



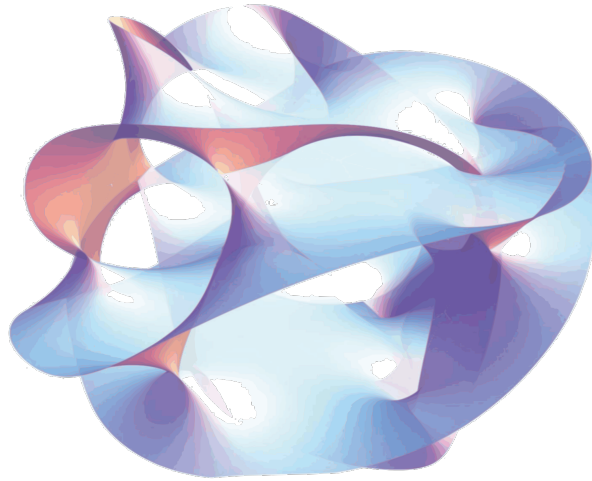
LA PIÙ GRANDE “EQUAZIONE”

HELIOS ARTICLE

Lorenzo Papini
Dipartimento di Fisica
Università di Padova

September 10, 2019

1 La corrispondenza olografica: un ponte tra stringhe, campi e realtà



Una decina di anni fa la rivista *Physics World* promosse un sondaggio tra i suoi lettori con lo scopo di individuare quale fosse la più grande equazione mai scritta nella storia della scienza ed il risultato finale fu un pareggio tra l'equazione di Eulero:

$$e^{i\pi} + I = 0$$

e quelle di Maxwell, espresse nell'elegante forma dettata dalla relatività ristretta: (1)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

$$\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} = 0$$

I motivi profondi per la vittoria di queste due equazioni risiedono probabilmente nell'indubbio fascino dell'equazione di Eulero, che contiene i cinque numeri più importanti della matematica ($e, \pi, 1, i, 0$), e nell'estrema rilevanza fisica delle equazioni di Maxwell, capaci di descrivere da sole una vastità enorme di fenomeni elettromagnetici. Tuttavia, se avessi potuto partecipare anche io al sondaggio non avrei probabilmente scelto nessuna delle due equazioni vincitrici, ma quasi sicuramente avrei preso la stessa strada di Polchinski ed avrei votato l'uguaglianza simbolica dettata dalla corrispondenza olografica di Maldacena:

Teorie di stringa in Anti de-Sitter (AdS) =
Teorie di campo conformi (CFT)

perchè connette due delle più importanti teorie esistenti, la teoria delle stringhe e la teoria quantistica dei campi, stabilendo una precisa dualità tra le due e permettendo di utilizzare ognuna delle due per indagare gli aspetti oscuri dell'altra.

Come per una vera e propria equazione tra quantità fisiche, infatti, è possibile pensare il membro di destra, cioè determinati aspetti delle teorie conformi, come incognito ed andarlo ad indagare tramite il membro di sinistra, cioè le teorie di stringa, ed ovviamente è possibile fare anche il viceversa. In questo modo la corrispondenza olografica connette in maniera perfetta stringhe e campi, ma non solo. Moltissimi tra i fenomeni microscopici più rilevanti presenti in natura sono descritti tramite la teoria quantistica dei campi. Determinati materiali dalle caratteristiche eccezionali e potenzialmente protagonisti del futuro sviluppo tecnologico trovano una descrizione teorica accurata grazie alla medesima teoria. La corrispondenza olografica consente di indagare tutte queste descrizioni anche dal punto di vista della teoria delle stringhe, consentendo di gettare nuova luce su di esse.

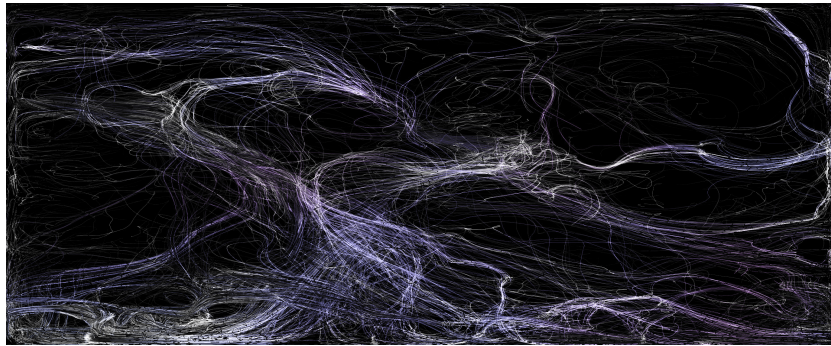


Figure 1: *Rappresentazione artistica di un universo microscopico dominato dalle stringhe.*

2 Origine e significato della corrispondenza

La corrispondenza olografica, meglio nota con il nome di Corrispondenza AdS/CFT è stata congetturata da Maldacena[3] nel 1998 come una dualità tra una particolare teoria di stringa ed una particolare teoria conforme supersimmetrica di campo. Da quest'ultima deriva la parte CFT nel nome della corrispondenza. La parte AdS deriva invece dal fatto che la teoria di stringa in questione vive in uno spaziotempo che risulta essere il prodotto di un Anti de-Sitter cinque-dimensionale per una "sfera" cinque dimensionale. Sono proprio le particolari proprietà di simmetria dello spazio tempo Anti de-Sitter, che è uno dei tre spazi massimamente simmetrici della relatività generale, ed il segno negativo della sua costante cosmologica che rendono possibile la congettura.[4]L'aggettivo olografico presente nel nome della corrispondenza deriva invece dal fatto che essa è una importante realizzazione del principio olografico. Quest'ultimo stabilisce che in una teoria gravitazionale il numero di gradi di libertà in un volume V scala come l'area ∂V della superficie che racchiude il medesimo volume. Fenomeni che portano alla congettura del principio olografico si possono trovare già in relatività generale. L'entropia di un buco nero calcolata nel contesto della GR, infatti, è una funzione dell'area del buco nero stesso, mentre in fisica classica l'entropia dipende tipicamente dal volume dell'oggetto in questione. Nella corrispondenza AdS/CFT è possibile immaginare che la CFT viva in uno spaziotempo corrispondente al bordo di quello più grande in cui vive la teoria di stringa. Dato che le due teorie sono duali, ne risulta che i gradi di libertà della teoria di stringa (che è pensabile anche come una teoria gravitazionale) che vive in tutto lo spazio-tempo devono essere descrivibili nei termini della CFT che vive al bordo. In questo senso la corrispondenza AdS/CFT è considerata una realizzazione del principio olografico.

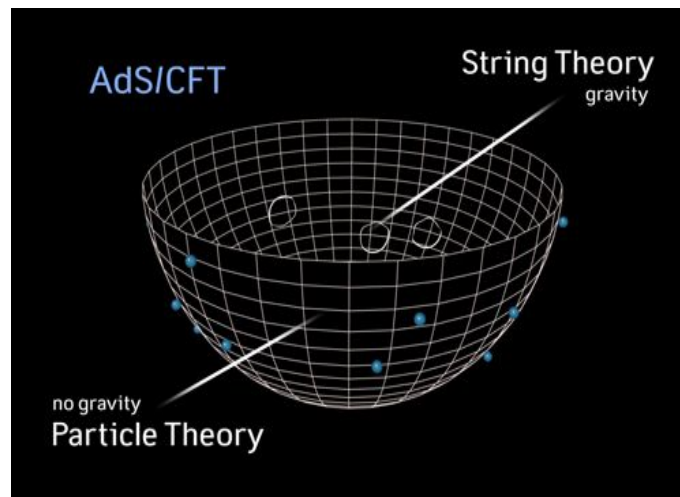
Poichè un lato della corrispondenza vive sulla superficie dello spaziotempo in cui vive l'altro, ne segue che la teoria di stringa possiede una dimensione aggiuntiva rispetto alla teoria di campo. Tale dimensione aggiuntiva può essere in

generale interpretata come la scala di energia a cui i processi fisici avvengono. Per dare una visione pittorica di come questo possa avvenire, possiamo immaginare che tale dimensione aggiuntiva sia parametrizzata da una coordinata r con valori compresi nell'intervallo $[0, \infty]$ e che ad $r = \infty$ corrisponda il bordo dello spaziotempo (cioè la regione in cui la CFT vive). A questo punto, muoversi da $r = 0$ a $r = \infty$ corrisponde a diminuire la scala di energia alla quale il processo fisico in esame sta avvenendo (oppure aumentarla a seconda dei casi). Poiché tipicamente l'intensità delle interazioni varia all'aumentare dell'energia (in modo crescente o decrescente a seconda dei casi), ne segue che uno dei lati della corrispondenza sarà caratterizzato da un'interazione di forte intensità e l'altro dalla stessa interazione a debole intensità. Come vedremo nei successivi paragrafi, questa caratteristica rende la AdS/CFT anche una dualità forte/debole e ne fa uno strumento utilissimo per indagare i regimi non perturbativi dei vari sistemi fisici in cui le interazioni sono di grande intensità.

3 Applicazioni nell'ambito delle interazioni fondamentali

L'utilizzo più frequente e vantaggioso della corrispondenza olografica risiede nell'indagare attraverso la teoria delle stringhe gli aspetti oscuri e lacunosi delle descrizioni sviluppate nell'ambito della teoria quantistica dei campi. Questa possibilità è da considerarsi di assoluto rilievo, visto che, come già accennato in precedenza, la teoria quantistica dei campi è alla base delle più moderne teorie fisiche e della più raffinata di essa, il modello standard, che descrive in un paradigma semplice ed elegante tre delle quattro interazioni fondamentali esistenti in natura⁵. Tuttavia la descrizione fornita dalla teoria quantistica dei campi si basa sulla teoria delle perturbazioni che richiede che la forza dell'interazione sia piccola. Essa è misurata da un determinato coefficiente, chiamato costante d'accoppiamento, che, nonostante il nome, varia al variare della scala di energia del processo. Se nel caso dell'interazione elettromagnetica e dell'interazione debole questa costante ha un valore modesto, che quindi rispetta il requisito imposto dalla teoria delle perturbazioni di "interazione piccola", lo stesso non può dirsi per l'interazione nucleare forte.

Quest'ultima, come il nome può suggerire, è infatti un'interazione molto più intensa, che può essere considerata piccola solamente ad alte energie. A basse energie essa viola completamente le richieste della teoria delle perturbazioni ed in eletti la teoria di campo relativa all'interazione forte, ovvero la cromodinamica quantistica (QCD)[6], non riesce a fornire una descrizione puntuale del comportamento a basse energie. Per superare questo problema una possibilità allettante è quella di usare la corrispondenza olografica in maniera tale da esaminare se la teoria di stringa duale alla teoria di campo riesce a gettare luce sul comportamento a basse energie.



Come già anticipato in precedenza, la corrispondenza olografica è una dualità di tipo forte/debole, pertanto la teoria di stringa corrispondente risulterà in un regime di debole intensità e per essa sarà possibile una descrizione tramite teoria delle perturbazioni. In questo modo è possibile in linea teorica superare i limiti della QCD riuscendo a descrivere tramite corrispondenza olografica il regime di basse energie inaccessibile alla teoria di campo. La ricerca in fisica teorica si è mossa per molto tempo lungo questo binario, che tuttavia nonostante le buone premesse è più denso di difficoltà di quanto sembrerebbe. Infatti la corrispondenza olografica è originariamente pensata per mettere in relazione teorie di stringa con teorie di campo conformi, ovvero che non dipendono dalla scala energetica. La QCD ovviamente non rispetta questo requisito, pertanto i fisici teorici si sono adoperati per molti anni alla costruzione di una corrispondenza AdS/QCD che superi questo problema e produca una descrizione puntuale della QCD a bassa energia. Sono stati raggiunti notevoli successi in questo campo; primo fra tutti la corretta descrizione nell'ambito della corrispondenza

olografica del quark gluon plasma, fenomeno in cui i gluoni⁷, ovvero i mediatori dell'interazioni forti, sono in uno stato di plasma, in un regime altamente non perturbativo. In generale l'AdS/QCD è sostanzialmente una delle principali opzioni per ottenere una descrizione completa e valida a tutti i regimi energetici, assieme alla più famosa QCD su reticolo, che però ha il difetto di perdere in analiticità essendo una teoria che comprende calcoli e procedimenti di tipo numerico.

4 Applicazioni in materia condensata

La maggior parte dei materiali comuni di interesse sia teorico che pratico possiede una descrizione teorica accurata già nell'ambito della meccanica quantistica e/o della sua naturale evoluzione data dalla teoria quantistica dei campi. Infatti nella maggioranza dei casi tali materiali sono dominati da interazioni elettromagnetiche tra ioni-elettroni o elettroni-elettroni di piccola intensità, senza effetti di tipo relativistico in gioco. In questo caso la teoria delle perturbazioni può essere applicata e la ben compresa e nota elettrodinamica quantistica⁸ perturbativa rende relativamente agevole la costruzione di un modello teorico raffinato. Esistono tuttavia materiali per i quali le interazioni tra i costituenti non sono soltanto interazioni deboli. Questo può accadere per esempio perché gli elettroni del materiale in questione assumono un comportamento di tipo relativistico, testimoniato da un andamento dell'energia rispetto al momento che è lineare invece che essere quadratico come nel caso non relativistico. Un esempio celeberrimo di materiale che si comporta in questa maniera è il grafene. Il grafene è un materiale bidimensionale costituito da un reticolo di atomi di carbonio e corrisponde in pratica ad un singolo foglio di grafite^[9]. Fu isolato dalla grafite solamente nel 2004 da Geim e Novoselov e rappresenta uno dei materiali di più elevato interesse pratico e tecnologico in quanto possiede caratteristiche eccezionali, come elevata durezza e leggerezza e grandissima conduttività elettrica e termica. Il grafene è caratterizzato da un andamento dell'energia dei suoi elettroni di tipo relativistico, fatto che conduce alla presenza di interazioni elettromagnetiche di grande intensità tra i medesimi elettroni. Nonostante sia possibile riprodurre buona parte delle caratteristiche salienti del grafene trascurando queste interazioni, ce ne sono altre per le quali uno studio completo di tale materiale è necessario. Tale studio non può essere portato avanti con il solo strumento della teoria quantistica dei campi, visto che abbiamo a che fare con interazioni non perturbative. Ancora una volta però la corrispondenza olografica ci viene in aiuto: i modelli di stringa associati alle teorie di campo descrittive il grafene possono essere studiati perturbativamente e da essi è possibile estrarre informazioni altrimenti inaccessibili (prime fra tutte le conduttività elettriche e termiche) e di grande rilevanza teorica ed applicativa. La ricerca in fisica teorica è riuscita ad applicare con successo la corrispondenza olografica per portare avanti questo tipo di studi per il grafene e per altri materiali con caratteristiche simili e quindi inattaccabili con tecniche più tradizionali, arrivando a risultati di rilievo.

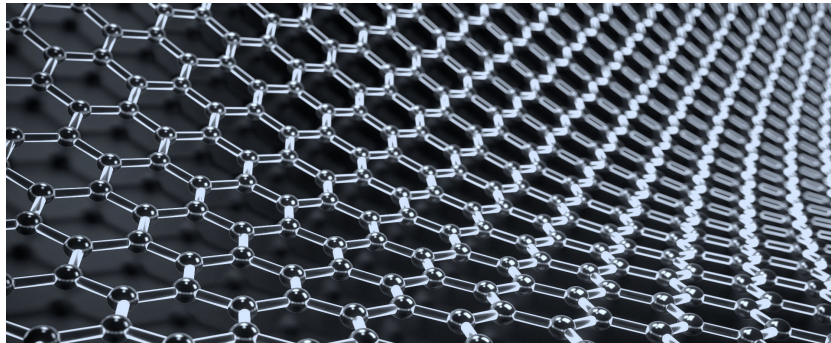


Figure 2: *Rappresentazione artistica di una lamina di grafene.*

5 Un ponte tra stringhe e realtà

La fisica teorica moderna in generale e la teoria delle stringhe in particolare hanno fama di essere costruzioni spiccatamente di natura matematica con applicazioni non immediate alla realtà. La corrispondenza olografica si muove però in una direzione opposta in quanto consente di collegare modelli teorici di per sé lontani dalla realtà a interazioni fondamentali che caratterizzano la stessa realtà, a materiali reali, a fenomeni fisici osservati, fornendo predizioni precise su di essi che possono essere verificate o smentite. A causa di questo ultimo aspetto, essa assume anche un valore filosofico. Infatti ogni teoria fisica per essere considerata a pieno titolo tale deve poter essere falsificabile o verificabile tramite esperimenti e predizioni, ma la teoria della stringhe, così come altre teorie del tutto, risulta di per sé invisibile dal punto di vista sperimentale, visto che i fenomeni peculiari che prescrive avvengono ad energie assolutamente inaccessibili con la tecnologia degli esperimenti attuali. Tuttavia grazie alla corrispondenza olografica che da essa

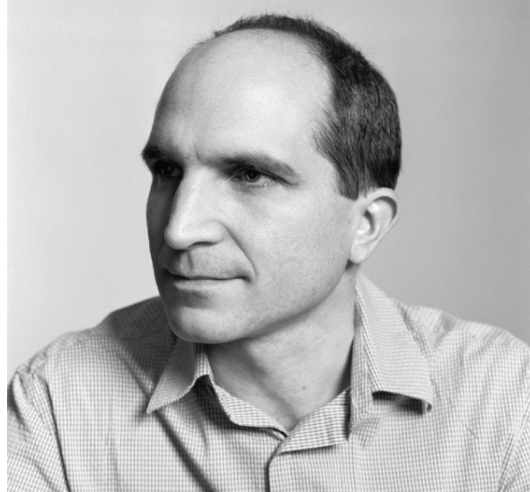


Figure 3: Juan Martin Maldacena, fotografia di Brigitte Lacombe.

nasce, la teoria delle stringhe è in grado di fornire predizioni osservabili sperimentalmente che possano in linea di principio darle vigore ulteriore oppure falsificarla e per tanto le fornisce “qualcosa in più” da questo punto di vista. Per tutte queste caratteristiche (e molte altre...) la corrispondenza olografica rappresenta uno strumento di assoluto rilievo nel panorama della fisica in generale e della fisica teorica in particolare, tanto che l’ “equazione” di Maldacena a mio modesto parere può davvero esser considerata una delle più importanti mai scritte.

References

- [1] Per rendere le equazioni di Maxwell invarianti sotto le trasformazioni di relatività ristretta, ovvero le trasformazioni di Lorentz, è necessario scriverle rispetto ad un oggetto $F_{\mu\nu}$ chiamato tensore dei campi che incorpora campi elettrici e magnetici.
- [2] L’abbreviazione deriva dall’inglese “Conformal Field Theories”. Queste sono teorie di campo che descrivono interazioni di intensità costante al variare dell’energia. Sono teorie “speciali” in quanto tipicamente la forza dell’interazione è invece dipendente dall’energia.
- [3] L’articolo The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity in cui J.Maldacena arriva alla congettura della corrispondenza AdS/CFT è l’articolo più citato nella storia della fisica teorica, con oltre 10000 citazioni.
- [4] In effetti se si tenta di costruire un’analogia corrispondenza olografica con lo spazio tempo di de-Sitter, che è un altro degli spazi massimamente simmetrici della GR ma possiede costante cosmologica positiva, si incontrano numerosissime difficoltà. La realizzazione di una dS/CFT sarebbe utilissima per gli studi cosmologici, visto che l’universo è approssimativamente uno spazio-tempo de-Sitter.
- [5] Le interazioni fondamentali della natura sono: la forza gravitazionale, l’interazione forte nucleare, l’interazione debole e l’interazione elettromagnetica. Il modello standard descrive con successo le ultime tre, basandosi sul formalismo della teoria quantistica dei campi.
- [6] L’abbreviazione deriva dall’inglese Quantum Chromodynamics. La QCD descrive l’interazione nucleare forte nell’ambito di interazioni tra quark e gluoni, i quali possiedono una carica particolare detta carica di colore.
- [7] Un gluone è da pensarsi in maniera ingenua come un “fotone delle interazioni forti”. Come i processi elettromagnetici sono visibili come scambi di fotoni, quelli forti sono sostanzialmente regolati da scambi di gluoni. Tuttavia la situazione per i gluoni è molto più complicata, perchè al contrario dei fotoni non hanno carica nulla e possono quindi interagire tra loro, generando fenomeni che non hanno eguali nell’interazione elettromagnetica...
- [8] L’elettrodinamica quantistica (o QED dall’inglese Quantum Electrodynamics) è la teoria di campo che descrive l’interazione elettromagnetica. Essa è la prima delle teorie che descrivono interazioni fondamentali ad esser stata sviluppata e la maggior parte dei suoi aspetti sono stati sviscerati a fondo e ben compresi.
- [9] La grafite è composta da tanti strati bidimensionali di reticoli di atomi di carbonio tenuti insieme da legami deboli di Van Der Waals. Ognuno di questi strati è un foglio di grafene.