Алгебра и логика, 54, № 1 (2015), 109—118

DOI: 10.17377/alglog.2015.54.110 УДК 510.644

НЕЧЁТКИЕ ЛОГИКИ И ТЕОРИЯ НЕЧЁТКИХ МОДЕЛЕЙ*)

Д. Е. ПАЛЬЧУНОВ, Г. Э. ЯХЪЯЕВА

Представлено Программным комитетом конференции „Мальцевские чтения“

Работа посвящена краткому обзору современных исследований по нечётким и многозначным логикам, нечётким и многозначным алгебраическим системам.

В 1920 г. Я. Лукасевич ввёл понятие трёхзначной логики [1]. В 1965 г. Л. Заде ввёл понятие нечёткого множества [2], а в 1975 г. — понятие лингвистической переменной и теории приближённых вычислений [3].

Для каждой функциональной нечёткой логики истинностное значение формулы определяется значениями её подформул, т. е. должны существовать функции $f, g : [0,1]^2 \to [0,1]$ и $n : [0,1] \to [0,1]$, такие что $\mu(\neg\varphi) = n(\mu(\varphi))$, $\mu(\varphi \vee \psi) = f(\mu(\varphi), \mu(\psi))$, $\mu(\varphi \,\&\, \psi) = g(\mu(\varphi), \mu(\psi))$.

Классическими нечёткими логиками являются

максимильная логика Заде: $\mu(\neg\varphi) = 1 - \mu(\varphi)$, $\mu(\varphi \,\&\, \psi) = \min\{\mu(\varphi), \mu(\psi)\}$, $\mu(\varphi \vee \psi) = \max\{\mu(\varphi), \mu(\psi)\}$;

логика Лукасевича: $\mu(\neg\varphi) = 1 - \mu(\varphi)$, $\mu(\varphi \,\&\, \psi) = \max\{0, \mu(\varphi) + \mu(\psi) - 1\}$, $\mu(\varphi \vee \psi) = \min\{1, \mu(\varphi) + \mu(\psi)\}$;

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-07-00903_а, и Минобрнауки России, задание 2014/139 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части.

вероятностная логика: $\mu(\neg\varphi) = 1 - \mu(\varphi)$, $\mu(\varphi \,\&\, \psi) = \mu(\varphi)\mu(\psi)$, $\mu(\varphi \vee \vee\psi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi) - \mu(\varphi)\mu(\psi)$.

В произвольных многозначных логиках значения истинности формул являются элементами некоторого множества; как правило, такое множество имеет определённую алгебраическую структуру. Одни из первых таких структур, резидуальные решётки, были введены Р. Дилуортом и М. Уардом [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [4]. Структура $\mathfrak{A} = \langle L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ называется *резидуальной решёткой*, если

(1) $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ — решётка с наименьшим и наибольшим элементами;

(2) $\langle L, \otimes, 1\rangle$ — коммутативный моноид с единицей;

(3) операция $\otimes$ является изотонной для обоих аргументов;

(4) $a \otimes b \leq c \Leftrightarrow a \leq b \to c$, где $\leq$ — порядок, индуцируемый решёткой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [4]. Резидуальная решётка $\mathfrak{A}$ *делима*, если для $a \leq b$ существует $c \in |\mathfrak{A}|$, такой что $b \otimes c = a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [5]. Структура $\mathfrak{A} = \langle L, \oplus, \otimes, \neg, 0, 1\rangle$ называется MV-*алгеброй*, если операции $\oplus$ и $\otimes$ коммутативны, ассоциативны и выполняются равенства

(1) $a \oplus 0 = a$, $a \oplus 1 = 1$, $a \otimes 0 = 0$, $a \otimes 1 = a$;

(2) $a \oplus \neg a = 1$, $a \otimes \neg a = 0$;

(3) $\neg(a \oplus b) = \neg a \otimes \neg b$, $\neg(a \otimes b) = \neg a \oplus \neg b$;

(4) $a = \neg\neg a$, $\neg 0 = 1$;

(5) $\neg(\neg a \oplus b) \oplus b = \neg(\neg b \oplus a) \oplus a$.

ПРИМЕР 1. Булева алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ является MV-алгеброй при $\oplus = \vee$ и $\otimes = \wedge$. Алгебра Лукасевича $\mathfrak{A} = \langle [0,1], \oplus, \otimes, \neg, 0, 1\rangle$ является MV-алгеброй при $a \otimes b = 0 \vee (a + b - 1)$, $a \oplus b = 1 \wedge (a + b)$ и $\neg a = 1 - a$.

Отношение частичного порядка на MV-алгебре определяется следующим образом: $a \leq b \Leftrightarrow \neg a \oplus b = 1$. На MV-алгебре можно определить операции резидуальной решётки: $a \vee b = \neg(\neg a \oplus b) \oplus b$, $a \wedge b = \neg(\neg a \vee \neg b)$ и $a \to b = \neg a \oplus b$.

ТЕОРЕМА 1 [6]**.** (1) *Каждая* MV*-алгебра является резидуальной решёткой.*

(2) *Резидуальная решётка является* MV*-алгеброй тогда и только тогда, когда для любых элементов* $a, b \in L$ *выполняется* $(a \to b) \to b = a \vee b$.

(3) *Резидуальная решётка является* MV*-алгеброй тогда и только тогда, когда она делима и в ней выполняется закон двойного отрицания.*

ТЕОРЕМА 2 [6]**.** *Каждая бесконечная локально ограниченная полная* MV*-алгебра изоморфна алгебре Лукасевича.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [6]. Резидуальная решётка $\mathfrak{A} = \langle L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ называется BL-*алгеброй*, если $a \otimes (a \to b) = a \wedge b$ и $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$.

Эти алгебры являются особым случаем резидуальных решёток и были предложены для развития базовых логических исчислений: логики Лукасевича, логики Гёделя и вероятностной логики.

ПРИМЕР 2. Алгебры Лукасевича, Гёделя и Гогена являются BL-алгебрами.

ТЕОРЕМА 3 [6]**.** *Каждая* BL*-алгебра является подпрямым произведением линейно упорядоченных* BL*-алгебр.*

ТЕОРЕМА 4 [6]**.** BL*-алгебра является* MV*-алгеброй тогда и только тогда, когда в ней выполняется закон двойного отрицания.*

Для описания логических систем с множеством истинностных значений, определённом на отрезке $[0, 1]$, используются понятия триангулярной нормы (t-норма) [7] и триангулярной конормы (t-конорма) [8]. Они стали рассматриваться как обобщения нечётких операций конъюнкции и дизъюнкции [6, 9, 10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [7]. Отображение $t : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ называется t-*нормой*, если для любых $a, b, c \in [0, 1]$ выполняются условия: $t(a, b) = t(b, a)$, $t(a, t(b, c)) = t(t(a, b), c)$, $a \leq b \Rightarrow t(a, c) \leq t(b, c)$ и $t(1, a) = a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [8]. Отображение $s : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ называется t-*конормой*, если для любых $a, b, c \in [0, 1]$ выполняются условия: $t(a, b) =$

$= t(b,a)$, $t(a,t(b,c)) = t(t(a,b),c)$, $a \le b \Leftrightarrow t(a,c) = t(b,c)$ и $t(0,a) = a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Базовыми* t-нормами и t-конормами являются

(1) *нормы Заде*: $a \wedge b = \min\{a,b\}$, $a \vee b = \max\{a,b\}$;

(2) *нормы Лукасевича*: $a \otimes b = \max\{0, a+b-1\}$, $a \oplus b = \min\{1, a+b\}$;

(3) *вероятностные нормы*: $a \odot b = ab$, $a * b = a + b - ab$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 [11]. (1) t-норма называется *строгой*, если она строго монотонна и непрерывна.

(2) t-норма называется *архимедовой*, если для любых $a, b \in (0,1)$ существует $n \in \mathbb{N}$, такое что $\underbrace{(t(\ldots t(t(a;a);a)\ldots))}_{n \text{ раз}} \le b$.

(3) t-норма называется *идемпотентной*, если для любого $a \in [0,1]$ верно $t(a,a) = a$.

(4) t-норма называется *нильпотентной*, если для любого $a \in (0,1)$ существует $n \in \mathbb{N}$, такое что $\underbrace{(t(\ldots t(t(a;a);a)\ldots))}_{n \text{ раз}} = 0$.

ТЕОРЕМА 5 [11]**.** (1) $\wedge$ — *единственная непрерывная, идемпотентная t-норма.*

(2) *Непрерывная архимедова t-норма является нильпотентной тогда и только тогда, когда она изоморфна t-норме Лукасевича $\otimes$.*

(3) *Непрерывная архимедова t-норма является строгой тогда и только тогда, когда она изоморфна вероятностной t-норме $\odot$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9 [11]. Пусть $(t_i)_{i \in I}$ — произвольное семейство t-норм, $((u_i, v_i))_{i \in I}$ — семейство попарно непересекающихся подинтервалов в $[0,1]$. Тогда функция

$$t(a,b) = \begin{cases} u_i + (v_i - u_i) \cdot t_i\left(\dfrac{a - u_i}{v_i - u_i}, \dfrac{b - u_i}{v_i - u_i}\right), & \text{если } a, b \in (u_i, v_i), \\ \min\{a,b\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

называется *порядковой суммой* t-норм (t_i), $i \in I$.

ТЕОРЕМА 6 [11]**.** *Функция $t : [0,1]^2 \to [0,1]$ является непрерывной t-нормой тогда и только тогда, когда она является порядковой суммой непрерывных архимедовых t-норм.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10 [12]. *Отрицание* — это невозрастающая функция $n : [0,1] \to [0,1]$, для которой $n(0) = 1$ и $n(1) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11 [11, 12]. Отрицание n называется *инволютивным*, если $n(n(a)) = a$ верно для всех $a \in [0,1]$. Отрицание n называется *строгим*, если оно непрерывно, а из $a < b$ следует $n(a) > n(b)$. Отрицание n называется *сильным*, если оно строгое и инволютативное.

ТЕОРЕМА 7 [11]**.** *Функция $n : [0,1] \to [0,1]$ является строгим отрицанием тогда и только тогда, когда существует непрерывная строго возрастающая функция $f : [0,1] \to [0,\infty)$, такая что $f(0) = 0$ и $n(a) = f^{-1}(f(1) - f(a))$ для любого $a \in [0,1]$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12 [11]. Пусть t является t-нормой. Отображение $\to_t$: $[0,1]^2 \to [0,1]$ называется *делением*, если выполняется условие $a \to_t \to_t b = \bigvee\{z \mid t(a,z) \leq b\}$.

ТЕОРЕМА 8 [11]**.** *Пусть t — непрерывная t-норма. Тогда резидуальная решётка $\mathfrak{A} = \langle [0,1], \vee, \wedge, t, \to_t, 0, 1\rangle$ является* BL*-алгеброй.*

Одной из проблем применения нечётких логик является то, что они не являются консервативным расширением классической логики, т. к. содержат „логические парадоксы“.

Максимильная логика Заде. Неверны тождества логики предикатов: $\mu(\varphi \,\&\, \neg\varphi) \neq 0$, $\mu(\varphi \vee \neg\varphi) \neq 1$. Примеры парадоксов: пусть формула φ имеет значение истинности $\mu(\varphi) = \dfrac{1}{2}$, тогда $\mu(\varphi \,\&\, \neg\varphi) = \dfrac{1}{2}$ и $\mu(\varphi \vee \neg\varphi) = \dfrac{1}{2}$.

Логика Лукасевича. Неверны тождества логики предикатов: $\mu(\varphi \,\&\, \varphi) \neq \mu(\varphi)$, $\mu(\varphi \vee \varphi) \neq \mu(\varphi)$, $\mu((\varphi \,\&\, \psi) \vee \xi) \neq \mu((\varphi \vee \xi) \,\&\, (\psi \vee \xi))$, $\mu((\varphi \vee \psi) \,\&\, \xi) \neq \mu((\varphi \,\&\, \xi) \vee (\psi \,\&\, \xi))$. Примеры парадоксов: пусть формула φ имеет значение истинности $\mu(\varphi) = \dfrac{1}{2}$, тогда $\mu(\varphi \,\&\, \varphi) = 0$ и $\mu(\varphi \vee \varphi) = 1$.

Вероятностная логика обладает как парадоксами логики Заде, так и парадоксами логики Лукасевича.

Для решения проблемы консервативности расширения классической логики и теории моделей предложена теория нечётких моделей, основанная на фазификации булевозначных моделей [13, 14].

Мы рассматриваем модели $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma\rangle$ в сигнатуре σ_A, обогащённой константами для всех элементов модели: $\sigma_A = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\}$ и $\mathfrak{A}_A = \langle A, \sigma_A\rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Пусть $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра и $\tau : S(\sigma_A) \to \mathbb{B}$. Тройку $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}} = \langle A, \sigma_A, \tau\rangle$ назовём *булевозначной моделью*, если выполняются условия $\tau(\neg\varphi) = \overline{\tau(\varphi)}$, $\tau(\varphi \vee \psi) = \tau(\varphi) \cup \tau(\psi)$, $\tau(\varphi \,\&\, \psi) = \tau(\varphi) \cap \tau(\psi)$, $\tau(\varphi \to \psi) = \overline{\tau(\varphi)} \cup \tau(\psi)$, $\tau(\forall x \varphi(x)) = \bigcap\limits_{a\in A} \tau(\varphi(c_a))$, $\tau(\exists x \varphi(x)) = \bigcup\limits_{a\in A} \tau(\varphi(c_a))$.

Обозначим $\mathbb{K}(\sigma_A) \rightleftharpoons \{\mathfrak{A} = \langle \{c_a^{\mathfrak{A}} \mid a \in A\}, \sigma_A\rangle \mid c_a^{\mathfrak{A}} \neq c_b^{\mathfrak{A}}$ при $a \neq b\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Пусть $E \subseteq \mathbb{K}(\sigma_A)$. *Прецедентной моделью*, порождённой множеством E, называется тройка $\mathfrak{A}_E \rightleftharpoons \langle A, \sigma_A, \tau_E\rangle$, где $\tau_E : S(\sigma_A) \to \wp(E)$, причём для любого предложения φ сигнатуры σ_A выполняется $\tau_E(\varphi) = \{\mathfrak{A} \in E \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Прецедентная модель является булевозначной моделью.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Рассмотрим булевозначную модель $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}} = \langle A, \sigma_A, \tau\rangle$ и атом $b \in \mathrm{At}\,(\mathbb{B})$. Определим модель $\mathfrak{A}_b \in \mathbb{K}(\sigma_A)$ следующим образом: для любых $P, c_1, \ldots, c_n \in \sigma_A$ положим $\mathfrak{A}_b \models P(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow b \leq \tau(P(c_1, \ldots, c_n))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для модели $\mathfrak{A}_b$ и произвольного предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ выполняется соотношение $\mathfrak{A}_b \models \varphi \Leftrightarrow b \leq \tau(\varphi)$.

ТЕОРЕМА 9 (о двойственности) [14]**.** *Пусть $\mathbb{B}$ — полная атомная булева алгебра, $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}} = \langle A, \sigma, \tau\rangle$ — булевозначная модель, $E = \{\mathfrak{A}_b \mid b \in \mathrm{At}\,(\mathbb{B})\}$ и $\mathfrak{A}_E$ — прецедентная модель. Тогда $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}} \cong \mathfrak{A}_E$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Пусть $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}_1} = \langle A, \sigma_A, \tau_1\rangle$ и $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}_2} = \langle A, \sigma_A, \tau_2\rangle$ — булевозначные модели. Модель $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}} = \langle A, \sigma_A, \tau\rangle$ назовём *произведением моделей* $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}_1}$ и $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}_2}$ и обозначим как $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}} = \mathfrak{A}_{\mathbb{B}_1} * \mathfrak{A}_{\mathbb{B}_2}$, если $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 * \mathbb{B}_2$, $\tau : S(\sigma_A) \to \mathbb{B}$ и $\tau(\varphi) = (\tau_1(\varphi), \tau_2(\varphi))$ для любого $\varphi \in S(\sigma_A)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Произведение $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}} = \mathfrak{A}_{\mathbb{B}_1} * \mathfrak{A}_{\mathbb{B}_2}$ является булевозначной моделью.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Операция $*$ на булевозначных моделях коммутативна и ассоциативна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Пусть $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}} = \langle A, \sigma_A, \tau\rangle$ — булевозначная модель, где $\tau : S(\sigma_A) \to \mathbb{B}$, и $h : \mathbb{B} \to [0,1]$ — отображение, для которого $h(0) = 0$ и $h(1) = 1$. Определим *означивание* $\mu : S(\sigma_A) \to \mathbb{B}$ как композицию $\mu(\varphi) = h(\tau(\varphi))$. Тройку $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma_A, \mu\rangle$ назовём *фазификацией* булевозначной модели $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}}$ *при помощи отображения* h.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для любых $\varphi, \psi \in S(\sigma_A)$ выполняются следующие соотношения:

(1) φ тождественно истинно в логике предикатов тогда и только тогда, когда для любой фазификации $\mathfrak{A}_\mu$ верно $\mu(\varphi) = 1$;

(2) $\varphi \sim \psi$ в логике предикатов тогда и только тогда, когда для любой фазификации $\mathfrak{A}_\mu$ верно $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$.

Таким образом, фазификации являются консервативными расширениями классических моделей.

Рассмотрим следующие свойства отображения $h : \mathbb{B} \to [0,1]$.

(1) h сохраняет порядок и константы, т. е. является гомоморфизмом $h : \mathbb{B} \to [0,1]$ частично упорядоченных множеств с константами 0 и 1.

(2) Отображение h является аддитивным, т. е. для любых $a, b \in \mathbb{B}$ имеет место $a \cap b = 0 \Rightarrow h(a \cup b) = h(a) + h(b)$.

Если мы понимаем нечёткое значение истинности утверждения как степень его достоверности, то свойство (1) является необходимым: достоверность следствия не меньше достоверности посылки (при условии истинности импликации). Если нечёткое значение истинности понимать как вероятность верности утверждения, то необходимы свойства (1) и (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. *Нечёткой моделью* $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma_A, \mu\rangle$ будем называть фазификацию булевозначной модели $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}}$ при помощи отображения $h : \mathbb{B} \to [0,1]$, удовлетворяющего свойствам (1) и (2).

Зафиксируем некоторое множество A и сигнатуру σ. Далее будем рассматривать только нечёткие модели вида $\langle A, \sigma_A, \mu\rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Пусть $\Gamma \subseteq S(\sigma_A)$. Будем говорить, что нечёткая модель $\mathfrak{A}_\mu$ *согласована с означиванием* $\eta : \Gamma \to [0,1]$, если для любого предложения $\varphi \in \Gamma$ выполняется $\mu(\varphi) = \eta(\varphi)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Пусть $\mathbf{K}$ — некоторый класс нечётких моделей. Определим отображение $\xi_K : S(\sigma_A) \to \wp([0,1])$ правилом $\xi_K(\varphi) = \{p \in \in [0,1] \mid \exists \mathfrak{A}_\mu \in \mathbf{K} : \mu^{\mathfrak{A}}(\varphi) = p\}$. Тройку $\mathfrak{A}_K = \langle A, \sigma_A, \xi_K \rangle$ назовём *обобщённой нечёткой моделью, порождённой классом* $\mathbf{K}$.

Рассмотрим фазификации булевозначных моделей с конечными булевыми алгебрами. *Интервалами* будем называть открытые, полуоткрытые или замкнутые интервалы рациональных чисел из отрезка $[0,1]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Пусть $\Gamma \subseteq S(\sigma_A)$ и $\eta : \Gamma \to [0,1]$ — нечёткое означивание множества предложений Γ. Обозначим через $\mathbf{K}_\eta$ класс всех нечётких моделей, согласованных с означиванием η, являющихся фазификациями булевозначных моделей с конечными булевыми алгебрами при помощи отображений $h : \mathbb{B} \to [0,1]$, определённых как $h(b) = \dfrac{\|\mathrm{At}\,(b)\|}{\|\mathrm{At}\,(\mathbb{B})\|}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Обобщённую нечёткую модель $\mathfrak{A}_\eta = \langle A, \sigma_A, \xi_\eta \rangle$, порождённую классом $\mathbf{K}_\eta$, назовём *обобщённой нечёткой моделью, порождённой означиванием* η.

ПРОБЛЕМА 1. Каково может быть множество $\eta(\varphi)$ для обобщённой нечёткой модели $\mathfrak{A}_\eta = \langle A, \sigma_A, \xi_\eta \rangle$, порождённой нечётким означиванием $\eta : \Gamma \to [0,1]$, и $\varphi \notin \Gamma$?

ТЕОРЕМА 10 [13]**.** Пусть $\mathfrak{A}_\eta = \langle A, \sigma_A, \xi_\eta \rangle$ — обобщённая нечёткая модель, порождённая нечётким означиванием η. Для произвольного предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ множество его нечётких значений истинности $\xi_\eta(\varphi)$ является интервалом.

Если в нечёткой логике вычисления проводятся не „снизу вверх“, а произвольным образом, то также возникают интервалы. Например, если $\mu(\varphi) = 0.3$ и $\mu(\varphi \,\&\, \psi) = 0.3$, то в логике Заде верно $\mu(\psi) \in [0.3, 1]$.

ПРОБЛЕМА 2. Каково может быть множество $\eta(\varphi)$ для обобщённой нечёткой модели $\mathfrak{A}_\eta = \langle A, \sigma_A, \xi_\eta \rangle$, порождённой интервальным означиванием η?

ТЕОРЕМА 11 [14]. *Пусть* $\mathfrak{A}_\eta = \langle A, \sigma_A, \xi_\eta \rangle$ *— обобщённая нечёткая модель, порождённая интервальным означиванием* $\eta : S(\sigma_A) \to \wp([0,1])$. *Для произвольного предложения* $\varphi \in S(\sigma_A)$ *множество его нечётких значений истинности* $\xi_\eta(\varphi)$ *является интервалом.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Łukasiewicz*, O logice trójwartościowej, Ruch Filozoficzny, **5**, No. 9 (1920). 170—171.
2. *L. A. Zadeh*, Fuzzy sets, Inf. Control, **8** (1965), 338—353.
3. *L. A. Zadeh*, Fuzzy logic and approximate reasoning, Synthese, **30** (1975), 407—428.
4. *R. P. Dilworth, M. Ward*, Residuated lattices, Trans. Am. Math. Soc, **45** (1939), 335—354.
5. *C. C. Chang*, Algebraic analysis of many valued logics, Trans. Am. Math. Soc., **88** (1958), 467—490.
6. *P. Hájek*, Metamathematics of fuzzy logic (Trends Log. Stud. Log. Libr., **4**), Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1998.
7. *K. Menger*, Statistical metrics. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **28** (1942), 535—537.
8. *B. Schweizer, A. Sklar*, Statistical metric spaces, Pacific J. Math., **10** (1960), 313—334.
9. *E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap*, Triangular norms (Trends Log. Stud. Log. Libr., **8**), Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 2000.
10. *G. Metcalfe, N. Olivetti, D. Gabbay*, Proof theory for fuzzy logics (Appl. Log. Ser., **36**), Dordrecht, Springer-Verlag, 2009.
11. *V. Novák, I. Perfilieva, J. Močkoř*, Mathematical principles of fuzzy logic, (Kluwer Int. Ser. Engrg. Comput. Sci., **517**), Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1999.
12. *F. Esteva, L. Godo, P. Hájek, M. Navara*, Residuated fuzzy logic with an involutive negation, Arch. Math. Logic, **39**, No. 2 (2000), 103—124.
13. *D. E. Pal'chunov, G. È. Yakh'yaeva*, Interval fuzzy algebraic systems, in: S. S. Goncharov (ed.) et al., Mathematical logic in Asia. Proceedings of the 9th Asian logic conference (Novosibirsk, Russia, August 16-19, 2005), Hackensack, NJ, World Scientific, 2006, 191—202.

14. *Д. Е. Пальчунов, Г. Э. Яхъяева*, Нечеткие алгебраические системы, Вест. НГУ. Сер. матем., мех., информ., **10**, № 3 (2010), 76—93.

Поступило 12 января 2015 г.

Адрес автора:

ПАЛЬЧУНОВ Дмитрий Евгеньевич Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ. e-mail: palch@math.nsc.ru

ЯХЪЯЕВА Гульнара Эркиновна, Новосибирский гос. ун-т, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, РОССИЯ. e-mail: gul_nara@mail.ru