Lineare Differentialgleichungen

Vorlesungsskript zur Vorlesung vom 19.10.2023

Prof. Dr. Anselm Hudde *

1 Beispiel: Das Federpendel

Wir betrachten eine Feder, an welcher ein Gewicht mit Masse m hängt (siehe Abbildung 1). Wir bezeichnen die Position des Gewichtes mit y (analog zur y-Achse eine Koordinatensystems), wobei $y = 0$ der Gleichgewichtszustand, und $y_{\max}$ der Entspannungszustand der Feder ist.

1.1 Federkraft

Nach dem *Hookeschen Gesetz* ist die Federkraft proportional zur Auslenkung,

$$F_k = k(y_{\max} - y),$$

wobei k die *Federkonstante* ist. Die *Federkonstante* k drückt die Stärke der Feder in der Einheit $\frac{N}{m}$ bzw. $\frac{kg}{s^2}$ aus.

Im Gleichgewichtszustand bei $y = 0$ gilt $F_k = -F_g$, und damit $F_g = -ky_{\max}$. Somit haben wir für F:

$$F = F_k + F_g = k(y_{\max} - y) - ky_{\max} = -ky.$$

1.2 Trägheit des Gewichts

Nach Newtons zweiten Gesetz ist Kraft gleich Masse mal Beschleunigung, die Trägheit unseres Gewichts lässt sich also als

$$F = ma$$

darstellen.

*hudde@hs-koblenz.de

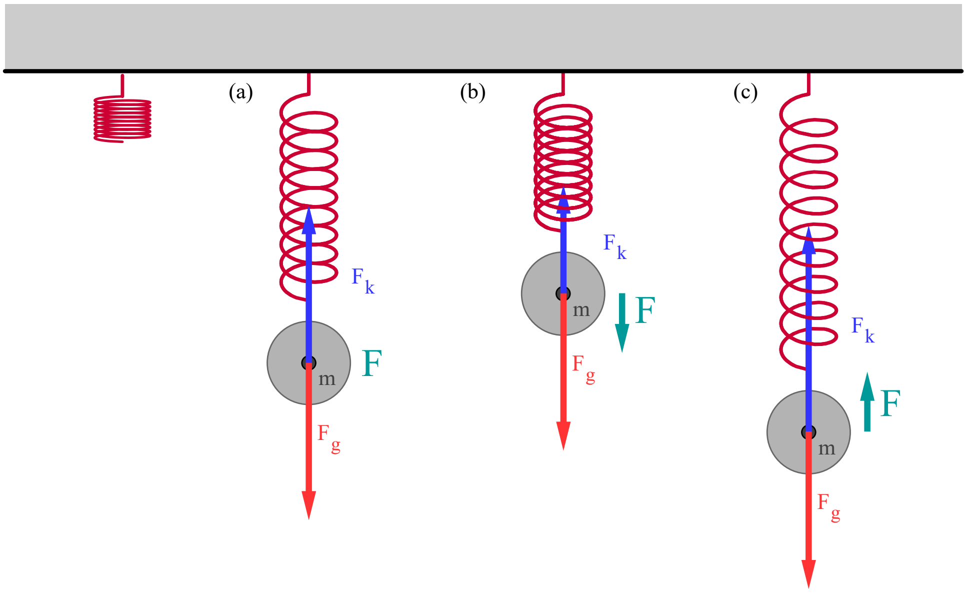

Abbildung 1.1: Die Kräfte, die je nach Position auf die Masse wirken

Quelle: Abgeändert von https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0c/Vertical-mass-on-spring.svg

1.3 Zusammenhang zwischen Beschleunigung, Geschwindigkeit und Position

y ist die Position des Pendels. Die *Geschwindigkeit* v ist die Veränderung der Position des Pendels über die Zeit, also Ableitung nach der Zeit, $v = \dot{y}$. Die *Beschleunigung* a ist schließlich die Veränderung der Geschwindigkeit über die Zeit, $a = \dot{v} = \ddot{y}$. Damit können wir die Trägheit unseres Gewicht als $F = m\ddot{y}$ darstellen.

Die DGL, die unser Federpendel beschreibt, ist also

$$m\ddot{y} = -ky. \tag{1.1}$$

Wir wenden noch einen kleinen Trick an, um die Notation und die Rechnung einfacher zu machen. Dazu definieren wir $\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$. Damit können wir unsere Differentialgleichung als

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 y \tag{1.2}$$

darstellen. Diese Gleichung wird auch *Schwingungsgleichung* genannt.

Die Schwingungsgleichung ist

- eine *gewöhnliche Differentialgleichung*, da keine partiellen Ableitungen vorkommen,
- eine *Differentialgleichung zweiter* Ordnung, da die höchste hier vorkommende Ableitung eine zweite

Ableitung ist,

- eine *homogene Gleichung*, da sie der Form $\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0$ ist.

1.4 Allgemeine Lösung der Differentialgleichung

Wie lösen wir eine Differentialgleichung, bzw. was ist die Lösung einer Differentialgleichung genau? Unser Ziel ist es, die Bewegung des Pendels über die Zeit zu beschreiben. Also ist die Lösung eine Funktion, die von der Zeit abhängt:

Eine *Lösung einer Differentialgleichung* ist eine Funktion $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Wie finden wir diese Lösung? Wir werden später verschiedene Methoden kennenlernen, um DGLs zu lösen. Jetzt wollen wir zuerst sehen, ob wir durch „informiertes Raten“ eine Lösung finden können:

Was für eine Funktion erfüllt die Eigenschaft $f'' = -f$? Hier fallen einem die *Sinus*- sowie die *Cosinusfunktion* ein,

$$\sin''(t) = -\sin(t) \text{ und } \cos''(t) = -\cos(t).$$

Von hier ausgehend finden wir auch, dass

$$\sin''(\omega_0 t) = -\sin(\omega_0 t) \text{ und } \cos''(\omega_0 t) = -\cos(\omega_0 t)$$

gilt. Durch einfaches Nachrechnen sehen wir auch, dass beliebige Linearkombinationen

$$y = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

unsere Differentialgleichung lösen. Diese Eigenschaft gilt auch allgemeiner für homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

Proposition 1.1. *Seien y_1, y_2 zwei Lösungen der Differentialgleichung*

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0.$$

Dann ist auch $(C_1 y_1 + C_2 y_2)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung.

1.5 Anfangsbedingungen

Welches ist nun die richtige Lösung? Bisher haben wir uns nur mit der *allgemeinen Lösung* unserer Differentialgleichung befasst, welche genau genommen eine Lösungsschar ist. Die *spezielle Lösung* berücksichtigt zusätzlich auch die Anfangsbedingungen. Wir interessieren uns also für die Werte von $y(0)$

und $y(t)$ im Punkt $t = 0$. In unserem Fall sind dies die Position y_0, in welcher sich das Gewicht zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet, sowie die Anfangsgeschwindigkeit v_0:

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 y,\ y = y_0,\ \dot{y} = v_0. \tag{1.3}$$

Wir können dies einfach lösen, indem wir ein Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{aligned} C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) &= y_0 \\ C_1\omega_0 \cos(0) - C_2\omega_0 \sin(0) &= v_0 \end{aligned}$$

Wenn wir die Werte von $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$ einsetzen erhalten wir

$$C_1 = \frac{v_0}{\omega_0} \text{ und } C_2 = y_0.$$

Wir erhalten also die *spezielle Lösung* bzw. *partikuläre Lösung* unserer DGL mit

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + y_0 \cos(\omega_0 t).$$