.

Wir definieren

$$\pi(x) := \prod_{i=1}^n \frac{p(x_{i-1}, x_i)}{p(x_i, x_{i-1})}$$

Wir wollen zeigen, dass $\pi(x)$ "wohldefiniert" ist indem wir zeigen:

<u>z.z.</u> $\pi(x)$ ist unabhängig vom gewählten Pfad.

Sei $(x'_0, ..., x'_m)$ ein weiterer Pfad in E mit $x'_0 = z$ und $x'_m = x$ und es gilt $\prod_{i=1}^m p(x'_i, x'_{i-1}) > 0$.

Dann gilt wieder mittels i), dass $\prod_{i=1}^m p(x'_{i-1}, x'_i) > 0$.

Wir setzen $(y_0, ..., y_{n+m}) = (x_0, ..., x_n, x'_{m-1}, ..., x'_0)$.

Dann gilt

$$y_0 = y_{n+m} = z \text{ und } \prod_{i=1}^{n+m} p(y_i, y_{i-1}) \overset{x'_m = x_n}{=} \prod_{i=1}^n p(x_i, x_{i-1}) \cdot \prod_{j=1}^m p(x'_{j-1}, x'_j) > 0$$

Via ii) folgt dann:

$$\pi(x) = \prod_{i=1}^n \frac{p(x_{i-1}, x_i)}{p(x_i, x_{i-1})} = \prod_{j=1}^m \frac{p(x'_{j-1}, x'_j)}{p(x'_j, x'_{j-1})} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{n+m} \frac{p(y_{i-1}, y_i)}{p(y_i, y_{i-1})}}_{=1} \overset{oben}{=} \prod_{j=1}^m \frac{p(x'_{j-1}, x'_j)}{p(x'_j, x'_{j-1})}$$

Damit ist $\pi(x)$ unabhängig vom gewählten Pfad.

Jetzt zeigen wir die Reversibilität: <u>z.z.</u> $\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x)$

- Fall 1: $p(x,y) = 0$

  Dann gilt mittels i) $p(y,x) = 0$, damit gilt Gleichheit

- $p(x,y) > 0$

  Dann ist wieder mittels i) $p(y,x) > 0$. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}\pi(x)p(x,y) &= \prod_{i=1}^n \frac{p(x_{i-1}, x_i)}{p(x_i, x_{i-1})} \cdot p(x,y) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{p(x_{i-1}, x_i)}{p(x_i, x_{i-1})} \cdot \frac{p(x,y)}{p(y,x)} p(y,x) = \pi(y)p(y,x)\end{aligned}$$

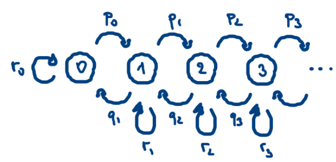
  da mit $x_{n+1} = y$ hat der Pfad $(x_0, ..., x_{n+1})$ erneut die Eigenschaft, dass $x_0 = z$ und $x_{n+1} = y$ und $\prod_{i=1}^{n+1} p(x_i, x_{i-1}) = \prod_{i=1}^n p(x_i, x_{i-1}) \cdot \underbrace{p(y,x)}_{>0 \text{ nach Konstruktion}} > 0$

$\square$

Beispiel 3.1.14. (Geburts- und Todesprozess)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $E = \mathbb{N}_0$, dessen Übergamngsmatrix P durch

$$p(x,y) = \begin{cases} p_x & ,y = x+1 \\ r_x & ,y = x \\ q_x & ,y = x-1 \wedge x \geq 1 \end{cases} \qquad \text{und } p_x + r_x + q_x = 1$$

definiert ist und der Übergangsgraph:



wobei wir annehmen, dass $\forall x \in \mathbb{N} : q_x > 0$.
Wir setzen $\pi(0) := 1$ und $\forall x \in \mathbb{N} : \pi(x) = \prod_{y=1}^{x} \frac{p_{y-1}}{q_y} (= \prod_{y=1}^{x} \frac{p(y-1,y)}{q(y,y-1)})$
Dann gilt

$$\pi(x-1)p(x-1,x) = \pi(x-1)p_{x-1} = \pi(x-1)\frac{p_{x-1}}{q_x}q_x = \pi(x-1)\frac{p_{x-1}}{q_x}p(x,x-1) \overset{\text{unabh. des Pfades}}{=} \pi(x)p(x,x-1)$$

Damit ist π reversibel bzgl. P und nach Bemerkung 3.1.11 i) ein invariantes Maß bzgl. P.
Falls außerdem gilt

$$\sum_{x\in E} \pi(x) = \sum_{x\in E} \prod_{y=1}^{x} \frac{p_{y-1}}{q_y} < \infty$$

dann lässt sich π zu einer Gleichverteilung normieren.

3.2 Struktur der Gleichgewichtsverteilung

Frage: Existenz von invarianten Maßen und Gleichgewichtsverteilungen

Satz 3.2.1. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine (ν, P)-Markovkette auf dem Zustandsraum E und sei $\emptyset \neq K \subseteq E$ rekurrent und eine kommunizierende Klasse. Dann definieren wir $\forall x \in K$:

$$\mu_x(y) := \mu_x(\{y\}) := \mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbf{1}_{X_n=y}],\ y \in E$$

dabei ist $S_{\{x\}}$ die erste Treffzeit des Zustandes $x \in E$

a) Dann gilt $\forall x, y \in K$ mit $x \neq y$

$$\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}] > 0 \text{ und } \mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbf{1}_{X_n=y}] = \frac{\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}]}{\mathbb{P}_y[S_{\{x\}} < S_{\{y\}}]}$$

Insbesondere gilt

$$\mu_x(y) = \begin{cases} 1 & , y = x \\ 0 & , y \in K^C \end{cases} \quad \text{und } \forall y \in K : \mu_x(y) \in (0, \infty)$$

b) $\forall x \in K$ ist μ_x ein invariantes Maß bzgl. P.

c) Ist λ ein invariantes Maß bzgl. P und es gilt

$$\exists x \in K : \lambda(x) = 1 \text{ und } \forall x \in K^C : \lambda(x) = 0$$

Dann gilt $\lambda = \mu_x$

Beweis.

a)

<u>z.z.</u> $\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}] > 0$

Da K eine rekurrente, kommunizierende Klasse ist, dann folgt mittels Satz 2.2.12

$$\forall x, y \in K : \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] = 1$$

Wir bezeichnen die k-te Treffzeit $S_{\{x\}}^k$ des Zustandsdes $x \in E$ wie immer.

Via der starken Markoveigenschaft gilt dann $\forall x, y \in K$ mit $x \neq y$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x[S_{\{x\}}^k < S_{\{y\}}] &= \mathbb{P}_x[S_{\{x\}}^k < S_{\{y\}}, S_{\{x\}}^{k-1} < S_{\{y\}}] \\
&= \mathbb{P}_x[S_{\{x\}}^{k-1} < S_{\{y\}}] \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{x\}}^k < S_{\{y\}} \mid S_{\{x\}}^{k-1} < S_{\{y\}}] \\
&= \mathbb{P}_x[S_{\{x\}}^{k-1} < S_{\{y\}}] \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{x\}}^k < S_{\{y\}} \mid \underbrace{S_{\{x\}}^{k-1} < S_{\{y\}}}_{\in \mathcal{F}^X_{S_{\{x\}}^{k-1}}}, X_{S_{\{x\}}^{k-1}} = x, \underbrace{S_{\{x\}}^{k-1} < \infty}_{\mathbb{P}_x[S_{\{x\}}^{k-1} < \infty] = 1}] \\
&\overset{st.MK.Eig.}{=} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}}^{k-1} < S_{\{y\}}] \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < S_{\{y\}}] \\
&\overset{induktiv}{=} \ldots \\
&= \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < S_{\{y\}}]^k
\end{aligned}$$

Angenommen $\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}] = 0$, wegen: $\forall \omega \in \Omega : S_{\{x\}}^k(\omega) \geq k$:

$$\mathbb{P}_x[k < S_{\{y\}}] \geq \mathbb{P}_x[S_{\{x\}}^k < S_{\{y\}}] = \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < S_{\{y\}}]^k = (1 - \underbrace{\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}]}_{\overset{Ann.}{=} 0})^k = 1$$

Damit würde gelten:

$$0 \overset{\text{Rekurrenz \& komm. Klasse}}{=} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = \infty] = lim_{k\to\infty}\mathbb{P}_x[k < S_{\{y\}}] \overset{oben}{\geq} 1, \text{ Widerspruch!}$$

Damit gilt $\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}] > 0$.
<u>z.z.</u> $\mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbf{1}_{X_n=y}] = \frac{\mathbb{P}_x[S_{\{y\}}<S_{\{x\}}]}{\mathbb{P}_y[S_{\{x\}}<S_{\{y\}}]}$
Zunächst folgt aus der starken Markoveigenschaft $\forall N \in \mathbb{N}$ und $z \in E$:

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N}_0 : \\
&\qquad \mathbb{P}_z[X_{S_{\{y\}}+n} = y, n < S_{\{x\}} \wedge N - S_{\{y\}}, S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N] \\
&\qquad = \mathbb{P}_z[S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N] \cdot \mathbb{P}_z[X_{S_{\{y\}}+n} = y, n < S_{\{x\}} \wedge N - S_{\{y\}} \mid S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N] \\
&\qquad \overset{st.MK.Eig.}{=} \mathbb{P}_z[S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N] \cdot \mathbb{P}_y[X_n = y, n < S_{\{x\}} \wedge N]
\end{aligned}$$

Wir haben hier betrachtet, dass wir in irgend einem Zustand starten und dann an der WK interessiert sind, dass wir nachdem wir den Zustand y einmal getroffen haben, diesen nochmal treffen wenn wir n viele Schritte gehen. Dabei soll n kleiner sein als die Differenz von der ersten Treffzeit von y und dem Minimum einer beliebig Zahl N und der ersten Treffzeit von x. Damit n positiv ist schneiden wir die WK mit der Bedinung, dass die erste Treffzeit von y kleiner ist als dieses Minimum.

Nun folgt eine Vorbetrachtungen, an der wie später Stetigkeit von Maßen anwenden werden:

$$\begin{aligned}
\infty \overset{\text{künstl. Einfüg. von N}}{>} & \mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}\wedge N-1} \mathbf{1}_{X_n=y}],\ \mathbf{1}_{X_n=y}=0 \text{ bis zur ersten Treffzeit} S_{\{y\}} \\
&= \mathbb{E}_x[\sum_{n=S_{\{y\}}}^{S_{\{x\}}\wedge N-1} \mathbf{1}_{X_n=y}\mathbf{1}_{S_{\{y\}}<S_{\{x\}}\wedge N}] \\
&= \sum_{n=S_{\{y\}}}^{S_{\{x\}}\wedge N-1} \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{X_n=y}\mathbf{1}_{S_{\{y\}}<S_{\{x\}}\wedge N}] \\
&= \sum_{n=0}^{S_{\{x\}}\wedge N-1-S_{\{y\}}} \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{X_{S_{\{y\}}+n}=y}\mathbf{1}_{S_{\{y\}}<S_{\{x\}}\wedge N}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{X_{S_{\{y\}}+n}=y}\mathbf{1}_{S_{\{y\}}<S_{\{x\}}\wedge N}\mathbf{1}_{n<S_{\{x\}}\wedge N-S_{\{y\}}}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x[X_{S_{\{y\}}+n}=y, S_{\{y\}}<S_{\{x\}}\wedge N, n<S_{\{x\}}\wedge N-S_{\{y\}}] \\
&\overset{oben}{=} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}}<S_{\{x\}}\wedge N]\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}_y[X_n=y, n<S_{\{x\}}\wedge N] \\
&= \mathbb{P}_x[S_{\{y\}}<S_{\{x\}}\wedge N]\cdot\mathbb{E}_y[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}\wedge N-1}\mathbf{1}_{X_n=y}]
\end{aligned}$$

Diesmal starten wir in $y\in E$ und gehen genauso vor, nur erhalten eine "+1"weil wir y beim Start bereits treffen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_y[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}\wedge N-1}\mathbf{1}_{X_n=y}] &= 1+\sum_{n=S_{\{y\}}}^{S_{\{x\}}\wedge N-1}\mathbb{E}_y[\mathbf{1}_{X_n=y}\mathbf{1}_{S_{\{y\}}<S_{\{x\}}\wedge N}] \\
&\overset{\text{wie oben}}{=} 1+\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}_y[X_{S_{\{y\}}+n}=y, S_{\{y\}}<S_{\{x\}}\wedge N, n<S_{\{x\}}\wedge N-S_{\{y\}}] \\
&= 1+\mathbb{P}_y[S_{\{y\}}<S_{\{x\}}\wedge N]\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}_y[X_n=y, n<S_{\{x\}}\wedge N] \\
&= 1+\mathbb{P}_y[S_{\{y\}}<S_{\{x\}}\wedge N]\cdot\mathbb{E}_y[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}\wedge N-1}\mathbf{1}_{X_n=y}]
\end{aligned}$$

$$\iff \mathbb{E}_y[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}\wedge N-1}\mathbf{1}_{X_n=y}] = \frac{1}{\mathbb{P}_y[S_{\{y\}}>S_{\{x\}}\wedge N]}$$

Mittels dem MCT und der Stetigkeit der Maße $\mathbb{P}_x$ und $\mathbb{P}_y$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbf{1}_{X_n=y}] &= lim_{N\to\infty}\mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}\wedge N-1} \mathbf{1}_{X_n=y}], \text{ da } \mathbb{P}_x[S_{\{x\}}<\infty]=1\\ &= lim_{N\to\infty}\frac{\mathbb{P}_x[S_{\{y\}}<S_{\{x\}}\wedge N]}{\mathbb{P}_y[S_{\{y\}}>S_{\{x\}}\wedge N]}\\ &= \frac{\mathbb{P}_x[S_{\{y\}}<S_{\{x\}}]}{\mathbb{P}_y[S_{\{x\}}<S_{\{y\}}]}, \text{ da } \mathbb{P}_x[S_{\{x\}}<\infty]=1\end{aligned}$$

Nach Definition ist $\mu_x(x)=1$.

Falls $y\in K$ gilt $\mu_x(y)\in(0,\infty)$

Falls $y\in K^C$ dann gilt $\mu_x(y)=0$, da dann gilt $\forall n\in\mathbb{N}: p_n(x,y)=0$, d.h. da y nicht erreichbar ist von x, tritt die Treffzeit nie ein.

b)

Wir wollen zeigen $\forall x\in K$ und $\forall y\in E: (\mu_x P)(y)=\mu_x(y)$

Fall 1: $y\in K^C$

Da für $y\in K^C$ gilt: $\forall z\in K: z\nrightarrow y$ folgt

$$(\mu_x P)(y)=\sum_{z\in E}\mu_x(z)p(z,y) \overset{\forall z\in K^C:\mu_x(z)=0}{=} \sum_{z\in K}\mu_x(z)p(z,y) \overset{VSS}{=} 0=\mu_x(y)$$

Fall 2: $y\in K$

Da $x\in K$ nach VSS rekurrent ist, gilt

$$
\begin{aligned}
\mu_x(y) &= \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{X_0=y}] + \mathbb{E}_x[\sum_{n=1}^{S_{\{x\}}} \mathbf{1}_{X_n=y}] - \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{X_{S_{\{x\}}}=y} \cdot \mathbf{1}_{S_{\{x\}}<\infty}] \\
&= \mathbb{E}_x[\sum_{n=1}^{S_{\{x\}}} \mathbf{1}_{X_n=y}] + \mathbb{P}_x[X_0 = y] - \mathbb{P}_x[X_{S_{\{x\}}} = y, S_{\{x\}} < \infty] \\
&= \mathbb{E}_x[\sum_{n=1}^{S_{\{x\}}} \mathbf{1}_{X_n=y}] + (\mathbb{P}_x[X_0 = y] - \mathbb{P}_x[X_{S_{\{x\}}} = y, S_{\{x\}} < \infty]) \cdot \mathbf{1}_{x=y} \\
&= \mathbb{E}_x[\sum_{n=1}^{S_{\{x\}}} \mathbf{1}_{X_n=y}] + (1 - \underbrace{\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty]}_{=1}) \cdot \mathbf{1}_{x=y} \\
&= \sum_{n=1}^{S_{\{x\}}} \mathbb{P}_x[X_n = y] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[X_n = y, n \leq S_{\{x\}}] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{z \in E} \mathbb{P}_x[X_n = y, n \leq S_{\{x\}}, X_{n-1} = z] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{z \in E} \mathbb{P}_x[n \leq S_{\{x\}}, X_{n-1} = z] \cdot \mathbb{P}_x[X_n = y \mid n \leq S_{\{x\}}, X_{n-1} = z]
\end{aligned}
$$

Da $\{n \leq S_{\{x\}}\} = \{n \geq S_{\{x\}}\}^C \in \mathcal{F}_{n-1}^x$, können wir die Allg. Markoveigenschaft verwenden

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{z \in E} \mathbb{P}_x[n-1 \leq S_{\{x\}} - 1, X_{n-1} = z] \cdot \mathbb{P}_z[X_1 = y] \\
&= \sum_{z \in E} \mathbb{P}_z[X_1 = y] \cdot \mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbf{1}_{X_n=z}] \\
&= \sum_{z \in E} p(z, y) \cdot \mu_x(z) = (\mu_x P)(y)
\end{aligned}
$$

c)

Sei λ ein invariantes Maß bzgl. P auf E mit: für ein $x \in K$: $\lambda(x) = 1$ und $\forall y \in K^C : \lambda(y) = 0$.

<u>z.z.</u> $\forall y \in K \ \forall N \in \mathbb{N} : \lambda(y) \geq \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n, X_n = y]$

IA: N=1: Da λ invariant ist, gilt $\forall y \in K$:

$$
\begin{aligned}
\lambda(y) = (P\lambda)(y) = \sum_{z \in E} \lambda(z) p(z, y) &\geq \underbrace{\lambda(x)}_{V \underset{=}{S} S_1} p(x, y) \\
&= \mathbb{P}_x[X_1 = y] = \mathbb{P}_x[X_1 = y, S_{\{x\}} \geq 1]
\end{aligned}
$$

IS: $N \to N+1$ Für $y \in K$ gilt

$$\lambda(y) = (P\lambda)(y) = \sum_{z\in K} \lambda(z)p(z,y) = \sum_{z\in K\setminus\{x\}} \lambda(z)p(z,y) + \lambda(x)p(x,y)$$
$$\overset{IV}{\geq} \sum_{z\in K\setminus\{x\}} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n, X_n = z]p(z,y) + \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq 1, X_1 = y]$$

Da $\{S_{\{x\}} \geq n+1\} = \{S_{\{x\}} \leq n\}^C \in \mathcal{F}_n^x$ folgt $\forall z \in K \setminus \{x\}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n+1, X_n = z, X_{n+1} = y] \\
&= \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n+1, X_n = z] \cdot \mathbb{P}_x[X_{n+1} = y \mid S_{\{x\}} \geq n+1, X_n = z] \\
&\overset{MKEig.}{=} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n+1, X_n = z] \cdot \mathbb{P}_z[X_1 = y] \\
&\overset{x\neq z}{=} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n, X_n = z] \cdot p(z,y)
\end{aligned}$$

Damit können wir den Summanten wie folgt austauschen

$$\begin{aligned}
\lambda(y) &\geq \sum_{z\in K\setminus\{x\}} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n, X_n = z]p(z,y) + \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq 1, X_1 = y] \\
&= \sum_{z\in K\setminus\{x\}} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n+1, X_n = z, X_{n+1} = y] + \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq 1, X_1 = y] \\
&= \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n+1, X_{n+1} = y] + \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq 1, X_1 = y] \\
&= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n+1, X_{n+1} = y] = \sum_{n=1}^{N+1} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n, X_n = y]
\end{aligned}$$

<u>z.z.</u> $\lambda = \mu_x$

Wir werden nun zeigen mittels dem eben gezeigten, dass $\lambda \geq \mu_x$, denn dann ist $\lambda - \mu_x$ nicht negativ und erfüllt alle anderen Eigenschaften eines Maßes.

Mittels MCT gilt:

$$\lambda(y) \geq lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n, X_n = y] \overset{\text{umformen wie in b)}}{=} \mathbb{E}_x[\sum_{n=1}^{S_{\{x\}}} \mathbf{1}_{X_n = y}] = \mu_x(y)$$

Insbesondere ist $\lambda - \mu_x$ ein invariantes Maß, mit der Eigenschaft $\forall y \in K^C \cap \{x\} : (\lambda - \mu_x)(y) = 0$.

Denn für $y = x$ gilt $\lambda(x) - \mu_x(x) = 1 - 1 = 0$ und für $y \in K^C$ gilt $\lambda(y) - \mu_x(y) = 0 - 0 = 0$.

Wir wollen zeigen dass dies für alle $y \in E$ gilt, deshalb betrachten wir $y \in K \setminus \{x\}$.

Da $x \leftrightarrow y$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p_n(y,x) > 0$, daraus folgt

$$0 = (\lambda - \mu_x)(x) = ((\lambda - \mu_x)P^n)(x) = \sum_{z \in E} \underbrace{(\lambda - \mu_x}_{\geq 0}(z) \cdot p_n(z,x) \geq (\lambda - \mu_x)(y) \underbrace{p_n(y,x)}_{>0}$$

$$\iff 0 \geq (\lambda - \mu_x)(y) \iff \lambda(y) = \mu_x(y) \ \forall y \in K \setminus \{x\}$$

Damit gilt $\lambda = \mu_x$. $\square$

Bemerkung 3.2.2. Falls die Menge $\emptyset \neq K \subseteq E$ eine transiente, kommunizierneden Klasse ist, dann folgt aus der Gleichung aus dem Beweisteil b)

$$\begin{aligned}
\forall y \in E: \quad &: \\
\mu_x(y) &= \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{X_0=y}] + \mathbb{E}_x[\sum_{n=1}^{S_{\{x\}}} \mathbf{1}_{X_n=y}] - \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{X_{S_{\{x\}}}=y}] \\
&= \ldots \\
&= \mathbb{E}_x[\sum_{n=1}^{S_{\{x\}}} \mathbf{1}_{X_n=y}] + (1 - \underbrace{\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty]}_{<1}) \cdot \mathbf{1}_{x=y} \\
&\geq \mathbb{E}_x[\sum_{n=1}^{S_{\{x\}}} \mathbf{1}_{X_n=y}] \\
&= \ldots \\
&= \sum_{z \in E} \mu_x(z) p(z,y)
\end{aligned}$$

wobei für $y \in E \setminus \{x\}$ Gleichheit gilt.

Satz 3.2.3. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum $\emptyset \neq K \subseteq E$ und K eine rekurrente, kommunizierende Klasse. Dann existiert für ein invariantes Maß $\pi : E \to [0, \infty)$ bzgl. P mit $\pi(y) = 0$ $\forall y \in K^C$, welches bis auf konstante Vielfache in $[0, \infty]$ eindeutig ist.

Beweis. (Existenz)
Folgt direkt aus Satz 3.2.1 a) und b).
(Eindeutigkeit bis auf konstes Vielfaches)
Sei π ein invariantes Maß bzgl. P mit $\pi(y) = 0 \ \forall y \in K^C$.
Falls $\forall y \in K$: $\pi(y) = 0$ oder $\pi(y) = \infty$, dann gilt für festes $x \in K$, dass

$$\pi = c\mu_x, \ c \in \{0, \infty\}.$$

Sei also $\pi \neq 0$ oder $\pi \neq \infty$.
Dann existiert ein $x \in K$ mit $\pi(x) \in (0, \infty)$. Betrachte das Maß $\lambda(y) := \frac{\pi(y)}{\pi(x)}$.

- Wir wissen, dass λ ein invariantes Maß ist
- $\forall y \in K^C : \lambda(y) = \frac{0}{\pi(x)} = 0$
- $\lambda(x) = \frac{\pi(x)}{\pi(x)} = 1$

Aus Satz 3.2.1 a) folgt dann $\lambda = \mu_x$

$\iff \pi = \underbrace{\pi(x)}_{\in(0,\infty)} \mu_x$ □

Bemerkung 3.2.4. Wenn $\emptyset \neq K \subseteq E$ eine transiente, kommunizierende Klasse ist, dann können invariante Maße existieren, die keine konstanten Vielfache voneinander sind (also nicht eindeutig). Ein Beispiel folgt.

Satz 3.2.5. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E und $\emptyset \neq K \subseteq E$ eine kommunizierende Klasse, dann gelten die Aussagen:

a) $\exists \pi \in Inv(P)$ mit $\sum_{x\in K} \pi(x) = 1 \iff$ K positiv rekurrent ist.
Außerdem gilt dann $\forall x \in K : \pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]}$

b) Wenn $K \neq E$ transient ist und $\pi \in Inv(P)$, dann ist $\forall x \in K$: $\pi(x) = 0$

Beweis. **a)**
" $\Rightarrow$ " Sei $\pi \in Inv(P)$ mit $\sum_{x\in K} \pi(x) = 1$. Dann gilt $\exists x \in K$: $\pi(x) > 0$.
Da für jedes $y \in K$ gilt, dass $x \leftrightarrow y$, folgt aus Bemerkung 3.1.2 c), dass $\forall y \in K : \pi(y) > 0$.
Wir betrachten nun das invariante Maß $\lambda = \frac{\pi}{\pi(x)}$, dann gilt mittels Satz 3.2.1 c), dass $\lambda = \mu_x$.
Damit gilt

$$\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] = \mathbb{E}_x[\sum_{n=1}^{S_{\{x\}}} \mathbf{1}_{\bigsqcup_{y\in K}\{X_n=y\}}] = \sum_{y\in K} \mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbf{1}_{X_n=y}] = \sum_{y\in K} \mu_x(y) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y\in K} \pi(y) = \frac{1}{\pi(x)} < \infty$$

Damit ist x postiv rekurrent und nach Bem. 2.2.9, dass $\forall y \in K$ positiv rekurrent ist.
Außerdem gilt $\forall x \in K$

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]}$$

Damit ist π eindeutig bestimmt.
" $\Leftarrow$ " Sei K eine positiv rekurrente Klasse. Dann gilt $\forall x \in K$

$$\sum_{y\in K} \mu_x(y) = \mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] < \infty$$

Damit gilt nach Satz 3.2.3 $\pi(y) := \frac{\mu_x(y)}{\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]}$ eine Gleichgewichtsverteilung mit $\pi(y) = 0 \ \forall y \in K^C$
Also gilt $\sum_{y\in K} \pi(y) = 1$

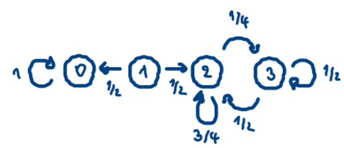
b)

Folgt direkt aus Satz 3.1.6 b) $\square$

Korollar 3.2.6. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible (ν, P)-Markovkette auf einem endlichen Zustandsraum E, dann existiert eine eindeutig bestimmte Gleichverteilung.

Beweis. Aus Satz 2.2.11 folgt, mittels der Irreduzibilität, dass jeder Zustand $y \in E$ positiv rekurrent ist. Dann sind die VSS von Satz 3.2.5 gegeben und wir erhalten für jedes Element aus der kommunizierenden Klasse (die bei diesem Fall ganz E ist) eine eindeutige Darstellung der Gleichgewichtsverteilung. Wäre P nicht irreduzibel, wäre die Gleichgewichtsverteilung nur eindeteutig für Elemente in der kommunizierenden Klasse. $\square$

Beispiel 3.2.7. Betrachte eine Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Zustandsraum $E = \{0, 1, 2, 3\}$, dessen Übergangsmatrix P durch den folgenden Übergangsgraphen beschrieben wird:



Dann bilden die Zustände $\{0\}$ und $\{2, 3\}$ jeweils eine kommunizierende, positiv rekurrente Klasse, während der Zustand $\{1\}$ transients ist. Damit gilt

$$\pi_1 = \mathbf{1}_{\{0\}} \text{ und } \pi_2 = \frac{2}{3}\mathbf{1}_{\{2\}} + \frac{1}{3}\mathbf{1}_{\{3\}}$$

Im Zustand $\{1\}$ haben beide Verteilungen die Masse 0.

Außerdem sind diese beiden Gleichgewichtsverteilungen in Inv(P).

Schließlich gilt $\mathbb{E}_2[S_{\{2\}}] = \frac{3}{2}$, dies gilt wegen

$$\mathbb{E}_2[S_{\{2\}}] \overset{\text{Wie in Beweis 2.3.5 a)}}{=} \sum_{y\in K} \mu_2(y) = \mu_2(2) + \mu_2(3) = 1 + \mu_2(3)$$

Und es gilt

$$\mu_2(3) = \frac{\mathbb{P}_2[S_{\{3\}}] < S_{\{2\}}]}{\mathbb{P}_3[S_{\{2\}}] < S_{\{3\}}]} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

Kapitel 4

Konvergenz von Markovketten

4.1 Konvergenz der Übergangswahrscheinlichkeiten

Frage: Unter welchen Bedingungen konvergieren die Übergangswahrscheinlichkeiten?

Wir hatten schon die Konvergenz von transienten Zuständen behandelt, welche ja gegen 0 geht. Nun betrachten wir rekurrente Markovketten auch:

Beispiel 4.1.1. Betrachte die stochastische Matrix $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ auf $E = \{0, 1\}$, dann gilt:

$$\forall k \in \{2l+1 \mid l \in \mathbb{N}_0\}: \; P^k = P \text{ und } \forall k \in \{2l \mid l \in \mathbb{N}_0\}: \; P^k = I$$

Definition 4.1.2. (Kopplung von Markovketten)

Wir nennen $((X_n, Y_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine bivariate Markovkette auf dem Zustandsraum $E \times E$. Sie besteht aus zwei Komponenten, die jeweils Markovketten sind.

Wir nennen diese bivariate Markovkette eine (markovsche) Kopplung der (μ, P)-Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und der (ν, P)-Markovkette $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf E, falls $\forall n \in \mathbb{N}_0$ und $\forall (x, y), (x', y') \in E \times E$ gilt

- $\mathbb{P}[X_{n+1} = x' \mid (X_n, Y_n) = (x, y)] = p(x, x')$
- $\mathbb{P}[Y_{n+1} = y' \mid (X_n, Y_n) = (x, y)] = p(y, y')$

Beispiel 4.1.3. (Unabhängige Kopplung)

Sei $P = (p(x, y))_{x,y \in E}$ eine stochastische Matrix und μ, ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf E. Dann ist die Markovkette $((X_n, Y_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Werten in $E \times E$, Startverteilung $\mu \otimes \nu$ und Übergangsmatrix $\overline{P}$ mit

$$\overline{p}((x, y), (x', y')) := p(x, x') \cdot p(y, y')$$

eine Kopplung einer (μ, P)-Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und der (ν, P)-Markovkette $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf E, da (wir zeigen nur die Bedinung für $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$):

$$\mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}[X_0 = x] = \mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}[(X_0, Y_0) = \{x\} \times E] \overset{\sigma-add}{=} \sum_{y\in E} \mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}[(X_0, Y_0) = \{x\} \times \{y\}]$$
$$\overset{\text{Prod. Maß}}{=} \sum_{y\in E} \mu(x) \cdot \nu(y) = \mu(x)$$

und es gilt die Definition

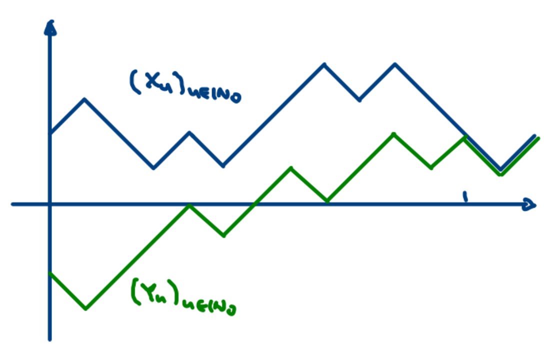
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}[X_{n+1} = x' \mid (X_n, Y_n) = (x, y)] &= \mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}[(X_{n+1}, Y_{n+1}) \in \{x'\} \times E \mid (X_n, Y_n) = (x, y)] \\ &= \sum_{y'\in E} \mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}[(X_{n+1}, Y_{n+1}) \in \{x'\} \times \{y'\} \mid (X_n, Y_n) = (x, y)] \\ &= \sum_{y'\in E} \overline{p}((x, y), (x', y')) \\ &= \sum_{y'\in E} p(x, x') \cdot p(y, y') = p(x, x')\end{aligned}$$

Analoges vorgehen für $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

Beispiel 4.1.4. (Unabhängiges Verschmelzen)
Sei $P = (p(x, y))_{x,y\in E}$ eine stochastische Matrix und μ, ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf E. Wir definieren die Übergangsmatrix $\overline{P}$ durch

$$\overline{p}((x, y), (x', y')) = \begin{cases} p(x, x') \cdot p(y, y') & , x \neq y \\ p(x, x') & , x = y \text{ und } x' = y' \\ 0 & , x = y \text{ und } x' \neq y' \end{cases} \quad \forall (x, y), (x', y') \in E \times E$$

Dann ist die $(\mu \otimes \nu, \overline{P})$-Markovkette $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $E \times E$ eine Kopplung der (μ, P)-Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und der (ν, P)-Markovkette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf E.



Aufgabe 22:...

Bemerkung 4.1.5. Selbst wenn die stochastische Matrix $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ irreduzibel ist, garantiert dies i.A. nicht, dass die stochastische Matrix $\overline{P}$ wie oben definiert ist, irreduzibel ist.

Beispiel 4.1.6. Wir betrachten erneut das Beispiel: Sei $E = \{1,2\}$ und $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dann ist P irreduzibel. Wir betrachten nun die stochastische Matrix $\overline{P}$ mit

$$\overline{p}((x,y),(x',y')) := p(x,x') \cdot p(y,y') \ \forall (x,y),(x',y') \in E \times E$$

Dann gilt

$$\overline{p}_n((1,1),(1,2)) = \underbrace{p_n(1,1)}_{=0\forall \text{ n ungerade}} \cdot \underbrace{p_n(1,2)}_{=0\forall \text{ n gerade}} = 0 \ n \in \mathbb{N}_0$$

Folglich ist die stochatische Matrix $\overline{P}$ nicht irreduzibel.

Satz 4.1.7. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette die irreduzibel, aperiodisch und rekurrent ist auf dem Zustandsraum E und mit Übergangsmatrix $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$, dann gilt $\forall x, y \in E$

$$lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\mathbb{E}_y[S_{\{y\}}]} & , \mathbb{E}_y[S_{\{y\}}] < \infty \\ 0 & , \mathbb{E}_y[S_{\{y\}}] = \infty \end{cases}$$

Bemerkung 4.1.8. Im positiv rekurrenten Fall konvergiert $p_n(x,y)$ gegen die eindeutig bestimmte Gleichgewichtsverteilung $\pi(y) = \frac{1}{\mathbb{E}_y[S_{\{y\}}]}$.

Beweis. Wir wollen insgesamt zeigen, dass $|p_n(x,y) - \frac{1}{\mathbb{E}_y[S_{\{y\}}]}| \to 0, n \to \infty$. Um dies z.z zeigen wir im ersten Schritt eine technische Abschätzung, die wir dann verwenden im zweiten Schritt wo wir die Aussage für positiv rekurrente Zustände zeigen und im dritten Schritt, bei dem wir es für nullrekurrente Zustände zeigen.

Schritt 1: Sei $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Markovvkette der unabhängigen Kopplung, d.h. wie in Beispiel 4.1.2.
Da P irreduzibel und aperiodisch folgt mit Satz 2.2.8. und Korrolar 2.1.16, dass $\forall x, x', y, y' \in E \ \exists N_0 \equiv N_0(x, x'y, y') \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall n \geq N_0 : \ \overline{p}_n((x,y),(x',y')) = p_n(x,x') \cdot p_n(y,y') > 0$$

Damit ist die Markovkette $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel. Für ein beliebiges aber festes $x_0 \in E$ definieren wir

$$S \equiv S_{\{x_0,x_0\}} := inf\{n \in \mathbb{N} \mid (X_n, Y_n) = (x_0, x_0)\}$$

z.z. $\forall n \in \mathbb{N} : |p_n(x,y) - p_n(z,y)| \leq \mathbb{P}_{(x,z)}[S > n]$. Das ist dann unsere Majorante, wenn wir im zweiten Schritt den Satz von Lebesgue verwenden.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n = y, S \le n] &= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_{(x,z)}[X_n = y, S = m] \\
&= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_{(x,z)}[S = m] \cdot \mathbb{P}_{(x,z)}[X_n = y \mid S = m] \\
&= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_{(x,z)}[S = m] \cdot \mathbb{P}_{(x,z)}[X_n = y \mid (X_S, Y_S) = (x_0, x_0), S = m] \\
&\overset{st.MK.Eig.}{=} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_{(x,z)}[S = m] \cdot \mathbb{P}_{(x_0,x_0)}[X_{n-m} = y]
\end{aligned}$$

Weil folgende Eigenschaft gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(x_0,x_0)}[X_{n-m} = y] &= \sum_{y' \in E} \mathbb{P}_{(x_0,x_0)}[(X_{n-m}, Y_{n-m}) = (y, y')] \\
&= \sum_{y' \in E} \overline{p}_{n-m}((x_0, x_0), (y, y')) \\
&\overset{Def.}{=} \sum_{y' \in E} p_{n-m}(x_0, y) \cdot p_{n-m}(x_0, y') \\
&= \sum_{y' \in E} p_{n-m}(x_0, y') \cdot p_{n-m}(x_0, y) \\
&\overset{Def.}{=} \sum_{y' \in E} \overline{p}_{n-m}((x_0, x_0), (y', y)) \\
&= \mathbb{P}_{(x_0,x_0)}[Y_{n-m} = y]
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n = y, S \le n] &= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_{(x,z)}[S = m] \cdot \mathbb{P}_{(x_0,x_0)}[X_{n-m} = y] \\
&= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_{(x,z)}[S = m] \cdot \mathbb{P}_{(x_0,x_0)}[Y_{n-m} = y] \\
&= \mathbb{P}_{(x,z)}[Y_n = y, S \le n]
\end{aligned}$$

Nun können wir die Aussage zeigen:

$$
\begin{aligned}
|p_n(x,y) - p_n(z,y)| &= |\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n = y] - \mathbb{P}_{(x,z)}[Y_n = y]| \\
&= |\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n = y, S > n] - \mathbb{P}_{(x,z)}[Y_n = y, S > n] + \underbrace{\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n = y, S \leq n] - \mathbb{P}_{(x,z)}[Y_n = y, S \leq n]}_{=0}| \\
&= |\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n = y, S > n] - \mathbb{P}_{(x,z)}[Y_n = y, S > n]| \\
&= |\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n = y \mid S > n] - \mathbb{P}_{(x,z)}[Y_n = y \mid S > n]| \cdot \mathbb{P}_{(x,z)}[S > n] \\
&\leq \mathbb{P}_{(x,z)}[S > n]
\end{aligned}
$$

<u>Schritt 2:</u> Wir betrachten nun den Fall, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ positiv rekurrent ist. Dann existiert nach Satz 3.2.5 a) eine eindetutig bestimmte Gleichgewichtsverteilung π.

Außerdem ist $\pi \otimes \pi$ auch eine Gleichgewichtsverteilung von $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$, da (einmal $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist, damit ist gleich nicht nur die kommunizierende Klasse positiv rekurrent, sondern ganz E):

$$\sum_{(x,y)\in E\times E} (\pi \otimes \pi)(x,y)\overline{p}((x,y),(x',y')) = (\pi P)(x')(\pi P)(y') \overset{\pi=\pi P}{=} \pi(x') \cdot \pi(y') = (\pi \otimes \pi)(x',y')$$

Und es gilt:

$$\sum_{(x,y)\in E\times E} (\pi \otimes \pi)(x,y) = \sum_{x\in E} \pi(x) \cdot \sum_{y\in E} \pi(y) = 1 \cdot 1 = 1$$

Nach Satz 3.2.5 a) ist die Markovkette $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ positiv rekurrent und damit auch rekurrent.

Aus Satz 2.2.12 folgt daher: $\mathbb{P}_{(x,z)}[S_{\{(x_0,x_0)\}} < \infty] = 1$

Dann gilt:

$$limsup_{n\to\infty}|p_n(x,y) - p_n(z,y)| \leq \mathbb{P}_{(x,z)}[S_{\{(x_0,x_0)\}} = \infty] = 0$$

Damit gilt natürlich

$$lim_{n\to\infty}|p_n(x,y) - p_n(z,y)| = 0$$

Schließlich betrachten wir nun das z.z.

$$
\begin{aligned}
|p_n(x,y) - \pi(y)| &\overset{\pi=\pi P}{=} |p_n(x,y) - \sum_{z\in E} \pi(z)p_n(z,y)| \\
&= |p_n(x,y)\,(\underbrace{\sum_{z\in E} \pi(z)}_{=1}) - \sum_{z\in E} \pi(z)p_n(z,y)| \\
&= |\sum_{z\in E} \pi(z)(p_n(x,y) - p_n(z,y))| \\
&\leq \sum_{z\in E} \pi(z)|(p_n(x,y) - p_n(z,y))|
\end{aligned}
$$

Mittels den Satz von Lebesgue gilt dann:

$$limsup_{n\to\infty}|p_n(x,y) - \pi(y)| \leq 0$$

Da $\pi(y) = \frac{1}{\mathbb{E}_y[S_{\{y\}}]}$ folgt nach Satz 3.2.5 a) die Behauptung.

Schritt 3: Nun betrachten wir den Fall, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nullrekurrent ist. Dabei müssen wir in die beiden Fälle Unterscheiden:

- Fall 1: $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist transient

  Dann gilt nach Korollar 2.1.5:

$$lim_{n\to\infty}p_n(x,y)^2 = lim_{n\to\infty}\overline{p}_n((x,x),(y,y)) \overset{2.1.5}{=} 0$$

  Dann folgt direkt die Behauptung.

- Fall 2: $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist rekurrent

  Nach Satz 2.2.12 gilt $\mathbb{P}_{(x,z)}[S_{\{(x_0,x_0)\}} < \infty] = 1$ und aus Schritt 1 folgt dann

$$limsup_{n\to\infty}|p_n(x,y) - p_n(z,y)| \leq \mathbb{P}_{(x,z)}[S_{\{(x_0,x_0)\}} = \infty] = 0$$

  Damit gilt also

$$lim_{n\to\infty}|p_n(x,y) - p_n(z,y)| = 0$$

  Nun konstruieren wir einen Widerspruch. Angenommen es existiert ein $(x,y) \in E \times E$ mit

$$limsup_{n\to\infty}p_n(x,y) =: \alpha > 0$$

  Dann existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sodass

$$lim_{k\to\infty}p_{n_k}(x,y) = \alpha$$

  Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nullrekurrent ist, ist das Maß μ_x aus Satz 3.2.1 ein invariantes Maß $\forall x \in E$ und ist der Form

$$\mu_x(z) := \mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}-1}} \mathbf{1}_{X_n=z}] \text{ mit } z \in E$$

  mit $\forall z \in E : \mu_x(z) \in (0,\infty)$ die folgende Eigenschaft gilt:

$$\sum_{z\in E}\mu_x(z) = \mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] \overset{nullrekurrent}{=} \infty$$

Also existiert eine endliche Teilmenge $M \subseteq E$ mit

$$\sum_{z \in M} \mu_x(z) > \frac{2}{\alpha}\mu_x(y) < \infty$$

Weiterhin existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ sodass $\forall k \geq k_0$:

$$|p_{n_k}(x,y) - \alpha| < \frac{\alpha}{4} \text{ und } max_{z \in M}|p_{n_k}(x,y) - p_{n_k}(z,y)| < \frac{\alpha}{4}$$

Daraus folgt dann $\forall z \in M$ und $\forall k \geq k_0$

$$\begin{aligned} p_{n_k}(z,y) = \alpha + p_{n_k}(z,y) - \alpha &= \alpha + p_{n_k}(z,y) - p_{n_k}(x,y) + p_{n_k}(x,y) - \alpha \\ &\geq \alpha - |p_{n_k}(z,y) - p_{n_k}(x,y)| - |p_{n_k}(x,y) - \alpha| > \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Das können wir jetzt auf einen Widerspruch führen

$$\begin{aligned} \mu_x(y) \overset{\mu_x = \mu_x P}{=} \sum_{z \in E} \mu_x(z) p_{n_k}(z,y) &\geq \sum_{z \in M} \mu_x(z) p_{n_k}(z,y) \\ &> \frac{\alpha}{2} \sum_{z \in M} \mu_x(z) > \mu_x(y) \text{ Widerspruch!} \end{aligned}$$

Folglich ist das $\alpha = 0$ aus der Beginnenden Annanhme und es gilt die Behauptung.

□

Aufgabe 23:...

Korollar 4.1.9. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette die irreduzibel, periodisch und positiv rekurrent ist auf dem Zustandsraum E und mit Übergangsmatrix $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$, wobei die Periode $d > 1$. Außerdem sei π die Gleichgewichtsverteilung bzgl. P. Dann gilt $\forall x \in E$

$$lim_{n \to \infty} p_{dn}(x,x) = d\pi(x)$$

Beweis. Betrachte die Marovkette $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Übergangsmatrix $Q := P^d$, dann ist $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ irreduzibel und wegen der Aufgabe mit dem Zeitwechsel gilt, dass

$$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \overset{d}{=} (X_{dn})_{n \in \mathbb{N}_0}$$

Damit ist nach Aufgabe 23 $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ aperiodisch und weil folgendes gilt

$$\mathbb{E}_x[S^d_{\{x\}}] = \frac{1}{d}\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] < \infty$$

ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ positiv rekurrent. Damit folgt dann aus Satz 4.1.8

$$lim_{n\to\infty}p_{dn}(x,x) = lim_{n\to\infty}q_n(x,x) \overset{4.1.8}{=} \frac{1}{\mathbb{E}_x[S^d_{\{x\}}]} = \frac{d}{\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]}$$

Damit gilt it Satz 3.2.5, dass $\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]}$ und damit die Behauptung. □

An dieser Stelle können wir nun den Beweis von Satz 2.1.10 behandeln:

Satz 2.1.10 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P) -Markovkette mit Zustandsraum E.

$$\text{Ein rekurrenter Zustand } x \in E \text{ ist nullrekurrent} \iff lim_{n\to\infty}p_n(x,x) = 0$$

Beweis. Zunächst gilt

Für einen Zustand $x \in E$ sei K(x) die kommunizierende, die x enthählt. Dann gilt wegen Aufgabe 15, dass die auf K(x) eingeschränkte Übergangsmatrix wieder stochastisch ist und es kann o.B.d.A angenommen werden, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist.

- 1. Fall: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aperiodisch, dann folgt die Aussage direkt aus Satz 4.1.7. Nämlich gilt dann:

  $$p_n(x,y) \text{ konvergiert gegen } 0 \iff (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist nullrekurrent}$$

  Damit gilt die Aussage.

- 2. Fall: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ periodisch mit Periode $d > 1$.

  " $\Leftarrow$ " Angenommen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wäre positiv rekurrent, dann folgt aus Korollar 4.1.9, dass $\forall x \in E$ gilt:

  $$0 \overset{VSS}{=} lim_{n\to\infty}p_{dn}(x,x) \overset{4.1.9}{=} \frac{d}{\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]} \overset{\text{positiv rekurrent}}{>} 0 \text{ , Widerspruch!}$$

  Damit ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nullrekurrent

  " $\Rightarrow$ " Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ periodisch ist, folgt, dass $\forall n \notin d\mathbb{N}_0 : p_n(x,x) = 0$.

  Wir betrachten nun die Markovkette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Übergangsmatrix $Q = P^d$, dann gilt mittels der Aufgabe mit dem Zeitwechsel

  $$(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \overset{d}{=} (X_{dn})_{n\in\mathbb{N}_0}$$

  Nach Aufgabe 23 ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel, aperiodisch und nullrekurrent und dann folgt aus Satz 4.1.7, dass

  $$lim_{n\to\infty}p_{dn}(x,x) = lim_{n\to\infty}q_n(x,x) = 0$$

  Damit haben wir jetzt auch die Behauptung für alle $n \in d\mathbb{N}_0$ gezeigt.

□

4.2 Ergodensätze

Satz 4.2.1. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible und rekurrente Markovkette auf dem Zustandsraum E und Übergangsmatrix P. Dann definieren wir

$$\forall x \in E: \; V_x(N) := \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_{X_n = x}$$

Für $x \in E$ bezeichnen wir μ_x das invariante Maß aus Satz 3.2.1, d.h.

$$\mu_x(y) := \mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbf{1}_{X_n = y}] \text{ mit } y \in E$$

Dann gilt für jedes $f \in l^1(\mu_x)$

$$lim_{N\to\infty} \frac{1}{V_x(N)} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) = \mathbb{E}_{\mu_x}[f(X_0)] = \sum_{y\in E} f(y)\mu_x(y) \; \mathbb{P}_x - f.s.$$

Beweis. Unser Ziel ist es das starke Gesetz der Großen Zahlen anzuwenden.
Wir bezeichnen wieder mit $S^k_{\{x\}}$ die k-te Treffzeit des Zustandes $x \in E$.
Da x rekurrent ist, folgt aus der starken Markoveigenschaft analog zum Beweis aus Lemma 2.3.4

$$\forall k \in \mathbb{N}_0: \; \mathbb{P}_x[S^k_{\{x\}} < \infty] = 1$$

Für ein $f : E \to [0, \infty)$ und $x \in E$ definieren wir

$$I^f_x(k) := \sum_{n=S^{k-1}_{\{x\}}}^{S^k_{\{x\}}-1} f(X_n) \;, k \in \mathbb{N}$$

Da die k-te Treffzeit des Zustandes $x \in E$ $\mathbb{P}_x$-f.s. endlich ist, folgt das $\forall k \in \mathbb{N} : I^f_x(k)$ auch $\mathbb{P}_x$-f.s. endlich ist.
Um das starke Gesetz der großen Zahlen verwenden zu können zeigen wir nun
z.z.$(I^f_x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ ist u.i.v. unter $\mathbb{P}_x$

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig und $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$, dann gilt mit der starken Markov Eigenschaft

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x[I_x^f(1) \le t_1, ..., I_x^f(k) \le t_k] \\
&= \mathbb{P}_x[I_x^f(1) \le t_1, ..., I_x^f(k-1) \le t_{k-1}] \cdot \mathbb{P}_x[I_x^f(k) \le t_k \mid I_x^f(1) \le t_1, ..., I_x^f(k-1) \le t_k] \\
&= \mathbb{P}_x[I_x^f(1) \le t_1, ..., I_x^f(k-1) \le t_{k-1}] \cdot \mathbb{P}_x[I_x^f(k) \le t_k \mid \underbrace{I_x^f(1) \le t_1, ..., I_x^f(k-1) \le t_k}_{\in \mathcal{F}^X_{S^{k-1}_{\{x\}}}}, X_{S^{k-1}_{\{x\}}} = x, S^{k-1}_{\{x\}} < \infty] \\
&\overset{st.MK.Eig.}{=} \mathbb{P}_x[I_x^f(1) \le t_1, ..., I_x^f(k-1) \le t_{k-1}] \cdot \mathbb{P}_x[I_x^f(1) \le t_k] \\
&\overset{induktiv}{=} ... \\
&= \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}_x[I_x^f(1) \le t_i]
\end{aligned}$$

Damit ist $(I_x^f(k))_{k \in \mathbb{N}}$ ist u.i.v. unter $\mathbb{P}_x$

- <u>Schritt 1:</u> Sei $f \in l^1(\mu_x)$ mit $f \ge 0$, dann gilt

$$\mathbb{E}_x[I_x^f(1)] = \mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} f(X_n)] = \mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \underbrace{\sum_{y \in E} f(y) \cdot \mathbf{1}_{X_n = y}}_{=f(X_n)}] = \sum_{y \in E} f(y)\, \underbrace{\mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbf{1}_{X_n = y}]}_{=\mu_x(y)} = \sum_{y \in E} f(y)\mu_x(y) < \infty$$

Mittels dem starken Gesetz der Großen Zahlen folgt dann

$$lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} I_x^f(k) \overset{sGdgZ}{=} \mathbb{E}_x[I_x^f(1)] \overset{oben}{=} \sum_{y \in E} f(y)\mu_x(y) = \mathbb{E}_{\mu_x}[f(X_0)] \ \mathbb{P}_x - f.s.$$

Außerdem gilt die folgende Eigenschaft $\mathbb{P}_x - f.s.$:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ S_{\{x\}}^{V_x(N)-1} \le N - 1 \le S_{\{x\}}^{V_x(N)}$$

Daraus folgt dann

$$\sum_{k=1}^{V_x(N)-1} I_x^f(k) = \sum_{n=0}^{S_{\{x\}}^{V_x(N)-1}-1} f(X_n) \le \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) \le \sum_{n=0}^{S_{\{x\}}^{V_x(N)}-1} f(X_n) = \sum_{k=1}^{V_x(N)} I_x^f(k)$$

Aufgrund von der Rekurrenz von x folgt aus Satz 2.1.3, dass

$$lim_{N \to \infty} V_x(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{X_n = x} = \infty \ , \mathbb{P}_x - f.s.$$

Damit gilt dann mit dem Sandwitch Theorem (wir haben gezeigt, dass eine untere und eine obere

Schranke gegen den gewünschten Ausdruck konvergiert) die Behauptung:

$$lim_{N\to\infty}\frac{1}{V_x(N)}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) = \mathbb{E}_{\mu_x}[f(X_0)]$$

- Schritt 2: Für beliebiges $f \in l^1(\mu_x)$ betrachte $f = f_+ - f_-$ und wende Schritt 1 auf f_+, f_- an.

□

Korollar 4.2.2. (Ratio Limit Theorem)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible und rekurrente Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix P. Wir definieren wieder

$$\forall x \in E: \ V_x(N) := \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_{X_n=x}$$

Sei für $x \in E$ wieder μ_x das invariante Maß wie in Satz 3.2.1, dann gilt $\forall x, y, z \in E$

$$lim_{N\to\infty}\frac{V_y(N)}{V_z(N)} = \frac{\mu_x(y)}{\mu_x(z)} \ \mathbb{P}_x - f.s.$$

Beweis. Da μ_x punktweise endlich ist, ist auch $\mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z \in l^1(\mu_x)$.
Dann gilt

$$lim_{N\to\infty}\frac{V_y(N)}{V_z(N)}\frac{V_x(N)}{V_x(N)} = lim_{N\to\infty}\frac{V_x(N)}{V_z(N)}\frac{V_y(N)}{V_x(N)} \overset{4.2.1}{=} \frac{\mu_x(y)}{\mu_x(z)} \ \mathbb{P}_x - f.s.$$

□

Satz 4.2.3. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible und positiv rekurrente Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix P. Außerdem sei $\pi \in Inv(P)$ die zugehörige Gleichgewichtsverteilung, dann gilt $\forall x \in E$ und $f \in l^1(\pi)$

$$lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) = \mathbb{E}_\pi[f(X_0)] \ \mathbb{P}_x - f.s. \text{ und Konvergenz bzgl. } L^1(\mathbb{P}_\pi)$$

Beweis. Zunächst zeigen wir die Aussage $\mathbb{P}_x - f.s.$ und dann für $L^1(\mathbb{P}_\pi)$
z.z. $lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) = \mathbb{E}_\pi[f(X_0)] \ \mathbb{P}_x - f.s.$
Da $x \in E$ positiv rekurrent ist, ist die Funktion für $y \in E$: $y \mapsto 1 \in \mathbb{R}$ in $l^1(\mu_x)$, weil

$$\sum_{y\in E}\mu_x(y) = \sum_{y\in E}\mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1}\mathbf{1}_{X_n=y}] = \mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] < \infty$$

Dann folgt aus Satz 4.2.1

$$lim_{N\to\infty}\frac{N}{V_x(N)} = lim_{N\to\infty}\frac{1}{V_x(N)}\sum_{n=0}^{N-1} 1 \overset{4.2.1}{=} \mathbb{E}_{\mu_x}[1] = \sum_{y\in E}\mu_x(y) = \mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] \in (0,\infty)$$

Außerdem ist μ_x proportional zu π, nämlich $\pi = \frac{\mu_x}{\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]}$, dann gilt

$$f \in l^1(\pi) \iff f \in l^1(\mu_x)$$

Damit folgt dann schließlich aus Satz 4.2.1

$$\begin{aligned} lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) &= lim_{N\to\infty}\frac{V_x(N)}{N}\frac{1}{V_x(N)}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) \\ &\overset{oben}{=} \frac{1}{\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]}\cdot \mathbb{E}_{\mu_x}[f(X_0)] \\ &= \frac{\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]}{\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]}\cdot \mathbb{E}_\pi[f(X_0)] = \mathbb{E}_\pi[f(X_0)],\ \mathbb{P}_x - f.s. \end{aligned}$$

<u>z.z.</u> $lim_{N\to\infty}\mathbb{E}_\pi[|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) - \mathbb{E}_\pi[f(X_0]|] = 0$
Sei $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von endlichen Teilmengen von E mit $E_k \nearrow E$.
Setze $f_k := f\mathbf{1}_{E_k}$, $k \in \mathbb{N}$
Dann gilt

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}_\pi[|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) - \mathbb{E}_\pi[f(X_0)]|] \\ &= \mathbb{E}_\pi[|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(f(X_n) - f_k(X_n)) + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_k(X_n) - \mathbb{E}_\pi[f_k(X_0)] + \mathbb{E}_\pi[f_k(X_0)] - \mathbb{E}_\pi[f(X_0)]|] \\ &\le \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{E}_\pi[|f(X_n) - f_k(X_n)|] + \mathbb{E}_\pi[|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_k(X_n) - \mathbb{E}_\pi[f_k(X_0)]|] + \mathbb{E}_\pi[f_k(X_0) - f(X_0)] \\ &\overset{(*)}{=} \mathbb{E}_\pi[|f(X_0) - f_k(X_0)|] + \mathbb{E}_\pi[|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_k(X_n) - \mathbb{E}_\pi[f_k(X_0)]|] + \mathbb{E}_\pi[f_k(X_0) - f(X_0)] \\ &\le 2\cdot\mathbb{E}_\pi[|f(X_0) - f_k(X_0)|] + \mathbb{E}_\pi[|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_k(X_n) - \mathbb{E}_\pi[f_k(X_0)]|] \\ &\le 2\cdot\mathbb{E}_\pi[|f(X_0) - f_k(X_0)|] + \mathbb{E}_\pi[\underbrace{|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \|f_k\|_\infty + \mathbb{E}_\pi[\|f_k\|_\infty]|}_{\le 2\cdot\|f_k\|_\infty<\infty\ ,\forall k\in\mathbb{N}}] \end{aligned}$$

Wobei bei $(*)$ benutzt wurde, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\pi[|f(X_n) - f_k(X_n)|] &\overset{1.2.18}{=} \sum_{x\in E}(\pi P^n)(x)|f(x) - f_k(x)| \\ &\overset{\pi=\pi P}{=} \sum_{x\in E}\pi(x)|f(x) - f_k(x)| \ = \mathbb{E}_\pi[|f(X_0) - f_k(X_0)|] \end{aligned}$$

Damit gilt dann mit dem Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned} limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_\pi[|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_k(X_n) - \mathbb{E}_\pi[f_k(X_0)]|] &= \mathbb{E}_\pi[|limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_k(X_n) - \mathbb{E}_\pi[f_k(X_0)]|] \\ &= \mathbb{E}_\pi[|\mathbb{E}_\pi[f_k(X_0)] - \mathbb{E}_\pi[f_k(X_0)]|] = 0 \end{aligned}$$

Schließlich folgt dann

$$\begin{aligned} & limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_\pi[|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) - \mathbb{E}_\pi[f(X_0)]|] \\ & \leq limsup_{N\to\infty}(2\cdot\mathbb{E}_\pi[|f(X_0) - f_k(X_0)|] + \mathbb{E}_\pi[|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_k(X_n) - \mathbb{E}_\pi[f_k(X_0)]|]) \\ & = 2\cdot\mathbb{E}_\pi[|f(X_0) - f_k(X_0)|] \\ & = 2\cdot\mathbb{E}_\pi[|f(X_0)(\mathbf{1}_{E_k} + \mathbf{1}_{E_k^C}) - f(X_0)\cdot\mathbf{1}_{E_k}|] \\ & = 2\cdot\mathbb{E}_\pi[|f(X_0)\mathbf{1}_{E_k^C}|] \longrightarrow 0\ ,\ k\to\infty \end{aligned}$$

$\square$

<u>Aufgabe 24:</u>...