



KEEP CALM AND QUANTIZE GRAVITY!

HELIOS ARTICLE

Salvatore Samuele Sirletti
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Napoli Federico II

3 marzo 2020

1 La necessità di una Teoria del Tutto

Relatività Generale e Meccanica Quantistica, si sa, sono due sorelline che non vanno per niente d'accordo; anche una qualsiasi persona non addetta ai lavori, con un po' di interesse e un po' di scherno, può sempre chiedere al fisico di turno **“com'è possibile che due teorie fisiche, entrambe corrette nei loro campi di applicazione, non riescano a combaciare tra loro pur descrivendo insieme come funziona l'Universo?”**

Il fisico a questo punto risponderà “me lo domando anche io”.

Già... perché anche noi fisici ce lo domandiamo, alcuni di più, alcuni di meno, alcuni altri addirittura ne hanno fatto ragione di vita. Cos'è che non va bene? Davvero Relatività Generale e Meccanica Quantistica non possono andare d'accordo convergendo verso un'unica teoria che, come un grande seduto su una sedia a rotelle ha osato definire, sia una “Teoria del Tutto”? Per ora ci stiamo provando, a volte con risultati molto esaustivi che però aprono le porte a migliaia di altri problemi, a volte con tristi insuccessi. Possiamo porci una domanda un po' più profonda, un po' più alla base, gnoseologica insomma: “deve davvero esistere una teoria completa che unisca la Gravità alla Meccanica Quantistica?”.

Sì, deve. È facile capirlo con un ragionamento abbastanza semplice ma allo stesso tempo sottile: è risaputo, nonché dimostrato con evidenze sperimentali indirette, che il nostro Universo abbia avuto origine poco meno di 14 miliardi di anni fa da una singolarità, da un “grande scoppio”, che tutti chiamano Big Bang; benissimo, allora proviamo ad andare a ritroso nel tempo, cosa succede? Il nostro Universo man mano si fa sempre più piccolo; fermiamoci però ad una piccola frazione di un milionesimo di secondo dopo la grande esplosione, quando l'Universo era grande quanto una particella subatomica, o addirittura meno. Ecco, *“grande quanto una particella subatomica”*... ma a queste scale di grandezza qual è l'unica teoria fisica che riesce a spiegare con precisione come le cose funzionano? La Teoria Quantistica; dunque è allora necessario che a quelle scale l'Universo sia descritto dalle leggi che governano il microcosmo e, ancora, le leggi del macrocosmo descritte dalla Relatività Generale devono man mano convergere a quelle della Quantistica. Risultato: c'è necessità di quantizzare la Relatività Generale affinché possa valere anche in ambiente microcosmico e così spiegare più correttamente non solo come si è evoluto il nostro Universo, ma da cosa sia scaturito; da qui una teoria cosmologica basata su tali leggi, una Cosmologia Quantistica.

2 Un piccolo Toy Model

Qual è lo scoglio più grande da superare per una corretta quantizzazione della Gravità? Sono i due diversi formalismi matematici che risiedono alla base delle due teorie: la teoria dei quanti è una teoria basata su un approccio hamiltoniano dove fa da regina una funzione che è detta Hamiltoniana, la Relatività Generale invece risulta essere una teoria lagrangiana dove qui al contrario da padrona fa una funzione detta Lagrangiana. Descrizione lagrangiana e descrizione

hamiltoniana di uno stesso sistema possono essere correlate tra loro tramite una trasformazione detta di Legendre, ma il problema sorge proprio dal fatto che quando ci proviamo in questo campo si inciampa in un'enorme insieme di problemi che vanno discussi uno ad uno, e di certo non sono semplici; alcuni di essi, a dire il vero, risultano a priori irrisolvibili e quindi, per non rinunciare all'ambizioso scopo, gli scienziati cercano di aggirarli cercando risultati e giustificazioni alternative. Tralasciando tutte le complicazioni annesse non si è comunque all'inizio; siamo riusciti a creare diversi formalismi e diversi approcci che non solo riescono a quantizzare le equazioni della Gravità, ma ci permettono entro brevi limiti di creare anche dei modelli sulla nascita dell'Universo che risultano formulabili semplicemente e comprensibili anche da chi mastica solo un po' le due teorie principali. Ed è proprio di uno di questi modelli di cui voglio parlarvi in questo articolo, che risulta il più semplice modello sviluppabile ma anche il più affascinante; il lettore che invece poco mastica la teoria di fondo potrà comunque cogliere il significato intrinseco del modello al di là dei vari calcoli.

Nel **formulazione hamiltoniana della Gravità di Arnowitt-Deser-Misner (ADM)**, le famose equazioni di campo di Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1)$$

una volta quantizzate, assumono la forma di un'equazione di Schrödinger del tipo

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi = 0, \quad (2)$$

detta equazione di Wheeler-DeWitt, dove Ψ è una funzione d'onda descrivente il nostro Universo quindi appunto detta **funzione d'onda dell'Universo**. Il grande ostacolo matematico che permette di andare poco avanti in questo senso è il fatto che la Ψ in questo caso è una funzione appartenente ad uno spazio vettoriale infinito dimensionale detto **superspazio**, che è uno spazio formato da tutte le possibili metriche dello spazio-tempo, cioè, per dirla più semplicemente, da tutte le possibili distorsioni e forme che può assumere il continuum spazio temporale; di conseguenza l'hamiltoniana diventa una **superhamiltoniana**. Tra tutti i sottospazi del superspazio ve ne esisteranno infiniti a una sola dimensione, ed è il restringersi a questi **minisuperspazi** che rende possibile sviluppare i piccoli modellini cui si accenna sopra, chiamati scherzosamente dai fisici con il nome di **toy model**, nome non soltanto usato in questo ambito.

Passiamo ora all'idea principale del nostro modellino; come inteso premetteremo che il lettore abbia conoscenze di base delle due teorie per comprendere almeno il significato dei calcoli che accenneremo. Siamo nel vuoto più totale, cosa ha fatto nascere l'Universo improvvisamente dal nulla? Una spiegazione possibile la Teoria Quantistica dei Campi riesce a fornirla: nella Teoria Quantistica il vuoto vero, quello più totale, non esiste; nel vuoto esistono sempre delle fluttuazioni energetiche quantistiche che generalmente si manifestano generando coppie di particelle e antiparticelle che possono poi riannichilirsi o possono disaccoppiarsi andando ognuna verso il proprio destino; il vuoto quindi è uno stato che a dire il vero è di **falso vuoto**. Sempre in Teoria Quantistica, data la natura sia corpuscolare che ondulatoria della materia, è noto che possono avvenire fenomeni come l'**effetto tunnel**: una particella, impattante contro un muro (barriera di potenziale) ha una probabilità non nulla di attraversare il muro e propagarsi al di là di esso.

In Cosmologia Quantistica l'Universo emergente, è dunque visto tramite una funzione d'onda Ψ su un superspazio, questa è soggetta quindi ad una possibile spontanea comparsa dal nulla per via di fluttuazioni quantistiche e che può anche attraversare per effetto tunnel barriere di potenziale. Proprio qui vi è la base del Toy Model. Chiaramente in qualche modo dobbiamo ricavare tutto ciò da un modello cosmologico costruito con la Relatività Generale, quale è il **modello cosmologico standard Λ CDM** che composto dalle equazioni

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{k}{a^2} \\ \dot{\rho} = -\frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p) \\ \ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p) \end{cases}, \quad (3)$$

che non sono altro che le equazioni di campo (1) scritte in una forma particolare, dove a è il fattore di scala, in pratica quello che regola la dimensione dell'Universo. Supponiamo che $k = 1$ si ha un Universo con una geometria globalmente sferica e quindi il fattore di scala si comprende essere null'altro che il raggio stesso della sfera, dell'Universo; porsi in tale modello cosmologico, detto **Universo di Friedmann-Robertson-Lamaitre-Walker (FRLW)**, vuol dire fondamentalmente porsi quindi in un minisuperspazio di dimensione 1. L'equazione che regola l'evoluzione dell'Universo è chiaramente la prima, che è quella che ci interessa quantizzare. Secondo il ragionamento sulla densità di energia di falso vuoto allora avremo una $\rho = \rho_{vacuum}$ ed è possibile impostare la seguente equazione di stato

$$p(\rho) = -\rho_{vacuum}. \quad (4)$$

In tale modello cosmologico quindi l'equazione che ci interessa è

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho_{vac} - \frac{1}{a^2}, \quad (5)$$

che è quella da quantizzare. Nel nostro Toy Model scegliamo come tipologia di quantizzazione quella canonica, ovvero quella che associa a posizioni e impulsi i seguenti operatori

$$p_a \rightarrow \hat{p}_a = -i\frac{\partial}{\partial a} \quad e \quad a \rightarrow \hat{a} = a\mathbb{1}, \quad (6)$$

e così con un po' di calcoli matematici si perviene alla seguente formula

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 a^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right)\right]\psi(a) = 0 \iff \hat{\mathcal{H}}\Psi(a) = 0; \quad (7)$$

tale è appunto l'**equazione di Wheeler-DeWitt** nel caso particolare di Universo FRW a $k = 1$. L'equazione di Wheeler-DeWitt trovata è del tutto analoga ad un'equazione di Schrödinger monodimensionale di una particella che si muove nello spazio a , avente massa $\frac{1}{2}$ dell'unità¹ che ha energia nulla (a meno di fluttuazioni) ed è soggetta ad un'energia potenziale della forma:

$$\mathcal{U}(a) = \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 a^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right), \quad (8)$$

e tale è proprio una barriera di potenziale curva tra $a = 0$ e $a = a_0$. È possibile quindi fare la seguente supposizione: l'Universo ha avuto origine da una fluttuazione di falso vuoto e si è propagato per effetto tunnel attraverso la barriera di potenziale assumendo istantaneamente un raggio di a_0 per poi continuare ad espandersi man mano tale che le leggi della Meccanica Quantistica sono sfociate nel limite classico. Nella figura è rappresentata la funzione d'onda di tunneling che è una delle proposte della forma d'onda dell'Universo.

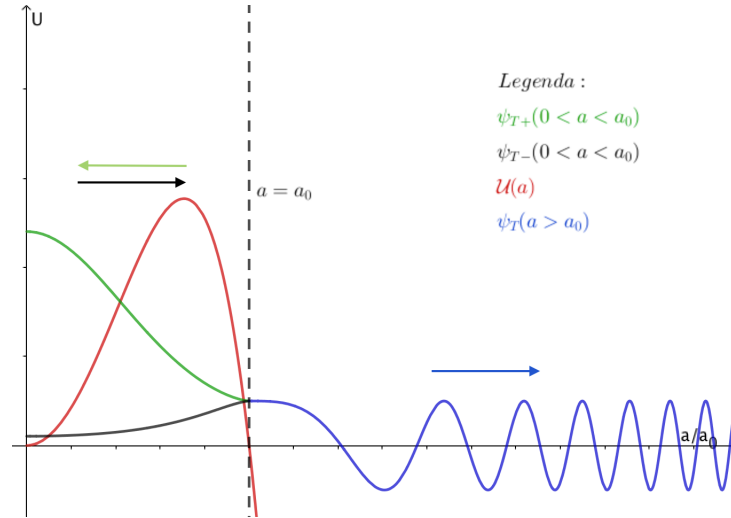


Figura 1: Andamenti della funzione d'onda di tunneling. Nella regione $0 < a < a_0$ ha componente progressiva e regressiva, rispettivamente indicate con ψ_{T-} e ψ_{T+} ; nella regione $a > a_0$ abbiamo impostato che abbia solo componente progressiva.

3 L'interpretazione a molti mondi della Meccanica Quantistica

In questo contesto un primo problema che sorge spontaneo riguarda l'interpretazione che si dà alla Meccanica Quantistica. Nella Teoria Quantistica ordinaria si distingue l'**osservatore** dall'**osservabile**; un sistema quantistico si trova solitamente in una sovrapposizione di stati ognuno con una certa probabilità e, a seguito di una misura da parte di un osservatore classico che interagisce con il sistema quantistico, si ha un collasso della Ψ in uno solo degli stati possibili e qualsiasi altra misura continuerà a fornire lo stesso risultato; tale è quella che va sotto il nome di **interpretazione**

¹Infatti si noti come non compare $2m$ come nell'equazione di Schrödinger.

di Copenaghen. Il problema dell'interpretazione in Cosmologia Quantistica diventa dunque un problema di fondo primario: se il nostro sistema quantistico risulta essere l'intero Universo, come può essere concepibile un sistema esterno all'Universo che eventualmente potrebbe effettuare delle misure fisiche? Si necessita dunque di un'altra interpretazione della Meccanica Quantistica che possa accettare che l'osservatore non sia esterno al sistema ma che faccia parte del sistema stesso. Molti scienziati al giorno d'oggi credono che l'interpretazione da dare in questo caso è l'**interpretazione a molti mondi di Hugh Everett**: l'osservatore, nel suo compiere le misure, non determina univocamente una sola realtà fisica, bensì fa scindere l'Universo in diversi (Multi-)Universi dove in ognuno dei quali vi è come risultato uno dei possibili che può restituire la misura. Un esempio banale può essere fatto con il paradosso del gatto di Schrödinger: nell'interpretazione ordinaria il gatto è chiuso in una scatola e il suo stato quantistico è uno stato del tipo

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{vivo} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{morto}, \quad (9)$$

l'osservatore, aprendo la scatola determina poi quale sia lo stato effettivo del gatto, se esso è vivo o è morto; secondo invece l'interpretazione a molti mondi qui l'osservatore, nell'atto di apertura della scatola, fa scindere l'Universo in due distinti dove in uno il risultato della misura è che il gatto è vivo, nell'altro che il gatto è morto. In tale ultima interpretazione l'osservatore non è esterno al sistema ma fa esso stesso parte di questo e ed evolvono modificandosi assieme. Anche se per anni bistrattata data la sua formulazione che a prima vista appare fantascientifica, tale interpretazione è stata ripresa da molti studiosi; si è dimostrato inoltre come le due interpretazioni, nel limite di un Universo molto grande, possono essere confrontabili e quindi coincidenti.



Figura 2: *Rappresentazione artistica dell'interpretazione a molti mondi.*

4 Conclusioni

In questo breve articolo si sono volute esporre le idee più basilari, ma allo stesso tempo anche più affascinanti, della Gravità Quantistica, in particolare della Cosmologia Quantistica che tenta, evitando la singolarità iniziale data dalle equazioni della Relatività Generale, di fornire una spiegazione in termini quantistici della nascita del nostro Universo. Ovviamente la teoria è molto più avanzata del toy model esposto, ma quest'ultimo risulta non solo un modellino relativamente semplice da sviluppare, ma che possiede la maggior parte delle idee alla base della teoria e inoltre si presta molto bene a possibili estensioni. Nonostante le difficoltà radicate nella teoria, che scalfiscono la base della fisica contemporanea, la Gravità Quantistica è una teoria che risulta tra le più approfondite e studiate in epoca moderna, riflessione del sogno segreto di ogni fisico teorico di ottenere una sola e unica equazione fondamentale che riesca a descrivere tutta la fisica. Al lettore interessato agli argomenti esposti non resta che augurargli un bel *Keep calm and quantize Gravity!*

Riferimenti bibliografici

- [1] Un'introduzione alla Cosmologia Quantistica: risultati e prospettive.
http://www.fisica.unina.it/documents/12375590/13725484/2767_SirlettiSS_22-11-2018.pdf/02f149a4-7724-4825-8f78-2c08ae5bea93